Problema de cuatro cuerpos

Maniobra espacial para evitar la colisión de un meteorito de tipo extinción por explosión nuclear

Javier López Miras
https://github.com/jlopezmiras

Grupo A

Física Computacional

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Grado en Física
28 de junio de 2022

Índice

Resumen

En este trabajo se estudia una posibilidad para evitar la colisión de un meteorito sobre la Tierra con la técnica de explosión nuclear. Se resuelve numéricamente el problema gravitatorio de cuatro cuerpos para simular la llegada del meteorito y la trayectoria que ha de seguir la nave para aterrizar sobre él y detonar una cabeza nuclear, dividiendo el asteroide en dos. Se estudian las órbitas de los trozos tras la explosión, analizando la energía necesaria de la detonación para que ninguno llegue a caer sobre la Tierra.

1. Introducción

Desde los inicios, la humanidad se ha sentido atraída por las catástrofes naturales, con especial interés en aquellas capaces de exterminar la vida tal y como la conocemos. Entre ellas, la caída de un meteorito colosal sobre la Tierra es un tema recurrente en elucubraciones sobre el fin de la especie humana, más aún desde que es sabido que hace 66 millones de años fue el culpable de la extinción de casi la totalidad de las especies de dinosaurios y de un gran porcentaje de la vida terrestre.

Dejando de lado la ciencia ficción, lo cierto es que la caída de un meteorito sobre la Tierra es un evento improbable, pero posible y amenazante. Es por ello que agencias en todo el mundo como la NASA tengan diseñados protocolos de actuación para poder evitar una posible colisión, utilizando técnicas como de tracción de gravedad, de impacto cinético o de explosión nuclear.[1] Este último método será el que se ponga a prueba en una situación ficticia en una simulación computacional, en la que un meteorito cae sobre la Tierra y es necesario enviar una nave que aterrice sobre el asteroide y lo detone, dividiéndolo en dos. Para ello, se estudia una posible maniobra que consiga tales objetivos y se rastrea la trayectoria de los trozos tras la explosión, calculando la energía mínima necesaria para el éxito de la misión y la viabilidad de la misma en términos de recursos tecnológicos.

2. Fundamento teórico

2.1. Ecuaciones del movimiento

Se considerará un problema de cuatro cuerpos sujetos a interacciones gravitatorias entre ellos: la Tierra, la Luna, el meteorito y la nave, con masas M_T, M_L, m_{met} y m, respectivamente. Las masas de la Tierra y de la Luna son $M_T = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg y $M_L = 0{,}07349 \cdot 10^{24}$ kg. El meteorito tiene una densidad de 2,08 g/cm^3 y un radio de 10 km, lo que equivale a una masa de $8{,}7127 \cdot 10^{15}$ kg.

Para simplificar los cálculos y reducir el gasto en recursos computacionales, dada la pequeña excentricidad de la órbita lunar ($\varepsilon = 0{,}05$), supondremos que la Luna gira en una órbita circular con velocidad angular ω alrededor de la Tierra, siendo esta su única influencia gravitatoria. Igualmente, dada la lejanía entre la luna y el meteorito, este solo se verá atraído por la gravedad terrestre. Por último, en el movimiento de la nave se tendrán en cuenta las interacciones con los otros tres cuerpos.

Si situamos la Tierra en el origen, la trayectoria de la Luna será

$$x_L(t) = d_{TL} \cos(\phi_{L_0} + \omega t), \qquad y_L(t) = d_{TL} \sin(\phi_{L_0} + \omega t),$$

siendo $d_{TL} = 3{,}844 \cdot 10^8$ m la distancia Tierra-Luna, $\omega = 2{,}6617 \cdot 10^{-6}$rad/s su velocidad angular y ϕ_{L_0} el ángulo que forma con el eje X (eje horizontal) en $t = 0$, que será un parámetro inicial a imponer en la simulación.

Por otro lado, el meteorito tendrá una velocidad inicial de 5000 m/s en dirección radial. Lo situaremos en el eje Y (eje vertical) y a una distancia de la Tierra de $10d_{TL}$. Las ecuaciones del movimiento son

$$x_{met}(t) = 0, \qquad \ddot{y}_{met}(t) = -\frac{GM_T}{y_{met}^2}$$

Para hallar las ecuaciones del movimiento de la nave recurrimos al formalismo de Hamilton. El hamiltoniano de la nave en coordenadas polares (r, ϕ) vendrá dado por la siguiente expresión:

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r^2} - \frac{GmM_L}{r_L^2} - \frac{Gm_{met}m}{r_{met}^2}$$

donde las distancias a la Luna y al meteorito se podrán calcular como

$$r_L^2 = r^2 + d_{TL}^2 - 2rd_{TL}\cos(\phi - \phi_{L_0} - \omega t)$$
$$r_{met}^2 = r^2 + d_{TM}^2 - 2rd_{TL}\sin\phi$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento de Hamilton para la nave quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\
\dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2} \\
\dot{p}_r &= \frac{p_\phi}{mr^3} - \frac{GmM_T}{r^2} - \frac{GmM_L}{r_L^3}[r - d_{TL}\cos(\phi - \phi_{L_0} - \omega t)] - \frac{Gm_{met}m}{r_{met}^3}(r - d_{TM}\sin\phi) \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{GmM_L}{r_L^3} r d_{TL}\sin(\phi - \phi_{L_0} - \omega t) + \frac{Gm_{met}m}{r_{met}^3} r d_{TM}\cos\phi
\end{aligned}$$

La resolución numérica de estas ecuaciones (junto con las del meteorito) nos permitirá conocer la trayectoria que seguirá la nave dadas las condiciones iniciales de posición (r_0, ϕ_0) y momento (p_{r_0}, p_{ϕ_0}).

2.2. Condiciones iniciales y trayectoria de la nave

Las condiciones iniciales de la nave determinarán la trayectoria que seguirá para aproximarse al meteorito. Aunque se puede corregir el rumbo mediante impulsos de los motores a lo largo de la misión, lo ideal es que sean necesarios la menor cantidad de impulsos posibles para un menor gasto energético. Los impulsos serán instantáneos y de igual magnitud (siempre proporcionarán la misma variación de cantidad de movimiento, Δp), aunque la dirección en la que se proporcionan, i.e., la dirección del impulso, puede elegirse libremente.

La nave se lanzará desde algún punto de la superficie del planeta Tierra, luego $r_0 = R_T$, mientras que el ángulo ϕ_0 desde el que se lanza queda como parámetro libre. La velocidad en módulo, v, que se le impartirá a la nave también podrá ser elegida, así como su dirección inicial θ (con respecto al eje X). De esta forma, las condiciones iniciales para el vector momento lineal son

$$p_{r_0} = mv\cos(\theta - \phi_0), \qquad p_{\phi_0} = mR_T v \sin(\theta - \phi_0)$$

A lo largo de toda la simulación se requerirán tanto las componentes cartesianas como las polares planas de la posición y del momento lineal. Se muestran a continuación las expresiones para el cambio de coordenadas del momento lineal:

$$\begin{cases} p_r &= \dfrac{xp_x - yp_y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\[2ex] p_\phi &= \dfrac{xp_y - yp_x}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_x &= p_r\cos\phi - \dfrac{p_\phi}{r}\sin\phi \\[2ex] p_\phi &= p_r\sin\phi + \dfrac{p_\phi}{r}\cos\phi \end{cases}$$

Hay muchas maniobras posibles para el acercamiento de la nave al meteorito utilizando la luna como elemento necesario. Entre ellas destaca el uso de órbitas circulares a la Tierra y a la Luna y órbitas de transferencia de Hohmann. No obstante, el meteorito se encuentra tan próximo a la Tierra que se buscará una trayectoria inmediata que simplemente utilice la Luna como elemento para modificar su trayectoria y dirigirse hacia el meteorito. Los pasos a realizar se detallan a continuación:

1. Una aproximación rápida a la Luna. Para ello la velocidad v será cercana a la velocidad de escape (del orden de 10000 m/s) y tanto el ángulo de lanzamiento como el punto de la Tierra del que se lanza, cercanos al ángulo que forma Luna con el eje X ($\phi_0 \approx \theta \approx \phi_{L_0}$).

2. Cuando la nave esté suficientemente cerca de la Luna (esto es, dentro de su esfera de influencia gravitacional), se encenderán los motores para modificar su trayectoria. En definitiva, se aprovechará el "tirón gravitacional" de la Luna para establecer una trayectoria hacia el meteorito.

3. Se encenderán los motores de nuevo cuando la nave se encuentre cerca del meteorito, con la finalidad de conseguir un acercamiento y un aterrizaje sobre el mismo. Esto se producirá cuando la nave se encuentre a 10 km del centro del meteorito (el radio del mismo).

2.3. Detonación del meteorito

En el instante en el que la misión aterrice sobre el meteorito se producirá la explosión de la cabeza nuclear, que lo dividirá en dos trozos de igual masa. Toda la energía de la explosión se invertirá en dotar a los trozos de una velocidad perpendicular $v_\perp$ a la trayectoria, de forma que se pueda evitar una posterior colisión con la Tierra.

Estudiemos en mayor profundidad la órbita que seguirá cada trozo. En la simulación se considerará la influencia de la Luna sobre los dos cuerpos, pero esta será leve comparada con la de la Tierra, de modo que en el análisis teórico solo consideraremos la fuerza gravitatoria terrestre. Primero, cabe notar que la energía total del meteorito antes de la explosión es positiva ($E > 0$), de forma que cualquier trayectoria futura seguirá una órbita no ligada de excentricidad superior a 1, i.e., una hipérbola (y más aún al aumentar su velocidad tras la explosión). En efecto, tomando el instante inicial, la energía del meteorito es

$$E = \frac{1}{2} m_{met} v_0^2 - \frac{G M_T m_{met}}{r_0} = 1{,}08 \cdot 10^{23} \text{ J} > 0$$

Supongamos que la explosión tiene lugar a una distancia r_e de la Tierra. En ese momento se le impartirá a cada trozo, además de la velocidad radial $v_{e_\parallel}$ que llevaba el meteorito, una velocidad perpendicular $v_{e_\perp}$ adicional. De esta forma, aparte de una energía cinética extra, se dota a los trozos de un momento angular $p_\phi = m_{met} r_e v_{e_\perp}$, y la trayectoria será una hipérbola con foco en la Tierra. Se puede estimar pues, cuál es la distancia mínima a la Tierra, que se dará en el vértice de la hipérbola, donde la velocidad es perpendicular a la trayectoria. Estableciendo las ecuaciones de conservación de la energía y del momento angular entre el punto de la explosión y el punto de mayor acercamiento a la Tierra, se tiene:

$$\frac{1}{2}(v_{e_\parallel}^2 + v_{e_\perp}^2) - \frac{G M_T}{r_e} = \frac{1}{2} v_{min}^2 - \frac{G M_T}{r_{min}}$$
$$r_e v_{e_\perp} = r_{min} v_{min}$$

De esta forma, dada la velocidad impartida por la explosión se puede conocer a qué distancia de la Tierra pasan los trozos de meteorito. Inversamente, también es posible conocer la velocidad mínima necesaria dada la distancia mínima requerida con la Tierra.

$$v_{e_\perp}^2 = v_{e_\parallel}^2 \frac{r_{min}^2}{r_{min}^2 - r_e^2} + 2 G M_T \frac{r_{min}}{r_e (r_{min} + r_e)} \tag{1}$$

2.4. Método numérico

Para resolver las ecuaciones del movimiento se recurrirá al algoritmo de Runge-Kutta de orden 4. Antes que nada, es práctica común hacer un reescalado de las variables del problema para así trabajar con valores de magnitudes similares y reducir los errores de redondeo computacionales. Para ello, se realizarán los siguientes reescalados: $\tilde{r} = r/d_{TL}$, $\tilde{p}_r = p_r/(m d_{TL})$ y $\tilde{p}_\phi = p_\phi/(m d_{TL}^2)$.

De esta forma, no es necesario conocer la masa de la nave para calcular su trayectoria con las ecuaciones del movimiento. Además, puesto que la aceleración de la nave depende de la distancia entre la nave y el meteorito y esta a su vez depende del tiempo, hay que resolver las ecuaciones de los dos cuerpos simultáneamente.

Para la resolución numérica de las ecuaciones es necesario dar un paso temporal h. Para la simulación se tomará $h = 1$ s, de forma que todos los tiempos vendrán dados en segundos.

3. Resultados

Se procedió a realizar la simulación buscando la trayectoria comentada en el apartado anterior. La luna se dispuso inicialmente a 45° con respecto al eje X y el meteorito a 90°, con una distancia de 10 veces la distancia Tierra-Luna y una velocidad (radial) de 5000 m/s. La nave se lanzó desde un punto de la Tierra situado a un ángulo $\phi_0 = \pi/4 - 0{,}0099983 \approx 44{,}427°$, con un ángulo de $\theta = \pi/4 + 0{,}025 \approx 46{,}432°$ y una velocidad de $v_0 = 11400$ m/s.

Se diseñaron los motores de la misión de tal forma que el impulso instantáneo fuera de $\Delta\tilde{p} = 2{,}28 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$, lo que equivale a un cambio en la velocidad de $\Delta v \approx 876{,}43$ m/s.

En el instante $t = 19637$ s $\approx$ 5h 27′ 17″ se produce un acercamiento a la Luna de $r_L = 1922$ km. En este momento, se encienden los motores, propulsando la nave con un ángulo de $-1{,}055$ rad $\approx -60{,}45°$. De esta forma se ralentiza la nave, transformando el recorrido inicial en una trayectoria más cerrada con dirección hacia el meteorito.

Con los parámetros vistos anteriormente, la nave seguirá una ruta que la acercará al meteorito sin necesidad de encender los motores. En el instante $t = 101900$ s $\approx$ 28h 18′ 20″, la distancia al meteorito será de tan solo 834,57 km. En este momento es preciso corregir la trayectoria para acercarse a la superficie del meteorito, consiguiendo que la nave obtenga una velocidad similar al mismo. Para ello, es necesario que los motores se mantengan encendidos durante 7 segundos, hasta $t = 101906$ s, aportando el equivalente a 7 impulsos instantáneos y con un ángulo de $-90°$ en todos ellos salvo en el último, que será de $(-\pi/2 + 0{,}03)$ rad $\approx -88{,}28°$. Tras ello, exactamente 471 s después, la nave logrará aterrizar sobre el meteorito, esto es, encontrarse a una distancia de 10 km de su centro. El aterrizaje lo realiza con una velocidad relativa de 328,6 m/s. Si los motores pudieran proporcionar un impulso distinto al proporcionado (quizás añadiendo otro motor), tan solo haría falta encender este motor en $t = 102376$ s, logrando un aterrizaje con velocidad relativa prácticamente nula. Aún así, la velocidad de aterrizaje obtenida supone tan solo un 6.45 % de la velocidad del meteorito en ese instante.

La misión tarda en llegar al meteorito un total de 28,438 h (28h 26′ 17″), y el aterrizaje se realiza a una distancia Tierra-meteorito de $1{,}977 d_{TL} \approx 759797{,}16$ km. El gasto total en el acercamiento se ha calculado teniendo en cuenta los cambios de velocidad en cada impulso, de forma que cada encendido de los motores supone un gasto energético $\Delta E = \frac{1}{2} m \left[(v + \Delta v)^2 - v^2 \right] = \frac{1}{2} m \Delta v (2v + \Delta v)$, que se suma al acumulado en valor absoluto. Siendo desconocida la masa de la nave, el gasto energético por kg total de la misión es de $E = 82{,}66$ MJ/kg.

Una vez que la nave ha aterrizado en el meteorito, se produce la detonación de la cabeza nuclear, dividiendo al meteorito en dos trozos iguales e impartiéndoles una velocidad perpendicular $v_{e_\perp}$. Tal y como se describió en el apartado de Fundamentos teóricos, independientemente de la energía de la explosión, los trozos seguirán trayectorias hiperbólicas no ligadas —salvo posibles colisiones con la Tierra—. Además, es posible encontrar una relación entre la velocidad impartida por la explosión y la distancia de máximo acercamiento al planeta, utilizando la Ecuación (1) y sabiendo que la distancia a la que se produce la explosión es $r_e = 1{,}977 d_{TL}$. Además, en la simulación la velocidad radial del meteorito en ese instante es de $v_{e_\parallel} = 5083{,}45$ m/s.

Podemos poner unos ejemplos de distancias mínima a la Tierra para estimar las energías de explosión necesarias:[2]

- A la superficie terrestre. El radio de la Tierra es de 6370 km, luego la velocidad perpendicular impartida por la explosión necesaria es de $v_{e_\perp} = 102{,}647$ m/s. Esta velocidad impartida a los dos trozos de meteorito (cada uno con la mitad de masa del meteorito original) equivaldría a una explosión de $5{,}49 \cdot 10^{19}$ J, es decir, de 10,97 Gt (gigatones).[3]

- A la distancia donde acaba la atmósfera. El fin de la atmósfera (entendido como el fin de la exosfera) tiene lugar a 10000 km de altura, luego a 16370 km del centro de la Tierra. Esto precisaría de una velocidad de $v_{e_\perp} = 184{,}719$ m/s, lo que supone una explosión de $1{,}486 \cdot 10^{20}$ J, es decir, de 35,53 Gt.

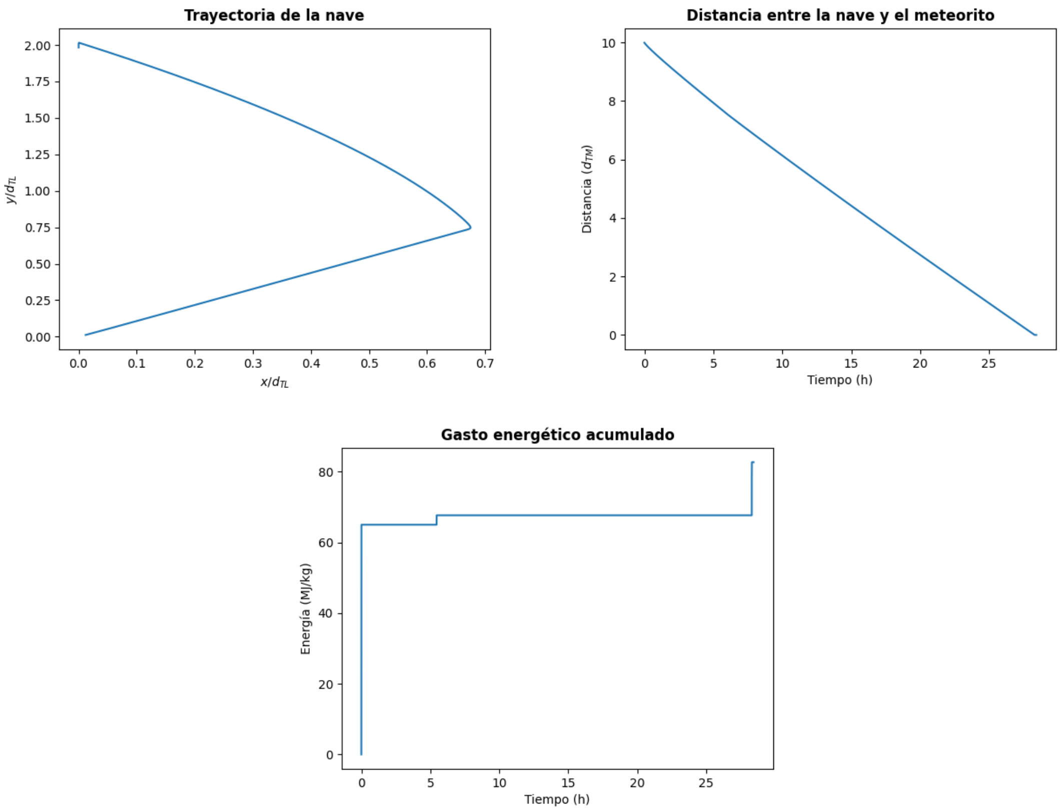

Figura 1: Distintos parámetros en la maniobra de acercamiento de la nave al meteorito.

- A la distancia donde orbitan los últimos satélites artificiales (órbita alta terrestre). Los satélites que orbitan más lejos de la superficie terrestre son, generalmente, los geocéntricos, que lo hacen a 42370 km del centro de la Tierra. Esta distancia indicaría una velocidad perpendicular de $v_{e_\perp} = 368{,}792$ m/s. Esta velocidad supone una explosión de $5{,}4925 \cdot 10^{20}$ J, es decir, de 141,61 Gt.

- A la distancia Tierra-Luna. Si se quisiera que los trozos no se acercaran a la Tierra más que la distancia de la órbita lunar (384400 km) la velocidad necesaria sería de $v_{e_\perp} = 3040{,}09$ m/s, lo que implicaría una explosión de 9622,85 Gt.

Se puede observar que, teóricamente, las energías necesarias para que los trozos no chocasen tras el detonado son inviables, teniendo en cuenta que la cabeza nuclear fabricada de mayor potencia es de 50 Mt.[4] Hasta para desviar los trozos de forma que apenas rozasen la superficie terrestre se necesitarían del orden de 11000 cabezas nucleares iguales.

Ahora, veamos si los resultados teóricos están apoyados por la simulación. En primer lugar se vio que, efectivamente, independientemente de la velocidad perpendicular impartida en la explosión, las trayectorias seguidas por ambos trozos es hiperbólica (ver Figura 2). Además, introduciendo cada una de las velocidades calculadas para los ejemplos anteriores, se obtuvieron las distancias mínimas esperadas, tal y como se puede observar en las gráficas. Por tanto, la simulación sostiene los resultados predichos teóricamente, así como la suposición de que la Luna apenas afecta a la trayectoria de los trozos (esto se apreciaría en una desviación importante en el recorrido de ambos trozos).

Es claro entonces que la maniobra elegida para evitar la colisión del meteorito no es

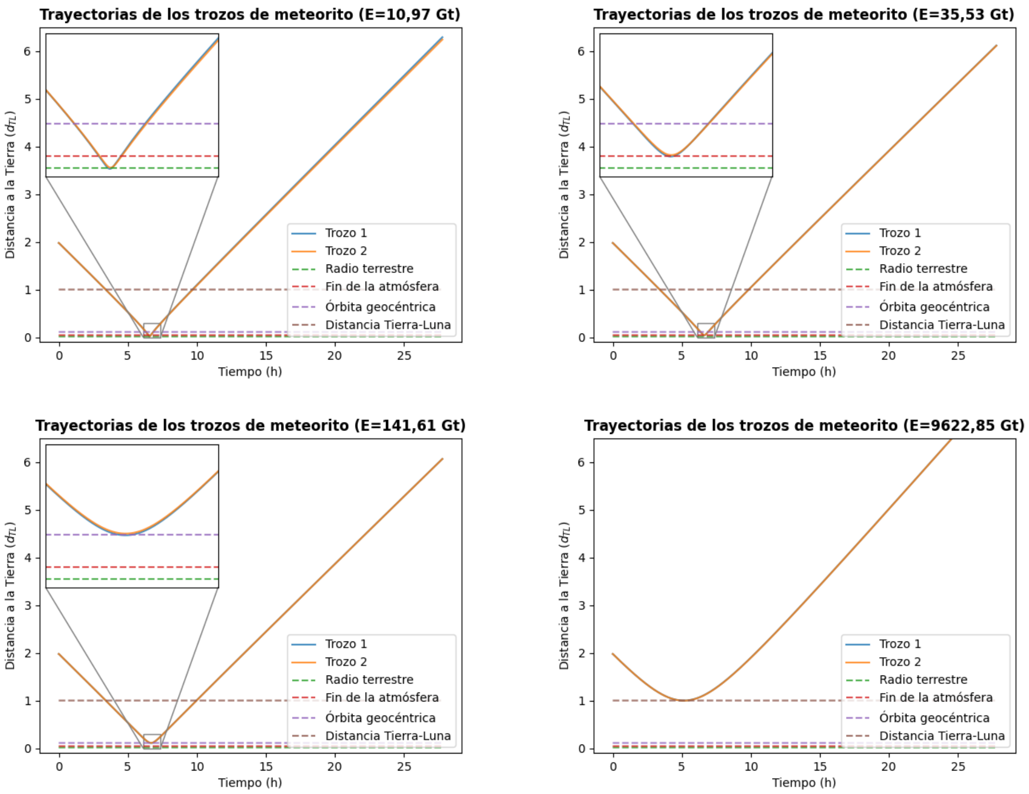

Figura 2: Seguimiento de las trayectorias de los trozos de meteorito tras la explosión para distintas potencias de detonación.

adecuada. Sin embargo, las opciones que restan no son mucho más asequibles. La trayectoria de la misión aquí presentada tiene como incoveniente que utiliza la Luna para modificar su rumbo decreciendo su velocidad, lo que hace que tarde mucho en impactar con el meteorito, y lo haga a una distancia muy próxima a la Tierra. En consecuencia, la energía necesaria en la explosión es muy grande. Por otro lado, como ventaja, el frenado de la nave permite que los impulsos para lograr el aterrizaje sobre el meteorito sean mínimos, ahorrando gastos energéticos en el trayecto de la nave.

Otra posible maniobra consistiría en aprovechar el “tirón gravitatorio lunar” con una gran velocidad de la nave, de forma que esta colisionara con el meteorito mucho antes y más lejos de la Tierra. La energía necesaria en la explosión sería bastante menor, pero el gasto energético de los motores, considerablemente superior. Aún así, si suponemos que, como caso límite, la nave llegara al meteorito cuando este se encuentra a la distancia de $10d_{TL}$, la potencia necesaria para el misil sigue siendo enorme. Realizando los cálculos anteriores, con la explosión ocurriendo a distancia $r_e = 10d_{TL}$ y el meteorito cayendo a velocidad $v_{e_\parallel} = 5000$ m/s, la velocidad a impartir a cada trozo de meteorito para que estos rocen la superficie terrestre ($r_{min} = R_T$) es de $v_{e_\perp} = 20{,}288$ m/s. La energía liberada por la detonación tendría que ser de $1{,}793 \cdot 10^{18}$ J, o 428,57 Mt. Si bien esta cantidad es 25 veces menor que la calculada para la maniobra propuesta, sigue siendo una detonación inviable con la tecnología actual, además de los enormes riesgos que se asumirían al desviar los trozos a tan poca distancia.

4. Conclusiones

En esta simulación se ha utilizado el algoritmo de Runge-Kutta para resolver un problema de cuatro cuerpos sujetos a interacciones gravitatorias. En concreto, se ha supuesto una situación propia de las novelas de ciencia ficción en la que un meteorito de tipo extinción cae sobre la Tierra, siendo necesario lanzar un cohete para explotar el meteorito y evitar la colisión. Además, se aprovecha la Luna para guiar la maniobra hacia el meteorito. Se consiguió una maniobra que cumpliera todos los requisitos para un aterrizaje correcto, proporcionándose todos los datos necesarios para su ejecución.

Tras el aterrizaje se procedió con la detonación del misil incluido con la nave para dividir al meteorito en dos. Se vio además que, independientemente de la velocidad perpendicular impartida por la explosión, las trayectorias de los trozos serían en cualquier caso no ligadas, escapando de la órbita terrestre. En el estudio de las relaciones teóricas entre la energía de la explosión y la distancia de máximo acercamiento a la Tierra, resultó que la energía necesaria incluso para desviar los trozos simplemente una distancia igual al radio de la Tierra presenta un problema inabordable hoy por hoy, siendo esta la equivalente a 11000 detonadores iguales a la bomba del Zar (la bomba de mayor potencia lanzada). Todos los resultados, tanto de trayectoria como de energías necesarias, se vieron corroborados por la simulación computacional.

La simulación de esta situación ficticia propuesta muestra que sería prácticamente imposible evitar la colisión con este método, pues las energías de detonación necesarias superan las capacidades tecnológicas en bombas actuales. También es cierto que el lanzamiento de la nave se produce demasiado tarde, con el meteorito estando solo a unos pocos millones de kilómetros de la Tierra. En caso de amenaza real, esta se detectaría mucho antes y se trataría de desviar el asteroide con mucha más antelación (se estima que se necesitaría de 5 a 10 años previos al impacto). Sin duda, podemos concluir que este tipo de simulaciones ayudarían enormemente al desarrollo y la evaluación de maniobras en caso de que un meteorito de tipo extinción aceche sobre la Tierra.

Referencias

[1] T. Talbert, *Did you know...* NASA. Planetary Defense Coordination Office, 2021. Recuperado de: `https://www.nasa.gov/planetarydefense/did-you-know`.

[2] Wikipedia contributors, "Órbitas de satélites artificiales — Wikipedia, la enciclopedia libre." `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%93rbitas_de_sat%C3%A9lites_artificiales&oldid=141495664`, 2022.

[3] A. T. y Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI): Appendix B8—Factors for Units Listed Alphabetically.* National Institute of Standards and Technology NIST, U.S. Department of Commerce, supersedes nist special publication 811 ed., 2008.

[4] Wikipedia contributors, "Bomba del zar — Wikipedia, la enciclopedia libre." `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Bomba_del_Zar&oldid=142846075`, 2022.

[5] Wikipedia contributors, "Asteroid impact avoidance — Wikipedia, the free encyclopedia." `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Asteroid_impact_avoidance&oldid=1094339830`, 2022.

[6] J. R. Taylor, *Mecánica Clásica*, Capítulo 8. Problemas de fuerzas centrales para dos cuerpos. Editorial Reverté, 2022.