Computación numérica
Laboratorio n° 5

J. L. López[a]

[a]*Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Católica del Maule, Talca - Chile.*

Abstract

En este laboratorio trabajaremos en la resolucion de sistemas de ecuaciones lineales del tipo $Ax = b$. Para este caso, se emplea el método es conocido como Gauss, Gauus con pivoteo parcial y el Método de Thomas. Estos métodos aprovecha la estructura de la matriz de coeficientes A) para luego resolver el sistema. Así mismo, se emplearán los conceptos y definiciones de condicionamiento y estimación del error en la solución

Keywords: Iteraciones, ecuaciones no lineales, número de condición, pivoteo.

---

1. Introducción

El método de eliminación de Gaussiana se basa en el trabajo que implica una combinación de ecuaciones para eliminar las incógnitas. Aunque éste es uno de los métodos más antiguos para resolver ecuaciones lineales simultáneas, continúa siendo uno de los algoritmos de mayor importancia, y es la base para resolver ecuaciones lineales en muchos paquetes de software populares.

En el caso de trabajar con tres ecuaciones simultáneas, cada ecuación se representa como un plano en un sistema de coordenadas tridimensional. El punto en donde se intersecan los tres planos representa la solución. Para más de tres incógnitas, los métodos gráficos no funcionan y, por consiguiente, tienen poco valor práctico para resolver ecuaciones simultáneas.

Existen casos en que es imposible determinar las soluciones debido a que las ecuaciones a resolver son paralelas o coinciden. Se dice que estos tipos de ecuaciones forman los denominados sistemas singulares. Además, los sistemas muy próximos a ser singulares también pueden causar problemas; a estos sistemas se les llama mal condicionados. Gráficamente, esto corresponde al hecho de que resulta difícil identificar el punto exacto donde las líneas se intersecan. Los sistemas mal condicionados presentan problemas cuando se encuentran durante la solución numérica de ecuaciones lineales, lo cual se debe a que este tipo de sistemas son extremadamente sensibles a los errores de redondeo.

En el laboratorio anterior y este se trabajarán las técnicas sistemáticas para la eliminación hacia adelante y la sustitución hacia atrás, conocido como sustitución progresiva, y que la

---

Email address: `jlopez@ucm.cl` (J. L. López)

eliminación gaussiana comprende. Aunque tales técnicas son muy adecuadas para utilizarlas en computadoras, se requiere de algunas modificaciones para obtener un algoritmo confiable. En particular, el programa debe evitar la división entre cero. Para evitar la división entre cero, se utiliza la técnica conocida como pivoteo.

2. Sistemas mal condicionados

Lo adecuado de una solución depende de la condición del sistema. Los sistemas bien condicionados son aquellos en los que un pequeño cambio en uno o más coeficientes provoca un cambio similarmente pequeño en la solución. Los sistemas mal condicionados son aquellos en donde pequeños cambios en los coeficientes generan grandes cambios en la solución. Otra interpretación del mal condicionamiento es que un amplio rango de resultados puede satisfacer las ecuaciones en forma aproximada. Debido a que los errores de redondeo llegan a provocar pequeños cambios en los coeficientes, estos cambios artificiales pueden generar grandes errores en la solución de sistemas mal condicionados.

$$\frac{|x - x'|}{|x'|} \leq \text{Cond(A)} \frac{|\text{A} - \text{A'}|}{|\text{A}|} \tag{1}$$

$$|e_x| \leq \text{Cond(A)} * |e_A| \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) anteriores proporcionan un límite para el error relativo de la solución.

2.1. Actividades

Como se vio en clases, la aplicación de los diferentes métodos disponibles para resolver sistemas de ecuaciones lineales depende principalmente de la configuración de A en el sistema $Ax = b$. En esta ocasión evaluaremos los tiempos requeridos para determinar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales bajo la aplicación de los diferentes métodos estudiados.

Para registrar el tiempo real de ejecución de un proceso se puede usar la función **clock()** de la librería **“time”**.

$\gg$ from time import*
$\gg$ $\text{t}_1 = \text{clock}(); \ldots\ldots \textit{proceso}\ldots..; t_2 = \text{clock}(); print(t_2 - t_1)$

Realice las siguientes actividades:
1.- Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A y b están definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & 0.3 & 2.4 & 6.2 \\ 7.7 & 0.4 & 4.7 & 1.4 \\ 5.1 & 9.9 & 9.5 & 1.5 \\ 6.0 & 7.0 & 8.5 & 4.8 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 5.0 \\ 8.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

- Resuelva el sistema de ecuaciones mediante los algoritmos de Gauss y Gauss con pivoteo, determinando los tiempos de ejecución para cada uno de los casos.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante numpy. Utilice el cálculo de la matriz inversa.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales de forma directa mediante numpy. Utilice el método "solve" para el cálculo de las soluciones.

2.- Calcule la norma, determinante y número de condición de las matrices y analice los resultados. Considere los siguientes valores para A y b:

$$A = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.005 \\ 0.025 & 0.032 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 25 & 32 \end{pmatrix} \tag{6}$$

3.- Basados en las ec.(1) y (2), halle una cota para el error en la solución del siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & 0.3 & 2.4 & 6.2 \\ 7.7 & 0.4 & 4.7 & 1.4 \\ 5.1 & 9.9 & 9.5 & 1.5 \\ 6.0 & 7.0 & 8.5 & 4.8 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2.6 & 0.3 & 2.4 & 6.2 \\ 7.7 & 0.4 & 4.7 & 1.4 \\ 5.1 & 9.9 & 9.5 & 1.5 \\ 6.1 & 7.0 & 8.5 & 4.8 \end{pmatrix} \tag{8}$$