

Computación numérica

Actividades

J. L. López^a

^a*Centro de Innovación en Ingeniería Aplicada, Universidad Católica del Maule, Talca - Chile.*

1. Introducción

Con frecuencia se encontrará con que tiene que estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos. El método más común que se usa para este propósito es la interpolación polinomial. Recuerde que la fórmula general para un polinomio de n -ésimo grado es .

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

Dados $n + 1$ puntos, hay uno y sólo un polinomio de grado n que pasa a través de todos los puntos. La interpolación polinomial consiste en determinar el polinomio único de n -ésimo grado que se ajuste a $n + 1$ puntos. Este polinomio, entonces, proporciona una fórmula para calcular valores intermedios. Aunque hay uno y sólo un polinomio de n -ésimo grado que se ajusta a $n + 1$ puntos, existe una gran variedad de formas matemáticas en las cuales puede expresarse este polinomio. En este capítulo describiremos dos alternativas que son muy adecuadas para implementarse en computadora: los polinomios de Lagrange y la spine cúbica.

2. Interpolación de Lagrange

El polinomio de interpolación de Lagrange es una reformulación del polinomio de interpolación de Newton (TAREA), el método evita el cálculo de las diferencias divididas. El método tolera las diferencias entre las distancias x entre puntos.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) \quad (2)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3)$$

Donde una vez que se han seleccionado los puntos a usar, se generan la misma cantidad de términos que puntos. Si se aumenta el número de puntos a interpolar (o nodos) con la

Email address: jlopez@ucm.cl (J. L. López)

intención de mejorar la aproximación a una función, también lo hace el grado del polinomio interpolador así obtenido. De este modo, aumenta la dificultad en el cálculo, haciéndolo poco operativo manualmente a partir del grado 4.

La tecnología actual permite manejar polinomios de grados superiores sin grandes problemas, a costa de un elevado consumo de tiempo de computación. Pero, a medida que crece el grado, mayores son las oscilaciones entre puntos consecutivos o nodos (Fenómeno de Runge). Se podría decir que a partir del grado 6 las oscilaciones son tal que el método deja de ser válido, aunque no para todos los casos.

Sin embargo, pocos estudios requieren la interpolación de tan solo 6 puntos. Se suelen contar por decenas e incluso centenas. En estos casos, el grado de este polinomio sería tan alto que resultaría inoperable. Por lo tanto, en estos casos, se recurre a otra técnica de interpolación, como por ejemplo a la Interpolación polinómica de Hermite o a los splines cúbicos.

3. Actividad 1

Cuando el valor de una acción en la Bolsa de valores tiene una fuerte alza y sostenida (es persistente), bajo ciertas condiciones del mercado, al cabo de un tiempo típicamente sufre una baja. Este fenómeno suele modelarse mediante un modelo de la forma:

$$V(t) = V_o + a_1t + a_2t^2 + .. + a_nt^n \quad (4)$$

donde $V(t)$ es el valor de la acción en el día t , V_o es un valor de referencia, y a_n son parámetros desconocidos.

4. Actividad 2

La siguiente tabla da los valores de una acción en alza durante 5 días consecutivos:

Días	1	2	3	4	5
Valores	229.30	290.05	351.20	403.25	437.90

Determine los valores de los parámetros del modelo, el valor máximo V_{max} que alcanzarán esas acciones y el día t_{max} en el que conviene venderlas. Utilice la interpolación mediante polinomios de Lagrange y compare sus resultados al utilizar un polinomio de interpolación de segundo orden (Curvas de Interpolación.ipynb).

5. Actividad 3

Escriba un programa en Python que dibuje una curva suave que pase por los siguientes puntos:

- ¿Es posible dibujar una curva suave mediante spline?

x	2.0	1.5	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	0.0	0.2	0.7	1.0	0.0	-1.0	-0.7	-0.2	0.0

- ¿Qué tipo de interpolación, polinomial o spline, recomienda utilizar en este caso para evitar el riesgo de oscilaciones?
- Dado que el primer y último punto de la tabla coinciden: ¿Es posible utilizar interpolación mediante spline?. Justifique su respuesta.

Hint: <https://www.it-swarm-es.com/es/python/como-realizar-la-interpolacion-spline-cubica-en-python/1054740687/>

6. Actividad 4

Se desea utilizar la técnica de interpolación como herramienta de filtrado. Para comprender la utilidad de la interpolación en este proceso, se requiere que realice las siguientes actividades:

1. Genere una función sinusoidal de amplitud $A = 3$, frecuencia $f = \frac{2\pi t}{3}$ ($0 < t < 5\pi$) y longitud de 2^{10} datos.
2. Genere un ruido gaussiano de 2^{10} datos, con media cero, y desviación típica de 1 (noise = np.random.normal(0, 1, 100))
3. Sume ambas series de tiempo.
4. Grafique simultáneamente los tres casos anteriores.
5. Considere la serie resultante (sinusoidal + ruido). Mediante ventanas móviles de 32 datos sin traslape, ajuste un polinomio de orden 3 para cada ventana y guarde los datos de interpolación en un nuevo vector. A partir de lo anterior, Ud. obtendrá una nueva serie de tiempo la cual deberá utilizar para **filtrar** la serie resultante **sinusoidal + ruido** mediante una simple resta.
6. Grafique la serie (sinusoidal + ruido) y la obtenida por interpolación y compare los valores promedios y desviaciones típicas para cada una de las series utilizadas en el estudio.