

# Computación numérica

## Laboratorio n° 1

J. L. López<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Innovación en Ingeniería Aplicada, Universidad Católica del Maule, Talca - Chile.*

---

### Abstract

En este laboratorio trabajaremos los conceptos básicos de la computación numérica y su aplicación en problemas básicos, a modo de reforzar el trabajo de clases. Los problemas ejemplos incluyen (i) modelado matemático y (ii) algoritmo iterativo, y en donde se estudian y aplican los conceptos de normas, convergencia y errores.

*Keywords:* Normas, Convergencia, iteraciones, modelamiento, errores.

---

### 1. Introducción

El conocimiento y la comprensión son necesarios para la aplicación eficaz de cualquier herramienta. Si no sabemos cómo funcionan las herramientas, tendremos serios problemas para reparar, por ejemplo, un automóvil. Ésta es una realidad cuando se utilizan computadoras para resolver problemas de ingeniería. Aunque las computadoras tienen una gran utilidad, son prácticamente inútiles si no se comprende el funcionamiento de los sistemas de ingeniería.

A causa de que la mayor parte de los métodos son muy sencillos en su descripción y en sus aplicaciones, entender el concepto de error es tan importante para utilizar en forma efectiva los métodos numéricos. La resolución de los problemas mediante herramientas computacionales trae implícito la obtención de resultados en los procesos iterativos. Pero toda medida trae asociado un error, y para el cual si no se toman medidas para su control se puede propagar y afectar los resultados.

El primer objetivo de este capítulo consiste en introducir al lector a la modelación Matemática, su papel en la solución de problemas en ingeniería, introducir los conceptos de norma convergencia y error en las iteraciones. Se mostrará también la forma en que los métodos numéricos figuran en el proceso.

### 2. Modelo matemático.

Al resolver un problema en el ordenador, debemos realizar un análisis del problema y la formulación de un modelo matemático para este. Lo anterior, requiere conocer el ámbito

---

*Email address:* `jlopez@ucm.cl` (J. L. López)

del problema y los instrumentos matemático para su definición. El diseño de un algoritmo requiere conocer en detalle la formulación matemática, las restricciones para su aplicación y criterios para aceptar y validar los resultados.

### 3. Instrumentación computacional

Python posee muchas librerías de utilidad de libre acceso desde la web:

**PyLab**: útil para graficar funciones, está incluida dentro de Matplotlib.

**SymPy**: manejo matemático simbólico.

**NumPy**: funciones numéricas relacionadas al álgebra lineal.

**SciPy**: funciones matemáticas avanzadas.

#### 3.1. Problema de formulación matemática

Se requiere construir un cuarto prefabricado, sin techo, que pueda contener material químico de capacidad  $1 \times 10^6$  litros. Para su construcción se debe utilizar una lámina rectangular de  $32m$  de largo y  $24m$  de ancho. Para armar el contenedor es requerido cortar cuadrados idénticos en cada una de las esquinas, a modo de poder doblar la lámina para formar el recipiente. Determinar la medida del lado del cuadro que se debe cortar para obtener la capacidad requerida.

##### 3.1.1. Solución

Sea  $x$  la medida del lado de los cuadrados a recortar para formar el contenedor

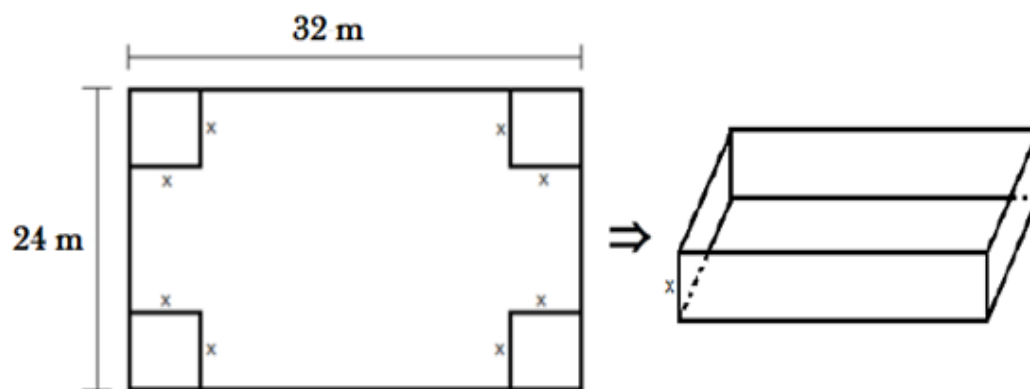


Figure 1: Esquema contenedor quimico.

**Lados de la cara:**

$$x, (32 - 2x), (24 - 2x) \quad (1)$$

**Volumen:**

$$1 \times 10^6 \text{ litros} = 1000 m^3 \quad (2)$$

El modelo que representa al problema corresponde a una ecuación cúbica que no se puede resolver directamente con las fórmulas ya conocidas.

**Ecuación:**

$$1000 = (32 - 2x)(24 - 2x)x \quad (3)$$

$$x^3 - 28x^2 + 192x - 250 = 0 \quad (4)$$

Para graficar la solución escribimos las instrucciones siguientes:

```
>>> from sympy import*
>>> x = Symbol('x')
>>> f = 250-192*x+28*x**2-x**3
>>> Plot(f,(x,0,20))
```

Para resolver la ecuación escribimos las instrucciones siguientes:

```
>>> r = solve(f)
>>> r[0].evalf(5)
>>> r[1].evalf(5)
>>> r[2].evalf(5)
```

**Realice la siguiente actividad:**

1. Verificar soluciones factibles y comentar resultados

#### 4. Métodos iterativos

Para ver la utilidad de los métodos iterativos, se utilizará una conocida fórmula iterativa para calcular la raíz cuadrada de un número real positivo.

##### 4.1. Problema métodos iterativos

Se requiere calcular numéricamente la raíz cuadrada de un número real positivo, y para lo cual se propone utilizar el siguiente modelo iterativo:

$$T = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{n}{x} \right] \quad (5)$$

**Realice las siguientes actividades:**

1. Calcular la raíz de  $x=10$ , partir de  $x = 7$
2. Calcular el error absoluto en cada iteración
3. Estudiar el tipo de convergencia de la fórmula iterativa

## 5. Normas vectoriales y matriciales

En Python, con el paquete NumPy podemos trabajar con arrays N-dimensionales, y matrices. Con NumPy podemos obtener también la norma de un array de cualquier dimensión y el número de condición de un array. Para ello utilizamos las funciones **linalg.norm** y **linalg.cond** respectivamente, que aceptan un segundo argumento: el tipo de norma utilizado. Para un sistema del tipo  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , la matriz  $A$  se dice bien condicionada si su número de condición está cerca de 1 y se dice mal condicionada si es significativamente mayor que 1, lo que nos indicaría que pequeñas variaciones en los datos pueden producir grandes variaciones en los resultados y por tanto que la solución del sistema es propensa a grandes errores de redondeo.

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \star \|A^{-1}\| \quad (6)$$

```
>> import numpy as np
>> a = np.array([[1, 0], [2, -1]])
>> np.linalg.norm(a)
>> np.linalg.norm(a, np.inf)
>> np.linalg.norm(a, 1)
>> v = np.array([0, 1, 2, 3])
>> np.linalg.norm(v)
>> np.linalg.norm(v, np.inf)
>> np.linalg.norm(v, 1)
>> np.linalg.cond(a)
>> np.linalg.cond(a, np.inf)
```

### 5.1. Problema de normas y condicionamiento matricial

Una empresa compra materiales A, B y C en cantidades en *kg*. Como se indica en el siguiente cuadro. Se dispone de tres facturas en la que consta el total pagado en dólares. Con esta información se debe determinar el precio por kg de cada material.

Table 1: Precio por kg y total pagado en facturas para cada material

Factura	A	B	C	Total
1	2.0	4.0	5.0	220
2	6.0	9.0	8.0	490
3	4.1	5.0	3.0	274

### Estudiar el condicionamiento del sistema

Para tal efecto, realice las siguientes actividades:

1. Utilice la idea de norma y condicionamiento de una matriz

2. Resuelva el sistema
3. Suponga que el digitador en vez de escribir 4.1 escribe 4.2 ¿Qué resultados se obtienen?  
¿Qué conclusión saca de este último resultado respecto a los anteriores?

```
>>> A = np.matrix([[2, 3],[1, -2]])  
>>> b = np.matrix([[8],[-10]])  
>>> if np.linalg.det(A) == 0:  
>>> x = None  
>>> print("No se puede resolver")  
>>> else:  
>>> x = (A**-1)*b
```