(1) Usar la igualdad

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

y la formula de Taylor infinitesimal para calcular las derivadas sucesivas en el pto $x=0$, de la funcion $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$; $x\mapsto \frac{1}{1-x}$.

(2) Sean $f,g: I\to\mathbb{R}$ dos veces derivables en el pto $a\in \mathrm{int}(I)$. Si $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$ y $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in I$, pruebe que $f''(a)\geq g''(a)$.

(3) Sean $f: I\to\mathbb{R}$, $g: J\to\mathbb{R}$ funciones convexas, $f(I)\subset J$, y g monótona no-decreciente. Pruebe que $g\circ f: I\to\mathbb{R}$ es convexa.

(4) $f_n: I\to\mathbb{R}$, (f_n) funciones convexas. Suponga que $\forall x\in I$, la sucesión de números $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pruebe que la funcion $f: I\to\mathbb{R}$; $x\mapsto f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es convexa.

(5) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua convexa tal que $f(a)<0<f(b)$. Pruebe que existe un único pto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

(6) Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$; $f(0)=0$ y $f(x)=\frac{1}{2^n}$ si $\frac{1}{2^{n+1}}<x\leq\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Pruebe que f es integrable y calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(7) Sea $f: I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en el punto $a \in \operatorname{int}(I)$. Entonces

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Dar un ejemplo en que el límite existe pero $f''(a)$ no existe.

(8) Sean $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha, \beta: I \to [a,b]$ diferenciables. Defina $\varphi: I \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \quad \forall x \in I.$$

Pruebe que

(1) φ es diferenciable

(2) $\varphi'(x) = f(\beta(x)) \cdot (\beta'(x)) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$.

(9) Sea $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[a, x]$. Pruebe que la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

existe, ssi, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ tal que

$$A < x < y \Rightarrow \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| < \varepsilon \quad \text{(criterio de Cauchy)}$$

(10) Pruebe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$$

converge cuando $x \in (-1,1]$. La convergencia es uniforme en los intervalos de tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, $0<\delta<$

(11) Demuestre el Teorema

<u>Teorema</u>: Si la serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge en todos los puntos del intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$, entonc

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n\right)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}\left(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\right).$$

<u>Sugerencia</u>: Utilizar el <u>Teorema de Abel</u>:

<u>T de Abel</u>: Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia r es finito y positivo. Si $\sum a_n r^n$ converge, entonces $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en el intervalo $[0,r]$. En particular, $\lim_{x\to r^-} \sum a_n x^n = \sum a_n r^n$.