N O T A S   D E   M A T E M Á T I C A   Nº 2

COLEÇÃO PUBLICADA SOB A DIREÇÃO DE L. NACHBIN

F I L T R O S   E   I D E A I S . I

p o r

A N T O N I O   A N I C E T O   M O N T E I R O

Professor no Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo,

Mendoza, Argentina.

FASCÍCULO PUBLICADO PELO INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

DO CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS

RIO DE JANEIRO

1955

PREFÁCIO DA 2a. EDIÇÃO

Os capítulos 1 e 2 de nosso livro "Filtros e Ideais" foram editados, em 1947 e 1948, pela Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil. Neles está reproduzida uma parte das lições sôbre a teoria dos reticulados distributivos que demos na referida Faculdade, de 1946 a 1948. O capítulo 3, que continha as lições sôbre a teoria da representação dos reticulados distributivos e suas aplicações ao problema da compactificação dos espaços topológicos, não chegou a ser publicado.

Esgotada a primeira edição, iniciámos a redação, que se encontra ainda em curso, de um trabalho de maior amplitude sôbre o mesmo tema, que constituirá, na realidade, uma obra distinta.

Agradecemos ao Dr. Lelio I. Gama, Diretor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, do Rio de Janeiro, bem como ao Dr. Leopoldo Nachbin, Diretor da coleção Notas de Matemática, a iniciativa de promoverem a reedição dêstes dois capítulos.

A.A. Monteiro

San Juan (Argentina), Maio de 1 955

PREFÁCIO DA 1a. EDIÇÃO

Foi Boole quem fez a primeira tentativa para formular de uma maneira completa as idéias fundamentais da lógica e das probabilidades por meio de um cálculo simbólico. Trata-se, talvez, do primeiro exemplo de uma algebrização que não teve a sua origem na noção de número ou em noções derivadas e foi, possìvelmente, por esta circunstância que ela não mereceu, durante muito tempo, a devida atenção dos algebristas. As idéias de Boole, na parte que se refere à lógica, foram desenvolvidas pelos seus continuadores Peirce, Schröder, Grassman, etc. As principais regras de cálculo das álgebras de Boole são uma parte importante da álgebra dos conjuntos e por isso ela tem um interêsse tão grande para o matemático como para o lógico.

Reconheceu-se recentemente uma grande analogia de forma na elaboração, pelo menos no que diz respeito às suas partes essenciais, de teorias matemáticas que pareciam andar muito afastadas umas das outras. Foi esta circunstância que deu origem à teoria dos reticulados que é possível considerar como uma generalização da álgebra da lógica. Dedekind, que foi um precursor genial, teve os seus continuadores numa época muito recente. Podemos destacar entre êles: Emmy Noether, G. Birkhoff, M. Stone, K. Menger, O. Ore, A Tarski, Freudenthal, J. von Neumann, V. Glivenko, Kantorovitch, Gelfand, etc. Os trabalhos feitos nesta direção esclarecem os fundamentos de várias disciplinas, e a aproximação e unificação de teorias, que se consideravam como essencialmente distintas, permitem que qualquer delas seja fecundada com novas técnicas. Em particular, a noção de filtro é um instrumento de trabalho precioso no estudo de diversos problemas (convergência, compactificação, uniformidade etc) que substitui com vantagem outras técnicas de caráter mais intuitivo.

Estas notas mimeografadas sôbre a teoria dos filtros e dos ideais têm por objetivo pôr o leitor em contacto com as partes mais importantes da teoria que andam dispersas por livros e memórias. Elas são susceptíveis de interessar o estudioso de lógica.

No primeiro capítulo são indicadas as noções gerais sôbre filtros e ideais nos reticulados, o segundo capítulo é dedicado ao estudo dos filtros primos, o terceiro trata da representação dos reticulados distributivos e no quarto capítulo será estudada a teoria da localização nas álgebras de Boole.

As matérias tratadas foram expostas no curso de Análise Superior que o autor regeu, na Faculdade Nacional de Filosofia, no ano de 1946 ou expostas, posteriormente, no Seminário respectivo.

Na página 57 vai indicada a bibliografia mais importante utilizada neste primeiro capítulo. Outras referências podem ser encontradas no livro de Garrett Birkhoff -- Lattice Theory - ou nos volumes de "Mathematical Reviews".

A. A. Monteiro

Viamão (Pôrto Alegre) Janeiro de 1947.

Í N D I C E

C A P I T U L O I

FILTROS E IDEAIS NOS RETICULADOS

§1 - ORDEM

§2 - RETICULADOS

§3 - FILTROS E IDEAIS

CAPÍTULO I

FILTROS E IDEAIS NOS RETICULADOS

§ 1 - ORDEM

1- CONJUNTOS - A noção de conjunto será considerada como uma noção primitiva. Limitamo-nos a indicar alguns exemplos: o conjunto dos números inteiros, o conjunto dos números racionais, o conjunto das retas do plano euclideano, o conjunto dos polinômios de uma variável complexa, etc.

Um conjunto é, em regra, concebido como formado por objetos que gozam de uma determinada propriedade. Os objetos que formam o conjunto têm o nome de elementos do conjunto.

2- NOTAÇÕES - Os conjuntos e seus elementos costumam ser representados por meio de símbolos, por exemplo: letras dos diversos alfabetos.

Quando representarmos os conjuntos por meio de letras latinas maiúsculas, representaremos os seus elementos por letras latinas minúsculas. Quando representarmos os conjuntos por letras latinas cursivas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... representaremos os seus elementos por letras latinas maiúsculas, etc.

Para indicar que um elemento a pertence ao conjunto A, escreveremos segundo Peano, $a \in A$ (leia "a pertence a A") e para indicar que o elemento a não pertence ao conjunto A escreveremos $a \notin A$ (leia "a não pertence a A").

Para representar o conjunto formado por um único elemento a, usaremos a notação $\{a\}$. Anàlogamente, o conjunto formado pelos elementos a, b, c e d será representado pela notação $\{a, b, c, d\}$. Mais geralmente utilizaremos a notação $\{a_\alpha\}$ para representar o conjunto formado pelos elementos a_α onde α é um índice variável, que toma um certo conjunto de valores.

Os elementos de um conjunto podem ser de natureza muito variada. Teremos oportunidade de considerar conjuntos cujos elementos são conjuntos. Por exemplo: as combinações de 3 elementos a, b, c, tomados dois a dois, são: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$. Somos assim levados a considerar o conjunto

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

cujos elementos são conjuntos de dois elementos.

Aos conjuntos cujos elementos são conjuntos daremos, em regra, o nome de família de conjuntos.

A família formada pelos conjuntos A_α, onde o índice toma um certo conjunto de valores será representada por $\{A_\alpha\}$ ou pela letra $\mathcal{A}$.

Se a e b representarem elementos de um certo conjunto escreveremos $a = b$ para indicar que a e b representam o mesmo elemento. Trata-se, portanto de uma relação binária (relação de identidade) que verifica as seguintes propriedades:

I_1 - Reflexiva : $a = a$

I_2 - Simétrica : $a = b$ implica $b = a$

I_3 - Transitiva: Se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$

3- PARTES DE UM CONJUNTO - Se todo o elemento do conjunto A fôr também elemento do conjunto B, isto é, se

$$x \in A \quad \text{implica} \quad x \in B$$

diremos que A é uma parte de B e escreveremos $A \leqslant B$. Também se costuma lêr esta relação dizendo que "A é um subconjunto de B". A relação binária representada pelo sinal $\leqslant$ tem o nome de relação de inclusão.

Se o conjunto A fôr um subconjunto de B e se B fôr, simultâneamente, um subconjunto de A, então todo elemento de A é um elemento de B e recìprocamente. Diremos neste caso, que os dois conjuntos A e B são iguais e escreveremos $A = B$ ou $B = A$. Esta rela -

ção de igualdade entre conjuntos goza das propriedades reflexiva , simétrica e transitiva.

Teremos, muitas vezes, necessidade de considerar, juntamente com um certo conjunto fundamental I, a família de todos os subconjuntos de I, que será representada pela notação 2^I. Se I representar, por exemplo, o conjunto de todos os pontos de um círculo, 2^I representará a família de todos os subconjuntos dêsse círculo.

Entre os subconjuntos de um conjunto figura o conjunto vazio (conjunto que não contém elemento algum) que representaremos pelo símbolo $\emptyset$. A relação de inclusão $\leqslant$, anteriormente definida, entre os subconjuntos de I, é uma relação binária entre os elementos de 2^I, que verifica as seguintes propriedades:

O1 - (Reflexiva) $A \leqslant A$

O2 - (Anti-simétrica) $A \leqslant B$ e $B \leqslant A$ implica $A = B$

O3 - (Transitiva) $A \leqslant B$ e $B \leqslant C$ implica $A \leqslant C$

Neste parágrafo vamos estudar as propriedades gerais das relações binárias que verificam as propriedades O1, O2 e O3.

4- NOÇÃO DE ORDEM - Vamos agora definir a noção de ordem duma maneira abstrata e mostraremos mais adeante que ela não difere essencialmente da noção de inclusão.

DEFINIÇÃO 1 - Seja $\mathcal{O}$ um conjunto (cujos elementos serão representados por meio de letras latinas maiúsculas) sôbre o qual está definida uma relação binária $\subseteq$, que goza das seguintes propriedades:

O1 - (Reflexiva) Se $A \in \mathcal{O}$ tem-se $A \subseteq A$

O2 - (Anti-simétrica) $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implica $A = B$

O3 - (Transitiva) $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$

Diremos então que $\mathcal{O}$ é um conjunto ordenado, pela relação $\subseteq$, ou que $\subseteq$ é uma relação de ordem definida sôbre $\mathcal{O}$.

A relação $A \subseteq B$ pode ser lida de diversas maneiras: A precede B, A está contido em B. Escreveremos $A \not\subseteq B$ para indicar que A não precede B.

EXEMPLO 1 - Seja $\mathcal{O}$ uma família de subconjuntos de um conjunto I; então $\mathcal{O}$ é um conjunto ordenado pela relação de inclusão.

EXEMPLO 2 - Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos inteiros racionais ...., - n, ..., - 1,0,1,2, ..., n, ... e consideremos a relação "menor ou igual a" (em notação $\leq$) definida sôbre $\mathcal{O}$, que verifica, como se sabe, as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

EXEMPLO 3 - Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos inteiros 0,1,2,...,n,... e consideremos a seguinte relação entre dois inteiros A e B: "A divide B". Diz-se que o inteiro A divide o inteiro B se existe um inteiro X tal que $AX = B$ e escreve-se nesse caso $A \ll B$ (leia "A divide B"). São verificadas, como fàcilmente se reconhece, as propriedades 01: $A \ll A$; 02: $A \ll B$ e $B \ll A$ implica $A = B$; 03: $A \ll B$ e $B \ll C$ implica $A \ll C$. O conjunto dos inteiros é portanto um conjunto ordenado relativamente à relação "divide".

EXEMPLO 4 - Seja X um conjunto não vazio e suponhamos que a cada elemento $x \in X$ se faz corresponder um número real f(x). À correspondência assim obtida dá-se o nome de função real definida sôbre X. Seja F o conjunto de tôdas as funções reais f definidas sôbre X. Diremos que $f = g$; onde $f \in F$ e $g \in F$ se fôr $f(x) = g(x)$ qualquer que seja $x \in X$. Convencionemos escrever $f \leq g$ para indicar que $f(x) \leq g(x)$, qualquer que seja $x \in X$. A relação binária $\leq$ que acabamos de definir, entre os elementos de F é reflexiva, antisimétrica e transitiva e portanto F é um conjunto ordenado pela relação $\leq$.

EXEMPLO 5 - Seja $\mathcal{O}$ um conjunto de proposições A,B,... e consideremos a relação "A implica B" (em notação $A \longrightarrow B$). A relação de implicação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva e portanto $\mathcal{O}$ é um conjunto ordenado pela relação de "implicação". Seja $\mathcal{O}$ um conjunto ordenado e $\mathcal{A}$ um subconjunto, não vazio, de $\mathcal{O}$. A relação de ordem definida sôbre $\mathcal{O}$ está em particular definida sôbre $\mathcal{A}$ e portanto:

TEOREMA 1 - Todo o subconjunto, não vazio, de um conjunto ordenado $\mathcal{O}$, é ainda um conjunto ordenado pela relação de ordem de

TABELA 1 - $A \alpha A$, $A \alpha B$, $B \alpha B$, $B \alpha C$, $C \alpha C$.
TABELA 2 - $A \beta A$, $A \beta B$, $B \beta A$, $B \beta B$, $C \beta C$.
TABELA 3 - $A \gamma B$, $A \gamma C$, $B \gamma C$.

A relação α verifica as propriedades reflexiva e anti-simétrica mas não verifica a propriedade transitiva, visto que se tem $A \alpha B$, $B \alpha C$ e não se verifica a relação $A \alpha C$. A relação β verifica as propriedades reflexiva e transitiva e não verifica a propriedade anti-simétrica, visto que $A \beta B$, $B \beta A$ e $A \neq B$.

A relação γ verifica as propriedades anti-simétrica e transitiva e não verifica a propriedade reflexiva visto que não se tem $A \gamma A$.

7- DIAGRAMA DE HASSE- Os conjuntos ordenados finitos podem ser representados gràficamente por um diagrama, conhecido pelo nome de Diagrama de Hasse.

DEFINIÇÃO 3 - Diremos que B segue imediatamente A se $A \subset \subset B$ e se não existir nenhum elemento $X \in \mathcal{O}$ tal que $A \subset X \subset B$. Quando existir um elemento $X \in \mathcal{O}$ tal que $A \subset X \subset B$ diremos que X está situado entre A e B.

Seja $\mathcal{O}$ um sistema ordenado finito. O seu Diagrama de Hasse constrói-se de acôrdo com as seguintes regras:

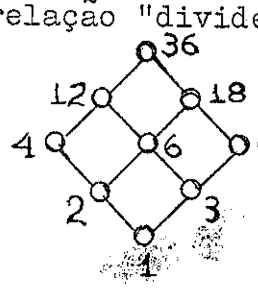
H1) Cada elemento $A \in \mathcal{O}$ é representado por um sinal (um pequeno círculo, por exemplo) a que daremos o nome de "afixo" de A.

H2) Os afixos de A e B são ligados por um segmento se e só se B seguir imediatamente A.

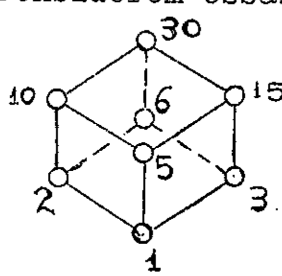
H3) Se B seguir imediatamente A então o afixo de B será desenhado acima do afixo de A.

Nas figuras abaixo desenhadas estão representados, de acôrdo com as regras anteriores, os diagramas de Hasse das coleções de inteiros que nelas figuram, quando se considerem essas coleções ordenadas pela relação "divide" $(\ll)$.

(A)



(B)

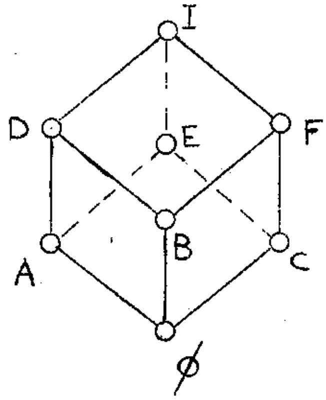


(C)

Como se reconhece imediatamente, o inteiro A divide o inteiro B (sendo $A \neq B$) se, e só se, fôr possível "ligar o afixo de A ao afixo de B" por meio de uma linha poligonal formada por segmentos ascendentes. No diagrama (C) é possível ligar o afixo de 1 ao afixo de 30, por seis caminhos diferentes (cada um deles é formado de 3 segmentos). Consideremos agora o conjunto $I = \{a, b, c\}$ formado de 3 elementos. O diagrama de Hasse de família 2^I de todos os subconjuntos de I, a saber:

$$\emptyset,\ A = \{a\},\ B = \{b\},\ C = \{c\}$$
$$D = \{a, b\},\ E = \{a, c\},\ F = \{b, c\},\ I$$

é:



Podemos dar exemplos de conjuntos ordenados finitos, traçando diagramas de Hasse ao acaso, visto que a partir de um tal diagrama podemos obter a relação de ordem $\subseteq$.

8- <u>DUALIDADE</u> - Utilizaremos muitas vezes a notação $\mathcal{A} = [\mathcal{O}, \subseteq]$, para indicar o conjunto $\mathcal{O}$ ordenado pela relação $\subseteq$,

<u>DEFINIÇÃO 4</u> - <u>Dado o conjunto ordenado</u> $[\mathcal{O}, \subseteq]$ <u>daremos o nome de relação dual de</u> $\subseteq$, <u>à relação binária</u> $\supseteq$ <u>definida da seguinte maneira</u>:

$$A \supseteq B \ \text{se e só se} \ B \subseteq A.$$

Reconhece-se, imediatamente, que

<u>TEOREMA 2</u> - <u>A relação dual de uma relação de ordem é uma relação de ordem</u>.

<u>DEFINIÇÃO 5</u> - <u>Dá-se o nome de dual do conjunto ordenado</u> $\mathcal{A} = [\mathcal{O}, \subseteq]$ <u>ao conjunto ordenado</u> $\mathcal{A}^* = [\mathcal{O}, \supseteq]$.

A definição 4 mostra que a relação dual de $\supseteq$ é a relação $\subseteq$ e portanto $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$. Os conjuntos ordenados são portanto duais aos pares. Um conjunto ordenado diz-se <u>auto-dual</u> quando fôr dual de si próprio. A partir de uma definição introduzida num conjunto ordenado podemos obter a <u>definição dual</u> substituindo no respectivo enunciado a relação $\subseteq$ por $\supseteq$.

De modo análogo a cada propriedade de um conjunto ordenado corresponde uma <u>propriedade dual</u>.

Por exemplo, a propriedade dual do lema 1 é a seguinte

<u>LEMA 1</u>* - <u>Se</u> $A \supseteq C \supseteq B$ <u>e</u> $A = B$ <u>então</u> $A = B = C$.

Se uma propriedade de um conjunto ordenado pode ser estabelecida a partir dos axiomas O1, O2, O3 também a propriedade dual pode ser estabelecida a partir dos axiomas

O1* - $A \supseteq A$
O2* - Se $A \supseteq B$ e $B \supseteq A$ então $A = B$
O3* - Se $A \supseteq B$ e $B \supseteq C$ então $A \supseteq C$,

substituindo na demonstração $\subseteq$ por $\supseteq$, Isto justifica o

<u>PRINCÍPIO DE DUALIDADE</u> - <u>Um teorema que é verdadeiro em qualquer conjunto ordenado é ainda verdadeiro se trocarmos entre si os símbolos $\subseteq$ e $\supseteq$ no enunciado do teorema</u>.

<u>EXERCÍCIO</u> - Diz-se que A e B são incomparáveis (em notação $A \parallel B$) se $A \not\subseteq B$ e $B \not\supseteq A$. Mostre que, para cada par de elementos de um conjunto ordenado, verifica-se uma e uma só das quatro relações, $=$, $\subset$, $\supset$, $\parallel$, e que a relação dual de $\parallel$ é a própria relação $\parallel$.

9- <u>ELEMENTO MÁXIMO E MÍNIMO</u> - Diremos que $O \in \mathcal{O}$ é o <u>menor elemento de</u> $\mathcal{O}$, ou o <u>primeiro elemento de</u> $\mathcal{O}$ se fôr $O \subseteq X$, qualquer que seja $X \in \mathcal{O}$. É fácil de ver que, se o <u>primeiro elemento de</u> $\mathcal{O}$ <u>existir êle é o único</u>. Com efeito se $\mathcal{O}$ tivesse dois primeiros elementos O e O^* seria $O \subseteq O^*$ e $O^* \subseteq O$ e portanto $O = O^*$, c.q.d.

Diremos, dualmente, que $I \in \mathcal{O}$ é o <u>maior elemento de</u> $\mathcal{O}$, ou o <u>último elemento de</u> $\mathcal{O}$ se fôr $I \supseteq X$, qualquer que seja $X \in \mathcal{O}$. Por dualidade, podemos afirmar que o <u>último elemento é único</u> quando existe.

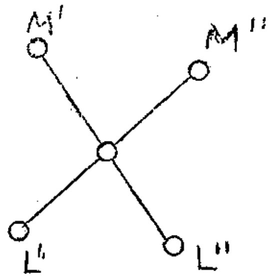
O conjunto ordenado indicado no Exemplo 2, não tem primeiro nem último elemento, enquanto que o conjunto ordenado no Exemplo 3, tem o inteiro 1 como primeiro elemento eo inteiro 0 como último elemento.

Diremos que $L \in \mathcal{O}$ é um <u>elemento mínimo de</u> $\mathcal{O}$, quando não existir nenhum elemento $X \in \mathcal{O}$ tal que $X \subset L$, ou o que é equivalente: quando $X \subseteq L$ implicar $X = L$.

Diremos, dualmente, que $M \in \mathcal{O}$ é um <u>elemento máximo de</u> $\mathcal{O}$, quando não existir nenhum elemento $X \in \mathcal{O}$ tal que $X \supset M$, ou o que é equivalente quando $X \supseteq M$ implicar $X = M$.

Aos elementos mínimo e máximo também se dá o nome de <u>elementos minimal</u> e <u>maximal</u>.

Num conjunto ordenado podem existir vários elementos máximos e mínimos. É o que se reconhece no diagrama de Hasse seguinte:



onde M' e M'' são elementos máximos, L' e L'' são elementos mínimos.

Se $\mathcal{O}$ tem um último elemento I, êle será o único elemento máximo de $\mathcal{O}$; se $\mathcal{O}$ tem mais que um elemento máximo, $\mathcal{O}$ não tem último elemento.

Diz-se que <u>A é o menor elemento do subconjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$</u> se A fôr o primeiro elemento do conjunto ordenado $[\mathcal{A}, \subseteq]$ isto é, se forem verificadas as duas condições seguintes:

1ª) $A \in \mathcal{A}$; 2ª) $A \subseteq X$ qualquer que seja $X \in \mathcal{A}$. É evidente que A é único quando existir. Diz-se que L é um <u>elemento mínimo</u> do subconjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$, quando A fôr um elemento mínimo do conjunto ordenado $[\mathcal{A}, \subseteq]$.

De maneira dual se definem o <u>maior elemento</u> e <u>elemento máximo do subconjunto</u> $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$.

<u>EXERCÍCIO 8.1</u> - Mostre que todo o conjunto ordenado finito tem, pelo menos, um elemento maximal e um elemento minimal.

10- <u>SUPREMO E ÍNFIMO</u> - Dá-se o nome de <u>limite inferior do conjunto</u> $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$, a todo elemento $L \in \mathcal{O}$ tal que: $L \subseteq A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{A}$.

Um conjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$ que tem um limite inferior diz-se <u>limitado inferiormente</u>. Se $\mathcal{O}$ tiver primeiro elemento todos os seus subconjuntos são limitados inferiormente.

Diz-se que o conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, de elementos de $\mathcal{O}$, tem um <u>ínfimo A</u>, se o conjunto dos limites inferiores do conjunto $\mathcal{A}$ tiver um maior elemento A. Esta definição pode portanto ser formulada da seguinte maneira:

<u>DEFINIÇÃO 6</u> - <u>Diz-se que</u> $A \in \mathcal{O}$ <u>é o ínfimo do conjunto</u> $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, <u>onde</u> $A_\alpha \in \mathcal{O}$, <u>se forem verificadas as duas condições seguintes</u>:

A1) $A \subseteq A_\alpha$, <u>qualquer que seja</u> α.

A2) Se $X \subseteq A_\alpha$, <u>qualquer que seja</u> α, <u>então</u> $X \subseteq A$.

A condição A1) exprime que A é um limite inferior do conjunto $\mathcal{A}$ e a condição A2) exprime que A é um limite superior do conjunto de todos os limites inferiores de $\mathcal{A}$.

Para representar o ínfimo A do conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ podemos usar qualquer das duas notações seguintes:

$$A = \inf.(\mathcal{A}), \quad A = \bigcap_\alpha A_\alpha .$$

Se o conjunto $\mathcal{A}$ fôr formado por dois elementos B e C o seu ínfimo A, quando existir, será representado pela notação

$$A = B \cap C.$$

Dualmente, daremos o nome de <u>limite superior do conjunto</u> $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$ a todo o elemento $L \in \mathcal{O}$ tal que $L \supseteq A$, qualquer que seja $A \in \mathcal{O}$. Um <u>conjunto</u> que tem um limite superior diz-se <u>limitado superiormente</u>.

<u>DEFINIÇÃO 6*</u> - <u>Diz-se que</u> $A \in \mathcal{O}$ <u>é o supremo do conjunto</u> $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, <u>onde</u> $A_\alpha \in \mathcal{O}$, <u>se forem verificadas as duas condições</u>

seguintes:

$A1^*$) $A \supseteq A_\alpha$, qualquer que seja α.

$A2^*$) Se $X \supseteq A_\alpha$, qualquer que seja α, então $X \supseteq A$.

Para representar o supremo A do conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ podemos usar qualquer das duas notações seguintes:

$$A = \sup. (\mathcal{A}), \qquad A = \bigcup_\alpha A_\alpha$$

Se o conjunto $\mathcal{A}$ fôr formado por dois elementos B e C, o seu supremo A, quando existir, será representado pela notação:

$$A = B \cup C.$$

TEOREMA 3 - O supremo e o ínfimo do conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, onde $A_\alpha \in \mathcal{O}$, são únicos sempre que existirem.

DEMONSTRAÇÃO - Seja A um ínfimo do conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$. Então A verifica as condições A1) e A2) indicadas na definição 6.

Se A_1 fôr também um ínfimo do mesmo conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, então será em virtude da definição 6

B1) $A_1 \subseteq A_\alpha$, qualquer que seja α.

B2) Se $X \subseteq A_\alpha$, qualquer que seja α, então $X \subseteq A_1$.

Ora, o elemento A está, em virtude de A1), nas condições indicadas para X em B2) logo (1) $A \subseteq A_1$. Por outro lado, o elemento A_1 está em virtude de B1), nas condições indicadas para X em A2), logo (2) $A_1 \subseteq A$. De (1) e (2) resulta $A = A_1$. De modo dual se demonstra a unicidade do supremo, quando êle existe.

Um conjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}$ diz-se limitado quando tiver um limite superior a um limite inferior.

EXERCÍCIOS: 10.1) - Se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$, $A \cap B = A$

10.2) Se $A \subseteq B \subseteq C$ então $(A \cup B) \cup C = C$, $(A \cap B) \cap C = A$.

10.3) Se $A = B$ então $A \cup C = B \cup C$, $A \cap C = B \cap C$.

10.4) Se $A = \bigcap_\alpha A_\alpha$ e $B = \bigcap_\beta B_\beta$, e se para cada A_α existe um B_β tal que $B_\beta \subseteq A_\alpha$ então $B \subseteq A$.

(enuncie e demonstre o teorema dual).

10.5) Se cada B_β é o ínfimo de um subconjunto de $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ e se para cada A_α existe um B_β tal que $B_\beta \subseteq A_\alpha$ então

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_\beta B_\beta$$

(enuncie e demonstre o teorema dual)

10.6) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

10.7) $A \subseteq B$ implica $A \cap C \subseteq B \cap C$; $A \cup C \subseteq B \cup C$.

11- ORDEM LINEAR - Existem conjuntos ordenados em que é verificado o seguinte axioma:

04 (DICOTOMIA FRACA) - Dados A e B ou $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Dar-lhe-emos o nome de conjuntos linearmente ordenados, simplesmente ordenados, totalmente ordenados ou cadeias e diremos que a relação $\subseteq$ é uma relação de ordem linear. É o que acontece com a relação de ordem indicada no Exemplo 2.

Se num conjunto ordenado tivermos uma sucessão de elementos tais que:

$$(1) \quad X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$$

ou tais que

$$(2) \quad X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$$

teremos em qualquer dos casos um exemplo duma cadeia. No primeiro caso diremos que se trata duma sucessão monòtonamente ascendente, e no segundo duma sucessão monòtonamente descendente. Em qualquer dos dois casos diremos que se trata duma sucessão monótona, que é evidentemente uma cadeia.

EXERCÍCIOS 11.1) - Numa cadeia as noções de um mínimo e primeiro elemento (respectivamente máximo e último elemento) coincidem.

11.2) Dois elementos de uma cadeia têm sempre um supremo e um ínfimo (veja exercício 10.1)

11.3) Para que um conjunto ordenado $\mathcal{O}$ seja uma cadeia é necessário e suficiente que cada par de elementos de $\mathcal{O}$ seja uma cadeia.

12. COMPLEMENTOS - Consideremos um conjunto ordenado $\mathcal{O}$ com primeiro (0) e último (I) elemento.

Diremos, com Garrett Birkhoff, que A_* é pseudo-complemento de A, ou mais precisamente inf-complemento de A, se forem verificadas as duas condições seguintes:

$C1_*)$ $A \cap A_* = 0$

$C2_*)$ $A \cap X = 0$ implica $X \subseteq A_*$

Esta noção pode ser formulada de outro modo. Diz-se que <u>dois elementos A e B são ortogonais</u> se $A \cap B = 0$. Podemos agora dizer que A tem por inf-complemento A_*, se o conjunto de todos os elementos ortogonais a A tiver A_* por maior elemento, como está explìcitamente expresso nas condições $C1_*)$ e $C2_*)$. Daqui resulta que o <u>inf-complemento de A</u> é unìvocamente determinado, se êle existir.

Diremos, dualmente, que A^* é <u>sup-complemento de A</u>, se forem verificadas as duas condições seguintes:

$C1^*)$ $A \cup A^* = I$

$C2^*)$ $A \cup X = I$ implica $X \supseteq A^*$.

Convencionemos dizer que <u>dois elementos A e B são unidos</u> se $A \cup B = I$. Então A tem por sup-complemento A^*, se o conjunto de todos os elementos unidos a A tiver A^* por menor elemento. Daqui resulta que o <u>sup-complemento de A</u> é único se êle existir.

<u>LEMA 5</u> - <u>O inf-complemento</u> A_* <u>e o sup-complemento</u> A^* <u>verificam as seguintes fórmulas de cálculo</u>:

0) $0_* = I$; 1) $I^* = 0$; 2) $A \subseteq (A_*)_*$; 3) $A \supseteq (A^*)^*$;

4) $A \subseteq B$ implica $B_* \subseteq A_*$ e $B^* \subseteq A^*$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - 0) De $0 \subseteq X$ qualquer que seja $X \in \mathcal{O}$; resulta, (Ex. 10.1) $0 \cap X = 0$, qualquer que seja X. Logo todos os elementos de $\mathcal{O}$ são ortogonais a 0. Como $\mathcal{O}$ tem I como maior elemento será $0_* = I$.

2) De $C1_*)$ e do Ex. 10.6) resulta

1) $A_* \cap A = 0$

Por outro lado o inf-complemento $(A_*)_*$ satisfaz, por definição, à seguinte condição:

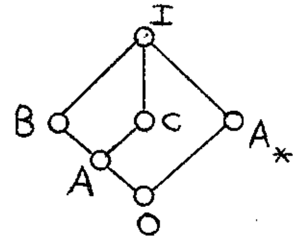
2) $A_* \cap X = 0$ implica $X \subseteq (A_*)_*$

Então de 1) e 2) resulta $A \subseteq (A_*)_*$, c.q.d.

4) Seja $A \subseteq B$, então (Ex. 10.7) teremos $A \cap B_* \subseteq B \cap B_*$. Como $B \cap B_* = 0$, será $A \cap B_* \subseteq 0$ e como 0 é o primeiro elemento, teremos necessàriamente $A \cap B_* = 0$ e então pela condição $C2_*)$ será

$B_* \subseteq A_*$ o que demonstra a primeira parte da fórmula 4). As demonstrações de 1), 3), e segunda parte de 4) são duais das precedentes.

Na demonstração das fórmulas 2) e 3) admite-se implìcitamente a existência de $(A_*)_*$ e $(A^*)^*$. Na realidade pode acontecer que exista A_* sem que exista $(A_*)_*$. É o que se pode verificar no seguinte diagrama de Hasse:



onde qualquer dos elementos A, B e C tem A_* por inf-complemento, enquanto que A_* não tem inf-complemento, visto que o conjunto dos elementos ortogonais a A_*, sendo formado por O, A, B e C não tem um maior elemento.

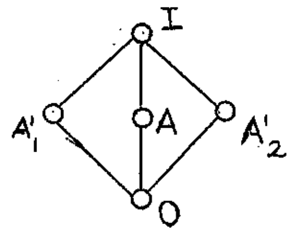
Diremos que <u>A' é um complemento de A se forem verificadas as duas condições seguintes</u>:

C1) $A \cap A' = O$

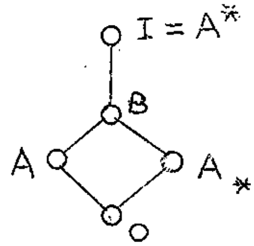
C2) $A \cup A' = I$

Em virtude do resultado indicado no Ex. 10.6) podemos afirmar que se A' é um complemento de A então A é um complemento de A'.

Um elemento A pode ter mais que um complemento, como se verifica no seguinte diagrama de Hasse:



onde A tem dois complementos A_1' e A_2'. O mesmo diagrama mostra que A não tem inf-complemento, nem sup-complemento. Um elemento A pode ter um único inf-complemento e um único sup-complemento sem ter um complemento, como se verifica no seguinte diagrama de Hasse.



onde A tem por inf-complemento A_* e por sup-complemento , $A^* = I$ mas onde A não tem nenhum complemento.

LEMA 6 - 1) Se A tem inf-complemento e um complemento A', então $A' \subseteq A_*$. 2) Se A tem sup-complemento e um complemento, então $A^* \subseteq A'$. 3) Se A tem supcomplemento, inf-complemento e um complemento então será $A^* \subseteq A_*$ e todo o elemento X tal que $A^* \subseteq X \subseteq A_*$ é um complemento de A (em particular A^* e A_* são complementos de A).

DEMONSTRAÇÃO - 1) É uma consequência imediata de $C2_*$) e C1). 2) Resulta de $C2^*$) e de C2). 3) De 2) e 1) resulta $A^* \subseteq A_*$. Seja agora X tal que $A^* \subseteq X \subseteq A_*$.
De $X \subseteq A_*$ resulta [Ex. 10.7]

$$A \cap X \subseteq A \cap A_* = 0$$

logo (α) $A \cap X = 0$. De $A^* \subseteq X$ resulta [Ex. 10.7]

$$A \cup A^* = I \subseteq A \cup X \text{ e portanto}$$

$$(\beta)\ A \cup X = I$$

As fórmulas (α) e (β) mostram então que X é um complemento de A, c.q.d.

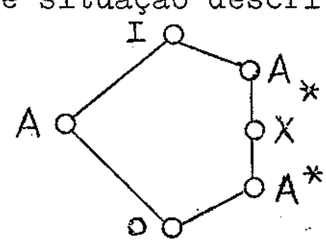
LEMA 7 - Se $A_* = A^*$ então A tem um único complemento $A' = A_* = A^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Mostremos pirmeiro que o elemento $A' = A_* = A^*$ é um complemento de A. Basta notar que de $C1_*$) e $C1^*$) resulta

$$A \cap A' = 0$$
$$A \cup A' = I$$

Pelo lema anterior, todos os complementos A' de A satisfazem à condição $A^* \subseteq A' \subseteq A_*$ então de $A^* = A_*$ resulta a unicidade do complemento.

Um exemplo de situação descrita no Lema 6 é o seguinte



§ 2 - RETICULADOS

13- DEFINIÇÃO - Uma classe importante de conjuntos ordenados é a seguinte

DEFINIÇÃO 7 - Dá-se o nome de estrutura, ou reticulado, a um conjunto ordenado $\mathcal{R}$, em que cada par ordenado A, B de elementos de $\mathcal{R}$ tem um supremo $A \cup B$ e um ínfimo $A \cap B$.

Ao supremo $A \cup B$ também se dá o nome de soma ou união de A e B e ao ínfimo $A \cap B$ o de produto ou interseção de A e B.

Num reticulado existe sempre o ínfimo (supremo) de um conjunto finito de elementos de $\mathcal{R}$, como se reconhece por indução.

Um reticulado com um número finito de elementos diz-se finito. Um reticulado finito tem como último elemento (I) o supremo de todos os seus elementos e como primeiro elemento (O) o ínfimo de todos os seus elementos.

14- EXEMPLOS - Consideremos a família 2^I de todos os subconjuntos de um conjunto I.

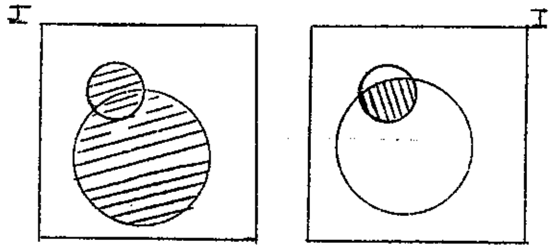
Dados dois conjuntos A, $B \in 2^I$ dá-se o nome de reunião ou soma de A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem a um, pelo menos, dos conjuntos A e B. Se representarmos a reunião de A e B pela notação $A \vee B$, podemos afirmar que

$$x \in A \vee B \text{ se, e só se, } "x \in A \text{ ou } x \in B".$$

Dá-se o nome de interseção ou produto de A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem simultâneamente a A e B. Se representarmos a interseção de A e B por $A \wedge B$ poderemos afirmar que

$$x \in A \wedge B \text{ se, e só se, } "x \in A \text{ e } x \in B".$$

Suponhamos que A e B representam dois círculos contidos num quadrado I. Nas duas figuras seguintes vão indicados a tracejado os conjuntos $A \vee B$ e $A \wedge B$.



A esquemas dêste tipo, destinados a pôr em evidência as relações de inclusão entre dois ou mais conjuntos, daremos o nome de <u>Diagramas de Venn</u>.

Como se reconhece fàcilmente a interseção $C = A \wedge B$ dos conjuntos A e B verifica as duas condições seguintes:

A1) $C \leq A \quad C \leq B$

A2) Se $X \leq A$ e $X \leq B$ então $X \leq C$

Dqui resulta, em virtude da Definição 6, que C é, na família 2^I dos sub-conjuntos de I, o <u>ínfimo</u> dos conjuntos A e B. De modo análogo se reconhece que $A \vee B$ é o <u>supremo</u> dos conjuntos A e B.

Podemos então afirmar que

Se $A, B \in 2^I$ então $A \vee B \in 2^I$ e $A \wedge B \in 2^I$

Como exemplo de um reticulado podemos então indicar o

<u>EXEMPLO 6</u> - <u>A família</u> 2^I <u>de todos os sub-conjuntos de um conjunto</u> I.

Um exemplo mais geral é o seguinte

<u>EXEMPLO 7</u> - <u>Um anel de conjuntos</u>, <u>isto é</u>, <u>uma família</u> $\mathfrak{A}$ <u>de conjuntos tal que</u> $\mathfrak{A}$ 1. <u>Se $A, B \in \mathfrak{A}$ então $A \vee B \in \mathfrak{A}$</u>, <u>$A \wedge B \in \mathfrak{A}$</u>.

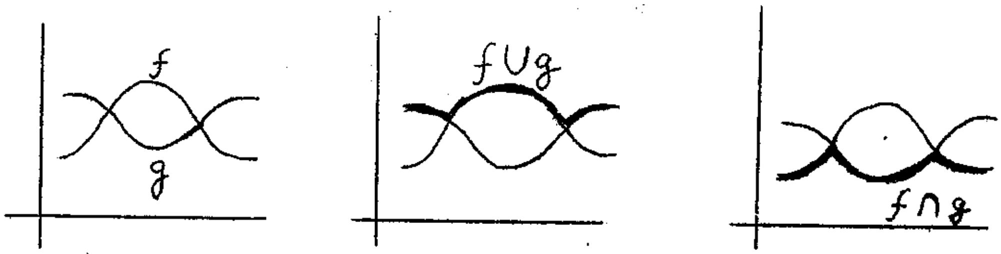
A classe dos inteiros racionais ordenados pela relação "menor ou igual a" ($\leq$), (Exemplo 2) é um reticulado onde

$A \cup B = \max (A, B)$ e $A \cap B = \min. (A, B)$

São também exemplos de reticulados, os seguintes:

<u>EXEMPLO 3</u> - Onde $A \cup B = $ m. m. c. (A,B) e $A \cap B = $ = m. d. c. (A, B).

EXEMPLO 4 - Onde $f(x) \cup g(x) = \max(f(x), g(x))$ e $f(x) \cap g(x) = \min(f(x), g(x))$ que podemos representar gràficamente do seguinte modo:



EXEMPLO 5 - Onde $A \cup B$ é a proposição "A ou B" e $A \cap B$ a proposição "A e B", que supomos pertencentes a $\mathcal{O}$.

EXERCÍCIOS 14.1) Todo o conjunto linearmente ordenado é um reticulado.

14.2) A família de todos os sub-conjuntos finitos de um conjunto é um anel de conjuntos.

14.3) A família de todos os sub-conjuntos numeráveis de um conjunto é um anel de conjuntos.

14.4) Um conjunto ordenado em que todos os seus sub-conjuntos são reticulados é uma cadeia.

15- ÁLGEBRA DOS RETICULADOS - Vamos agora estudar as propriedades formais das operações $\cup$, $\cap$ definidas num reticulado.

TEOREMA 4 - Num reticulado qualquer, são válidas as seguintes regras de cálculo

R1) (Associativa)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
R2) (Comutativa)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
R3) (Absorção)	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

DEMONSTRAÇÃO LEI R1) Por definição de ínfimo tem-se

(1) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap B$ (2) $(A \cap B) \cap C \subseteq C$

Por outro lado

(3) $A \cap B \subseteq A$ (4) $A \cap B \subseteq B$

De (1) e (3) resulta, por O3, que

(5) $(A \cap B) \cap C \subseteq A$

De (1) e (4) resulta, por O3, que

(6) $(A \cap B) \cap C \subseteq B$

De (2) e (6) resulta, pela definição de ínfimo

(7) $(A \cap B) \cap C \subseteq B \cap C$

De (5) e (7) resulta, também pela definição de ínfimo,

(8) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

De modo análogo se mostra que

(8') $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Finalmente de (8) e (8') resulta:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ c.q.d.

<u>LEI R2</u>) Seja $C = A \cap B$ e $C' = B \cap A$. Da primeira fórmula resulta por definição do ínfimo que $C \subseteq B$ e $C \subseteq A$ e portanto $C \subseteq B \cap A$, isto é, $C \subseteq C'$. Do mesmo modo se demonstra que $C' \subseteq C$. Logo $C = C'$.

<u>LEI R3</u>) Comecemos por mostrar que, se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$ (Ex. 10.1). Com efeito, seja $A \subseteq B$, então A satisfaz às seguintes condições

A1) $A \subseteq A$ e $A \subseteq B$

A2) Se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$ então $X \subseteq A$

Ora, estas duas condições mostram precisamente que $A = B \cap A$. De modo dual se reconhece que: $A \subseteq B$ implica $A \cup B = B$. Posto isto, da relação $A \cap B \subseteq A$ resulta $A \cup (A \cap B) = A$.

De modo dual se demonstram as outras leis de cálculo.

É importante observar (Dedekind) que as chamadas

<u>LEIS IDEMPOTENTES</u> - $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$ são consequências de R3. Com efeito, substituindo, no axioma R3, B por $A \cap B$ tem-se $A \cap (A \cup (A \cap B)) = A$, mas $A \cup (A \cap B) = A$ logo $A \cap A = A$. De modo dual se prova que $A \cup A = A$.

<u>LEMA 8</u> - (Da CONSISTÊNCIA) <u>Num reticulado a condição</u> $A \subseteq B$ <u>é equivalente a</u> $A \cap B = A$ (<u>e a</u> $A \cup B = B$).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Já provámos que $A \subseteq B$ implica $A \cap B = A$. Suponhamos agora que $A \cap B = A$ então será $A \cap B = A \subseteq B$, c.q.d. De modo dual se prova a outra equivalência.

<u>COROLÁRIO</u> - <u>Num reticulado a igualdade</u> $A \cap B = A$ <u>implica</u>

$A \cup B = B$ <u>e recìprocamente</u>.

<u>TEOREMA 5 - Se</u> $\mathcal{R}$ <u>fôr um conjunto sôbre o qual estão definidas as duas operações binárias e unívocas</u> $\cup$ <u>e</u> $\cap$ <u>que satisfazem aos axiomas</u> R1, R2 <u>e</u> R3, <u>então</u> $\mathcal{R}$ <u>é um reticulado no qual</u> $A \cap B$ <u>é o ínfimo de</u> A <u>e</u> B <u>e</u> $A \cup B$ <u>o supremo de</u> A <u>e</u> B.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - De acôrdo com o lema da Consistência ponhamos $A \subseteq B$ para indicar que $A \cap B = A$. Definida assim a relação binária $\subseteq$ sôbre $\mathcal{R}$ a demonstração do teorema compreenderá três partes.

<u>1ª parte - A relação</u> $\subseteq$ <u>é uma relação de ordem</u>.

<u>AXIOMA 01</u> - Como as leis idempotentes se demonstram a partir de R1, R2, R3, teremos $A \cap A = A$, qualquer que seja A e portanto $A \subseteq A$.

<u>AXIOMA 02</u> - Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, isto é, que $A \cap B = a$ e $B \cap A = B$. Pela lei comutativa, R2, será $A \cap B = B \cap A$ e portanto $A = B$, c.q.d.

<u>AXIOMA 03</u> - Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, isto é,

$$A \cap B = A \quad \text{e} \quad B \cap C = B$$

então, pela lei associativa, R1, será

$$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B = A$$

isto é, $A \subseteq C$, c.q.d.

<u>2ª parte</u> - $A \cap B$ <u>é o ínfimo de</u> A <u>e</u> B <u>relativamente à ordem</u> $\subseteq$, <u>anteriormente definida</u>.

Temos, então, que provar que

A1) $A \cap B$ é um limite inferior de A e B, isto é, que

$A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, ou seja, que

$(A \cap B) \cap A = A \cap B$ e $(A \cap B) \cap B = A \cap B$

Ora, pelas leis comutativa e associativa:

$$(A \cap B) \cap A = A \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap B = A \cap B$$
$$(A \cap B) \cap B = A \cap (B \cap B) = A \cap B \qquad \text{c.q.d.}$$

A2) Se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$ então $X \subseteq A \cup B$

Suponhamos então que $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$, isto é

$$X \cap A = X \quad \text{e} \quad X \cap B = X$$

então

$$X \cap (A \cap B) = (X \cap A) \cap B = X \cap B = X$$

e portanto

$$X \subseteq A \cap B \qquad \text{c.q.d.}$$

As condições A1) e A2) mostram que $A \cap B$ é o ínfimo de A e B.

3ª parte - $A \cup B$ é o supremo de A e B, relativamente à relação de ordem $\subseteq$.

A demonstração é dual da precedente.

Além das regras de cálculo anteriormente indicadas vamos indicar outros que utilizaremos com frequência.

LEMA 9 - Num reticulado $\mathcal{R}$ são válidas as seguintes regras de cálculo:

1) Se $A \subseteq B$ e $A_1 \subseteq B_1$ então $A \cap A_1 \subseteq B \cap B_1$ e $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$

2) Se $A \subseteq B$ então $A \cap C \subseteq B \cap C$ e $A \cup C \subseteq B \cup C$, qualquer que seja C.

3) Se $A \cap B = A \cup B$ então $A = B$.

4) Leis semi-distributivas (M. Klein)

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$$
$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup C$$

DEMONSTRAÇÃO 1) Por definição de ínfimo tem-se

(1) $A \cap A_1 \subseteq A$ e (2) $A \cap A_1 \subseteq A_1$

e por hipótese

(1') $A \subseteq B$ e (2') $A_1 \subseteq B_1$

De (1) e (1') resulta, por O3, (3) $A \cap A_1 \subseteq B$

De (2) e (2') resulta, por O3, (3') $A \cap A_1 \subseteq B_1$

De (3) e (3') por definição de ínfimo de B e B_1, resulta

$A \cap A_1 \subseteq B \cap B_1$, c.q.d.

Por dualidade se demonstra que $A \cup A_1 \subseteq B \cup B_1$.

2) Como $C \subseteq C$, então 2) é um caso particular de 1), $[C = A_1 = B_1]$.

3) Dum modo geral tem-se $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ e $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$. Portanto se $A \cap B = A \cup B$ será $A \cap B = A \cup B = A = B$, c.q.d.

4) De $A \cap C \subseteq A$ e $B \cap C \subseteq B$ resulta, por 1),

(1) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B$

De $A \cap C \subseteq C$ e $B \cap C \subseteq C$ resulta

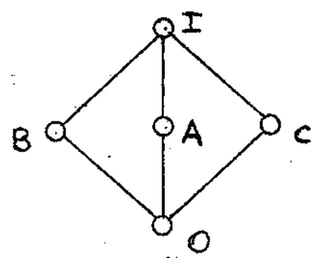
(1') $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq C$

De (1) e (1'), resulta

$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

Por dualidade podemos afirmar que é válida a segunda lei semi-distributiva.

16 - TÁBUAS DE SUPREMO E ÍNFIMO - Um reticulado fica, como acabamos de ver, completamente determinado quando se conhecem os valores de $A \cap B$ e $A \cup B$ para todos os valores de A e B. Consideremos, por exemplo, o reticulado cujo diagrama de Hasse é:



As tábuas de supremo e ínfimo são

$X \cup Y$

X \ Y	O	A	B	C	I
O	O	A	B	C	I
A	A	A	I	I	I
B	B	I	B	I	I
C	C	I	I	C	I
I	I	I	I	I	I

$X \cap Y$

X \ Y	O	A	B	C	I
O	O	O	O	O	O
A	O	A	O	O	A
B	O	O	B	O	B
C	O	O	O	C	C
I	O	A	B	C	I

É, porém, mais difícil verificar que estas tábuas definem um reticulado (reconhecendo que são válidas as leis de cálculo R1, R2 e R3) do que verificar que o diagrama de Hasse anterior representa num reticulado.

17- <u>RETICULADOS COMPLETOS</u> - Uma classe importante de reticulados é a seguinte:

<u>DEFINIÇÃO 8</u> - <u>Diz-se que um reticulado</u> $\mathcal{R}$ <u>é completo, quando todo o sub-conjunto</u> $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, <u>não vazio, de elementos de</u> $\mathcal{R}$, <u>tiver um supremo</u> $\bigcup A_\alpha$ <u>e um ínfimo</u> $\bigcap_\alpha A_\alpha$.

É evidente que todo o reticulado finito é completo. Todo reticulado completo tem como último elemento o supremo de todos os seus elementos e como primeiro elemento o ínfimo de todos os seus elementos.

<u>TEOREMA 6</u> - (G. Birkhoff) <u>Para que um conjunto ordenado</u> $\mathcal{R}$, <u>seja um reticulado completo é necessário e suficiente que seja verificada uma das duas condições seguintes</u>:

1ª) $\mathcal{R}$ tem último elemento e qualquer sub-conjunto, não vazio, $\mathcal{A} \leq \mathcal{R}$ tem um ínfimo.

2ª) $\mathcal{R}$ tem primeiro elemento e qualquer sub-conjunto, não vazio $\mathcal{A} \leq \mathcal{R}$ tem um supremo.

<u>cada uma das quais é dual da outra</u>.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - É evidente que a condição 1ª) é necessária. Para demonstrar que ela é suficiente basta provar que qualquer sub-conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$, não vazio, de elementos de $\mathcal{R}$, tem um supremo. Para isso, seja $\mathcal{M} = \{M_\beta\}$ o conjunto de todos os limites superiores do conjunto $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{R}$ tem um último elemento I, e I é limite superior de $\mathcal{A}$, então o conjunto $\mathcal{M}$ não é vazio.
Ponhamos

$$M = \text{inf.}\ (\mathcal{M}) = \bigcap_\beta M_\beta$$

que existe por hipótese.

Para provar que $\mathcal{A}$ tem por supremo M basta mostrar que (Def. 6*)

$A1^*)$ $A_\alpha \subseteq M$, qualquer que seja α.

$A2^*)$ Se $A_\alpha \subseteq X$, qualquer que seja α então $M \subseteq X$.

Como cada M_β é um limite superior do conjunto $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ tem-se

$A_\alpha \subseteq M_\beta$, quaisquer que sejam α e β.

e portanto, para cada α, será

$A1^*)$ $A_\alpha \subseteq M = \bigcap_\beta M_\beta$

Suponhamos agora que X é tal que

$A_\alpha \subseteq X$, qualquer que seja α

então X é um limite superior de $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ e portanto existirá um índice β_0 tal que $X = M_{\beta_0}$ logo, por definição de ínfimo, teremos

$M \subseteq X = M_{\beta_0}$

Acabamos assim de provar que M verifica a condição $A2^*)$ logo

$M = \bigcup_\alpha A_\alpha$

Por dualidade é válida a segunda parte do teorema.

Como exemplo de reticulados completos, podemos indicar, além do exemplo 6, o seguinte:

<u>EXEMPLO 8</u> - Uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tal que:

F1) Existe um conjunto $I \in \mathcal{F}$ que contém todos os outros conjuntos de $\mathcal{F}$.

F2) Se $\{F_\alpha\}$ é uma sub-família, não vazia, de conjuntos de $\mathcal{F}$, então a sua interseção $\bigwedge_\alpha F_\alpha$ pertence à família $\mathcal{F}$. Diremos, então, que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos <u>completamente multiplicativa</u>. Como exemplo de famílias nestas condições, podemos indicar as seguintes: a família de todos, 1º) os sub-grupos de um grupo, 2º) os sub-grupos normais de um grupo, 3º) os sub-aneis de um anel, 4º) os sub-corpos de um corpo, 5º) os sub-espaços vetoriais de um espaço vetorial, etc.

Consideremos a família $\mathcal{F}$ de todos os sub-conjuntos finitos de um conjunto infinito. A interseção de uma família, não vazia, de conjuntos finitos é um conjunto finito e, portanto, $\mathcal{F}$ verifica a condição F2 do Exemplo 8; mas na família $\mathcal{F}$ não existe nenhum conjunto que contenha todos os outros, logo, em virtude do teorema 6, $\mathcal{F}$ não é um reticulado completo.

18 - <u>ADERÊNCIA E ESPAÇOS TOPOLÓGICOS</u> - Vamos agora indicar uma categoria muito geral de reticulados completos, que se encontram, com muita frequência, e que é na realidade o exemplo mais geral de tais reticulados (afirmação que não será demonstrada no momento).

Quando a cada sub-conjunto X de um conjunto fundamental I fizermos corresponder um sub-conjunto a(X) de I, diremos que a correspondência $X \to a(X)$ é uma <u>função de conjunto</u> definida sôbre I, (na realidade trata-se de uma função definida sôbre 2^I), e que <u>a</u> é uma <u>função</u> ou <u>operador</u>.

<u>DEFINIÇÃO 9</u> - <u>Diremos que o operador</u> $X \to a(X)$, <u>definido sôbre o conjunto</u> I, <u>é um operador de fêcho ou aderência se forem verificados os seguintes axiomas</u>:

<u>AXIOMA $\overline{\text{I}}$.</u> (Dilatação) $X \leq a(X)$
<u>AXIOMA $\overline{\text{II}}$.</u> (Monotonia) $X \leq Y$ implica $a(X) \leq a(Y)$.
<u>AXIOMA $\overline{\text{III}}$.</u> (Idempotência) $a(a(X)) = a(X)$.

Se um operador <u>a</u> verificar o axioma $\overline{\text{I}}$, diz-se um <u>dilatador</u>, se verifica o axioma $\overline{\text{II}}$, diz-se <u>monótono</u>, se verifica o axioma $\overline{\text{III}}$, diz-se <u>idempotente</u>.

Um operador de fêcho é portanto um dilator, monótono e idempotente.

Diremos que um <u>conjunto</u> $F \leq I$ é <u>fechado</u> ou <u>invariante</u>, relativamente ao operador <u>a</u> se fôr $a(F) = F$.

<u>TEOREMA 7</u> - <u>A família $\mathcal{F}$ dos conjuntos fechados relativamente a um operador de aderência</u> $X \to a(X)$, <u>é uma família completamente multiplicativa de conjuntos</u>.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Em virtude da definição, indicada no exemplo 8, basta provar que:

<u>F1</u>) <u>$I \in \mathcal{F}$</u>. Com efeito tem-se $a(I) \leq I$ e pelo axioma $\overline{\text{I}}$, $I \leq a(I)$ logo $a(I) = I$ e portanto $I \in \mathcal{F}$.

<u>F2</u>) <u>Se $F_\alpha \in \mathcal{F}$ então $\bigwedge_\alpha F_\alpha \in \mathcal{F}$</u>. Suponhamos que $F_\alpha \in \mathcal{F}$, isto é, que $a(F_\alpha) = F_\alpha$ e ponhamos $F = \bigwedge_\alpha F_\alpha$, então

$$F \leq F_\alpha \text{ , qualquer que seja } \alpha$$

donde, pelo axioma $\overline{II}$,

$$a(F) \leq a(F_\alpha) = F_\alpha$$

e portanto

$$(1) \quad a(F) \leq \bigwedge_\alpha F_\alpha = F$$

Por outro lado, pelo axioma $\overline{I}$, tem-se

$$(2) \quad F \leq a(F)$$

De (1) e (2) resulta $a(F) = F$, isto é, $F \in \mathcal{F}$, c.q.d.

<u>COROLÁRIO</u> - <u>A família</u> $\mathcal{F}$, <u>do teorema anterior, é um reticulado completo</u>.

É interessante notar que na demonstração do teorema 7, só intervieram os axiomas $\overline{I}$ e $\overline{II}$. Já o mesmo não acontece com a seguinte.

<u>PROPRIEDADE F</u> - $a(X)$ <u>é igual à interseção de todos os conjuntos fechados que contêm</u> X.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja $\{F_\alpha(X)\}$ a família de todos os conjuntos fechados que contêm X, isto é, tais que:

$$(1) \quad a[F_\alpha(X)] = F_\alpha(X)$$

$$(2) \quad X \leq F_\alpha(X)$$

e ponhamos

$$F(X) = \bigwedge_\alpha F_\alpha(X)$$

A família considerada não é vazia visto que entre os conjuntos de família, figura sempre o conjunto I, qualquer que seja X.

De (2) resulta

$$(3) \quad X \leq F(X) \leq F_\alpha(X)$$

Em virtude da propriedade F2 referida na demonstração do teorema 7, podemos também afirmar que

$$(4) \quad F(X) \in \mathcal{F} \quad \text{isto é} \quad a(F(X)) = F(X)$$

Por outro lado tem-se, pelo axioma $\overline{I}$,

$$(3') \quad X \leq a(X)$$

e pelo axioma $\overline{III}$,

(4') $a(X) \in \mathfrak{F}$, visto que $a(a(X)) = a(X)$.

As condições (3') e (4') mostram que $a(X)$ é um conjunto fechado que contém X, logo $a(X)$ pertence à família $\{F_\alpha(X)\}$, e portanto em virtude de (3) teremos

(5) $F(X) \leq a(X)$

De (3) resulta, utilizando o axioma $\overline{II}$,

(6) $a(X) \leq a\left[F(X)\right] = F(X)$

De (5) e (6) resulta então $a(X) = F(X) = \bigwedge_\alpha F_\alpha(X)$, c.q.d.

A propriedade F permite determinar o operador $a(X)$, a partir da família $\mathfrak{F}$, dos conjuntos fechados, por meio da fórmula

(F) $$\boxed{a(X) = \bigwedge_\alpha F_\alpha(X)}$$

Diremos, muitas vezes, que <u>a(X) é o menor conjunto fechado que contém X</u>, ou <u>o conjunto fechado gerado por X</u>.

É possível obter um operador de fêcho a partir de qualquer família completamente multiplicativa como vai indicado no seguinte teorema:

<u>TEOREMA 8</u> - <u>Seja $\mathfrak{F}$ uma família de conjuntos, completamente multiplicativa, e ponhamos por</u>

<u>DEFINIÇÃO 10</u> - $a(X)$ <u>igual à interseção de todos os conjuntos de família $\mathfrak{F}$ que contém</u> X (onde $X \leq I \in \mathfrak{F}$) <u>então</u> $a(X)$ <u>é um operador de aderência, que tem por família de conjuntos fechados a família dada</u> $\mathfrak{F}$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja $X \leq I \in \mathfrak{F}$ e $\{F_\alpha(X)\}$ a família de todos os conjuntos da família $\mathfrak{F}$ que contém X, então por definição

$$a(X) = \bigwedge_\alpha F_\alpha(X)$$

Como $X \leq F_\alpha(X)$, qualquer que seja α, teremos

(<u>Axioma I</u>) : $X \leq a(X)$

Seja $X \leq Y$, como todo o conjunto de $\mathfrak{F}$ que contém Y, contém também X então a família $\{F_\alpha(Y)\}$ é uma parte da família $\{F_\alpha(X)\}$ e portanto

$$\bigwedge_\alpha F_\alpha(X) \leq \bigwedge_\alpha F_\alpha(Y)$$

isto é

$$a(X) \leq a(Y)$$

Acabamos assim de provar que

(Axioma $\overline{II}$) : $X \leq Y$ implica $a(X) \leq a(Y)$.

Como a família $\mathcal{F}$ é completamente multiplicativa, podemos afirmar que $a(X) = \bigwedge_{\alpha} F_{\alpha}(X)$ é um conjunto de $\mathcal{F}$ e portanto

(Axioma $\overline{III}$) : $a(a(X)) = a(X)$.

Os axiomas $\overline{I}$, $\overline{II}$ e $\overline{III}$ mostram que o operador a é um operador de aderência.

Seja agora $\mathcal{F}_a$ a família dos conjuntos fechados relativamente ao operador a. Seja $X \in \mathcal{F}$ então pela definição de $a(X)$ teremos $a(X) = X$, isto é, $X \in \mathcal{F}_a$ e portanto

(1) $$\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_a$$

Seja $X \in \mathcal{F}_a$, isto é, $a(X) = X$, como $a(X) \in \mathcal{F}$, será $X \in \mathcal{F}$ e portanto

(2) $$\mathcal{F}_a \leq \mathcal{F}$$

De (1) e (2) resulta $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a$, c.q.d.

Existe uma categoria importante de operadores de aderência que vai indicada na seguinte definição

DEFINIÇÃO 9* - Seja $a(X)$ um operador de aderência, definido sôbre I, tal que

AXIOMA $\overline{0}$ - $a(\emptyset) = \emptyset$

Ao par $[2^I, a]$ formado pela família 2^I de todos os sub-conjuntos do conjunto fundamental I e pelo operador $a(X)$ que verifica os axiomas $\overline{0}$, $\overline{I}$, $\overline{II}$ e $\overline{III}$, dá-se o nome de espaço topológico de Sierpinski ou espaço $\mathcal{F}$.

A expressão "espaço $\mathcal{F}$", serve para sugerir que o operador de aderência é determinado unìvocamente pela família dos conjuntos fechados. Esta família de conjuntos goza ainda da seguinte propriedade:

FO - $\emptyset \in \mathcal{F}$

Se no enunciado do teorema 8 supusermos que $\mathcal{F}$ verifica também a propriedade F0, então o operador de aderência correspondente verifica o axioma $\overline{0}$.

Um espaço de Sierpinski pode portanto ser definido como o par $[2^I, \mathcal{F}]$ onde $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos, ditos fechados, que verifica os axiomas F0, F1 e F2.

Na topologia geral a aderência de um conjunto é representado de preferência pela notação $\overline{X}$ (fêcho do conjunto X).

A família $\mathcal{F}$ dos conjuntos fechados de um espaço de Sierpinski é um reticulado completo (Corolário do Teorema 7).

19- ISOMORFISMOS. HOMOMORFISMOS - Sejam $[\mathcal{O}, \subseteq]$ e $[\mathcal{O}^*, \subseteq]$ dois conjuntos ordenados. Não haverá inconveniente em representarmos as duas relações de ordem pela mesma notação.

Seja f(X) uma transformação biunívoca de $\mathcal{O}$ sôbre $\mathcal{O}^*$. Ponhamos $X^* = f(X)$, onde $X \in \mathcal{O}$ e $X^* \in \mathcal{O}^*$.

Diremos que os dois conjuntos ordenados $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^*$ são isomorfos e escreveremos $\mathcal{O} \cong \mathcal{O}^*$ se fôr verificada a seguinte condição:

AXIOMA I - $X \subseteq Y$ é equivalente a $f(X) \subseteq f(Y)$.

Também diremos que f é um isomorfismo de $\mathcal{O}$ sôbre $\mathcal{O}^*$ e escreveremos $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^*$.

LEMA 10 - Se f fôr um isomorfismo de $\mathcal{O}$ sôbre $\mathcal{O}^*$, e se o conjunto $\{A_\alpha\}$ de elementos de $\mathcal{O}$ tiver um supremo $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ (ínfimo $A = \bigcap_\alpha A_\alpha$) então o conjunto $\{f(A_\alpha)\}$ de elementos de $\mathcal{O}^*$ terá um supremo $A^* = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$ (ínfimo $A^* = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$) e será

$A^* = f(A)$, isto é:

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$$

$$(\text{respect. } f(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)).$$

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos então que existe o supremo

$$A = \bigcup_\alpha A_\alpha$$

então será

$A1^*$) $A_\alpha \subseteq A$, qualquer que seja α

$A2^*$) Se $A_\alpha \subseteq X$, qualquer que seja α

então

$$A \subseteq X.$$

Da condição $A1^*$) resulta pelo fato de f ser um isomorfismo <u>$B1^*$) $f(A_\alpha) \subseteq f(A)$</u>

Seja agora X^* um limite superior do conjunto $\{f(A_\alpha)\}$ isto é

(1) $f(A_\alpha) \subseteq X^*$, qualquer que seja α, como $X^* = f(X)$,

teremos $X \in \mathcal{O}$,

$$f(A_\alpha) \subseteq f(X), \text{ qualquer que seja } \alpha,$$

e como f é um isomorfismo, daqui resulta que

$$A_\alpha \subseteq X, \text{ qualquer que seja } \alpha$$

donde, pela condição $A2^*$,

$$A \subseteq X$$

e portanto

(2) $f(A) \subseteq f(X)$

Acabamos assim de demonstrar que (2) é uma consequência de (1) isto é

$B2^*$) <u>Se</u> $f(A_\alpha) \subseteq X^*$, <u>qualquer que seja</u> α, <u>então</u> $f(A) \subseteq X^*$.

As condições $B1^*$) e $B2^*$) mostram que f(A) é o supremo do conjunto $\{f(A_\alpha)\}$ isto é

$$f(A) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$$

e que demonstra uma parte do teorema. De modo dual se demonstra a outra parte.

COROLÁRIO 1 - <u>Nas condições do lema 10, se $\mathcal{O}$ tem um primeiro elemento 0, então $\mathcal{O}^*$ tem por primeiro elemento</u> f(0), <u>se $\mathcal{O}$ tem um último elemento I, então $\mathcal{O}^*$ tem por último elemento</u> f(I).

COROLÁRIO 2 - <u>Um conjunto ordenado $\mathcal{O}^*$ isomorfo a um reticulado</u> (<u>completo</u>) <u>é um reticulado</u> (<u>completo</u>).

Daremos o nome de <u>automorfismo do conjunto ordenado</u> $\mathcal{O}$ a todo o isomorfismo de $\mathcal{O}$ sôbre $\mathcal{O}$.

Daremos o nome de <u>automorfismo dual</u> do conjunto ordenado

$[\mathcal{O}, \subseteq]$ a todo o isomorfismo de $[\mathcal{O}, \subseteq]$ sôbre o conjunto ordenado dual $[\mathcal{O}, \supseteq]$. Um <u>automorfismo dual</u> do conjunto ordenado $\mathcal{O}$ é portanto uma correspondência biunívoca h(A) de $\mathcal{O}$ sôbre $\mathcal{O}$ que verifica a seguinte

<u>CONDIÇÃO D1</u> - <u>$A \subseteq B$ é equivalente a</u> $h(A) \supseteq h(B)$.

Daremos o nome de <u>involução de $\mathcal{O}$</u> a todo o automorfismo dual de período 2, isto é, tal que

<u>CONDIÇÃO D2</u> - $h(h(A)) = A$.

Como a noção de ínfimo (supremo) é dual da noção de supremo (ínfimo) podemos afirmar em virtude do Lema 10, que

<u>COROLÁRIO 3</u> - <u>Se o conjunto ordenado $\mathcal{O}$</u>, <u>admite uma involução</u> h, <u>então</u>

1º) <u>Se o conjunto</u> $\{A_\alpha\}$ <u>admite um supremo</u> (ínfimo), <u>o mesmo conjunto admite um ínfimo</u> (supremo) <u>e</u>

D3) $h(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha h(A_\alpha)$,

(respectivamente D4. $h(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha h(A_\alpha)$)
Em particular

<u>COROLÁRIO 4</u> - <u>Tôda a involução de um reticulado, verifica as chamadas leis de Morgan</u>:

D3: $h(A \cup B) = h(A) \cap h(B)$
D4: $h(A \cap B) = h(A) \cup h(B)$

Seja agora f(X) uma transformação unívoca do reticulado $\mathcal{R}$ sôbre $\mathcal{R}^*$. Diremos que f é:

1º) Um <u>homomorfismo de ordem</u> se
$X \subseteq Y$ implica $f(X) \subseteq f(Y)$

2º) Um <u>inf-homomorfismo</u> se
$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

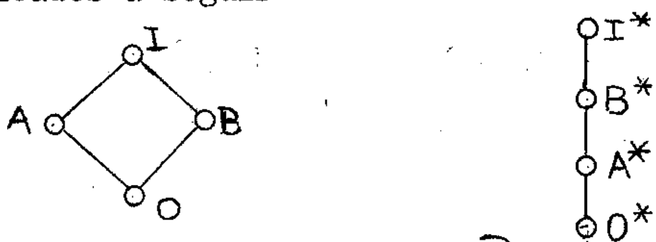
3º) Um <u>sup-homomorfismo</u> se
$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

4º) Um <u>homomorfismo</u> se
$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

e

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

Consideremos os dois reticulados $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^*$ cujos diagramas de Hasse vão indicados a seguir



E a transformação (biunívoca) de $\mathcal{R}$ sôbre $\mathcal{R}^*$ definida por

$$f(O) = O^*, \quad f(A) = A^*, \quad f(B) = B^*, \quad f(I) = I^*,$$

trata-se de um <u>homomorfismo de ordem que não é um inf-homomorfismo nem um sup-homomorfismo</u> visto que:

$$f(A \cap B) = f(O) = O^*, \quad f(A) \cap f(B) = A^* \cap B^* = A^*$$

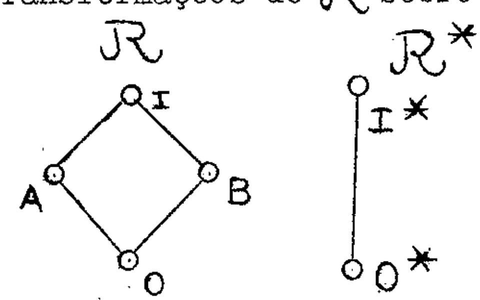
$$f(A \cup B) = f(I) = I^*, \quad f(A) \cup f(B) = A^* \cup B^* = B^*$$

Um inf-homomorfismo $f(X)$ (e portanto um homomorfismo) é sempre um homomorfismo de ordem. Com efeito se fôr $X \subseteq Y$ teremos $X \cap Y = X$ e portanto $f(X) = f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ d'onde $f(X) \subseteq f(Y)$, c.q.d.

Um sup-homomorfismo (e portanto um homomorfismo) é sempre um homomorfismo de ordem.

Consideremos os dois reticulados cujos diagramas de Hasse vão a seguir indicados e as duas transformações de $\mathcal{R}$ sôbre $\mathcal{R}^*$, f e g, dadas por:

$f(O) = O^*$	$g(O) = O^*$
$f(A) = O^*$	$g(A) = I^*$
$f(B) = O^*$	$g(B) = I^*$
$f(I) = I^*$	$g(I) = I^*$



<u>f é um inf-homomorfismo, mas não é um sup-homomorfismo</u> visto que

$$f(A \cup B) = f(I) = I^* \quad e \quad f(A) \cup f(B) = O^* \cup O^* = O^*$$

g é um sup-homomorfismo, mas não é um inf-homomorfismo, visto que

$$g(A \cap B) = g(O) = O^* \quad e \quad g(A) \cap g(B) = I^* \cap I^* = I^*$$

Vamos provar agora que:

<u>Se f fôr</u> 1º) <u>uma transformação biunívoca do reticulado</u>

$\mathcal{R}$ <u>sôbre o conjunto ordenado</u> $\mathcal{R}^*$; 2º) <u>um inf-homomorfismo de</u> $\mathcal{R}$ <u>sôbre</u> $\mathcal{R}^*$; <u>então</u> f <u>é um isomorfismo de</u> $\mathcal{R}$ <u>sôbre</u> $\mathcal{R}^*$
Como f é um inf-homomorfismo, f será, como vimos, um homomorfismo de ordem, isto é: $X \subseteq Y$ implica $f(X) \subseteq f(Y)$. Resta agora provar que $f(X) \subseteq f(Y)$ implica $X \subseteq Y$. Suponhamos que $f(X) \subseteq f(Y)$, então teremos.

(a) $\quad f(X) = f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$

Como f é uma transformação biunívoca de (a) resulta que $X = X \cap Y$, logo $X \subseteq Y$, c.q.d.

No enunciado anterior podemos, como se reconhece imediatamente, substituir a expressão <u>inf-homomorfismo</u> por <u>sup-homomorfismo</u> (e portanto por <u>homomorfismo</u>).

<u>EXERCÍCIOS</u> - 19.1) As condições D1) e D2) são equivalentes a D1) e D3), a D1) e D4).

19.2) Qualquer cadeia com um número finito n de elementos é isomorfa ao conjunto dos inteiros 1, 2, ..., n ordenado pela relação "<u>menor ou igual</u>".

20 - σ-<u>RETICULADOS</u> - Num reticulado existem sempre o ínfimo e o supremo de um conjunto finito de elementos, mas pode acontecer que exista ou não, o supremo de um conjunto numerável de elementos do reticulado. Por exemplo, a família dos sub-conjuntos finitos da reta é um reticulado, visto que a reunião e interseção de dois conjuntos finitos é um conjunto finito; mas a reunião de um conjunto numerável de conjuntos finitos da reta pode não ser um conjunto finito. Diz-se que um reticulado $\mathcal{R}$ é um σ-reticulado (δ -reticulado) se qualquer conjunto numerável de elementos de $\mathcal{R}$ tiver um supremo (ínfimo) que será representado pela notação

$$X = \bigcup_1^{\infty} X_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$$

$$(X = \bigcap_1^{\infty} X_n = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \cap \dots)$$

Se puzermos

$$S_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

teremos

1º) $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$.

2º) $X = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \ldots$

Com efeito, 1º) como

$$S_{n+1} = S_n \cup X_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

teremos

$$S_n \subseteq S_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

2º) Por definição de supremo, tem-se

$$X_n \subseteq X \qquad n = 1, 2, \ldots$$

logo

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \subseteq X \qquad n = 1, 2, \ldots$$

isto é

$$(1) \quad S_n \subseteq X \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Seja agora X^* um elemento tal que

$$S_n \subseteq X^* \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Como

$$X_n \subseteq S_n \quad \text{será} \quad X_n \subseteq X^*, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e portanto

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots \subseteq X^*$$

Acabamos assim de provar que

$$(2) \quad \text{Se } S_n \subseteq X^*, \ n = 1, 2, \ldots \quad \text{então } X \subseteq X^*.$$

As fórmulas (1) e (2) mostram que X é o supremo dos S_n, isto é

$$X = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots$$

O supremo de um conjunto numerável de elementos pode ser representado como o supremo de uma sucessão monòtonamente ascendente (Nº11)

Podemos dizer que um reticulado é <u>σ-monótono</u> se <u>tôda a sucessão</u>, de elementos do reticulado, monòtonamente ascendente tiver um supremo; mas na realidade não se trata de uma noção distinta da noção de σ-reticulado.

Em primeiro lugar é evidente que todo o σ-reticulado é σ-monótono.

Seja agora $\mathcal{R}$ um reticulado σ-monótono.

Seja X_1, X_2, ..., X_n, ... uma sucessão arbitrária de elementos $\mathcal{R}$. Ponhamos

(3) $S_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$

então teremos

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$$

e esta sucessão monòtonamente ascendente terá, por hipótese um supremo:

(4) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \cup \dots$

Vamos mostrar que <u>S é o supremo</u> da sucessão dada X_1, X_2, ..., X_n,...
Por (3), temos

(5) $X_n \subseteq S_n$

e da fórmula (4) resulta

(6) $S_n \subseteq S$

De (5) e (6) resulta

<u>CONDIÇÃO A 1*</u>) $X_n \subseteq S$ $\quad n = 1, 2, \dots$

Seja agora S^* um elemento tal que

$$X_n \subseteq S^*, \qquad n = 1, 2, \dots$$

então será

$$S_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \subseteq S^*, \quad n = 1, 2, \dots$$

e como S é o supremo dos S_n teremos

$$S \subseteq S^*$$

Acabamos assim de provar que:

<u>CONDIÇÃO A 2*</u>) Se $X_n \subseteq S^*$, $n = 1, 2, \dots$ então $S \subseteq S^*$.

As Condições A1*) e A2*) mostram que S é o supremo dos X_n isto é, existe

$$S = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots \qquad \text{c.q.d.}$$

Quando um reticulado $\mathcal{R}$ fôr simultâneamente um σ-reticulado e um δ-reticulado, diremos que $\mathcal{R}$ é um $\sigma\delta$-reticulado.

§ 3 - FILTROS E IDEAIS

21- TEOREMAS DE ZORN - As noções de filtro e de ideal desempenham um papel decisivo em certas partes da teoria dos reticulados. É o que acontece, por exemplo, na teoria da representação dos reticulados distributivos onde os filtros (ou os ideais) primos são os elementos que se prestam mais naturalmente à descrição de certos resultados. Independentemente do seu interesse na teoria geral dos reticulados, a noção de ideal aparece com frequência na topologia geral e o mesmo acontece com a noção de filtro, (uniformidade, compatificação, etc.), desde que Henri Cartan mostrou a importância desta noção na teoria dos limites. Trata-se de noções que é conveniente conhecer, porque elas dão origem à técnicas adequadas ao estudo de diversos problemas. Neste primeiro capítulo indicaremos, apenas, as noções mais importantes para o estudo dos capítulos seguintes. Na teoria dos filtros teremos necessidade de utilizar, com frequência, um dos chamados teoremas de Zorn (cada um dos quais é equivalente ao axioma da escolha de Zermelo). Veja E. Farah - Teorema de Zorn- Bol. Soc. Mat. S. Paulo, Vol. 1, pag. 19-34.

DEFINIÇÃO 10 - Um conjunto ordenado $\mathcal{O}$, diz-se indutivo superiormente (inferiormente) quando qualquer cadeia de $\mathcal{O}$ tiver um supremo (ínfimo) .

Um reticulado completo é portanto um exemplo de um conjunto ordenado, indutivo superiormente e inferiormente.

Uma das formas do teorema de Zorn é a seguinte (compare com o Exercício 9.1)

TEOREMA DE ZORN (A) - Todo o conjunto ordenado, indutivo superiormente (inferiormente) possue, pelo menos, um elemento maximal (minimal).

Para indicar a segunda forma do teorema de Zorn, comecemos por introduzir a seguinte definição. Diz-se que <u>Uma propriedade $\mathcal{P}$, relativa a conjuntos, tem caráter finito, se para que um conjunto</u> X <u>tenha a propriedade $\mathcal{P}$ fôr necessário e suficiente que todos os sub-conjuntos finitos de</u> X <u>tenham a propriedade $\mathcal{P}$</u>.

<u>TEOREMA DE ZORN (B)</u> - <u>Se uma propriedade $\mathcal{P}$, de alguns sub-conjuntos de</u> X, <u>tiver caráter finito, então existe um sub-conjunto</u> (de X) <u>máximo com a propriedade $\mathcal{P}$</u>.

Indiquemos finalmente a terceira forma do teorema de Zorn

<u>TEOREMA DE ZORN (C)</u> - <u>Todo o conjunto ordenado, contém uma cadeia $\mathcal{C}$, tal que qualquer limite superior</u> (inferior) <u>de $\mathcal{C}$, se existir, pertence a $\mathcal{C}$</u>.

Vamos demonstrar que estas três propriedades são equivalentes

1º) <u>A implica B.</u> Admitamos o teorema A e seja $\mathcal{O}$ a família, não vazia, de todos os sub-conjuntos de X que têm uma certa propriedade $\mathcal{P}$ de caráter finito. Vamos mostrar que a família de conjuntos $\mathcal{O}$, ordenada pela relação de inclusão, é indutiva superiormente. Para isso seja $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ uma cadeia de $\mathcal{O}$, ponhamos

$$C = \bigvee_\alpha C_\alpha$$

e mostremos que o conjunto C tem a propriedade $\mathcal{P}$, isto é, $C \in \mathcal{O}$. Como todos os C_α são sub-conjuntos de X então a sua reunião C também é um sub-conjunto de X e para demonstrar que C tem a propriedade $\mathcal{P}$, basta mostrar, visto que $\mathcal{P}$ tem caráter finito, que qualquer sub-conjunto finito de C tem a propriedade $\mathcal{P}$. Seja então $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um sub-conjunto finito arbitrário de C. Para cada elemento x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ existe um índice α_i tal que $x_i \in C_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Consideremos os conjuntos

$$C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_n}$$

como êles pertencem à cadeia $\mathcal{C}$ existe um deles C_{α_k} que contém todos os outros

$$C_{\alpha_i} \leq C_{\alpha_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e portanto

$$x_i \in C_{\alpha_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

isto é $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é um sub-conjunto (finito) do conjunto C_{α_k}, que tem a propriedade $\mathcal{P}$, e portanto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Mas como

$$C = \bigvee_\alpha C_\alpha$$

é evidente que C é o supremo (em $\mathcal{O}$) da cadeia dada $\mathcal{C}$. Pelo fato da família $\mathcal{O}$ ser indutiva superiormente, podemos afirmar pelo teorema A, que X contém um conjunto máximal com a propriedade $\mathcal{P}$, c.q.d.

2º) <u>B implica C</u>. Admitamos o teorema B como verdadeiro. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto ordenado e consideremos a seguinte propriedade dos sub-conjuntos de $\mathcal{X}$.

<u>PROPRIEDADE $\mathcal{P}$</u> - <u>O sub-conjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{X}$ é uma cadeia</u>.
O conjunto formado por um só elemento de $\mathcal{X}$ é evidentemente uma cadeia de $\mathcal{X}$, logo a família dos sub-conjuntos de $\mathcal{X}$ com a propriedade $\mathcal{P}$, não é vazia.

Temos, agora, que verificar que a propriedade $\mathcal{P}$ tem caráter finito, isto é:

<u>Para que um sub-conjunto $\mathcal{A} \leq \mathcal{X}$ seja uma cadeia é necessário e suficiente que qualquer sub-conjunto finito de $\mathcal{A}$ seja uma cadeia</u>.

o que é uma consequência imediata do exercício 11.3).

Nestas condições, podemos afirmar, pelo teorema B, que <u>$\mathcal{X}$ contém uma cadeia máxima $\mathcal{C}$</u>. Admitamos que existe um limite superior M da cadeia $\mathcal{C}$, então se acrescentarmos o elemento M à cadeia $\mathcal{C}$ obteremos ainda uma cadeia, logo o limite superior M deve pertencer à cadeia $\mathcal{C}$, porque no caso contrário $\mathcal{C}$ não seria uma cadeia máxima. Idem para qualquer limite inferior, o que termina a demonstração.

3º) <u>C implica A</u>. Admitamos o teorema C como verdadeiro e seja dado um conjunto ordenado $\mathcal{O}$ indutivo superiormente. Seja

$\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ a cadeia a que se refere o teorema C. Como $\mathcal{O}$ é indutivo superiormente esta cadeia $\mathcal{C}$ tem um supremo $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$, e é claro que C será um limite superior de $\mathcal{C}$ e portanto $C \in \mathcal{C}$. Teremos então qualquer que seja $C_\alpha \in \mathcal{C}$

(1) $\quad C_\alpha \subseteq C \quad$ onde $\quad C \in \mathcal{C}$.

Para mostrar que C é um elemento máximal de $\mathcal{O}$, basta mostrar que

<u>Se C^* é tal que $C \subseteq C^*$ então $C^* = C$.</u>

Com efeito se C^* é tal que (2) $C \subseteq C^*$ então pelo teorema C será $C^* \in \mathcal{C}$ e portanto em virtude da fórmula (1) teremos (3) $C^* \subseteq C$. De (2) e (3) resulta $C = C^*$ c.q.d.

De modo dual se demonstra a existência de um elemento minimal.

As demonstrações que utilizam o teorema de Zorn substituem com vantagem as demonstrações por indução transfinita.

22- <u>DEFINIÇÃO DE FILTRO E IDEAIS</u> - A definição de ideal que vamos apresentar, deve-se a Tarski (1930) e Stone (1934). A noção dual é a noção de filtro (ideal aditivo ou α-ideal, na terminologia de Stone) cuja importância em topologia geral foi posta em evidência, pela primeira vez, por Henri Cartan (1937).

Seja $\mathcal{O}$ um conjunto ordenado que verifica as duas condições seguintes:

1º) $\mathcal{O}$ Tem um primeiro elemento O.

2º) Dois elementos quaisquer de $\mathcal{O}$ têm um ínfimo. Um conjunto ordenado com esta propriedade diz-se um <u>inf-reticulado.</u> A noção dual é a de <u>sup-reticulado</u>.

Daqui resulta que tôda acoleção finita de elementos de $\mathcal{O}$ tem um ínfimo.

<u>DEFINIÇÃO 11</u> - <u>Diz-se que uma coleção, não vazia, $\mathbb{F}$ de elementos de $\mathcal{O}$ é um filtro se forem verificadas as seguintes condições:</u>

$\mathbb{F}$ 1 - <u>Todo o elemento de $\mathcal{O}$ que segue um elemento de $\mathbb{F}$ é um elemento de $\mathbb{F}$, isto é; se</u> $F \in \mathbb{F}$ <u>e</u> $F \subseteq X$ <u>então</u> $X \in \mathbb{F}$

$\mathbb{F}$ 2 - <u>O ínfimo de dois elementos de</u> $\mathbb{F}$ <u>é um elemento de</u> $\mathbb{F}$, <u>isto é</u>: <u>Se</u> $A, B \in \mathbb{F}$ <u>então</u> $A \cap B \in \mathbb{F}$.

$\mathbb{F}$ 3 - <u>O primeiro elemento</u> O <u>não pertence a</u> $\mathbb{F}$.

Da condição $\mathbb{F}$ 3 resulta imediatamente, que o conjunto $\mathbb{F}$ é diferente de $\mathcal{O}$. Recìprocamente, se $\mathbb{F}$ verifica a condição $\mathbb{F}$ 1 e é diferente de $\mathcal{O}$, então o primeiro elemento O não pertence a $\mathbb{F}$. Com efeito: Se O pertencesse a $\mathbb{F}$ então, em virtude da condição $\mathbb{F}$ 1, todos os elementos de $\mathcal{O}$ pertenceriam a $\mathbb{F}$, o que é impossível. Logo, na definição anterior, podemos dar ao axioma $\mathbb{F}$ 3, a forma seguinte

$\mathbb{F}$3 - $\mathbb{F} \neq \mathcal{O}$

Sob esta forma a definição 11, não faz intervir o primeiro elemento de $\mathcal{O}$, e aplica-se, portanto, no caso de um inf-reticulado (contendo ou não um primeiro elemento).

De $\mathbb{F}$ 1 e $\mathbb{F}$ 2 resulta que <u>o ínfimo de uma coleção finita de elementos de $\mathbb{F}$ é diferente de O</u>. Para indicar esta propriedade diremos que $\mathbb{F}$ goza da <u>propriedade de interseção finita</u> (em abreviatura: p. i. f.)

Suponhamos, agora, que $\mathcal{O}$ é um conjunto ordenado que verifica as seguintes condições (duais das indicadas anteriormente)

1º) $\mathcal{O}$ tem um último elemento I.

2º) Dois elementos quaisquer de $\mathcal{O}$ têm um supremo (sup-reticulado).

Daqui resulta que tôda a coleção finita de elementos de $\mathcal{O}$ tem um supremo.

<u>DEFINIÇÃO 11</u> - <u>Diz-se que uma coleção, não vazia $\mathfrak{J}$ de elementos de $\mathcal{O}$ é um ideal se forem verificadas as seguintes condições</u>:

$\mathfrak{J}$ 1 - <u>Todo o elemento de $\mathcal{O}$ que precede um elemento de $\mathfrak{J}$ é um elemento de $\mathfrak{J}$</u>.

$\mathfrak{J}$ 2 - <u>O supremo de dois elementos de $\mathfrak{J}$ é um elemento de $\mathfrak{J}$</u>.

$\mathfrak{J}$ 3 - <u>O último elemento</u> I <u>não pertence a $\mathfrak{J}$</u> (ou o que é equivalente $\mathfrak{J} \neq \mathcal{O}$).

De $\mathcal{J}$ 2) e $\mathcal{J}$ 3) resulta que o supremo de uma coleção finita de elementos de $\mathcal{J}$ é diferente de I. Para indicar esta propriedade diremos que $\mathcal{J}$ goza de propriedade de soma finita (p. s. f)

Num reticulado qualquer têm sentido as noções de filtro e de ideal. Como se trata de duas noções duais, basta na realidade estudar uma delas, porque é fácil obter os teoremas de demonstrações duais daquelas que vamos indicar.

Para simplificar a exposição, vamos estudar a teoria dos filtros num reticulado $\mathcal{R}$, com um primeiro e último elemento.

Comecemos por notar que o axioma $\mathbb{F}$ 1, da definição 11, pode ser substituido pelo seguinte

$\mathbb{F}\,1^*$ - Se $F \in \mathbb{F}$ e $E \in \mathcal{R}$ então $E \cup F \in \mathbb{F}$.

Com efeito seja $\mathbb{F}$ um filtro, $F \in \mathbb{F}$ e $E \in \mathcal{R}$ então como $F \subseteq E \cup F$ podemos afirmar pelo axioma $\mathbb{F}$ 1, que $E \cup F \in \mathbb{F}$. Portanto o axioma $\mathbb{F}$ 1 implica $\mathbb{F}\,1^*$. Suponhamos agora que a família $\mathbb{F}$ de elementos de $\mathcal{O}$ verifica o axioma $\mathbb{F}\,1^*$. Seja $F \in \mathbb{F}$ e $F \subseteq X$, então, por $\mathbb{F}\,1^*$, será

$$X = F \cup X \in \mathbb{F}$$

e é portanto válido o axioma $\mathbb{F}$ 1, c.q.d.

OBSERVAÇÃO - É conveniente notar que as definições de filtro e ideal dada por Stone, não são postulados os axiomas $\mathbb{F}$ 3 e $\mathcal{J}$ 3). Introduzir estas restrições equivale, como se reconhece fàcilmente, a excluir da teoria dos filtros e ideais, o conjunto formado por todos os elementos do reticulado $\mathcal{R}$ (que verifica evidentemente as condições $\mathbb{F}$ 1, $\mathbb{F}$ 2, $\mathcal{J}$ 1, $\mathcal{J}$ 2); o que é vantajoso em certos casos.

Nenhum filtro pode ser um ideal. Com efeito se o filtro $\mathbb{F}$ fôsse um ideal êle conteria o elemento O, o que é impossível.

EXEMPLO - Como primeiro exemplo de um filtro podemos indicar o seguinte: Seja A um elemento de $\mathcal{R}$, distinto de O, e consideremos a família $\mathbb{F}(A)$ de todos os elementos $X \in \mathcal{R}$ tais que $A \subseteq X$. Reconhece-se imediatamente que $\mathbb{F}(A)$ é um filtro a que se dá o nome de filtro principal, associado ao elemento $A \neq O$. Dá-se, dualmente, o nome de ideal principal, associado ao elemento $A \neq I$, à família $\mathcal{J}(A)$ de todos os elementos $X \in \mathcal{R}$ tais que $X \subseteq A$.

23 - FAMÍLIA DOS FILTROS DE UM RETICULADO - Seja Φ a família de todos os filtros de um reticulado $\mathcal{R}$, com primeiro e último elemento. Temos assim uma família de sub-conjuntos de $\mathcal{R}$. Comecemos por demonstrar que:

TEOREMA 9 - A interseção de uma família (não vazia) de filtros é um filtro.

DEMONSTRAÇÃO - Comecemos por notar que o elemento I do reticulado $\mathcal{R}$, pertence à todos os filtros. Então se $\{\mathbb{F}_\alpha\}$ fôr uma família de filtros de $\mathcal{R}$ e se puzermos

$$\mathbb{F} = \bigwedge_\alpha \mathbb{F}_\alpha$$

o conjunto $\mathbb{F}$, não é vazio, visto que pertencendo I a todos os filtros $\mathbb{F}_\alpha$, será $I \in \mathbb{F}$. Vamos agora mostrar que $\mathbb{F}$ é um filtro.

AXIOMA $\mathbb{F}$ 1 - Seja (1) $F \in \mathbb{F}$ e (2) $F \subseteq X$. De (1) resulta (3) $F \in \mathbb{F}_\alpha$, qualquer que seja α. De (2) e (3) resulta, pelo fato dos $\mathbb{F}_\alpha$ serem filtros, que $X \in \mathbb{F}_\alpha$, qualquer que seja α, e portanto $X \in \mathbb{F}$, c.q.d.

AXIOMA $\mathbb{F}$ 2 - Sejam $F_1 \in \mathbb{F}$ e $F_2 \in \mathbb{F}$, então $F_1 \in \mathbb{F}_\alpha$, $F_2 \in \mathbb{F}_\alpha$, qualquer que seja α, e portanto, como $\mathbb{F}_\alpha$ é um filtro, será $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}_\alpha$, qualquer que seja α, logo $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$ c.q.d.

AXIOMA $\mathbb{F}$ 3 - Como $O \notin \mathbb{F}_\alpha$ qualquer que seja α, então $O \notin \mathbb{F}$, o que termina a demonstração do teorema.

Consideremos a família Φ de todos os filtros de $\mathcal{R}$ ordenada pela relação de inclusão $\leqslant$. Convencionemos dizer que o filtro $\mathbb{F}$ é menos fino que o filtro $\mathbb{F}_1$, se fôr $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{F}_1$ (diremos também que $\mathbb{F}_1$ é mais fino que $\mathbb{F}$).

Então o conjunto ordenado $[\Phi, \leqslant]$ tem um primeiro elemento, a saber o filtro formado só pelo elemento I (filtro principal).

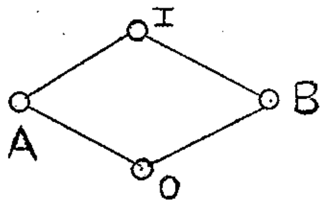
Além disso o filtro

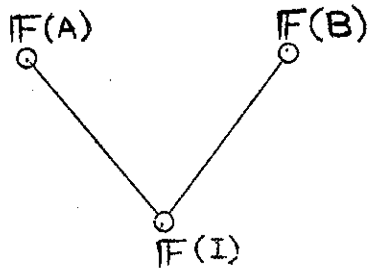
$$\mathbb{F} = \bigwedge_{\alpha} \mathbb{F}_{\alpha} \qquad , \text{ onde } \mathbb{F}_{\alpha} \in \Phi$$

é o ínfimo do conjunto $\{\mathbb{F}_{\alpha}\}$

Qualquer conjunto, não vazio, de filtros tem portanto um ínfimo.

Uma família, mesmo finita, de filtros, pode não ter um supremo, e portanto em regra não existirá um filtro mais fino que todos os outros, isto é Φ não tem, em regra um último elemento. Consideremos, por exemplo, o reticulado no qual só existem três filtros (todos principais) formados respectivamente pelos conjuntos $\mathbb{F}(A) = \{A, I\}$, $\mathbb{F}(B) = \{B, I\}$, $\mathbb{F}(I) = \{I\}$ cujo diagrama de Hasse é:





e Φ não tem, como se vê, um filtro mais fino que todos os outros. Em particular, os filtros $\mathbb{F}(A)$ e $\mathbb{F}(B)$ não têm um supremo.

LEMA 9 - Para que uma família $\{\mathbb{F}_{\alpha}\}$ de filtros tenha um supremo é necessário e suficiente que exista um filtro que contenha o conjunto

$$\mathcal{G} = \bigvee_{\alpha} \mathbb{F}_{\alpha}$$

reunião de todos os filtros $\mathbb{F}_{\alpha}$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos, com efeito, que a família de filtros $\{\mathbb{F}_{\alpha}\}$, tem por supremo o filtro $\mathbb{F}$, em notação

$$\mathbb{F} = \bigcup_{\alpha} \mathbb{F}_{\alpha}$$

Então será, em particular $\mathbb{F}_{\alpha} \leq \mathbb{F}$

e portanto $\mathcal{G} = \bigvee_{\alpha} \mathbb{F}_{\alpha} \leq \mathbb{F}$

e a condição indicada, no enunciado do teorema, é necessária. Supondo agora esta condição verificada, consideremos a família $\{\mathbb{F}^{*}_{\beta}\}$ de todos os filtros que contêm $\mathcal{G}$, então reconhece-se sem dificul dade que o filtro

$$\mathbb{F} = \bigwedge_{\beta} \mathbb{F}_{\beta}^{*}$$

é o supremo dos filtros $\mathbb{F}_{\alpha}$.

<u>TEOREMA 10 - Para que exista, um filtro</u> $\mathbb{F}$, <u>contendo um conjunto</u> $\mathcal{G}$, <u>não vazio, de elementos do reticulado</u> $\mathcal{R}$, <u>é necessário e suficiente que o conjunto</u> $\mathcal{G}$ <u>goze da propriedade de interseção finita</u>.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Suponhamos que existe um filtro $\mathbb{F}$ tal que $\mathcal{G} \leq \mathbb{F}$, então $\mathbb{F}$ contém, também, o conjunto $\mathcal{G}_1$ dos ínfimos das coleções finitas de elementos de $\mathcal{G}$, isto é, os elementos da forma

$$G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n, \quad \text{onde } G_i \in \mathcal{G} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Então, pelo axioma $\mathbb{F}3$, será

$$G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \neq 0$$

isto é, $\mathcal{G}$ goza da propriedade de interseção finita. Além disso, se $\mathcal{G}_1 \leq \mathbb{F}$, então $\mathbb{F}$ contém também, em virtude do axioma $\mathbb{F}1$, o conjunto $\mathcal{G}_2$ dos elementos $F \in \mathcal{R}$ que seguem um dos elementos $\mathcal{G}_1$, isto é, $\mathcal{G}_2$ é formado pelos elementos F que satisfazem à seguinte

<u>CONDIÇÃO G</u> - $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \subseteq F$, onde $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$.

É fácil reconhecer que se tem

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2 \leq \mathbb{F}$$

Seja agora $\mathcal{G}$ um conjunto de elementos $\mathcal{R}$ com a propriedade de interseção finita, e construamos o conjunto $\mathcal{G}_2$ da maneira anteriormente indicada. Vamos provar que <u>$\mathcal{G}_2$ é um filtro</u>.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}1$</u> - Seja $F \in \mathcal{G}_2$ e $F \subseteq X$.

Então teremos

$$G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \subseteq F \subseteq X, \quad \text{onde } G_i \in \mathcal{G}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e portanto X segue o ínfimo de um conjunto finito de elementos de $\mathcal{G}$ e portanto $X \in \mathcal{G}_2$.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}$ 2</u> - Sejam F_1 e F_2 dois elementos de $\mathcal{G}_2$, então

$$G_1^{(1)} \cap G_2^{(1)} \cap \dots \cap G_{n_1}^{(1)} \subseteq F_1, \quad \text{onde } G_i^{(1)} \in \mathcal{G}, \; i=1,2,\dots,n_1$$

$$G_1^{(2)} \cap G_2^{(2)} \cap \dots \cap G_{n_2}^{(2)} \subseteq F_2, \quad \text{onde } G_j^{(2)} \in \mathcal{G}, \; j=1,2,\dots,n_2$$

e então teremos

$$G_1^{(1)} \cap G_2^{(1)} \cap \dots \cap G_{n_1}^{(1)} \cap G_1^{(2)} \cap G_2^{(2)} \cap \dots \cap G_{n_2}^{(2)} \subseteq F_1 \cap F_2,$$

onde

$$G_i^{(1)} \in \mathcal{G} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \quad G_j^{(2)} \in \mathcal{G} \quad (j = 1, 2, \dots, n_2)$$

e portanto, pela condição G, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}_2$, o que demonstra que o axioma $\mathbb{F}_2$ é verificado.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}$ 3</u> - O elemento 0 não pertence à $\mathcal{G}_1$, visto que $\mathcal{G}_1$ tem, por hipótese, a p. i. f. Como $\mathcal{G}_2$ só tem elementos que seguem elementos de $\mathcal{G}_1$, se 0 pertencesse a $\mathcal{G}_2$ teríamos $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \subseteq 0$, onde $G_i \in \mathcal{G}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ e então teríamos $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n = 0$, o que é impossível porque $\mathcal{G}$ tem a p. i.f. Acabamos assim de provar que $\mathcal{G}_2$ é um filtro e além disso que $\mathcal{G}_2$ está contido em qualquer filtro que contenha $\mathcal{G}$.. Logo $\mathcal{G}_2$ é o ínfimo de todos os filtros que contêm $\mathcal{G}$. Diz-se então que <u>$\mathcal{G}_2$ é o filtro gerado pelo conjunto $\mathcal{G}$</u>, e passaremos a representar $\mathcal{G}_2$ pela notação

$$\mathbb{F}(\mathcal{G})$$

Diremos ainda que <u>$\mathcal{G}$ é um sistema de geradores do filtro $\mathbb{F}(\mathcal{G})$</u>

Podemos resumir êstes resultados, dizendo que <u>Para que o conjunto $\mathcal{G} \leqslant \mathcal{R}$ gere um filtro é necessário e suficiente que $\mathcal{G}$ tenha a propriedade de interseção finita e então o filtro $\mathbb{F}(\mathcal{G})$, gerado por $\mathcal{G}$</u>,

<u>é formado pelos elementos que seguem uma interseção finita de elementos de $\mathcal{G}$</u>.

Do teorema 10 resultam imediatamente os seguintes corolários:

<u>COROLÁRIO 1</u> - Para que um conjunto finito de filtros $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, ..., $\mathbb{F}_n$ tenha um supremo, (em Φ) é necessário e suficiente que:

<u>Se $F_i \in \mathbb{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ então $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \neq 0$</u>

<u>COROLÁRIO 2</u> - Para que um conjunto qualquer $\{\mathbb{F}_\alpha\}$ de filtros tenha um supremo é necessário e suficiente que qualquer coleção finita de filtros extraida de $\{\mathbb{F}_\alpha\}$ tenha um supremo.

<u>COROLÁRIO 3</u> - Tôda a cadeia de filtros tem um supremo.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - O corolário 2 mostra que a propriedade de um conjunto de filtros ter um supremo <u>tem caráter finito</u>. Se $\{\mathbb{F}_\alpha\}$ fôr uma cadeia de filtros, então, dada uma coleção finita de filtros dessa cadeia, um dêles contém todos os outros e êsse filtro contém, portanto, o supremo dessa coleção finita de filtros considerada. Como se trata de uma <u>propriedade de caráter finito</u>, podemos afirmar que tôda a cadeia de filtros tem um supremo.

É conveniente notar que o supremo $\mathbb{F}$ de uma cadeia $\{\mathbb{F}_\alpha\}$ de filtros é dado pela fórmula

$$\mathbb{F} = \bigvee_\alpha \mathbb{F}_\alpha$$

isto é, $\mathbb{F}$ é a reunião de todos os filtros da cadeia, como se reconhece sem dificuldade.

O corolário 3 pode ser enunciado dizendo que:

O conjunto ordenado $[\Phi, \leq]$ de todos os filtros de um reticulado (com primeiro e último elemento) é indutivo superiormente.

Temos assim um exemplo de um conjunto ordenado Φ que satisfaz às seguintes condições:

1ª) Qualquer sub-conjunto, não vazio, $\mathcal{A} \leq \Phi$ tem um ínfimo.

2ª) Φ é indutivo superiormente, mas apesar disso, pode não existir o supremo de dois elementos de Φ, como vimos no início dês te parágrafo.

EXERCÍCIO - O filtro gerado por um elemento $A \neq 0$ é o filtro principal $\mathbb{F}(A)$.

24- ULTRA-FILTROS - Vamos considerar uma classe importante de filtros.

DEFINIÇÃO 12 - Diz-se que um filtro $\mathbb{F}$ é um ultra filtro se não existir nenhum filtro contendo efetivamente o filtro $\mathbb{F}$.

Um ultra filtro é, portanto, um elemento máximal no conjunto ordenado, Φ, de todos os filtros de $\mathcal{R}$, e por isso se pode dar a um ultra filtro o nome de filtro máximo ou filtro máximal. Sôbre a existência de ultra-filtros podemos demonstrar o seguinte teorema.

TEOREMA 11 - Qualquer que seja o filtro $\mathbb{F}_1$, do reticulado $\mathcal{R}$, existe um ultra-filtro contendo $\mathbb{F}_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\mathbb{F}_1$ um filtro e Φ_1 a família de todos os filtros que contêm $\mathbb{F}_1$. É evidente que tôda a cadeia de Φ_1 tem um supremo [Teorema 10 - Corolário 3] que é um filtro pertencente a Φ_1; então Φ_1 é um conjunto ordenado indutivo superiormente; logo pelo Teorema de Zorn (A) existe um filtro máximal $\mathbb{F}_1^* \in \Phi_1$. É claro que $\mathbb{F}_1^*$ é também um filtro máximal de Φ e, portanto, $\mathbb{F}_1^*$ é um ultra-filtro que contém o filtro dado $\mathbb{F}_1$.

COROLÁRIO 1 - Dado um elemento $A \neq 0$, pertencente ao reticulado $\mathcal{R}$, existe um ultra-filtro, pelo menos, que contém o elemento A.

DEMONSTRAÇÃO - Dado o elemento $A \in \mathcal{R}$, $A \neq 0$, consideremos o filtro (principal) $\mathbb{F}(A)$ gerado por A e seja $\mathbb{F}^*(A)$ um ultra-filtro que contém o filtro $\mathbb{F}(A)$, como

$$A \in \mathbb{F}(A) \leqslant \mathbb{F}^*(A)$$

então $\quad A \in \mathbb{F}^*(A) \qquad$ c.q.d.

Vamos agora indicar uma caracterização importante de um ultra-filtro (devida a H. Wallman, no caso dos reticulados distributivos), em que só intervém a operação de ínfimo $\cap$. O teorema que vamos demonstrar é válido num inf-reticulado com primeiro elemento.

TEOREMA 12 - Para que o conjunto, não vazio, $\mathbb{F} \leq \mathcal{R}$ seja um ultra-filtro é necessário e suficiente que sejam verificadas as seguintes condições:

$\mathbb{U}1$) Se $X \cap F \neq 0$ qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$ então $X \in \mathbb{F}$

$\mathbb{U}2$) O ínfimo de dois elementos de $\mathbb{F}$ é um elemento de $\mathbb{F}$

$\mathbb{U}3$) $0 \notin \mathbb{F}$

DEMONSTRAÇÃO - As condições são necessárias. As condições $\mathbb{U}2$ e $\mathbb{U}3$ coincidem, respectivamente, com as condições $\mathbb{F}2$ e $\mathbb{F}3$. Resta, portanto, provar que um ultra-filtro $\mathbb{F}$ satisfaz à condição $\mathbb{U}1$. Seja X um elemento de $\mathcal{R}$ tal que

(1) $X \cap F \neq 0$, qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$.

e suponhamos que X não pertence ao ultra-filtro $\mathbb{F}$. Consideremos então o conjunto $\mathcal{G}$ formado por X e pelos elementos de $\mathbb{F}$, isto é, $\mathcal{G} = \mathbb{F} \vee \{X\}$.

Vamos mostrar que $\mathcal{G}$ goza da propriedade de interseção finita. Se um sub-conjunto finito de $\mathcal{G}$ é formado só por elementos de $\mathbb{F}$ então o seu ínfimo é diferente de 0, visto que $\mathbb{F}$ é um filtro. Resta, portanto, considerar os sub-conjuntos finitos de $\mathcal{G}$ que contêm o elemento X. Considero então o sub-conjunto finito de $\mathcal{G}$:

$$\{X, F_1, F_2, \ldots, F_k\}, \text{ onde } F_i \in \mathbb{F} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Notemos que $F = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k$ pertence a $\mathbb{F}$. Então, atendendo a (1), teremos

$$X \cap F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k = X \cap F \neq 0$$

e, portanto, $\mathcal{G}$ goza da propriedade de interseção finita c.q.d.

Seja $\mathbb{F}^*$ o filtro gerado por $\mathcal{G}$. Teremos

$$\mathbb{F} \leq \mathcal{G} \leq \mathbb{F}^*$$

e, portanto, existe um filtro $\mathbb{F}^*$ que contém efetivamente o ultra filtro $\mathbb{F}$, o que é impossível. Logo $X \in \mathbb{F}$, c.q.d.

As condições são suficientes. Seja $\mathbb{F}$ uma coleção, não vazia, de elementos de $\mathcal{R}$, que verifica as propriedades $\mathbb{U}1$,

$\mathfrak{U}2$ e $\mathfrak{U}3$. Mostremos em primeiro lugar, que $\mathbb{F}$ é um filtro. Para isso basta mostrar que é verificado o axioma $\mathbb{F}1$.

Seja $F_0 \subseteq X$, onde $F_0 \in \mathbb{F}$ e $X \in \mathcal{R}$. Para mostrar que $X \in \mathbb{F}$ (o que provará o axioma $\mathbb{F}$ 1), basta demonstrar, pelo axioma $\mathfrak{U}1$, que: $X \cap F \neq 0$, qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$; Suponhamos, pelo contrário, que exista um elemento $F_1 \in \mathbb{F}$ tal que $X \cap F_1 = 0$, então como

$$F_0 \subseteq X \text{ implica } F_0 \cap F_1 \subseteq X \cap F_1 = 0$$

teríamos $F_0 \cap F_1 = 0$ o que é impossível visto que, pelos axiomas $\mathfrak{U}2$ e $\mathfrak{U}3$, o ínfimo de dois elementos de $\mathbb{F}$ não pode ser 0.

Acabamos assim de provar que $\mathbb{F}$ é um filtro. Se $\mathbb{F}$ não fôsse um ultra-filtro existiria um ultra-filtro $\mathbb{F}^*$ contendo efetivamente $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} < \mathbb{F}^*$). Seja F^* um elemento de $\mathbb{F}^*$, que não pertença a $\mathbb{F}$. Pelo fato de $\mathbb{F}^*$ ser um filtro, teremos

$$F^* \cap F \neq 0, \text{ qualquer que seja } F \in \mathbb{F}$$

e, portanto, em virtude da propriedade $\mathfrak{U}1$, será $F^* \in \mathbb{F}$, o que contradiz a hipótese feita. Logo $\mathbb{F}$ é um ultra-filtro.

<u>NOTA</u>: As condições indicadas por Wallman são as seguintes:

$\mathfrak{U}1^*$ - <u>O ínfimo de dois elementos de $\mathbb{F}$ é um elemento de $\mathbb{F}$</u>

$\mathfrak{U}2^*$ - <u>$X \in \mathbb{F}$ se e só se $X \cap F \neq 0$ qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$</u>

que são equivalentes a $\mathfrak{U}1$, $\mathfrak{U}2$ e $\mathfrak{U}3$, como se reconhece imediatamente.

25- <u>BASES DE UM FILTRO</u> - Suponhamos que o conjunto $\mathcal{G} \leq \mathcal{R}$ gera um filtro $\mathbb{F}$. Em regra não se pode afirmar que $\mathbb{F}$ seja o conjunto de todos os elementos do reticulado $\mathcal{R}$ que seguem, pelo menos, um elemento de $\mathcal{G}$. Isto justifica a seguinte

<u>DEFINIÇÃO 13</u> - <u>Diz-se que o conjunto, não vazio, $\mathbb{B} \leq \mathcal{R}$ é uma base do filtro $\mathbb{F}$; se $\mathbb{F}$ fôr o conjunto dos elementos de $\mathcal{R}$ que seguem, pelo menos, um elemento de $\mathbb{B}$</u>.

Vamos demonstrar o seguinte teorema

<u>TEOREMA 13</u> - <u>Para que o conjunto, não vazio, $\mathbb{B} \leq \mathcal{R}$ seja uma base de filtro é necessário e suficiente que sejam verifi-</u>

<u>cadas as seguintes condições</u>:

$\mathbb{B}$ 2 - <u>O ínfimo de dois elementos de $\mathbb{B}$ segue um elemento de $\mathbb{B}$.</u>

$\mathbb{B}$ 3 - <u>$0 \notin \mathbb{B}$</u>.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - <u>As condições são necessárias</u>. Seja $\mathbb{B}$ uma base do filtro $\mathbb{F}$, então teremos $\mathbb{B} \leq \mathbb{F}$. Sejam B_1 e B_2 dois elementos de $\mathbb{B}$ então B_1 e B_2 são também dois elementos de $\mathbb{F}$, e portanto, $B_1 \cap B_2 \in \mathbb{F}$. Podemos, portanto, afirmar que existe um elemento $B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ o que prova o axioma $\mathbb{B}_2$. Para provar $\mathbb{B}3$ basta notar que $0 \notin \mathbb{F}$.

<u>As condições são suficientes</u>. Seja $\mathbb{B}$ um sub-conjunto não vazio, de $\mathcal{R}$ com as propriedades $\mathbb{B}$ 2 e $\mathbb{B}$ 3, e $\mathbb{F}$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{R}$ que seguem um elemento de $\mathbb{B}$. Vamos mostrar que $\mathbb{F}$ é um filtro.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}$ 1</u> - Seja $F \subseteq X$, onde $F \in \mathbb{F}$. De $F \in \mathbb{F}$ resulta que existe $B \in \mathbb{B}$ tal que $B \subseteq F$, e como $F \subseteq X$ será $B \subseteq X$ e, portanto, $X \in \mathbb{F}$, c.q.d.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}$ 2</u> - Sejam $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$. Então existem B_1, $B_2 \in \mathbb{B}$ tais que $B_1 \subseteq F_1$, $B_2 \subseteq F_2$, donde $B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Mas, pelo axioma $\mathbb{B}_2$, existe $B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ logo $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$, c.q.d.

<u>AXIOMA $\mathbb{F}$ 3</u> - É uma consequência imediata de $\mathbb{B}$ 3.

É também, evidente que $\mathbb{B} \leq \mathbb{F}$ e que $\mathbb{F}$ é o filtro gerado por $\mathbb{B}$.

A demonstração do teorema 10, mostra que

<u>COROLÁRIO</u> - <u>Se o conjunto, não vazio, $\mathcal{S}$ gera o filtro $\mathbb{F}$, então a família $\mathcal{S}_1$ dos ínfimos de coleções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base do filtro $\mathbb{F}$</u>.

É interessante conhecer as condições necessárias e suficientes a que deve satisfazer um conjunto, não vazio, $\mathbb{B}$ para que êle seja base de um ultra-filtro e que vão indicadas no seguinte teorema

TEOREMA 14 - Para que o conjunto, não vazio, $\mathbb{B} \leq \mathcal{R}$ seja base de um ultra-filtro é necessário e suficiente que sejam verificadas as seguintes condições:

$\mathbb{B}$1 - Se X é tal que $X \cap B \neq 0$, qualquer que seja $B \in \mathbb{B}$, então X segue um elemento de $\mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$2 - O ínfimo de dois elementos de $\mathbb{B}$ segue um elemento de $\mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$3 - $0 \notin \mathbb{B}$.

DEMONSTRAÇÃO - As condições são necessárias. Seja $\mathbb{B}$ uma base de um ultra-filtro $\mathbb{F}$. Como um ultra-filtro é um filtro podemos afirmar em virtude do teorema 13, que $\mathbb{B}$ verifica as condições $\mathbb{B}$2 e $\mathbb{B}$3.

Para provar que $\mathbb{B}$ verifica a condição $\mathbb{B}$1, seja X um elemento do reticulado tal que

(1) $X \cap B \neq 0$, qualquer que seja $B \in \mathbb{B}$.

Dado um elemento qualquer $F \in \mathbb{F}$, como $\mathbb{B}$ é uma base de $\mathbb{F}$, existe um elemento $B \in \mathbb{B}$ tal que $B \subseteq F$ e, portanto

$$X \cap B \subseteq X \cap F$$

e então de $X \cap B \neq 0$ resulta $X \cap F \neq 0$ e, portanto, se X satisfaz à condição (1), X satisfaz à condição

(2) $X \cap F \neq 0$, qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$.

Como $\mathbb{F}$ é um ultra-filtro, podemos afirmar, em virtude da condição $\mathbb{U}$1 do teorema 12, que $X \in \mathbb{F}$, e, portanto, como $\mathbb{B}$ é base do ultra-filtro $\mathbb{F}$, teremos

(3) X segue um elemento de $\mathbb{B}$.

Acabamos de provar que (1) implica (3) e, portanto, $\mathbb{B}$ satisfaz à condição $\mathbb{B}$ 1, c.q.d.

As condições são suficientes. Seja agora $\mathbb{B}$, um sub-conjunto, não vazio, do reticulado $\mathcal{R}$, que satisfaz às condições $\mathbb{B}$1, $\mathbb{B}$2 e $\mathbb{B}$ 3. Representemos por $\mathbb{F}$ a família de todos os elementos do reticulado $\mathcal{R}$, que seguem um elemento de $\mathbb{B}$, pelo menos. Então em virtude do teorema 13, podemos afirmar que $\mathbb{F}$ é um filtro, e que $\mathbb{B}$ é uma base de $\mathbb{F}$. Resta provar que $\mathbb{F}$ é um ultra-filtro. Para isso seja X um elemento do reticulado tal que:

(1) $X \cap F \neq 0$ qualquer que seja $F \in \mathbb{F}$.

Como $\mathbb{B} \leq \mathbb{F}$, teremos em particular

(2) $X \cap B \neq 0$, qualquer que seja $B \in \mathbb{B}$.

logo, em virtude do axioma $\mathbb{B}$1, X segue um certo elemento $B_o \in \mathbb{B}$ e, portanto, atendendo à definição de $\mathbb{F}$, será

(3) $X \in \mathbb{F}$.

Acabamos assim de provar que a condição (1) implica (3), isto é, o filtro $\mathbb{F}$ satisfaz à condição $\mathbb{U}$1, do teorema 12, e, portanto $\mathbb{F}$ é um ultra-filtro, c.q.d.

Seja agora $\mathcal{G}$ um conjunto com a propriedade de interseção finita, $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ o filtro gerado por $\mathcal{G}$. Pode acontecer que $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ seja um ultra-filtro. Se assim fôr a família $\mathcal{G}_1$, dos ínfimos de coleções finitas de elementos de $\mathcal{G}$, será uma base do ultra-filtro $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ e, portanto, $\mathbb{B} = \mathcal{G}_1$ satisfaz às condições $\mathbb{B}$1, $\mathbb{B}$2 e $\mathbb{B}$3 indicadas no teorema anterior. O fato das condições $\mathbb{B}$2 e $\mathbb{B}$3 serem verificadas por $\mathcal{G}_1$ é uma consequência imediata de $\mathcal{G}$ ter a p. i. f. Portanto, se $\mathcal{G}$ gera um ultra-filtro, podemos afirmar que:

G1) $\mathcal{G}$ tem a propriedade de interseção finita.

G2) Se $X \cap G_1 \cap G \cap \dots \cap G_n \neq 0$, qualquer que seja a família finita $G_1, G_2, \dots, G_n$ de elementos de $\mathcal{G}$, então X segue o ínfimo de uma família finita de elementos de $\mathcal{G}$.

A propriedade G2) é uma tradução imediata de $\mathbb{B}$1, que se obtém atendendo a que os elementos de $\mathbb{B} = \mathcal{G}_1$ são interseções finitas de elementos de $\mathcal{G}$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{G}$ uma família de elementos do reticulado $\mathcal{R}$, que satisfaz às duas condições G1) e G2). Então, considerando a família $\mathcal{G}_1$ dos ínfimos de famílias finitas de elementos de $\mathcal{G}$, reconhece-se imediatamente que $\mathbb{B} = \mathcal{G}_1$ verifica as condições $\mathbb{B}$1, $\mathbb{B}$2 e $\mathbb{B}$3 do teorema 14 e, portanto, $\mathbb{B}$ é base de um ultra-filtro que é precisamente o filtro $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ gerado por $\mathcal{G}$. Acabamos assim de provar que

COROLÁRIO - Para que um conjunto, não vazio, $\mathcal{G}$ gere um ultra-filtro é necessário e suficiente que $\mathcal{G}$ verifique as condições $\mathcal{G}_1$) e $\mathcal{G}_2$).

26 - BASES EQUIVALENTES - Sejam $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}_1$ dois filtros de bases $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}_1$; procuremos exprimir que $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{F}_1$ por intermédio das bases $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}_1$. Vamos demonstrar que

TEOREMA 15- Para que um filtro $\mathbb{F}_1$, de base $\mathbb{B}_1$, seja mais fino que o filtro $\mathbb{F}$ de base $\mathbb{B}$ é necessário e suficiente que todo o elemento de $\mathbb{B}$ siga um elemento de $\mathbb{B}_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{F}_1$. Como $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{F}$ será $\mathbb{B} \leqslant \mathbb{F}_1$ e então se $B \in \mathbb{B}$ será $B \in \mathbb{F}_1$ e, portanto, B segue um elemento de base $\mathbb{B}_1$. Acabamos assim de mostrar que a condição indicada no teorema é necessária. Para demonstrar que ela é suficiente suponhamos que todo o elemento de $\mathbb{B}$ segue um elemento de $\mathbb{B}_1$. Seja $F \in \mathbb{F}$ então F segue um elemento $B \in \mathbb{B}$, visto que $\mathbb{B}$ é base do filtro $\mathbb{F}$, isto é: $B \subseteq F$. Ora, por hipótese existe $B_1 \in \mathbb{B}_1$ tal que $B_1 \subseteq B$ e, portanto, $B_1 \subseteq F$ onde $B_1 \in \mathbb{B}_1$, logo $F \in \mathbb{F}_1$. Acabamos assim de provar que se $F \in \mathbb{F}$ então $F \in \mathbb{F}_1$, logo $\mathbb{F} \leqslant \mathbb{F}_1$.

DEFINIÇÃO 14 - Duas bases de filtro dizem-se equivalentes se elas geram o mesmo filtro $\mathbb{F}$.

Então o teorema 15 permite afirmar, imediatamente, que

COROLÁRIO - Para que duas bases de filtro $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ sejam equivalentes é necessário e suficiente que todo o elemento de $\mathbb{B}_1$ siga um elemento de $\mathbb{B}_2$ e todo o elemento de $\mathbb{B}_2$ siga um elemento de $\mathbb{B}_1$.

EXERCÍCIO - 26.1) Seja $\mathbb{F}$ um ultra-filtro. Se existir o ínfimo F_o de todos os elementos de $\mathbb{F}$ e se $F_o \neq 0$ então F_o é um átomo, isto é: $0 \subset F_o$ e não existe nenhum elemento de X do reticulado dado tal que $0 \subset X \subset F_o$.

26.2) Enuncie e demonstre os teoremas duais dos teoremas indicados nos números 23, 24, 25 e 26.

26.3) Para que um filtro principal $\mathbb{F}$(A) seja um ultra-filtro é necessário e suficiente que A seja um átomo.

27- <u>FILTROS E IDEAIS PRIMOS</u> - Existe uma classe de filtros muito importantes nas aplicações, que vamos agora definir:

<u>DEFINIÇÃO 15 - Diz-se que um filtro</u> $\mathbb{P}$ <u>é primo quando</u> $X \cup Y \in \mathbb{P}$ <u>implicar</u> $X \in \mathbb{P}$ ou $Y \in \mathbb{P}$.

<u>Diz-se que um ideal</u> $\mathcal{P}$ <u>é primo quando</u> $X \cap Y \in \mathcal{P}$ <u>implicar</u> $X \in \mathcal{P}$ <u>ou</u> $Y \in \mathcal{P}$.

Essas duas noções estão intimamente relacionadas entre si como vamos verificar.

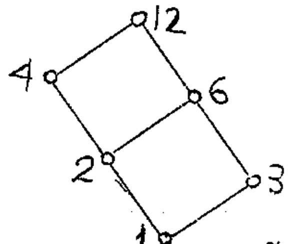
Seja $\mathcal{R}$ um reticulado contendo ou não um primeiro e um último elemento, e seja $\mathbb{P}$ um filtro de $\mathcal{R}$. Representemos por $\mathcal{P}$ o conjunto dos elementos de $\mathcal{R}$ que não pertencem a $\mathbb{P}$. Como $\mathbb{P} \neq \mathcal{R}$ então $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Como $\mathbb{P} \neq \emptyset$ será $\mathcal{P} \neq \mathcal{R}$. (Diremos que $\mathcal{P}$ é o conjunto complementar de $\mathbb{P}$ em relação a $\mathcal{R}$, ou mais simplesmente que $\mathcal{P}$ é o complemento de $\mathbb{P}$. Em regra o complemento de um filtro $\mathbb{P}$ não é um ideal. Porém <u>se</u> $\mathbb{P}$ <u>fôr um filtro primo o seu complemento é um ideal primo</u>. Com efeito: a condição $\mathcal{J}3$, da definição 11, é evidentemente verificada. Para demonstrar $\mathcal{J}1$, seja $X \in \mathcal{P}$ e $Y \subseteq X$. Y não pode pertencer ao filtro $\mathbb{P}$, porque se assim fôsse como $Y \subseteq X$, então X pertenceria a $\mathbb{P}$ o que contradiz a hipótese feita ($X \in \mathcal{P}$ equivale $X \notin \mathbb{P}$). Como Y não pertence a $\mathbb{P}$ então $Y \in \mathcal{P}$. Para demonstrar que a condição $\mathcal{J}2$ é verificada sejam $X, Y \in \mathcal{P}$, isto é, $X \notin \mathbb{P}$, $Y \notin \mathbb{P}$ e como $\mathbb{P}$ é primo podemos afirmar que $X \cup Y \notin \mathbb{P}$, isto é, $X \cup Y \in \mathcal{P}$, como queríamos provar. Acabámos de verificar que $\mathcal{P}$ é um ideal. Para provar que $\mathcal{P}$ é primo seja $X \cap Y \in \mathcal{P}$. Se X e Y não pertencessem a $\mathcal{P}$, então teríamos $X \in \mathbb{P}$, $Y \in \mathbb{P}$ e como $\mathbb{P}$ é um filtro seria $X \cap Y \in \mathbb{P}$, isto é, $X \cap Y \notin \mathcal{P}$ o que contradiz a hipótese feita. Portanto, da hipótese $X \cap Y \in \mathcal{P}$ resulta que um pelo menos dos elementos X e Y pertence a $\mathcal{P}$ e isto mostra que $\mathcal{P}$ é um ideal primo.

Recìprocamente, suponhamos que o complemento $\mathcal{P}$ de um filtro $\mathbb{P}$ é um ideal. Vamos provar que $\mathbb{P}$ é necessàriamente um filtro primo. Para êsse feito basta provar que "se $X \notin \mathbb{P}$ e $Y \notin \mathbb{P}$ então $X \cup Y \notin \mathbb{P}$. Ora se $X \notin \mathbb{P}$ e $Y \notin \mathbb{P}$ então $X \in \mathcal{P}$ e $Y \in \mathcal{P}$ e como " $\mathcal{P}$ é um ideal, por hipótese, será $X \cup Y \in \mathcal{P}$ e portanto $X \cup Y \notin \mathbb{P}$, c.q.d.

Acabámos, portanto, de provar que a condição necessária e suficiente para que $\mathbb{P}$ seja um filtro primo é que o seu complemento seja um ideal (que é necessàriamente primo).

Os filtros e os ideais primos aparecem portanto aos pares em qualquer reticulado. Existem reticulados que não contêm filtros primos e que não contêm, portanto, ideais primos. Nos reticulados que vamos estudar nos capítulos seguintes existem sempre filtros primos.

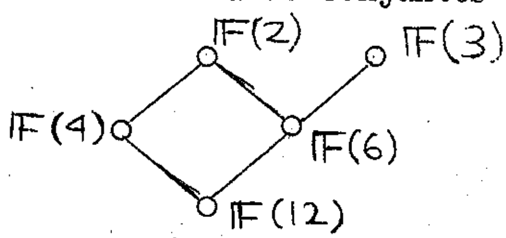
Para indicar um exemplo de filtro primo consideremos o reticulado da divisibilidade dos inteiros 1, 2, 3, 4, 6, 12, cujo diagrama de Hasse é:



Os filtros de um reticulado finito são, como se reconhece imediatamente, sempre filtros principais. A família dos filtros é, portanto, neste caso

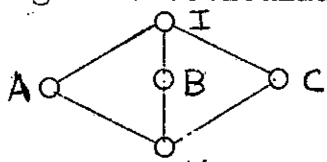
$$\mathbb{F}(2) = \{12\}, \quad \mathbb{F}(6) = \{6, 12\}, \quad \mathbb{F}(4) = \{4, 12\}$$
$$\mathbb{F}(3) = \{3, 6, 12\}, \quad \mathbb{F}(12) = \{2, 4, 6, 12\}$$

O diagrama de Hasse desta família de conjuntos ordenados por inclusão é:

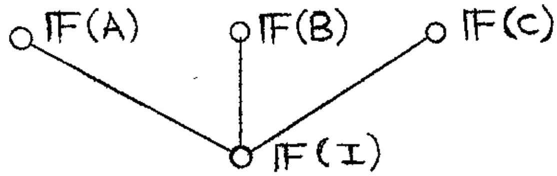


Um cálculo simples mostra que os filtros primos são $\mathbb{F}(4)$, $\mathbb{F}(3)$ $\mathbb{F}(2)$; sendo os dois últimos filtros máximos. O filtro $\mathbb{F}(4)$ é um filtro primo que não é máximo. Neste exemplo todos os filtros máximos são primos.

Consideremos agora o reticulado



o diagrama dos filtros dêste reticulado é:



no qual $\mathbb{F}(A)$, $\mathbb{F}(B)$, $\mathbb{F}(C)$ são filtros máximos. O filtro $\mathbb{F}(A) = \{A, I\}$ não é primo, visto que $B \cup C = I \in \mathbb{F}(A)$ e os elementos B e C não pertencem a $\mathbb{F}(A)$. De modo análogo se reconhece que os filtros $\mathbb{F}(I)$, $\mathbb{F}(B)$, $\mathbb{F}(C)$ não são primos. Temos, portanto, um exemplo de um reticulado em que não existem filtros primos.

No estudo que fizemos dos filtros máximos (ultra-filtros) provamos que em todo o reticulado com um primeiro e último elemento existe sempre um filtro máximo. Na realidade basta supôr que o reticulado contém um primeiro elemento, para demonstrar que o reticulado contém um filtro máximo.

No capítulo seguinte vamos estudar detalhadamente relações entre os diversos filtros de um reticulado. É uma parte importante da teoria dos reticulados, chamada <u>Aritmética dos filtros</u>, que será aplicada, posteriormente, na teoria da representação dos reticulados.

B I B L I O G R A F I A

1 GARRETT BIRKHOFF - Lattice Theory. Amer. Math.Soc. New York - 1940

2 V. GLIVENKO. Théorie des Structures Act. Sci. et Ind. (Hermann) - Paris - 1938

3 M.H. STONE - Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics. Cas. Mat. Fys.67(1937) página 1-25

4 H. WALMANN - Lattices and topological spaces. Annals of Math. 38(1938) página 112-126

5 GARRETT BIRKHOFF - On rings of sets. Duke Math. Journal. 3 (1938) página 154-159

6 JOHN TUKEY - Convergence and Uniformity in Topology. Annals of Mathematics Studies, nº2-Princeton 1940.