$\mathbb{R}$ no es enumerable.

$\triangleright$ Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ cualquier subconjunto enumerable de $\mathbb{R}$. La idea es encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq X$. Sea I_1 un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ tal que $x_1 \neq I_1$. Sea I_2 un intervalo cerrado y acotado tal que $I_2 \subset I_1$ y $x_2 \neq I_2$ y así inductivamente, i.e. I_n intervalo cerrado y acotado tal que $I_n \subset I_{n-1}$ y $x_n \neq I_n$. El teorema de los intervalos encajados garantiza la existencia de $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}$, pero $x \neq x_n$, pues $x_n \neq I_n$.$\triangleleft$

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente

$\triangleright$(Utilizando el concepto de términos destacados). Decimos que un término x_n de una sucesión es *destacado* cuando $x_n \geq x_p$, para todo $p > n$. Sea $\mathscr{D} \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los índices n tales que x_n es un término destacado. Si $\mathscr{D}$ es un conjunto infinito, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathscr{D}}$ es monótona no-creciente. Si $\mathscr{D}$ es finito, entonces sea $n_1 \in \mathbb{N}$ mayor que todos los $n \in \mathscr{D}$. Entonces x_{n_1} no es destacado, luego existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Como x_{n_2} no es destacado, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. De esta manera podemos construir una subsucesión creciente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$.$\triangleleft$