

**Elon Lages Lima  
ESPAÇOS MÉTRICOS**



## PREFÁCIO

Este livro foi escrito para ser texto de um curso sobre Espaços Métricos, ou seja, uma introdução à Topologia. Os alunos de um tal curso deverão ter estudado Análise durante um ou dois semestres, de modo a adquirirem alguma familiaridade com épsilons e deltas. Estritamente falando, porém, o único pré-requesito formal para sua leitura é a linguagem e a notação de Conjuntos.

Embora nenhum resultado específico de Análise seja essencial para o entendimento dos assuntos aqui expostos, uma experiência anterior com os métodos de demonstração daquela disciplina facilitará bastante o acompanhamento da exposição. Além disso, um certo conhecimento de Análise ajudará o leitor a apreciar o significado das aplicações da teoria dos espaços métricos, tanto nos exemplos aqui apresentados como nos que encontrará depois.

Alguns matemáticos, hoje meus colegas, aprenderam estas coisas numas notas que escrevi há muitos anos, esgotadas já faz tempo. A eles, que em diversas ocasiões me pediram para reescrevê-las, peço desculpas pela maneira com que as reapresento, sem aquele ingênuo entusiasmo. Não me seria possível repetir o mesmo tom, pois já não sou mais o mesmo que era então.

Rio, 6 de junho de 1975

Elon Lages Lima



ÍNDICE

pag.

CAPÍTULO 1 - ESPAÇOS MÉTRICOS

§1 - Definição e exemplos de espaços métricos....	1
§2 - Bolas e esferas .....	14
§3 - Conjuntos limitados .....	22
§4 - Distância de um ponto a um conjunto; distância entre dois conjuntos .....	29
§5 - Isometrias .....	34
§6 - Pseudo-métricas .....	39
Exercícios .....	41

CAPÍTULO 2 - FUNÇÕES CONTÍNUAS

§1 - Definição e exemplos .....	52
§2 - Propriedades elementares das aplicações contínuas .....	59
§3 - Homeomorfismos .....	66
§4 - Métricas equivalentes .....	77
§5 - Transformações lineares e multilineares ....	87

CAPÍTULO 3 - LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA

§1 - Conjuntos abertos .....	99
§2 - Relações entre conjuntos abertos e continuidade .....	110
§3 - Espaços topológicos .....	116
§4 - Conjuntos fechados .....	119

CAPÍTULO 4 - CONJUNTOS CONEXOS

§1 - Definição e exemplos .....	133
§2 - Propriedades gerais dos conjuntos conexos..	136
§3 - Conexão por caminhos .....	151
§4 - Componentes conexas .....	162
§5 - A conexidade como invariante topológico ...	166

CAPÍTULO 5 - LIMITES

§1 - Limites de seqüências .....	169
§2 - Seqüências de números reais .....	181
§3 - Séries .....	184
§4 - Convergência e topologia .....	188
§5 - Seqüências de funções .....	194
§6 - Produtos cartesianos infinitos .....	201
§7 - Limites de funções .....	210

CAPÍTULO 6 - CONTINUIDADE UNIFORME .....	215
--	-----

CAPÍTULO 7 - ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

§1 - Seqüências de Cauchy .....	235
§2 - Espaços métricos completos .....	242
§3 - Espaços de Banach e espaços de Hilbert ....	250
§4 - Extensão de aplicações contínuas .....	259
§5 - Completamento de um espaço métrico .....	267
§6 - Espaços métricos topologicamente completos.	272
§7 - O teorema de Baire .....	278
§8 - O método das aproximações sucessivas .....	296

CAPÍTULO 8 - ESPAÇOS MÉTRICOS COMPACTOS

§1 - Compacidade na reta .....	307
§2 - Espaços métricos compactos .....	310
§3 - Produtos de dois fatores, um dos quais é compacto .....	323
§4 - Uma base para $C(K;M)$ .....	330
§5 - Caracterizações de espaços compactos .....	332
§6 - Produtos cartesianos de espaços compactos...	343
§7 - Continuidade uniforme .....	354
§8 - Espaços localmente compactos .....	358
§9 - Espaços vetoriais normados de dimensão finita .....	363
§10 - Eqüicontinuidade .....	368

•••••



## CAPÍTULO I

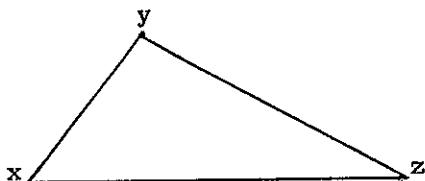
### ESPAÇOS MÉTRICOS

#### §1. Definição e exemplos de espaços métricos.

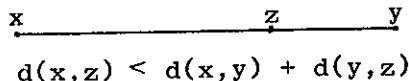
Uma métrica num conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- d1)  $d(x, x) = 0$ ;
- d2) Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;
- d3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- d4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Os postulados d1) e d2) dizem que  $d(x, y) \geq 0$  e que  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ . O postulado d3) afirma que a distância  $d(x, y)$  é uma função simétrica das variáveis  $x, y$ . A condição d4) chama-se desigualdade do triângulo; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.



$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$$



$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$$



$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

Um espaço métrico é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $M$ . Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço métrico  $M$ ", deixando subentendida qual a métrica  $d$  que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre os pontos de  $M$ .

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1 - A métrica "zero-um". Qualquer conjunto  $M$  pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ . As condições d1) a d4) são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contra-exemplos.

Exemplo 2 - Subespaço; métrica induzida. Se  $(M, d)$  é um espaço métrico, todo subconjunto  $S \subset M$  pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de  $d$  a  $S \times S$ , ou seja, usar entre os elementos de  $S$  a mesma distância que eles possuíam como elementos de  $M$ . Quando isto é feito,  $S$  chama-se um subespaço de  $M$  e a métrica de  $S$  diz-se induzida pela de  $M$ . Esta idéia óbvia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 3 - A reta, ou seja, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{R}$  é dada por  $d(x, y) = |x - y|$ . As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada "métrica usual" da reta. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referiremos sempre que considerarmos  $\mathbb{R}$  como espaço métrico.

Exemplo 4 - O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são as listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  onde cada uma das  $n$  coordenadas

$x_i$  é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Dados

$x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , escreveremos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2},$$

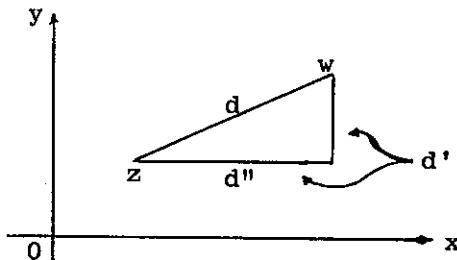
$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{e}$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções  $d, d', d'': \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são métricas. De fato, elas cumprem obviamente as condições d1), d2) e d3). A condição d4) é imediata para  $d'$  e  $d''$ , e será verificada para  $d$  no Exemplo 7, abaixo. A métrica  $d$  é chamada euclidiana. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas), a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Evidentemente, para considerações de natureza geométrica,  $d$  é a métrica natural pois fornece a distância da Geometria Euclidiana. Por outro lado,  $d'$  e  $d''$  são formalmente mais simples, de manipulação mais fácil. Por isso, e por serem ambas "equivalentes" a  $d$ , num sentido que esclareceremos no Capítulo 2, vale a pena considerá-las, apesar de seus significados ligeiramente artificiais. O caso particular  $n = 2$  nos dá o plano  $\mathbb{R}^2$ , cujos pontos indicaremos com a notação mais simples  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v)$ , etc. Muitas vezes identificaremos  $\mathbb{R}^2$  com o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números com-

plexos, mediante a correspondência  $(x,y) \leftrightarrow x+iy$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ . A vantagem desta identificação reside no fato de que  $\mathbb{C}$  possui uma multiplicação com propriedades interessantes. Também para  $n = 3$ , quando obtemos o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  da Geometria Sólida tradicional, usaremos a notação  $p = (x,y,z)$ , mais simples do que  $p = (x_1, x_2, x_3)$ .

Uma interpretação intuitiva para a métrica  $d'$  pode ser obtida, no caso  $n = 2$ , imaginando que o plano  $\mathbb{R}^2$  é a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ . Então o menor caminho ligando  $x$  a  $y$  através das ruas tem comprimento igual a  $d'(z,w) = |x-u| + |y-v|$ . A figura abaixo fornece uma comparação entre as distâncias  $d(z,w)$ ,  $d'(z,w)$  e  $d''(z,w)$ .



Para uso posterior, registramos aqui a

Proposição 1 - Sejam  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  as métricas definidas no Exemplo 5. Quaisquer que sejam

$x, y \in \mathbb{R}^n$ , tem-se:

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y).$$

Demonstração: A única dessas desigualdades que não é inteiramente óbvia é a segunda. Ela se prova notando que  $[d(x,y)]^2 = \sum (x_i - y_i)^2$  enquanto que  $[d'(x,y)]^2 = \sum (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i,j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|$ .

Observação: Quando não dissermos explicitamente que métrica estamos utilizando em  $\mathbb{R}^n$ , fica subentendido que se trata da euclidiana.

As notações  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  não serão usadas consistentemente para indicar as métricas em  $\mathbb{R}^n$  acima definidas. Assim, por exemplo, se estivermos usando apenas a métrica  $d''$  num determinado contexto, poderemos chamá-la  $d$ , por simplicidade.

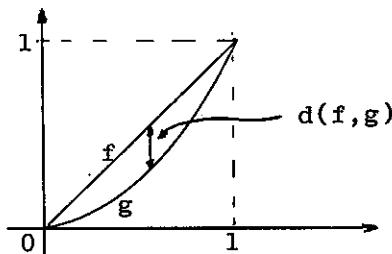
Exemplo 5 - Um espaço de funções. Seja  $X$  um conjunto arbitrário. Uma função real  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se limitada quando existe uma constante  $k = k_f > 0$  tal que  $|f(x)| \leq k$  para todo  $x \in X$ . Indicaremos com  $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$  o conjunto das funções limitadas  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas. Definiremos agora uma métrica em  $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$  pondo, para  $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$  arbitrárias,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Deixamos ao leitor o cuidado de verificar as condições

que fazem de  $d$  uma métrica. Esta é a chamada métrica da convergência uniforme, ou métrica do sup. A explicação para o primeiro nome virá no Capítulo 5.

Seja  $X = [a,b]$ . Dadas  $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitadas, a distância  $d(f,g)$  é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar ligando o gráfico de  $f$  ao gráfico de  $g$ . Assim, por exemplo, no espaço métrico  $\mathbb{B}([0,1]; \mathbb{R})$ , a distância da função  $f(x) = x$  à função



$$g(x) = x^2 \text{ é } d(f,g) = \frac{1}{4}.$$

No caso em que  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , toda função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e se identifica a uma lista  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$ . Assim, para  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , temos  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$  e a métrica do sup reduz-se à métrica  $d''$ , introduzida no Exemplo 4.

Exemplo 6 - Espaços vetoriais normados. Seja  $E$  um espaço vetorial real. Uma norma em  $E$  é uma função real  $| | : E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada vetor  $x \in E$  o

número real  $|x|$ , chamado a norma de  $x$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda$  escalar:

N1) Se  $x \neq 0$  então  $|x| \neq 0$ ;

N2)  $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ ;

N3)  $|x+y| \leq |x| + |y|$ .

No postulado N2), o símbolo  $|\lambda|$  indica o valor absoluto do número  $\lambda$ , enquanto que  $|x|$  significa a norma do vetor  $x$ . N2) implica (quando se põe  $\lambda = 0$  e  $x = 0$ ) que  $|0| = 0$  e, tomando  $\lambda = -1$ , que  $|-x| = |x|$  para todo  $x \in E$ . Por sua vez, fazendo  $y = -x$  em N3), obtemos  $0 = |x+(-x)| \leq |x| + |-x| = 2|x|$ , donde  $|x| \geq 0$  para todo  $x \in E$ . Segue-se que  $|x| > 0$  se, e somente se,  $x \neq 0$ .

Um espaço vetorial normado é um par  $(E, |\cdot|)$  onde  $E$  é um espaço vetorial real e  $|\cdot|$  é uma norma em  $E$ . Freqüentemente se designa o espaço vetorial normado com  $E$ , deixando a norma subentendida.

Exemplos de espaço vetorial normado são  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ ,  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|')$  e  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|'')$ , onde, para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se tem

$$|x| = \sqrt{\sum (x_i)^2}, \quad |x|' = \sum |x_i| \quad \text{e} \quad |x|'' = \max |x_i|.$$

Os postulados que caracterizam uma norma são de verifica-

ção imediata, salvo N3) para a primeira destas normas.

Ele será verificado no Exemplo 7, logo a seguir.

Outro exemplo de espaço vetorial normado é  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R})$ , onde pomos  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Aqui empregamos o símbolo  $\|f\|$  para designar a norma da função  $f$ , a fim de não confundir com a função  $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $|f|(x) = |f(x)|$ , a qual se chama a "função valor absoluto de  $f$ ".

Todo espaço vetorial normado  $(E, \| |\|)$  torna-se um espaço métrico por meio da definição  $d(x, y) = |x - y|$ . Esta métrica diz-se proveniente da norma  $\| |\|$ . Por exemplo, as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  em  $\mathbb{R}^n$  são provenientes das normas  $\| |\|$ ,  $\| |\|'$  e  $\| |\|''$  respectivamente. Também a métrica do sup em  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R})$  é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. Podemos então escrever  $\|f-g\|$  em vez de  $d(f, g)$ .

As propriedades d1) a d4) para uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. Por exemplo, a desigualdade triangular se prova assim:  $d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$ .

Note-se que, num espaço vetorial normado, tem-se  $|x| = d(x, 0)$ , isto é, a norma de um vetor  $x$  é a distância de  $x$  à origem.

Exemplo 7 - Espaços vetoriais com produto interno. Seja  $E$  um espaço vetorial real. Um produto interno em  $E$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de vetores  $x, y \in E$  um número real  $\langle x, y \rangle$ , chamado o produto interno de  $x$  por  $y$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para  $x, x', y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  arbitrários:

$$P1) \quad \langle x+x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle;$$

$$P2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle;$$

$$P3) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$P4) \quad x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0.$$

As três primeiras propriedades implicam  $\langle x, y+y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$ ,  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$  e  $\langle 0, y \rangle = 0$ .

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor  $x \in E$  pondo  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , ou seja,  $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ . As propriedades N1) e N2) são imediatas. Quanto a N3), ela decorre da

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:  $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$ .

Para demonstrar esta desigualdade, note que ela é óbvia quando  $x = 0$ ; para  $x \neq 0$ , ponha  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$  e verifique que o vetor  $z = y - \lambda \cdot x$  é perpendicular a  $x$ , isto é,  $\langle z, x \rangle = 0$ . Tomando o produto interno de

$y = z + \lambda \cdot x$  por si mesmo, obtemos então  $|y|^2 = |z|^2 + \lambda^2 \cdot |x|^2$ , donde  $\lambda^2 |x|^2 \leq |y|^2$ . Ora,  $\lambda^2 |x|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2}$ . Logo  $\langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$ , o que nos fornece a desigualdade de buscada.

Podemos agora provar que, num espaço com produto interno, pondo  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  e  $|y| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ , vale  $|x+y| \leq |x| + |y|$ . Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

O exemplo mais natural de espaço vetorial com produto interno é  $\mathbb{R}^n$ , com  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$ . As propriedades P1) a P4) são óbvias. A norma  $|x| = \sqrt{\sum (x_i)^2}$ , introduzida no Exemplo 6, provém deste produto interno. Em particular, fica verificada a condição  $|x+y| \leq |x| + |y|$  que faltava no Exemplo 6, bem como a desigualdade triangular para a métrica  $d$  do Exemplo 4.

Nem toda norma num espaço vetorial  $E$  provém de um produto interno. Quando isto ocorre, vale a chamada lei do paralelogramo:  $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + |y|^2$ , que decorre imediatamente da definição  $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ . Assim, por exemplo, a norma  $|x|' = \sum |x_i|$  em  $\mathbb{R}^n$  não provém de um produto interno porque ela não cumpre a lei do paralelogramo. (Tome  $x = (1, 0)$  e  $y = (0, 1)$ .) A t

tulo de informação, avisamos que a lei do paralelogramo também é condição suficiente para que uma norma seja proveniente de um produto interno. Este fato é interessante mas sua demonstração é enfadonha.

Exemplo 8 - Produto cartesiano de espaços métricos. Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo  $d$ . O produto cartesiano  $M \times N$  é, como conjunto, formado pelos pares ordenados  $z = (x, y)$ , onde  $x \in M$  e  $y \in N$ . Podemos dotar o produto  $M \times N$  de uma métrica, definindo a distância de  $z = (x, y)$  a  $z' = (x', y')$  como sendo  $d'(z, z') = d(x, x') + d(y, y')$ , ou  $d''(z, z') = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$ , ou então  $d(z, z') = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}$ . Veremos adiante (Capítulo 2) que essas três métricas são "topologicamente equivalentes". As duas primeiras são muito mais simples para trabalhar do que a terceira, a qual é mencionada apenas para incluir o caso euclidiano. (Se  $M$  e  $N$  são espaços métricos arbitrários, não há vantagem algum em trabalhar com  $d$ , em vez de  $d'$  ou  $d''$ .) Novamente aqui mencionamos que, no futuro, faremos menção a qualquer dessas três métricas chamando-a de  $d$ .

A generalização para um produto de  $n$  fatores é immediata. Dados os espaços métricos  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo  $d$ , o produto

cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  é o conjunto das listas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$ . Tornaremos  $M$  um espaço métrico munindo-o com uma qualquer das três métricas abaixo:

$$d''(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\},$$

$$d^*(x, y) = d(x_1, y_1) + \dots + d(x_n, y_n), \quad \text{ou}$$

$$d(x, y) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2}.$$

Para quaisquer  $x, y \in M$ , valem as desigualdades:

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d^*(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

A partir daí será demonstrado, no Capítulo 2, que estas três métricas são "topologicamente equivalentes". (Noção a ser definida naquela oportunidade.) Por motivos evidentes, é preferível trabalhar com as métricas  $d^*$  e  $d''$ , às quais poderemos chamar de  $d$  mais adiante.

Quando  $M_1 = \dots = M_n = \mathbb{R}$ , reobtemos o espaço euclíadiano  $\mathbb{R}^n$ , como produto cartesiano de  $n$  cópias do espaço métrico  $\mathbb{R}$ .

## §2. Bolas e esferas.

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos.

Seja  $a$  um ponto no espaço métrico  $M$ . Dado um número real  $r > 0$ , definimos:

A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a;r)$  dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ . Ou seja,

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

A bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[a;r]$ , formado pelos pontos de  $M$  que estão a uma distância menor do que ou igual a  $r$  do ponto  $a$ .  
Ou seja

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

A esfera de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $S(a;r)$ , formado pelos pontos  $x \in M$  tais que  $d(x,a) = r$ .  
Assim:

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Evidentemente,  $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ , reunião disjunta.

Quando a métrica  $d$  provém de uma norma no espaço

ço vetorial  $E$ , podemos escrever:

$$B(a;r) = \{x \in E; |x-a| < r\}, \quad B[a;r] = \{x \in E; |x-a| \leq r\}$$

e

$$S(a;r) = \{x \in E; |x-a| = r\}.$$

Seja  $X$  um subespaço do espaço métrico  $M$ . Para cada  $a \in X$  e cada  $r > 0$ , seja  $B_X(a;r)$  a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$ , relativamente à métrica induzida em  $X$ . Tem-se  $B_X(a;r) = B(a;r) \cap X$ , onde  $B(a;r)$  é a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  no espaço  $M$ . Analogamente, valem  $B_X[a;r] = B[a;r] \cap X$  e  $S_X(a;r) = S(a;r) \cap X$ . Estes fatos resultam imediatamente das definições.

Assim, por exemplo, no círculo unitário  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$ , uma bola de centro  $a$  é um arco de círculo cujo ponto médio é  $a$ .

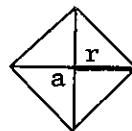
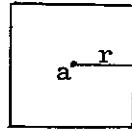
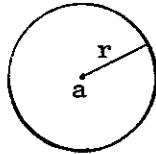
A noção de esfera tem importância menor do que a de bola. A terminologia acima é motivada por  $\mathbb{R}^3$  com a distância euclidiana. Embora seja conveniente lembrar o exemplo de  $\mathbb{R}^3$  como modelo geométrico para as situações abstratas que surgirão mais adiante, é bom notar, desde logo, que bolas e esferas às vezes adquirem aspectos inesperados. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9 - Se  $M$  está munido da métrica zero-um (Exemplo 1) então, para todo  $a \in M$ , tem-se

$B(a;r) = B[a;r] = M$  se  $r > 1$  e  $B(a;r) = B[a;r] = \{a\}$  se  $r < 1$ . Por outro lado  $B(a;1) = \{a\}$  e  $B[a;1] = M$ . Consequentemente,  $S(a;r) = \emptyset$  se  $r \neq 1$ , enquanto  $S(a;1) = M$ .

Exemplo 10 - Com a métrica usual da reta, para todo  $a \in \mathbb{R}$  e todo  $r > 0$ , a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o intervalo aberto  $(a-r, a+r)$ , pois a condição  $|x-a| < r$  equivale a  $-r < x-a < r$ , ou seja:  $a-r < x < a+r$ . Analogamente,  $B[a;r]$  é o intervalo fechado  $[a-r, a+r]$  e a "esfera"  $S(a;r)$  tem apenas dois pontos:  $a-r$  e  $a+r$ .

Exemplo 11 - No plano  $\mathbb{R}^2$ , a bola aberta  $B(a;r)$  é o interior de um círculo de centro  $a$  e raio  $r$ ,

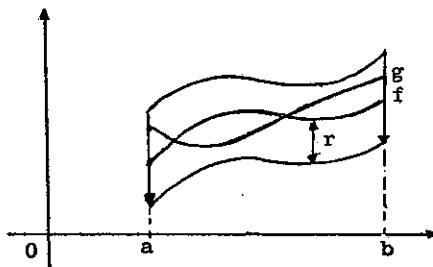


$$(x-a)^2 + (y-a)^2 < r^2. |x-a| < r \text{ e } |y-a| < r. |x-a| + |y-a| < r.$$

ou o interior de um quadrado de centro  $a$  e lados de comprimento  $2r$ , paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro  $a$  e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento  $2r$ . Estes casos correspondem a usarmos em  $\mathbb{R}^2$  as métricas  $d$ ,  $d''$  ou  $d'$  respectivamente. A esfera  $S(a;r)$  é o bordo da figura correspon-

dente e  $B[a;r]$ , evidentemente, é igual a  $B(a;r) \cup S(a;r)$ .

Exemplo 12 - Seja  $f \in \mathbb{R}([a,b];\mathbb{R})$ . Na métrica do sup (vide Exemplo 5), a condição para que uma função limitada  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  pertença à bola fechada  $B[f;r]$  é que seja  $|f(x)-g(x)| \leq r$  para todo  $x \in [a,b]$ . Para interpretar este fato geometricamente consideremos o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto  $G(f)$  do plano  $\mathbb{R}^2$ , formado pelos pontos  $(x,f(x))$ , onde  $x \in [a,b]$ . Chamaremos faixa de amplitude  $2r$  em torno de  $G(f)$  ao con-



junto dos pontos  $(x,y)$  tais que  $x \in [a,b]$  e  $f(x)-r \leq y \leq f(x) + r$ . As funções  $g \in B[f;r]$  são aquelas cujos gráficos estão contidos na faixa de amplitude  $2r$  em torno do gráfico de  $f$ . Quanto à bola aberta, é claro que se  $g \in B(f;r)$  então o gráfico de  $g$  está contido na "faixa aberta", formada pelos pontos  $(x,y)$  tais que  $x \in [a,b]$  e  $f(x)-r < y < f(x) + r$ . Mas pode ocorrer que o gráfico de  $g$  esteja nesta faixa e, apesar disto, seja

$\sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)| = r$ , e portanto  $g \notin B(f;r)$ . Basta tomar, por exemplo,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [a,b]$  enquanto  $g(x) = x$  se  $x \in [a,b]$ , e  $g(b) = 0$ . (Estamos supondo  $0 < a < b$ , para simplificar.) Neste caso,  $\|g-f\| = b$  mas, como  $|g(x)| < b$  para todo  $x \in [a,b]$ , vemos que o gráfico de  $g$  está contido na faixa aberta de amplitude  $2b$  em torno do gráfico de  $f$  (que é o segmento  $[a,b]$  do eixo das abcissas).

Exemplo 13 - Seja  $M = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$  o disco de centro  $O$  e raio  $1$ , com a métrica induzida pelo métrica euclidiana do plano. No espaço métrico  $M$ , temos  $B(0;r) = B[0;r] = M$  se  $r > 1$  e portanto  $S(a;r) = \emptyset$  para todo  $r > 1$ .

Exemplo 14 - No produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ , tomemos a métrica  $d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i)$ . Então as bolas em  $M$  são produtos cartesianos de bolas nos fatores  $M_i$ :  $B(a;r) = B(a_1;r) \times \dots \times B(a_n;r)$  e  $B[a;r] = B[a_1;r] \times \dots \times B[a_n;r]$ , onde  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Com efeito, dizer que  $d(a,x) < r$  (ou  $d(a,x) \leq r$ ) equivale a afirmar que  $d(a_i, x_i) < r$  (ou  $d(a_i, x_i) \leq r$ ) para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, por exemplo, tomando em  $\mathbb{R}^2$  a métrica  $d[(x,y), (x',y')] = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ , a bola fechada de centro  $(a,b)$  e raio  $r$  é o quadrado

$[a-r, a+r] \times [b-r, b+r]$ . Em  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , a métrica análoga faz com que as bolas sejam cubos com arestas paralelas aos eixos. Já se pensamos em  $\mathbb{R}^3$  como o produto  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}^2$  tem a métrica euclidiana e tomarmos em  $\mathbb{R}^3$  a distância  $d[(w,t), (w',t')] = \max\{d(w,w'), d(t,t')\}$ , as bolas correspondentes serão cilindros de base circular e altura paralela ao eixo vertical.

Seja  $M$  um espaço métrico. Um ponto  $a \in M$  chama-se um ponto isolado de  $M$  quando ele é uma bola aberta em  $M$ , ou seja, quando existe  $r > 0$  tal que  $B(a;r) = \{a\}$ . Isto significa, evidentemente, que, além do próprio  $a$ , não existem outros pontos de  $M$  a uma distância de  $a$  inferior a  $r$ .

Dizer que um ponto  $a \in M$  não é isolado significa, portanto, afirmar que para todo  $r > 0$  pode-se encontrar um ponto  $x \in A$  tal que  $0 < d(a,x) < r$ .

Exemplo 15 - Seja  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros com a métrica induzida pela métrica usual da reta. Todo ponto  $n \in \mathbb{Z}$  é isolado pois, tomando  $r = 1$ , vemos que se  $x \in \mathbb{Z}$  é tal que  $x \in B(n;1)$  então  $|x-n| < 1$  e portanto  $x = n$ . Por outro lado, seja  $\tilde{\mathbb{P}} = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ , ainda com a métrica  $d(x,y) = |x-y|$ . O ponto 0 não é isolado em  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

Com efeito, dado qualquer  $r > 0$ , existe um número natural  $n$  tal que  $n > \frac{1}{r}$ . Então  $0 < \frac{1}{n} < r$  e portanto  $\frac{1}{n}$  é um ponto da bola  $B(0;r)$ , diferente do seu centro 0. Mas todo ponto  $\frac{1}{n}$  é isolado em  $\bar{P}$ . Com efeito, o ponto de  $\bar{P}$  mais próximo de  $\frac{1}{n}$  é  $\frac{1}{n+1}$ , cuja distância a  $\frac{1}{n}$  é  $\frac{1}{n(n+1)}$ . Então, no espaço  $\bar{P}$ , se tomarmos  $0 < r < \frac{1}{n(n+1)}$ , a bola aberta  $B(\frac{1}{n};r)$  contém apenas o seu centro  $\frac{1}{n}$ . Em particular, no subespaço  $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ , todo ponto é isolado.

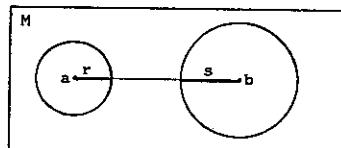
Exemplo 16 - Seja  $E$  um espaço vetorial normado diferente de  $\{0\}$ . Nenhum ponto de  $E$  é isolado.

Com efeito, dados  $a \in E$  e  $r > 0$ , mostramos que a bola aberta  $B(a;r)$  contém um elemento  $x \neq a$  do seguinte modo: tomando algum  $y \neq 0$  em  $E$ , vemos que o vetor  $z = \frac{r}{2|y|} \cdot y$  é  $\neq 0$  e tem norma  $\frac{r}{2}$ ; portanto  $0 < |z| < r$ . Então  $x = a+z$  é tal que  $0 < |x-a| < r$ , como queríamos mostrar.

Um espaço métrico  $M$  chama-se discreto quando todo ponto de  $M$  é isolado. Por exemplo, um espaço com a métrica zero-um é discreto. No Exemplo 14,  $Z$  e  $P$  são espaços discretos. Um subconjunto  $X \subset M$  chama-se discreto quando o subespaço  $X$  (métrica induzida) é discreto. Isto significa que, para cada  $x \in X$  existe uma bola aberta  $B(x,r)$  tal que  $X \cap B(x,r) = \{x\}$ .

Proposição 2 - Dados os pontos  $a \neq b$  num espaço métrico  $M$ , sejam  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $r+s \leq d(a,b)$ . Então as bolas abertas  $B(a;r)$  e  $B(b;s)$  são disjuntas.

Demonstração: Se existisse algum ponto  $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$ ,



teríamos  $d(a,x) < r$  e  $d(b,x) < s$ . Daí

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r+s \leq d(a,b),$$

um absurdo.

Corolário - Se  $r+s < d(a,b)$  então as bolas fechadas  $B[a;r]$  e  $B[b;s]$  são disjuntas.

Se fosse  $d(a,x) \leq r$  e  $d(b,x) \leq s$ , teríamos  $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \leq r+s < d(a,b)$ . Outro modo: tome  $r'$  e  $s'$  tais que  $r < r'$ ,  $s < s'$  e  $r+s < r'+s' < d(a,b)$ . Então as bolas fechadas  $B[a;r]$  e  $B[b;s]$  estão contidas nas bolas abertas disjuntas.

### §3. Conjuntos limitados.

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  chama-se limitado quando existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(x,y) \leq c$  para quaisquer  $x,y \in X$ . O menor desses números  $c$  será chamado o diâmetro de  $X$ . Ora, dizer que  $x,y \in X \Rightarrow d(x,y) \leq c$  significa afirmar que  $c$  é uma cota superior para o conjunto das distâncias  $d(x,y)$  entre pontos de  $X$ . A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Logo, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado  $X \subset M$  como o número real

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x,y); x,y \in X\}.$$

Às vezes, para indicar que  $X$  não é limitado, escreve-se  $\text{diam}(X) = \infty$ . Isto significa que, dado arbitrariamente um número real  $c$ , podem-se obter pontos  $x_c, y_c \in X$  tais que  $d(x_c, y_c) > c$ . É evidente que se  $X$  é limitado e  $Y \subset X$  então também  $Y$  é limitado, valendo  $\text{diam}(Y) \leq \text{diam}(X)$ .

Ao fazer considerações sobre o diâmetro de um conjunto  $X$ , convém supor que  $X \neq \emptyset$ . Isto será admitido implicitamente.

Exemplo 17 - Toda bola  $B(a;r)$  é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede  $2r$ . Com efeito, dados  $x,y \in B(a;r)$  temos  $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r+r = 2r$ . O mesmo se aplica à bola fechada  $B[a;r]$  e, consequentemente, à esfera  $S(a;r)$ . Pode ocorrer que o diâmetro de  $B[a;r]$  (e portanto da bola aberta e da esfera) seja menor do que  $2r$ . Basta considerar  $M$  reduzido a um único ponto  $a$ . Então  $B[a;r] = \{a\}$ , tem diâmetro 0 para todo  $r > 0$ . Um exemplo menos dramático é dado pelo espaço  $\mathbb{Z}$  (métrica induzida de  $\mathbb{R}$ ). Se  $r > 0$  não é inteiro então, para cada  $a \in \mathbb{Z}$ , o diâmetro de  $B[a;r] = [a-r, a+r] \cap \mathbb{Z}$  é menor do que  $2r$ .

Exemplo 18 - Num espaço vetorial  $E \neq \{0\}$ , toda bola aberta  $B = B(a;r)$  tem diâmetro  $2r$ . De fato, já sabemos que  $\text{diam}(B) \leq 2r$ . Basta então mostrar que nenhum número positivo  $s$ , menor do que  $2r$ , pode ser o diâmetro de  $B$ . Tomemos  $y \neq 0$  em  $E$  e um número real  $t$  tal que  $s < 2t < 2r$ . O vetor  $x = \frac{t}{|y|}y$  tem norma  $t$  (menor do que  $r$ ), logo  $a+x$  e  $a-x$  pertencem a  $B$ . Além disso,  $d(a+x, a-x) = |(a+x)-(a-x)| = 2|x| = 2t > s$ , logo  $s$  não é o diâmetro de  $B$ , como afirmáramos.

Exemplo 19 - Alguns espaços métricos são limitados. Basta considerar (mesmo num espaço métrico ilimitado

do) um subconjunto limitado, com a métrica induzida. Um espaço vetorial normado  $E \neq \{0\}$ , com a métrica proveniente de sua norma, nunca é limitado. Com efeito, dado  $y \neq 0$  em  $E$ , para cada  $c > 0$  podemos tomar em  $E$  o vetor  $x_c = \frac{2c}{|x|} x$ , o qual tem norma  $2c$  (maior do que  $c$ ) e portanto  $d(x_c, 0) = |x_c| > c$ .

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de  $M$ . Com efeito, se  $X \subset B(a; r)$  então  $X$  é limitado e tem diâmetro  $\leq 2r$ . Reciprocamente, se  $X$  é limitado então  $X$  está contido em qualquer bola se for vazio e, se não for, tomando arbitrariamente  $a \in X$ , existe  $c > 0$  tal que  $d(a, x) \leq c$  para todo  $x \in X$ . Logo  $X \subset B[a; c] \subset B(a; 2c)$ .

Exemplo 20 - Se  $X$  e  $Y$  são limitados então  $X \cup Y$  é limitado. Com efeito, fixemos um ponto  $a \in X$  e um ponto  $b \in Y$ . (O resultado é óbvio se  $X = \emptyset$  ou  $Y = \emptyset$ .) Existe  $c > 0$  tal que  $d(x, a) \leq c$  e  $d(y, b) \leq c$  para todo  $x \in X$  e todo  $y \in Y$ . Então, pondo  $k = 2c + d(a, b)$ , temos, para  $x \in X$  e  $y \in Y$  arbitrários:  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq c + d(a, b) + c = k$ . A desigualdade  $d(x, y) \leq k$  é evidente quando  $x, y \in Y$ . Logo vale  $d(x, y) \leq k$  para  $x$  e  $y$  quaisquer em  $X \cup Y$ , o que mostra que a reunião  $X \cup Y$  é um conjunto

to limitado. Aplicando este resultado  $n-1$  vezes, concluimos que a reunião  $X_1 \cup \dots \cup X_n$  de  $n$  conjuntos limitados é um conjunto limitado. Em particular, todo conjunto finito (sendo reunião dos seus pontos) é limitado.

Uma função  $f: X \rightarrow M$ , definida num conjunto arbitrário  $X$  e tomando valores num espaço métrico  $M$ , chama-se limitada quando sua imagem  $f(X)$  é um subconjunto limitado de  $M$ .

Exemplo 21 - A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) =$

$$\frac{1}{1+x^2}, \text{ é limitada porque } f(\mathbb{R}) = (0,1].$$

por outro lado,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $g(x) = x^2$ , não é limitada pois  $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ . Se  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica que provém de uma norma em  $\mathbb{R}^n$ , então  $d$  não é uma função limitada, conforme o Exemplo 19.

Generalizando o Exemplo 5, sejam  $X$  um conjunto arbitrário e  $M$  um espaço métrico. Indiquemos com a notação  $\mathcal{B}(X;M)$  o conjunto das funções limitadas  $f: X \rightarrow M$ .

Dadas  $f, g \in \mathcal{B}(X;M)$ , as distâncias  $d(f(x), g(x))$ , quando  $x$  varia em  $X$ , formam um conjunto limitado de números reais  $\geq 0$ , pois o conjunto  $f(X) \cup g(X) \subset M$  é limitado (vide Exemplo 20). Assim, podemos definir a distância entre duas funções limitadas  $f, g: X \rightarrow M$  pondo:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Obtemos então uma métrica em  $\mathbb{B}(X; M)$ , a qual denominamos métrica da convergência uniforme, ou métrica do sup.

Quando  $E$  é um espaço vetorial normado, podemos somar funções que tomam valores em  $E$  e multiplicá-las por números. É fácil verificar que, para quaisquer  $f, g \in \mathbb{B}(X; E)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , as funções  $f+g: X \rightarrow E$  e  $\lambda \cdot f: X \rightarrow E$  são limitadas. Portanto  $\mathbb{B}(X; E)$  é um espaço vetorial em relação às operações naturais. A métrica do sup em  $\mathbb{B}(X; E)$  provém da norma  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Neste caso, podemos então escrever  $\|f-g\|$  em vez de  $d(f, g)$ .

Seria natural considerar o conjunto  $\mathfrak{F}(X; M)$  de todas as funções  $f: X \rightarrow M$ , definidas no conjunto arbitrário  $X$  e tomando valores no espaço métrico  $M$ . A métrica do sup não tem sentido em  $\mathfrak{F}(X; M)$  porque há funções  $f, g: X \rightarrow M$  tais que o conjunto  $\{d(f(x), g(x); x \in X\}$  não é limitado. Neste caso, escreveremos  $d(f, g) = +\infty$ . Quando este conjunto for limitado, escreveremos  $d(f, g) < +\infty$ . Por exemplo, sejam  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + \sin x$  e  $h(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Temos  $d(f, g) < +\infty$  e  $d(f, h) = d(g, h) = +\infty$ . Note-se que  $f$ ,  $g$  e  $h$  são ilimitadas.

A relação  $d(f,g) < +\infty$  é reflexiva:  $d(f,f) < +\infty$ . Ela também é simétrica: se  $d(f,g) < +\infty$  então  $d(g,f) < +\infty$ . É transitiva: se  $d(f,g) < +\infty$  e  $d(g,h) < +\infty$  então, para todo  $x \in X$ , temos  $d(f(x),h(x)) \leq d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x)) \leq d(f,g) + d(g,h)$ , logo  $d(f,h) < +\infty$ . Assim, " $d(f,g) < +\infty$ " é uma relação de equivalência no conjunto  $\mathfrak{J}(X;M)$ .

Dada  $f: X \rightarrow M$ , a classe de equivalência de  $f$  segundo a relação " $d(f,g) < +\infty$ " é o conjunto

$$\mathfrak{B}_f(X;M) = \{g: X \rightarrow M; d(g,f) < +\infty\},$$

formado pelas funções que estão a uma distância finita de  $f$ . Dadas  $f, g: X \rightarrow M$ , tem-se  $d(f,g) < +\infty \Leftrightarrow g \in \mathfrak{B}_f(X;M) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{B}_g(X;M) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_f(X;M) = \mathfrak{B}_g(X;M)$ .

Assim, podemos definir em cada conjunto  $\mathfrak{B}_f(X;M)$  uma estrutura de espaço métrico, pondo  $d(g,h) = \sup_{x \in X} d(g(x),h(x))$ , para  $g, h$  quaisquer em  $\mathfrak{B}_f(X;M)$ . A transitividade da relação " $d(f,g) < +\infty$ " assegura que  $d(g,h)$  é um número real.

É claro que  $\mathfrak{J}(X;M) = \bigcup_f \mathfrak{B}_f(X;M)$ , onde  $f$  varia em  $\mathfrak{J}(X;M)$ . Se escolhermos, em cada classe  $\mathfrak{B}_f(X;M)$ , uma única função  $a: X \rightarrow M$  para representante da classe e chamarmos de  $A$  o conjunto das representantes, podemos escrever

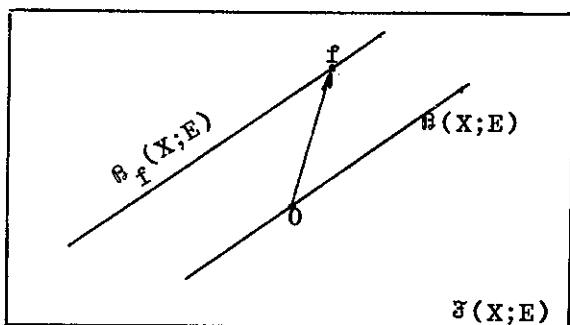
$$\mathfrak{F}(X;M) = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha(X;M)$$

onde, agora,  $\alpha \neq \beta \Rightarrow B_\alpha(X;M) \cap B_\beta(X;M) = \emptyset$ . Isto expri-me  $\mathfrak{F}(X;M)$  como reunião de espaços métricos dois a dois disjuntos.

Observemos que  $B(X;M) = B_a(X;M)$ , onde  $a: X \rightarrow M$  é qualquer constante; com efeito, uma aplicação  $f: X \rightarrow M$  é limitada se, e somente se, sua imagem  $f(X)$  está contida numa bola  $B(a;r) \subset M$ . Isto significa que  $d(f(x),a) < r$  para todo  $x \in X$  e portanto  $f \in B_a(X;R)$ , onde  $a$  é a função constante  $x \mapsto a$ .

No caso de o espaço métrico  $M$  ser limitado, tem-se evidentemente  $\mathfrak{F}(X;M) = B(X;M)$ . Só há então uma classe  $B_f(X;M)$ .

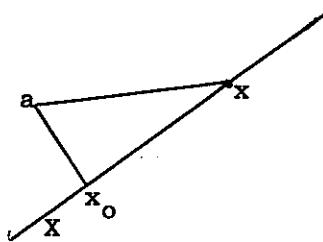
Seja agora  $E$  um espaço vetorial normado. Então  $\mathfrak{F}(X;E)$  é um espaço vetorial, do qual  $B(X;E)$  é um subespaço, dotado da norma do sup. Para cada  $f \in \mathfrak{F}(X;E)$ , tem-se  $g \in B_f(X;E)$  se, e somente se, a função  $h = g-f$  é limitada. Assim  $g \in B_f(X;E) \Leftrightarrow g = f+h, h \in B(X;E)$ . Em outras palavras,  $B_f(X;E) = f + B(X;E) \stackrel{\text{def}}{=} \{f + h; h \in B(X;E)\}$ . Vemos, pois, que, no espaço vetorial  $\mathfrak{F}(X;E)$ , o conjunto  $B_f(X;E)$  é a variedade afim paralela ao subespaço  $B(X;E)$  e contendo o vetor  $f$ .



O espaço vetorial  $\mathfrak{V}(X;E) = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}(X;E)$  não é normado mas é reunião disjunta de variedades afins, cada uma das quais é um espaço métrico, com a métrica do sup. Uma dessas variedades,  $B(X;E)$ , é um espaço vetorial normado.

§4. Distância de um ponto a um conjunto; distância entre dois conjuntos.

Sejam  $a$  um ponto e  $X$  uma reta no plano. O ponto  $x_0 \in X$ , pé da perpendicular baixada de  $a$  sobre  $X$ , é o ponto de  $X$  que está mais próximo de  $a$ . Com



efeito, qualquer outro ponto  $x \in X$  determina o triângulo retângulo a  $x_0$  x e, pelo Teorema de Pitágoras, temos  $d(a,x)^2 = d(a,x_0)^2 + d(x_0,x)^2$ , donde  $d(a,x_0) \leq d(a,x)$ . Assim, podemos escrever  $d(a,x_0) = \inf_{x \in X} d(a,x)$ . Vamos agora generalizar esta situação.

Sejam a um ponto e  $X$  um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Definiremos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real

$$d(a,X) = \inf_{x \in X} d(a,x).$$

O conjunto de números reais não-negativos  $\{d(a,x); x \in X\}$ , formado pelas distâncias de a aos diversos pontos de  $X$ , é não-vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância  $d(a,X)$ . Mas pode não existir um elemento  $x_0 \in X$  mais próximo de a do que os outros pontos de  $X$ . (Situações desse tipo serão vistas nos exemplos abaixo.) A noção de ínfimo de um conjunto de números reais existe precisamente para generalizar a idéia de elemento mínimo. Pela definição de ínfimo, temos:

- 1)  $d(a,X) \leq d(a,x)$  para todo  $x \in X$ ;
- 2) Se  $d(a,X) < c$  então existe  $x \in X$  tal que  $d(a,x) < c$ .

A propriedade 1) diz que o número  $d(a, X)$  é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de  $a$  aos pontos de  $X$ . A propriedade 2) diz que nenhum número maior do que  $d(a, X)$  é cota inferior desse conjunto. Equivalentemente:  $d(a, X)$  é a menor das cotas inferiores do conjunto  $\{d(a, x); x \in X\}$ . Logo, podemos reformular a propriedade 2) escrevendo:

2') Se  $c \leq d(a, x)$  para todo  $x \in X$ , então  $c \leq d(a, X)$ .

As propriedades 1) e 2) (ou 2')) acima caracterizam a distância  $d(a, X)$ . Assim, quando tivermos de provar que um certo número  $m$  é igual a  $d(a, X)$ , deveremos mostrar primeiro que  $m \leq d(a, x)$  para todo  $x \in X$  e, em seguida, que se  $m < c$  então existe algum  $x \in X$  tal que  $d(a, x) < c$ .

Evidentemente,  $a \in X \Rightarrow d(a, X) = 0$  e  $X \subset Y \Rightarrow d(a, Y) \subset d(a, X)$ .

Notemos ainda que  $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow$  para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in X$  com  $d(a, x) < \epsilon$ .

Exemplo 22 - Se  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é um conjunto finito, então  $d(a, X)$  é o menor dos  $n$  números  $d(a, x_1), \dots, d(a, x_n)$ .

Exemplo 23 - Sejam  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  o círculo unitário no plano cartesiano.

culo unitário do plano e  $0 \in \mathbb{R}^2$  a origem. Então  $d(0, z) = 1$  para todo  $z \in S^1$ , logo  $d(0, S^1) = 1$ .

Exemplo 24 - Para todo intervalo aberto  $X = (a, b)$  na reta, tem-se  $d(a, X) = d(b, X) = 0$ . Dado um disco aberto  $X = B(a; r)$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , tem-se  $d(b, X) = 0$  para todo ponto  $b$  da circunferência  $S(a, r)$ . Estes fatos seguem-se do resultado mais geral seguinte: num espaço vetorial normado E, seja  $B = B(a, r)$  a bola aberta de centro  $a \in E$  e raio  $r > 0$ . Dado  $b \in E$ , tem-se  $d(b, B) = 0$  se, e somente se,  $b \in B[a; r]$ . Demonstremos isto. Em primeiro lugar, suponhamos  $b \in B[a; r]$ , ou seja,  $|b-a| \leq r$ . Se for  $|b-a| < r$  então  $b \in B$ , donde  $d(b, B) = 0$ . Se for  $|b-a| = r$ , então, dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , obteremos um ponto  $x \in B$  tal que  $d(b, x) < \epsilon$ . Começamos chamando de  $u = \frac{1}{r}(b-a)$  o vetor unitário do raio  $ab$ . Em seguida, tomamos um número real  $t$ , tal que  $r-\epsilon < t < r$ . Temos, portanto  $0 < r-t < \epsilon$ . Em seguida, pomos  $x = a + t \cdot u$ . Então é imediato que  $d(x, a) = |x-a| = t < r$ , logo  $x \in B$ . Além disso,  $d(x, b) = |b-x| = |b-a-t \cdot u| = |r \cdot u - t \cdot u| = r-t < \epsilon$ . Isto conclui a prova de que  $x \in B[a; r] \Rightarrow d(x, B) = 0$ , onde  $B = B(a, r)$ . Para demonstrar a recíproca, tomemos em E um ponto  $p \notin B[a; r]$  e provemos que  $d(p, B) > 0$ . Temos

$|p-a| = r+c$ , com  $c > 0$ . Para todo  $x \in B$ , vale  $|x-a| < r$  e, como  $|p-a| \leq |p-x| + |x-a|$ , concluimos que  $d(p,x) = |p-x| \geq |p-a| - |x-a| \geq c$ . Segue-se que  $d(p,B) \geq c > 0$ . Para todo  $x \in B$ , vale  $|x-a| < r$  e, como  $|p-a| \leq |p-x| + |x-a|$ , concluimos que  $d(p,x) = |p-x| \geq |p-a| - |x-a| \geq c$ . Segue-se que  $d(p,B) \geq c > 0$ . Este exemplo mostra, em particular, que se pode ter  $d(a,X) = 0$  com  $a \notin X$ .

Proposição 3 - Sejam M um espaço métrico. Dados a,b ∈ M e um subconjunto não-vazio  $X \subset M$ , vale:  
 $|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b)$ .

Demonstração: Devemos mostrar que  $-d(a,b) \leq d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$ . Ora, para todo  $x \in X$ , temos:  $d(a,X) \leq d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x)$ , ou seja:  $d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,x)$ . Esta desigualdade valendo para todo  $x \in X$ , concluimos que  $d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,X)$ , ou, o que é o mesmo:  $d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$ . Esta é uma das duas desigualdades que devíamos demonstrar. A outra decorre daí, trocando-se a por b.

Corolário - Dados a,b,x em M, tem-se  $|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b)$ .

Pode-se também definir, mais geralmente, a distância entre dois subconjuntos não vazios  $X,Y \subset M$ . Põe-se

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Quando  $X \cap Y = \emptyset$ , tem-se  $d(X, Y) = 0$  mas a recíproca é falsa, como se vê na reta, tomando  $X = (-\infty, 0)$  e  $Y = (0, +\infty)$ . Tem-se  $X \cap Y = \emptyset$  mas  $d(X, Y) = 0$ .

É claro que  $d(X, X) = 0$  e que  $d(X, Y) = d(Y, X)$  mas estas são as únicas propriedades da distância entre pontos que permanecem válidas para conjuntos.

## §5. Isometrias.

Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  chama-se uma imersão isométrica quando  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ . Neste caso, diz-se também que  $f$  preserva distâncias.

Uma imersão isométrica  $f: M \rightarrow N$  é sempre injetora pois  $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$ . Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva. Toda imersão isométrica  $f: M \rightarrow N$  define uma isometria de  $M$  sobre o subespaço  $f(M) \subset N$ .

A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.

Sejam  $X$  um conjunto,  $(M, d)$  um espaço métrico

e  $f: X \rightarrow M$  uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos  $x, y \in X$ , ponhamos  $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$ . Isto define uma métrica  $d'$  em  $X$ , chamada a métrica induzida por  $f$ . Ela é a única métrica em  $X$  que torna  $f: X \rightarrow M$  uma imersão isométrica. Um exemplo particular desta situação é o caso de um subconjunto  $X \subset M$ . A métrica que torna  $X$  um subespaço de  $M$  é induzida pela aplicação de inclusão  $i: X \rightarrow M$ , tal que  $i(x) = x$  para todo  $x \in X$ .

Um dos métodos mais freqüentes de introduzir uma métrica num conjunto  $X$  é induzi-la através de uma aplicação injetiva  $f: X \rightarrow M$ , de  $X$  num espaço métrico  $M$ .

Exemplo 25 - Seja  $\mathbb{R}^n$  com a métrica induzida por uma norma qualquer. Tomemos  $a, u \in \mathbb{R}^n$ , com  $|u| = 1$ . A aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $f(t) = a + t \cdot u$ , é uma imersão isométrica da reta em  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito, para  $s, t \in \mathbb{R}$  arbitrários, temos  $d(f(s), f(t)) = |f(s) - f(t)| = = |(t-s) \cdot u| = |t-s| = d(s, t)$ . Fixado  $a \in \mathbb{R}^n$ , a aplicação  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por  $g(x) = x+a$ , é uma isometria (cuja inversa é  $y \mapsto y-a$ ), chamada translação pelo vetor  $a$ . Também  $h(x) = -x$  define uma isometria  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . As translações mostram que, dados  $a, b \in \mathbb{R}^n$  quaisquer, existe uma isometria  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(a) = b$ . Este fato se exprime dizendo que  $\mathbb{R}^n$  é "metricamente homó-

gêneo". Um exemplo de espaço que não tem essa propriedade é um intervalo fechado  $[a,b]$ . Para toda isometria  $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$  deve-se ter  $|f(b)-f(a)| = |b-a|$ . Como  $f(b)$  e  $f(a)$  pertencem a  $[a,b]$ , tem-se necessariamente  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$  ou então  $f(a) = b$  e  $f(b) = a$ . Em todas as afirmações deste exemplo, o espaço  $\mathbb{R}^n$  pode ser substituído por um espaço vetorial normado  $E$  qualquer.

Exemplo 26 - Concebendo  $\mathbb{R}^2$  como o conjunto dos números complexos (métrica euclidiana), fixemos um elemento  $u = a + ib$ , com  $|u|^2 = a^2 + b^2 = 1$ . A aplicação  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(z) = u \cdot z$  (multiplicação de números complexos) é uma isometria. Com efeito,  $|f(z)-f(w)| = |u \cdot z - u \cdot w| = |u| \cdot |z-w| = |z-w|$ , logo  $f$  preserva distâncias. Além disso,  $f$  é uma bijeção, cuja inversa é  $w \mapsto u^{-1} \cdot w$ , onde  $u^{-1} = a - bi$  é o inverso multiplicativo do número complexo  $u$ , de valor absoluto um.

Exemplo 27 - Mostraremos agora que todo espaço métrico  $M = (M, d)$  pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado  $E = \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ . Suponhamos inicialmente que  $M$  seja limitado. Então definiremos uma aplicação  $\varphi: M \rightarrow \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$  pondo, para cada  $x \in M$ ,  $\varphi(x) = d_x$ , onde  $d_x: M \rightarrow \mathbb{R}$  é a função "distância ao ponto  $x$ ", isto é,  $d_x(y) = d(x, y)$  para todo  $y \in M$ . Como a métri-

ca  $d$  é limitada, cada função  $d_x$ ,  $x \in M$  é limitada, de modo que  $\varphi$  toma realmente valores em  $\mathbb{B}(M;R)$ . Para provar que  $\varphi$  preserva distâncias, notemos que, pela Proposição 3, dados  $x, x', y \in M$  arbitrários, temos  $|d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x')$ . Logo

$$\|d_x - d_{x'}\| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x').$$

Por outro lado, tomando  $y = x'$ , obtemos  $|d_x(y) - d_{x'}(y)| = d(x, x')$ . Segue-se que  $\|d_x - d_{x'}\| = d(x, x')$ , ou seja,  $d(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$ . Portanto  $\varphi$  é uma imersão isométrica de  $M$  em  $\mathbb{B}(M;R)$ . Quando  $M$  não é limitado, nenhuma das funções  $d_x$  é limitada. Neste caso, fixamos um ponto  $a \in M$  e definimos a aplicação  $\xi: M \rightarrow \mathbb{B}(M;R)$  pondo  $\xi(x) = d_x - d_a$ . Para cada  $x \in M$ , como vimos acima, vale  $\|\xi(x)\| = \|d_x - d_a\| \leq d(a, x)$ , logo  $\xi(x)$  é uma função limitada, ou seja,  $\xi$  toma mesmo valores em  $\mathbb{B}(M;R)$ . Além disso,  $d(\xi(x), \xi(x')) = \|\xi(x) - \xi(x')\| = \|(d_x - d_a) - (d_{x'} - d_a)\| = \|d_x - d_{x'}\| = d(x, x')$  como ficou provado acima. Por conseguinte,  $\xi$  é uma imersão isométrica de  $M$  no espaço vetorial normado  $\mathbb{B}(M;R)$ .

Observação: Mesmo quando  $M$  não é limitado, a aplicação  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{J}(M;R)$  pode ser definida por  $\varphi(x) = d_x$  e a desigualdade  $\|d_x - d_{x'}\| \leq d(x, x')$  mostra que para  $x$  e  $x'$  arbitrários em  $M$ , as funções  $d_x$  e  $d_{x'}$  estão

sempre a uma distância finita uma da outra. Ou seja, existe  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d_x \in \mathcal{B}_f(M; \mathbb{R})$  para todo  $x \in M$ . Temos então uma imersão isométrica  $\varphi: M \rightarrow \mathcal{B}_f(M; \mathbb{R})$ . Por um lado,  $\varphi$  é esteticamente preferível à imersão isométrica  $\xi$  do Exemplo 27 porque não depende da escolha arbitrária do ponto  $a \in M$ . Por outro lado  $\xi$  toma valores num espaço vetorial normado, o que não ocorre com  $\varphi$ . Note-se que podemos tomar  $f = d_a$  e que  $g \mapsto g - d_a$  define uma isometria entre  $\mathcal{B}_f(M; \mathbb{R})$  e  $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ . Vemos que  $\xi$  é a composta desta isometria com  $\varphi$ .

Nosso objetivo neste livro é estudar a Topologia dos Espaços Métricos. Se estivéssemos interessados primordialmente na Geometria desses espaços, as noções de imersão isométrica e isometria desempenhariam um papel central. Tais noções são demasiadamente rígidas para os nossos propósitos. Embora elas tenham uma certa importância, a noção principal será a de função contínua, que introduziremos no capítulo seguinte.

## §6. Pseudo-métricas.

Uma pseudo-métrica num conjunto  $M$  é uma função real  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpre as condições de uma métrica, salvo o fato de que pode ser  $d(x,y) = 0$  com  $x \neq y$ . Mais precisamente, tem-se  $d(x,x) = 0$ ,  $d(x,y) \geq 0$  e  $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ . Um espaço pseudo-métrico é um par  $(M,d)$  onde  $M$  é um conjunto e  $d$  é uma pseudo-métrica em  $M$ .

Analogamente, uma pseudo-norma num espaço vetorial  $E$  é uma função  $| | : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|x| \geq 0$ ,  $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$  e  $|x+y| \leq |x| + |y|$ . Uma pseudo-norma define uma pseudo-métrica em  $E$  pondo-se  $d(x,y) = |x-y|$ .

Exemplo 28 - Qualquer conjunto  $X$  pode receber uma pseudo-métrica trivial pondo-se  $d(x,y) = 0$  para  $x,y \in X$  quaisquer. Mais geralmente, se  $(M,d)$  é um espaço pseudo-métrico e  $f: X \rightarrow M$  é qualquer aplicação, obtém-se em  $X$  a pseudo-métrica  $d' \text{ induzida por } f$  pondo-se  $d'(x,y) = d(f(x),f(y))$ . (O caso anterior corresponde a  $f$  constante.) Uma maneira bastante comum de obter pseudo-métricas é a seguinte: seja  $\mathfrak{F}$  um conjunto de funções reais  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que todas as  $f \in \mathfrak{F}$  são limitadas no mesmo subconjunto  $S \subset \mathbb{R}$ . (Isto quer dizer

que cada restrição  $f|S$  é limitada.) Então  $d(f,g) = \sup_{x \in S} |f(x)-g(x)|$  define uma pseudo-métrica em  $\mathbb{J}$ . Na realidade, tal pseudo-métrica provém da pseudo-norma  $\|f-g\| = \sup_{x \in S} |f(x)-g(x)|$ . Isto não é necessariamente uma norma porque pode-se ter  $f(x) = 0$  para todo  $x \in S$  sem que  $f$  se anule em todos os pontos de  $\mathbb{R}$ . Este exemplo pode ser generalizado considerando-se funções  $f: X \rightarrow M$  e um subconjunto  $S \subset X$  onde as  $f$  são limitadas.

Exemplo 29 - Outra pseudo-norma ocorre no espaço  $E$  das funções  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  que são integráveis no sentido de Riemann, quando se define  $|f|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ . Como as funções aqui não precisam ser contínuas, pode ocorrer que  $|f|_1 = 0$  sem que  $f$  se anule em todos os pontos de  $[a,b]$ . (Basta, por exemplo, que  $f(x) \neq 0$  apenas num número finito de pontos.)

Pode-se passar de um espaço pseudo-métrico  $M$  para um espaço métrico  $\bar{M}$ , mediante o processo de identificar dois pontos  $x, y \in M$  quando  $d(x,y) = 0$ .

Mais precisamente, a relação " $d(x,y) = 0$ " é uma equivalência em  $M$ . Indicamos com  $\bar{x} = \{y \in M; d(x,y)=0\}$  a classe de equivalência do ponto  $x \in M$  e chamamos de  $\bar{M}$  o conjunto de todas as classes de equivalência  $\bar{x}$ , quando  $x$  percorre  $M$ . Temos  $\bar{x} = \bar{u} \Leftrightarrow d(x,u) = 0$ . Da-

dos  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{M}$ , definimos  $\tilde{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$ . Se  $\bar{x} = \bar{u}$  e  $\bar{y} = \bar{v}$  então  $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) = d(u, v)$  e, da mesma maneira,  $d(u, v) \leq d(x, y)$ . Logo  $d(x, y) = d(u, v)$ . Isto mostra que a definição  $\tilde{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$  não é ambígua. Verifica-se facilmente que  $\tilde{d}$  é uma métrica em  $\bar{M}$ .

### Exercícios do Capítulo 1

#### §1

- 1) Seja  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que a)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ; b)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . Prove que  $d$  é uma métrica.
- 2) Mostre que  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d(x, y) = (x-y)^2$ , não é uma métrica.
- 3) Para cada uma das quatro condições que caracterizam uma métrica, obtenha uma função  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que não a cumpre mas satisfaz às outras três.
- 4) Seja  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma métrica. Verifique que  $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ ,  $\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$  e  $\gamma(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$  são métricas em  $M$ .
- 5) Prove que toda norma  $\| \cdot \|$  em  $\mathbb{R}$  é da forma  $\|x\| =$

=  $a \cdot |x|$ , onde  $a > 0$  é uma constante e  $|x|$  é o valor absoluto de  $x$ . Conclua que toda norma em  $\mathbb{R}$  provém de um produto interno.

- 6) A fim de que uma métrica  $d$ , num espaço vetorial  $E$ , seja proveniente de uma norma, é necessário e suficiente que, para  $x, a \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  arbitrários, se tenha  $d(x+a, y+a) = d(x, y)$  e  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ .
- 7) Mostre que se  $X$  tem mais de um elemento então a norma  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$  não provém de um produto interno em  $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ . Conclua o mesmo para a norma  $|x|^n = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  em  $\mathbb{R}^n$ .
- 8) Seja  $X \subset \mathbb{R}^2$  tal que a métrica euclidiana induz em  $X$  a métrica zero-um. Prove que  $X$  tem no máximo três elementos. E se fosse  $X \subset \mathbb{R}^3$ ? Generalize para  $\mathbb{R}^n$ . Você pode imaginar um espaço vetorial normado  $E$  e um subconjunto infinito  $X \subset E$  tal que  $x \neq y$  em  $X$  implica que  $d(x, y) = 1$ ?
- 9) Seja  $E$  um espaço vetorial munido de produto interno. Dados  $x, y \in E$ , prove que  $|\langle x, y \rangle| = |x| \cdot |y|$  se, e somente se,  $x$  e  $y$  são linearmente independentes.
- 10) Num espaço vetorial normado  $E$ , se  $c-a = t \cdot (b-a)$ , com  $t \geq 1$ , então  $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ . (A primeira

meira igualdade significa que  $b$  pertence ao segmento de reta cujos extremos são  $a$  e  $c$ .) No plano, com a métrica  $|(x,y)| = |x| + |y|$ , tome  $a = (0,1)$ ,  $b = (0,0)$  e  $c = (1,0)$  para mostrar que a recíproca não é verdadeira em qualquer espaço vetorial normado.

- 11) Sejam  $a, b, c$  três pontos distintos num espaço vetorial  $E$ , munido de produto interno. Se  $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$  então  $c-a = t \cdot (b-a)$ , com  $t > 1$ .

## §2

- 12) Em todo espaço métrico  $M$ , tem-se  $B[a;r] = \bigcap_{s>r} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a;r+\frac{1}{n})$  e  $\{a\} = \bigcap_{r>0} B(a;r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a;\frac{1}{n})$ . Exprima, dualmente, cada bola aberta de  $M$  como reunião de bolas fechadas.
- 13) Um ponto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  é isolado no produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  se, e somente se, cada coordenada  $a_i$  é um ponto isolado em  $M_i$ . Conclua que o produto cartesiano  $M_1 \times \dots \times M_n$  é discreto se, e somente se, cada fator  $M_i$  é discreto.

- 14) Todo espaço métrico finito é discreto.
- 15) Seja  $X$  um conjunto infinito enumerável. Mostre que se pode definir uma métrica em  $X$ , relativamente à

qual nenhum ponto de  $X$  é isolado.

16) Dê exemplo de dois subconjuntos discretos  $X, Y \subset \mathbb{R}$  tais que  $X \cup Y$  não seja discreto.

17) Se  $b \notin B[a;r]$ , prove que existe  $s > 0$  tal que  $B[a;r] \cap B[a;s] = \emptyset$ .

18) Num espaço métrico  $M$ , seja  $b \in B(a;r)$ . Prove que existe uma bola aberta de centro  $b$  contida em  $B(a;r)$ . Dê um contra-exemplo mostrando que isto poderia ser falso para  $b \in B[a;r]$ .

19) Seja  $M$  um espaço métrico. A diagonal  $\Delta \subset M \times M$  é o conjunto dos pares  $(x,x) \in M \times M$  com coordenadas iguais. Prove que se  $z \in M \times M - \Delta$  então existe uma bola aberta de centro  $z$  em  $M \times M$  que é disjunta de  $\Delta$ . (Fica mais fácil usando a métrica  $d(z,z') = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ .)

20) Usando a métrica  $d[(x,y), (x',y')] = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ , mostre que a esfera de centro  $(a,b)$  e raio  $r$  em  $M \times N$  é igual a  $(B[a;r] \times S(b;r)) \cup (S(a;r) \times B[b;r])$ .

21) Seja  $X \subset M$  um subconjunto discreto. Obtenha, para cada  $x \in X$ , uma bola aberta  $B_x = B(x;r_x)$  em  $M$ , de tal modo que  $x \neq y \Rightarrow B_x \cap B_y = \emptyset$ .

22) Dados um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  e um número real  $r > 0$ , seja  $B(X;r) = \bigcup_{x \in X} B(x;r)$  a

"bola aberta de centro  $X$  e raio  $r"$ . Prove que  
 $B(X \cap Y; r) \subset B(X;r) \cap B(Y;r)$  e que  $B(X \cup Y; r) =$   
 $= B(X;r) \cup B(Y;r)$ .

§3

- 23) Dê exemplo de um conjunto limitado  $X \subset \mathbb{R}$  tal que  
não existam  $x, y \in X$  com  $|x-y| = \text{diam}(X)$ .
- 24) Seja  $M$  um espaço métrico limitado. Mostre que, para cada  $a \in M$  existe uma bola  $B[a;r]$  cujo diâmetro é menor do que  $2r$ .
- 25) Seja  $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  ( $a_n \neq 0$ ) um polinômio de grau  $n > 0$ . Mostre que a função  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não é limitada mas para cada subconjunto limitado  $X \subset \mathbb{R}$ , a restrição  $p|X$  é limitada.
- 26) Todo espaço métrico é reunião enumerável de subconjuntos limitados.

§4

- 27) Sejam  $a$  um ponto e  $C$  um subconjunto não-vazio de um espaço métrico. Suponha que  $d(a,C) = 2$  e prove que existe uma bola aberta  $B(a;r)$  tal que  $d(x,c) > 1$  para todo  $x \in B(a;r)$ .
- 28) Seja  $\Delta = \{(x,x); x \in M\}$  a diagonal do produto  $M \times M$ ,

onde  $M$  é um espaço métrico. Se  $z = (x, y) \notin \Delta$  então  $d(z, \Delta) > 0$ .

29) Seja  $F = M - B(a; r)$  o complementar de uma bola aberta no espaço métrico  $M$ . se  $d(x, F) = 0$  então  $x \in F$ .

30) Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  o disco unitário aberto do plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $a = (5, 0)$ , prove que  $d(a, X) = 4$ .

31) Num espaço vetorial normado  $E$ , sejam  $X = B(a; r)$  e  $\tilde{X} = B[a; r]$ . Prove que, para todo  $b \in E$ , tem-se  $d(b, X) = d(b, \tilde{X})$ .

32) Seja  $X = \{x \in \mathbb{R}^n; x_{p+1} = \dots = x_n = 0\}$ . Usando em  $\mathbb{R}^n$  a métrica euclidiana, prove que se  $a = (a_1, \dots, a_n)$  então  $d(a, X) = \sqrt{(a_{p+1})^2 + \dots + (a_n)^2}$ .

33) Para todo subconjunto não-vazio  $A$  de um espaço métrico  $M$ , seja  $A_* = \{x \in M; d(x, A) = 0\}$ . Prove que  $(A_*)_* = A_*$ .

34) Prove que se tem  $d(a, X) = \inf\{r > 0; a \in B(X; r)\}$ .  
(Vide Exercício 22.)

35) Sejam  $A, B$  subconjuntos limitados não-vazios de um espaço métrico  $M$ . Mostre que  $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B)$ .

36) Dê exemplo de conjuntos não-vazios  $A, B$  tais que

$A \cap B = \emptyset$  e  $d(A, B) = 0$ .

- 37) Sejam  $X, Y$  limitados e não-vazios no espaço métrico  $M$ . Ponha  $\alpha(X, Y) = \sup\{d(x, y); x \in X, y \in Y\}$  e mostre que, para todo  $z \in M$  tem-se  $|d(z, X) - d(z, Y)| \leq \alpha(x, y)$ .

## §5

- 38) Num espaço vetorial normado  $E$ , duas bolas abertas (fechadas) de mesmo raio são isométricas. Mais precisamente, existe uma isometria de  $E$  que leva uma dessas bolas na outra. Mostre que para espaços métricos em geral, este resultado é falso.
- 39) Seja  $T$  o subespaço do plano formado por dois segmentos de reta unitários: um horizontal,  $I$ , e outro vertical,  $J$ , cuja origem é o ponto médio de  $I$ . Existe uma isometria  $f: I \rightarrow J$  mas nenhuma isometria  $g: T \rightarrow T$  leva  $I$  em  $J$ . (Na realidade, há somente duas isometrias  $g: T \rightarrow T$ . Determine-as.)

- 40) Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Toda imersão isométrica  $f: \mathbb{R} \rightarrow E$  tem a forma  $f(t) = a + t \cdot u$ , onde  $a, u \in E$ , sendo  $|u| = 1$ .

- 41) Considerando em  $\mathbb{R}^2$  a norma  $|(x, y)| = |x| + |y|$ , obtenha uma imersão isométrica  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja imagem é o ângulo reto que tem como lados os semi-eixos coor-

denados positivos. Conclua que o exercício anterior não vale para espaços vetoriais normados em geral.

- 42) Dada uma imersão isométrica  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mostre que existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x+a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ou  $f(x) = -x+a$  para todo  $x$ . Em particular,  $f$  é uma isometria.
- 43) Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Toda imersão isométrica  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  se estende (de modo único, se  $X$  tem mais de um elemento) a uma imersão  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Em particular,  $f(x) = \pm x+a$ , para todo  $x \in X$ .
- 44) Admita o seguinte resultado da Teoria dos Conjuntos: se  $X$  é um conjunto infinito e  $\mathbb{Q}$  é o conjunto dos racionais, então existe uma bijeção  $f: X \rightarrow X \times \mathbb{Q}$ . Conclua daí que se pode introduzir em todo conjunto infinito uma métrica sem pontos isolados. (Vide Exercício 15.)
- 45) Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Dada uma transformação linear  $T: E \rightarrow E$ , as seguintes afirmações são equivalentes: a)  $T$  é uma imersão isométrica; b)  $|T \cdot x| = |x|$  para todo  $x \in E$ ; c)  $\langle T \cdot x, T \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle$  para quaisquer  $x, y \in E$ . Se a dimensão de  $E$  é finita, nestas condições  $T$  é uma isometria.
- 46) Seja  $\mathbb{R}^\omega$  o espaço vetorial formado pelas seqüências  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  com apenas um número finito de

termos  $x_n \neq 0$ . Defina em  $\mathbb{R}^{\infty}$  o produto interno  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n + \dots$ . (Esta soma é finita.) A transformação linear  $T: \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}^{\infty}$ , definida por  $T \cdot (x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$  é uma imersão isométrica mas não é uma isometria.

47) É dada uma imersão isométrica  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . (As métricas são euclidianas. Não supomos  $f$  linear.) Prove que existem  $a \in \mathbb{R}^n$  e uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $f(x) = T \cdot x + a$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . ( $T$  necessariamente preserva distâncias.) Em particular, se  $m = n$  então  $f$  é uma isometria.

48) Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$  não-vazio e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma imersão isométrica. Mostre que existe uma imersão isométrica  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi|_X = f$ . Quando  $X$  gera  $\mathbb{R}^m$ ,  $\varphi$  é única.

49) Estabeleça isometrias: a) Entre  $\mathcal{B}(X; M \times N)$  e  $\mathcal{B}(X; M) \times \mathcal{B}(X; N)$ ; b) Entre  $\mathcal{B}(X \times Y; M)$  e  $\mathcal{B}(X; \mathcal{B}(Y; M))$ . No item a), escolha a métrica conveniente em cada produto cartesiano.

50) Considere no plano  $\mathbb{R}^2$  a norma  $|(x, y)| = \max\{|x|, |y|\}$ . A projeção  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi(x, y) = y$  define, por restrição, uma isometria entre o subespaço  $X = \{(t, at); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$  se, e somente se,  $|a| \leq 1$ .

51) Um espaço métrico  $M$  chama-se "metricamente homogêneo" quando, dados arbitrariamente  $a, b \in M$ , existe uma isometria  $f: M \rightarrow M$  tal que  $f(a) = b$ . Mostre que a esfera unitária  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  é metricamente homogênea. Por outro lado, se  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle < 1\}$  é a bola aberta unitária do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , toda isometria  $g: B \rightarrow B$  é tal que  $g(0) = 0$ . Conclua que  $B$  não é metricamente homogênea.

52) Dado um espaço métrico  $M$ , seja  $\Phi(M)$  a coleção dos subconjuntos  $X \subset M$  que são limitados, não-vazios e, além disso, cumprem a seguinte condição:  $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in X$ . Dados  $X, Y \in \Phi(M)$ , seja  $\rho(X, Y)$  o maior dos dois números abaixo:

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \quad \text{e} \quad \sup_{y \in Y} d(y, X).$$

Prove que  $\rho$  define uma métrica em  $\Phi(M)$ . O número  $\rho(X, Y)$  é conhecido como a distância de Hausdorff entre os conjuntos  $X$  e  $Y$ .

53) Dados  $X, Y \in \Phi(M)$  e  $r > 0$ , prove que  $\rho(X, Y) < r$  implica  $X \subset B(Y; r)$  e  $Y \subset B(X; r)$ . (Notaçāo dos Exercícios 22, 34 e 52.) Por outro lado, estas inclusões implicam  $\rho(X, Y) \leq r$ . Conclua que  $\rho(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset B(Y; r) \text{ e } Y \subset B(X; r)\}$ .

54) Seja  $\xi: \Phi(M) \rightarrow \mathfrak{J}(M; \mathbb{R})$  a aplicação que associa a cada  $X \subset \Phi(M)$  (Vide Exercício 53) a função  $d_X: M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $d_X(y) = d(y, X)$ . Mostre que para  $X, Y \in \Phi(M)$  arbitrários, as funções  $d_X$  e  $d_Y$  estão sempre a uma distância finita. Mostre também que  $\xi$  é uma imersão isométrica de  $\Phi(M)$  no espaço de funções  $\mathfrak{J}(M; \mathbb{R})$ . [Bem entendido, não foi definida uma métrica em todo o espaço  $\mathfrak{J}(M; \mathbb{R})$  mas  $\xi$  toma valores numa parte que foi metrizada.]

55) Seja  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  a esfera unitária  $n$ -dimensional. O espaço projetivo de dimensão  $n$  é o conjunto  $P^n$  cujos elementos são os pares não-ordenados  $[x] = \{x, -x\}$ , onde  $x \in S^n$ . Note que  $[x] = [-x]$ . Mais precisamente,  $[x] = [y] \Leftrightarrow y = -x$ . Defina  $d([x], [y]) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$  e mostre que  $d$  é uma métrica em  $P^n$ . Mostre que a aplicação natural  $\pi: S^n \rightarrow P^n$ , definida por  $\pi(x) = [x]$  cumpre a condição  $d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y)$ . Mostre ainda que, se  $X \subset S^n$  é tal que  $\text{diam}(X) \leq \sqrt{2}$ , então a restrição  $\pi|_X$  é uma imersão isométrica de  $X$  em  $P^n$ .

56) Dado um subconjunto limitado  $S \subset \mathbb{R}$ , defina uma função  $| \cdot |_S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pondo, para cada  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $|a|_S = \sup_{t \in S} |a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1}|$ . Prove que  $| \cdot |_S$  é uma semi-norma em  $\mathbb{R}^n$ . Que condição deve ser imposta a  $S$  para se obter assim uma norma?

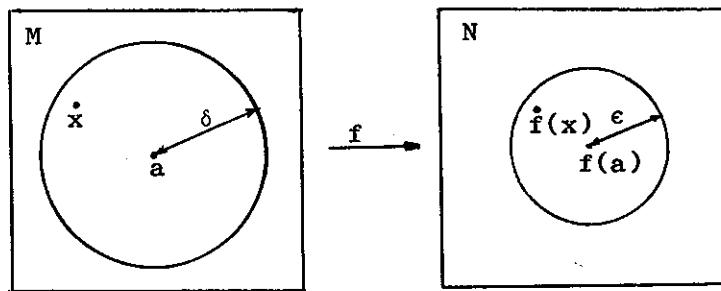
## CAPÍTULO 2

### FUNÇÕES CONTÍNUAS

#### §1. Definição e exemplos.

Definição - Sejam  $M, N$  espaços métricos. Diz-se que a função  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, é possível obter  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ .

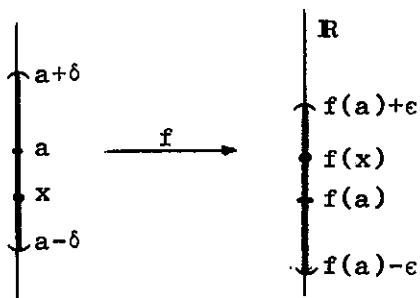
Diz-se que  $f: M \rightarrow N$  é contínua quando ela é contínua em todos os pontos  $a \in M$ .



Equivalentemente,  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, dada qualquer bola  $B' = B(f(a); \epsilon)$  de centro  $f(a)$ , pode-se encontrar uma bola  $B = B(a; \delta)$ , de centro  $a$ , tal que  $f(B) \subset B'$ .

No importante caso particular em que  $M \subset \mathbb{R}$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , dizer que  $f$  é contínua no ponto  $a \in M$  si-

gnifica afirmar que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$  e  $a - \delta < x < a + \delta$  implicam  $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ . Ou seja,  $f$  transforma os pontos de  $M$  que estão no intervalo aberto  $(a - \delta, a + \delta)$  em pontos do intervalo aberto  $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ .



Observação: A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de  $f$  nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em  $M$  uma bola  $B$ , de centro  $a$ , tal que  $f|B$  seja contínua no ponto  $a$ , então  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$ . Segue-se daí que se, para toda parte limitada  $X \subset M$ ,  $f|X$  for contínua, então  $f: M \rightarrow N$  é contínua.

Exemplo 1 - Dada  $f: M \rightarrow N$ , suponhamos que exista uma constante  $c > 0$  (chamada constante de Lipschitz) tal que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in M$ . Dizemos então que  $f$  é uma aplicação Lipschitziana. Neste caso,  $f$  é contínua (em cada

ponto  $a \in M$ ). Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ . Então  $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = \epsilon$ . Se  $f,g: M \rightarrow \mathbb{R}$  são Lipschitzianas, o mesmo ocorre com  $f+g$  e  $k \cdot f$ , onde  $k \in \mathbb{R}$ . Daí, toda combinação linear  $k_1 \cdot f_1 + \dots + k_n \cdot f_n$  de funções reais Lipschitzianas é Lipschitziana. Para uma função real de variável real  $f$ , a condição de Lipschitz significa que  $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq c$  e isto equivale a afirmar que a inclinação de qualquer secente ao gráfico de  $f$  é, em valor absoluto,  $\leq c$ . Se uma função real  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num intervalo  $I$ , é derivável e  $|f'(x)| \leq c$  para todo  $x \in I$ , então, pelo Teorema do Valor Médio, dados  $x,y \in I$  quaisquer, existe um ponto  $z$ , entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$  e daí  $|f(x)-f(y)| \leq c \cdot |x-y|$ . Assim toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser ilimitado) é Lipschitziana.

Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  chama-se localmente Lipschitziana quando cada ponto  $a \in M$  é centro de uma bola  $B = B(a,r)$  tal que a restrição  $f|B$  é Lipschitziana. Uma aplicação localmente Lipschitziana é, evidentemente, contínua. No exemplo abaixo as aplicações mencionadas são todas localmente Lipschitzianas.

Exemplo 2 - A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^n$ ,

(n inteiro positivo) é Lipschitziana em cada parte limitada de  $\mathbb{R}$  pois  $|x| \leq a \Rightarrow |f'(x)| = n|x|^{n-1} \leq n \cdot a^{n-1}$ .

Isto também pode ser visto sem derivadas: se  $|x| \leq a$  e  $|y| \leq a$  então  $|x^n - y^n| = |x-y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}| \leq |x-y| (|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \dots + |y|^{n-1}) \leq \leq c \cdot |y-x|$ , onde  $c = n \cdot a^{n-1}$ . Segue-se que um polinômio  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  cumpre a condição de Lipschitz em cada intervalo limitado  $[a,b]$ . Concluimos, em particular, que todo polinômio  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. De modo análogo, podemos mostrar que a função  $r: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $r(x) = \frac{1}{x}$ , é contínua. Provaremos primeiro que, para cada  $k > 0$ ,  $r$  é Lipschitziana no conjunto  $X_k = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq k\}$ . Ora, se  $|x| \geq k$  e  $|y| \geq k$ , então  $|r(x) - r(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{|x \cdot y|} \leq c \cdot |x-y|$ , onde  $c = \frac{1}{k^2}$ . Segue-se daí que cada número real  $a \neq 0$  é centro de um intervalo, restrito ao qual  $r$  é contínua. Logo  $r$  é contínua.

Exemplo 3 - Contrações fracas. Se  $f: M \rightarrow N$  é tal que

$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$  para qualquer  $x, y \in M$ , dizemos que  $f$  é uma contração fraca. Neste caso  $f$  é Lipschitziana (com  $c = 1$ ) e portanto contínua. Vejamos agora várias contrações fracas. Todas são, pois, contínuas:

- a) As aplicações constantes  $f: M \rightarrow N$ ,  $f(x) = k \in N$ ,

para todo  $x \in M$ .

- b) As imersões isométricas (em particular as isometrias).

Vejamos um tipo: para cada  $a \in M$  e cada  $b \in N$ , obtemos imersões isométricas  $i_b: M \rightarrow M \times N$  e  $j_a: N \rightarrow M \times N$ , pondo  $i_b(x) = (x, b)$  e  $j_a(y) = (a, y)$ . Outro exemplo: a inclusão  $i: X \rightarrow M$ , de um subespaço  $X \subset M$ .

c) Para cada  $X \subset M$  não-vazio,  $d_X: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d_X(y) = d(y, X)$  é uma contração fraca, conforme a Proposição 3, Capítulo 1. Em particular, para cada  $x \in X$ , a função  $d_x: M \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $d_x(y) = d(x, y)$ , é uma contração fraca.

d) Num espaço vetorial normado  $E$ , a norma  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  é uma contração fraca pois  $\| |x| - |y| \| = |d(x, 0) - d(y, 0)| \leq d(x, y) = |x-y|$ .

e) Para cada  $i = 1, \dots, n$  a projeção  $p_i: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$ , definida por  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , é uma contração fraca, se tomamos no produto cartesiano qualquer uma das três métricas introduzidas no Capítulo 1.

f) A própria métrica  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma contração fraca, desde que tomemos em  $M \times M$  a métrica  $\delta[(x, y), (x', y')] = d(x, x') + d(y, y')$ . Com efeito,  $|d(x, y) - d(x', y')| = |d(x, y) - d(x', y) + d(x', y) - d(x', y')| \leq$

$\leq |d(x,y) - d(x',y)| + |d(x',y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') = \delta[(x,y), (x',y')]$ . Intuitivamente: quando  $x$  se aproxima de  $a$  e  $y$  se aproxima de  $b$  então  $d(x,y)$  se aproxima de  $d(a,b)$ .

g) A operação de soma,  $s: E \times E \rightarrow E$ ,  $s(x,y) = x+y$ , num espaço vetorial normado  $E$  é uma contração fraca, quando se toma em  $E \times E$  a norma  $|(x,y)| = |x| + |y|$ . Com efeito,  $|x+y - (a+b)| \leq |x-a| + |y-b| = |(x,y) - (a,b)|$ . Em particular, a soma de números reais e de vetores em  $\mathbb{R}^n$ .

h) Para todo  $a \in X$ , seja  $v_a: \mathcal{B}(X;M) \rightarrow M$  definida por  $v_a(f) = f(a)$ . Então  $|v_a(f) - v_a(g)| = |f(a) - g(a)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = d(f,g)$  e portanto  $v_a$  (chamada a "avaliação no ponto  $a$ ") é uma contração fraca.

Exemplo 4 - Continuidade em espaços discretos. Se  $a \in M$  é um ponto isolado, então toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $\delta > 0$  tal que  $B(a; \delta) = \{a\}$ . Então  $d(x,a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x), f(a)) = 0 < \epsilon$ . Em consequência, se  $M$  é discreto, toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  é contínua. Por outro lado, se  $N$  é discreto então  $f: M \rightarrow N$  é contínua se, e somente se, cada ponto  $a \in M$  é centro de uma bola aberta na qual  $f$  é constante.

Exemplo 5 - Descontinuidade. Se  $f: M \rightarrow N$  não é contínua

no ponto  $a$ , diz-se que  $f$  é descontínua nesse ponto. Isto significa que existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $\delta > 0$ , pode-se obter  $x_\delta \in M$  tal que  $d(x_\delta, a) < \delta$  e  $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$ . Uma formulação equivalente, que às vezes é útil, é a seguinte: existe  $\epsilon > 0$  tal que, para cada  $n = 1, 2, \dots$  pode-se obter  $x_n \in M$  com  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$  e  $d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ . Um exemplo de descontinuidade:  $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , função característica do conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Tem-se  $\xi(x) = 1$  se  $x \in \mathbb{Q}$  e  $\xi(x) = 0$  no caso contrário. Em todo ponto  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\xi$  é descontínua. De fato, tomemos  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Dado  $\delta > 0$ , tomemos  $x_\delta$  tal que  $|x_\delta - a| < \delta$ , sendo  $x_\delta$  racional se  $a$  for irracional e vice-versa. Então  $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq \frac{1}{2}$ . Note que  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  é reunião de dois conjuntos tais que  $\xi$  restrita a cada um deles é contínua, por ser constante. Isto ilustra a diferença entre as afirmações: (a)  $f|X$  é contínua; (b)  $f$  é contínua em todos os pontos de  $X$ . Estas asserções se referem a uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  e um subconjunto  $X \subset M$ . Tem-se (b)  $\Rightarrow$  (a) mas não vale a recíproca. No exemplo que acabamos de ver,  $\xi|_{\mathbb{Q}}$  é contínua mas  $\xi$  não é contínua em ponto algum de  $\mathbb{Q}$ . Um exemplo popular de descontinuidade é o da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Esta função é descontínua.

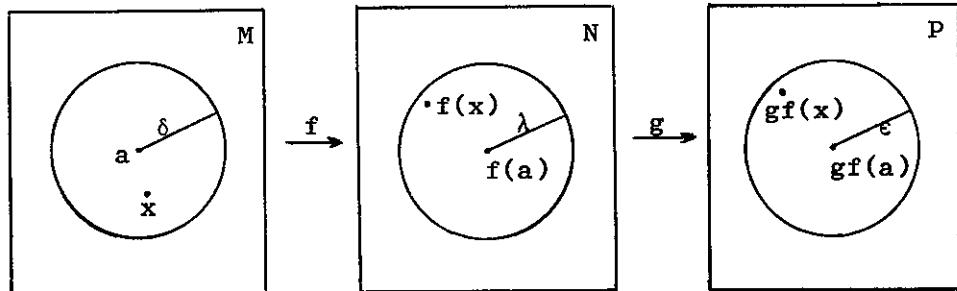
nua no ponto 0. Com efeito, dado  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , podemos tomar, para cada  $n$ ,  $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ . Então  $\sin \frac{1}{x_n} = \pm 1$ . Logo, temos  $|x_n - 0| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - f(0)| = 1 \geq \epsilon$ .

Registraremos aqui um fato óbvio, que será usado sem maiores comentários no que se segue. Dada uma aplicação  $f: M \rightarrow N$ , seja  $N_1 \subset N$  um subespaço tal que  $f(x) \in N_1$  para todo  $x \in M$ . Então  $f$  pode também ser considerada como uma aplicação de  $M$  em  $N_1$ , digamos  $f_1: M \rightarrow N_1$ . Então  $f$  é contínua se, e somente se,  $f_1$  é contínua.

## §2. Propriedades elementares das aplicações contínuas.

Proposição 1 - A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$  e  $g: N \rightarrow P$  é contínua no ponto  $f(a)$ , então  $g \circ f: M \rightarrow P$  é contínua no ponto  $a$ .

Demonstração: Seja dado  $\epsilon > 0$ . A continuidade de  $g$  no ponto  $f(a)$  nos permite obter  $\lambda > 0$  tal



que  $y \in N$ ,  $d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), gf(a)) < \epsilon$ . Por sua vez, dado  $\lambda > 0$ , a continuidade de  $f$  no ponto  $a$  nos fornece  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$ ,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(gf(x), gf(a)) < \epsilon$ .

Corolário - Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua. Mais exatamente, se  $f: M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in X \subset M$  então  $f|X: X \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$ .

Com efeito,  $f|X = f \circ i$ , onde  $i: X \rightarrow M$  é a aplicação de inclusão,  $i(x) = x$ ,  $x \in X$ .

Exemplo 6 - Continuidade conjunta e separada. Uma aplicação  $f: MXN \rightarrow P$  é comumente vista como uma "função de duas variáveis"  $f(x, y)$ , onde  $x$  varia em  $M$  e  $y$  em  $N$ . Sua continuidade no ponto  $(a, b)$  pode ser expressa do seguinte modo: para todo  $\epsilon > 0$  dado, existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que  $d(x, a) < \delta_1$  e  $d(y, b) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b)) < \epsilon$ . Esta formulação, que resulta imediatamente da definição de continuidade quando se toma em  $MXN$  a métrica  $d[(x, y), (a, b)] = \max\{d(x, a), d(y, b)\}$ , significa que se pode tomar  $f(x, y)$  tão próximo de  $f(a, b)$  quanto se deseje, desde que se tome, ao mesmo tempo,  $x$  suficientemente próximo de  $a$  e  $y$  de  $b$ . Diz-se então que  $f$  é contínua conjuntamente nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Em contraposição, diz-se que  $f: M \times N \rightarrow P$  é contínua em relação à primeira variável (no ponto  $(a, b)$ ) quando a aplicação parcial  $f: M \rightarrow P$ , dada por  $f_b(x) = f(x, b)$ , é contínua (no ponto  $x = a$ ). Analogamente, diz-se que  $f$  é contínua em relação à segunda variável (no ponto  $(a, b)$ ) quando a aplicação parcial  $f^a: M \rightarrow P$ ,  $f^a(y) = f(a, y)$ , é contínua (no ponto  $y = b$ ). Se ambos os casos ocorrem, dizemos que  $f$  é contínua separadamente em relação a cada uma de suas variáveis. Como (na notação do Exemplo 3.b)  $f^a = f \circ i_a$  e  $f_b = f \circ j_b$ , vemos que a continuidade de  $f$  num ponto implica que ela seja separadamente contínua nesse ponto. A recíproca é falsa. O exemplo clássico é o da função  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  se  $x^2 + y^2 \neq 0$ , e  $f(0, 0) = 0$ . Na origem  $(0, 0)$   $f$  é separadamente contínua pois ambas as funções parciais  $f(x, 0)$  e  $f(0, y)$  são identicamente nulas. Mas  $f$  é (conjuntamente) descontínua na origem pois sua restrição à reta  $y = ax$  ( $a \neq 0$ ) nos dá uma função descontínua:  $f(x, ax) = \frac{ax^2}{x^2 + a^2 x^2} = \frac{a}{1+a^2}$  se  $x \neq 0$  e  $f(0, 0) = 0$ .

A situação dual, em que se tem uma aplicação  $f: M \rightarrow N_1 \times N_2$  que toma valores num produto cartesiano, é bem mais simples, como mostraremos na Proposição 2. Antes, porém, vejamos um exemplo de continuidade para uma

função de duas variáveis.

Exemplo 7 - Continuidade da multiplicação. Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Já vimos (Exemplo 3.g) que a soma  $s: E \times E \rightarrow E$ ,  $s(x,y) = x+y$ , é contínua, pois é uma contração fraca. Agora consideremos a outra operação de  $E$ , ou seja, a aplicação  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ , onde  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ . Mostremos que  $m$  é Lipschitziana em cada parte limitada de  $\mathbb{R} \times E$ . Com efeito, se  $|\lambda|, |\mu|, |x|, |y|$  são  $\leq a$  então  $d[m(\lambda, x), m(\mu, y)] = |\lambda \cdot x - \mu \cdot y| =$   
 $= |\lambda \cdot x - \mu \cdot x + \mu \cdot x - \mu \cdot y| \leq |\lambda - \mu| \cdot |x| + |\mu| \cdot |x-y| \leq$   
 $\leq a(|\lambda - \mu| + |x-y|) = a \cdot d[(\lambda, x), (\mu, y)]$ . Segue-se que  $m$  é contínua em cada parte limitada de  $\mathbb{R} \times E$  e, por conseguinte,  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  é contínua. (Vide Observação, §1.) Em particular, a multiplicação de números reais,  $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m(x, y) = x \cdot y$ , é uma função contínua de duas variáveis.

Dados os espaços métricos  $M$ ,  $N_1$  e  $N_2$ , uma aplicação  $f: M \rightarrow N_1 \times N_2$  equivale a um par de aplicações  $f_1: M \rightarrow N_1$  e  $f_2: M \rightarrow N_2$ , chamadas as coordenadas de  $f$ , tais que  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  para todo  $x \in M$ . Escreve-se  $f = (f_1, f_2)$ . Considerando-se as projeções  $p_1: N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$  e  $p_2: N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$ , tem-se  $f_1 = p_1 \circ f$  e  $f_2 = p_2 \circ f$ . A proposição seguinte, embora de simples demonstração, é fundamental.

Proposição 2 - A aplicação  $f: M \rightarrow N_1 \times N_2$  é contínua (no ponto  $a \in M$ ) se, e somente se, suas coordenadas  $f_1: M \rightarrow N_1$  e  $f_2: M \rightarrow N_2$  são contínuas (no ponto  $a$ ).

Demonstração: Se  $f$  é contínua então o mesmo ocorre com  $f_1 = p_1 \circ f$  e  $f_2 = p_2 \circ f$  porque as projeções  $p_1$  e  $p_2$  são contínuas. (Exemplo 3.e.) Para provar a recíproca, usamos em  $N_1 \times N_2$  a métrica  $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , como  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas no ponto  $a$ , existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que  $d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \epsilon$  e  $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \epsilon$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \epsilon$ . Logo  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

Corolário - Se  $f_1: M_1 \rightarrow N_1$  e  $f_2: M_2 \rightarrow N_2$  são contínuas, então também é contínua a aplicação

$$\begin{aligned}\varphi = f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 &\rightarrow N_1 \times N_2, \quad \text{definida por } \varphi(x_1, x_2) = \\ &= (f_1(x_1), f_2(x_2)).\end{aligned}$$

Com efeito, considerando as projeções  $p_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$  e  $p_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ , vemos que as coordenadas de  $\varphi$  são  $f_1 \circ p_1: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1$  e  $f_2 \circ p_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_2$ . Segue-se da Proposição 2 que  $\varphi$  é contínua.

Convém guardar a diferença entre as notações  
 $f = (f_1, f_2): M \rightarrow N_1 \times N_2$  e  $\varphi = f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ .

Como aplicação dos fatos elementares sobre continuidade até agora estabelecidos, e como ilustração da técnica de provar a continuidade de uma aplicação exprimindo-a como composta de outras mais simples, temos a

Proposição 3 - Sejam  $M$  um espaço métrico,  $E$  um espaço vetorial normado e  $f, g: M \rightarrow E$ ,  $\alpha, \beta: M \rightarrow \mathbb{R}$  aplicações contínuas, com  $\beta(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Então são contínuas as aplicações  $f+g: M \rightarrow E$ ,  $\alpha \cdot f: M \rightarrow E$  e  $\frac{\alpha}{\beta}: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$$

e

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração: Foi visto nos Exemplos 2, 3.g e 7, respectivamente, que as aplicações  $r: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s: E \times E \rightarrow E$  e  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ , dadas por  $r(x) = \frac{1}{x}$ ,  $s(x, y) = x+y$  e  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ , são contínuas.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(f,g)} & E \times E & \xrightarrow{s} & E \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right\} f+g = s \circ (f,g)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(\alpha, f)} & \mathbb{R} \times E \\ x & \longmapsto & (\alpha(x), f(x)) \end{array} \right. \xrightarrow{\quad m \quad} E \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \cdot f = m \circ (\alpha, f) \\ \alpha(x) \cdot f(x) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \\ x & \longmapsto & (\alpha(x), \beta(x)) \end{array} \right. \xrightarrow{\quad (\text{id} \times r) \quad} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\quad m \quad} \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta} = m \circ (\text{id} \times r) \circ (\alpha, \beta) \\ \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{array} \right\}$$

Os esquemas acima (onde  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação identidade) mostram que  $f+g$ ,  $\alpha \cdot f$  e  $\frac{\alpha}{\beta}$  são contínuas, em virtude das Proposições 1 e 2.

Corolário - Se  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas com valores reais, então  $f+g$ ,  $f \cdot g$  e (caso  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ )  $\frac{f}{g}$  são funções contínuas.

Seja  $C(M; N)$  o conjunto das aplicações contínuas do espaço métrico  $M$  no espaço métrico  $N$ . Usaremos o símbolo  $C_0(M; N)$  para indicar o subconjunto de  $C(M; N)$  formado pelas aplicações contínuas limitadas de  $M$  em  $N$ .  $C_0(M; N)$  é um subespaço do espaço métrico  $\mathcal{B}(M; N)$ , de todas as aplicações limitadas  $f: M \rightarrow N$ , no qual a distância é dada por  $d(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$ . Por outro lado,  $C(M; N)$  não é um espaço métrico mas é a reunião disjunta dos espaços métricos  $C_f(M; N) = \{g \in C(M; N), d(f, g) < +\infty\}$ .

Uma consequência da Proposição 3 é que, quando  $E$  for um espaço vetorial normado,  $C(M; E)$  será um subespa-

ço vetorial de  $\mathfrak{J}(M;E)$  e  $C_0(M;E)$  um subespaço vetorial normado de  $\mathfrak{B}(M;E)$ .

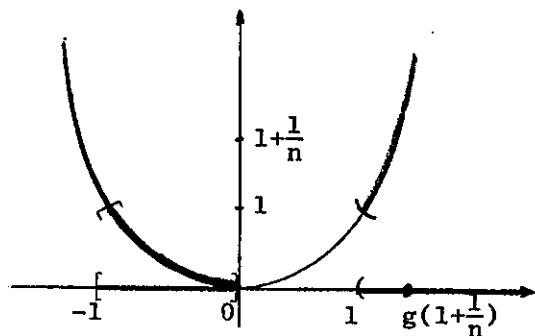
### §3. Homeomorfismos.

Ao contrário do que ocorre em Álgebra Linear, onde a inversa de um transformação linear bijetiva também é linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas  $f: M \rightarrow N$  tais que  $f^{-1}: N \rightarrow M$  é descontínua. Vejamos alguns exemplos desta situação.

Exemplo 8 - Seja  $M$  a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade  $i: M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua mas sua inversa  $j: \mathbb{R} \rightarrow M$  (que também é dada por  $j(x) = x$ ) é descontínua em cada ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Com efeito, tomando  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , temos  $B(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$  em  $M$ . Logo não existe  $\delta > 0$  tal que  $f((a-\delta, a+\delta)) \subset B(a; \epsilon)$ .

Exemplo 9 - O exemplo acima é simples mas é artificial: dificilmente pode-se esperar que ocorra um caso como esse durante a solução de um problema de Análise ou de Geometria. Vejamos agora um exemplo menos forçado.

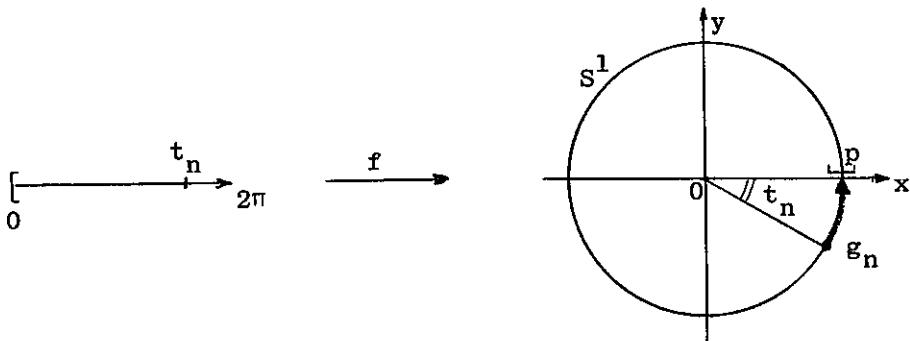
Tomamos  $M = [-1, 0] \cup (1, \infty)$ ,  $N = (0, +\infty)$  e  $f: M \rightarrow N$  de



finida por  $f(x) = x^2$ , para todo  $x \in M$ . Evidentemente,  $f$  é uma bijeção contínua de  $M$  sobre  $[0, +\infty)$ . Sua inversa  $g = f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow M$  é dada por  $g(y) = \sqrt{y}$  se  $y > 1$  e  $g(y) = -\sqrt{y}$  se  $0 \leq y \leq 1$ . A função  $g$  é descontínua no ponto 1. Com efeito, temos  $g(1) = -1$ . Se for  $0 < \epsilon < 2$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  o ponto  $1 + \frac{1}{n}$  dista  $\frac{1}{n}$  do ponto 1 mas  $g(1 + \frac{1}{n}) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$  é tal que  $|g(1 + \frac{1}{n}) - g(1)| > 2 > \epsilon$ . (O leitor não se deve surpreender com a função contínua  $f$  ter seu gráfico formado de dois pedaços. É que seu domínio também tem dois pedaços.)

Exemplo 10 - Talvez o exemplo mais instrutivo de como uma bijeção contínua pode ter uma inversa descon-tínua seja o que daremos agora. Seja  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  o círculo unitário do plano euclidiano. A função  $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ , definida por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ , é contínua, pois suas coordenadas,  $\cos$  e  $\sin$ , são con-

tínuas. Além disso,  $f$  é bijetiva, como se sabe da Trigonometria. Intuitivamente,  $f$  consiste em enrolar o segmento semi-aberto  $[0, 2\pi)$  sobre o círculo  $S^1$ , sem dobrar nem esticar, de modo que o ponto  $t = 0$  caia sobre o ponto  $p = (1, 0) \in S^1$ . A aplicação inversa,  $g = f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$  é descontínua precisamente nesse ponto  $p$ . (Intuitivamente,  $g$  consiste em rasgar o círculo no ponto  $p$  e desenrolá-lo sobre o segmento.)



Provemos esta afirmação. Temos  $g(p) = 0$ . Tomamos  $\epsilon = \pi$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $t_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ ,  $z_n = f(t_n)$ . Então a distância de  $z_n$  a  $p = (1, 0)$  é menor do que  $\frac{1}{n}$ . (O arco  $t_n$  é maior do que a corda.) Mas  $g(z_n) = t_n$  é tal que  $|g(z_n) - g(p)| = 2\pi - \frac{1}{n} > \pi = \epsilon$  para todo  $n$ .

Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Um homeomorfismo de  $M$  sobre  $N$  é uma bijeção contínua  $f: M \rightarrow N$  cuja

inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também é contínua. Neste caso, diz-se que  $M$  e  $N$  são homeomorfos.

Se  $f: M \rightarrow N$  e  $g: N \rightarrow P$  são homeomorfismos então  $g \circ f: M \rightarrow P$  e  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também são homeomorfismos.

As vezes (principalmente na literatura mais antiga) se usa a expressão equivalência topológica em vez de "homeomorfismo". Dois espaços métricos homeomorfos são indistinguíveis do ponto-de-vista da Topologia. Uma propriedade de que goza um espaço  $M$  chama-se uma propriedade topológica quando todo espaço homeomorfo a  $M$  também goza daquela propriedade. As propriedades topológicas se distinguem das propriedades métricas de  $M$ , que são preservadas pelas isometrias. Como toda isometria é um homeomorfismo, toda propriedade topológica é métrica, mas não vale a recíproca, como veremos a seguir.

Exemplo 11 - Se o espaço métrico  $N$  é discreto e  $f: M \rightarrow N$  é um homeomorfismo, então  $M$  também é discreto. Com efeito, dado arbitrariamente um ponto  $a \in M$ , existe uma bola  $B(f(a); \epsilon) = \{f(a)\}$  que se reduz a um ponto. Sendo  $f$  contínua, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon) = \{f(a)\}$ . Como  $f$  é injetiva, a bola  $B(a; \delta)$  tem um único elemento, a saber, o ponto  $a$ , que é portanto isolado. [Na realidade, provamos que se

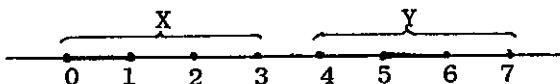
$f: M \rightarrow N$  é contínua, injetiva, e  $f(a)$  é um ponto isolado em  $N$ , então  $a$  é isolado em  $M$ .] Logo, ser discreto - e portanto não ser discreto - é uma propriedade topológica. Mais ainda: dois espaços discretos  $M$  e  $N$  são homeomorfos se, e somente se, têm o mesmo número cardinal. Com efeito, toda aplicação definida num espaço discreto sendo contínua, segue-se que qualquer bijeção entre dois espaços discretos é um homeomorfismo. Por outro lado, ser limitado é uma propriedade métrica mas não é uma propriedade topológica. De fato,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  e  $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$  (ambos com a métrica induzida da reta) são homeomorfos, por serem ambos discretos, infinitos, enumeráveis. Mas  $P$  é limitado e  $\mathbb{N}$  não é.

Exemplo 12 - Homeomorfismo entre bolas. Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Para todo  $a \in E$  e para todo número real  $\lambda \neq 0$ , a translação  $t_a: E \rightarrow E$  e a homotetia  $m_\lambda: E \rightarrow E$ , definidas por  $t_a(x) = x+a$  e  $m_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ , são homeomorfismos de  $E$ . De fato, sabemos que  $t_a$  e  $m_\lambda$  são contínuas. Além disso, possuem inversas:  $(t_a)^{-1} = t_{-a}$  e  $(m_\lambda)^{-1} = m_\mu$ ,  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ , as quais também são contínuas. Duas bolas abertas  $B(a; r)$  e  $B(b; s)$  em  $E$  são homeomorfas. Mais precisamente, a composta  $\varphi = t_b \circ m_{r/s} \circ t_{-a}$  define um homeomorfismo  $\varphi: E \rightarrow E$ . Pa-

ra cada  $x \in E$ , temos  $\varphi(x) = b + \frac{r}{s}(x-a)$ . Isto mostra que  $\varphi$  consiste em: 1º) Transladar  $B(a;r)$  de modo a por seu centro na origem; 2º) Multiplicar todos os vetores por  $\frac{r}{s}$  de modo que vetores de comprimento  $< s$  passem a ter comprimento  $< r$ . Isto transforma  $B(0;s)$  em  $B(0;r)$ ; 3º) Transladar  $B(0;r)$  de modo a por seu centro no ponto  $b$ . Assim, o homeomorfismo  $\varphi: E \rightarrow E$  é tal que  $\varphi(B(a;r)) = B(b;s)$ . Da mesma maneira se mostra que duas bolas fechadas quaisquer em  $E$  são homeomorfas. Vemos assim que o diâmetro de um conjunto é um invariante métrico (não muda por isometrias) mas não é um invariante topológico. Convém observar que, num espaço métrico arbitrário, duas bolas abertas podem não ser homeomorfas. O exemplo mais simples é o de um espaço métrico  $M$ , que possua um ponto isolado  $a$  e um ponto não isolado  $b$ . Existe uma bola  $B(a;r) = \{a\}$ , a qual não pode ser homeomorfa a uma bola aberta de centro  $b$  pois, para todo  $s > 0$ ,  $B(b;s)$  é um conjunto infinito.

Exemplo 13 - No exemplo anterior, tínhamos dois subespaços  $X, Y$  de um espaço métrico  $M$  e um homeomorfismo  $h: M \rightarrow M$ , tal que  $h(X) = Y$ . Isto mostra que  $X$  e  $Y$  são homeomorfos:  $h|_X$  é um homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ . E mais ainda: diz que  $X$  e  $Y$  estão topologica-

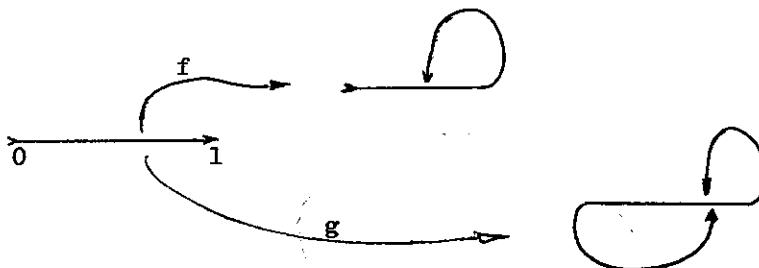
mente situados da mesma maneira dentro de  $M$ . Vejamos um caso simples para ilustrar a questão. Na reta  $\mathbb{R}$ , sejam  $X = [0,1] \cup \{2,3\}$  e  $Y = [5,6] \cup \{4,7\}$ . Cada um desses subespaços é formado por um intervalo fechado de comprimento 1 e dois pontos isolados. É fácil obter um homeomorfismo  $h: X \rightarrow Y$ . Basta, por exemplo, definir  $h(2) = 4$ ,  $h(3) = 7$  e, para  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h(x) = x+5$ . Assim, do pon-



to-de-vista topológico,  $X$  e  $Y$  são indistinguíveis. Mas não se pode deixar de notar uma diferença entre  $X$  e  $Y$ . É que os dois pontos isolados de  $X$  estão do mesmo lado do segmento enquanto em  $Y$ , eles estão um de cada lado do segmento. Isto, porém, não é uma diferença intrínseca entre  $X$  e  $Y$ . É que eles estão imersos em  $\mathbb{R}$  de modo diferente. Em termos precisos: não existe um homeomorfismo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(X) = Y$ . Para provar esta afirmação, usaremos um fato que será provado mais adiante (e que talvez o leitor já conheça do Cálculo): toda função contínua injetiva  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona. Se o tal homeomorfismo  $f$  existisse, deveria transformar os dois pontos isolados de  $X$  nos pontos isolados de  $Y$  e, sendo monótono (digamos, crescente) deveria ser tal que  $f(2) = 4$ ,  $f(3) =$

= 7. Como  $0 < 2$ , teríamos  $f(0) < 4$ , o que é absurdo pois nenhum  $y \in Y$  é menor do que 4.

Exemplo 14 ~ Uma aplicação injetiva  $f: M \rightarrow N$  que é um homeomorfismo de  $M$  sobre sua imagem  $f(M)$  chama-se uma imersão topológica. Toda imersão isométrica é uma imersão topológica. A aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (t, t^2)$ , é uma imersão topológica da reta no plano. Com efeito, a inversa  $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f^{-1}(t, t^2) = t$ , é a restrição a  $f(\mathbb{R})$  da projeção  $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . As figuras abaixo ilustram duas aplicações contínuas injetivas  $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  que não são imersões isométricas, isto é, suas inversas  $f^{-1}: f((0, 1)) \rightarrow (0, 1)$  e  $g^{-1}: g((0, 1)) \rightarrow (0, 1)$  são descontínuas.



Exemplo 15 - Toda bola aberta de um espaço vetorial normado  $E$  é homeomorfa ao espaço inteiro  $E$ .

Em virtude do Exemplo 12, basta considerar a bola unitária  $B = B(0; 1)$  e exibir um homeomorfismo  $f: E \rightarrow B$ . Podemos  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ . Como  $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$  para todo

$x \in E$ , vemos que  $f$  é uma aplicação contínua de  $E$  em  $B$ . Tentando inverter a relação  $y = \frac{x}{1+|x|}$  e tirar  $x$  em função de  $y$ , começamos com  $x = (1+|x|) \cdot y$ . Resta então obter  $1+|x|$  em termos de  $y$ . Vem:

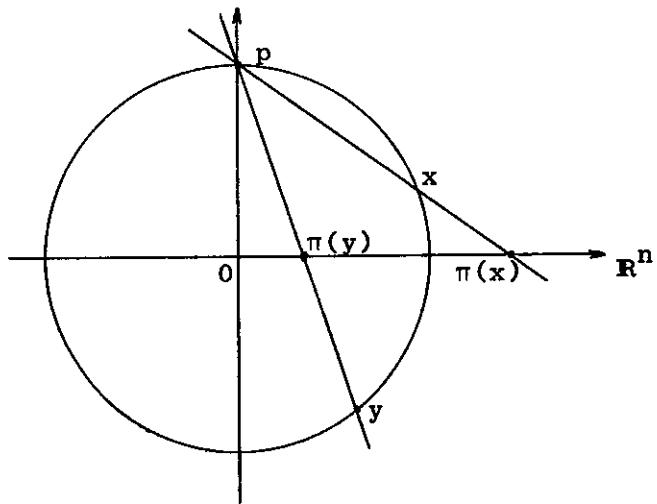
$$\frac{x}{1+|x|} = y \Leftrightarrow \frac{|x|}{1+|x|} = |y| \Leftrightarrow |x| = \frac{|y|}{1-|y|} \Leftrightarrow 1+|x| = \frac{1}{1-|y|} .$$

Logo  $y = \frac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-|y|}$ . A aplicação inversa de  $f$  é portanto  $g: B \rightarrow E$ , onde  $g(y) = \frac{y}{1-|y|}$ . Como  $|y| < 1$  para todo  $y \in B$ , vemos que  $g$  é contínua e portanto  $f$  é um homeomorfismo.

Exemplo 15 a - Segue-se do Exemplo 15 que todo intervalo aberto limitado  $(a,b)$  é homeomorfo à reta  $\mathbb{R}$ , pois  $(a,b)$  é a bola aberta de centro no seu ponto médio  $\frac{a+b}{2}$  e raio  $r = \frac{b-a}{2}$ . Mais geralmente, porém, todo intervalo aberto da reta, é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Com efeito, se se trata de um intervalo do tipo  $(a,+\infty)$ , temos o homeomorfismo  $f: \mathbb{R} \rightarrow (a,+\infty)$ , dado por  $f(x) = a + e^x$ , cujo inverso  $g = f^{-1}: (a,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tem a expressão  $g(y) = \log(y-a)$ . Se o intervalo aberto for do tipo  $(-\infty, b)$ , usaremos o homeomorfismo  $h: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, b)$ , definido por  $h(x) = b - e^{-x}$ , o qual possui o inverso  $k: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Exemplo 16 - A projeção estereográfica. Sejam  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  a esfera unitária

$n$ -dimensional e  $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$  o seu polo norte. A projeção estereográfica  $\pi: S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o polo norte e o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Geometricamente,  $\pi(x)$  é o ponto em que a semi-reta  $\overrightarrow{px}$  encontra o hiperplano  $x^{n+1} = 0$ , que identificamos com  $\mathbb{R}^n$ . A fim de obter uma fórmula para  $\pi$ , observemos que os pontos da semi-reta  $\overrightarrow{px}$  têm a forma  $p + t \cdot (x-p)$ , onde  $t > 0$ . Tal ponto pertence ao hiperplano  $\mathbb{R}^n$  quando sua última coordenada  $1 + t(x_{n+1} - 1)$  é zero. Daí tiramos  $t = \frac{1}{1-x_{n+1}}$ . Convencionemos por  $x^* = (x_1, \dots, x_n)$  quando  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ . Então, sendo  $\pi(x) = p + \frac{x-p}{1-x_{n+1}}$ , uma conta fácil mostra que  $\pi(x) = \frac{x^*}{1-x_{n+1}}$ .



A expressão  $\pi(x) = \frac{x'}{1-x_{n+1}}$  mostra que  $\pi: S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua. (Note que  $x \in S^n - \{p\}$  exclui que seja  $x_{n+1} = 1$ .) Para verificar que  $\pi$  é um homeomorfismo, basta considerar a aplicação  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{p\}$ , definida por  $\varphi(y) = x$ , onde, na notação acima,  $x' = \frac{2y}{|y|^2 + 1}$  e  $x_{n+1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}$ . Constatata-se sem dificuldade que  $\varphi(\pi(x)) = x$  para todo  $x \in S^n - \{p\}$  e  $\pi(\varphi(y)) = y$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Exemplo 17 - O gráfico de uma aplicação contínua é homeomorfo ao domínio. Seja  $f: M \rightarrow N$  contínua. O gráfico de  $f$  é o subconjunto  $G(f)$  do produto cartesiano  $M \times N$  definido por  $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}$ . A aplicação  $\tilde{f}: M \rightarrow G(f) \subset M \times N$ , dada por  $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$ , é contínua pois suas coordenadas são contínuas. Sua inversa  $G(f) \rightarrow M$ , dada por  $(x, f(x)) \mapsto x$ , é contínua pois é igual à restrição  $p_1|_{G(f)}$  da projeção  $p_1: M \times N \rightarrow M$ . Assim  $\tilde{f}: M \rightarrow G(f)$  é um homeomorfismo. Casos particulares:  $\mathbb{R} - \{0\}$  é homeomorfo à hipérbole  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$  pois  $H$  é o gráfico da função  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Também o hemisfério norte  $S_+^n = \{y \in S^n; y_{n+1} > 0\}$  é homeomorfo à bola aberta unitária  $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$  pois  $S_+^n$  é o gráfico de  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$ .

Com efeito, um ponto  $y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$  per-

tence a  $S_+^n$  se, e somente se  $y_1^2 + \dots + y_n^2 + y_{n+1}^2 = 1$  e  $y_{n+1} > 0$ . Pondo  $x = (y_1, \dots, y_n)$ , estas duas condições significam que  $|x| < 1$  e  $y_{n+1} = \sqrt{1-|x|^2}$ , o que nos dá:  $y \in S_+^n \Leftrightarrow y = (x, \sqrt{1-|x|^2})$ .

#### §4. Métricas equivalentes.

Intuitivamente, passar de uma métrica para outra mais fina, é a generalização da idéia de tomar uma unidade de medida menor, do que resultariam distâncias maiores. Na definição que daremos a seguir, as métricas mais finas não produzem distâncias maiores no sentido estrito do termo, e sim "topologicamente maiores", como se entenderá a posteriori.

Dadas as métricas  $d_1$  e  $d_2$  no mesmo conjunto  $M$ , escreveremos, por simplicidade,  $M_1 = (M, d_1)$ ,  $M_2 = (M, d_2)$ ,  $B_1(a; r) =$  bola de centro  $a$  e raio  $r$  segundo a métrica  $d_1$  etc. Em geral, usaremos os índices 1 e 2 para distinguir objetos definidos com auxílio das métricas  $d_1$  ou  $d_2$  respectivamente.

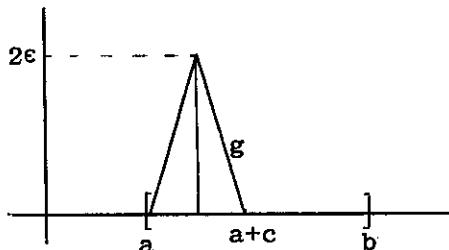
Diremos que  $d_1$  é mais fina do que  $d_2$ , e escreveremos  $d_1 > d_2$ , quando a aplicação identidade  $i_{12}$ :  $M_1 \rightarrow M_2$  for contínua. Como  $i_{12}(x) = x$  para todo  $x \in M$ ,

a definição de continuidade fornece diretamente a seguinte condição necessária e suficiente para que  $d_1$  seja mais fina do que  $d_2$ : para todo  $a \in M$  e todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \epsilon)$ . Ou seja  $d_1 > d_2 \Leftrightarrow$  toda bola aberta segundo  $d_2$  contém uma bola aberta de mesmo centro segundo  $d_1$ .

Exemplo 18 - Se o espaço métrico  $(M, d_1)$  é discreto (diz-se, neste caso, que  $d_1$  é uma métrica discreta) então  $d_1$  é mais fina do que qualquer outra métrica  $d_2$  em  $M$ . Por outro lado, se  $d_2$  for mais fina do que a métrica discreta  $d_1$  então, para todo  $a \in M$ , existe uma bola  $B_2(a; \delta)$  contida na bola  $\{a\} = B_1(a; \epsilon)$ . Logo  $B_2(a; \delta) = \{a\}$  e portanto  $d_2$  também é discreta.

Exemplo 19 - Se existir uma constante  $c > 0$  tal que  $d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ , então  $d_1$  é mais fina do que  $d_2$ . Com efeito, esta desigualdade implica que a aplicação identidade  $i_{12}: M_1 \rightarrow M_2$  é Lipschitziana, e portanto contínua. Olhada de outro modo, a mesma desigualdade significa que, para todo  $a \in M$ , tem-se  $B_1(a; \frac{\epsilon}{c}) \subset B_2(a; \epsilon)$ . Vejamos um caso particular desta situação. Seja  $E = C_0([a, b]; \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções contínuas limitadas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . (Quando estudarmos espaços compactos, mostraremos que toda função con-

tinua  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.) Já sabemos que  $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  define uma norma, e portanto uma métrica em  $M$ . Como toda função contínua  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, a definição  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$  introduz uma pseudo-norma, e portanto uma pseudo-métrica em  $E$ . (Vide Exemplo 29 do Capítulo 1.) Ora, sabe-se do Cálculo que uma função contínua não-negativa, como  $x \mapsto |f(x)|$  só pode ter integral nula quando for identicamente nula. Logo,  $\| \cdot \|_1$  é, na realidade, uma norma (e portanto define uma métrica) em  $E$ . Para quaisquer  $f, g \in E$ , temos  $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq (b-a) \cdot \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| = (b-a) \cdot \|f-g\|$ . Logo a métrica  $d$  (da convergência uniforme) é mais fina do que a métrica  $d_1$ . Notemos, porém, que  $d_1$  não é mais fina do que  $d$ . Basta mostrar que nenhuma "bola uniforme"  $B(f, \epsilon)$  pode conter uma bola  $B_1(f; \delta)$ , segundo  $d_1$ . Para isto, consideramos a função  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que é zero exceto no intervalo  $[a, a+c]$ , contido em  $[a, b]$ , com  $c < \frac{\delta}{2\epsilon}$ . Neste intervalo menor, o gráfico de  $g$  é um triângulo isósceles, cuja base é



$[a, a+c]$  e cuja altura mede  $2\epsilon$ . A área deste triângulo é igual a  $\int_a^b |g(x)| dx$ . Logo  $\|g\|_1 = \epsilon \cdot c < \epsilon \cdot \frac{\delta}{2\epsilon} = \frac{\delta}{2}$ . Assim,  $f+g \in B_1(f; \delta)$  mas, como  $g(a+\frac{c}{2}) = 2\epsilon$ , temos  $\|g\| > \epsilon$  e portanto  $f+g \notin B(f; \epsilon)$ . Como  $\epsilon$  e  $\delta$  são números positivos arbitrários, vemos que nenhuma bola segundo a métrica  $d$  pode conter uma bola de mesmo centro segundo  $d_1$ .

Proposição 4 - Sejam  $M_1 = (M, d_1)$  e  $M_2 = (M, d_2)$  espaços métricos sobre o mesmo conjunto  $M$ .

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $d_1 > d_2$ ; (Isto é, a aplicação identidade  $i_{12}: M_1 \rightarrow M_2$  é contínua.)
- (2) Para todo espaço métrico  $N$ ,  $f: M_1 \rightarrow N$  contínua  $\Rightarrow f: M_2 \rightarrow N$  contínua; (Isto é, toda aplicação contínua segundo  $d_1$  é contínua segundo  $d_2$ .)
- (3) Se  $f: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua;
- (4) Para todo  $a \in M$ , a função  $d_{2a}: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d_{2a}(x) = d_2(a, x)$  é contínua no ponto  $a \in M$ .
- (5) Toda bola aberta segundo  $d_2$  contém uma bola aberta de mesmo centro segundo  $d_1$ ;
- (6) A função  $d_2: M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

Demonstração: Indiquemos com  $f^1$  e  $f^2$  a mesma aplicação  $f$ , conforme a consideremos definida em  $M_1$  ou em  $M_2$ . Então  $f^1 = f^2 \circ i_{12}$ .

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{i_{12}} & M_2 \\ & \searrow f^1 & \swarrow f^2 \\ & N & \end{array}$$

Isto mostra que a continuidade de  $i_{12}$  e  $f^2$  implicam na de  $f^1$ . Ou seja: (1)  $\Rightarrow$  (2). É óbvio que (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4), pois cada uma dessas afirmações é um caso particular da anterior. Além disso, (1)  $\Leftrightarrow$  (4)  $\Leftrightarrow$  (5) pois todas estas afirmações podem ser reformuladas assim: para todo  $a \in M$  e todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \epsilon)$ . Também (6)  $\Rightarrow$  (4), como caso particular. Finalmente, (1) implica que a aplicação identidade  $M_1 \times M_1 \rightarrow M_2 \times M_2$  é contínua e, por conseguinte, a continuidade de  $f: M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  acarreta que  $f: M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Ora,  $d_2: M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é reconhecidamente contínua. Logo, (1) implica que  $d_2: M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua, ou seja, (1)  $\Rightarrow$  (6). Com isto fica provada a Proposição 4.

Proposição 5 - A aplicação injetiva  $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$  é contínua se, e somente se, a métrica  $d_M$  é mais fina do que a métrica  $d_1$ , induzida em M por f.

Demonstração: Não há perda de generalidade em supor que  $f$  seja sobrejetiva. Indiquemos com  $f_1: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$  a mesma aplicação que  $f$ , quando se torna no domínio a métrica  $M$ . Então  $f_1$  é uma isometria, e portanto um homeomorfismo. Seja  $i_{M1}: (M, d_M) \rightarrow (M, d_1)$  a a-

$$\begin{array}{ccc} (M, d_M) & \xrightarrow{f} & (N, d_N) \\ i_{M1} \downarrow & \nearrow f_1 \text{ (homeomorfismo)} & \\ (M, d_1) & & \end{array}$$

aplicação identidade. Como  $f = f_1 \circ i_{M1}$ , vemos que  $f$  é contínua se, e somente se,  $f_1$  é contínua.

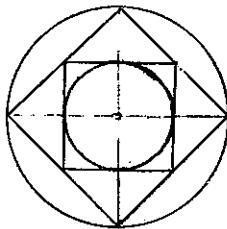
Exemplo 20 - Como  $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ , dada por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ , é uma bijeção contínua, segue-se que a métrica  $d(x, y) = |x - y|$  em  $[0, 2\pi)$  é mais fina do que a métrica  $d_1(x, y) = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}$ , induzida por  $f$ .

Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  num espaço  $M$  chamam-se equivalentes quando cada uma delas é mais fina do que a outra, isto é, quando a aplicação identidade  $i_{12}: (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$  é um homeomorfismo. Escreve-se então  $d_1 \sim d_2$ . A relação  $d_1 \sim d_2$  é reflexiva, simétrica e transitiva.

Por exemplo, duas métricas discretas no mesmo espaço são sempre equivalentes. Se  $d_1 \sim d_2$  e  $d_1$  é discreta então  $d_2$  é discreta.

A fim de que se tenha  $d_1 \sim d_2$  em  $M$ , é necessário e suficiente que qualquer bola aberta em relação a uma dessas métricas contenha uma bola aberta de mesmo raio em relação à outra.

Exemplo 21 - As métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  no plano  $\mathbb{R}^2$  (Vide Exemplo 4, Capítulo 1.) são equivalentes, pois todo disco contém um quadrado com diagonais paralelas



aos eixos, o qual contém um quadrado de lados paralelos aos eixos e este, por sua vez, contém um disco, etc., todas essas figuras com o mesmo centro.

Exemplo 22 - Se existirem constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ , então as métricas  $d_1$  e  $d_2$  são equivalentes pois a aplicação identidade  $i_{12}: (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$  e sua inversa  $i_{21}: (M, d_2) \rightarrow (M, d_1)$  são, neste caso, ambas Lipschitzianas.

Assim, por exemplo, no produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ , as métricas  $d$ ,  $d'$  e  $d''$  definidas no Exemplo , Capítulo 1 são equivalentes, pois cumprem  $d'' \leq d \leq d' \leq n \cdot d''$ . Em particular, no espaço  $\mathbb{R}^n$ , as métricas  $d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ ,  $d'(x,y) = \sum |x_i - y_i|$  e  $d''(x,y) = \max|x_i - y_i|$  são equivalentes.

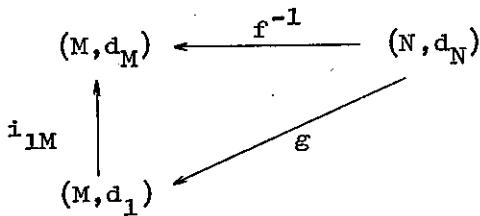
Exemplo 23 - Seja  $d$  uma métrica em  $M$ . Pondo  $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$  e  $d_2(x,y) = \min\{1,d(x,y)\}$  obtêm-se métricas em  $M$ . Afirmamos que  $d_1$  e  $d_2$  são ambas equivalentes a  $d$ . Em primeiro lugar, como  $d_1(x,y) \leq d(x,y)$  e  $d_2(x,y) \leq d(x,y)$  para quaisquer  $x,y \in M$ , vemos que  $d$  é mais fina do que  $d_1$  e  $d_2$ . Em seguida, dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$  e  $\delta_2 = \min\{1,\epsilon\}$ . Então  $d_1(x,a) < \delta_1 \Rightarrow \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \Rightarrow d(x,a) < \epsilon$  (eliminando os denominadores e simplificando). Logo  $B_1(a;\delta_1) \subset B(a;\epsilon)$ . Além disso,  $d_2(x,a) < \delta_2 \Rightarrow \min\{1,\epsilon\} \Rightarrow d(x,a) < \epsilon$ . Assim  $B_2(a;\delta_2) \subset B(a;\epsilon)$ . Isto mostra que  $d_1$  e  $d_2$  são ambas mais finas do que  $d$ . Conclusão:  $d \sim d_1 \sim d_2$ . Em particular, vemos que toda métrica é equivalente a uma métrica limitada, pois  $d_1(x,y) \leq 1$  e  $d_2(x,y) \leq 1$ . Note-se que, quando  $d$  é ilimitada, não pode existir uma constante  $\beta > 0$  tal que  $d(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)$  para quaisquer  $x,y \in M$  pois esta de

sigualdade acarretaria  $1 + d(x,y) \leq \beta$  quando  $x \neq y$ , e portanto  $d$  seria limitada. Assim, a condição do Exemplo 22 é suficiente porém não é necessária para que duas métricas seja equivalentes.

O Exemplo 19 nos mostra que, no espaço das funções (limitadas) contínuas  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  as métricas  $d(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)-g(x)|$  e  $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| dx$  não são equivalentes. Também a métrica usual (induzida pela reta) no intervalo  $[0,2\pi]$  não é equivalente à métrica  $d_1(x,y) = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}$ , induzida pela bijeção  $f: [0,2\pi] \rightarrow S^1$ , onde  $f(x) = (\cos x, \sin x)$ , porque  $f$  não é um homeomorfismo e por causa da

Proposição 6 - A bijeção  $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$  é um homeomorfismo se, e somente se, a métrica  $d_M$  é equivalente à métrica  $d_1$ , induzida em  $M$  por  $f$ .

Demonstração: A aplicação  $f_1: (M, d_1) \rightarrow (N, d_N)$  dada por  $f_1(x) = f(x)$ , é uma isometria e portanto um homeomorfismo, isto é, sua inversa  $g = (f_1)^{-1}: (N, d_N) \rightarrow (M, d_1)$  é contínua. Considerando a aplicação identidade  $i_{1M}: (M, d_1) \rightarrow (M, d_M)$ , temos  $f^{-1} = i_{1M} \circ g$ . Portanto,  $d_1$  é mais fina do que  $d_M$  (isto é,  $i_{1M}$  é contínua).



se, e somente se,  $f^{-1}$  é contínua. Por outro lado (vide Proposição 5),  $d_M$  é mais fina do que  $d_1$  se, e somente se,  $f$  é contínua. Logo,  $d_1 \sim d_M \Leftrightarrow f$  é um homeomorfismo.

Corolário - A aplicação  $f: (M, d) \rightarrow (N, d_1)$  é contínua se, e somente se, a métrica  $d_f: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d_f(x, y) = d(x, y) + d_1(f(x), f(y))$ , é equivalente a  $d$ .

Com efeito, se  $f$  é contínua então tomando em  $M \times N$  a métrica  $\delta[(x, y), (x', y')] = d(x, x') + d_1(y, y')$ , sabemos que a aplicação  $\tilde{f}: x \mapsto (x, f(x))$  é um homeomorfismo de  $M$  sobre o gráfico  $G(f) \subset M \times N$ . (Vide Exemplo 17.) A métrica  $d_f$  é induzida em  $M$  pelo homeomorfismo  $\tilde{f}: M \rightarrow G(f)$ , logo é equivalente a  $d$ . Para demonstrar a recíproca, observemos que  $f: (M, d_f) \rightarrow (N, d_1)$  é uma contração fraca, e portanto é contínua. Se for  $d_f \sim d$ , então  $f$  será contínua segundo  $d$ . (Vide Proposição 4.)

Em particular, se  $f: (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então a métrica  $d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$  é equiva-

lente a d.

Proposição 7 - Sejam  $M_1 = (M, d_1)$  e  $M_2 = (M, d_2)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $d_1 \sim d_2$ .
- (2) Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  é contínua segundo  $d_1$  se, e somente se, é contínua segundo  $d_2$ .
- (3) Uma função real  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua segundo  $d_1$  se, e somente se, é contínua segundo  $d_2$ .
- (4) Para todo  $a \in M$ , as funções  $d_{1a}: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $d_{2a}: M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $d_{1a}(x) = d_1(a, x)$  e  $d_{2a}(x) = d_2(a, x)$ , são contínuas no ponto  $a$ .
- (5) Toda bola aberta segundo uma dessas métricas contém uma bola aberta de mesmo centro segundo a outra.
- (6) As funções  $d_1: M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $d_2: M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas.

Demonstração: Vide Proposição 4.

## §5. Transformações lineares e multilineares.

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação  $f: E \rightarrow F$  chama-se uma transformação linear quando, para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  e  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

+  $f(y)$  e  $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ . Daí resulta que  
 $f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n)$ . Se for  
 $F = \mathbb{R}$ , diremos que  $f: E \rightarrow F$  é um funcional linear. Es-  
tamos interessados na continuidade das transformações li-  
neares. Começamos observando que toda transformação li-  
near  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow F$ , definida em  $\mathbb{R}^m$  e tomando valores num  
espaço vetorial normado  $F$  qualquer, é contínua.

Com efeito, em termos da base canônica  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ , todo vetor  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  se escreve como  $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_m \cdot e_m$ . Então  $f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_m \cdot f(e_m)$  e portanto  $|f(x)| \leq |x_1| \cdot |f(e_1)| + \dots + |x_m| \cdot |f(e_m)|$ . Pondo  $c = \max\{|f(e_1)|, \dots, |f(e_m)|\}$ , vem  $|f(x)| \leq c \cdot (|x_1| + \dots + |x_m|)$ . Usando em  $\mathbb{R}^n$  a norma  $|x| = |x_1| + \dots + |x_m|$ , temos  $|f(x)| \leq c \cdot |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . Segue-se que, para  $x, y \in \mathbb{R}^m$  arbitrários, vale  $|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq c \cdot |x-y|$ . Logo  $f$  é Lipschitziana e, por conseguinte, contínua.

Mas não é verdade que toda transformação linear  $f: E \rightarrow F$ , definida num espaço vetorial normado qualquer  $E$ , seja contínua. Vejamos um exemplo de descontinuidade.

Exemplo 24 - Um funcional linear descontínuo. Seja  $E$  o  
conjunto dos polinômios reais com uma varia-  
vel.  $E$  é um espaço vetorial, no qual definiremos a nor-

ma  $\|p\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$ . Seja agora  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(p) = p(2)$ . Evidentemente,  $f$  é um funcional linear. Mostraremos que  $f$  é descontínuo no ponto  $0 \in E$  (polinômio identicamente nulo). Com efeito, tomando  $\epsilon = \frac{1}{2}$  vemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar um polinômio  $p_n$ , a saber,  $p_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ , tal que  $\|p_n - 0\| = \frac{1}{2^n} < n$  mas  $|f(p_n) - f(0)| = |f(p_n)| = 1 \geq \epsilon$ .

Proposição 8 - Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados.

As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear  $f: E \rightarrow F$  são equivalentes:

- (1)  $f$  é contínua;
- (2)  $f$  é contínua no ponto  $0 \in E$ ;
- (3) Existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c \cdot |x|$  para todo  $x \in E$ ;
- (4) Existe  $c > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

Demonstração: Provaremos que  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ .

As implicações  $(1) \Rightarrow (2)$  e  $(4) \Rightarrow (1)$  são inteiramente óbvias. Provemos que  $(2) \Rightarrow (3)$ . Sendo  $f$  contínua no ponto  $0$ , com  $f(0) = 0$ , tomamos  $\epsilon = 1$  e obtemos  $\delta > 0$  tal que  $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1$ . Seja agora  $c$  qualquer número tal que  $0 < \frac{1}{c} < \delta$ . A relação  $|f(x)| \leq c \cdot |x|$  é evidente se  $x = 0$ . Se, porém,  $x \neq 0$ ,

então  $\frac{x}{c|x|}$  tem norma  $\frac{1}{c}$ , portanto menor do que  $\delta$ . Logo  $|f(\frac{x}{c|x|})| < 1$ . Como  $f$  é linear, isto nos dá  $\frac{1}{c|x|} \cdot |f(x)| < 1$ , ou seja,  $|f(x)| < c \cdot |x|$ . Para mostrar que  $(3) \Rightarrow (4)$ , basta notar que, sendo  $f$  linear, a hipótese  $(3)$  implica  $|f(x)-f(y)| = |f(x-y)| \leq c \cdot |x-y|$ .

Corolário - Seja  $f: E \rightarrow F$  uma bijeção linear. Para que  $f$  seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que existam  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $\alpha \cdot |x| \leq |f(x)| \leq \beta \cdot |x|$  para todo  $x \in E$ .

A condição  $|f(x)| \leq \beta \cdot |x|$  é, como vimos, equivalente à continuidade de  $f$ . Por outro lado,  $\alpha \cdot |x| \leq |f(x)| \forall x \in E \Leftrightarrow \alpha \cdot |f^{-1}(y)| \leq |y| \forall y \in F \Leftrightarrow |f^{-1}(y)| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot |y|$  é uma condição equivalente à continuidade de  $f^{-1}$ .

Exemplo 25 - Uma bijeção linear contínua que não é um homeomorfismo. Seja  $\mathbb{R}^\infty$  o espaço vetorial formado pelas seqüências infinitas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  de números reais, em cada uma das quais apenas um número finito de coordenadas  $x_n$  é  $\neq 0$ . Consideramos em  $\mathbb{R}^\infty$  a norma  $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 + \dots}$ , que provém do produto interno  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n + \dots$ . (Ambas as somas parecem infinitas mas são finitas.) Definamos a transformação linear  $f: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  pondo  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$ . Então  $f$  é contínua porque

$|f(x)| \leq |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^\infty$ . A inversa de  $f$  é dada por  $f^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_1, 2y_2, \dots, n \cdot y_n, \dots)$ . Para cada  $n$ , o vetor  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , cuja  $n$ -ésima coordenada é 1 e as outras são zero, cumpre  $|e_n| = 1$  e  $|f^{-1}(e_n)| = n$ . Logo  $|f^{-1}(e_n)| \geq n \cdot |e_n|$  e, como  $n$  pode ser arbitrariamente grande, concluimos que  $f^{-1}$  é descontínua.

De acordo com a Proposição 8, as transformações lineares contínuas  $f: E \rightarrow F$  ( $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados) são precisamente aquelas que são limitadas na esfera unitária  $S = \{x \in E; |x| = 1\}$  do espaço  $E$ . Indica-se com  $\mathcal{L}(E;F)$  o conjunto das transformações lineares contínuas de  $E$  em  $F$ . Evidentemente,  $\mathcal{L}(E;F)$  é um espaço vetorial em relação às operações  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  e  $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ , pois se  $f, g: E \rightarrow F$  são contínuas então  $f+g$  e  $\alpha \cdot f$  também são.

É importante observar que  $\mathcal{L}(E;F)$  possui uma norma natural, definida por  $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in E, |x|=1\}$  ou seja  $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ . Deixamos a cargo do leitor a verificação dos axiomas de uma norma.

O Exemplo 19 contém outro caso de bijeção linear contínua que não é homeomorfismo, a saber: a aplicação identidade  $id: (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ , onde  $E$  é o espaço vetorial formado pelas funções contínuas (limitadas)

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  e  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ .

Sejam  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  normas no mesmo espaço vetorial  $E$ . Escrevamos com  $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ ,  $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$  e indiquemos com  $i_{12}: E_1 \rightarrow E_2$  a aplicação identidade. Diremos que a norma  $\|\cdot\|_1$  é mais fina do que a norma  $\|\cdot\|_2$  quando  $i_{12}$  for contínua, isto é, quando a métrica  $d_1$ , proveniente de  $\|\cdot\|_1$ , for mais fina do que a métrica  $d_2$ , proveniente de  $\|\cdot\|_2$ . Diremos que  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são normas equivalentes quando  $i_{12}$  for um homeomorfismo. O Corolário da Proposição 8, aplicado à transformação linear  $i_{12}: E_1 \rightarrow E_2$  nos dá:

Proposição 9 - Duas normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  num espaço vetorial  $E$  são equivalentes se, e somente se, existem constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que  $\alpha \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \cdot \|x\|_1$  para todo  $x \in E$ .

Assim esta condição, que era apenas suficiente para a equivalência de métricas em geral, é também necessária quando tais métricas provêm de normas.

Diremos agora algumas palavras sobre a continuidade das aplicações multilineares.

Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_n, F$  espaços vetoriais. Uma aplicação  $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  chama-se n-linear quando

é linear separadamente em cada uma das suas  $n$  variáveis.

Isto significa que, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , tem-se:

$$f(x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$$

$$\text{e } f(x_1, \dots, \alpha \cdot x_i, \dots, x_n) = \alpha \cdot f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

sejam quais forem  $x_1 \in E_1, \dots, x_i, y_i \in E_i, \dots, x_n \in E_n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Se algum  $x_i = 0$  então, pela segunda condição (com  $\alpha = 0$ ), tem-se  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Em particular, quando  $n = 2$ , temos uma aplicação bilinear  $f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ , que é caracterizada pelas condições:

$$f(x_1 + y_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, x_2)$$

$$f(\alpha \cdot x_1, x_2) = \alpha \cdot f(x_1, x_2)$$

$$f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, y_2),$$

$$f(x_1, \alpha \cdot x_2) = \alpha \cdot f(x_1, x_2).$$

Novamente,  $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$  para quaisquer  $x_1 \in E_1$  e  $x_2 \in E_2$ .

Exemplo 26 - A multiplicação por um escalar,  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ ,

onde  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$  é bilinear. Também todo produto interno  $p: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x, y) = \langle x, y \rangle$ , é bilinear. Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais normados, indiquemos

com  $\mathcal{L}(E;F)$  o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de  $E$  em  $F$ . Então  $\alpha: \mathcal{L}(E,F) \times E \rightarrow F$ , definida por  $\alpha(T,x) = T(x)$ , é bilinear. Também é bilinear a aplicação  $\mu: \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \rightarrow \mathcal{L}(E;G)$ , definida por  $\mu(T,S) = T \circ S$  (composição de aplicações lineares). A função  $\det: \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ( $m$  fatores), definida por  $\det(v_1, \dots, v_m) = \text{determinante da matriz cujas linhas (ou cujas colunas - tanto faz) são os vetores } v_1, \dots, v_m$ , nessa ordem, é  $m$ -linear.

Para simplificar a notação, trataremos de aplicações bilineares, embora os resultados sejam válidos, com os mesmos argumentos, no caso  $n$ -linear.

Proposição 10 - Sejam  $E, F, G$  espaços vetoriais normados e  $f: E \times F \rightarrow G$  uma aplicação bilinear. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1)  $f$  é contínua;
- 2)  $f$  é contínua no ponto  $(0,0) \in E \times F$ ;
- 3) existe  $c > 0$  tal que  $|f(x,y)| \leq c \cdot |x| \cdot |y|$  para quaisquer  $x \in E, y \in F$ ;
- 4)  $f$  é Lipschitziana em cada parte limitada de  $E \times F$ .

Demonstração: É evidente que  $1) \Rightarrow 2)$ . Para provar que  $2) \Rightarrow 3)$ , seja  $f$  contínua no ponto  $(0,0)$ . Como  $f(0,0) = 0$ , tomindo  $\epsilon = 1$ , obtemos  $\delta > 0$  tal

que  $|x| < \delta$  e  $|y| < \delta$  implicam  $|f(x,y)| < 1$ . Dados  $x \in E$ ,  $y \in F$  não nulos quaisquer, os vetores  $\frac{\delta}{2|x|} \cdot x$  e  $\frac{\delta}{2|y|} \cdot y$  têm ambos normas inferiores a  $\delta$ . Logo,

$$|f\left(\frac{\delta}{2|x|} \cdot x, \frac{\delta}{2|y|} \cdot y\right)| < 1, \text{ ou seja, } \frac{\delta^2}{4|x| \cdot |y|} \cdot |f(x,y)| < 1.$$

Tomando  $c = \frac{4}{\delta^2}$ , obtemos então  $|f(x,y)| \leq c \cdot |x| \cdot |y|$

sempre que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Ora, esta desigualdade é evidente quando  $x = 0$  ou  $y = 0$  porque neste caso ambos os membros se anulam. Mostraremos agora que 3)  $\Rightarrow$  4).

Usaremos em EXF a norma  $|z| = |x| + |y|$ , onde  $z = (x,y)$  e, admitindo 3) como hipótese, provaremos que  $f$  é Lipschitziana em cada bola  $B[0;r]$  de EXF. Com efeito, se  $z = (x,y)$  e  $z' = (x',y')$  pertencem a esta bola então  $|x|, |x'|, |y|$  e  $|y'|$  são  $\leq r$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= |f(x,y) - f(x,y') + f(x,y') - f(x',y')| = \\ &= |f(x,y-y') + f(x-x',y)| \leq |f(x,y-y')| + |f(x-x',y)| \leq \\ &\leq c \cdot |x| \cdot |y-y'| + c \cdot |x-x'| \cdot |y| \leq c \cdot r \cdot (|x-x'| + |y-y'|) \leq c \cdot r \cdot |z-z'|. \end{aligned}$$

A implicação 4)  $\Rightarrow$  1) é evidente.

Corolário - Seja  $F$  um espaço vetorial normado. Toda aplicação bilinear  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow F$ , definida num par de espaços euclidianos, é contínua.

Com efeito, sejam  $\{e_1, \dots, e_m\}$  e  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  respectivamente as bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ . Dados

$x = \sum_i x_i e_i$  e  $y = \sum_j y_j e_j'$ , temos:  $f(x,y) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot f(e_i, e_j')$ . Seja  $c$  o maior dos números  $|f(e_i, e_j')|$ . Tomando em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  as normas  $|x| = \sum_i |x_i|$  e  $|y| = \sum_j |y_j|$ , vale:  $|x| \cdot |y| = \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j|$ . Podemos então escrever:

$$|f(x,y)| \leq \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j| \cdot |f(e_i, e_j')| \leq c \cdot \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j| = c \cdot |x| \cdot |y|$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}^m$  e qualquer  $y \in \mathbb{R}^n$ . Logo  $f$  é contínua.

Observação: É vantajoso imaginar uma aplicação bilinear  $f: EXF \rightarrow G$  como uma multiplicação, na qual o produto de um elemento de  $E$  por um de  $F$  pertence a  $G$ . De fato, usando a notação  $f(x,y) = x \cdot y$ , as condições de bilinearidade se exprimem como  $(x+x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$ ,  $x \cdot (y+y') = x \cdot y + x \cdot y'$  e  $(\alpha x) \cdot y = \alpha \cdot (x \cdot y)$ .

Exemplo 27 - A Proposição 10 contém a demonstração de que a multiplicação de números reais  $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou, mais geralmente a multiplicação  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ , de um número por um vetor num espaço vetorial normado  $E$ , é contínua. Além disso, qualquer produto interno  $\langle , \rangle: EXE \rightarrow \mathbb{R}$  num espaço vetorial  $E$  é contínuo em relação à norma por ele induzida em virtude da desigualdade

de Cauchy-Schwarz,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ . Também a composição de transformações lineares contínuas  $\mu : \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$  é uma aplicação bilinear contínua relativamente à norma natural acima definida para espaços do tipo  $\mathcal{L}(E; F)$ . Com efeito, vale  $\|\mu(T, S)\| = \|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ , como se verifica sem dificuldade. A função determinante,  $\det : \mathbb{R}^{m^2} = \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, em virtude do corolário acima.

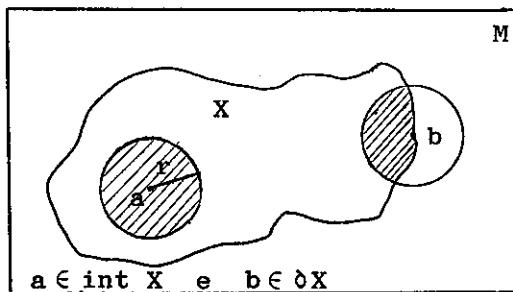


## CAPÍTULO 3

### LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA

#### §1. Conjuntos abertos.

Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $a \in X$  diz-se um ponto interior de  $X$  quando é centro de uma bola aberta contida em  $X$ , ou seja, quando existe  $r > 0$  tal que  $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$ . Chama-se o interior de  $X$  em  $M$  ao conjunto  $\text{int } X$  formado pelos pontos interiores a  $X$ .



Dizer que o ponto  $b \in X$  não é interior a  $X$  significa, então, afirmar que toda bola aberta de centro  $b$  contém algum ponto que não pertence a  $X$ . Neste caso, o ponto  $b$  pertence à fronteira de  $X$ . A fronteira de  $X$  pode também conter pontos que não estão em  $X$ , de acordo

com a definição abaixo.

A fronteira de  $X$  em  $M$  é o conjunto  $\partial X$ , formado pelos pontos  $b \in M$  tais que toda bola aberta de centro  $b$  contém pelo menos um ponto de  $X$  e um ponto do complementar  $M-X$ .

Observação: Toda bola contém evidentemente um centro  $b$ , o qual pertence a  $X$  ou a  $M-X$ . Para mostrar que  $b \in \partial X$  basta, quando  $b \in X$ , provar que toda bola aberta de centro  $b$  contém pontos de  $M-X$ .

Exemplo 1 - O interior do intervalo  $[0,1)$  na reta é o intervalo aberto  $(0,1)$  e sua fronteira consiste dos pontos 0 e 1 apenas. Com efeito, se  $0 < a < 1$  então, pondo  $r = \min\{a, 1-a\}$  temos  $(a-r, a+r) \subset [0,1)$ , logo  $a \in \text{int.}[0,1)$ . Mas  $0 \in \partial[0,1)$  pois todo intervalo aberto de centro 0 contém números negativos, portanto não pertencentes a  $[0,1)$ . Também  $1 \in \partial[0,1)$  pois, embora  $1 \notin [0,1)$ , todo intervalo aberto de centro 1 contém números positivos menores do que 1. Além disso, nenhum número negativo ou maior do que 1 pode pertencer à fronteira de  $[0,1)$ .

Exemplo 2 - Seja  $\mathbb{Q}$  o conjunto nos números racionais.

O interior de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathbb{R}$  é vazio pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números ra-

cionais. Por outro lado a fronteira de  $Q$  é toda a reta  $\mathbb{R}$  porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

Observação: As noções de interior e fronteira são relativas, isto é, dependem do espaço métrico  $M$  no qual se considera  $X$  imerso. Por exemplo, no Exemplo 1 acima, temos  $\text{int.}[0,1) = (0,1)$  e  $\partial[0,1) = \{0,1\}$  em  $\mathbb{R}$ . Mas se considerarmos  $\mathbb{R}$  como o eixo das abcissas ( $y = 0$ ) no plano  $\mathbb{R}^2$ , teremos  $[0,1) \subset \mathbb{R}^2$  e, como subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$ , o interior de  $[0,1)$  é vazio e sua fronteira é o intervalo fechado  $[0,1]$ . Assim, quando se fala em "interior de  $X$ " e "fronteira de  $X$ ", deve-se especificar em relação a qual espaço métrico  $M$ , salvo quando isto seja evidente no contexto.

Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Dado um ponto arbitrário  $c \in M$ , há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou existe um bola aberta de centro  $c$  contida em  $X$  (isto é,  $c \in \text{int.}X$ ), ou existe uma bola aberta de centro  $c$  contida em  $M-X$  (ou seja,  $c \in \text{int.}(M-X)$ ) ou toda bola aberta de centro  $c$  contém pontos de  $X$  e de  $M-X$  (quer dizer,  $c \in \partial X$ ). Logo todo conjunto  $X$  determina a decomposição do espaço como reunião de três subconjuntos dois a dois disjuntos:

$$M = \text{int.}X \cup \partial X \cup \text{int}(M-X).$$

Um ou dois dos três conjuntos acima podem ser vazios. Esta decomposição ilustra o fato (evidente a partir da definição) de que  $\partial X = \partial(M-X)$ .

Por exemplo, se  $M = \mathbb{R}$  e  $X = [0,1]$ , temos  $R = (0,1) \cup \{0,1\} \cup Y$ , onde  $Y = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ .

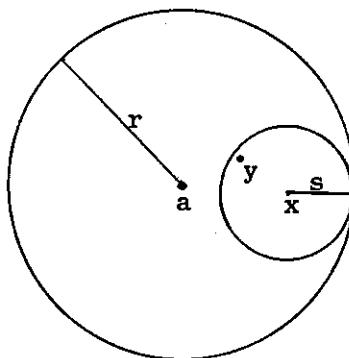
Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $M$  diz-se aberto em  $M$  quando todos os seus pontos são interiores, isto é,  $\text{int.}A = A$ . Assim,  $A \subset M$  é aberto se, e somente se,  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

Para provar que um conjunto  $A \subset M$  é aberto em  $M$  devemos, em princípio, obter, para cada  $x \in A$ , um raio  $r > 0$  tal que  $B(x;r) \subset A$ .

Proposição 1 - Em qualquer espaço métrico  $M$ , uma bola aberta  $B(a;r)$  é um conjunto aberto.

Demonstração: Seja  $x \in B(a;r)$ . Então  $d(a,x) < r$  e por tanto  $s = r - d(a,x)$  é um número positivo. Afirmamos que  $B(x;s) \subset B(a;r)$ .

De fato, se  $y \in B(x;s)$  então  $d(x,y) < s$  e portanto  $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$ .



Logo  $y \in B(a;r)$ .

Corolário - Para todo  $X \subset M$ , int.  $X$  é aberto em  $M$ .

Com efeito, seja  $a \in \text{int.}X$ . Então existe  $r > 0$  tal que  $B(a;r) \subset X$ . Para todo  $x \in B(a;r)$ , como vimos acima, existe  $s > 0$  tal que  $B(x,s) \subset B(a;r)$ , donde  $B(x;s) \subset X$ . Isto mostra que todo ponto  $x \in B(a;r)$  é interior a  $X$ , ou seja, que  $B(a;r) \subset \text{int.}X$ . Logo  $\text{int.}X$  é aberto.

Na realidade,  $\text{int.}X$  é o maior aberto contido em  $X$ . Isto quer dizer que se  $A$  é aberto e  $A \subset X$  então  $A \subset \text{int.}X$ . Para verificar isto, basta notar que todo ponto  $a \in A$  é interior a  $A$  e portanto (como  $A \subset X$ ) interior a  $X$ .

Exemplo 3 - Um ponto  $a \in M$  é um conjunto aberto em  $M$  se, e somente se, é um ponto isolado, pois só sendo o próprio  $a$  uma bola é que pode conter uma bola. Um espaço métrico é discreto se, e somente se, todos os seus subconjuntos são abertos.

Exemplo 4 - O espaço métrico  $M$  é, evidentemente, aberto em  $M$ . Isto mostra como a propriedade " $X$  é aberto" é relativa, isto é, depende do espaço  $M$  em que se considera  $X$  imerso:  $X$  é sempre aberto no próprio espaço  $X$ . Para um exemplo menos trivial, observemos que

$X = [0,1)$  é um subconjunto aberto do espaço  $M = [0,1]$ : basta notar que cada intervalo do tipo  $[0,\epsilon)$ , com  $0 < \epsilon \leq 1$ , é uma bola aberta de centro 0 no espaço  $M = [0,1]$ . No entanto,  $[0,1)$  não é aberto na reta  $\mathbb{R}$ . Também o intervalo aberto  $(0,1)$  do eixo das abcissas em  $\mathbb{R}^2$  é aberto nesse eixo mas não é aberto em  $\mathbb{R}^2$ . Um conjunto que é aberto em qualquer espaço métrico que o conte nha é o conjunto vazio  $\emptyset$ . Com efeito, para provar que um conjunto  $X$  não é aberto, deve-se exibir um ponto  $x \in X$  que não seja interior a  $X$ . Isto é evidentemente impossível de fazer quando  $X = \emptyset$ . Logo  $\emptyset$  é aberto.

Exemplo 5 - Em todo espaço métrico  $M$ , o complementar de uma bola fechada  $B[a;r]$  é um conjunto aberto  $A = M - B[a;r]$ . Com efeito, seja  $c \in A$ , isto é,  $d(a,c) > r$ . Tomemos um número  $s > 0$  tal que  $r+s < d(a,c)$ . Pelo Corolário da Proposição 2, Capítulo 1, as bolas fechadas  $B[a;r]$  e  $B[c;s]$  são disjuntas. Com maior razão,  $B[a;r] \cap B(c;s) = \emptyset$ , ou seja,  $B(c;s) \subset M - B[a;r]$ . Logo todo ponto  $c \in A$  é interior. É mais fácil ainda ver que o complementar de um ponto  $a \in M$  é um conjunto aberto  $M - \{a\}$ : se  $b \neq a$  então a bola aberta  $B(b;r)$ , com  $r = d(a,b)$ , só contém pontos em  $M - \{a\}$ . De um modo geral, se  $F = \{a_1, \dots, a_n\}$  é qualquer subconjunto finito de  $M$ , seu complementar  $M - F$  é aberto em  $M$ , pois se

$b \in M-F$  então o número  $r = \min\{d(b, a_1), \dots, d(b, a_n)\}$  é positivo e a bola  $B(b; r)$  não contém nenhum dos pontos  $a_1, \dots, a_n$ , isto é,  $B(b; r) \subset M-F$ .

Exemplo 6 - Todo intervalo aberto limitado  $(a, b)$  é um subconjunto aberto da reta pois é a bola aberta de centro no seu ponto médio  $\frac{a+b}{2}$  e raio  $r = \frac{b-a}{2}$ . Mas as semi-retas abertas  $(-\infty, b)$  e  $(a, +\infty)$  também são subconjuntos abertos em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, se  $c \in (-\infty, b)$ , isto é,  $c < b$ , então, pondo  $r = b-c$ , vemos que  $(c-r, c+r)$  é uma bola aberta de centro  $c$ , contida em  $(-\infty, b)$ . De modo análogo se vê que  $(a, +\infty)$  é aberto.

Exemplo 7 - Uma bola fechada pode ser um conjunto aberto ou não, conforme o caso. Se  $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , com a métrica induzida da reta então a bola fechada de centro 0 e raio 1 em  $M$  coincide com a bola aberta de mesmo centro e mesmo raio, logo é um conjunto aberto em  $M$ . Mas se  $E$  é um espaço vetorial normado diferente de 0, uma bola fechada  $B[a; r]$  nunca é um subconjunto aberto de  $E$ . Com efeito, tomando  $x \neq 0$  em  $E$ , pondo  $u = \frac{x}{|x|}$  e  $b = a + r \cdot u$ , vemos que  $|b-a| = r$ . Logo  $b \in B[a; r]$ . Mas  $b$  não é interior a esta bola fechada pois, para todo  $s > 0$ , o ponto  $a + (r + \frac{s}{2}) \cdot u$  pertence à bola aberta de centro  $b$  e raio  $s$  mas está fora de

$B[a;r]$ . Assim, nenhuma bola aberta de centro  $b$  pode estar contida em  $B[a;r]$ . Isto mostra que todos os pontos  $b$  pertencentes à esfera  $S(a;r)$  estão na fronteira da bola  $B[a;r]$ . Segue-se então da Proposição 1 que  $\text{int.}B[a;r] = B(a;r)$ . Pelo Exemplo 5, nenhum ponto  $c \in E$  tal que  $|c-a| > r$  pertence à fronteira de  $B[a;r]$ . Logo  $\partial B[a;r] = S(a;r)$ , como era de se esperar.

Proposição 2 - Seja  $\mathfrak{U}$  a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico  $M$ . Então:

- (1)  $M \in \mathfrak{U}$  e  $\emptyset \in \mathfrak{U}$ . (O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.)
- (2) Se  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{U}$  então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{U}$ . (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)
- (3) Se  $A_\lambda \in \mathfrak{U}$  para todo  $\lambda \in L$  então  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{U}$ . (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

Demonstração: (1) já foi observado no Exemplo 4. Para provar (2), suponhamos que  $a \in A_1, \dots, a \in A_n$ . Como estes conjuntos são abertos, existem  $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$  tais que  $B(a;r_1) \subset A_1, \dots, B(a;r_n) \subset A_n$ . Seja  $r$  o menor dos números  $r_1, \dots, r_n$ . Então  $B(a;r) \subset$

$\subset B(a; r_1) \subset A_1, \dots, B(a; r) \subset B(a; r_n) \subset A_n$  e daí  $B(a; r) \subset \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$ . Logo  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  é aberto. Resta provar (3). Seja então  $a \in A$ . Existe um índice  $\lambda \in L$  tal que  $a \in A_\lambda$ . Como este conjunto é aberto, há uma bola  $B(a; r)$  contida em  $A_\lambda$ . Logo  $B(a; r) \subset A$ .

Corolário - Um subconjunto  $A \subset M$  é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

De fato, se  $A = \bigcup B_\lambda$  é uma reunião de bolas abertas, então  $A$  é aberto em  $M$ , em virtude da Proposição 1 e do item (3) da Proposição 2. Reciprocamente, se  $A$  é aberto então, para cada  $x \in A$ , podemos obter uma bola aberta  $B_x$  tal que  $x \in B_x \subset A$ , o que se escreve também como  $\{x\} \subset B_x \subset A$ . Tomando reuniões, vem  $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$ . Logo  $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ , o que mostra que todo aberto é reunião de bolas abertas.

Exprime-se o corolário acima dizendo que as bolas abertas formam uma "base de abertos" para o espaço métrico  $M$ .

Exemplo 8 - A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo, um ponto  $a \in M$  não é aberto em  $M$  a menos que seja isolado. Mas todo ponto  $a$  é interseção de uma família enumerável de abertos, a saber,  $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(a; \frac{1}{n})$ .

Com efeito, se  $x \neq a$  então  $d(x,a) > 0$ , logo existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x,a) > \frac{1}{n}$ . Assim sendo,  $x \notin B(a;\frac{1}{n})$ . Isto mostra apenas o ponto  $a$  pertence a todas as bolas abertas  $B(a;\frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Exemplo 9 - Abertos num subespaço. Seja  $X \subset M$ . Considere em  $X$  a métrica induzida por  $M$ , os conjuntos abertos no subespaço métrico  $X$  são as intersecções  $A \cap X$ , onde  $A$  é aberto em  $M$ . Isto decorre do fato, já observado, de que as bolas abertas em  $X$  têm a forma  $B^X(a;r) = B(a;r) \cap X$ , onde  $B(a;r)$  é uma bola em  $M$ . Ora, os subconjuntos abertos do espaço  $X$  são, pelo Corolário da Proposição 2, as reuniões de bolas abertas em  $X$ . Logo,  $A^* \subset X$  é aberto  $\Leftrightarrow A^* = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}^X = \bigcup_{\lambda} (B_{\lambda} \cap X) = = (\bigcup_{\lambda} B_{\lambda}) \cap X = A \cap X$ , onde  $A = \bigcup B_{\lambda}$  é aberto em  $M$ . Em particular, se  $X$  é aberto em  $M$ , os abertos do subespaço  $X$  são os subconjuntos abertos de  $M$  que estão contidos em  $X$ . Quando  $X$  não é aberto em  $M$  então, evidentemente, todo conjunto aberto em  $M$  e contido em  $X$  é também aberto em  $X$ , mas existem subconjuntos  $A^* \subset X$  que são abertos em  $X$  mas não em  $M$ . (O próprio  $X$  é um deles.) Por exemplo, se  $0 < \epsilon < b-a$ , o intervalo  $[a, a+\epsilon]$  é aberto no subespaço  $[a,b]$  da reta mas não é aberto em  $\mathbb{R}$ .

Exemplo 10 - O conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto em  $\mathbb{B}(M;N)$ . Mais precisamente, dado  $a \in M$ , seja  $D_a$  o conjunto das aplicações limitadas  $f: M \rightarrow N$  que são descontínuas no ponto  $a$ . Mostaremos que  $D_a$  é aberto. Para isto, tomemos  $f \in D_a$ . Existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $\delta > 0$  pode-se obter  $x_\delta \in M$  com  $d(x_\delta, a) < \delta$  e  $d(f(x_\delta), f(a)) \geq 3\cdot\epsilon$ . Afirmamos que se  $g \in \mathbb{B}(M, N)$  e  $d(g, f) < \epsilon$  então  $g \in D_a$ . Com efeito, nestas condições, para todo  $\delta > 0$  temos:

$$3\cdot\epsilon \leq d(f(x_\delta), f(a)) \leq d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), g(a)) + d(g(a), f(a)).$$

Ora, na soma à direita, a primeira e a terceira parcelas são  $< \epsilon$  e a soma das três é  $\geq 3\cdot\epsilon$ . Logo, a segunda parcela é  $\geq \epsilon$ . Logo  $g \in D_a$ . Seja agora  $D$  o conjunto de todas as aplicações limitadas descontínuas  $f: M \rightarrow N$ . Temos  $D = \bigcup_{a \in M} D_a$ . Logo  $D$  é aberto em  $\mathbb{B}(M;N)$ . De modo análogo se mostra que, dada  $f: M \rightarrow N$ , o conjunto das aplicações  $g: M \rightarrow N$  que estão a uma distância finita de  $f$  e são descontínuas é aberto no espaço métrico  $\mathbb{B}_f(M;N)$ .

Num espaço métrico, diz-se que o conjunto  $V$  é uma vizinhança do ponto  $a$  quando  $a \in \text{int.}V$ . Assim,  $V$  é uma vizinhança de  $a$  se, e somente se,  $V$  contém um a-

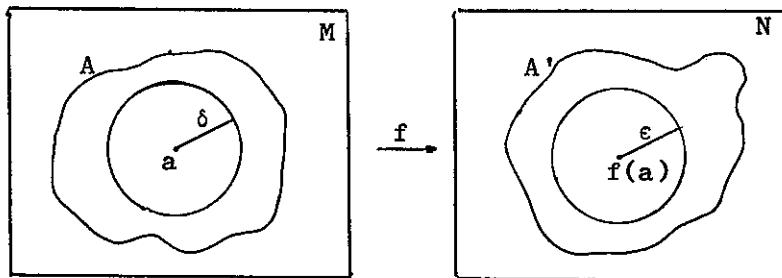
berto que contém a. A interseção de um número finito de vizinhanças de a é ainda uma vizinhança de a. Se V é uma vizinhança de a e  $W \supset V$  então W é uma vizinhança de a. Um conjunto é aberto se, e somente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos. A fim de que  $f: M \rightarrow N$  seja contínua no ponto  $a \in M$  é necessário e suficiente que, para cada vizinhança V de  $f(a)$  em N exista uma vizinhança U de a em M tal que  $f(U) = V$ .

## §2. Relações entre conjuntos abertos e continuidade.

A importância da noção de conjunto aberto na Topologia dos Espaços Métricos se deve principalmente ao resultado seguinte.

Proposição 3 - Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa  $f^{-1}(A')$  de todo subconjunto aberto  $A' \subset N$  seja um subconjunto aberto de M.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que f seja contínua, tomemos  $A' \subset N$  aberto e mostremos que  $f^{-1}(A')$  é aberto em M. De fato, para cada  $a \in f^{-1}(A')$ ,



temos  $f(a) \in A'$ . Pela definição de conjunto aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(f(a); \epsilon) \subset A'$ . Sendo  $f$  contínua no ponto  $a$ , ao  $\epsilon$  corresponde um  $\delta > 0$  tal que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a); \epsilon) \subset A'$ . Isto quer dizer que  $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A')$ . Logo  $f^{-1}(A')$  é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa por  $f$  de cada aberto em  $N$  seja um aberto em  $M$ . Seja  $a \in M$ . Mostraremos que  $f$  é contínua no ponto  $a$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , a bola  $A' = B(f(a); \epsilon)$  é um aberto em  $N$ , contendo  $f(a)$ . Logo sua imagem inversa  $A = f^{-1}(A')$  é um aberto em  $M$ , contendo  $a$ . Assim existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a; \delta) \subset A$ , ou seja,  $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$ .

Corolário da demonstração: A fim de que  $f: M \rightarrow N$  seja contínua no ponto  $a \in M$ , é necessário e suficiente que, para cada aberto  $A' \subset N$  com  $f(a) \in A'$ , exista um aberto  $A \subset M$ , com  $a \in A$ , tal que  $f(A) \subset A'$ .

Corolário 1 - O produto cartesiano  $A_1 \times \dots \times A_n$  de con-

juntos abertos  $A_i \subset M_i$  é um subconjunto aberto de  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ .

Com efeito, para cada  $i = 1, \dots, n$ , a projeção  $p_i: M \rightarrow M_i$  é contínua, logo  $p_i^{-1}(A_i)$  é aberto em  $M$ . Ora,  $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n)$ , e a interseção de um número finito de abertos é um aberto.

Corolário 2 - Sejam  $f_1, \dots, f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$  funções reais contínuas. O conjunto  $A$ , formado pelos pontos  $x \in M$  tais que

$$f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$$

é aberto em  $M$ . Ou seja: se as funções  $f_1, \dots, f_n$  são todas positivas num ponto  $a \in M$  então existe uma bola aberta  $B(a; r)$  tal que  $f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$  para todo  $x \in B(a; r)$ .

Isto pode ser provado diretamente, a partir das definições, ou então do seguinte modo: seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Então  $f$  é contínua e  $A = f^{-1}(A')$ , onde  $A' \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto dos pontos cujas coordenadas são todas positivas. Ora,  $A' = (0, +\infty) \times \dots \times (0, +\infty)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , como produto cartesiano de abertos. Logo sua imagem inversa  $A$  é um aberto em  $M$ .

Corolário 3 - Sejam  $f, g: M \rightarrow N$  contínuas. O conjunto  $A = \{x \in M; f(x) \neq g(x)\}$  é aberto em  $M$ .

Com efeito, a função  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = d(f(x), g(x))$ , é contínua. Como  $A = \{x \in M; \varphi(x) > 0\}$ , o Corolário 2 garante que  $A$  é aberto em  $M$ .

Exemplo 11 - Podemos ver de outro modo que uma bola aberta  $B(a; r)$  é um conjunto aberto. Basta notar que  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = r - d(a, x)$ , é contínua e que  $B(a; r)$  é o conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que  $f(x) > 0$ . De modo análogo, podemos ver que  $A = M - B[a; r]$  é aberto, pois  $A$  é o conjunto dos pontos de  $M$  nos quais a função  $g(x) = d(a, x) - r$  é positiva.

Exemplo 12 - A imagem direta  $f(A)$  de um conjunto aberto  $A \subset M$  por uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  pode não ser um conjunto aberto em  $N$ . Por exemplo, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = x^2$ , então, para  $A = (-a, a)$  temos  $f(A) = [0, a^2)$ , que não é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$ .

Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  chama-se aberta quando para cada  $A \subset M$  aberto, sua imagem  $f(A)$  é um subconjunto aberto de  $N$ . Em suma: quando  $f$  transforma abertos em abertos.

Exemplo 13 - Vimos acima que uma aplicação contínua não precisa ser aberta. Tampouco uma aplicação aberta precisa ser contínua. De fato, segue-se da Proposição 3 que uma bijeção  $f: M \rightarrow N$  é contínua se, e somente se, sua inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  é aberta. Tomemos agora  $f: M \rightarrow N$ , uma bijeção contínua que não seja um homeomorfismo. (Vide Exemplos 9 e 10 do Capítulo 2.) Então sua inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  não é contínua mas é aberta. Ou ainda: seja  $N$  um espaço métrico discreto. Toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  é aberta (já que todo subconjunto de  $N$  é aberto). Mas nem toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  é contínua.

Proposição 4 - Sejam  $M, N$  espaços métricos. A fim de que uma bijeção  $h: M \rightarrow N$  seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que  $h$  induza uma bijeção entre os abertos de  $M$  e os abertos de  $N$ , isto é, para cada  $X \subset M$ ,  $h(X)$  é aberto em  $N$  se, e somente se,  $X$  for aberto em  $M$ .

Demonstração: Basta observar que  $h$  é contínua se, e somente se,  $h^{-1}$  for aberta.

Corolário - Sejam  $d_1$  e  $d_2$  métricas no mesmo conjunto  $M$ . A fim de que  $d_1$  e  $d_2$  sejam equivalentes, é necessário e suficiente que os espaços métricos  $(M, d_1)$  e  $(M, d_2)$  possuam os mesmos conjuntos abertos.

Assim, por exemplo, ao considerarmos os subconjuntos abertos do produto cartesiano, é indiferente qual métrica estamos usando, dentre as três que foram definidas no Exemplo 8 do Capítulo 1, pois essas métricas são equivalentes.

Proposição 5 - Um subconjunto  $A \subset M \times N$  é aberto se, e somente se, é reunião de "retângulos"  $U \times V$ , onde  $U \subset M$  e  $V \subset N$  são abertos.

Demonstração: Se  $A = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \times V_{\lambda}$  onde, para cada  $\lambda$ ,  $U_{\lambda} \subset M$  e  $V_{\lambda} \subset N$  são abertos, então  $A$  é uma reunião de abertos (v. Corolário 1 da Proposição 3) e portanto é aberto. Reciprocamente, se  $A \subset M \times N$  é aberto, tomemos em  $M \times N$  a métrica  $\delta[(x,y), (x',y')] = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ , segundo a qual cada bola aberta é o produto de uma bola aberta em  $M$  por uma bola aberta em  $N$ . Então, para cada ponto  $z \in A$  existem bolas abertas  $U_z \subset M$  e  $V_z \subset N$  tais que  $z \in U_z \times V_z \subset A$ , ou seja  $\{z\} \subset U_z \times V_z \subset A$ . Tomando reuniões, vem:  $A = \bigcup_{z \in A} \{z\} \subset \bigcup_{z \in A} U_z \times V_z \subset A$ , e portanto  $A = \bigcup_z U_z \times V_z$ , como queríamos demonstrar.

Corolário - As projeções  $p_1: M \times N \rightarrow M$  e  $p_2: M \times N \rightarrow N$  são aplicações abertas.

Com efeito, se  $A \subset M \times N$  é aberto, então  $A =$

$= \bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \times V_{\lambda}$  com  $U_{\lambda} \subset M$  e  $V_{\lambda} \subset N$  abertos. Segue-se que  $p_1(A) = \bigcup_{\lambda} p_1(U_{\lambda} \times V_{\lambda}) = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$  é aberto em  $M$ . De maneira análoga se mostra que  $p_2: M \times N \rightarrow N$  é aberta.

Observação: Tanto a Proposição 5 como seu Corolário valem, evidentemente, para produtos cartesianos  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  com um número finito qualquer de fatores.

### §3. Espaços topológicos.

As considerações acima mostram que, até um certo ponto, o valor da distância entre dois pontos de um espaço métrico é irrelevante para efeito de estudar funções contínuas. O que realmente interessa é a coleção de abertos que a métrica determina. Isto conduz à seguinte definição.

Uma topologia num conjunto  $X$  é uma coleção  $\mathcal{T}$  de partes de  $X$ , chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:

- 1)  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{T}$ ;
- 2) Se  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$  então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{T}$ ;
- 3) Dada uma família arbitrária  $(A_{\lambda})_{\lambda \in L}$  com  $A_{\lambda} \in \mathcal{T}$  para cada  $\lambda \in L$ , tem-se  $\bigcup_{\lambda \in L} A_{\lambda} \in \mathcal{T}$ .

Um espaço topológico é um par  $(X, \tau)$  onde  $X$  é um conjunto e  $\tau$  é uma topologia em  $X$ . É comum fazer-se referência ao "espaço topológico  $X$ ", deixando subentendida a topologia  $\tau$ . Todo espaço métrico  $M$  pode ser considerado, de modo natural como um espaço topológico, no qual a coleção  $\tau$  é formada pelos subconjuntos abertos de  $M$ , no sentido do §1 acima. Uma topologia  $\tau$  em  $X$  se diz metrizável quando existe uma métrica em  $X$  em relação à qual os abertos são os elementos de  $\tau$ . Duas métricas  $d_1$  e  $d_2$  sobre um conjunto  $M$  são equivalentes se, e somente se, elas determinam a mesma topologia em  $M$ .

Um espaço topológico  $X$  chama-se um espaço de Hausdorff quando, para cada par de pontos distintos  $x, y$  em  $X$ , existem abertos  $U, V$  tais que  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

A Proposição 2 do Capítulo 1 mostra que todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff.

Entre as topologias que se podem considerar num conjunto  $X$ , há duas que representam extremos opostos. Uma é a topologia discreta, onde se tomam todas as partes de  $X$  como conjuntos abertos. Nenhuma topologia sobre  $X$  pode, evidentemente, possuir mais abertos do que esta. O outro extremo é a topologia caótica, onde apenas  $\emptyset$  e  $X$  são tomados como abertos. Se  $X$  tem mais de um elemen-

to, a topologia caótica não é de Hausdorff. Outro exemplo de espaço topológico que não é de Hausdorff é obtido quando se toma um conjunto infinito  $X$  e de consideram abertos em  $X$  o conjunto vazio e os complementares das partes finitas. Então, se  $A$  e  $B$  são abertos não vazios em  $X$ , temos  $X - (A \cap B) = (X-A) \cup (X-B) \neq X$  pois  $X$ , sendo infinito, não é reunião de dois subconjuntos finitos. Segue-se que  $A \cap B \neq \emptyset$ , isto é, dois subconjuntos abertos não-vazios nunca são disjuntos. Isto contraria fortemente o axioma de Hausdorff.

Os exemplos acima são admitidamente artificiais. Eles ilustram a enorme variedade de situações patológicas a que pode conduzir a liberalidade dos axiomas de espaço topológico. Por isso nos restrinjimos ao caso de espaços metrizáveis. Em estudos mais aprofundados, há necessidade de considerar topologias que não provêm de métricas mas, num estágio introdutório, espaços métricos são suficientes. Eles têm a vantagem de darem lugar a muito menos patologias.

Entre espaços topológicos, uma aplicação  $f:X \rightarrow Y$  se diz contínua quando, para cada  $A' \subset Y$  aberto, sua imagem inversa  $f^{-1}(A')$  é um aberto em  $X$ . Um homeomorfismo é uma bijeção contínua  $h: X \rightarrow Y$  cuja inversa também é contínua.

§4. Conjuntos fechados.

Um ponto  $a$  diz-se aderente a um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  quando  $d(a, X) = 0$ . Isto significa que existem pontos de  $X$  arbitrariamente próximos de  $a$ , ou seja, para cada  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $x \in X$  tal que  $d(a, x) < \epsilon$ .

Outras maneiras equivalentes de dizer que  $a$  é aderente a  $X$  são:

- 1) para todo  $\epsilon > 0$ , tem-se  $B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ ;
- 2) para todo aberto  $A$  contendo  $a$ , tem-se  $A \cap X \neq \emptyset$ ;
- 3) toda vizinhança de  $a$  tem pontos em comum com  $X$ .

Exemplo 14 - Todo ponto  $a \in X$  é aderente a  $X$ . Além disso, os pontos da fronteira  $\partial X$  também são aderentes a  $X$ . Por exemplo, se  $X = [0, 1)$  na reta  $\mathbb{R}$ , então 1 é aderente a  $X$ .

O fecho (ou aderência) de um conjunto  $X$  num espaço métrico  $M$  é o conjunto  $\bar{X}$  dos pontos de  $M$  que são aderentes a  $X$ . Portanto, escrever  $a \in \bar{X}$  é o mesmo que afirmar que o ponto  $a$  é aderente a  $X$  em  $M$ .

Tem-se  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ,  $\bar{M} = M$  e  $X \subset \bar{X}$  para todo  $X \subset M$ . É também claro que  $X \subset Y \Rightarrow \bar{X} \subset \bar{Y}$ .

Exemplo 15 - Como  $a \in \bar{X} \Leftrightarrow d(a, X) = 0$ , segue-se do Exemplo 24, Capítulo 1, que, num espaço vetorial normado  $E$ , o fecho da bola aberta  $B(a; r)$  é a bola fechada  $B[a; r]$ . Isto não é verdade, porém em todo espaço métrico  $M$ . Pode-se garantir sempre que  $\overline{B(a; r)} \subset B[a; r]$ , porque se  $d(c, a) > r$  então, pondo  $s = d(c, a) - r$ , sabemos que  $d(x, c) > s$  para todo  $x \in B(a; r)$ , e portanto  $c$  não é aderente a  $B(a; r)$ . (Vide Exemplo 5, acima.) Mas se tomarmos  $M = [0, 1] \cup \{2\}$ , temos  $\overline{B(0; 2)} = [0, 1]$ ,  $B(0; 2) = [0, 1]$  e  $B[0; 2] = M$ .

Para que a não seja aderente a  $X$  é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro  $a$ , na qual não há pontos de  $X$ . Ou seja  $a \notin \bar{X} \Leftrightarrow a \in \text{int}(M-X)$ . Podemos então escrever:  $M-\bar{X} = \text{int}(M-X)$ , ou  $\bar{X} = \text{int.}(X)$ . Lembrando a decomposição  $M = (\text{int.}X) \cup \partial X \cup \text{int}(M-X)$ , reunião disjunta, concluimos que  $\bar{X} = (\text{int.}X) \cup \partial X$  (reunião disjunta).

Um subconjunto  $X \subset M$  diz-se denso em  $M$  quando  $\bar{X} = M$ , ou seja, quando toda bola aberta em  $M$  contém algum ponto de  $X$ , ou ainda, para cada aberto não vazio  $A$  em  $M$ , tem-se  $A \cap X \neq \emptyset$ .

Exemplo 16 - O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ . Também o conjunto  $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ , dos números

irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

Se  $X \subset M$  e  $Y \subset N$  são subconjuntos densos, então  $XXY$  é denso no produto cartesiano  $M \times N$ . Com efeito, todo aberto não-vazio  $A \subset M \times N$  contém um aberto da forma  $U \times V$ , onde  $U \subset M$  e  $V \subset N$  são abertos não-vazios. (Cfr. Proposição 5.) Sendo  $X$  denso em  $M$  e  $Y$  denso em  $N$ , existem pontos  $x \in U \cap X$  e  $y \in V \cap Y$ . Então o ponto  $z = (x, y)$  pertence a  $(U \times V) \cap (XXY)$  e portanto  $z \in A \cap (XXY)$ . Isto prova que  $XXY$  é denso em  $M \times N$ . O mesmo argumento vale para um produto de  $n$  fatores. Em particular, o conjunto  $\mathbb{Q}^n$  dos vetores  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cujas coordenadas são números racionais é denso no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Também é denso em  $\mathbb{R}^n$  o conjunto dos vetores cujas coordenadas são todas irracionais.

Proposição 6 - Para todo ponto  $a$  e todo subconjunto não-vazio  $X$  num espaço métrico  $M$ , tem-se  $d(a, X) = d(a, \bar{X})$ .

Demonstração: Como  $X \subset \bar{X}$ , temos  $d(a, \bar{X}) \leq d(a, X)$ . Para provar que não vale o sinal  $<$ , mostraremos que  $d(a, \bar{X}) < m \Rightarrow d(a, X) < m$ . Com efeito, se  $d(a, \bar{X}) < m$ , então existe  $\bar{x} \in \bar{X}$  tal que  $d(a, \bar{x}) < m$ . Sendo  $\bar{x}$  aderente a  $X$ , existe  $x \in X$  tal que  $d(x, \bar{x}) <$

$< m - d(a, \bar{x})$ . Então a desigualdade do triângulo nos dá:

$$d(a, x) \leq d(a, \bar{x}) \leq d(a, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < d(a, \bar{x}) + m - d(a, \bar{x}) = m,$$

como queríamos demonstrar.

Corolário - Para todo subconjunto  $X \subset M$ , tem-se  $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$ .

Com efeito  $a \in \bar{X} \Rightarrow d(a, \bar{X}) = 0 \Rightarrow d(a, X) = 0 \Rightarrow a \in \bar{X}$ .

Diz-se que um conjunto  $F \subset M$  é fechado no espaço métrico  $M$  quando seu complementar  $M-F$  é aberto em  $M$ . A proposição seguinte relaciona este conceito com o de aderência.

Proposição 7 - Dado  $F \subset M$ , tem-se  $\bar{F} = F$  se, e somente se,  $M-F$  é aberto. Em outras palavras: um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.

Demonstração: Temos:

$\bar{F} = F \Leftrightarrow$  os pontos que não pertencem a  $F$  não são aderentes a  $F$ ;

$\Leftrightarrow$  para todo  $a \in M-F$ , existe uma bola aberta  $B(a; r)$  que não contém pontos de  $F$ ;

$\Leftrightarrow$  para todo  $a \in M-F$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(a; r) \subset M-F$ ;

$\Leftrightarrow M-F$  é aberto.

Corolário - Para todo  $X \subset M$ , seu fecho  $\bar{X}$  é um conjunto fechado.

$\bar{X}$  é menor subconjunto fechado de  $M$  que contém  $X$ , no seguinte sentido: se  $F$  é fechado e  $X \subset F$  então  $\bar{X} \subset F$ . De fato,  $X \subset F$  implica  $\bar{X} \subset \bar{F}$ , ou seja,  $\bar{X} \subset F$ .

Negar que um subconjunto  $X \subset M$  seja fechado significa admitir a existência de algum ponto  $a \notin X$  que seja aderente a  $X$ . Ou seja,  $a \notin X$  mas para cada  $\epsilon > 0$  tem-se  $B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ . Um tal ponto pertence à fronteira de  $X$ . Logo,  $X$  é fechado se, e somente se  $X \supset \partial X$ .

Exemplo 17 - "Fechado" não é o contrário de "aberto".

Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir daí que ele seja aberto. Por exemplo, o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais não é fechado nem aberto em  $\mathbb{R}$ . Há mesmo casos de conjuntos que são ao mesmo tempo fechados e abertos: o vazio e o espaço inteiro são exemplos óbvios disto. Outro exemplo é o seguinte. No espaço  $M = \mathbb{R} - \{0\}$ , com a métrica induzida da reta, cada um dos conjuntos  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$  é aberto. Como cada um deles é o complementar do outro (em  $M$ !), segue-se que eles são também fechados. Num espaço discreto, todo subconjunto é aberto e (como seu complementar é aberto) fechado. No es-

paço  $\mathbb{Q}$  (números racionais, com a métrica  $|x-y|$ , induzi da de  $\mathbb{R}$ ), o intervalo aberto  $(\sqrt{2}, \pi) = \{x \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} < x < \pi\}$ , além de ser um subconjunto aberto, é também fechado, pois seu complementar (em  $\mathbb{Q}$ ) é o conjunto aberto  $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\pi, +\infty)$ .

Exemplo 18 - Num espaço métrico  $M$ , toda bola fechada

$B[a;r]$  é um subconjunto fechado de  $M$ , pois seu complementar é aberto. (Vide Exemplos 5 e 11.)

Exemplo 19 - A fronteira  $\partial X$  de qualquer conjunto  $X \subset M$  é um subconjunto fechado de  $M$ . Basta obser var que o complementar de  $\partial X$  é o aberto  $(\text{int. } X) \cup U \text{ int.}(M-X)$ .

Exemplo 20 - Todo subconjunto finito  $F = \{a_1, \dots, a_n\} \subset M$  é fechado em  $M$ . Com efeito, se  $a \notin F$  então  $d(a,F)$  é o menor dos números  $d(a,a_1), \dots, d(a,a_n)$  e portanto  $d(a,F) > 0$ . Em particular todo ponto  $a \in M$  é um subconjunto fechado de  $M$ .

Proposição 8 - Os subconjuntos fechados de um espaço métrico  $M$  gozam das seguintes propriedades:

- 1) o conjunto vazio  $\emptyset$  e o espaço inteiro  $M$  são fechados;
- 2) a reunião  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$  de um número finito de subconjuntos fechados  $F_1, \dots, F_n \subset M$  é um subcon-

junto fechado de M;

- 3) a intersecção  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  de uma família qualquer  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  (finita ou infinita) de subconjuntos fechados  $F_\lambda \subset M$  é um subconjunto fechado de M.

Demonstração: Usaremos a Proposição 2 e passagem aos complementares. 1) é evidente. Quanto a 2), os conjuntos  $A_1 = [F_1, \dots, A_n = [F_n]$  são abertos em M. Logo  $A_1 \cap \dots \cap A_n = [F_1 \cap \dots \cap F_n = [(F_1 \cup \dots \cup F_n)]$  é aberto e portanto  $F_1 \cup \dots \cup F_n$  é fechado em M. Para provar 3), ponhamos  $A_\lambda = [F_\lambda]$  para cada  $\lambda \in L$ . Então cada  $A_\lambda$  é aberto e portanto sua reunião  $\bigcup A_\lambda = \bigcup [F_\lambda] = [(\bigcap F_\lambda)]$  é um aberto em M. Segue-se que  $\bigcap F_\lambda$  é fechado.

Proposição 9 - Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa  $f^{-1}(F')$  de todo subconjunto fechado  $F' \subset N$  seja um subconjunto fechado de X.

Demonstração: Isto resulta da Proposição 3, por passagem ao complementar. Seja  $f: M \rightarrow N$  contínua. Dado  $F' \subset N$  fechado,  $[F']$  é aberto, donde  $f^{-1}([F']) = [f^{-1}(F')]$  é aberto, isto é,  $f^{-1}(F')$  é fechado. Reciprocamente, se a imagem inversa de todo fechado em N é um fechado em M então, dado  $A' \subset N$  aberto,  $f^{-1}([A']) =$

=  $[f^{-1}(A^*)]$  é fechado em  $M$ , donde  $f^{-1}(A^*)$  é aberto e, pela Proposição 3,  $f$  é contínua.

Corolário 1 - Seja  $f: M \rightarrow N$  uma bijeção. A fim de que  $f$  seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que  $f$  induza uma bijeção entre os subconjuntos fechados de  $M$  e os de  $N$ , isto é: para cada  $X \subset M$ , sua imagem  $f(X)$  é fechada em  $N$  se, e somente se,  $X$  é fechado em  $M$ .

Corolário 2 - Se  $F_1 \subset M_1, \dots, F_n \subset M_n$  são subconjuntos fechados, então  $F_1 \times \dots \times F_n$  é fechado em  $M_1 \times \dots \times M_n = M$ .

Com efeito, as projeções  $p_1: M \rightarrow M_1, \dots, p_n: M \rightarrow M_n$  são contínuas. Logo  $F_1 \times \dots \times F_n = p_1^{-1}(F_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(F_n)$  é fechado em  $M$ , em virtude da Proposição 9 e do item 3) da Proposição 8.

Corolário 3 - Seja  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família (finita ou não) de funções contínuas  $f_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas no espaço métrico  $M$ . O conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que  $f_\lambda(x) \geq 0$  para todo  $\lambda \in L$  é fechado em  $M$ .

Com efeito, esse conjunto é a interseção das imagens inversas  $f_\lambda^{-1}([0, +\infty))$ , as quais são conjuntos fechados pois a semi-reta  $[0, +\infty)$  é um subconjunto fechado de

$\mathbb{R}$ .

Corolário 4 - O gráfico de uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  é um subconjunto fechado de  $M \times N$ . Em particular, a diagonal  $\Delta = \{(x, y) \in M \times N; x = y\}$  é um subconjunto fechado de  $M \times M$ .

Sabemos que  $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\}$ . A função  $\varphi: M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x, y) = d(f(x), y)$  é evidentemente contínua e  $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; \varphi(x, y) = 0\}$ . Logo  $G(f)$  é fechado em  $M \times N$ . A diagonal  $\Delta \subset M \times M$  é o gráfico da aplicação identidade  $M \rightarrow M$ , logo é um subconjunto fechado de  $M \times M$ .

Exemplo 21 - A projeção de um conjunto fechado  $F \subset M_1 \times \dots \times M_n$  num dos fatores pode não ser um conjunto fechado. Por exemplo, seja  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 1\}$ . Então  $F = m^{-1}(1)$ , onde  $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a multiplicação de números reais. Como  $m$  é contínua e  $\{1\} \subset \mathbb{R}$  é fechado, segue-se que  $F$  é um subconjunto fechado do plano (uma hipérbole). Mas sua projeção  $p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  não é um subconjunto fechado da reta.

Exemplo 22 - A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Com efeito, todo conjunto é reunião de seus pontos, que são conjuntos fechados.

Exemplo 23 - Em todo espaço métrico  $M$ , a esfera  $S(a; r) = \{x \in M; d(a, x) = r\}$  é um subconjunto fechado, como imagem inversa do fechado  $\{r\} \subset \mathbb{R}$  pela função contínua  $d_a: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_a(x) = d(a, x)$ . O conjunto dos pontos em que uma função real contínua assume um certo valor constante é o que se chama uma "superfície de nível" da função. É um subconjunto fechado do domínio da função.

Exemplo 24 - O conjunto  $C_0(M; N)$  das aplicações contínuas limitadas  $f: M \rightarrow N$  é um subconjunto fechado do espaço  $B(M; N)$ , formado por todas as aplicações limitadas de  $M$  em  $N$ . Mais geralmente, dada qualquer  $f: M \rightarrow N$ , o conjunto  $C_f(M; N)$  das funções contínuas de  $M$  em  $N$  que estão a uma distância finita de  $f$  é um subconjunto fechado do espaço  $B_f(M; N)$ . (Vide Exemplo 10.) Se fixamos um ponto  $a \in M$ , também é fechado em  $B_f(M; N)$  o conjunto  $F_a$  formado pelas aplicações  $g: M \rightarrow N$  que estão a uma distância finita de  $f$  e são contínuas no ponto  $a$ .

As noções de fecho e conjunto fechado, como as de mais introduzidas neste capítulo, são relativas, isto é, dizem respeito a um espaço ambiente. Assim, por exemplo, se  $M = [0, 1)$  e  $X = (\frac{1}{2}, 1)$  então o fecho de  $X$  em  $M$  é  $[\frac{1}{2}, 1)$  enquanto o fecho de  $X$  em  $\mathbb{R}$  é  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Poris

so mesmo,  $[\frac{1}{2}, 1)$  é um subconjunto fechado de  $M$  mas não é fechado na reta.

A relação entre o fecho num subespaço e o fecho no espaço todo é esclarecida pela

Proposição 10 - Seja  $S$  um subespaço do espaço métrico  $M$ .  
Dado um subconjunto  $X \subset S$ , indiquemos  
com  $\tilde{X}$  o fecho de  $X$  em  $S$  e com  $\bar{X}$  o fecho de  $X$  em  
 $M$ . Então  $\tilde{X} = \bar{X} \cap S$ .

Demonstração: Se  $a \in S$ , então a distância  $d(a, X) = \inf\{d(a, x); x \in X\}$  é a mesma, quer consideremos  $X$  como subconjunto de  $S$ , quer de  $M$ . Então  $\tilde{X} = \{a \in S; d(a, X) = 0\} = \{a \in M; d(a, X) = 0\} \cap S = \bar{X} \cap S$ .

Corolário 1 - Se  $S$  é fechado em  $M$ , então, para todo  $X \subset S$ , tem-se  $\tilde{X} = \bar{X}$ .

Com efeito,  $X \subset S \Rightarrow \bar{X} \subset S$  (pois  $\bar{S} = S$ )  $\Rightarrow \bar{X} = \tilde{X} \cap S = \tilde{X}$ .

Corolário 2 - Os subconjuntos fechados do subespaço  $S$  são as interseções  $F \cap S$ , dos fechados  $F \subset M$  com o subespaço  $S$ .

Com efeito, dado  $X \subset S$ , tem-se  $\tilde{X} = X \Leftrightarrow X = \tilde{X} \cap S \Leftrightarrow X = F \cap S$ , com  $F = \bar{X}$ .

Em particular, quando  $S$  é fechado em  $M$ , um conjunto  $X \subset S$  é fechado em  $S$  se, e somente se, é fechado em  $M$ .

Proposição 11 - Seja  $M = F_1 \cup F_2$  onde  $F_1$  e  $F_2$  são fechados em  $M$ . Se  $f: M \rightarrow N$  é tal que suas restrições  $f_1 = f|_{F_1}$  e  $f_2 = f|_{F_2}$  são contínuas, então  $f$  é contínua.

Demonstração: Dado  $H \subset N$  fechado, temos  $f^{-1}(H) = f_1^{-1}(H) \cup f_2^{-1}(H)$ . Pela Proposição 9,  $f_1^{-1}(H)$  é fechado em  $F_1$ , e portanto fechado em  $M$ . Analogamente,  $f_2^{-1}(H)$  é fechado em  $M$ . Logo  $f^{-1}(H)$  é fechado em  $M$  e portanto  $f$  é contínua, ainda em virtude da Proposição 9.

Corolário - Sejam  $f: [a,b] \rightarrow N$  e  $g: [b,c] \rightarrow N$  contínuas, com  $f(b) = g(b)$ . Então  $h: [a,c] \rightarrow N$ , definida por  $h(t) = f(t)$  se  $a \leq t \leq b$  e  $h(t) = g(t)$  se  $b \leq t \leq c$ , é uma aplicação contínua.

Observação: A Proposição 11 seria ainda válida se tomássemos  $F_1$  e  $F_2$  abertos. (Vide Exercício adiante.) Mas seria falsa se nada admitíssemos sobre  $F_1$  e  $F_2$ . Por exemplo,  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(t) = 0$  se  $t \in [0,1]$  e  $f(t) = 1$  se  $t \in (1,2]$  é descon-

tínua embora  $f|_{[0,1]}$  e  $f|(1,2]$  sejam contínuas.

Seja  $X$  um subconjunto do espaço métrico  $M$ . Um ponto  $a \in M$  chama-se ponto de acumulação de  $X$  quando toda bola de centro  $a$  contém algum ponto de  $X$ , diferente do ponto  $a$ . Indicaremos com a notação  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação de  $X$  em  $M$ . O conjunto  $X'$  chama-se derivado do conjunto  $X$ .

Assim  $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$ .

Se toda bola de centro  $a$  contém uma infinidade de pontos de  $X$  então, evidentemente, algum deles é diferente de  $a$ . Então  $a \in X'$ . Reciprocamente, se  $a \in X'$  então toda bola de centro  $a$  contém uma infinidade de pontos de  $X$ . Com efeito, dada  $B(a;r)$ , existe  $x_1 \neq a$  tal que  $x_1 \in X \cap B(a;r)$ . Seja  $r_1 = d(a,x_1)$ . Existe  $x_2 \neq a$  tal que  $x_2 \in X \cap B(a,r_1)$ . Ponhamos  $r_2 = d(a,x_2)$ . Temos  $0 < r_2 < r_1$ . Existe  $x_3 \neq a$ ,  $x_3 \in X \cap B(a;r_2)$ . Pondo  $r_3 = d(a,x_3)$ , temos  $0 < r_3 < r_2 < r_1$ . Isto mostra que  $x_1, x_2, x_3$  são pontos diferentes uns dos outros. Prosseguindo analogamente, obtemos uma infinidade de pontos  $x_1, x_2, \dots$  pertencentes a  $X$  e contidos na bola initial  $B(a;r)$ .

Para todo subconjunto finito  $F \subset M$ , tem-se  $F' = \emptyset$ .

Exemplo 25 - Na reta  $\mathbb{R}$ , tomemos  $X = \mathbb{Q}$ ,  $Y = \mathbb{Z}$ ,  $U = [0,1]$ ,

$$V = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}, \quad W = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Então  $X^* = \mathbb{R}$ ,  $Y^* = \emptyset$ ,  $U^* = U$ ,  $V^* = \{0\}$  e  $W^* = \{e\}$ .

Temos  $X^* \supset X$ ,  $Y^* \subset Y$ ,  $U^* = U$ ,  $V^* \subset V$  e  $W^* \not\subset W \not\subset W^*$ .

Dado  $X \subset M$ , tem-se  $\bar{X} = X \cup X^*$  (reunião não necessariamente disjunta). Com efeito, se  $a \in \bar{X}$ , ou  $a \in X$  ou  $a \notin X$  e então toda bola de centro  $a$  contém um ponto  $x \in X$ , o qual é necessariamente  $\neq a$ , e portanto  $a \in X^*$ .

## CAPÍTULO 4

### CONJUNTOS CONEXOS

#### §1. Definição e exemplos.

Uma cisão de um espaço métrico  $M$  é uma decomposição  $M = A \cup B$ , de  $M$  como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos  $A$  e  $B$ . As condições  $M = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$  equivalem a dizer que  $A = M-B$  e  $B = M-A$ . Por conseguinte, numa cisão  $M = A \cup B$ , os conjuntos  $A, B$  são abertos e fechados em  $M$ .

Exemplo 1 -  $\mathbb{R}-\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  é uma cisão do espaço métrico  $\mathbb{R}-\{0\}$ . Se  $M$  é discreto, todo subconjunto  $A \subset M$  determina uma cisão  $M = A \cup (M-A)$ . Dado um número racional  $\alpha$ , sejam  $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$ . Então  $\mathbb{Q} = A \cup B$  é uma cisão do conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais.

Exemplo 2 - Se escrevermos as linhas de uma matriz real  $n \times n$  uma após a outra, cada matriz se tornará uma lista de  $n^2$  números reais. Assim fazendo, estaremos identificando o conjunto das matrizes reais  $n \times n$  com o

espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n^2}$ . A função determinante,  $\det: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. (Exemplos 26 e 27 do Capítulo 2.) O conjunto  $G_n = G(\mathbb{R}^n)$ , formado pelas matrizes reais  $n \times n$  que possuem determinante  $\neq 0$  é, portanto, um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , chamado o grupo linear total. Como se sabe,  $G_n$  é o conjunto das matrizes reais invertíveis  $n \times n$ . O subespaço métrico  $G_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$  admite a ci-  
são  $G_n = G_n^+ \cup G_n^-$ , onde  $G_n^+$  (respect.  $G_n^-$ ) é o conjunto das matrizes reais  $n \times n$  com determinante  $>0$  (respect.  $<0$ ).

A cisão  $M = A \cup B$  diz-se trivial quando um dos abertos,  $A$  ou  $B$ , é vazio (e portanto o outro é igual a  $M$ ). Assim, a cisão trivial é  $M = M \cup \emptyset$ .

Um espaço métrico  $M$  chama-se conexo quando a única cisão possível em  $M$  é a trivial. Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  diz-se um conjunto conexo quando o subespaço  $X \subset M$  é conexo. Quando  $X$  admite uma cisão não-trivial, dizemos que  $X$  é desconexo.

Note que, ao contrário das noções de aberto, fechado, fecho, etc, a propriedade de um conjunto  $X$  ser conexo é intrínseca, isto é, se  $X \subset M$ ,  $X \subset N$  e  $M, N$  induzem a mesma métrica em  $X$ , então  $X$  é um subconjunto conexo de  $M$  se, e somente se, é um subconjunto conexo de  $N$ .

Proposição 1 - As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico  $M$  são equivalentes:

- 1)  $M$  é conexo;
- 2)  $M$  e  $\emptyset$  são os únicos subconjuntos de  $M$  ao mesmo tempo abertos e fechados;
- 3) Se  $X \subset M$  tem fronteira vazia, então  $X = M$  ou  $X = \emptyset$ .

Demonstração: Se  $M = A \cup B$  é uma cisão, então  $A$  e  $B$  são abertos e fechados. Reciprocamente, se  $A \subset M$  é aberto e fechado, então  $M = A \cup (M-A)$  é uma cisão de  $M$ . Logo 1)  $\Leftrightarrow$  2). Dado  $X \subset M$ , sabemos que a condição  $X \cap \partial X = \emptyset$  significa que  $X$  é aberto, enquanto  $X \supset \partial X$  quer dizer que  $X$  é fechado. Logo  $X$  aberto e fechado  $\Leftrightarrow \partial X = X \cap \partial X = \emptyset$ . Isto mostra que 2)  $\Leftrightarrow$  3).

Exemplo 3 -  $\mathbb{R}-\{0\}$ ,  $\mathbb{Q}$  e todo espaço discreto com mais de um ponto são desconexos. Também é desconexo o conjunto  $G_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$ , das matrizes reais  $n \times n$  invertíveis. (Note que  $G_1 = \mathbb{R}-\{0\}$ .) Um espaço métrico com apenas um ponto é conexo. Se  $X \subset \mathbb{Q}$  é conexo então  $X$  não contém mais de um ponto. De fato, se  $a, b \in X$  com  $a < b$ , tomamos um número irracional  $\alpha$  tal que  $a < \alpha < b$ , pombos  $A = \{x \in X; x < \alpha\}$ ,  $B = \{x \in X; x > \alpha\}$  e obtemos uma cisão não-trivial  $X = A \cup B$ . (Note que  $A$

e  $B$  são abertos em  $X$  porque  $A = X \cap (-\infty, a)$  e  $B = X \cap (a, +\infty)$ .)

Exemplo 4 - A reta  $\mathbb{R}$  é um espaço conexo. Suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial  $\mathbb{R} = A \cup B$ . Tomemos  $a \in A$  e  $b \in B$ ; digamos que  $a < b$ . Seja  $X = \{x \in A; x < b\}$ . Como  $a \in X$ , vemos que  $X$  não é vazio. Além disso,  $b$  é uma cota superior de  $X$ . Logo existe  $c = \sup.X$ . É claro que  $c \leq b$ . Pela definição de sup., para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in X$  (e portanto  $x \in A$ ) tal que  $c - \epsilon < x \leq c$ . Logo  $c \in \bar{A}$ . Sendo  $A$  fechado, concluimos que  $c \in A$ . Como  $b \in B$ , concluimos que  $c \neq b$ , donde  $c < b$ . Sendo  $A$  aberto existe  $\epsilon > 0$  tal que  $c + \epsilon < b$  e  $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$ . Então todos os pontos do intervalo  $(c, c + \epsilon)$  pertencem a  $X$ , contradizendo que  $c$  seja o sup. de  $X$ .

## §2. Propriedades gerais dos conjuntos conexos.

Proposição 2 - A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.

Demonstração: Consideremos primeiro o caso particular em que  $f: M \rightarrow N$  é contínua, sobrejetiva e  $M$

é conexo. Queremos provar que  $N = f(M)$  é conexo. Com efeito, seja  $N = A \cup B$  uma cisão. Então, da Proposição 3, Capítulo 3, segue-se que  $M = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  é uma cisão. Como  $M$  é conexo, concluimos que um dos conjuntos  $f^{-1}(A)$  ou  $f^{-1}(B)$ , é vazio. Sendo  $f$  sobrejetiva, isto implica que  $A$  ou  $B$  é vazio. O caso geral é consequência: dada  $f: M \rightarrow N$  contínua e dado  $X \subset M$  conexo, então  $f: X \rightarrow f(X)$  é uma sobrejeção contínua, logo  $f(X)$  é conexo, pelo que acabamos de provar.

Corolário - Se  $M$  é conexo e  $N$  é homeomorfo a  $M$ , então  $N$  também é conexo.

Exemplo 5 - Todo intervalo aberto da reta é conexo, por ser homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . (Vide Exemplo 15a, Capítulo 2.) O círculo unitário,  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ , é conexo pois é a imagem da reta pela aplicação contínua sobretiva  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ .

Proposição 3 - O fecho de um conjunto conexo é conexo.

Demonstração: Abordaremos, em primeiro lugar, o caso particular em que  $X \subset M$  é um conjunto conexo tal que  $\bar{X} = M$ , isto é,  $X$  é denso em  $M$ . Provaremos então que  $M$  é conexo. De fato, se  $M = A \cup B$  for uma cisão, teremos a cisão  $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ . (Vide Exemplo 9, Capítulo 3.) Como  $X$  é conexo, segue-se que

$A \cap X = \emptyset$  ou  $B \cap X = \emptyset$ . Sendo  $X$  denso em  $M$ , isto implica  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ . Logo a única cisão de  $M$  é a trivial, ou seja,  $M$  é conexo. No caso geral, temos  $X$  conexo e queremos provar que seu fecho  $\bar{X}$  é conexo. Como  $X$  é denso em  $\bar{X}$ , (Vide Proposição 10, Capítulo 3.) o resultado reduz-se ao que já foi mostrado.

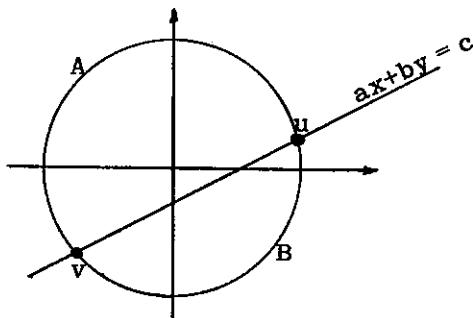
Corolário - Se  $X \subset Y \subset \bar{X}$  e  $X$  é conexo, então  $Y$  é conexo.

Com efeito, o fecho de  $X$  no subespaço  $Y$  é  $\bar{X} \cap Y = Y$ , logo  $X$  é denso em  $Y$  e portanto  $Y$  é conexo.

Exemplo 6 - A proposição acima nos dá outro modo de provar que  $S^1$  é conexo. Tomando  $p = (0,1)$  e  $X = S^1 - \{p\}$ , sabemos que  $X$  é homeomorfo à reta  $R$  pela projeção estereográfica. (Exemplo 16, Capítulo 2.) Logo  $X$  é conexo. Concluimos que  $S^1$  é conexo, observando que  $\bar{X} = S^1$ . Isto é intuitivamente plausível e equivale a afirmar que  $p$  não é um ponto isolado de  $S^1$ . Uma demonstração rigorosa deste fato se faz considerando que a projeção  $p_1: (x,y) \mapsto x$  é um homeomorfismo do "semi-círculo norte"  $\{(x,y) \in S^1; y > 0\}$  sobre o intervalo  $(-1,+1)$ , transformando o polo norte  $p$  no ponto 0. Como 0 não é isolado em  $(-1,+1)$ ,  $p$  não é isolado no semi-círculo

norte e, com maior razão, não é isolado em  $S^1$ .

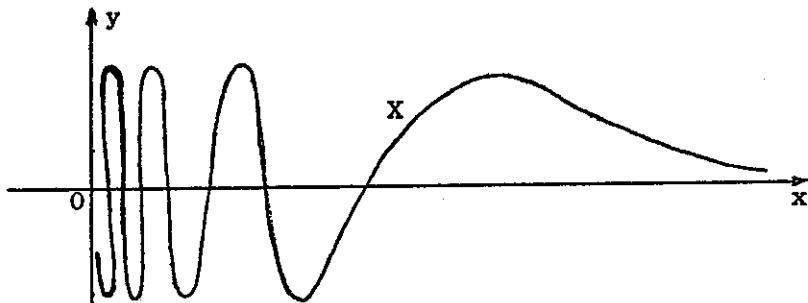
Exemplo 7 - Não há a menor dificuldade em definir uma "projeção estereográfica"  $\pi_u: S^1 - \{u\} \rightarrow \mathbb{R}$ , a partir de qualquer ponto  $u \in S^1$ , usado como polo em vez de  $p = (0,1)$ . Daí resulta que, para cada  $u \in S^1$ , o complemento  $S^1 - \{u\}$  é conexo. Entretanto, se omitirmos dois pontos distintos  $u, v \in S^1$ , obtemos o conjunto desconexo  $S^1 - \{u, v\}$ . Com efeito, seja  $ax + by = c$  a equação da reta que passa pelos pontos  $u$  e  $v$ . Sejam  $A = \{(x, y) \in S^1; ax+by > c\}$  e  $B = \{(x, y) \in S^1; ax+by < c\}$ .



Como a função  $(x, y) \mapsto ax+by$  é contínua (um funcional linear), vemos que  $A$  e  $B$  são abertos e que  $S^1 - \{u, v\} = A \cup B$  é uma cisão não-trivial.

Exemplo 8 - Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y = \cos \frac{1}{x}\}$  o gráfico da função  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ . Como sabemos, pelo Exemplo 17 do Capítulo 2,  $X$  é homeomorfo ao domínio  $(0, +\infty)$  de  $f$ . Logo  $X$

é conexo. Seja  $J = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ . Todo ponto  $z \in J$  é aderente a  $X$ . (Na realidade,  $\bar{X} = X \cup J$ , mas



este fato não é relevante aqui.) Logo, para todo subconjunto  $T \subset J$ , vemos que  $X \subset X \cup T \subset \bar{X}$ . O Corolário da Proposição 3 nos assegura então que, para todo  $T \subset J$ ,  $X \cup T$  é conexo. Devemos admitir que este resultado se choca com nossa intuição inicial sobre conjunto conexo, como aquele que é formado por um só pedaço. Convém manter ainda esta idéia intuitiva, agora porém com a cautela sugerida por este exemplo.

Proposição 4 - Seja  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família arbitrária de conjuntos conexos num espaço métrico  $M$ .

Se todos os  $x_\lambda$  contêm o mesmo ponto  $a \in M$ , então a reunião  $X = \bigcup_{\lambda \in L} x_\lambda$  é conexa.

Demonstração: Seja  $X = A \cup B$  uma cisão. O ponto  $a$  pertence a um dos conjuntos  $A$  ou  $B$ . Diga-

mos que seja  $a \in A$ . Para todo  $\lambda$ ,  $A \cap X_\lambda$  e  $B \cap X_\lambda$  são abertos em  $X_\lambda$ . Logo  $X_\lambda = (X_\lambda \cap A) \cup (X_\lambda \cap B)$  é uma cisão de  $X_\lambda$ . Como  $X_\lambda$  é conexo e  $a \in X_\lambda \cap A$ , concluimos que  $X_\lambda \cap B = \emptyset$  para todo  $\lambda \in L$ . Segue-se que  $B = \bigcup (X_\lambda \cap B) = \emptyset$  e portanto  $X$  é conexo.

Corolário - A fim de que o espaço métrico  $M$  seja conexo, é necessário e suficiente que dois pontos quaisquer  $a, b \in M$  estejam contidos em algum conexo  $X_{ab} \subset M$ .

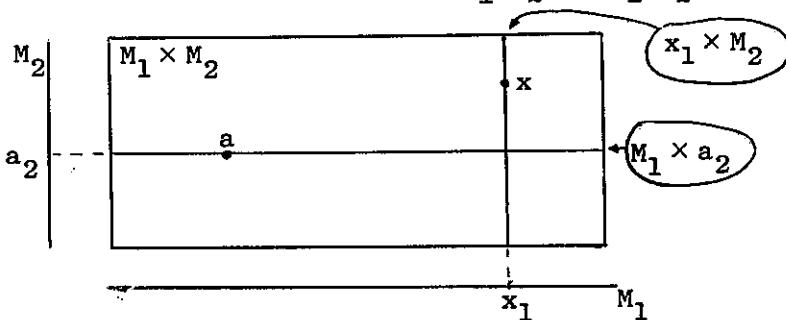
Se  $M$  é conexo, basta tomar  $X_{ab} = M$  sempre. Reciprocamente, cumprida a condição, fixamos  $a \in M$  e obtemos  $M = \bigcup_{b \in M} X_{ab}$ . Como  $a \in X_{ab}$  para todo  $b \in M$ , a Proposição 4 assegura  $M$  conexo.

Exemplo 9 - Todo espaço vetorial normado  $E$  é conexo pois, dados  $a \neq b$  em  $E$ , a reta  $X_{ab} = \{a + t \cdot (b-a); t \in \mathbb{R}\}$  que os contém é homeomorfa a  $\mathbb{R}$  e portanto conexa. Segue-se que toda bola aberta em  $E$  é conexa, por ser homeomorfa a  $E$ . Toda bola fechada em  $E$  também é um conjunto conexo, por ser o fecho da bola aberta de mesmo raio. Em particular, a bola fechada unitária  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle \leq 1\}$  é conexa. Daí resulta que a esfera unitária  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  é conexa quando  $n > 0$ . Com efeito, quando  $n > 0$ , temos  $S^n = S^n_+ \cup$

$\cup S_{\pm}^n$ , onde  $S_+^n = \{x \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$  e  $S_-^n = \{x \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}$  são o hemisfério norte e o hemisfério sul de  $S^n$ . Sabemos que a projeção  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  restrita a  $S_+^n$  (e também a  $S_-^n$ ) dá um homeomorfismo desse hemisfério sobre  $B^n$ . Os homeomorfismos inversos  $B^n \rightarrow S_{\pm}^n$ , são dados por  $x \mapsto (x, \pm\sqrt{1-|x|^2})$ . (Vide Exemplo 17, Capítulo 2.) Logo os hemisférios  $S_+^n$  e  $S_-^n$  são conexos. Como  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S_+^n \cap S_-^n$ , a Proposição 4 nos assegura que  $S^n$  é conexa.

Proposição 5 - O produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  é conexo se, e somente se, cada fator  $M_i$  é conexo.

Demonstração: Como cada projeção  $p_i: M \rightarrow M_i$  é contínua e sobrejetiva,  $M$  conexo  $\Rightarrow$  cada  $M_i$  conexo. Quanto à recíproca, basta provar que se  $M_1$  e  $M_2$  são conexos, seu produto cartesiano  $M_1 \times M_2$  é conexo. O caso geral resulta da aplicação deste resultado  $n-1$  vezes. Fixemos então um ponto  $a = (a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$ . Para



cada  $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ , o conjunto  $C_x = (M_1 \times a_2) \cup (x_1 \times M_2)$  é conexo pois é reunião de dois conexos (homeomorfos a  $M_1$  e  $M_2$  respectivamente) com o ponto  $(x_1, a_2)$  em comum. Além disso temos  $a \in C_x$  para todo  $x \in M = M_1 \times M_2$  e  $M = \bigcup_{x \in M} C_x$ . Segue-se da Proposição 4 que  $M = M_1 \times M_2$  é conexo.

Corolário - O espaço  $\mathbb{R}^n$  é conexo.

Com efeito,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . (Este corolário está contido no Exemplo 8.)

Exemplo 10 - O cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$  é conexo. Com efeito,  $C$  é homeomorfo ao produto cartesiano  $S^1 \times \mathbb{R}$ . [O homeomorfismo  $h: C \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  é dado por  $h(x, y, z) = ((x, y), z)$ .]

Exemplo 11 - Quando  $n > 0$ , omitindo-se a origem de  $\mathbb{R}^n$  tem-se ainda um espaço conexo  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Com efeito, a aplicação  $h: S^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ , dada por  $h(x, t) = t \cdot x$  é um homeomorfismo, cuja inverso é  $k: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^n \times (0, +\infty)$ , definido por  $h(z) = (\frac{z}{|z|}, |z|)$ .

Proposição 6 - Um subconjunto da reta é conexo se, e sómente se, é um intervalo.

Demonstração: Todo intervalo aberto é conexo porque é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . (Exemplo 15a, Capítulo 2.)

Todo intervalo fechado ou semi-fechado é conexo, por causa da Proposição 3 ou do seu Corolário. Reciprocamente, seja  $X \subset \mathbb{R}$  conexo. Suponha que  $a, b \in X$  e que  $a < c < b$ . Provaremos que, neste caso,  $c \in X$ . Com efeito, se fosse  $c \notin X$  então teríamos a cisão  $X = [X \cap (-\infty, c)] \cup [X \cap (c, +\infty)]$ , a qual é não trivial porque  $a \in X \cap (-\infty, c)$  e  $b \in X \cap (c, +\infty)$ . Assim,  $a < c < b$  com  $a, b \in X \Rightarrow c \in X$ . Esta propriedade garante que  $X$  seja um intervalo.

Corolário 1 - Se  $M$  é um espaço métrico conexo e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua, então  $f(M)$  é um intervalo.

Com efeito, pela Proposição 2,  $f(M)$  é um subconjunto conexo da reta. (Note que estamos admitindo intervalos degenerados, do tipo  $[a, a]$ , que ocorrem quando  $f$  é constante.)

Corolário 2 - (Teorema do Valor intermediário). Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f(a) < d < f(b)$  então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ .

De fato, a imagem  $f([a, b])$  é um intervalo que contém os pontos  $f(a)$  e  $f(b)$ , logo contém o ponto intermediário  $d$ . Logo existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ . Mas  $f(a) < f(c) < f(b)$  exclui a possibilidade de  $c = a$  ou  $c = b$ . Portanto  $c \in (a, b)$ .

O Teorema do Valor Intermediário é um "teorema de existência". Ele assegura que, mediante as hipóteses feitas, a equação  $f(x) = d$  admite pelo menos uma solução  $c$  no intervalo  $(a,b)$ .

Exemplo 12 - Um polinômio de grau ímpar possui ao menos uma raiz real. Seja  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ , com  $a_n \neq 0$  e  $n$  ímpar. Como  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , basta mostrar que existem  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $p(x_1) < 0 < p(x_2)$ . Ora, podemos escrever, para todo  $x \neq 0$ :

$$(*) \quad p(x) = a_n x^n \cdot \left[ \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1 \right].$$

Seja  $r = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1$ . Se tomarmos  $|x| > r$  teremos:

$$\left| \frac{a_0}{x^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} \right| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|x|} < 1.$$

Logo, quando  $|x| > r$ , o fator dentro do colchete em  $(*)$  é positivo. Isto implica que, para valores de  $x$  tais que  $|x| > r$ , o sinal de  $p(x)$  é o mesmo sinal de  $a_n \cdot x^n$ . Como  $n$  é ímpar, vemos que o polinômio  $p(x)$  assume valores positivos e negativos, logo se anula em algum ponto. Evidentemente, um polinômio de grau par, como  $x^2 + 1$ , pode não admitir raízes reais.

Usaremos agora o Teorema do Valor Intermediário

a fim de caracterizar homeomorfismos entre intervalos da reta. Começaremos com alguns fatos básicos a respeito de funções monótonas contínuas.

Dado  $X \subset \mathbb{R}$ , uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se crescente quando, para  $x, y \in X$ ,  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ . Se  $x < y$  implica apenas  $f(x) \leq f(y)$ ,  $f$  chama-se não-decrescente. De modo análogo se define função decrecente e função não-crescente. Uma função de qualquer desses tipos chama-se monótona.

Sejam  $J$  um intervalo da reta e  $Y$  um subconjunto de  $J$ . Lembremos que " $Y$  é denso em  $J$ " significa que o fecho de  $Y$  no subespaço  $J$  é todo o intervalo  $J$ . Isto equivale a dizer que todo intervalo não-degenerado  $I \subset J$  contém algum ponto de  $Y$  (e portanto uma infinidade de pontos de  $Y$ ).

Proposição 7 - Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona. Se sua imagem  $f(X)$  é densa num intervalo  $J$  então  $f$  é contínua.

Demonstração: Para fixar as idéias, suponhamos  $f$  não-decrecente. Seja  $a \in X$ . A fim de provar que  $f$  é contínua no ponto  $a$ , tomamos um  $\epsilon > 0$  arbitrário. Suponhamos, em primeiro lugar, que  $f(a)$  pertence ao interior do intervalo  $J$ . Então existem  $y_1, y_2 \in$

$\in f(X)$  tais que  $f(a)-\epsilon < y_1 < f(a) < y_2 < f(a)+\epsilon$ . Sejam  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$ . Como  $f$  é não-decrescente, temos  $x_1 < a < x_2$ . Chamemos de  $\delta$  o menor dos números  $a-x_1$  e  $x_2-a$ . Então  $x \in X$ ,  $|x-a| < \delta \Rightarrow x_1 < x < x_2 \Rightarrow y_1 \leq f(x) \leq y_2 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$ . Logo  $f$  é contínua no ponto  $a$ . Suponhamos agora que  $f(a)$  seja o extremo superior do intervalo  $J$ . Como  $f$  é não-decrescente e  $f(X) \subset J$ , segue-se que  $a < x \Rightarrow f(x) = f(a)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $y_1 \in f(X)$  tal que  $f(a)-\epsilon < y_1 < f(a)$ . Seja  $y_1 = f(x_1)$ . Temos  $x_1 < a$  porque  $f$  é não-decrescente. Tomando  $\delta = a-x_1$ , vemos que  $x \in X$ ,  $|x-a| < \delta \Rightarrow x_1 < x \Rightarrow y_1 \leq f(x) \leq f(a) \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$ . O caso de  $f(a)$  ser extremo inferior de  $J$  se trata de modo análogo.

Corolário - Se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona e  $f(X)$  é um intervalo então  $f$  é contínua.

Proposição 8 - Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, injetiva, definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Então

- 1)  $f$  é monótona;
- 2)  $f$  é um homeomorfismo de  $I$  sobre o intervalo  $J = f(I)$ .

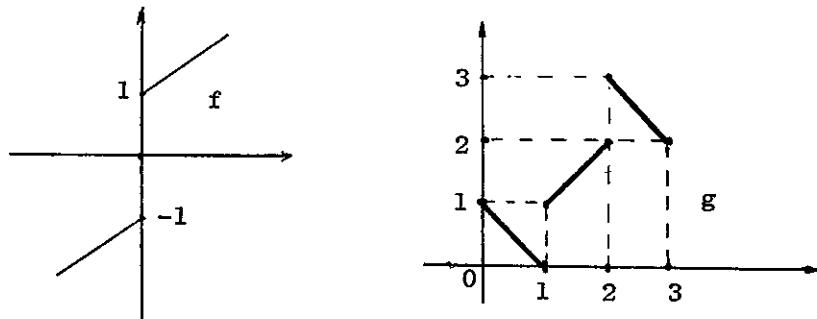
Demonstração: Para demonstrar 1), suporemos inicialmente que  $I = [a,b]$  seja um intervalo limitado

e fechado. Temos  $f(a) \neq f(b)$ . Para fixar as idéias, seja  $f(a) < f(b)$ . Mostraremos então que  $f$  é crescente. De fato, se não fosse assim, existiriam  $x < y$  em  $[a,b]$  com  $f(y) < f(x)$ . Há duas possibilidades:  $f(a) < f(y)$  ou  $f(y) < f(a)$ . No primeiro caso, temos  $f(a) < f(y) < f(x)$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $c \in (a,x)$  tal que  $f(c) = f(y)$ , o que contraria a injetividade de  $f$ . No segundo caso, temos  $f(y) < f(a) < f(b)$ . O mesmo teorema nos dá um ponto  $c \in (y,b)$  tal que  $f(c) = f(a)$ , o que também contradiz a injetividade de  $f$ . Quando  $I$  é um intervalo arbitrário, o leitor verificará sem dificuldade que  $f: I \rightarrow R$  é monótona se, e somente se, sua restrição a cada intervalo  $[a,b] \subset I$  é monótona. Isto prova 1). Quanto à afirmação 2), sabemos pelo Corolário 1 da Proposição 6 que  $f$  é uma bijeção monótona de  $I$  sobre o intervalo  $J = f(I)$ . A inversa de uma bijeção monótona também é monótona. Logo  $f^{-1}: J \rightarrow I$  é contínua, em virtude do Corolário da Proposição 7.

Corolário - Seja  $f: I \rightarrow J$  uma bijeção entre os intervalos  $I, J$ . A fim de que  $f$  seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que seja uma função monótona.

Exemplo 13 - Existem funções monótonas injetivas descontínuas.

nuas, como  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$  se



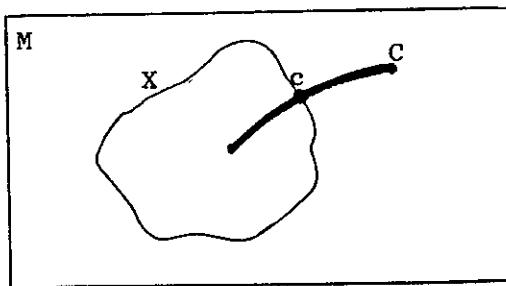
$x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . A imagem de  $f$  não é um intervalo. Existem também bijeções descontínuas entre intervalos, como  $g: [0,3] \rightarrow [0,3]$ , dada por  $g(x) = 1-x$  se  $x \in [0,1]$ ,  $g(x) = x$  se  $x \in [1,2]$  e  $g(x) = 5-x$ , se  $x \in (2,3]$ . Isto é possível porque  $g$  não é monótona.

Exemplo 14 - A função  $f: [0,+\infty) \rightarrow [0,+\infty)$ , definida por  $f(x) = x^n$ , ( $n > 0$  inteiro) é contínua e crescente. Logo é um homeomorfismo sobre sua imagem, que é um intervalo  $J \subset [0,+\infty)$ . A desigualdade  $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$  mostra que  $f$  não é limitada. Logo  $J = [0,+\infty)$ , isto é,  $f$  é um homeomorfismo de  $[0,+\infty)$  sobre si mesmo. O valor  $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$  chama-se a raiz n-ésima de número  $y \geq 0$ . Como acabamos de mostrar, não somente existe essa raiz, como também  $f^{-1}: [0,+\infty) \rightarrow [0,+\infty)$  é contínua, ou seja,  $\sqrt[n]{y}$  depende continuamente de  $y$ .

Voltemos à noção geral de conjunto conexo num espaço métrico. O resultado seguinte generaliza o Teorema do Valor Intermediário.

Proposição 9 - (Teorema da Alfândega). Sejam  $C$ ,  $X$  subconjuntos de um espaço métrico  $M$ . Se  $C$  é conexo e tem pontos em comum com  $X$  e com  $M-X$ , então algum ponto de  $C$  pertence à fronteira de  $X$ .

Demonstração: As hipóteses  $C \cap X \neq \emptyset$  e  $C \cap (M-X) \neq \emptyset$  significam que o subconjunto  $C \cap X$  do es-



paço métrico conexo  $C$  não é vazio nem é o espaço  $C$  inteiro. Logo existe algum ponto  $c$ , pertencente à fronteira de  $C \cap X$  no subespaço  $C$ . Mostraremos agora que  $c$  também pertence à fronteira de  $X$  em  $M$ . Com efeito, para todo  $\epsilon > 0$  existem  $s \in C \cap X \subset X$  com  $d(c,s) < \epsilon$  e  $t \in C - C \cap X = C-X \subset M-X$  com  $d(c,t) < \epsilon$ .

Observação: Para obter o Teorema do Valor Intermediário como corolário da Proposição 9, dada  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

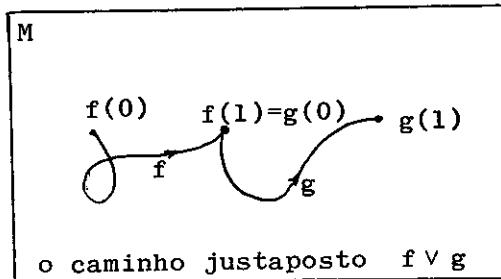
contínua com  $f(a) < d < f(b)$ , tomamos  $C = [a,b]$  e  $X = \{x \in [a,b] : f(x) < d\}$ . A Proposição 9 nos dá um ponto  $c \in \partial X$ . Tem-se necessariamente  $f(c) = d$ .

### §3. Conexão por caminhos.

A definição de espaço conexo como aquele que admite apenas a cisão trivial é a expressão matemática da ideia de conjunto formado por um só pedaço. Outra maneira de exprimir a conexão de um espaço é dizer que se pode passar de um qualquer dos seus pontos para outro por um movimento contínuo, sem sair do espaço. Isto nos leva à noção de espaço conexo por caminhos, conceito mais particular e provido de mais significado intuitivo do que o conceito geral de espaço conexo.

Um caminho num espaço métrico  $M$  é uma aplicação contínua  $f: [0,1] \rightarrow M$ . Os pontos  $a = f(0)$  e  $b = f(1)$ , pertencentes a  $M$ , são os extremos do caminho  $f$ ;  $a$  é o ponto inicial (ou origem) e  $b$  é o ponto final (ou fim) de  $f$ . Diz-se neste caso que o caminho  $f$  liga o ponto  $a$  ao ponto  $b$  em  $M$ . Quando  $a = b$ , diz-se que  $f$  é um caminho fechado em  $M$ . Dados os caminhos  $f, g: [0,1] \rightarrow M$

com  $f(1) = g(0)$ , podemos definir o caminho justaposto  $f \vee g: [0,1] \rightarrow M$ , que consiste em seguir primeiro  $f$  e depois  $g$ . A definição formal é:  $(f \vee g)(t) = f(2t)$ , se  $t \in [0,1/2]$  e  $(f \vee g)(t) = 2t-1$ , se  $t \in [1/2,1]$ . Como  $f(1) = g(0)$ , estas regras dão o mesmo valor a  $f \vee g$  no ponto  $1/2$  e portanto  $f \vee g$  é contínuo. (Vide Proposição 11 e Corolário, Capítulo 3.) Se  $f: [0,1] \rightarrow M$  é tal que  $f(0) = a$  e  $f(1) = b$  então  $f^*: [0,1] \rightarrow M$ , de



finido por  $f^*(g) = f(1-t)$ , é tal que  $f^*(0) = b$  e  $f^*(1) = a$ . Se escrevermos  $a \sim b$  para indicar que existe um caminho em  $M$  começando em  $a$  e terminando em  $b$ , veremos que a relação " $a \sim b$ " é reflexiva, simétrica e transitiva.

Um exemplo trivial de caminho é o constante  $f: [0,1] \rightarrow M$ ,  $f(t) = c$  para todo  $t \in [0,1]$ .

Seja  $E$  um espaço vetorial. Dados  $a, b \in E$ , o segmento de reta de extremos  $a$  e  $b$  é o conjunto  $[a,b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$ . Quando  $E$  é um espaço

vetorial normado, a aplicação  $f: [0,1] \rightarrow E$ , definida por  $f(t) = (1-t)a + tb$ , é contínua e se chama o caminho retílineo de extremos  $a$  e  $b$ . As vezes escreveremos  $[a,b]$ , em vez de  $f$ .

Um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial  $E$  chama-se convexo quando  $a, b \in X \Rightarrow [a,b] \subset X$ , isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de  $X$  está contido em  $X$ .

Todo subespaço vetorial de  $E$  é um conjunto convexo. Se  $X \subset E$  e  $Y \subset F$  são convexos, então  $X \times Y$  é um subconjunto convexo do espaço vetorial  $E \times F$ . Com efeito, se  $z = (x,y)$  e  $z' = (x',y')$  pertencem a  $X \times Y$  então, para todo  $t \in [0,1]$ , o ponto  $(1-t)z + tz' = ((1-t)x + tx', (1-t)y + ty')$  pertence a  $X \times Y$ . É fácil verificar também que uma interseção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Exemplo 15 - Toda bola num espaço vetorial normado é convexa. Seja  $B = B(a;r)$  a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  no espaço vetorial normado  $E$ . Dados  $x, y \in B$ , temos  $|x-a| < r$  e  $|y-a| < r$ . Logo, para todo  $t \in [0,1]$ ,  $|(1-t)x + ty - a| = |(1-t)(x-a) + t(y-a)| \leq (1-t)|x-a| + t|y-a| < (1-t)r + tr = r$ . Logo  $x, y \in B \Rightarrow [x,y] \subset B$  e portanto  $B$  é convexo. Da mesma

forma se vê que toda bola fechada é convexa.

Um espaço métrico  $M$  chama-se conexo por caminhos quando dois pontos quaisquer de  $M$  podem ser ligados por um caminho contido em  $M$ . Um conjunto  $X \subset M$  diz-se conexo por caminhos quando o subespaço  $X$  tem essa propriedade.

Por exemplo, todo conjunto convexo (em particular, toda bola) num espaço vetorial normado é conexo por caminhos.

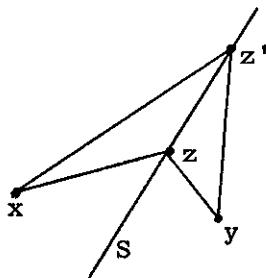
Proposição 10 - Se o espaço métrico  $M$  é conexo por caminhos, então  $M$  é conexo.

Demonstração: Se  $f: [0,1] \rightarrow M$  é um caminho, então a imagem  $f([0,1])$  é um subconjunto conexo de  $M$ . (Proposição 2.) Logo dois pontos quaisquer em  $M$  estão contidos num subconjunto conexo de  $M$ . Pelo Corolário da Proposição 4,  $M$  é conexo.

Outra demonstração da Proposição 10, usando apenas a conexidade de  $[0,1]$ : Suponhamos que  $M = A \cup B$  fosse uma cisão não-trivial de  $M$ . Tomemos  $a \in A$  e  $b \in B$ . Por hipótese, existiria um caminho  $f: [0,1] \rightarrow M$  tal que  $f(0) = a$ ,  $f(1) = b$ . Então  $[0,1] = f^{-1}(M) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  seria uma cisão de  $[0,1]$ , com  $0 \in f^{-1}(A)$  e  $1 \in f^{-1}(B)$ . Absurdo.

Exemplo 16 - Seja  $E$  um espaço vetorial normado, com  $\dim E > 1$ . Para todo  $a \in E$ ,  $E-\{a\}$  é conexo (por caminhos). De fato, sejam  $x, y \in E-\{a\}$ . Se  $[x, y] \subset E-\{a\}$ , este segmento de reta nos dará um caminho ligando  $x$  a  $y$  em  $E-\{a\}$ . Se, porém,  $a \in [x, y]$ , como  $\dim E > 1$ , existe um ponto  $z$  fora do segmento  $[x, y]$ . Então o caminho justaposto  $[x, z] \vee [z, y]$  liga  $x$  a  $y$  em  $E-\{a\}$ .

Exemplo 17 - Generalizando o exemplo anterior, seja  $X \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto enumerável do plano. Afirmando que  $\mathbb{R}^2-X$  é conexo por caminhos. Com efeito, dados  $x \neq y$  em  $\mathbb{R}^2-X$ , tomamos uma reta  $S$  que corte o segmento  $[x, y]$  num ponto interior. Para cada  $z \in S$ , consi-



deremos o caminho justaposto  $f_z = [x, z] \vee [z, y]$ . Se  $z \neq z'$  em  $S$ , então os caminhos  $f_z$  e  $f_{z'}$  têm apenas suas extremidades  $x$ ,  $y$  em comum. Suponhamos, por absurdo, que nenhum dos caminhos  $f_z$  estivesse inteiramente

contido em  $\mathbb{R}^2 - X$ . Então, para cada  $z \in S$ , poderíamos escolher um ponto  $\lambda(z)$ , pertencente à imagem de  $f_z$  e ao conjunto  $x$ . A aplicação  $\lambda: S \rightarrow X$ , assim definida, seria injetiva. Como  $X$  é enumerável e  $S$  não é, esta conclusão é absurda. Logo, existe pelo menos um  $z \in S$  tal que  $f_z$  é um caminho em  $\mathbb{R}^2 - X$ , ligando  $x$  a  $y$ .

Segue-se que  $\mathbb{R}^2 - X$  é conexo por caminhos. Em particular, o conjunto  $Z$  dos pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x$  ou  $y$  é irracional é conexo por caminhos, pois  $Z = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$  e  $\mathbb{Q}^2$  é enumerável. Mais geralmente, seja  $E$  um espaço vetorial normado qualquer, com  $\dim E > 1$ . Se  $X \subset E$  é enumerável, então  $E - X$  é conexo por caminhos. Com efeito, dados  $x, y \in E - X$ , existe um plano  $P$  (subespaço de dimensão 2 em  $E$ ) que contém  $x$  e  $y$ . Pelo resultado anterior,  $x$  pode ser ligado a  $y$  por um caminho em  $P - X$ , e portanto em  $E - X$ .

Valem, para conexão por caminhos, os análogos das Proposições 2, 4, 5 e 6. Mostremos isto:

Proposição 11 - a) A imagem de um conjunto conexo por caminhos através de uma aplicação contínua é conexa por caminhos;

b) Uma reunião de conjuntos conexos por caminhos, todos com o mesmo ponto em comum, é conexa por caminhos;

c) O produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$  é conexo por caminhos se, e somente se, cada fator o é.

Demonstração: a) Dada  $\varphi: M \rightarrow N$  contínua e tomados  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  em  $\varphi(M)$ , seja  $f: [0,1] \rightarrow M$  um caminho ligando  $a$  e  $b$ . Então  $\varphi \circ f: [0,1] \rightarrow N$  é um caminho em  $\varphi(M)$ , ligando  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$ .

b) Seja  $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$  a reunião. Dados  $x, y \in X$ , existe  $\lambda, \mu \in L$  tais que  $x \in X_\lambda$  e  $y \in X_\mu$ . Sejam  $f: [0,1] \rightarrow X_\lambda$  e  $g: [0,1] \rightarrow X_\mu$  caminhos tais que  $f(0) = x$ ,  $f(1) = p$ ,  $g(0) = p$  e  $g(1) = y$ , onde  $p$  é um ponto que pertence a todos os  $X_\lambda$ . Então  $f \vee g$  é um caminho em  $X$ , ligando  $x$  a  $y$ .

c) Seja cada  $M_i$  conexo por caminhos e tomemos  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  em  $M$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , existe um caminho  $f_i: [0,1] \rightarrow M_i$  tal que  $f_i(0) = x_i$ ,  $f_i(1) = y_i$ . Seja  $f = (f_1, \dots, f_n): [0,1] \rightarrow M$  o caminho definido por  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . É claro que  $f$  liga  $x$  a  $y$  em  $M$ .

Exemplo 18 - Um conjunto conexo, que não é conexo por caminhos. Seja  $X \subset \mathbb{R}^2$  o gráfico da função  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  se  $x > 0$  e  $f(0) = 0$ . Segue-se do Exemplo 8 acima que  $X$  é conexo.

Mostraremos que  $X$  não é conexo por caminhos, provando que se  $\lambda: [0,1] \rightarrow X$  for um caminho com  $\lambda(0) = (0,0)$ , então  $\lambda$  será constante. De fato, dado  $\lambda$ , podemos escrever, para todo  $t \in [0,1]$ ,  $\lambda(t) = (\alpha(t), f(\alpha(t)))$ , onde  $\alpha = p_1 \lambda$ . Seja  $A = \{t \in [0,1]; \alpha(t) = 0\}$ . Queremos provar que  $A = [0,1]$ . Ora,  $A$  é fechado e não-vazio, pois  $0 \in A$ . Resta pois mostrar que  $A$  é aberto em  $[0,1]$ . Tomemos um ponto  $a \in A$ . A continuidade de  $\lambda$  nos dá uma bola aberta  $J$  de centro  $a$  em  $[0,1]$  tal que  $t \in J \Rightarrow |\lambda(t)| < 1$ .  $J$  é um intervalo, logo  $\alpha(J)$  é um intervalo contendo 0. Se  $\alpha(J)$  não fosse degenerado, existiria  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2\pi n} \in \alpha(J)$ , ou seja, existiria  $t \in J$  tal que  $\alpha(t) = \frac{1}{2\pi n}$ , o que daria  $\lambda(t) = (\frac{1}{2\pi n}, \cos(2\pi n)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$ , contradizendo o fato de ser  $|\lambda(t)| < 1$  para todo  $t \in J$ .

O exemplo acima mostra que a Proposição 3 não vale para conexão por caminhos, pois se  $G$  é o gráfico de  $f|_{(0,+\infty)}$  então  $G \subset X \subset \bar{G}$ , sendo  $G$  conexo por caminhos.

Exemplo 19 - Para  $n > 0$ , a esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  é conexa por caminhos. Com efeito, a aplicação  $f: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ , dada por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , é contínua.

(E sobrejetiva, pois  $f(x) = x$  quando  $x \in S^n$ .) Pelo Exemplo 16,  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  é conexo por caminhos (pois  $n > 0$ ). Logo  $S^n$  também o é. O mesmo resultado pode ser obtido de modo direto assim: dados  $a, b \in S^n$ , se for  $b \neq -a$ , isto é, se  $a$  e  $b$  não forem antípodas então  $0 \notin [a, b]$ . Então  $f: [0, 1] \rightarrow S^n$ , definido por  $f(t) = \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$ , é um caminho em  $S^n$ , ligando  $a$  e  $b$ . Este caminho é o que se chama um "arco  $\widehat{ab}$  de grande círculo" em  $S^n$ . Se, porém, tivemos  $b = -a$ , existirão infinitos arcos de grande círculo ligando  $a$  e  $b$ . Escolheremos um deles assim: fixamos um ponto  $c \in S^n$ , tal que  $c \neq a$  e  $c \neq b$  e tomamos  $f =$  justaposição do arco  $\widehat{ac}$  com o arco  $\widehat{cb}$ .

Estabeleceremos a seguir uma condição suficiente para que um espaço métrico conexo seja conexo por caminhos.

Um espaço métrico  $M$  chama-se localmente conexo por caminhos quanto para todo  $x \in M$  e toda vizinhança  $V \ni x$  existe uma vizinhança conexa  $U \ni x$  tal que  $x \in U \subset V$ .

Exemplo 20 - O espaço  $\mathbb{R}^n$  ou, mais geralmente, todo espaço vetorial normado  $E$ , é localmente conexo por caminhos. Com efeito, dados  $x \in E$  e uma vizinhança

$V$  de  $x$  em  $E$  existe, por definição de vizinhança, uma bola  $B$  de centro  $x$  tal que  $x \in B \subset V$ . Ora,  $B$  é conexa por caminhos, por ser convexa.

Exemplo 21 - Se  $M$  é localmente conexo por caminhos, todo subconjunto aberto de  $M$  tem a mesma propriedade. Logo, todo aberto do  $\mathbb{R}^n$  (ou, mais geralmente, de um espaço vetorial normado) é localmente conexo por caminhos.

Exemplo 22 - Um espaço métrico  $M$  chama-se uma variedade topológica de dimensão  $n$  quando, para todo  $x \in M$  existe um aberto  $U \ni x$  homeomorfo a um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R}^n$ . A esfera  $S^n$  é um exemplo de variedade: dado  $x \in S^n$ , tome  $y \neq x$ , faça  $U = S^n - \{y\}$  e use  $y$  como polo de uma projeção estereográfica  $\pi_y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a qual é um homeomorfismo entre  $U$  e  $\mathbb{R}^n$ . Outros exemplos (triviais) de variedades são os subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Segue-se do exemplo anterior que toda variedade topológica  $M$  é um espaço localmente conexo por caminhos. Com efeito, dados  $x \in M$  e uma vizinhança  $V \ni x$ , existe um aberto  $U \ni x$  e um homeomorfismo  $h: U \rightarrow U_0$ , onde  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Substituindo, se necessário,  $U$  por  $U \cap \text{int. } V$ , podemos supor  $x \in U \subset V$ . Existe um aberto  $W_0$  em  $\mathbb{R}^n$ , conexo por ca-

minhos, aberto em  $M$ , e tal que  $x \in W \subset V$ .

Proposição 12 - Seja  $M$  um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Então  $M$  é conexo por caminhos se, e somente se, é conexo.

Demonstração: Suponhamos que  $M$  seja conexo (além de localmente conexo por caminhos). Escrevamos  $x \sim y$  para significar que existe um caminho  $f:[0,1] \rightarrow M$  com  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ . Indiquemos com  $x \not\sim y$  a negação de  $x \sim y$ . Sabemos que  $x \sim y$ ,  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ . Fixemos então  $a \in M$  e ponhamos  $A = \{x \in M; x \sim a\}$ . Afirmando que  $A$  é aberto em  $M$ . Com efeito, dado  $x \in A$ , tomemos uma vizinhança conexa  $U \ni x$ . Temos:  $u \in U \Rightarrow u \sim x$ ,  $x \sim a \Rightarrow u \sim a \Rightarrow u \in A$ . Logo  $x \in U \subset A$  e portanto  $A$  é aberto. Também o complementar  $M-A$  é aberto. De fato, dado  $y \in M-A$ , existe uma vizinhança conexa  $W \ni y$ . Temos:  $w \in W \Rightarrow w \sim y$ ,  $y \not\sim a \Rightarrow w \not\sim a \Rightarrow w \in M-A$ . Logo  $y \in W \subset M-A$  e portanto  $M-A$  é aberto.

Corolário - Um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.

§4. Componentes conexas.

Se um espaço métrico  $M$  não é conexo, cabe a pergunta: quantos pedaços tem  $M$ ? Os pedaços de um espaço são suas componentes conexas, que estudaremos agora.

Sejam  $M$  um espaço métrico e  $x$  um ponto de  $M$ . A componente conexa de  $x$  em  $M$  é a reunião  $C_x$  de todos os subconjuntos conexos de  $M$  que contêm  $x$ .

Existe pelo menos um subconjunto conexo de  $M$  contendo  $x$ , a saber:  $\{x\}$ . Logo  $C_x$  não é vazia. Pela Proposição 4, cada componente conexa  $C_x$ ,  $x \in M$ , é um conjunto conexo.

$C_x$  é o maior subconjunto conexo de  $M$  que contém  $x$ . Ou seja, se  $X \subset M$  é conexo e  $x \in X$ , então  $X \subset C_x$ . De fato, nessas condições  $X$  é um dos conjuntos conexos cuja reunião é  $C_x$ . Logo  $X \subset C_x$ .

A relação "existe um subconjunto conexo de  $M$  contendo os pontos  $x$  e  $y$ ", que simbolizaremos com  $x \sqcap y$ , é uma equivalência em  $M$ , isto é, tem-se  $x \sqcap x$ ,  $x \sqcap y \Rightarrow y \sqcap x$ , e  $x \sqcap y$ ,  $y \sqcap z \Rightarrow x \sqcap z$ . As classes de equivalência segundo esta relação são as componentes conexas de  $M$ . Em outras palavras,  $C_x = C_y \Leftrightarrow x \sqcap y$ . A implicação  $\Rightarrow$  é

evidente. Quanto à recíproca, se existe um conexo  $X$  contendo  $x$  e  $y$ , então  $y \in X \subset C_x$  e, como  $C_x$  é agora um conexo contendo  $y$ , segue-se que  $C_x \subset C_y$ . Do mesmo modo se vê que  $C_y \subset C_x$ , donde  $C_x = C_y$ .

A família  $(C_x)_{x \in M}$  das componentes conexas de um espaço métrico  $M$  fornece, portanto, uma partição de  $M$  em partes disjuntas. Isto é:  $M = \bigcup_{x \in M} C_x$  e  $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x = C_y$ .

Cada componente conexa  $C$  do espaço métrico  $M$  é a componente conexa de cada um dos pontos  $x \in C$ .  $C$  é um subconjunto conexo máximo em  $M$ , isto é: se  $X \subset M$  é conexo e  $X \supset C$  então  $X = C$ . Mais ainda: se  $X \subset M$  é conexo e  $X \cap C \neq \emptyset$  então  $X \subset C$ . Todo subconjunto conexo não-vazio de  $M$  está contido numa única componente conexa.

Toda componente conexa  $C \subset M$  é um subconjunto fechado. Com efeito, seu fecho  $\bar{C}$  é conexo. (Proposição 3.) Se  $C$  não fosse fechado, a inclusão  $C \subset \bar{C}$  seria própria e  $C$  não seria um conexo máximo.

Se  $h: M \rightarrow N$  é um homeomorfismo então,  $C \subset M$  é uma componente conexa de  $M$  se, e somente se,  $h(C)$  é uma componente conexa de  $N$ .

Exemplo 23 - As componentes conexas de  $\mathbb{R} - \{0\}$  são as semi-retas  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ . Mais geralmente, se  $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é uma reunião disjunta de conjuntos  $A_\lambda \subset M$  que são ao mesmo tempo não-vazios, abertos, fechados e conexos, então cada  $A_\lambda$  é uma componente conexa de  $M$ . De fato se  $C$  é um subconjunto conexo de  $M$  tal que  $A_{\lambda_0} \subset C$  para algum  $\lambda_0 \in L$ , então, pondo  $B = C \cap [\bigcup_{\lambda \neq \lambda_0} A_\lambda]$ , obtemos uma cisão  $C = A_{\lambda_0} \cup B$ . Sendo  $C$  conexo e  $A_{\lambda_0} \neq \emptyset$ , concluimos que  $B = \emptyset$ , isto é, que  $C = A_{\lambda_0}$ . Nestas condições, a partição  $M = \bigcup A_\lambda$  é a expressão de  $M$  como reunião de suas componentes conexas.

É bom notar porém que nem sempre as componentes conexas de um espaço métrico são subconjuntos abertos. Isto é o que mostraremos agora.

Exemplo 24 - No espaço métrico  $\mathbb{Q}$ , dos números racionais, cada componente conexa reduz-se a um ponto. Isto equivale a dizer que nenhum subconjunto conexo de  $\mathbb{Q}$  pode conter dois pontos distintos. (Vide Exemplo 3.)

Exemplo 25 - Generalizando o exemplo anterior, mostraremos que se  $M$  é um espaço métrico enumerável então toda componente conexa de  $M$  se reduz a um único ponto. Isto equivale a mostrar que se  $M$  é um espaço conexo com mais de um ponto então  $M$  não é enumerável.

vel. Para provar isto, fixemos  $a \in M$  e consideremos a função  $d_a: M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $d_a(x) = d(a, x)$ . Sabemos que  $d_a$  é contínua. Sendo  $M$  conexo, a imagem de  $d_a$  é um intervalo  $J$ . Como existe em  $M$  um ponto  $b \neq a$ ,  $J$  contém pelo menos  $0 = d(a, a)$  e o número positivo  $d(a, b)$ . Logo  $J = d_a(M)$  não é enumerável. Consequentemente,  $M$  também não é enumerável.

Exemplo 26 - Um problema importante de Topologia é determinar as componentes conexas de um espaço de aplicações contínuas  $C_0(M; N)$ . Disto se ocupa a chamada "teoria da homotopia". Por exemplo para todo  $n > 0$ , o espaço  $C_0(S^n; S^n)$  das aplicações contínuas (limitadas)  $f: S^n \rightarrow S^n$  tem um infinito enumerável de componentes conexas. A cada  $f: S^n \rightarrow S^n$  contínua se associa um inteiro  $n = n(f) \in \mathbb{Z}$ , chamado o grau de  $f$ . Duas aplicações contínuas  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  pertencem à mesma componente conexa em  $C_0(S^n; S^n)$  se e somente se possuem o mesmo grau. (Teorema de Hopf-Brouwer.) A demonstração deste fato requer técnicas de Topologia Algébrica ou de Topologia Diferencial e não pode ser dada aqui.

### §5. A conexidade como invariante topológico.

Para encerrar estas considerações sobre conjuntos conexos, daremos alguns exemplos de como se pode usar a conexidade como invariante topológico para distinguir espaços que não são homeomorfos.

O problema é o seguinte. Temos dois espaços métricos  $M$  e  $N$ . Suspeitamos que eles não são homeomorfos e queremos provar este fato. Se  $M$  é conexo e  $N$  não é, o assunto está encerrado. Não pode haver um homeomorfismo entre um espaço conexo e um não conexo.

A dificuldade realmente começa quando  $M$  e  $N$  são ambos conexos. Por exemplo, pode um intervalo aberto  $(a, b)$  ser homeomorfo a um intervalo semi-aberto  $[c, d)$ ? Ambos são conexos. Mas há uma diferença: se retirarmos o extremo  $c$  do intervalo  $[c, d)$  ele continua conexo, pois obteremos o intervalo aberto  $(c, d)$ . Mas qualquer ponto que se retire do intervalo  $(a, b)$  o deixa desconexo. Logo não pode haver um homeomorfismo  $h: [c, d) \rightarrow (a, b)$ . Com mais precisão:  $h$ , se existisse, induziria por restrição um homeomorfismo entre  $[c, d) - \{c\} = (c, d)$  e o espaço desconexo  $(a, b) - \{h(c)\}$ .

Outro exemplo: podem os intervalos  $[a,b]$  e  $[c,d]$  ser homeomorfos? Não, pois um homeomorfismo  $h: [a,b] \rightarrow [c,d]$  induziria, por restrição, outro entre  $[a,b] - \{a,b\} = (a,b)$  e  $[c,d] - \{h(a),h(b)\}$ . Ora, como  $h(a) \neq h(b)$ , este último espaço é desconexo.

Usando considerações do tipo acima, o leitor pode verificar que os intervalos não-degenerados da reta se classificam em três grupos. Os intervalos de cada grupo são homeomorfos entre si mas nenhum deles é homeomorfo a um intervalo de outro grupo. Os grupos são:

- I)  $(a,b)$ ,  $(a,+\infty)$ ,  $(-\infty,b)$ ,  $(-\infty,+\infty)$ ;
- II)  $[a,b)$ ,  $(a,b]$ ,  $[a,+\infty)$ ,  $(-\infty,b]$ ;
- III)  $[a,b]$ .

Ainda usando conexidade, vemos que o círculo  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  não é homeomorfo a nenhum subconjunto da reta. Com efeito, todo subconjunto não-vazio da reta pode tornar-se desconexo pela retirada conveniente de um dos seus pontos. Por outro lado, para todo  $p \in S^1$ , tem-se  $S^1 - \{p\}$  conexo.

Para finalizar, mostremos que as letras  $\times$  e  $|$  (pensadas como desprovidas de extremidades) não são homeomorfas. Tanto  $\times$  como  $|$  são subconjuntos conexos do

plano. Ambos se tornam desconexos pela retirada de qualquer um dos seus pontos. Mas há uma diferença: o complementar de qualquer ponto de  $\mathbb{I}$  tem duas componentes conexas, enquanto  $\mathbb{X}$  possui um ponto (o crucial) cujo complementar tem quatro componentes conexas!

Devemos advertir, entretanto, que este método de mostrar que certos espaços não são homeomorfos funciona apenas em casos simples. Situações mais sutis exigem invariantes mais sofisticados do que o número de componentes conexas. Tais invariantes são estudados na Topologia Algébrica e na Topologia Diferencial.

Com nossos métodos, o leitor pode provar que  $S^1$  não é homeomorfo a  $S^n$  ( $n > 1$ ). Mas não dá para provar que  $S^2$  não é homeomorfa a  $S^3$ ! Ou mesmo que  $\mathbb{R}^2$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . É preciso aprender técnicas mais poderosas.

## CAPÍTULO 5

### LIMITES

#### §1. Limites de seqüências.

Uma seqüência num conjunto  $M$  é uma aplicação  $x: \mathbb{N} \rightarrow M$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . O valor que a seqüência  $x$  assume no número  $n \in \mathbb{N}$  será indicado por  $x_n$ , em vez de  $x(n)$ , e chamar-se-á o  $n$ -ésimo termo da seqüência.

Usaremos as notações  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(x_n)$  para representar uma seqüência. Por outro lado, escreveremos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ,  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  ou  $x(\mathbb{N})$  para indicar o conjunto dos valores, ou conjunto dos termos da seqüência. Este conjunto não deve ser confundido com a seqüência.

Por exemplo, se definirmos  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $x_n = (-1)^n$ , então obteremos a seqüência  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ , cujo conjunto de valores é  $\{-1, 1\}$ . Vemos assim que entre os termos  $x_n$  da seqüência podem ocorrer repetições, isto é, pode-se ter  $x_m = x_n$  com  $m \neq n$ . Quando a aplica-

ção  $x: \mathbb{N} \rightarrow M$  for injetiva, ou seja, quando  $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$ , diremos que  $(x_n)$  é uma seqüência de termos distintos, ou sem repetições.

Exemplo 1 - Fixemos  $a \in \mathbb{R}$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ponhamos  $x_n = e^{ina} = (\cos(na), \sin(na))$ . Obtemos assim uma seqüência  $(x_n)$  no plano  $\mathbb{R}^2$  ou, mais precisamente, no círculo  $S^1$ . Esta seqüência tem repetições se, e somente se,  $a$  é um múltiplo racional de  $2\pi$ , isto é,  $a = \frac{2\pi p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$ . De fato,  $e^{ima} = e^{ina}$  com  $m \neq n \Leftrightarrow e^{i(m-n)a} = 1 \Leftrightarrow (m-n)a = 2k\pi \Leftrightarrow a = 2\pi \cdot \frac{k}{m-n}$ .

Uma subseqüência de  $(x_n)$  é uma restrição da aplicação  $n \mapsto x_n$  a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  de  $\mathbb{N}$ . A subseqüência é indicada pelas notações  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ,  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ou, simplesmente,  $(x_{n_k})$ .

Estritamente falando, a subseqüência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  não é uma seqüência porque está definida apenas num subconjunto dos números naturais. Mas, escrevendo  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ , a subseqüência  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$  pode ser considerada, de modo natural, como a aplicação  $1 \mapsto x_{n_1}, 2 \mapsto x_{n_2}, \dots, k \mapsto x_{n_k}, \dots$  e portanto como uma seqüência. A própria notação  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  já a exibe como seqüência.

Por exemplo, a seqüência  $(4, 16, 64, \dots, 4^k, \dots)$  é uma subseqüência de  $(2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$ , na qual  $\mathbb{N}'$  é o conjunto dos números pares.

Uma seqüência  $(x_n)$  no espaço métrico  $M$  chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe  $c > 0$  tal que  $d(x_m, x_n) \leq c$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Exemplo 2 - Uma seqüência constante  $(x_n = a \text{ para todo } n)$  ou, mais geralmente, uma seqüência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada. Se  $a$  é um número real, com  $|a| > 1$ , a seqüência de números reais  $x_n = a^n$  não é limitada, em virtude da conhecida desigualdade de Bernoulli:  $(1+b)^n > 1+n \cdot b$  se  $b > -1$ . (Escreva  $b = |a|-1$  e note que se tem  $|a|^n > c$ , desde que se tome  $n > \frac{c-1}{b}$ .) Por outro lado, quando  $|a| \leq 1$ , a seqüência dos números  $x_n = a^n$  é limitada, pois  $|x_n| \leq 1$  para todo  $n$ .

Evidentemente, toda subseqüência de uma seqüência limitada é também limitada.

Seja  $(x_n)$  uma seqüência num espaço métrico  $M$ . Diz-se que o ponto  $a \in M$  é limite da seqüência  $(x_n)$  quando, para todo número  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Es-

creve-se então  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ou  $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ .

Diz-se também que  $x_n$  tende para a e escreve-se ainda  $x_n \rightarrow a$ .

Quando existe  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$ , diz-se que a seqüência de pontos  $x_n \in M$  é convergente em M, e converge para a. Se não existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  em M, dizemos que a seqüência é divergente em M.

Afirmar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  num espaço métrico M equivale a dizer que toda bola B de centro a (e portanto todo aberto A contendo a ou toda vizinhança V de a) contém  $x_n$  para todo valor de n, com exceção de um número finito deles (que são no máximo os pontos  $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ ).

Exemplo 3 - Toda seqüência constante,  $x_n = a$ , é convergente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Se  $a \in M$  é um ponto isolado e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todos os termos  $x_n$  com índice maior do que  $n_0$  são iguais a a. Para ver isto, basta tomar  $\epsilon > 0$  tal que não existe em M ponto algum que diste menos de  $\epsilon$  do ponto a. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , a este  $\epsilon$  corresponde  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon \Rightarrow x_n = a$ . Em particular, num espaço métrico discreto, uma seqüência  $(x_n)$  é convergente se, e somente se, é "eventualmente constante",

isto é, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \dots$

Exemplo 4 - Se o espaço métrico  $M$  possui pelo menos dois pontos distintos  $a, b$  então existem em  $M$  seqüências divergentes. Basta tomar  $x_n = a$  para  $n$  ímpar e  $x_n = b$  para  $n$  par. Nenhum ponto  $c \in M$  pode ser limite da seqüência  $(a, b, a, b, \dots)$  assim obtida. Com efeito, se tomarmos  $\epsilon = \frac{1}{2} d(a, b)$ , nenhuma bola aberta de raio  $\epsilon$  poderá conter ambos os pontos  $a, b$ . Portanto não existe  $n_0$  tal que  $x_n \in B(c; \epsilon)$  para todo  $n > n_0$ .

As considerações que se seguem visam a facilitar um entendimento melhor da definição de limite, bem como a estabelecer uma linguagem maleável para lidar com valores "grandes" da variável inteira  $n$ .

Seja  $X$  um conjunto de números naturais. Diremos que  $X$  contém números arbitrariamente grandes quando, para todo  $n_0 \in \mathbb{N}$  dado, pudermos encontrar  $n \in X$  tal que  $n > n_0$ . Isto significa que  $X$  é um subconjunto ilimitado de  $\mathbb{N}$  e equivale também a dizer que  $X$  é um conjunto infinito de números naturais.

Por exemplo, existem múltiplos de 3 arbitrariamente grandes, pois o conjunto  $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$  dos múltiplos de 3 é infinito. Existem também números primos

arbitrariamente grandes. Em particular, existem números naturais arbitrariamente grandes que não são múltiplos de 3. Ou seja, tanto  $3N$  como seu complementar  $N - 3N$  são conjuntos infinitos.

Diremos que o conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  contém todos os números naturais suficientemente grandes quando existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow n \in X$ . Isto equivale a dizer que o complementar  $\mathbb{N} - X$  é finito. Em particular,  $X$  é infinito.

Por exemplo, seja  $X$  o conjunto dos números naturais  $n$  tais que  $n^2 - 14n + 40 > 0$ . Então  $X = \{1, 2, 3, 11, 12, \dots\}$ . Vemos que  $n > 10 \Rightarrow n \in X$ . Logo  $X$  contém todos os números naturais suficientemente grandes. Neste caso, "suficientemente grande" significa "maior do que 10". Temos  $\mathbb{N} - X = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Seja  $(x_n)$  uma seqüência no espaço métrico  $M$ . Dizer que  $\lim x_n = a \in M$  significa que, dada qualquer bola aberta  $B$ , de centro  $a$ , tem-se  $x_n \in B$  para todo  $n$  suficientemente grande.

No Exemplo 4, dada qualquer bola  $B = B(a; \epsilon)$ , tem-se  $x_n \in B$  para valores arbitrariamente grandes de  $n$ , porém não para todo  $n$  suficientemente grande.

Exemplo 5 - Dada a seqüência de números reais  $x_n = \frac{1}{n}$ ,

temos  $\lim x_n = 0$ . Com efeito, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , tomamos  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$  e vemos que  $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ . Em termos mais geométricos: para todo  $n$  suficientemente grande,  $\frac{1}{n}$  pertence ao intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$ .

Proposição 1 - Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração: Seja  $\lim x_n = a$  num espaço métrico  $M$ .

Tomando  $\epsilon = 1$ , obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; 1)$ . Portanto o conjunto dos valores da seqüência está contido na reunião  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$  de dois conjuntos limitados e portanto é limitado.

Exemplo 6 - A seqüência de números reais  $x_n = (-1)^n$  é limitada mas não é convergente. Logo é falsa a recíproca da Proposição 1. Dado um número real  $a$ , com  $|a| > 1$ , a seqüência definida por  $x_n = a^n$  não converge porque não é limitada. (Exemplo 2.)

Proposição 2 - (Unicidade do limite). Uma seqüência não pode convergir para dois limites diferentes.

Demonstração: Seja  $(x_n)$  uma seqüência no espaço métrico  $M$ , e sejam  $a, b \in M$  tais que  $a = \lim x_n$  e  $b = \lim x_n$ . Dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Existe também

$n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon$ . Tomemos agora  $n \in \mathbb{N}$  maior do que  $n_0$  e do que  $n_1$ . Então  $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\epsilon$ . Segue-se que  $0 \leq d(a, b) < 2\epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ . Isto acarreta  $d(a, b) = 0$  e portanto  $a = b$ .

Segue-se da Proposição 2 que se num espaço métrico  $M$  tem-se  $\lim x_n = a \in M$  e  $x_n \neq a$  para todo  $n$ , então a seqüência  $(x_n)$  é divergente no espaço métrico  $M-\{a\}$ . Com efeito, se existisse  $b \in M-\{a\}$  tal que  $\lim x_n = b$ , então seria  $b \neq a$  e a seqüência teria dois limites distintos  $a, b \in M$ .

Proposição 3 - Se  $\lim x_n = a$  então toda subseqüência de  $(x_n)$  converge para  $a$ .

Demonstração: Seja  $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ . Dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Existe também  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k_0} > n_0$ . Logo  $k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \epsilon$ . Portanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \in N'} x_n = a$ .

Corolário 1 - Se  $\lim x_n = a$  então, para todo  $p \in \mathbb{N}$ , tem-se  $\lim_n x_{n+p} = a$ .

Com efeito  $(x_{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$  é uma subseqüência de  $(x_n)$ .

Corolário 2 - Se  $\lim x_n = a \neq b$  então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$ .

Com efeito, caso contrário os índices  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $x_n = b$  formariam um conjunto infinito  $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  e então a subseqüência constante  $(x_{n_k})$  teria um limite  $b$ , diferente de  $a = \lim x_n$ , o que é absurdo.

Exemplo 7 - Se uma seqüência  $(x_n)$  possui duas subseqüências que convergem para limites distintos, então ela é divergente. De fato, pela Proposição 3, se existisse  $\lim x_n = a$  então toda subseqüência de  $(x_n)$  convergiria para  $a$ . Segue-se então da Proposição 2 que nenhuma subseqüência possuiria um limite  $b \neq a$ .

Proposição 4 - Um ponto  $a$ , num espaço métrico  $M$ , é limite de uma subseqüência de  $(x_n)$  se, e somente se, toda bola aberta de centro  $a$  contém termos  $x_n$  com índices  $n$  arbitrariamente grandes.

Demonstração: Se uma subseqüência  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$  converge para  $a$  então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(a; \epsilon)$ . Logo toda bola  $B(a; \epsilon)$  de centro  $a$  contém termos  $x_n$  com índices arbitrariamente grandes, a saber, todos os índices  $n_k$ .

com  $k > k_0$ . Reciprocamente, supondo cumprida esta condição, a bola  $B(a;1)$  contém um termo  $x_{n_1}$ , a bola  $B(a;\frac{1}{2})$  contém um termo  $x_{n_2}$  com índice  $n_2 > n_1$ , e assim por diante: para todo  $k \in \mathbb{N}$ , podemos achar  $x_{n_k} \in B(a;\frac{1}{k})$  com  $n_k > n_{k-1} > \dots > n_2 > n_1$ . Isto define um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  e uma subsequência  $(x_{n_k})$  tal que  $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$ . Segue-se que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

Observação: No enunciado da Proposição 4, podemos substituir "bola aberta de centro a" por "conjunto aberto contendo a" ou "vizinhança de a".

A fim de reduzir certas propriedades de limites a resultados análogos sobre aplicações contínuas, consideraremos o subespaço  $\bar{\mathbb{P}} = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ . Este espaço métrico tem apenas um ponto não isolado, a saber, o ponto 0. Dada uma seqüência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$ , e dado um ponto  $a \in M$ , definiremos uma aplicação  $f: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow M$  pondo  $f(\frac{1}{n}) = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $f(0) = a$ .

Lema - Tem-se  $\lim x_n = a$  se, e somente se,  $f: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow M$  é contínua.

Demonstração: Como todo ponto  $\frac{1}{n} \in \bar{\mathbb{P}}$  é isolado, vemos que  $f$  é contínua se, e somente se, é contínua no ponto 0. A condição da continuidade de  $f$  no

ponto 0 se exprime assim: para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Se esta condição é cumprida, tomamos  $n_0 > \frac{1}{\delta}$  e vemos que  $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta \Rightarrow d(x_n, a)$ . Logo  $\lim x_n = a$ . Reciprocamente, se  $\lim x_n = a$  então, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Logo, pondo  $\frac{1}{n_0} = \delta$ , vemos que  $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow n > \frac{1}{\delta} = n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$ . Portanto f é contínua no ponto 0.

Caracterizaremos agora convergência num espaço produto.

Proposição 5 - Uma seqüência de pontos  $z_n = (x_n, y_n)$ , no produto cartesiano  $M \times N$  de espaços métricos, converge para o ponto  $c = (a, b) \in M \times N$  se, e somente se,  $\lim x_n = a$  em  $M$  e  $\lim y_n = b$  em  $N$ .

Demonstração: De acordo com o lema acima e com a Proposição 2 do Capítulo 2, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $\lim z_n = c$ ;
- (2) a aplicação  $f: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow M \times N$ , definida por  $f(\frac{1}{n}) = z_n$  e  $f(0) = a$ , é contínua;
- (3) as aplicações  $f_1: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow M$  e  $f_2: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow N$ , definidas por  $f_1(\frac{1}{n}) = x_n$ ,  $f_1(0) = a$ ,  $f_2(\frac{1}{n}) = y_n$  e  $f_2(0) = b$ , são contínuas;

(4)  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ .

Corolário - Seja  $M = M_1 \times \dots \times M_k$  o produto cartesiano de um número finito de espaços métricos  $M_1, \dots, M_k$ . Uma seqüência  $(x_n)$  em  $M$  determina  $k$  seqüências:  $(x_{n1})_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M_1, \dots, (x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M_k$ , onde  $x_{ni} = p_i(x_n)$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $x_n$ . Dado  $a = (a_1, \dots, a_k) \in M$ , tem-se  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  se, e somente se,  $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Ou seja, no produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_k$ ,  $x_n$  converge para  $a$  se, e somente se, cada coordenada de  $x_n$  converge para a coordenada correspondente de  $a$ .

A demonstração se faz aplicando a Proposição 5  $k-1$  vezes.

Proposição 6 - Se  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$  num espaço vetorial normado  $E$  e  $\lim \lambda_n = \lambda$  em  $\mathbb{R}$  então  $\lim(x_n + y_n) = a+b$  e  $\lim \lambda_n \cdot x_n = \lambda \cdot a$ . Além disso, se  $\lambda \neq 0$ , tem-se também  $\lim(\frac{1}{\lambda_n}) = \frac{1}{\lambda}$ .

Demonstração: Sejam  $f, g: \bar{\mathbb{P}} \rightarrow E$  definidas por  $f(\frac{1}{n}) = x_n$ ,  $f(0) = a$ ,  $g(\frac{1}{n}) = y_n$  e  $g(0) = b$ . Então  $(f+g)(\frac{1}{n}) = x_n + y_n$  e  $(f+g)(0) = a+b$ . As hipóteses  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$  asseguram (vide Lema acima) que  $f$  e  $g$  são contínuas. Logo (Proposição 3, Capítulo

1o 2)  $f+g$  é contínua e portanto (Lema) temos  
 $\lim(x_n + y_n) = a+b$ . As demais afirmações se provam de modo análogo, devendo-se observar que, em virtude do Corolário 2 da Proposição 3, quando  $\lambda \neq 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow \lambda_n \neq 0$ . Ao considerar a seqüência  $(\frac{1}{\lambda_n})$  nos restringimos aos índices  $n > n_0$ , o que não altera o limite, levando em conta o Corolário 1 da Proposição 3.

## §2. Seqüências de números reais.

Uma seqüência  $(x_n)$  de números reais diz-se crescente quando se tem  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ , isto é,  
 $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Quando vale apenas  $x_n \leq x_{n+1}$ , a seqüência diz-se não-decrescente. Analogamente se definem seqüências decrescentes e não-crescentes. Uma seqüência de um desses quatro tipos é chamada monótona.

Proposição 7 - Toda seqüência monótona limitada de números reais é convergente.

Demonstração: Para fixar as idéias, seja  $(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots)$  a seqüência limitada em questão.

Tomemos  $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ . Afirmamos que  $a = \lim x_n$ . Com efeito, dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , o número  $a-\epsilon$ , sendo menor do que  $a$ , não pode ser cota superior do conjunto dos valores  $x_n$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a-\epsilon < x_{n_0} \leq a$ . Então  $n > n_0 \Rightarrow a-\epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a+\epsilon \Rightarrow a-\epsilon < x_n < a+\epsilon$ . Isto conclui a demonstração.

Corolário - Uma seqüência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.

Basta provar que uma seqüência monótona  $(x_n)$  é limitada quando possui uma subsequência limitada  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ . Para fixar as idéias, suponhamos que  $(x_n)$  seja não-decrescente. Seja  $x_{n_k} \leq c$  para todo  $k$ . Dado qualquer  $n \in \mathbb{N}$  podemos obter  $k$  tal que  $n < n_k$  e então  $x_n \leq x_{n_k}$  e então  $x_n \leq x_{n_k} \leq c$ . Logo  $x_1 \leq x_n \leq c$  para todo  $n$ , o que mostra que a seqüência  $(x_n)$  é limitada.

Exemplo 8 - Se  $|a| < 1$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ . Aplicando diretamente a definição de limite vê-se que não há diferença alguma entre as afirmações  $\lim x_n = 0$  e  $\lim |x_n| = 0$ . Podemos portanto admitir que  $0 \leq a < 1$ . Neste caso,  $a \geq a^2 \geq a^3 \geq \dots \geq a^n \geq \dots \geq 0$  e então  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência monótona limitada. Pela Proposição

ção 7, existe  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ . Sabemos que  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot a^n) = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a \cdot \ell$ . Logo  $(1-a) \cdot \ell = 0$ . Como  $1-a > 0$ , segue-se que  $\ell = 0$ .

Proposição 8 - Seja  $(x_n)$  uma seqüência de números reais, com  $\lim x_n = a > b$ . Então  $x_n > b$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Demonstração: Dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ . Tomando  $\epsilon = a - b$ , obtemos  $n > n_0 \Rightarrow b < x_n$ , como queríamos demonstrar.

Corolário - Se  $x_n \leq b$  para valores arbitrariamente grandes de  $n$ , existe  $a = \lim x_n$ , então  $a \leq b$ .

Com efeito, se fosse  $a > b$ , teríamos  $x_n > b$  para todo  $n$  suficientemente grande, isto é,  $x_n \leq b$  no máximo para um número finito de índices  $n$ .

Observação: Evidentemente valem resultados análogos à Proposição 8 e seu corolário, com  $<$  e  $\geq$  respectivamente.

Exemplo 9 - Se  $a > 0$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 1$ . Suponhamos que seja  $a > 1$ . Então  $a > a^{1/2} > a^{1/3} > \dots > 1$ .

Pela Proposição 7, existe  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$  e  $l \geq 1$  pelo

Corolário acima. Considerando a subsequência

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} \approx \left(a^{\frac{1}{n}}\right), \text{ vemos que}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n+1}}} = 1. \text{ O caso em que } 0 < a < 1$$

se trata de modo análogo.

### §3. Séries.

Seja  $(x_n)$  uma seqüência num espaço vetorial normado  $E$ . Para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$ , formemos a soma parcial (ou reduzida)  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Se existe  $a \in E$  tal que  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , dizemos que  $a$  é a soma da série  $\sum x_n$ , e escrevemos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots .$$

Neste caso, a série  $\sum x_n$  diz-se convergente.

Quando a seqüência das somas parciais  $S_n$  não possui limite em  $E$ , dizemos que a série  $\sum x_n$  é divergente.

Uma condição necessária para a convergência da série  $\sum x_n$  é que se tenha  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Com efeito, se  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , então  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$  também. Como  $x_n = S_n - S_{n-1}$ , temos:

$$\lim_n x_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = a - a = 0.$$

Esta condição não é suficiente. O contra-exemplo clássico é dado pela série harmônica  $\sum \frac{1}{n}$ . Evidentemente, temos  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ . Mas a seqüência das somas parciais  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  contém uma subseqüência ilimitada, pois

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots + \\ + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Segue-se que  $(s_n)$  não é uma seqüência convergente e portanto a série harmônica diverge.

Um exemplo importante é o da série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots .$$

Aqui,  $a$  é um número real ou complexo. É conveniente começar a soma a partir de  $n = 0$ , para simplificar a resposta.

Quando  $|a| < 1$ , a série geométrica converge, e sua soma é igual a  $(1-a)^{-1}$ . Com efeito, um cálculo simples nos mostra que, para  $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ , tem-se  $s_n - a \cdot s_n = 1 - a^{n+1}$ , donde  $s_n = (1-a)^{-1} \cdot (1-a^{n+1})$ . Como  $|a| < 1$ , o Exemplo 8 nos dá  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$  e portanto  $\lim s_n = (1-a)^{-1}$ .

Por outro lado, se for  $|a| \geq 1$ , a série geométrica divergirá pois neste caso a  $n$ -ésima parcela,  $a^n$ , não tende para zero.

Exemplo 9 - Seja  $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  o conjunto das transformações lineares  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Como sabemos, toda  $T \in E$  é contínua e  $\|T\| = \sup\{|T \cdot x|; x \in \mathbb{R}^n, |x|=1\}$  define uma norma no espaço vetorial  $E$ . (Capítulo 2, §4.) Além disso,  $E$  vem munido de uma multiplicação (composição) tal que  $\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ . Se  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear com  $\|T\| < 1$  então  $|T \cdot x| < |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e portanto  $x - T \cdot x \neq 0$  para todo  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ . Indicando com  $I$  a transformação linear identidade de  $\mathbb{R}^n$ , isto nos diz que  $\|T\| < 1 \Rightarrow I-T$  injetiva. Ora, sabe-se da Álgebra Linear que toda transformação linear injetiva de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo é invertível. Assim,  $\|T\| < 1 \Rightarrow (I-T)^{-1}$  existe. Mostraremos agora que a "série geométrica"  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots$  converge n no espaço vetorial normado  $E$ , e sua soma é  $(I-T)^{-1}$ . Com efeito, escrevendo  $S_n = I + T + \dots + T^n$ , vemos, como acima, que  $S_n = (I-T)^{-1}(I-T^{n+1})$ . Para concluir que  $\lim S_n = (I-T)^{-1}$ , basta observar que  $\|T\| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} = 0$ , pois  $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|^{n+1} = 0$ , conforme o Exemplo 8. Note-se que, se tivéssemos um espaço vete-

rial normado  $F$ , de dimensão infinita, em vez de  $\mathbb{R}^n$ , a hipótese  $\|T\| < 1$  não bastaria para que  $I-T: F \rightarrow F$  tivesse inverso. Há uma condição adicional que é preciso impor a  $F$  a fim de que isso seja verdade. Vide Capítulo 7, adiante.

Quando os termos da série  $\sum x_n$  são números reais  $x_n \geq 0$ , as somas parciais formam uma seqüência não-decrescente  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$ . Logo, uma série  $\sum x_n$  de termos não-negativos converge se, e somente se, suas somas parciais onstituem uma seqüência limitada. Ora, uma seqüência monótona é e somente se, possui uma subsequência limitada. Usaremos esta observação (Corolário da Proposição 7) para mostrar que a série  $\sum \frac{1}{2^n}$  é convergente.

Com efeito, pondo  $n_k = 2^k - 1$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos .

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{(2^{k-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \dots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} . \end{aligned}$$

Assim cada  $S_{n_k}$  é inferior à  $k$ -ésima soma parcial da sé-

rie geométrica  $\sum \frac{1}{2^n}$ . Logo, a subsequência  $(s_{n_k})$  é limitada e, por conseguinte, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Uma série  $\sum_n x_n$ , cujos termos  $x_n$  pertencem ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$ , é convergente se, e somente se, é convergente cada uma das séries de números reais  $\sum_n x_{ni}$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) onde  $x_{ni} = p_i(x_n)$  =  $i$ -ésima coordenada do vetor  $x_n$ .

#### §4. Convergência e topologia.

Mostraremos agora que, nos espaços métricos, os conceitos topológicos introduzidos nos capítulos anteriores podem ser todos expressos mediante limites de seqüências. Começaremos com a noção de função contínua.

Proposição 9 - Sejam  $M, N$  espaços métricos. A fim de que a aplicação  $f: M \rightarrow N$  seja contínua no ponto  $a \in M$  é necessário e suficiente que  $x_n \rightarrow a$  em  $M$  implique  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  em  $N$ .

Demonstração: Seja  $f$  contínua no ponto  $a$ . Se  $x_n \rightarrow a$  então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$ . A partir de  $\delta$ , obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ . Logo  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Para demonstrar a recíproca suponhamos, por absurdo, que  $f$  não seja contínua no ponto  $a$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos obter  $x_n \in M$ , com  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$  e  $d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ . Isto nos dá uma seqüência  $(x_n)$  em  $M$ , com  $x_n \rightarrow a$  sem que  $f(x_n)$  converja para  $f(a)$ .

Corolário 1 - Para que  $f: M \rightarrow N$  seja contínua no ponto  $a$ , é suficiente que  $x_n \rightarrow a$  implique  $(f(x_n))$  convergente em  $N$ .

Basta mostrar que, nestas condições,  $x_n \rightarrow a$  implica  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Ora, se  $x_n \rightarrow a$ , a seqüência  $(z_n) = (x_1, a, x_2, a, \dots)$  converge para  $a$ . Logo  $(f(z_n)) = (f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$  é convergente, o que implica  $\lim f(x_n) = f(a)$ .

Corolário 2 - Para que  $f: M \rightarrow N$  seja contínua no ponto  $a$ , é suficiente que  $x_n \rightarrow a$  implique que  $(f(x_n))$  possui uma subseqüência convergindo para  $f(a)$ .

Trata-se, na verdade, de um corolário da demonstração, na qual, supondo  $f$  descontínua no ponto  $a$ , obtivemos uma seqüência  $(x_n)$  com  $x_n \rightarrow a$ , mas nenhuma subseqüência de  $(x_n)$  pode convergir para  $f(a)$ .

Corolário 3 - A aplicação  $f: M \rightarrow N$  é contínua se, e somente se, a imagem  $(f(x_n))$  de toda seqüência convergente  $(x_n)$  em  $M$  é uma seqüência convergente em  $N$ . No caso afirmativo, tem-se  $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$ .

Proposição 10 - Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . A fim de que se tenha  $a \in \bar{X}$  em  $M$ , é necessário e suficiente que  $a$  seja limite de uma seqüência de pontos  $x_n \in X$ .

Demonstração: Se  $a \in \bar{X}$  então, para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos obter um ponto  $x_n \in B(a; \frac{1}{n}) \cap X$ . Isto nos dá uma seqüência de pontos  $x_n \in X$ , com  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$  e portanto  $\lim x_n = a$ . Reciprocamente, se  $a = \lim x_n$ ,  $x_n \in X$  então toda bola aberta de centro  $a$  contém pontos  $x_n$  pertencentes a  $X$ . Logo  $a \in \bar{X}$ .

Corolário 1 - A fim de que o ponto  $a$  pertença à fronteira do conjunto  $X$ , é necessário e suficiente que  $a$  seja limite de uma seqüência de pontos  $x_n \in X$  e de uma seqüência de pontos  $y_n \in M-X$ .

Com efeito, a fronteira de  $X$  é  $\partial X = \bar{X} \cap \overline{M-X}$ .

Corolário 2 - Um subconjunto  $X \subset M$  é denso no espaço métrico  $M$  se, e somente se, todo ponto de  $M$  é limite de uma seqüência de pontos de  $X$ .

Corolário 3 - A fim de que um conjunto  $F$  seja fechado em  $M$ , é necessário e suficiente que ele contenha o limite de cada seqüência de pontos  $x_n \in F$  que converja em  $M$ .

Ou seja,  $F \subset M$  é fechado se, e somente se,  $x_n \in F$ ,  $x_n \rightarrow a \in M \Rightarrow a \in F$ . (Isto diz que  $F$  é fechado relativamente à operação de tomar limites em  $M$ .)

A demonstração do Corolário 3 se faz apelando para a Proposição 10 e observando que  $F$  é fechado se, e somente se,  $F = \bar{F}$ .

Proposição 11 - Um conjunto  $A$  é aberto em  $M$  se, e somente se, cumpre a seguinte condição:

$x_n \rightarrow a \in A \Rightarrow x_n \in A$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Demonstração: Se  $A$  é aberto e  $x_n \rightarrow a \in A$  então existe uma bola  $B(a; \epsilon) \subset A$  e portanto existe  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; \epsilon) \subset A$ . Reciprocamente, supondo cumprida a condição, dada uma seqüência de pontos  $x_n \in M-A$  com  $\lim x_n = b$ , não se pode ter  $b \in A$ , logo  $b \in M-A$ . Assim,  $M-A$  é fechado (vide Corolário 2 acima) e consequentemente  $A$  é aberto.

Proposição 12 - A fim de que a seja ponto de acumulação

de um conjunto  $X \subset M$  é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos distintos  $x_n \in X$ .

Demonstração: A condição é evidentemente suficiente. Suponhamos agora  $a \in X'$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a bola aberta  $B(a; \frac{1}{n})$  contém uma infinidade de pontos de  $X$ . Podemos então escolher sucessivamente os pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  de tal modo que  $x_n \in X$ ,  $x_n \in B(a; \frac{1}{n})$ , mas  $x_n$  não é nenhum dos pontos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  escolhidos anteriormente. Então  $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$  e, como  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ , temos  $\lim x_n = a$ .

Exemplo 10 - Vimos na Proposição 8 que  $\lim x_n = a > b$  na reta implica  $x_n > b$  para todo  $n$  suficientemente grande. Isto é um caso particular da Proposição 11 pois o conjunto  $(b, +\infty)$ , dos pontos  $x > b$  é aberto na reta. Também o Corolário da Proposição 8, segundo o qual  $x_n \leq b$  para todo  $n \Rightarrow \lim x_n \leq b$  (caso  $\lim x_n$  exista) decorre, como caso particular, do Corolário 3 da Proposição 10 pois o conjunto  $(-\infty, b]$  dos pontos  $x \leq b$  é fechado na reta.

Exemplo 11 - A noção de limite de uma seqüência e os resultados acima estabelecidos permitem dar demonstrações bastante intuitivas de alguns fatos topológicos. Por exemplo, dado  $X \subset M$  limitado e não-vazio, mos-

traremos que  $\text{diam.}X = \text{diam.}\bar{X}$ . Seja  $c = \text{diam.}X$ . Dados  $x, y \in \bar{X}$  quaisquer, temos  $x = \lim x_n$  e  $y = \lim y_n$ , com  $x_n, y_n \in X$  para todo  $n$ . Então  $d(x_n, y_n) \leq c$  para todo  $n$  e, por conseguinte  $d(x, y) = d(\lim x_n, \lim y_n) = \lim d(x_n, y_n) \leq c$ . [A segunda igualdade deve-se à continuidade da função  $d$ , e a desigualdade ao Corolário da Proposição 8.] Portanto  $\text{diam.}\bar{X} \leq \text{diam.}X$ . Como é evidente que  $\text{diam.}X \leq \text{diam.}\bar{X}$ , concluimos que  $X$  e  $\bar{X}$  têm diâmetros iguais.

Exemplo 12 - Sejam,  $f, g: M \rightarrow N$  contínuas. O conjunto  $F$  dos pontos  $x \in M$  tais que  $f(x) = g(x)$  é fechado em  $M$ . Com efeito, dada uma seqüência de pontos  $x_n \in F$ , com  $\lim x_n = a \in M$ , temos  $f(x_n) = g(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue-se daí que  $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(a)$ . Logo  $a \in F$  e portanto  $F$  é fechado.

Exemplo 13 - Sejam  $f, g: M \rightarrow N$  aplicações contínuas. Se  $f(x) = g(x)$  para todo ponto  $x$  pertencente a um subconjunto  $X \subset M$  então  $f(y) = g(y)$  para todo  $y \in \bar{X}$ . Com efeito, o conjunto dos pontos  $x \in M$  nos quais  $f(x) = g(x)$  é fechado e contém  $X$ , logo contém  $\bar{X}$ . Em particular, se as funções contínuas  $f, g: M \rightarrow N$  coincidem num subconjunto denso  $X \subset M$  então  $f = g$ . Mais

em particular: sejam  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas num intervalo  $I$ . Se  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in I$  racional, então  $f = g$ .

### §5. Seqüências de funções.

Há diferentes maneiras de se definir o que se entende quando se diz que "uma seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$ , tomado valores num espaço métrico  $M$ , converge para a aplicação  $f: X \rightarrow M$ ". Entre os diversos tipos de convergência, os mais naturais e comuns são a convergência simples e a convergência uniforme.

Diz-se que a seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  (definidas num conjunto arbitrário  $X$  e tomado valores num espaço métrico  $M$ ) converge simplesmente (ou pontualmente) em  $X$  para a aplicação  $f: X \rightarrow M$  quando, para cada  $x \in X$ , a seqüência  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$  tem limite  $f(x)$  em  $M$ . Ou seja, para cada  $x \in X$ , tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Isto significa, evidentemente, que, dado arbitrariamente  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo de  $x$  e de  $\epsilon$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ .

Exemplo 14 - A seqüência de funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$f_n(x) = \frac{x}{n}$ , converge simplesmente em  $\mathbb{R}$  para a função identicamente nula. Com efeito, para cada  $x \in \mathbb{R}$  fixado, tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$ . Mais detalhadamente: dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$ , tomamos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > \frac{|x|}{\epsilon}$ . Então  $n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x}{n} \right| < \epsilon$ . Note-se que, mesmo mantendo  $\epsilon > 0$  fixo, não se pode determinar um número natural  $n_0$  que seja satisfatório para todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$ .

Diremos que a seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  converge uniformemente em  $X$  para a aplicação  $f: X \rightarrow M$  quando, para todo número real  $\epsilon > 0$  dado, for possível obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ , qualquer que seja  $x \in X$ .

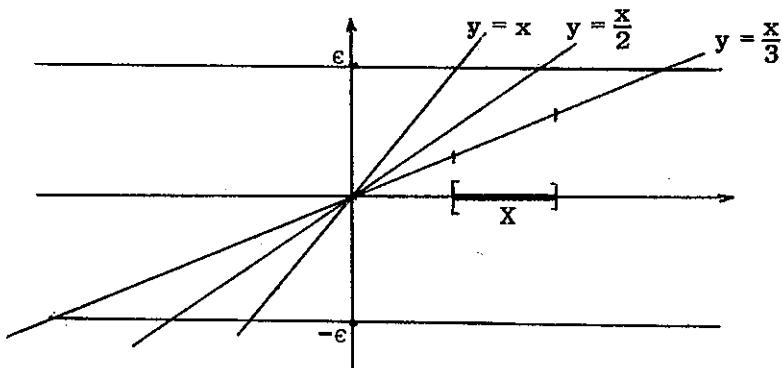
A expressão grifada acima contém a essência da uniformidade: o número natural  $n_0$ , escolhido a partir do  $\epsilon > 0$  dado, é satisfatório em todos os pontos  $x \in X$ .

Evidentemente, se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  então  $f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $X$ . Em particular, se sabemos que  $f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $X$ , então  $(f_n)$  não pode convergir uniformemente em  $X$  para outra aplicação que não seja  $f$ .

Exemplo 15 - A seqüência de funções  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  converge uniformemente para (a função) 0 em qualquer subconjunto limitado  $X \subset \mathbb{R}$ . De fato, se  $|x| \leq c$  para

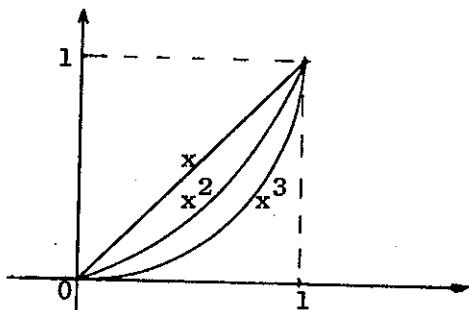
todo  $x \in X$ , então, dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $n_0 > \frac{c}{\epsilon}$ . Feito isto,  $n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{c}{n} < \epsilon$  qualquer que seja  $x \in X$ . Por outro lado, a seqüência de funções  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, se tomarmos  $\epsilon = 1$ , por exemplo, seja qual for  $n_0 \in \mathbb{N}$  escolhido, podemos achar  $n > n_0$  e  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $\left| \frac{x}{n} \right| > 1$ . Basta tomar primeiro  $n > n_0$  e depois  $x > n$ . Isto mostra que a convergência  $\frac{x}{n} \rightarrow 0$  não é uniforme em  $\mathbb{R}$ . Como observamos acima, daí decorre que  $\frac{x}{n}$  não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  para função alguma.

Estas considerações podem ser visualizadas geometricamente. O gráfico da função  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  é a reta  $y = \frac{x}{n}$ , que passa pela origem e tem inclinação  $\frac{1}{n}$ . Dizer que  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente significa afirmar que cada faixa horizontal  $\mathbb{R}_x(-\epsilon, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\epsilon < y < \epsilon\}$  contém os gráficos de todas as funções  $f_n$  salvo, no máximo, um número finito deles.



Ora, nenhuma reta  $y = \frac{x}{n}$ , por maior que seja  $n$ , está inteiramente contida numa faixa horizontal. No entanto, se fixamos um conjunto limitado  $X \subset \mathbb{R}$  veremos que, dado  $\epsilon > 0$ , para todo  $n$  suficientemente grande, a parte da reta  $y = \frac{x}{n}$  situada sobre  $X$  está contida na faixa  $\mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$ .

Exemplo 16 - A seqüência de funções  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = x^n$ , converge simplesmente em  $[0,1]$  para a função  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$  e  $f(1) = 1$ . Com efeito, fixado  $x \in [0,1)$ , o Exemplo 8 nos dá  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , enquanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ . Mas esta convergência não é uniforme em  $[0,1]$ . Na realidade, não é uniforme mesmo no intervalo menor  $[0,1)$  pois, tomando  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < 1$ , por maior que seja  $n$ , existirão sempre pon-



tos  $x \in [0,1)$  tais que  $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| \geq \epsilon$ . Basta tomar  $x$  tal que  $\sqrt[n]{\epsilon} \leq x < 1$ . Por outro lado, em todo

intervalo da forma  $[0, 1-\delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  uniformemente. Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\delta)^n = 0$ , segue-se que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow (1-\delta)^n < \epsilon$ . Portanto, para todo  $x \in [0, 1-\delta]$ , e todo  $n > n_0$ , temos  $0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n < \epsilon$ .

Mostraremos agora que a convergência uniforme pode ser interpretada como convergência de pontos num espaço métrico conveniente.

Considerar funções como pontos de um espaço métrico, no qual a distância foi definida de modo a originar um tipo adequado de convergência, é uma das técnicas usuais da Análise Funcional.

Na proposição seguinte,  $X$  é um conjunto arbitrário e  $M$  é um espaço métrico. São consideradas ainda uma aplicação  $f: X \rightarrow M$  e uma seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$ .

Proposição 13 - Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  então, para todo  $n$  suficientemente grande,  $f_n$  está a uma distância finita de  $f$  e  $\lim f_n = f$  no espaço métrico  $\beta_f(X; M)$ . Reciprocamente, se  $\lim f_n = f$  em  $\beta_f(X; M)$ , então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$ .

Demonstração: Basta observar que, sendo  $d(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x))$ , tem-se  $d(f_n, f) < \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in X$  e, por outro lado,  
 $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in X \Rightarrow d(f_n, f) \leq \epsilon$ .

Em particular, se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente e  $f$  é limitada então, para todo  $n$  suficientemente grande,  $f_n$  é limitada.

Exemplo 16 - Seja  $E$  um espaço vetorial normado. São dadas as seqüências de aplicações  $f_n, g_n: X \rightarrow E$  e também  $f, g: X \rightarrow E$ . Se  $f_n \rightarrow f$  e  $g_n \rightarrow g$  uniformemente em  $X$  então  $f_n + g_n \rightarrow f + g$  uniformemente em  $X$ , como se vê imediatamente. Se for dada ainda uma seqüência de funções  $\lambda_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ , convergindo uniformemente em  $X$  para a função  $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ , então a seqüência de aplicações  $\lambda_n \cdot f_n: X \rightarrow E$ , definidas por  $(\lambda_n \cdot f_n)(x) = \lambda_n(x) \cdot f_n(x)$ , converge simplesmente para  $\lambda \cdot f: X \rightarrow E$ . A convergência é uniforme se  $\lambda$  e  $f$  são aplicações limitadas. Com efeito, suponhamos que se tenha  $|\lambda(x)| \leq a$  e  $|f(x)| \leq b$  para todo  $x \in X$ . Então, da identidade  $\lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f = (\lambda_n - \lambda) \cdot (f_n - f) + \lambda \cdot (f_n - f) + (\lambda_n - \lambda) \cdot f$ , resulta que, para todo  $x \in X$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$|\lambda_n(x) \cdot f_n(x) - \lambda(x) \cdot f(x)| \leq |\lambda_n(x) - \lambda(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + a \cdot |f_n(x) - f(x)| + b \cdot |\lambda_n(x) - \lambda(x)|.$$

Dai se conclui facilmente que  $\lambda_n \cdot f_n \rightarrow \lambda \cdot f$  uniformemente em  $X$ . Note que se a hipótese de  $\lambda$  e  $f$  serem ambas

limitadas é essencial, como se conclui do Exemplo 15, onde  $\lambda_n(x) = \frac{1}{n}$ ,  $f_n(x) = x$ ,  $\lambda(x) = 0$ ,  $f(x) = x$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ . As convergências  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  e  $f_n \rightarrow f$  são uniformes em  $\mathbb{R}$ . Além disso,  $\lambda$  é limitada. Mas  $f$  não é. Por isso, é que  $\lambda_n \cdot f_n = \frac{x}{n}$  não converge uniformemente para 0 em  $\mathbb{R}$ . Por outro lado,  $\lambda_n \cdot f_n \rightarrow 0$  uniformemente em cada parte limitada  $X \subset \mathbb{R}$  porque  $f(x) = x$  é uma função limitada em  $X$ .

Proposição 14 - Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações  $f_n: M \rightarrow N$ , contínuas no ponto  $a \in M$ , converge uniformemente em M para uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

Demonstração: Seja  $F$  o conjunto das aplicações  $g: M \rightarrow N$  que estão a uma distância finita de  $f$  e são contínuas no ponto  $a \in M$ . Sabemos que  $F$  é um subconjunto fechado do espaço métrico  $\mathcal{B}_f(M; N)$ . (Vide Exemplo 23, Capítulo 3.) Para todo  $n$  suficientemente grande, temos  $f_n \in F$ . Como  $\lim f_n = f$  em  $\mathcal{B}_f(M; N)$ , segue-se do Corolário 3 da Proposição 10 que  $f \in F$ , ou seja,  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

Segunda demonstração: Para provar que  $f$  é contínua no ponto  $a$ , supomos dado  $\epsilon > 0$  e es-

colhemos um número natural  $n$  tal que  $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$  para todo  $x \in X$ . Como  $f_n$  é contínua no ponto  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  em  $M$  implica  $d(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Então, para todo  $x \in M$  com  $d(x, a) < \delta$ , temos:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Corolário - O limite uniforme de uma seqüência de aplicações contínuas  $f_n: M \rightarrow N$  é uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$ .

## §6. Produtos cartesianos infinitos.

Dada uma família infinita enumerável de espaços métricos  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ , seu produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é o conjunto de todas as seqüências  $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$  onde  $x_i \in M_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Os pontos  $x_i \in M_i$  são chamados as coordenadas do ponto  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , a  $i$ -ésima projeção  $p_i: M \rightarrow M_i$ ,

definida por  $p_i(x) = x_i$ , associa a cada ponto  $x = (x_i)$  do produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  sua  $i$ -ésima coordenada.

Desejamos introduzir uma métrica no produto cartesiano enumerável, chamada "métrica produto", a qual deverá caracterizar-se pelo fato de que uma aplicação  $f: M \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} N_i$  será contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas  $p_i \circ f: M \rightarrow N_i$  for contínua.

Faremos inicialmente a seguinte hipótese sobre os espaços métricos  $(M_i, d_i)$ , cujo produto estamos considerando:

Existe, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , uma constante  $c_i > 0$  tal que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$  é convergente e  $d_i(x_i, y_i) \leq c_i$  sejam quais forem  $x_i, y_i \in M_i$ .

Definiremos então a métrica produto em  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ , pondo, para  $x = (x_i)$  e  $y = (y_i)$  em  $M$ :

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i).$$

Em virtude da hipótese feita sobre os espaços  $M_i$ , a série acima converge e, como se vê facilmente,  $d(x, y)$  satisfaz os axiomas que definem uma métrica. O par  $(M, d)$  é chamado o espaço métrico produto dos espaços  $M_i$ .

As projeções  $p_i: (M, d) \rightarrow (M_i, d_i)$  são contrações fracas e portanto são aplicações contínuas do produto

$\pi M_i$  em cada um dos seus fatores  $M_i$ .

Segue-se daí que se tomarmos um aberto  $A_i \subset M_i$ , sua imagem inversa  $p_i^{-1}(A_i)$  é um subconjunto aberto do produto  $M$ . Ora, temos:

$$\begin{aligned} p_i^{-1}(A_i) &= \{x \in \pi M_i; x_i \in A_i\} = \\ &= M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times A_i \times M_{i+1} \times M_{i+2} \times \dots, \end{aligned}$$

e por isso o conjunto acima é chamado a "fatia aberta de largura  $A_i$ ". Como a interseção de um número finito de conjuntos abertos é ainda um aberto, vemos que, tomando  $A_1 \subset M_1, \dots, A_n \subset M_n$  abertos nestes fatores, o conjunto

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n}^{\infty} M_i$$

é aberto no produto cartesiano  $M$ , pois  $A = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n)$  é interseção de fatias abertas. Os conjuntos  $A$  do tipo acima são chamados abertos básicos do produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ .

Proposição 15 - Todo subconjunto aberto  $U \subset \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é reunião de abertos básicos.

Demonstração: Para todo  $x \in U$  existe  $r > 0$  tal que

$B(x; r) \subset U$ . Como a série  $\sum c_i$  é convergente, podemos obter  $n$  tal que  $\sum_{i>n} c_i < \frac{r}{2}$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , seja  $A_i = B(x_i, \frac{r}{2n})$  a bola de centro  $x_i$

e raio  $\frac{r}{2n}$  no espaço  $M_i$ . Afirmamos que o aberto básico  $A_x = A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$  está contido em  $B(x, r)$  e por tanto em  $U$ . Com efeito  $y = (y_i) \in A_x \Rightarrow d_1(y_1, x_1) < \frac{r}{2n}, \dots, d_n(y_n, x_n) < \frac{r}{2n} \Rightarrow d(y, x) = \sum_{i \leq n} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i>n} d_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$  pois  $\sum_{i>n} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i>n} c_i < \frac{r}{2}$ . Temos então, para cada  $x \in U$ , um aberto básico  $A_x$  tal que  $x \in A_x \subset U$ . Segue-se que  $U = \bigcup_{x \in U} A_x$ .

Corolário - As projeções  $p_i: M \rightarrow M_i$  são aplicações (contínuas e) abertas do produto  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ .

Se  $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$  é um aberto básico, então  $p_i(A) = A_i$  para  $i \leq n$  e  $p_i(A) = M_i$  se  $i > n$ . Logo  $p_i(A)$  é aberto em  $M_i$ . Dado um aberto qualquer  $U \subset M$ , temos  $U = \bigcup A_x$ , reunião de abertos básicos. Logo  $p_i(U) = p_i(\bigcup_x A_x) = \bigcup_x p_i(A_x)$  é uma reunião de abertos e portanto é um aberto em  $M_i$ .

Proposição 16 - Uma aplicação  $f: N \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas  $f_i = p_i \circ f: N \rightarrow M_i$  é contínua.

Demonstração: Se  $f$  é contínua, então cada  $f_i = p_i \circ f$  é contínua como composta de aplicações contínuas. Reciprocamente, supondo cada  $f_i$  contínua, dado

um aberto básico  $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$ , temos  $A = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n)$ , donde  $f^{-1}(A) = f^{-1}p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-1}p_n^{-1}(A_n) = (fp_1)^{-1}(A_1) \cap \dots \cap (fp_n)^{-1}(A_n) = f_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(A_n)$ . Logo  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $N$ . O aberto mais geral no produto  $\prod M_i$  é uma reunião  $U = \bigcup_x A_x$  de abertos básicos. Logo  $f^{-1}(U) = \bigcup_x f^{-1}(A_x)$  é um subconjunto aberto de  $N$ . Segue-se da Proposição 3, Capítulo 3, que  $f$  é contínua.

Corolário - Uma seqüência de pontos  $x_n \in M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  converge para o limite  $a \in M$  se, e somente se,  
para cada  $i \in \mathbb{N}$ , a seqüência  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, \dots) = (x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$ , converge em  $M_i$  para o limite  $a_i$ . Ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i$ .

Este corolário resulta da Proposição 16 do mesmo modo como foi demonstrada a Proposição 5. Observamos ainda que o corolário acima poderia ter sido demonstrado diretamente. A Proposição 16 resulta imediatamente dele, em virtude da Proposição 9.

Proposição 17 - Uma métrica em  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é equivalente à métrica produto se, e somente se, cumpre a Proposição 16 ou (o que é o mesmo) seu corolário.

Demonstração: Sejam  $d$  a métrica produto e  $\rho$  outra mé-

trica em  $M = \prod M_i$  em relação à qual a Proposição 16 é verdadeira. Como a aplicação identidade  $(M, \rho) \rightarrow (M, \rho)$  é contínua, segue-se que cada projeção  $p_i: (M, \rho) \rightarrow M_i$  é contínua. Então, como d cumpre a Proposição 16, vemos que a aplicação identidade  $\alpha: (M, \rho) \rightarrow (M, d)$  é contínua. De modo semelhante se mostra que a aplicação identidade  $\beta: (M, d) \rightarrow (M, \rho)$  é contínua. Logo as métricas d e  $\rho$  são equivalentes. A recíproca é óbvia: se  $\rho$  é equivalente à métrica produto d então as aplicações contínuas  $f: N \rightarrow (M, d)$  e  $f: N \rightarrow (M, \rho)$  são as mesmas. Por conseguintes,  $\rho$  cumpre a Proposição 16. Quanto ao Corolário, se ele é válido para  $\rho$  e a métrica produto d então estas duas métricas determinam a mesma noção de limite no produto cartesiano  $M = \prod M_i$  e portanto os abertos de M são os mesmos segundo d ou segundo  $\rho$ . (Vide Proposição 11.) Então d e  $\rho$  são equivalentes. (Corolário da Proposição 4, Capítulo 3.) A recíproca é óbvia.

Proposição 18 - Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $x_i \subset M_i$ . O fecho do produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$  em

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i \text{ é dado por } \overline{\prod_{i=1}^{\infty} x_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \overline{x_i}.$$

Demonstração: Um ponto  $a \in M$  é aderente a  $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$  se, e somente se,  $a = \lim x_n$ , onde cada  $x_n \in \prod_{i=1}^{\infty} x_i$ . Pelo Corolário da Proposição 16, isto equivale

a dizer que  $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ , onde cada  $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_i}$  pertence ao fecho do conjunto  $X_i$ , ou seja  $a \in \pi\bar{X}_i$ . Por conseguinte,  $\pi\bar{X}_i = \pi\bar{X}_i$ .

Corolário 1 - Se, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $F_i \subset M_i$  é fechado, então  $\prod_{i=1}^{\infty} F_i$  é fechado no produto  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ .

Corolário 2 - Se cada  $X_i \subset M_i$  é denso ( $i = 1, 2, \dots$ ) então  $\pi X_i$  é denso em  $\pi M_i$ .

Observações: 1) Se  $\pi X_i$  é fechado em  $\pi M_i$  então, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $X_i$  é fechado em  $M_i$ , pois  $\pi X_i = \overline{\pi X_i} = \pi\bar{X}_i \Rightarrow X_i = \bar{X}_i$  para cada  $i$ . Entretanto a projeção de um subconjunto fechado  $F \subset \pi M_i$  num dos fatos  $M_i$  pode não ser fechada. (Vide Exemplo 21, Capítulo 3.)

2) Não é verdade que o produto cartesiano  $A = A_1 \times \dots \times A_i \times \dots$  de uma infinidade de conjuntos abertos  $A_i \subset M_i$  seja aberto no produto  $M = \pi M_i$ . Para que  $A = \pi A_i$  seja aberto em  $M$  é suficiente que exista  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $i > n \Rightarrow A_i = M_i$ , pois neste caso  $A$  será um aberto básico. Esta condição também é necessária (quando  $A$  não é vazio) pois se  $A = \pi A_i$  é aberto não-vazio, tomando  $x \in A$ , podemos obter um aberto básico  $A' = A'_1 \times \dots \times A'_n \times \prod_{i>n} M_i$  tal que  $x \in A' \subset A$ . Logo  $A_i = M_i$

para todo  $i > n$ .

3) Resulta do fato de cada  $\rho_i: \pi M_i \rightarrow M_i$  ser uma sobrejeção contínua que a projeção de um subconjunto denso  $X \subset \pi M_i$  em cada um dos fatores  $M_i$  é densa em  $M_i$ .

Vejamos agora como definir uma métrica no produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  quando os fatores  $M_i$  são espaços métricos quaisquer, aos quais não se impõe a condição  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(M_i) < \infty$ .

Substitui-se em cada espaço  $(M_i, \rho_i)$  sua métrica original  $\rho_i$  por outra  $d_i$ , que lhe seja equivalente e que, além disso, cumpra  $d_i(x_i, y_i) \leq \frac{1}{2^i}$  para  $x_i, y_i \in M_i$  quaisquer. Definimos então a métrica produto  $d$  em  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ , pondo, como antes,  $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i)$ .

Como a série geométrica  $\sum \frac{1}{2^i}$  é convergente, valem todas as conclusões já estabelecidas neste §6. Em particular, é válida a Proposição 17, segundo a qual a escolha das métricas  $d_i$  dentro das condições acima impostas não afeta a classe de equivalência da métrica produto  $d$ .

Podemos ainda ser mais explícitos e definir a métrica produto em  $M = \pi M_i$ , onde  $M_i = (M_i, \rho_i)$ , pondo

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}.$$

Isto equivale a substituir, em cada espaço  $M_i$ , sua métrica original  $\rho_i$  por  $d_i = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\rho_i}{1+\rho_i}$  a qual, como se sabe, é equivalente a  $\rho_i$ .

Se  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i = M$ , então o produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é igual ao conjunto  $\mathcal{F}(N, M)$  de todas as aplicações  $x: N \rightarrow M$ , isto é, de todas as seqüências em  $M$ . Quando  $X$  é um conjunto infinito enumerável, podemos fixar uma bijeção entre  $X$  e  $N$  e, através dela, aplicar a  $\mathcal{F}(X; M)$  todas as propriedades válidas para  $\prod_{i=1}^{\infty} M_i = M^N$ . Em particular, o Corolário da Proposição 17 nos diz que, quando  $X$  é enumerável, dado um espaço métrico qualquer  $M$ , existe uma métrica em  $\mathcal{F}(X; M)$  relativamente à qual se tem  $\lim f_n = f$  se, e somente se,  $f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $X$ . Mais explicitamente, podemos (com uma mudança drástica de notação!) supor  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$  e definir a distância entre duas funções  $f, g: X \rightarrow M$  pondo:

$$d(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f(x_i), g(x_i))}{1+d(f(x_i), g(x_i)))}.$$

Portanto, quando  $X$  é enumerável, a convergência simples de uma seqüência de funções  $f_n: X \rightarrow M$  provém de uma métrica. Para conjuntos não-enumeráveis, este resultado não prevalece. Mostraremos, por exemplo, no Capítulo

lo 7, que não existe métrica alguma no conjunto  $\mathfrak{J}(\mathbb{R}; [0,1]) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}; [0,1])$  relativamente à qual a convergência  $\lim f_n = f$  coincida com a convergência simples. Esta situação contrasta com a da convergência uniforme. (Vide Proposição 13.)

### §7. Limites de funções.

Sejam  $X$  um subconjunto do espaço métrico  $M$ ,  $a \in \bar{X}$  um ponto aderente a  $X$  e  $f: X \rightarrow N$  uma aplicação definida em  $X$  e tomada valores num espaço métrico  $M$ .

Diz-se que um ponto  $b \in N$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , e escreve-se

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado é possível obter  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \epsilon$ .

Quando  $a$  pertence ao domínio  $X$  da aplicação  $f: X \rightarrow N$ , a definição acima nada apresenta de novo: tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  se, e somente se,  $f$  é contínua no ponto  $a$  e  $b = f(a)$ .

Com efeito, se  $f$  é contínua no ponto  $a$ , é im-

diato que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Reciprocamente, se existe  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  então, para todo  $\epsilon > 0$  tem-se  $d(f(a), b) < \epsilon$  pois  $d(a, a) < \delta$  para todo  $\delta > 0$ . Segue-se que  $b = f(a)$  e a definição de limite nos dá então que  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

A noção de limite portanto tem interesse apenas nos casos de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  em que  $a$  é um ponto aderente a  $X$  mas que não pertence a  $X$ . Mesmo assim, manteremos a definição geral, na qual se supõe apenas que se tenha  $a \in \bar{X}$ .

Proposição 19 - Seja  $a \in \bar{X} \subset M$ . Dada  $f: X \rightarrow N$ , tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in N$  se, e somente se, para toda seqüência de pontos  $x_n \in X$ , com  $x_n \rightarrow a$ , tem-se  $\lim f(x_n) = b$ .

Demonstração: faz-se de modo inteiramente análogo à da Proposição 9.

Corolário - Para que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in N$  é suficiente que, para toda seqüência de pontos  $x_n \in X$  com  $x_n \rightarrow a$ , a seqüência  $(f(x_n))$  seja convergente em  $N$ .

Em primeiro lugar, sejam quais forem as seqüências de pontos  $x_n, y_n \in X$ , com  $\lim x_n = \lim y_n = a$ , devemos ter  $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$  pois se fosse  $\lim f(x_n) \neq$

$\neq \lim f(y_n)$ , a nova seqüência  $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$  cumpriria  $\lim z_n = a$  mas  $(f(z_n))$  teria duas subseqüências com limites distintos e portanto não seria convergente. Seja  $b \in N$  o limite comum de todas as seqüências  $(f(x_n))$  onde  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \in X$ . Segue-se da Proposição 19 que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Proposição 20 - Sejam  $M, N$  espaços métricos,  $X$  um subespaço de  $M$  e  $f: X \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Se, para cada ponto  $a \in \bar{X}$ , existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  então a aplicação  $F: \bar{X} \rightarrow N$ , definida por  $F(x) = f(x)$  quando  $x \in X$  e  $F(y) = \lim_{x \rightarrow y} f(x)$  quando  $y \in \bar{X} - X$ , é contínua.

Demonstração: Como  $f$  é contínua em todo ponto  $a \in X$ , segue-se que, seja qual for  $a \in \bar{X}$  temos  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Logo, dados  $a \in \bar{X}$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), F(a)) < \frac{\epsilon}{2}$ . Afirmamos que, para todo  $\bar{x} \in \bar{X}$ , com  $d(\bar{x}, a) < \delta$ , temos  $d(F(\bar{x}), F(a)) < \epsilon$ . Com efeito, se  $\bar{x} = \lim x_n$ , onde  $x_n \in X$  para todo  $n$  e, sem perda de generalidade podemos admitir que  $d(x_n, a) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . (Aplique a Proposição 11 ao aberto  $B(a; \delta)$ .) Portanto,  $d(f(x_n), F(a)) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f(\bar{x}) =$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ n \rightarrow \infty}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ segue-se que } d(F(\bar{x}), F(a)) =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), F(a)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Observação: Dada  $f: X \rightarrow N$  contínua, com  $X \subset M$ , nem sempre existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  para todo  $a \in \bar{X}$ .

Por exemplo,  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  é contínua na semi-reta  $X = (0, +\infty) \subset R$  mas não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Exemplo 17 - Seja  $I = (a, b)$  um intervalo aberto da reta.

Se  $f: (a, b) \rightarrow R$  é monótona limitada, então existem sempre os limites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ . Para fixar as ideias, suponhamos  $f$  não-decrescente e mostremos, por exemplo, que existe  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ . Basta tomar, neste caso,  $L = \sup\{f(x); a < x < b\}$ . Dado  $\epsilon > 0$  arbitrariamente, a definição de  $\sup$  nos permite obter  $x_0 = b - \delta$  em  $(a, b)$  tal que  $L - \epsilon < f(x_0) \leq L$ . Segue-se da monotonicidade de  $f$  que  $b - \delta < x < b \Rightarrow L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \epsilon$  ou, simplificando:  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ .



## CAPÍTULO 6

### CONTINUIDADE UNIFORME

Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  diz-se uniformemente contínua quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  tal que, sejam quais forem  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Evidentemente, toda aplicação uniformemente contínua é uma particular aplicação contínua, para a qual a escolha de  $\delta$  a partir do  $\epsilon$  dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade. Ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente. Pode muito bem ocorrer que cada ponto  $a \in M$  seja centro de uma bola  $B$  tal que  $f|B$  seja uniformemente contínua e, no entanto, a aplicação  $f: M \rightarrow N$  não ser uniformemente contínua. Deve-se ainda levar em conta com cuidado que a noção de continuidade uniforme não é uma noção topológica. Mais precisamente: uma aplicação uniformemente contínua  $f: M \rightarrow N$  pode perder esta propriedade se substi-

tuirmos as métricas de  $M$  e (ou) de  $N$  por outras equivalentes. Dito de outro modo: a definição de aplicação contínua foi dada com  $\epsilon$  e  $\delta$  mas a continuidade pode ser caracterizada apenas com os conjuntos abertos. Em contraste, não é possível dar-se uma condição necessária e suficiente para a continuidade de  $f: M \rightarrow N$  em termos dos abertos de  $M$  e  $N$ .

Uma bijeção  $f: M \rightarrow N$  chama-se um homeomorfismo uniforme quando é uniformemente contínua e sua inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também é. Não se deve confundir esta noção com a de um homeomorfismo uniformemente contínuo, que é uma bijeção uniformemente contínua  $f: M \rightarrow N$ , cuja inversa é (apenas) contínua. Veremos nos exemplos abaixo que as duas noções são diferentes.

Faremos a seguir uma série de observações que visam a esclarecer a idéia de continuidade uniforme. Os resultados mais importantes relativos a esse conceito são o teorema de extensão de aplicações uniformemente contínuas, que demonstraremos no Capítulo 7, e o teorema a ser provado no Capítulo 8, segundo o qual toda aplicação contínua com domínio compacto é uniformemente contínua.

Observações e Exemplos.

Item 1. Se  $f: M \rightarrow N$  e  $g: N \rightarrow P$  são uniformemente contínuas, então a composta  $g \circ f: M \rightarrow P$  também o é. A demonstração é imediata. Em particular, se  $f: M \rightarrow N$  é uniformemente contínua e  $X \subset M$  é um subespaço então  $f|X: X \rightarrow M$  é uniformemente contínua. Basta notar que  $f|X = f \circ i$ , onde  $i: X \rightarrow M$ , dada por  $i(x) = x$  para todo  $x \in X$ , é a aplicação de inclusão. A inversa de uma bijeção uniformemente contínua  $f$  pode não ter esta propriedade, mesmo quando  $f$  é um homeomorfismo. (Vide Item 11, a seguir.)

Item 2. Sejam  $M$  um espaço métrico e  $E$  um espaço vetorial normado. Se  $f, g: M \rightarrow E$  são uniformemente contínuas, o mesmo ocorre com sua soma  $f+g: M \rightarrow E$ , como se vê facilmente. Por outro lado se  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  são uniformemente contínneas, seu produto  $f \cdot g: M \rightarrow \mathbb{R}$  pode não ser, a menos que  $f$  e  $g$  sejam limitadas. (Vide 4 e 14, adiante.)

Item 3. Toda aplicação Lipschitziana  $f: M \rightarrow N$  é uniformemente contínua. De fato, se  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ , então, dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ . De  $d(x, y) < \delta$  segue-se  $d(f(x), f(y)) \leq$

$\leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = \epsilon$ . Em particular, são uniformemente contínuas todas as funções  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  que possuem derivada limitada ( $|f'(x)| \leq c$  para todo  $x \in I$ ) num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , como por exemplo  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $a > 0$  e  $f(x) = \log x$ . Neste caso,  $0 \leq f'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$  para todo  $x \in [a, +\infty)$ . São ainda uniformemente contínuas: as aplicações constantes; as imersões isométricas (em particular, as isometrias); as funções  $d_A: M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A \subset M$  é um subconjunto não-vazio e  $d_A(x) = d(x, A)$ ; as projeções  $p_i: \prod_{n=1}^m M_i \rightarrow M_i$  de um produto cartesiano num dos seus fatores; a métrica  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ; a norma  $x \mapsto |x|$  de um espaço vetorial normado  $E$ , a adição  $s: E \times E \rightarrow E$ ; [Quanto à multiplicação por um escalar,  $m: (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ , vide Item 14 a seguir.]; toda aplicação linear contínua  $f: E \rightarrow F$  (em particular, as aplicações lineares  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow F$ ). Um polinômio  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , restrito a um subconjunto limitado  $X \subset \mathbb{R}$  dá uma função uniformemente contínua  $p|X$ . Uma aplicação  $n$ -linear contínua  $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  (em particular, a multiplicação  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  e toda aplicação  $n$ -linear  $f: \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n} \rightarrow F$ ), quando restrita a um subconjunto limitado  $X \subset E_1 \times \dots \times E_n$ , é uniformemente contínua. (Vide Exemplos 1, 2, 3 e todo o §4 do Capítulo 2.)

Item 4. A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , é contínua, e até mesmo uniformemente contínua em cada parte limitada de  $\mathbb{R}$ . Mas não é uniformemente contínua numa parte ilimitada  $X \subset \mathbb{R}$ . Com efeito, sendo  $(x+\frac{1}{x})^2 - x^2 = 2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ , podemos tomar  $\epsilon = 1$  e observar que, seja qual for  $\delta > 0$  escolhido, existe sempre  $x \in X$  com  $|x| > \frac{1}{\delta}$  e portanto  $y = x + \frac{1}{x}$  cumpre  $|y-x| < \delta$ , mas  $|f(y)-f(x)| = (x+\frac{1}{x})^2 - x^2 \geq 2 > \epsilon$ . De modo análogo, para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos  $(x+\frac{1}{x})^n - x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-2i}$ . Como todas as parcelas neste somatório têm o mesmo sinal e a primeira delas é  $n \cdot x^{n-2}$ , podemos escrever que  $|x| > 1 \Rightarrow |(x+\frac{1}{x})^n - x^n| > n$ . A partir daí concluimos, como no caso  $n = 2$ , que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $f(x) = x^n$  é uniformemente contínua num subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  se, e sómente se,  $X$  é limitado.

Item 5. Seja  $f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -1$  se  $x < 0$  e  $f(x) = 1$  se  $x > 0$ . (Equivalentemente:  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ .) A função  $f$  é contínua (!) mas não: é uniformemente contínua pois há pontos  $x, -x$  tão próximos um do outro quanto se queira, com  $|f(x)-f(-x)| = 2$ .

Item 6. Generalizando o item anterior, seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Se existem dois pontos distintos  $a, b \in N$  tais que os subconjuntos  $F = f^{-1}(a)$

e  $G = f^{-1}(b)$ , fechados em  $N$  e disjuntos, cumprem a condição  $d(F, G) = 0$ , então  $f$  não é uniformemente contínua. Com efeito, tomemos  $\epsilon = d(a, b)$ . A condição  $d(F, G) = 0$  nos dá, para todo  $\delta > 0$ , pontos  $x \in F$  e  $y \in G$  tais que  $d(x, y) < \delta$ . Entretanto, vale  $d(f(x), f(y)) = d(a, b) = \epsilon$ . Caso particular desta situação:  $f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ ; para todo  $a \in S^1$ ,  $f^{-1}(a)$  é a semi-reta aberta de origem  $0$  que passa por  $a$ . Logo, para  $a \neq b$  quaisquer em  $S^1$ , as imagens inversas  $F = f^{-1}(a)$  e  $G = f^{-1}(b)$  cumprem a condição  $d(F, G) = 0$ . Segue-se que  $f$  não é uniformemente contínua.

Item 7. Dados arbitrariamente os conjuntos fechados disjuntos  $F, G$  num espaço métrico  $M$ , podemos obter uma função contínua  $f: M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in F$  e  $f(x) = 1$  para todo  $x \in G$ . (Uma tal  $f$  é o que se chama uma função de Urysohn do par  $F, G$ .) Podemos, por exemplo, tomar  $f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$ ,  $x \in M$ . [Como  $F$  e  $G$  são fechados,  $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$  e  $d(x, G) = 0 \Rightarrow x \in G$ . Sendo  $F$  e  $G$  disjuntos, vemos que o denominador da expressão que define  $f$  é sempre  $> 0$  e portanto  $f$  é contínua.] Quando os subconjuntos fechados  $F, G \subset M$ , além de disjuntos, são tais que

$d(F, G) = 0$ , então uma função de Urysohn do par  $(F, G)$  nunca é uniformemente contínua. Um exemplo deste caso é dado por  $F = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$  = ramo positivo da hipérbole  $y = \frac{1}{x}$  e  $G = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$  = semi-eixo positivo das abscissas.

Item 8. Para todo  $a > 0$ , a função contínua  $f: (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ , é contínua e limitada, mas não é uniformemente contínua. Com efeito, dado qualquer  $\delta > 0$  podemos escolher  $n \in \mathbb{N}$  tal que os pontos  $y = \frac{1}{2n\pi}$  e  $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$  cumpram a condição  $|y-x| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} < \delta$ . No entanto,  $|f(y) - f(x)| = 2$ .

Item 9. Toda aplicação uniformemente contínua  $f: I \rightarrow M$ , definida num intervalo limitado  $I \subset \mathbb{R}$ , é limitada. Com efeito, tomando  $\epsilon = 1$ , vemos que existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in I$ ,  $|x-y| < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < 1$ . Podemos decompor o intervalo  $I$ , por meio de (digamos  $n$ ) pontos intermediários, em  $n+1$  subintervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que  $\delta$ . Dados arbitrariamente  $x, y \in I$ , seja  $k$  o número de pontos de subdivisão  $a_1, a_2, \dots, a_k$  compreendidos entre  $x$  e  $y$ . Tem-se  $k \leq n$ . Se for  $k = 0$ , então entre  $x$  e  $y$  não haverá pontos de subdivisão, logo  $|x-y| < \delta$  e portanto  $|f(x)-f(y)| < 1$ . Caso seja  $k > 0$ , temos  $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_1)) +$

$$+ d(f(a_1), f(a_2)) + \dots + d(f(a_k), f(y)) \leq 1 + 1 + \dots + 1 \leq n.$$

Isto mostra que  $f(I)$  é um conjunto cujo diâmetro é  $\leq n$ .

Logo  $f$  é limitada. Como aplicação, vemos que a função  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$ , é contínua mas não é uniformemente contínua pois não é limitada, por exemplo, no intervalo  $I = (0, 1]$ .

Item 10. Seja  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Toda função monótona sobrejetiva  $f: X \rightarrow J$ , definida num subconjunto qualquer  $X \subset \mathbb{R}$ , é uniformemente contínua. Se não supusermos  $J$  limitado, concluiremos apenas que  $f$  é contínua, devido à Proposição 7 do Capítulo 4. No caso presente, dado  $\epsilon > 0$ , subdividamos o intervalo  $J$ , por meio de  $n$  pontos interiores  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ , em  $n+1$  subintervalos de comprimento  $< \frac{\epsilon}{2}$ . Para fixar idéias, seja  $f$  não-decrescente. Sendo  $f$  sobre  $J$ , existem pontos  $x_1, \dots, x_n$  em  $I$  tais que  $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ . A monotonidade de  $f$  garante que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Seja  $\delta$  o menor dos números  $x_{i+1} - x_i$ . Se  $x, y \in X$  são tais que  $|x-y| < \delta$ , então entre  $x$  e  $y$  existe no máximo um dos pontos  $x_i$ . Como  $f$  é monótona, segue-se que entre  $f(x)$  e  $f(y)$  existe no máximo um dos pontos  $y_i = f(x_i)$ . Logo  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Item 11. Seja  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Mostraremos que  $f$  é uniformemente contínua e não é Lipschitziana. Com efeito, se fixarmos  $a > 0$ , veremos que  $f$  transforma monotonicamente o intervalo  $[0, a]$  sobre  $[0, \sqrt{a}]$ . Segue-se então do item anterior que  $f$  é uniformemente contínua no intervalo  $[0, a]$ . Por outro lado, dados  $x \neq y$  quaisquer em  $[0, +\infty)$ , temos

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y-x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Como o quociente  $1/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$  não é limitado para valores de  $x$  e  $y$  próximos de 0, concluimos que  $f$  não é Lipschitziana em nenhum intervalo da forma  $[0, a]$ . Entretanto,  $x \geq a$  e  $y \geq a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq c \cdot |x-y|$ , com  $c = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ . Logo  $f$  é Lipschitziana, e portanto uniformemente contínua, no intervalo  $[a, +\infty)$ . Assim,  $f$  é uniformemente contínua em  $[0, +\infty)$ , porque o é em  $[0, a]$  e em  $[a, +\infty)$ . Note-se que  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é um homeomorfismo, cujo inverso, dado por  $f^{-1}(y) = y^2$ , não é uniformemente contínuo.

Item 12. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , a identidade  $v^n - u^n = (v-u)(v^{n-1} + v^{n-2}u + \dots + u^{n-1})$  nos permite escrever, para  $x \neq y$  em  $[0, +\infty)$  e  $u = \sqrt[n]{x}$ ,  $v = \sqrt[n]{y}$ :

$$\frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y-x} = \frac{1}{v^{n-1} + v^{n-2}u + \dots + u^{n-1}}.$$

A partir daí, deduzimos, como no ítem anterior, que  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  é um homeomorfismo uniformemente contínuo de  $[0, +\infty)$  sobre si mesmo, que não é Lipschitziano em nenhum intervalo contendo 0, e cujo inverso,  $y \mapsto y^n$ , não é uniformemente contínuo. Quando  $n$  é ímpar, podemos, se quisermos, usar toda a reta  $\mathbb{R}$ , em vez de  $[0, +\infty)$  para as mesmas afirmações, que continuam válidas.

Item 13. Qualquer homeomorfismo de  $\mathbb{R}$  sobre um intervalo limitado, como por exemplo  $h: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ,  $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ , é uniformemente contínuo, em virtude do Item 8 acima, mas seu inverso  $h^{-1}: (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$  não pode ser uniformemente contínuo porque não é limitado (Item 7).

Item 14. Uma aplicação  $f: M \rightarrow N_1 \times \dots \times N_n$ , tomando valores num produto cartesiano de  $n$  espaços métricos, é uniformemente contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas  $f_i = p_i \circ f: M \rightarrow N_i$  for uniformemente contínua. Como as projeções  $p_i$  são Lipschitzianas, a parte "somente se" resulta imediatamente dos Itens 1 e 3. Para provar a parte "se", suponhamos que cada  $f_i$  seja uniformemente contínua e que nos é dado um número  $\epsilon > 0$ . Existem  $\delta_1 > 0, \dots, \delta_n > 0$  tais que se  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\epsilon}{n}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Tomemos em  $N_1 \times \dots \times N_n$  a métrica  $d(w, z) = d(w_1, z_1) + \dots + d(w_n, z_n)$ .

Seja  $\delta$  o menor dos números  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Então  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) = \sum_{i=1}^n d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$ . Teríamos obtido o mesmo resultado se usássemos qualquer das outras duas métricas costumeiras no produto  $N_1 \times \dots \times N_n$ . Isto é fácil de constatar diretamente e será provado logo mais.

Item 15. O resultado acima se estende para aplicações

$f: M \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} N_i$ , tomado valores no produto cartesiano de uma infinidade enumerável de espaços métricos.

Tomamos em  $N = \prod N_i$  a métrica  $d(w, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d(w_i, z_i)}{1+d(w_i, z_i)}$ .

Suponhamos que, para cada  $i = 1, 2, \dots$ , a aplicação  $f_i = p_i \circ f$  seja uniformemente contínua. Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{i>n} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$ . Para cada  $i=1, \dots, n$  existe  $\delta_i > 0$  tal que para  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\epsilon}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2^i} \frac{d(f_i(x), f_i(y))}{1+d(f_i(x), f_i(y))} < \frac{\epsilon}{2n}$ . Logo, se chamarmos de  $\delta$  o menor dos números  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , veremos que  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) = \sum_{i \leq n} + \sum_{i > n} < \epsilon$ .

Item 16. Sejam  $E_1, \dots, E_n$ ,  $F$  espaços vetoriais normados, com  $n \geq 2$ . Uma aplicação  $n$ -linear  $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  é uniformemente contínua se, e somente se, é identicamente nula. Com efeito, se fosse  $f \neq 0$ , existiriam  $u_1 \in E_1, \dots, u_n \in E_n$  tais que  $f(u_1, \dots, u_n) = v \neq 0$ . Substituindo, se necessário,  $u_1$  por  $\frac{u_1}{|v|}$ , podemos admi-

tir que  $|f(u_1, \dots, u_n)| = 1$ . A aplicação  $g: \mathbb{R} \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n$ , dada por  $g(t) = (t \cdot u_1, t \cdot u_2, u_3, \dots, u_n)$ , é linear, logo uniformemente contínua. Também é uniformemente contínua a função  $F \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $y \mapsto |y|$ . Portanto, se  $f$  fosse uniformemente contínua, o mesmo ocorreria com a função composta  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\varphi(t) = |g(f(t))| = |f(tu_1, tu_2, u_3, \dots, u_n)| = t^2 \cdot |f(u_1, \dots, u_n)| = t^2$ . Mas sabemos que  $t \mapsto t^2$  não é uniformemente contínua. Em particular, a multiplicação  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ ,  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ , não é uniformemente contínua salvo quando  $E = \{0\}$ .

Item 17. Se o espaço  $M$  tem a métrica zero-um, então toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  é uniformemente contínua.

Item 18. Seja  $M = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ , com a métrica  $d(x, y) = |x - y|$ , induzida da reta. Então  $M$  é discreto, e portanto toda função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Mas se pusermos  $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ , a função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  assim definida não será uniformemente contínua. De fato, para qualquer  $\delta > 0$  podemos encontrar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \delta$ . Então os pontos  $x = \frac{1}{n}$  e  $y = \frac{1}{n+1}$  em  $M$  cumprem  $|y - x| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$  mas  $|f(y) - f(x)| = 1$ . A mesma função  $f$  é, porém, uniformemente contínua na métrica zero-um, que é equivalente em  $M$  à métrica  $d(x, y) = |x - y|$ .

Este exemplo mostra que a continuidade uniforme não é uma noção topológica, isto é, não pode ser caracterizada através de conjuntos abertos.

Dadas as métricas  $d_1$  e  $d_2$  no mesmo conjunto  $M$ , escrevamos  $M_1 = (M, d_1)$  e  $M_2 = (M, d_2)$ .

Diremos que as métricas  $d_1$  e  $d_2$  são uniformemente equivalentes quando a aplicação identidade  $i_{12}: M_1 \rightarrow M_2$  for um homeomorfismo uniforme.

Se  $d_1$  e  $d_2$  são métricas uniformemente equivalentes em  $M$ , então as aplicações uniformemente contínuas definidas ou tomando valores em  $M$  são as mesmas, quer usemos a métrica  $d_1$ , quer  $d_2$ .

Item 19. Em qualquer espaço métrico  $M$ , as métricas

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \text{ e } d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

são uniformemente equivalentes a  $d$ . (Vide Exemplo 23, Capítulo 2, onde se constata que a escolha de  $\delta$  é feita em função do  $\epsilon$  dado apenas, independentemente do ponto em questão.) Resulta portanto que toda métrica é uniformemente equivalente a uma métrica limitada.

Item 20. Sejam  $d_1$  e  $d_2$  métricas em  $M$ . Se existirem constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que

$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$  para  $x, y \in M$  quaisquer, então as métricas  $d_1$  e  $d_2$  serão uniformemente equiva-

lentes. Com efeito, neste caso as aplicações identidade  $i_{12}: M_1 \rightarrow M_2$  e  $i_{21}: M_2 \rightarrow M_1$  serão ambas Lipschitzianas. O Item 17 mostra que estas desigualdades não constituem condição necessária para equivalência uniforme. (Vide Exemplo 23, Capítulo 2.)

Item 21. Num produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ , as três métricas usuais  $d^*(x,y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$ ,  $d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i)$ ,  $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)^2}$  são uniformemente equivalentes porque valem as desigualdades  $d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d^*(x,y) \leq n \cdot d''(x,y)$  para  $x,y \in M$  quaisquer. Portanto, em fatos referentes à continuidade uniforme de aplicações definidas ou tomando valores em  $M$ , é indiferente qual três métricas usamos. (Vide, por exemplo, o Item 14 acima.)

Item 22. Se duas métricas  $d_1$  e  $d_2$ , num espaço vetorial  $E$ , provêm de normas em  $E$ , então elas são equivalentes se, e somente se, são uniformemente equivalentes. De fato, a aplicação identidade é linear. Logo, é contínua se, e somente se, é uniformemente contínua.

Item 23. Sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos. A métrica  $d_1$  em  $M$ , induzida por um homeomorfismo  $h: M \rightarrow N$  é dada por  $d_1(x,y) = d_N(h(x), h(y))$ . Sa

bemos que  $d_1$  é equivalente a  $d_M$ . A fim de que  $d_1$  seja uniformemente equivalente a  $d_M$ , é necessário e suficiente que  $h$  seja um homeomorfismo uniforme. Por exemplo,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $h(x) = x^3$  é um homeomorfismo que não é uniforme. Logo  $d_1(x,y) = |x^3 - y^3|$  é uma métrica em  $\mathbb{R}$ , equivalente, porém não uniformemente, à métrica usual  $d(x,y) = |x-y|$ .

Item 24. Seja  $f: (M,d) \rightarrow (N,d')$  uma aplicação contínua, mas não uniformemente contínua. A métrica  $d_f$  em  $M$ , definida por  $d_f(x,y) = d(x,y) + d'(f(x),f(y))$ , é equivalente a  $d$  (pois é induzida pelo homeomorfismo natural entre  $M$  e o gráfico de  $f$ ) mas não é uniformemente equivalente a  $d$ . De fato, a aplicação  $f: (M,d_f) \rightarrow (N,d')$  é uniformemente contínua, por ser uma contração fraca. Se  $d_f$  e  $d$  fossem uniformemente equivalentes, toda aplicação uniformemente contínua em relação a uma dessas métricas teria a mesma propriedade em relação à outra.

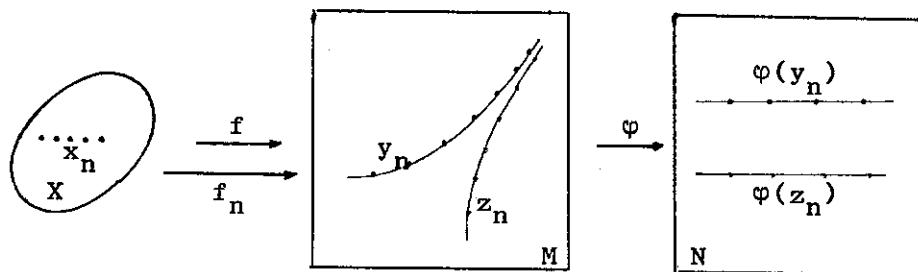
Item 25. A fim de que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  seja uniformemente contínua, é necessário e suficiente que, para todo par de seqüências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  em  $M$ , valha  $\lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim d(f(x_n), f(y_n)) = 0$ .

Item 26. Seja  $\varphi: M \rightarrow N$  uniformemente contínua. Se a

seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  converge uniformemente para  $f: X \rightarrow M$ , então as aplicações  $\varphi \circ f_n: X \rightarrow N$  convergem uniformemente para  $\varphi \circ f: X \rightarrow N$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $y, z \in M$  e  $d(y, z) < \delta$  então  $d(\varphi(y), \varphi(z)) < \epsilon$ . Por sua vez, dado  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$  para todo  $x \in X$ . Logo,  $n > n_0 \Rightarrow d(\varphi f_n(x), \varphi f(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in X$ . Assim,  $\varphi f_n \rightarrow \varphi f$  uniformemente em  $X$ . Em consequência disto, se  $\varphi: M \rightarrow N$  é um homeomorfismo uniforme, então  $f_n: X \rightarrow M$  converge uniformemente para  $f: X \rightarrow M$  se, e somente se,  $\varphi \circ f_n: X \rightarrow N$  converge uniformemente para  $\varphi \circ f: X \rightarrow N$ . Em particular, se  $d_1$  e  $d_2$  são métricas uniformemente equivalentes em  $M$ , então uma seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  converge uniformemente segundo a métrica  $d_1$  se, e somente se, o faz segundo a métrica  $d_2$ .

Item 27. No item anterior, a hipótese de continuidade uniforme para  $f$  é indispensável, salvo no caso trivial em que  $X$  é finito. (Neste caso, toda seqüência convergente de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  é uniformemente convergente.) De fato, se  $X$  é infinito e  $\varphi: M \rightarrow N$  não é uniformemente contínua (mesmo sendo contínua) então podemos obter uma seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  que con-

vergem uniformemente para uma  $f: X \rightarrow M$  sem que  $\varphi f_n: X \rightarrow N$  converja uniformemente para  $\varphi f: X \rightarrow N$ . Isto se faz assim: como  $\varphi$  não é uniformemente contínua, existem  $\epsilon > 0$  e duas seqüências de pontos  $y_n, z_n \in M$  tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_n) = 0$  e  $d(\varphi(y_n), \varphi(z_n)) \geq \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



Sendo infinito,  $X$  possui um subconjunto enumerável  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Tomemos uma aplicação  $f: X \rightarrow M$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . (Nos demais pontos de  $X$ , caso os haja, nada exigimos de  $f$  em especial.) Escolhida  $f$ , definimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , uma aplicação  $f_n: X \rightarrow M$  pondo  $f_n(x) = f(x)$  para  $x \neq x_n$  e  $f_n(y_n) = z_n$ . Então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$ . Mas, como  $d(\varphi f_n(x_n), \varphi f(x_n)) = d(\varphi(z_n), \varphi(y_n)) \geq \epsilon$  para todo  $n$ , vemos que  $\varphi f_n$  não converge uniformemente para  $\varphi f$  em  $X$ .

Em particular, se  $d_1$  e  $d_2$  são métricas equivalentes, porém não uniformemente quivalentes num espaço  $M$ , dado qualquer conjunto infinito  $X$ , existe uma se-

quência de aplicações  $f_n: X \rightarrow M$  que converge uniformemente segundo uma dessas métricas mas não segundo a outra.

Item 28. Sejam  $d_1$  e  $d_2$  métricas limitadas equivalentes, porém não uniformemente equivalentes, ambas definidas entre os pontos do mesmo conjunto  $M$ . Escrevamos  $M_1 = (M, d_1)$  e  $M_2 = (M, d_2)$ . Dado qualquer conjunto infinito  $X$ , sabemos que a aplicação identidade  $\beta(X; M_1) \rightarrow \beta(X; M_2)$  não é um homeomorfismo. (Vide item anterior.) Daremos agora um exemplo de métricas limitadas  $d_1$  e  $d_2$  na reta  $\mathbb{R}$ , ambas equivalentes à metriza usual, tais que para qualquer conjunto infinito  $X$ , os espaços  $\beta(X; \mathbb{R}_1)$  e  $\beta(X; \mathbb{R}_2)$ , onde  $\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, d_1)$  e  $\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}, d_2)$ , não são homeomorfos. (Ou seja, não apenas a aplicação identidade, mas nenhuma bijeção  $\beta(X; \mathbb{R}_1) \rightarrow \beta(X; \mathbb{R}_2)$  é um homeomorfismo.)

A métrica  $d_1$  é induzida pelo homeomorfismo  $h: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ , onde  $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ . Temos, então  $d_1(x, y) = |h(x)-h(y)|$ . Sabemos que  $d_1$  é equivalente (mas não uniformemente!) à metriza usual da reta. Escrevendo  $J = (-1, 1)$ , vemos que  $h: \mathbb{R}_1 \rightarrow J$  é uma isometria. Daí se deduz facilmente que  $h_*: \beta(X; \mathbb{R}_1) \rightarrow \beta(X; J)$ , definida por  $h_*(f) = h \circ f$ , é uma isometria. Ora,  $\beta(X; J)$  é um subconjunto convexo do espaço vetorial normado  $\beta(X; \mathbb{R})$ . Em particular,  $\beta(X; J)$  é conexo. Segue-se então que

$\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_1)$  também é conexo.

A métrica  $d_2$  será definida por  $d_2(x, y) = \min\{1, |x-y|\}$ . Então  $d_2$  é uniformemente equivalente à métrica usual. Em particular,  $d_2$  é equivalente a  $d_1$ . Seja  $\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}, d_2)$ . Mostraremos agora que  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_2)$  não é conexo. Para isto, escrevemos  $\mathfrak{I}(X; \mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ , reunião disjunta, onde cada conjunto  $A_{\alpha} = \mathbb{B}_{\alpha}(X; \mathbb{R})$  é constituído pelas funções  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} |f(x) - \alpha(x)| < +\infty$ . (Vide §3 do Capítulo 1.) Como  $X$  é infinito, há pelo menos uma função  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  que não é limitada e portanto existem pelo menos dois conjuntos não-vazios  $A_{\alpha}$ . (Além disso, os  $A_{\alpha}$  são disjuntos uns dos outros.) Afirmando que cada  $A_{\alpha}$  é aberto no espaço métrico  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_2)$ , o qual, como conjunto, coincide com  $\mathfrak{I}(X; \mathbb{R})$ . Com efeito, se  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_2$  convergir uniformemente (segundo  $d_2$ !) para alguma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}_2$  tal que  $f \in A_{\alpha}$ , então  $f_n \rightarrow f$  uniformemente segundo a métrica usual da reta, pois esta é uniformemente equivalente a  $d_2$ . Então (Proposição 13, Capítulo 5), para todo  $n$  suficientemente grande, teremos  $d(f, f_n) < +\infty$ , donde  $f_n \in A_{\alpha}$ . Pela Proposição 11, Capítulo 5, concluimos que cada  $A_{\alpha}$  é aberto no espaço métrico  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_2) = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ , o qual é, portanto, desconexo.

Em particular,  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_1)$  e  $\mathbb{B}(X; \mathbb{R}_2)$  não são ho-

-234-

meomorfos, embora  $R_1$  e  $R_2$  o sejam.

## CAPÍTULO 7

### ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

#### §1. Seqüências de Cauchy.

Uma seqüência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  chama-se uma seqüência de Cauchy quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

Toda subseqüência de uma seqüência de Cauchy é também de Cauchy.

A fim de que uma seqüência  $(x_n)$  seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para cada  $\epsilon > 0$  dado, exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$  qualquer que seja  $p \in \mathbb{N}$ . (Basta chamar de  $n$  o menor dos números  $m, n$  da definição anterior e por  $m = m+p$ .)

Intuitivamente, os termos de uma seqüência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice  $n$ . Compare com a definição de limite, na qual se exige que os termos da seqüência se tornem cada vez mais próximos de um ponto fixado.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da seqüência; depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Assim, se  $M \subset N$ , uma seqüência de pontos  $x_n \in M$  é de Cauchy em  $M$  se, e somente se, é de Cauchy em  $N$ .

Quando os termos de uma seqüência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros. Este é o conteúdo da

Proposição 1 - Toda seqüência convergente é de Cauchy.

Demonstração: Se  $\lim x_n = a$  no espaço métrico  $M$  então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ . Se tomarmos  $m, n > n_0$  teremos  $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Logo,  $(x_n)$  é de Cauchy.

Exemplo 1 - Nem toda seqüência de Cauchy é convergente.

Para ver isto, tomemos uma seqüência de números racionais  $x_n$  convergindo para um número irracional  $a$ . (Por exemplo,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,4$ ,  $x_3 = 1,41$ ,  $x_4 = 1,414 \dots$ , com  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .) Sendo convergente em  $\mathbb{R}$ , segue-se da Proposição 1 que  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Mas evidentemente  $(x_n)$  não é convergente em  $\mathbb{Q}$ .

Proposição 2 - Toda seqüência de Cauchy é limitada.

Demonstração: Seja  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy no espaço métrico  $M$ . Dado  $\epsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$ . Logo o conjunto  $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado e tem diâmetro  $\leq 1$ . Segue-se que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado.

Exemplo 2 - Nem toda seqüência limitada é de Cauchy. O exemplo mais simples é dado por  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  na reta. Embora limitada, esta seqüência não é de Cauchy pois  $d(x_n, x_{n+1}) = 1$  para todo  $n$ .

Exemplo 3 - A seqüência de números reais  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  não é de Cauchy porque não é limitada.

(Vide §3, Capítulo 5.)

Dada a seqüência  $(x_n)$  no espaço métrico  $M$ , escrevamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ .

Temos  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ . Como  $X_1 = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup X_n$ , um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais o forem. Se tal é o caso, temos  $\text{diam}(X_1) \geq \text{diam}(X_2) \geq \dots$  e portanto existe sempre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(X_n)$ . A fim de que  $(x_n)$  seja uma seqüência de Cauchy, é necessário e suficiente que seja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(X_n) = 0$ .

Proposição 3 - Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subseqüência).

Demonstração: Sejam  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy no espaço métrico  $M$  e  $(x_{n_k})$  uma subseqüência que converge para o ponto  $a \in M$ . Afirmamos que  $\lim x_n = a$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$ . Existe também  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ . Seja  $n_0 = \max\{p, q\}$ . Para todo  $n > n_0$  existe  $n_k > n_0$  e então  $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Logo  $\lim x_n = a$ .

A propriedade enunciada na Proposição 3 é evidentemente falsa para seqüências arbitrárias. Ela indica que uma seqüência de Cauchy só não converge num espaço  $M$  se "faltarem pontos no espaço".

Exemplo 4 - Se uma seqüência possui duas subseqüências que convergem para limites distintos então ela não é de Cauchy. Em particular, uma seqüência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

Proposição 4 - Toda aplicação uniformemente contínua

transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

Demonstração: Sejam  $f: M \rightarrow N$  uniformemente contínua e  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $M$ . A fim de provar que a seqüência  $(f(x_n))$  é de Cauchy, suponhamos dado  $\epsilon > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ . Por sua vez, dado  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$ .

Corolário - Seja  $f: M \rightarrow N$  um homeomorfismo uniforme.

Uma seqüência de pontos  $x_n \in M$  é de Cauchy se, e somente se,  $(f(x_n))$  é de Cauchy em  $N$ .

Exemplo 5 - Uma aplicação apenas contínua pode não transformar seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy. Tal é, por exemplo, o caso da função contínua  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , que transforma a seqüência de Cauchy  $(\frac{1}{n})$  na seqüência  $(f(\frac{1}{n})) = (1, 2, 3, \dots)$ , que não é de Cauchy. Ou da função contínua  $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \cos \frac{1}{x}$ , que transforma a seqüência de Cauchy  $(\frac{1}{n})$  na seqüência  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ , que não é de Cauchy. A Proposição 4 mostra que funções como estas não podem ser uniformemente contínuas. Isto nos diz também que a noção de seqüência de Cauchy não é topologicamente invariantes. Ela se mantém apenas por homeomorfismos uniformes.

Exemplo 6 - Não é válida a recíproca da Proposição 4.

Transformar seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy é uma condição suficiente para que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  seja contínua mas não garante que  $f$  seja uniformemente contínua. Para provar a primeira afirmação, suponhamos que  $f$  goze da propriedade mencionada e consideremos um ponto  $a \in M$ . Se  $x_n \rightarrow a$  então a seqüência  $(x_1, a, x_2, a, \dots)$  é de Cauchy em  $M$  e portanto  $(f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$  também é de Cauchy em  $N$ . Segue-se da Proposição 3 que  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Logo  $f$  é contínua em qualquer ponto  $a \in M$ . (Vide Proposição 9, Capítulo 5.) Por outro lado, a função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , não é uniformemente contínua, mas se  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy, então existe  $c > 0$  tal que  $|x_n| \leq c$  para todo  $n$ . Como  $f|[-c, c]$  é Lipschitziana, segue-se da Proposição 4 que  $(f(x_n))$  é de Cauchy.

Exemplo 7 - Dada uma seqüência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$ , consideremos o espaço  $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ , com a métrica induzida pela reta, e a aplicação  $f: P \rightarrow M$ , dada por  $f(\frac{1}{n}) = x_n$ . Afirmando que  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy se, e somente se,  $f$  é uniformemente contínua. Com efeito, se  $(x_n)$  é de Cauchy, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

Seja  $\delta = 1/(n_0+1)^2$ . A menor distância não-nula de um ponto qualquer de  $P$  a um ponto do conjunto  $\{1, 1/2, \dots, 1/n_0\}$  é  $\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{(n_0(n_0+1))} > \frac{1}{(n_0+1)^2} = \delta$ . Logo,  $0 < |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \delta \Rightarrow m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$  e portanto  $f$  é uniformemente contínua. Reciprocamente, se  $f: P \rightarrow M$  é uniformemente contínua, como a seqüência  $(\frac{1}{n})$  é de Cauchy em  $P$  (pois é convergente em  $\mathbb{R}$ ), segue-se da Proposição 4 que  $(x_n) = (f(\frac{1}{n}))$  é de Cauchy.

Exemplo 8 - Uma seqüência de pontos  $z_n = (x_n, y_n) \in MXN$  é de Cauchy se, e somente se, as seqüências  $(x_n)$  em  $M$  e  $(y_n)$  em  $N$  são de Cauchy. Isto resulta do Exemplo 7 e do fato de que a aplicação  $f: P \rightarrow MXN$ , dada por  $f(\frac{1}{n}) = (x_n, y_n)$ , é uniformemente contínua se, e somente se, suas coordenadas  $p_1 \circ f: P \rightarrow M$  e  $p_2 \circ f: P \rightarrow N$  o são. O mesmo resultado vale para o produto cartesiano  $M_1 \times \dots \times M_k$  de um número finito de fatores, ou mesmo para um produto cartesiano infinito  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ : uma seqüência de pontos  $x_n \in \prod M_i$  é de Cauchy se, e somente se, para cada  $i$ , a seqüência  $(p_i(x_n)) = (x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $M_i$ . (Vide ítems 14 e 15 do Capítulo 6.)

## §2. Espaços métricos completos.

Diz-se que o espaço métrico  $M$  é completo quando toda seqüência de Cauchy em  $M$  é convergente.

Exemplo 9 - O espaço  $\mathbb{Q}$  dos números racionais não é completo. (Vide Exemplo 1.) Todo espaço  $M$  com a métrica zero-um é completo, pois qualquer seqüência de Cauchy em  $M$  é constante a partir de um certo índice, e portanto convergente. Nem todo espaço métrico discreto, porém, é completo, como se vê tomando  $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ , onde  $x_n = \frac{1}{n}$  fornece uma seqüência de Cauchy que não converge. Diremos que uma métrica  $d$ , num espaço  $M$ , é uniformemente discreta quando existir  $\epsilon > 0$  tal que  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \epsilon \Rightarrow x = y$ . Neste caso, se  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $M$ , existe  $n_0$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon \Rightarrow x_m = x_n$ . Assim, toda seqüência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é constante a partir de um certo índice  $n_0$ , e portanto convergente. Tais espaços são, pois, completos.

Tomando-se  $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ , primeiro com sua métrica usual e depois com a métrica zero-um, obtemos duas métricas equivalentes tais que  $P$  é completo

em relação a uma delas porém não em relação à outra. Isso já mostra que um espaço métrico completo pode ser homeomorfo a um não-completo. Por outro lado, segue-se imediatamente da Proposição 4 que se  $f: M \rightarrow N$  é um homeomorfismo uniforme, então  $M$  é completo se, e somente se,  $N$  o é. Em particular, toda métrica uniformemente equivalente a uma métrica completa é também completa.

A proposição seguinte, devida a Cauchy, estabelece o exemplo mais importante de espaço métrico completo.

Proposição 5 - A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ .

Pondo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , temos  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$  e os conjuntos  $X_n$  são limitados. Seja  $a_n = \inf.X_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Então  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup.X_1$ . Pela Proposição 7 do Capítulo 5, existe o número  $a = \lim a_n$ . Afirmando que  $a = \lim x_n$ . Para provar isto, basta mostrar que  $a$  é limite de uma subseqüência de  $(x_n)$ , ou seja, que dados arbitrariamente  $\epsilon > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ , podemos obter  $n > n_1$  tal que  $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ . (Vide Proposição 3 acima e Proposição 4, Capítulo 5.) Ora, sendo  $a = \lim a_n$ , existe  $m > n_1$  tal que  $a-\epsilon < a_m < a+\epsilon$ . Como  $a_m = \inf.X_m$ , existe  $n > m$  (e portanto  $n > n_1$ ) tal que  $a_m \leq x_n < a+\epsilon$ ,

isto é,  $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ .

Proposição 6 - Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração: Seja  $F \subset M$  fechado, com  $M$  completo. Dada uma seqüência de Cauchy  $(x_n)$  em  $F$ , existe  $\lim x_n = a \in M$ . Como  $F$  é fechado em  $M$ , tem-se  $a \in F$ . Logo  $F$  é completo. Por outro lado, se  $M \subset N$  é um subespaço completo, dada a seqüência de pontos  $x_n \in M$ , com  $\lim x_n = a \in N$ , a seqüência  $(x_n)$  é de Cauchy, pela Proposição 1. Logo existe  $b \in M$  tal que  $\lim x_n = b$ . Pela unicidade do limite, tem-se  $a = b$  e portanto  $M$  é fechado em  $N$ .

Na proposição seguinte, o produto cartesiano  $M \times N$  é considerado com uma das três métricas usuais. Qual delas tomamos, é indiferente pois elas são uniformemente equivalentes.

Proposição 7 - O produto cartesiano  $M \times N$  é completo se, e somente se,  $M$  e  $N$  são completos.

Demonstração: Suponhamos  $M$  e  $N$  completos. Dada uma seqüência de Cauchy  $(z_n)$  em  $M \times N$ , seja  $z_n = (x_n, y_n)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como as projeções

$p_1: M \times N \rightarrow M$  e  $p_2: M \times N \rightarrow N$  são uniformemente contínuas,  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são seqüências de Cauchy em  $M$  e  $N$  respectivamente. Logo existem  $\lim x_n = a \in M$ ,  $\lim y_n = b \in N$ . Pondo  $c = (a, b) \in M \times N$ , temos  $\lim z_n = c$ . Assim,  $M \times N$  é completo. Reciprocamente, se  $M \times N$  é completo então, fixando  $b \in N$ , vemos que a aplicação  $x \mapsto (x, b)$  é uma isometria de  $M$  sobre o subespaço fechado  $M \times b \subset M \times N$ . Segue-se da Proposição 6 que  $M$  é completo. De modo análogo se veria que  $N$  é completo.

Corolário 1 -  $M_1 \times \dots \times M_n$  é completo se, e somente se,  $M_1, \dots, M_n$  são completos.

Aplicando  $n-1$  vezes a proposição, concluimos sucessivamente que  $M_1 \times M_2$ ,  $M_1 \times M_2 \times M_3, \dots, M_1 \times \dots \times M_n$  são completos se cada um dos fatores  $M_i$  é completo. Reciprocamente, se o produto é completo, cada fator  $M_i$  é completo, por ser isométrico ao subespaço fechado  $a_1 \times \dots \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times \dots \times a_n$  do produto.

Corolário 2 - O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é completo.

Proposição 7<sup>o</sup> - O produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é completo se, e somente se, cada um dos fatores  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$  é completo.

Demonstração: A demonstração segue as mesmas linhas do ca-

so finito: as projeções  $p_i: M \rightarrow M_i$  são uniformemente contínuas, logo transformam seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy. Além disso, uma seqüência de pontos  $x_n \in M$  converge se, e somente se, para cada  $i \in N$ , a seqüência  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, \dots)$ , com  $x_{ni} = p_i(x_n)$ , converge em  $M_i$ . Para a recíproca, observar que cada fator  $M_i$  é isométrico ao subespaço fechado  $M_i^* = \{x \in M; x_j = a_j$  para todo  $j \neq i\}$ .

Sejam  $X$  um conjunto,  $M$  um espaço métrico e  $\alpha: X \rightarrow M$  uma aplicação. A notação  $B_\alpha(X; M)$  representa o conjunto das aplicações  $f: X \rightarrow M$  tais que  $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$ , com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 8 - Se o espaço métrico  $M$  é completo então  $B_\alpha(X; M)$  é completo, sejam quais forem  $X$  e  $\alpha: X \rightarrow M$ .

Demonstração: Seja  $(f_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $B_\alpha(X; M)$ . Esta seqüência é limitada; logo existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$  para todo  $n \in N$  e todo  $x \in X$ . Fixando-se arbitrariamente  $x \in X$ , a seqüência  $(f_n(x))_{n \in N}$  é de Cauchy em  $M$ . Como  $M$  é completo, existe, para cada

$x \in X$ , o limite desta seqüência. Escreveremos

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in M$ . Isto define uma aplicação  $f: X \rightarrow M$ , que é o limite simples da seqüência  $(f_n)$ . De  $d(f_n(x), a(x)) \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in X$ , concluimos, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , que  $d(f(x), a(x)) \leq c$  para todo  $x \in X$ . Logo  $f \in \mathcal{B}_a(X; M)$ . Resta provar que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$ . Ora, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$  para qualquer  $x \in X$ . Fazendo  $m \rightarrow \infty$  nesta desigualdade, concluimos que  $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$  para todo  $x \in X$ . Ou seja,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, como queríamos demonstrar.

Corolário 1 - (Critério de Cauchy para convergência uniforme.) Seja M um espaço métrico completo. A fim de que uma seqüência de aplicações  $f_n: X \rightarrow N$  converja uniformemente em X, é necessário e suficiente que, para todo  $\epsilon > 0$  dado, exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implique  $d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in X$ .

Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  então  $f_n \in \mathcal{B}_f(X; M)$  para todo  $n$  suficientemente grande e  $\lim f_n = f$  nesse espaço. Logo  $(f_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{B}_f(X; M)$  e a condição acima é necessária. Reciprocamente, supondo a condição satisfeita, tomamos  $\epsilon = 1$ , a partir do qual obtemos  $n_0$  como no enunciado e concluimos que, para

$\alpha = f_{n_0+1}$ , vale  $d(f_n, \alpha) \leq 1$ , ou seja  $f_n \in \mathcal{B}_\alpha(X; M)$  se  $n > n_0$ . Além disso, a condição admitida diz que  $(f_n)_{n>n_0}$  é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico completo  $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ . Segue-se que  $(f_n)$  converge uniformemente em  $X$ .

Corolário 2 - Sejam  $M, N$  espaços métricos. Se  $N$  é completo então, para toda aplicação  $\alpha: M \rightarrow N$ , o espaço métrico  $C_\alpha(M; N)$  é completo.

$C_\alpha(M; N)$  é o subespaço de  $\mathcal{B}_\alpha(M; N)$  formado pelas aplicações contínuas  $f: M \rightarrow N$  tais que  $d(f, \alpha) < +\infty$ . Sabemos que  $C_\alpha(M; N)$  é fechado no espaço completo  $\mathcal{B}_\alpha(M; N)$ . (Vide Exemplo 24, Capítulo 5.) Logo  $C_\alpha(M; N)$  é completo.

Em particular, o espaço  $C_0(M; \mathbb{R})$  das funções contínuas e limitadas  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é completo na métrica da convergência uniforme.

Corolário 3 - Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos, onde  $N$  é completo. Se uma seqüência de aplicações contínuas  $f_n: M \rightarrow N$  converge uniformemente num subconjunto  $X$  então  $(f_n)$  converge uniformemente em  $\bar{X}$ .

Começamos observando que se  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $\varphi(x) < \epsilon$  para todo  $x \in X$ , então

$\varphi(x) \leq \epsilon$  para todo  $x \in \bar{X}$ . Com efeito, o conjunto de todos os pontos  $x \in M$  tais que  $\varphi(x) \leq \epsilon$  é fechado em  $M$  e contém  $X$ , logo contém  $\bar{X}$ , o que vale dizer que  $\varphi(x) \leq \epsilon$  para todo  $x \in \bar{X}$ .

Para demonstrar o corolário: dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$  qualquer que seja  $x \in X$ . Fixando  $m, n$  e pondo  $\varphi(x) = d(f_m(x), f_n(x))$ , a observação anterior se aplica e concluimos que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \leq \epsilon$  para todo  $x \in \bar{X}$ . Segue-se do Corolário 1 que  $(f_n)$  converge uniformemente em  $\bar{X}$ .

Exemplo 10 - Uma bola fechada  $B[a;r]$  e sua fronteira, a esfera  $S(a;r)$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  são espaços métricos completos, porque são subconjuntos fechados do espaço completo  $\mathbb{R}^n$ . Mais geralmente, se  $M$  é completo, as bolas fechadas e as esferas de  $M$  são espaços completos. Por outro lado, nenhuma bola aberta num espaço vetorial normado é um espaço completo, quando dotada da métrica induzida, pois não é um subconjunto fechado. Considerando uma bola aberta  $B \subset \mathbb{R}^n$ , vemos novamente um exemplo de dois espaços homeomorfos,  $B$  e  $\mathbb{R}^n$ , um dos quais é completo e o outro não.

### §3. Espaços de Banach e espaços de Hilbert.

Exemplo 11 - Dados os espaços vetoriais normados  $E$  e  $F$ , indicamos com a notação  $\mathcal{L}(E;F)$  o conjunto das aplicações lineares contínuas de  $E$  em  $F$ .  $\mathcal{L}(E;F)$  é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma  $\|f\| = \sup\{|f(x)| ; x \in E, |x| = 1\}$ . Para toda  $f \in \mathcal{L}(E;F)$ , e todo  $x \in E$ , vale  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot |x|$ . Seja  $S = \{u \in E; |u| = 1\}$  a esfera unitária de  $E$ . Uma aplicação linear  $f: E \rightarrow F$  é contínua se, e somente se,  $f|_S$  é limitada. Por definição,  $\lim f_n = f$  em  $\mathcal{L}(E;F)$  significa que  $\lim \|f_n - f\| = 0$ , o que equivale a dizer que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $S$ . Afirmamos que se  $F$  é completo, então o espaço vetorial normado  $\mathcal{L}(E;F)$  é completo. Com efeito, se  $(f_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{L}(E;F)$  então as restrições  $f_n|_S$  constituem uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{L}(S;F)$ . Como  $F$  é completo, existe  $f_o: S \rightarrow F$  limitada, tal que  $f_n \rightarrow f_o$  uniformemente em  $S$ . Indiquemos com  $f: E \rightarrow F$  a extensão da aplicação  $f_o: S \rightarrow F$ , definida por  $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f_o(u)$  se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u \in S$ . Mostremos que  $f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $E$ : é claro que  $f_n(0) = 0 \rightarrow 0 = f(0)$ ; se  $x \neq 0$  então  $\lim_n f_n(x) = |x| \cdot \lim_n f_n\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot f_o\left(\frac{x}{|x|}\right) = f(x)$ . Do fato de ser

$\lim_n f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in E$ , segue-se imediatamente que  $f$  é linear. Como  $f|S = f_0$  é limitada, vemos que  $f \in \mathcal{L}(E;F)$ . E como  $f_n|S \rightarrow f|S$  uniformemente, temos  $\lim f_n = f$  no espaço  $\mathcal{L}(E;F)$ , que é portanto completo.

Exemplo 12 - Um espaço vetorial normado completo chama-se um espaço de Banach.  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Banach. São também espaços de Banach  $\mathcal{B}(X;F)$ ,  $C_0(M;F)$  e  $\mathcal{L}(E;F)$ , onde  $X$  é um conjunto qualquer,  $M$  um espaço métrico e  $F$  um espaço de Banach. Mostraremos no Capítulo 8 que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo, isto é, um espaço de Banach. O conjunto  $P[0,1]$  das funções polinomiais  $p: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  é um espaço vetorial. Podemos considerar em  $P[0,1]$  a norma  $\|p\| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$ , por exemplo. Em relação a esta norma, o espaço  $P[0,1]$  não é completo. Com efeito, sabe-se do Cálculo que a seqüência de polinômios  $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  converge uniformemente em  $[0,1]$  para a função contínua  $e^x$ , que não é um polinômio. Logo  $(p_n)$  é uma seqüência de Cauchy que não converge em  $P[0,1]$ .

Exemplo 13 - Uma série  $\sum x_n$  num espaço vetorial normado  $E$  diz-se normalmente convergente quando  $\sum \|x_n\| < +\infty$ . (O que equivale a dizer que a série das normas  $\sum \|x_n\|$  é convergente.) Se o espaço  $E$  é completo

toda série normalmente convergente é convergente em  $E$ . Com efeito, seja  $S_n = x_1 + \dots + x_n$ . Se  $\sum |x_n| < +\infty$  então, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_{n+p}| < \epsilon$ , seja qual for  $p \in \mathbb{N}$ . Segue-se então que, para os mesmos  $n_0$ ,  $n$  e  $p$  tem-se  $|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \epsilon$ . Logo a seqüência das somas parciais  $S_n$  é de Cauchy, e portanto convergente no espaço completo  $E$ .

Em outros termos: a série  $\sum x_n$  converge em  $E$ . Em particular, este resultado se aplica a séries de números reais, de números complexos, de vetores em  $\mathbb{R}^n$  e de funções limitadas  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Neste último caso, obtemos o chamado "teste de Weierstrass": a condição  $\sum \|f_n\| < +\infty$  significa que existe uma série convergente  $\sum c_n$  de constantes positivas tais que  $|f_n(x)| \leq c_n$  para todo  $x \in M$ . (Basta tomar  $c_n = \|f_n\|$ .) O teste de Weierstrass afirma que, nestas condições, a série  $\sum f_n$  converge uniformemente em  $X$ . Quando o espaço  $E$  não é completo, uma série normalmente convergente de termos  $x_n \in E$  pode não ser convergente. Por exemplo, no espaço  $\mathbb{P}[0,1]$  a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  é normalmente convergente pois  $\left\| \frac{x^n}{n!} \right\| = \frac{1}{n!}$  e  $\sum \frac{1}{n!} = e$ . Mas, como vimos acima, a série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  não converge para um polinômio.

Exemplo 14 - Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T: E \rightarrow E$

uma transformação linear contínua, com

$\|T\| < 1$ . Consideremos a série  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$  no espaço de

Banach  $\mathcal{L}(E;E)$ . Para todo  $n \geq 0$ , temos  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ .

Assim, a série de números reais não-negativos  $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$  é convergente, porque é majorada pela série geométrica

$\sum \|T\|^n$ , cuja razão  $\|T\|$  é menor do que 1. A série  $\sum T^n$

é pois, normalmente convergente. Pelo exemplo anterior,

concluimos que existe uma transformação linear contínua

$S: E \rightarrow E$  tal que  $S = I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots$ . Mostra-

remos que  $S = (I-T)^{-1}$ . Com efeito,  $S \cdot (I-T) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (I + T + \dots + T^n)(I-T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T^{n+1}) = I, \text{ pois}$$

$\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \rightarrow 0$ . De modo análogo, se mostra que

$(I-T) \cdot S = I$ . Generalizando o Exemplo 9 do Capítulo 5, ve-

mos que se  $E$  é um espaço de Banach e  $T: E \rightarrow E$  é li-

near, com  $\|T\| < 1$  então  $I-T$  possui uma inversa contí-

nua  $S: E \rightarrow E$  a qual é dada pela "série de Neumann"

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n. \quad [\text{A "condição adicional" aludida no}]$$

Exemplo 9 do Capítulo 5 era a completeza (sic) do espaço onde  $T$  opera.]

Exemplo 15 - Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial  $H$ ,

munido de um produto interno, e completo em

relação à norma definida por esse produto interno. Por

exemplo: o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Apresentaremos agora um exemplo importante de espaço de Hilbert: o espaço das seqüências de quadro somável, ou espaço  $\ell^2$ . Como conjunto,  $\ell^2$  é constituído por todas as seqüências  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$  de números reais tais que  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$ .

Assim, por exemplo, se  $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ,  $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ ,  $z = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots)$ , vemos que  $x, y \in \ell^2$  pois  $\sum \frac{1}{2^{2n}} < \infty$  e  $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$  mas  $z \notin \ell^2$  porque  $\sum \frac{1}{n} = \infty$ . Também pertence a  $\ell^2$  toda seqüência  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$  tal que  $x_i = 0$  para  $i$  suficientemente grande. Na notação do Exercício 46, Capítulo 1, isto significa que  $\mathbb{R}^\infty \subset \ell^2$ .

Dado  $x \in \ell^2$ , escreveremos  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ .

A fim de mostrar que  $\ell^2$  é um espaço vetorial relativamente às operações  $x+y = (x_i+y_i)$  e  $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_i)$ , observemos primeiro que se  $x = (x_i)$  e  $y = (y_i)$  pertencem a  $\ell^2$  então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$  é convergente. Com efeito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos dá, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \leq |x| \cdot |y|,$$

onde, conforme convencionamos acima,  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$  e  $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}$ . As somas parciais da série  $\sum |x_i \cdot y_i|$  são portanto majoradas pelo número real  $|x| \cdot |y|$ . Segue-se do Exemplo 13 que a série  $\sum x_i \cdot y_i$  é convergente.

Agora mostraremos que  $\ell^2$  é um espaço vetorial. Se  $x, y \in \ell^2$  então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , vem  $\sum (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 \sum x_i \cdot y_i < +\infty$ , logo  $x+y \in \ell^2$ . Se  $x \in \ell^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  então é óbvio que  $\lambda x \in \ell^2$ . Isto conclui a verificação de que  $\ell^2$  é um espaço vetorial. Pondo  $\langle x, y \rangle = \sum x_i \cdot y_i$ , introduzimos um produto interno em  $\ell^2$ , cuja norma subjacente é  $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$ .

Resta apenas mostrar que  $\ell^2$  é completo em relação à métrica  $|x-y| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ . Seja então  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $\ell^2$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ponhamos  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{ni}, \dots)$ . Fixado qualquer  $i \in \mathbb{N}$ , temos  $|x_{ni} - x_{ni}| \leq |x_m - x_n|$ , logo  $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de Cauchy de números reais. Segue-se que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe o número real  $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni}$ . Seja  $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ . Dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$ . Logo, pa

ra todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $m, n > n_0$  temos

$$\sum_{i=1}^k (x_{mi} - x_{ni})^2 < \epsilon^2.$$

Mantendo fixos  $k$  e  $n$  e fazendo  $m \rightarrow \infty$  na desigualdade acima, concluimos que, para todo  $k \in \mathbb{N}$  vale

$$\sum_{i=1}^k (a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2, \text{ para todo } n > n_0.$$

Fazendo agora  $k \rightarrow \infty$ , resulta  $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{ni})^2 < \epsilon^2$  para todo  $n > n_0$ . Em particular,  $n > n_0 \Rightarrow a - x_n \in \ell^2$ . Segue-se que  $a = (a - x_n) + x_n$  pertence a  $\ell^2$ , pois  $x_n$  pertence ao espaço vetorial  $\ell^2$ . A última desigualdade pode então ser escrita:  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$ , ou seja  $a = \lim x_n$  em  $\ell^2$ . Assim, toda seqüência de Cauchy em  $\ell^2$  é convergente e portanto  $\ell^2$  é um espaço de Hilbert.

O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é o conjunto das listas finitas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  onde cada coordenada  $x_i$  é um número real. Em  $\mathbb{R}^n$  as métricas  $d'(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$ ,  $d''(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$  e  $d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$  são (uniformemente) equivalentes. Examinemos agora o que acontece quando  $n = \infty$ .

O conjunto de todas as seqüências  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$  de números reais é o produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$ , onde  $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . É conveniente usar a notação

mais simples  $\mathbb{R}^N$  a fim de indicar este espaço, no qual foi definida a métrica produto  $d'(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$ . Esta é a generalização natural da métrica  $d'(x,y) = \sum |x_i - y_i|$ . As modificações introduzidas tiveram apenas a finalidade de fazer a série convergir.

Cada ponto  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^N$  é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e a convergência de uma seqüência de pontos em  $\mathbb{R}^N$  é a convergência simples, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  em  $\mathbb{R}^N$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Equivalentemente, uma aplicação  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definida num espaço métrico arbitrário, com valores em  $\mathbb{R}^N$ , é contínua se, e somente se, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , sua  $i$ -ésima coordenada  $f_i = p_i \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Aqui,  $p_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção  $p_i(x) = x_i$ . Estes fatos concordam com o que tinha sido estabelecido antes para  $\mathbb{R}^n$ .

No subconjunto  $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^N$ , formado pelas seqüências limitadas de números reais, foi também considerada a métrica da convergência uniforme  $d''(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$ .

A métrica da convergência uniforme é mais fina do que a métrica da convergência simples, induzida por  $\mathbb{R}^N$  no subconjunto  $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ . Com efeito,  $|x_i - y_i| \leq d''(x,y)$ . Logo  $x_n \rightarrow a$  (uniformemente) em  $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \Rightarrow x_{ni} \rightarrow a_i$  para

todo  $i \Rightarrow \lim x_n = a$  em  $\mathbb{R}^N$ . Mas se tomarmos, por exemplo  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , veremos que  $e_n \rightarrow (0, 0, \dots)$  simplesmente, enquanto que  $e_n \neq 0$  uniformemente, pois  $\|e_n\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |e_{ni}| = 1$ . A métrica da convergência uniforme generaliza a métrica  $d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Finalmente, temos  $\ell^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^N$ , onde  $\ell^2$  é o conjunto das seqüências  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$  tais que  $\sum x_i^2 < +\infty$ . Em  $\ell^2$ , a métrica é  $d''(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$ . A métrica de  $\ell^2$  é estritamente mais fina do que as métricas uniforme e produto. Em outras palavras, se  $(x_n)$  é uma seqüência de pontos em  $\ell^2$  e  $a \in \ell^2$ , então:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim x_n = a \\ \text{na métrica de } \ell^2 \end{array}} \xrightarrow{(1)} \boxed{\begin{array}{l} x_n \rightarrow a \\ \text{uniformemente} \end{array}} \xrightarrow{(2)} \boxed{\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i \\ \text{para cada } i \in \mathbb{N} \end{array}}$$

mas as implicações contrárias são ambas falsas.

Para provar a implicação (1), basta notar que  $|x_n - a| < \epsilon$  em  $\ell^2 \Rightarrow |x_{ni} - a_i| < \epsilon$  para todo  $i \Rightarrow \sup_i |x_{ni} - a_i| \leq \epsilon \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \epsilon$  em  $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ . A implicação (2) é evidente. Como contra-exemplo para a recíproca de (2), podemos tomar  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{ni} = 0$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  mas  $\|e_m - e_n\| = \sup_i |e_{mi} - e_{ni}| = 1$ , logo  $(e_n)$  não é uma seqüência de Cauchy em

$\mathbb{R}(N; \mathbb{R})$  e portanto não converge uniformemente para limite algum. Também a recíproca de (1) é falsa, como se vê tomando  $x_n = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots)$ , onde as primeiras  $n$  coordenadas são iguais a  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  e as restantes são 0. Então  $x_n \rightarrow 0$  uniformemente, pois  $\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , mas  $|x_n| = 1$  em  $\ell^2$  logo não se tem  $\lim x_n = 0$  em  $\ell^2$ . Na realidade, como  $|x_{4n} - x_n| = 1$  em  $\ell^2$ , a seqüência  $(x_n)$  não é de Cauchy e portanto não converge para limite algum em  $\ell^2$ .

A métrica de  $\ell^2$  é a generalização natural da métrica euclidiana  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  de  $\mathbb{R}^n$ , inclusive porque provém de um produto interno.

Os três espaços,  $\ell^2$ ,  $\mathbb{R}(N; \mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^N$  são espaços métricos completos. O primeiro é um espaço de Hilbert, o segundo é um espaço de Banach e o terceiro, embora seja um espaço vetorial, sua métrica não provém de uma norma, pois não cumpre a condição  $d'(\lambda x, \lambda y) = \lambda \cdot d'(x, y)$ . Entretanto, como se vê facilmente, as operações  $s: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definidas por  $s(x, y) = x + y$  em  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ , são contínuas. Por isso se diz que  $\mathbb{R}^N$  é um espaço vetorial topológico. (O fato de ser métrico, completo e suas bolas serem convexas, classifica  $\mathbb{R}^N$  como espaço de Frechet.)

§4. Extensão de aplicações contínuas.

Dados  $X \subset Y$ , uma aplicação  $F: Y \rightarrow Z$  chama-se uma extensão de  $f: X \rightarrow Z$  quando  $F(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ , ou seja, quando  $F|_X = f$ . Sejam agora  $M, N$  espaços métricos,  $X \subset M$  e  $f: X \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Diremos que  $f$  se estende continuamente a  $M$  quando  $f$  possui uma extensão  $F: M \rightarrow N$  contínua. Nem toda aplicação contínua  $f: X \rightarrow N$  pode ser continuamente estendida ao espaço inteiro  $M$ . Por exemplo, a função contínua  $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ , não possui extensão contínua a nenhum conjunto contendo o intervalo fechado  $[0,1]$ , pois não existem os limites  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Abordaremos aqui o problema de estender continuamente a todo o espaço  $M$  uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow N$ , definida num subconjunto denso  $X \subset M$ . Isto equivale a, dada uma aplicação contínua  $f: Y \rightarrow N$ , definida num subconjunto qualquer  $X \subset M$ , estendê-la continuamente a um conjunto  $S$  tal que  $X \subset S \subset \bar{X}$ . O problema geral de extensão de aplicações contínuas é estudado na Topologia Algebrica, que trata de métodos especiais para resolvê-lo em casos particulares (Teoria da Obstrução).

No caso que temos em vista, a resposta é imediata: uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow N$ , definida num subconjunto denso  $X \subset M$ , pode ser estendida continuamente a  $M$  se, e somente se, existe, para cada  $a \in M$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Com efeito, em primeiro lugar, como  $\bar{X} = M$ , tem sentido considerar o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  para todo  $a \in M$ . Em seguida, se existe  $F: M \rightarrow N$  contínua estendendo  $f$  então vale  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$  para todo  $a \in M$ . Em particular,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F(a)$ . Reciprocamente, se existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  para todo  $a \in M$  então a aplicação  $F: M \rightarrow N$ , cujo valor em cada ponto  $a \in M$  é definido como sendo este limite, é contínua, em virtude da Proposição 20, Capítulo 5.

A extensão contínua  $F: M \rightarrow N$  de uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow N$ , definida num subconjunto denso  $X \subset M$ , se existir é única. Com efeito, para todo  $a \in M$ , o valor  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , é determinado univocamente pelos valores que  $f$  assume em  $X$ . (Podíamos também ter apelado para o Exemplo 13 do Capítulo 5.)

Não há nada mais de útil a acrescentar sobre nosso problema, em geral. Vamos agora supor que  $N$  seja completo, a fim de obter novas informações. Em primeiro lugar, temos a

Proposição 9 - (Critério de Cauchy). Seja  $f: X \rightarrow N$  uma aplicação definida no subconjunto  $X$  do espaço métrico  $M$  e tomando valores no espaço métrico completo  $N$ . Dado  $a \in \bar{X}$ , a fim de que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , é necessário e suficiente que, para todo  $\epsilon > 0$ , se possa obter  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $d(x, a) < \delta$ ,  $d(y, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Demonstração: Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in N$  existe, então, dado  $\epsilon > 0$ , podemos obter  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \frac{\epsilon}{2}$ . Portanto, se  $x, y \in X$  cumprem  $d(x, a) < \delta$  e  $d(y, a) < \delta$ , temos  $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), b) + d(f(y), b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Reciprocamente, se esta condição é satisfeita então, para toda seqüência de pontos  $x_n \in X$  com  $\lim x_n = a$ , a seqüência  $(f(x_n))$  é de Cauchy, e portanto convergente em  $N$ . Segue-se pois do Corolário da Proposição 19, Capítulo 5, que existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

A condição do critério de Cauchy pode também ser enunciada assim: "para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma bola  $B$ , de centro  $a$ , em  $M$ , tal que  $\text{diam}[f(B \cap X)] < \epsilon$ ."

Como corolário do critério de Cauchy, obtemos o teorema de extensão de aplicações uniformemente contínuas:

Proposição 10 - Toda aplicação uniformemente contínua

$f: X \rightarrow N$ , definida num subconjunto denso de um espaço métrico  $M$  e tomando valores num espaço métrico completo  $N$ , possui uma única extensão contínua  $F: M \rightarrow N$ . A aplicação  $F$  também é uniformemente contínua.

Demonstração: Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Segue-se que, para todo  $a \in M$ , se  $x, y \in X$  e  $d(x, a) < \delta/2$ ,  $d(y, a) < \delta/2$  então  $d(x, y) < \delta$  e portanto  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ . Pelo critério de Cauchy, existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F(a)$ , para todo  $a \in M$ . A extensão  $F: M \rightarrow N$ , assim obtida, é contínua em virtude da Proposição 20, Capítulo 5. Mostraremos diretamente que ela é uniformemente contínua. Seja, pois, dado  $\epsilon > 0$ . A continuidade uniforme de  $f$  nos fornece  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$ . Afirmamos que este  $\delta$  atende ao  $\epsilon$  dado para a continuidade uniforme de  $F$ .

Com efeito, sejam  $u, v \in M$  e  $d(u, v) < \delta$ . Então  $u = \lim x_n$  e  $v = \lim y_n$ , onde  $x_n, y_n \in X$ . Pela continuidade da função distância, vale  $d(x_n, y_n) < \delta$ , para todo  $n$  suficientemente grande. Segue-se que

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(y_n)) &< \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > n_0. \text{ Assim } u, v \in M, \\ d(u, v) < \delta \Rightarrow d(F(u), F(v)) &= d(\lim f(x_n), \lim f(y_n)) = \\ &= \lim d(f(x_n), f(y_n)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \text{ Isto é o que queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Corolário 1 - Seja  $f: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo uniforme entre subespaços densos  $X \subset M$  e  $Y \subset N$ . Se  $M$  e  $N$  são completos,  $f$  se estende, de modo único, a um homeomorfismo uniforme  $F: M \rightarrow N$ .

Com efeito, seja  $g: Y \rightarrow X$  o inverso de  $f$ . Existem aplicações uniformemente contínuas  $F: M \rightarrow N$  e  $G: N \rightarrow M$  que estendem  $f$  e  $g$  respectivamente. As aplicações contínuas  $G \circ F: M \rightarrow M$  e  $F \circ G: N \rightarrow N$  são tais que  $(G \circ F)(x) = x$  para todo  $x \in X$  e  $(F \circ G)(y) = y$  para todo  $y \in Y$ . Como  $X \subset M$  e  $Y \subset N$  são densos, segue-se que  $G \circ F = \text{id}_M$  e  $F \circ G = \text{id}_N$ . Logo,  $G = F^{-1}$  e, por conseguinte,  $F$  é um homeomorfismo uniforme de  $M$  sobre  $N$ .

Corolário 2 - Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma isometria entre subespaços densos  $X \subset M$  e  $Y \subset N$ . Se  $M$  e  $N$  são completos,  $f$  se estende, de modo único, a uma isometria  $F: M \rightarrow N$ .

Existe um único homeomorfismo uniforme  $F: M \rightarrow N$ , que estende  $f$ . Dados  $x, y \in M$ , temos  $x = \lim x_n$ ,  $y = \lim y_n$ , com  $x_n, y_n \in X$  para todo  $n$ . Logo  $d(F(x), F(y)) = d(\lim f(x_n), \lim f(y_n)) = \lim d(f(x_n), f(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$ . Assim,  $F$  é uma isometria.

Exemplo 16 - A Proposição 10 não continua válida quando

se omite a hipótese de  $N$  ser completo. Por exemplo, a aplicação identidade  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , embora uniformemente contínua, não possui uma extensão contínua  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ , pois toda função contínua de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{Q}$  é constante. ( $\mathbb{R}$  conexo  $\Rightarrow F(\mathbb{R})$  conexo mas nenhum subconjunto conexo de  $\mathbb{Q}$  tem mais de um ponto.)

A Proposição 10 pode também ser enunciada do modo seguinte, aparentemente mais geral: "Seja  $f: X \rightarrow N$  uniformemente contínua no subconjunto  $X \subset M$  (que não supomos denso). Se  $N$  é completo, existe uma única aplicação contínua  $F: \bar{X} \rightarrow N$  que estende  $f$ . A aplicação  $F$  é uniformemente contínua". Um aperfeiçoamento imediato da Proposição 10 consiste em observar que a existência da extensão de uma aplicação contínua é um fenômeno local. Para que  $f: X \rightarrow N$  ( $N$  completo) se estenda a uma aplicação contínua  $F: M \rightarrow N$ , basta que  $f$  transforme seqüências de Cauchy em  $X$  em seqüências de Cauchy em  $N$ . Para que isto aconteça é suficiente que  $f: X \rightarrow N$  seja localmente uniformemente contínua, ou seja, para cada ponto  $x \in X$  exista uma bola  $B = B(x, \epsilon)$  - no subespaço  $X$  - tal que  $f|B$  seja uniformemente contínua.

Podemos então enunciar a

Proposição 10a - Seja  $f: X \rightarrow N$  localmente uniformemente

contínua, definida no subespaço  $X \subset M$  e tomado valores  
no espaço métrico completo  $N$ . A aplicação  $f$  possui  
uma única extensão contínua  $F: \bar{X} \rightarrow N$ , a qual também é  
localmente uniformemente contínua.

Se  $f: X \rightarrow N$  não é localmente uniformemente contínua, sua extensão contínua  $F$  pode não existir, caso continuemos exigindo que seu domínio seja todo o fecho de  $X$ . Mas certamente, se considerarmos  $D = \{a \in \bar{X};$  existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\}$ , então  $f$  se estende a uma aplicação contínua  $F: D \rightarrow N$ , definida por  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .  $D$  é o maior subconjunto de  $\bar{X}$  no qual pode ser definida uma extensão contínua de  $f$ . Uma informação interessante sobre  $D$  é fornecida pela proposição abaixo, onde é essencial admitir que  $N$  é completo, mas  $f$  não precisa ser contínua.

Proposição 11 - Seja  $f: X \rightarrow N$  definida num subconjunto  
 $X$  de um espaço métrico  $M$  e tomado va-  
lores no espaço métrico completo  $N$ . O conjunto  $D$ , for-  
mado pelos pontos  $a \in \bar{X}$  tais que existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  é uma  
intersecção enumerável de subconjuntos abertos de  $M$ .

Demonstração: Consideraremos inicialmente o caso em que  $X$  é denso em  $M$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $A_n$  o conjunto dos pontos  $a \in M$  para cada um dos quais exis-

te um  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in X$ ,  $d(x, a) < \delta$ ,  $d(y, a) < \delta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$ . Equivalentemente:  $A_n = \{a \in M; \exists B = B(a; \delta), \text{ diam.}f(B \cap X) < \frac{1}{n}\}$  e também  $A_n = \{a \in M; \exists U \text{ aberto, } a \in U, \text{ diam.}f(U \cap X) < \frac{1}{n}\}$ . Esta última descrição mostra que  $A_n$  é aberto em  $M$  pois se  $a \in A_n$  então  $a \in U \subset A_n$ . Por outro lado, a definição de  $A_n$  foi tomada de forma que o critério de Cauchy nos dê imediatamente:  $a \in D \Leftrightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow a \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo  $D = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$ .

Quando  $X$  não é denso em  $M$ , só existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  quando  $a \in \bar{X}$ . Assim: existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow a \in \bar{X} \cap A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, a conclusão válida é  $D = \bar{X} \cap (A_1 \cap \dots \cap A_n \cap \dots)$ . Mas nem tudo está perdido pois se escrevermos  $V_n = \{x \in M; d(x, X) < \frac{1}{n}\} = \bigcup_{x \in X} B(x; \frac{1}{n})$ , cada  $V_n$  é aberto em  $M$  e, além disso  $\bar{X} = V_1 \cap \dots \cap V_n \cap \dots$ . Segue-se então que  $D = (V_1 \cap \dots \cap V_n \cap \dots) \cap (A_1 \cap \dots \cap A_n \cap \dots) = V_1 \cap A_1 \cap V_2 \cap A_2 \cap \dots$  é uma interseção enumerável de abertos em  $M$ .

Proposição 12 - Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Se  $N$  é completo, o conjunto dos pontos de continuidade de uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de  $M$ .

Demonstração: Usemos a Proposição 11, (apenas a primeira parte) com  $X = M$ . Os pontos de  $M$  nos quais  $f$  é contínua são precisamente os pontos  $a \in M$  tais que existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

As Proposições 11 e 12 são dois dos raros teoremas em que se estabelecem propriedades topológicas de funções sobre cujo comportamento nenhuma hipótese é feita.

### §5. Completamento de um espaço métrico.

Nosso objetivo agora é mostrar que todo espaço métrico  $M$  pode ser ampliado, acrescentando-lhe novos pontos, de modo a obter um espaço métrico completo  $\hat{M}$ , chamado o completamento de  $M$ . Como um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo, o fecho de  $M$  em  $\hat{M}$  é completo e contém  $M$ . Logo não há necessidade de considerar os demais pontos de  $\hat{M}$  além dos que são aderentes a  $M$ . Assim, imporemos que  $M$  seja denso no seu completamento. Quando procurarmos completar  $M$ , não exigiremos que se tenha  $M \subset \hat{M}$ . Basta que encontremos uma imersão isométrica  $\varphi: M \rightarrow N$ , onde  $N$  é completo. Tomaremos então  $\hat{M} = \overline{\varphi(M)}$  como completamento de  $M$ .

Como  $M$  e  $\varphi(M)$  são isométricos, tudo se passa como se tivéssemos realmente  $M \subset \hat{M}$ . Formalmente, a definição é a seguinte.

Um completamento de um espaço métrico  $M$  é um par  $(\hat{M}, \varphi)$ , onde  $\hat{M}$  é completo e  $\varphi: M \rightarrow \hat{M}$  é uma imersão isométrica cuja imagem  $\varphi(M)$  é densa em  $\hat{M}$ .

Muitas vezes se diz simplesmente que  $\hat{M}$  é um completamento de  $M$ , quando é evidente no contexto qual é  $\varphi$ . Frequentemente, considera-se  $M \subset \hat{M}$ , identificando-se  $M$  com sua imagem  $\varphi(M)$ .

Exemplo 17 -  $\mathbb{R}$  é um completamento de  $\mathbb{Q}$ . Se  $M$  é um espaço métrico completo então, para todo subconjunto  $X \subset M$ , seu fecho  $\bar{X}$  em  $M$  é um completamento de  $X$ . Em particular, o intervalo  $[0,1]$  é um complemento de  $(0,1)$ .

Proposição 13 - (Existência do completamento.) Todo espaço métrico possui um completamento.

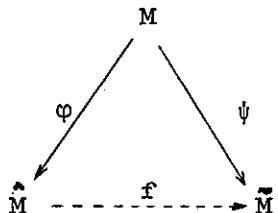
Demonstração: Dado o espaço métrico  $M$ , vimos no Exemplo 27, Capítulo 1, que existe uma imersão isométrica  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{B}(M; \mathbb{R})$  onde  $\mathbb{B}(M; \mathbb{R})$  é o espaço vetorial normado constituído pelas funções limitadas  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Pela Proposição 8,  $\mathbb{B}(M; \mathbb{R})$  é completo. Basta então tomar  $\hat{M} = \overline{\varphi(M)}$ .

Observação: Para todo  $x \in M$ , seja  $d_x: M \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $d_x(y) = d(x,y)$ . Fixando um ponto  $a \in M$ , a imersão isométrica  $\varphi$  é dada por  $\varphi(x) = d_x - d_a$ . Logo, tem-se, na realidade, uma imersão isométrica  $\varphi: M \rightarrow C_0(M; \mathbb{R})$ , onde  $C_0(M; \mathbb{R})$  é o espaço (vetorial normado completo) das funções contínuas limitadas de  $M$  em  $\mathbb{R}$ . A imersão  $\varphi$  aqui definida depende da escolha arbitrária de um ponto  $a \in M$ . Referimo-nos ao Exemplo 27, Capítulo 1 para ver como se pode evitar essa arbitrariedade, às custas de fazer  $\varphi$  tomar valores num espaço que não é vetorial.

Proposição 14 - (Unicidade do completamento.) Sejam  $(\hat{M}, \varphi)$  e  $(\tilde{M}, \psi)$  dois completamentos do mesmo espaço métrico  $M$ . Existe uma única isometria  $f: \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$  tal que  $f \circ \varphi = \psi$ .

Demonstração: A condição  $f \circ \varphi = \psi$  já define  $f$  na imagem  $\varphi(M)$ : para cada  $y = \varphi(x) \in \varphi(M)$ , podemos  $f_o(y) = \psi(x)$ . Como  $\varphi$  é injetiva, isto define uma aplicação  $f_o: \varphi(M) \rightarrow \tilde{M}$ , que cumpre

$f_o \circ \varphi = \psi$  e portanto é uma isometria de  $\varphi(M)$  sobre  $\psi(M)$ . Pelo Corolário 2 da Proposição 10, existe uma única isome-



tria  $f: \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$  que estende  $f_o$ , isto é, tal que  $f \circ \varphi = \psi$ .

A Proposição 14 mostra que não importa qual o artifício particular por nós utilizado para obter o completamento  $\hat{M}$ . Qualquer método conduz essencialmente ao mesmo resultado. De agora em diante, diremos "o completamento" e não "um completamento".

Exemplo 18 - Dois espaços homeomorfos podem ter completamentos não homeomorfos. Assim, o intervalo  $(0, 2\pi)$ , cujo completamento é  $[0, 2\pi]$ , é homeomorfo a  $S^1 - \{p\}$ , onde  $p = (1, 0)$ , mas o completamento de  $S^1 - \{p\}$  é  $S^1$ . Como sabemos  $S^1$  e  $[0, 2\pi]$  não são homeomorfos. (Vide §5, Capítulo 4.)

Exemplo 19 - Se dois espaços métricos  $M$  e  $N$  são uniformemente homeomorfos, seus completamentos  $\hat{M}$  e  $\hat{N}$  são (uniformemente) homeomorfos. Com efeito, pelo Corolário 1 da Proposição 10, todo homeomorfismo uniforme  $h: M \rightarrow N$  se estende a um homeomorfismo uniforme  $\hat{h}: \hat{M} \rightarrow \hat{N}$ . Segue-se do exemplo anterior que não pode existir um homeomorfismo uniforme entre  $(0, 2\pi)$  e  $S^1 - \{p\}$ .

Exemplo 20 - O completamento do produto cartesiano  $M \times N$  é o produto  $\hat{M} \times \hat{N}$ , onde  $\hat{M}$  e  $\hat{N}$  são os completamentos de  $M$  e  $N$  respectivamente. Com efeito, admitindo  $M \subset \hat{M}$  e  $N \subset \hat{N}$  densos, o produto  $M \times N$  é den-

so no espaço completo  $\hat{M} \times \hat{N}$ .

Exemplo 21 - Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Seu completamento  $\hat{E}$  pode, de modo único, ser munido de uma estrutura de espaço vetorial normado que estende a estrutura correspondente de  $E$ . Com efeito, a adição  $s: E \times E \rightarrow E$  é uniformemente contínua, logo se estende, de modo único, a uma aplicação (que indicaremos com a mesma notação)  $s: \hat{E} \times \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ . As propriedades comutativa e associativa da adição em  $E$  mantêm-se em  $\hat{E}$  por passagem ao limite. Por exemplo, dados  $x, y \in \hat{E}$ , temos  $x = \lim x_n$ ,  $y = \lim y_n$ , com  $x_n, y_n \in E$ . Logo  $x+y = \lim(x_n+y_n) = \lim(y_n+x_n) = y+x$ . Do mesmo modo se vê que o zero  $0 \in E$  ainda se mantém como elemento neutro da adição em  $\hat{E}$ . A aplicação  $x \mapsto -x$ , sendo uma isometria de  $E$ , estende-se de modo único a uma isometria de  $\hat{E}$ . A relação  $x + (-x) = 0$ , válida em  $E$ , mantém-se verdadeira em  $\hat{E}$ , por passagem ao limite. A multiplicação  $m: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  é localmente uniformemente contínua. Logo se estende, de modo único, a uma aplicação contínua  $m: \mathbb{R} \times \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ . Dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x \in \hat{E}$ , temos  $x = \lim x_n$ ,  $x_n \in E$ , e  $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x = \lim(\lambda \cdot x_n)$ . As relações do tipo  $\lambda(x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ , etc. são válidas por passagem ao limite. Isto tudo nos mostra que  $\hat{E}$  pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial cujas operações estendem

as de  $E$ . Estas operações são contínuas em relação à métrica  $\hat{d}$  de  $\hat{E}$ . Tal métrica provém de uma norma pois  $\hat{d}(x+a, y+a) = \lim d(x_n+a_n, y_n+a_n) = \lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$  e  $\hat{d}(\lambda x, \lambda y) = \lim d(\lambda x_n, \lambda y_n) = |\lambda| \cdot \lim d(x_n, y_n) = |\lambda| \cdot d(x, y)$ . A norma em  $\hat{E}$  da qual  $\hat{d}$  provém é a função  $x \mapsto \hat{d}(x, 0)$ , a qual estende  $x \mapsto d(x, 0)$  em  $E$ , ou seja, estende  $x \mapsto |x|$ .

Exemplo 22 - De modo análogo ao visto acima, se mostra que o completamento  $\hat{E}$  de um espaço vetorial  $E$ , munido de produto interno, pode também ser dotado de uma estrutura de espaço vetorial com produto interno, que estende a de  $E$ .

## §6. Espaços métricos topologicamente completos.

Como ser completo não é uma propriedade topológica, surge naturalmente a pergunta: dado um espaço métrico  $(M, d)$ , existe alguma métrica  $d_1$ , equivalente a  $d$ , que torne  $M$  completo? Isto corresponde a indagar se  $M$  é homeomorfo a algum espaço métrico completo. [De fato, se  $d_1$  é equivalente a  $d$  então a aplicação identidade  $(M, d) \rightarrow (M, d_1)$  é um homeomorfismo e, reciprocamente, se  $h: (M, d) \rightarrow (N, d_N)$  é um homeomorfismo então  $d_1(x, y) =$

=  $d_N(h(x), h(y))$  é uma métrica em  $M$ , equivalente a  $d$ , tal que  $h: (M, d_1) \rightarrow (N, d_N)$  é uma isometria, logo  $(M, d_1)$  é completo se  $N$  o for.]

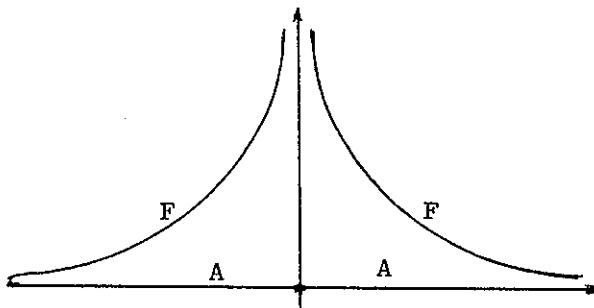
Por exemplo, o intervalo aberto  $(-1, 1)$ , com a métrica induzida da reta, não é completo mas  $h: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x/(1-|x|)$ , é um homeomorfismo sobre um espaço completo. Assim, a métrica  $d_1(x, y) = |h(x)-h(y)|$  é equivalente à métrica  $|x-y|$  em  $(-1, 1)$  e o torna um espaço métrico completo. Mais geralmente, vale a

Proposição 15 - Todo subconjunto aberto de um espaço métrico completo é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja  $A \subset M$  aberto no espaço métrico completo  $M$ . Então  $M-A$  é fechado e, por conseguinte, a função contínua  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = d(x, M-A)$ , é tal que  $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in A$ . Segue-se que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ , é contínua. Seja  $F \subset A \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$  o gráfico de  $f$ . Temos  $F = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}; x \in A, t = \frac{1}{\varphi(x)}\} = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}; t \cdot \varphi(x) = 1\}$ . A segunda igualdade mostra que  $F$  é um subconjunto fechado do espaço métrico completo  $M \times \mathbb{R}$ . (Vide Proposição 6 e 7.) Logo  $F$  é um espaço métrico completo, quando munido da métrica induzida por  $M \times \mathbb{R}$ , digamos  $d[(x, f(x)), (y, f(y))] = d(x, y) + |f(x)-f(y)|$ .

Como  $x \mapsto (x, f(x))$  é um homeomorfismo entre  $A$  e  $F$ , a proposição fica demonstrada.

Pelo que vimos, a métrica  $d_1(x, y) = d(x, y) + \frac{1}{d(x, M-A)} - \frac{1}{d(y, M-A)}$  é equivalente a  $d$  em  $A$  e torna o aberto  $A \subset M$  completo quando  $M$  o é. Intuitivamente, isto equivale a ampliar as distâncias à medida que nos aproximamos da fronteira de  $A$ . É instrutivo examinar o caso particular  $A = \mathbb{R} - \{0\}$ . Seguindo os passos da demonstração acima, a função  $\varphi(x) = d(x, M-A)$  é  $\varphi(x) = |x|$ , de modo que o espaço métrico completo homeomorfo a  $A$  é



$F = \{(x, \frac{1}{|x|}) ; x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .  $F$  consiste de dois ramos de hiperbóle. Como vemos, ao nos aproximarmos de 0 em  $A$ , as imagens em  $F$  tendem ao infinito.

A função  $h: (0, 1] \rightarrow [1, +\infty)$ ,  $h(x) = \frac{1}{x}$ , é um homeomorfismo do espaço não completo  $(0, 1]$  sobre o espaço completo  $[1, +\infty)$ . Como  $(0, 1]$  não é aberto em  $\mathbb{R}$ , esta situação não está coberta pela proposição acima. Vale, porém, o caso mais geral seguinte:

Proposição 16 - Seja  $C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots$  uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de um espaço métrico completo  $M$ . Então  $C$  é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Demonstração: Suponhamos cada  $A_i$  munido de uma métrica  $d_i$ , equivalente à induzida por  $M$ , tal que  $(A_i, d_i)$  seja completo. (Vide a proposição anterior) Então o produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$  é um espaço métrico completo. Seja  $\Delta \subset \prod_{i=1}^{\infty} A_i$  a diagonal, formada pelos pontos  $(x, x, \dots, x, \dots)$  com todas as coordenadas iguais. Temos  $(x, x, \dots, x, \dots) \in \Delta \Leftrightarrow x \in C$ . Logo, a aplicação  $h: C \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ , definida por  $h(x) = (x, x, \dots, x, \dots)$ , é uma bijeção contínua de  $C$  sobre  $\Delta$ . Mais ainda,  $h: C \rightarrow \Delta$  é um homeomorfismo, pois qualquer projeção  $p_i: \prod_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow A_i$ , restrita a  $\Delta$ , é igual ao inverso de  $h$ . Resta apenas verificar que  $\Delta$ , com a métrica induzida do produto, é um espaço métrico completo. Com efeito,  $\Delta = \{z \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i; p_1(z) = p_i(z) \text{ para } i = 1, 2, \dots\}$ . Logo  $\Delta$  é um subconjunto fechado do produto.

Exemplo 23 - Seja  $Q = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  o conjunto dos números racionais. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $A_i = \mathbb{R} - \{r_i\}$ . Então cada  $A_i$  é aberto em  $\mathbb{R}$  e  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots$  é o conjunto dos números irracionais. Se-

gue-se da proposição anterior que o conjunto dos números irracionais é homeomorfo a um espaço métrico completo! (Não, caro leitor, nem todo espaço métrico tem essa propriedade. Veremos no §7 adiante que  $\mathbb{Q}$  não é homeomorfo a um espaço métrico completo.)

A fim de completar esta discussão, definiremos um espaço métrico topologicamente completo como um espaço métrico  $(M, d)$  que é homeomorfo a um espaço métrico completo, ou, equivalentemente, tal que existe uma métrica  $d_1$ , equivalente a  $d$ , de forma que  $(M, d_1)$  seja completo.

Diremos que um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  é um  $G_\delta$  em  $M$  quando  $X$  é interseção enumerável de subconjuntos abertos em  $M$ . Diremos que um espaço métrico  $M$  é um  $G_\delta$  absoluto quando todo subespaço  $X \subset N$  isométrico a  $M$  é um  $G_\delta$  em  $N$ . (De modo mais simples: quando  $M$  é um  $G_\delta$  em qualquer espaço que o contenha.)

Exemplo 24 - Se  $X \subset M$  é um conjunto fechado então, para cada  $n \in \mathbb{N}$  pomos  $A_n(X) = \{x \in M; d(x, X) < \frac{1}{n}\}$ . Cada  $A_n$  é aberto em  $M$  e  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  pois  $x \notin X \Rightarrow d(x, X) > 0 \Rightarrow d(x, X) > \frac{1}{n_0}$  para algum  $n_0 \Rightarrow x \notin A_{n_0} \Rightarrow x \notin \bigcap A_n$ . Portanto, todo subconjunto fechado  $X \subset M$  é um  $G_\delta$ . Como exemplo de um  $G_\delta$  absoluto, men-

cionaremos um espaço  $M$  que consta de um único ponto. Em todo espaço métrico contendo  $M$ , o conjunto  $M$  é fechado e portanto um  $G_\delta$ . Exemplos menos triviais de  $G_\delta$ 's absolutos resultam da proposição seguinte.

Proposição 17 - Um espaço métrico  $M$  é topologicamente completo se, e somente se, é um  $G_\delta$  absoluto.

Demonstração: Se  $M$  é um  $G_\delta$  absoluto então, em particular, considerando  $M \subset \hat{M}$ , obtemos  $M$  como interseção enumerável de subconjuntos abertos do seu completamento  $\hat{M}$ . Pela Proposição 16,  $M$  é homeomorfo a um espaço métrico completo. Reciprocamente, seja  $M$  topologicamente completo e contido, como subespaço, num espaço métrico  $M$ . Provemos que  $M$  é um  $G_\delta$  em  $N$ . Existiria um homeomorfismo  $f: M \rightarrow M_1$ , de  $M$  sobre um espaço métrico completo  $M_1$ . O conjunto dos pontos  $a \in \bar{M}$  (fecho de  $M$  em  $N$ ) tais que existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  é, pela Proposição 11, um  $G_\delta$  em  $N$ . Ora, tal conjunto resume a  $M$  pois se  $a \in \bar{M}$  e  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in M_1$  existe então, tomando uma seqüência de pontos  $x_n \in M$ , com  $\lim x_n = a$ , temos  $\lim f(x_n) = b$  e, como  $f^{-1}: M_1 \rightarrow M$  é contínua, daí resulta  $\lim x_n = f^{-1}(b)$ . Logo  $a = f^{-1}(b)$ , donde  $a \in M$ . Assim  $M$  é um  $G_\delta$  absoluto.

Corolário - Um espaço métrico M é um  $G_\delta$  absoluto se, e somente se, para todo espaço métrico N, qualquer subconjunto  $X \subset N$  homeomorfo a M é uma interseção enumerável de abertos em N.

Com efeito, se M é um  $G_\delta$  absoluto e  $X \subset N$  é homeomorfo a M então, junto com M, X é topologicamente completo e portanto é um  $G_\delta$  em N.

### §7. O teorema de Baire.

Neste parágrafo, introduziremos uma classe de conjuntos que, num certo sentido, são insignificantes dentro do espaço métrico que os contém. Trata-se de uma noção análoga à de conjunto de medida nula, que existe em Análise.

Seja M um espaço métrico. Um subconjunto  $X \subset M$ , para ser considerado insignificante do ponto-de-vista topológico deve, antes de tudo ter interior vazio. Ou, equivalente: seu complementar  $M-X$  deve ser denso em M. Além disso, esta noção deve ser definida de tal modo que todo subconjunto e toda reunião enumerável de conjuntos topologicamente insignificantes ainda tenha esta pro-

priedade.

Não bastaria definir como insignificante um conjunto cujo interior fosse vazio pois  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  têm interior vazio, enquanto sua reunião é toda a reta  $\mathbb{R}$ . Uma idéia melhor seria considerar como insignificante um conjunto  $X \subset M$  cujo fecho  $\bar{X}$  tivesse interior vazio em  $M$ . De fato, se  $\text{int.}\bar{X} = \emptyset$  e  $\text{int.}\bar{Y} = \emptyset$  então  $\text{int.}(X \cup Y) = \text{int.}(\bar{X} \cup \bar{Y}) \subset \text{int.}\bar{X} \cup \text{int.}\bar{Y} = \emptyset$ . Mesmo assim, não é verdade que  $\text{int.}\bar{X}_n = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implique que  $X = \bigcup X_n$  ainda goze da propriedade  $\text{int.}\bar{X} = \emptyset$ . Basta tomar o conjunto  $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} = \bigcup_n \{r_n\}$  dos números racionais. Para cada  $n$ , o fecho de  $\{r_n\}$  tem interior vazio mas  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

A definição correta de conjunto insignificante é a seguinte.

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$ , dize-se magro em  $M$  quando é uma reunião enumerável,  $X = \bigcup X_n$ , tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{int.}\bar{X}_n = \emptyset$ .

Para que  $X$  seja magro em  $M$ , é necessário e suficiente que  $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , onde  $F_1, \dots, F_n, \dots$  são fechados com interior vazio em  $M$ .

É imediato que todo subconjunto e toda reunião enumerável de conjuntos magros são ainda conjuntos magros.

Não é verdade, porém, que todo subconjunto magro

$X \subset M$  tenha interior vazio em  $M$ . Por exemplo, qualquer subconjunto  $X \subset Q$  é magro, pois é reunião enumerável dos seus pontos, cada um dos quais tem interior vazio em  $Q$ , mas  $X$  não precisa ter interior vazio em  $Q$ . Isto ocorre apenas porque o espaço  $Q$  não é completo, conforme resulta do Teorema de Baire, a seguir. É, portanto, nos espaços métricos completos que os conjuntos magros cumprem as condições que estipulamos acima para conjuntos insignificantes.

Exemplo 25 - Um ponto num espaço métrico tem interior vazio se, e somente se, não é isolado. Em consequência, um conjunto enumerável  $X \subset M$  é magro se, e somente se, nenhum dos seus pontos é isolado. Uma reta no plano  $\mathbb{R}^2$  é um subconjunto magro. Mais geralmente, toda reunião enumerável de retas é magra em  $\mathbb{R}^2$ . Veremos logo mais que  $\mathbb{R}$  não é magro em  $\mathbb{R}$ , isto é, não se pode escrever  $\mathbb{R} = \bigcup F_n$  onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  é fechado com interior vazio.

Sabemos que  $\text{int.}X = \emptyset$  em  $M \Leftrightarrow M-X$  é denso em  $M$ . Segue-se que um subconjunto  $F \subset M$  é um fechado com interior vazio se, e somente se, seu complementar  $M-F$  é um aberto denso em  $M$ . Portanto  $\text{int.}\bar{X} = \emptyset \Leftrightarrow X$  está contido num fechado com interior vazio  $\Leftrightarrow M-X$  contém um aberto denso  $\Leftrightarrow \text{int}(M-X)$  é denso.

Na terminologia antiga, um conjunto magro era chamado conjunto de primeira categoria. Eram chamados de conjuntos de segunda categoria, aqueles que não eram magros.

Exemplo 26 - A fronteira de um conjunto aberto  $A \subset M$  constitui um exemplo de conjunto fechado com interior vazio. Com efeito, se  $x \in \partial A$  então qualquer bola de centro  $x$  contém pontos de  $A$  e, como  $A \cap \partial A = \emptyset$ , vemos que nenhuma bola com centro  $x$  pode estar contida em  $\partial A$ . Assim,  $\partial A$  tem interior vazio. Como  $\partial A = \partial(M-A)$ , vemos que a fronteira de qualquer subconjunto fechado  $F \subset M$  também tem interior vazio. Se  $X \subset M$  não é aberto nem fechado, sua fronteira pode não ter interior vazio. Por exemplo,  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$  na reta.

Exemplo 27 - O conjunto de Cantor  $K$  é um subconjunto fechado do intervalo  $[0,1]$ , obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo  $[0,1]$  seu terço médio aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes  $[0,1/3]$  e  $[2/3,1]$ . Sobra então  $[0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$ . Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um destes quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto  $K$  dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

Se indicarmos com  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  os intervalos abertos omitidos, teremos  $K = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ , logo  $K$  é fechado em  $[0,1]$  e portanto fechado em  $\mathbb{R}$ . Note-se que os pontos extremos dos intervalos omitidos, como  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ , etc. pertencem ao conjunto de Cantor pois em cada etapa da construção de  $K$  são retirados apenas pontos interiores aos intervalos que restaram na etapa anterior. Estes pontos extremos dos intervalos omitidos formam um subconjunto infinito enumerável de  $K$ . Veremos logo mais que  $K$ , entretanto, não é enumerável. Por enquanto, notemos apenas que  $K$  não contém intervalo aberto algum e portanto  $\text{int. } K = \emptyset$ . Com efeito, depois da  $n$ -ésima etapa da construção de  $K$  restam apenas intervalos de comprimento  $1/3^n$ . Portanto, dado qualquer intervalo  $J \subset [0,1]$ , de comprimento  $\ell > 0$ , se tomarmos  $n$  tal que  $\frac{1}{3^n} < \ell$ , o intervalo  $J$  será mutilado depois da  $n$ -ésima etapa da formação de  $K$ . Assim, o conjunto de Cantor é um fechado com interior vazio e portanto magro na reta  $\mathbb{R}$ . Resultará do Teorema de Baire que  $K$  não é magro em si mesmo, isto é, não se pode escrever  $K = \bigcup F_n$  como reunião de conjuntos fechados com interiores vazios em  $K$ .

A proposição seguinte generaliza o "princípio dos intervalos encaixantes" um importante fato básico sobre

números reais.

Proposição 18 - Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda seqüência decrescente  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  de subconjuntos fechados não vazios  $F_n \subset M$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ , existe um ponto  $a \in M$  tal que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$ .

Demonstração: Suponhamos que M seja completo e que nos seja dada uma seqüência  $(F_n)$  como acima. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolhamos um ponto  $x_n \in F_n$ . Isto define uma seqüência  $(x_n)$  em M, tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$ . Ora, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $\text{diam } F_{n_0} < \epsilon$ . Então  $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ , e portanto  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em M. Seja  $\lim x_n = a \in M$ . Dado qualquer  $p \in \mathbb{N}$  temos  $x_n \in F_p$  para todo  $n \geq p$ , donde  $a = \lim x_n \in F_p$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ . Evidentemente não podem existir dois pontos  $a \neq b$  nesta interseção porque isto obrigaria  $d(a, b) \leq \text{diam } F_n$  para todo  $n$ . Logo,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$ . Reciprocamente, se a interseção de toda seqüência decrescente de fechados não vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M, provaremos que M é completo. Com efeito, seja  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em M. Para

todo  $n \in \mathbb{N}$ , ponhamos  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Então  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$  e, por conseguinte  $(\bar{X}_n)$  é uma seqüência decrescente de fechados não vazios. Além disso, temos  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}.X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}.\bar{X}_n$ . Logo existe  $a \in M$  tal que  $\bigcap \bar{X}_n = \{a\}$ . Como  $a \in \bar{X}_n$  para todo  $n$ , segue-se que qualquer bola aberta de centro  $a$  contém pontos  $x_n$  com índices arbitrariamente grandes, ou seja,  $a$  é limite de uma subseqüência de  $(x_n)$ . Como esta seqüência é de Cauchy, concluimos que  $a = \lim x_n$ .

Exemplo 28 - Na proposição acima, é indispensável supor

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}.F_n = 0$ . Com efeito, os conjuntos  $F_n = [n, +\infty)$  são fechados na reta e vale  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  mas  $\bigcap F_n = \emptyset$ . Também no espaço de Hilbert  $\ell^2$ , que é completo, podemos tomar, para cada  $n$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  e  $F_n = \{e_n, e_{n+1}, \dots\}$ . Cada  $F_n$  é fechado, tem-se  $F_n \supset F_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  mas  $\bigcap F_n = \emptyset$ . Neste caso, ocorre  $\text{diam}.F_n = \sqrt{2}$  para cada  $n$ .

O resultado principal deste parágrafo, e um dos mais férteis da teoria dos Espaços Métricos é o seguinte.

Proposição 19 - (Teorema de Baire.) Seja  $M$  um espaço métrico completo. Todo conjunto magro

em  $M$  tem interior vazio. Equivalentemente: se

$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , onde cada  $F_n$  tem interior vazio, então

int.F =  $\emptyset$ . Ou então: toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso de M.

Demonstração: Provaremos a terceira destas afirmações.

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  subconjuntos abertos densos no espaço métrico completo M. Queremos provar que  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  é denso em M, isto é, que toda bola aberta  $B_1$  em M contém algum ponto de A. Ora, como  $A_1$  é aberto e denso,  $B_1 \cap A_1$  é aberto e não-vazio, logo contém uma bola aberta  $B_2$ , a qual podemos supor tão pequena que seu raio não exceda  $\frac{1}{2}$  e seu fecho esteja contido em  $B_1 \cap A_1$ . Por sua vez,  $A_2$  sendo aberto e denso,  $B_2 \cap A_2$  é aberto e não-vazio. Logo existe uma bola aberta  $B_3$ , de raio inferior a  $\frac{1}{3}$ , com  $\bar{B}_3 \subset B_2 \cap A_2$ . Prosseguindo assim, obtemos uma seqüência  $\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \dots \supset \bar{B}_n \supset \dots$ , com  $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$  e  $\text{diam. } B_n \rightarrow 0$ . Pela proposição anterior, existe  $a \in M$  tal que  $a = \bigcap \bar{B}_n$ . A relação  $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$  mostra que a pertence a todos os  $A_n$  (além de pertencer a  $B_1$ ). Logo  $a \in A \cap B_1$ , como queríamos demonstrar.

Corolário - Seja M um espaço métrico completo. Se

$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , onde cada  $F_n$  é fechado em M,  
então existe pelo menos um n tal que  $\text{int } F_n \neq \emptyset$ .

De fato, se fosse  $\text{int } F_n = \emptyset$  para todo  $n$ , então, pelo Teorema de Baire, a reunião dos  $F_n$  teria interior vazio em  $M$ , o que é absurdo pois tal reunião é  $M$ .

Uma versão mais forte do corolário acima será provada logo mais.

Observação: O Teorema de Baire é um fato topológico: refere-se a abertos, fechados, fechos e interiores. Portanto continua válido se substituirmos a métrica do espaço completo  $M$  por outra equivalente, mesmo que com isto se perca a completeza. Por exemplo, o intervalo aberto  $(0,1)$  não pode ser expresso como reunião enumerável de subconjuntos fechados com interior vazio. Em suma: o Teorema de Baire, ao contrário da maioria dos fatos estabelecidos neste capítulo, continua válido se supusermos, em seu enunciado,  $M$  topologicamente (isto é homeomorfo a um espaço) completo. Por exemplo, se  $M$  é um subconjunto aberto de um espaço métrico completo então  $M = \bigcup F_n$ , onde cada  $F_n$  é fechado em  $M$  implica que algum dos  $F_n$  tem interior não vazio em  $M$ . Isto acarreta a seguinte versão mais forte do corolário anterior.

Proposição 20 - Seja  $M$  um espaço métrico completo. Se  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , então  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int. } F_n$  é um aberto denso em  $M$ .

Demonstração: Com efeito, seja  $U$  um aberto não vazio em  $M$ . Queremos provar que  $U \cap A \neq \emptyset$ , ou seja, que existe  $n$  tal que  $U \cap \text{int } F_n \neq \emptyset$ . Ora, temos  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap F_n)$ , onde cada  $U \cap F_n$  é, evidentemente, fechado em  $U$ . Pela observação anterior, existe  $n$  tal que  $\text{int}(U \cap F_n) \neq \emptyset$ . (Como  $U$  é aberto, tanto faz considerar o interior relativo ao subespaço  $U$  como relativo a  $M$ .) Como o interior de  $U \cap F_n$  é um aberto contido em  $U$  e contido em  $F_n$ , vemos que  $\text{int}(U \cap F_n) \subset U \cap \text{int } F_n$  e portanto,  $U \cap \text{int } F_n \neq \emptyset$ , como queríamos demonstrar.

Exemplo 29 - Se  $M$  é um espaço métrico completo enumerável então segue-se da proposição anterior que o conjunto dos pontos isolados de  $M$  é um conjunto (aberto e) denso em  $M$ . Em particular, todo subconjunto fechado infinito enumerável do espaço  $\mathbb{R}^n$  contém uma infinidade de pontos isolados. Isto fornece uma demonstração de que  $\mathbb{R}$  não é enumerável. Consideremos agora o espaço  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Sendo enumerável e sem pontos isolados, nenhuma métrica equivalente à sua poderá torná-lo completo. Ou seja,  $\mathbb{Q}$  não é topologicamente completo. Logo  $\mathbb{Q}$  não é um  $G_\delta$  em  $\mathbb{R}$ : não se pode escrevê-la como interseção enumerável de subconjuntos abertos da reta. Em particular, não existe uma função contí-

nua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cujos pontos de continuidade seja  $\mathbb{Q}$ .

[Por outro lado, há uma conhecida função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que é contínua nos números irracionais e descontínua nos números racionais. Basta tomar  $f(x) = 0$  se  $x$  é irracional,  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$  se  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e  $f(0)=1$ . Detalhes por conta do leitor.]

Exemplo 30 - Sejam  $M$  um espaço métrico completo,  $E$  um espaço vetorial normado e  $\mathcal{E}$  um conjunto de aplicações contínuas  $f: M \rightarrow E$ . Suponhamos que  $E$  seja pontualmente limitado, isto é, que para cada ponto  $x \in M$  exista  $c_x > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c_x$  para toda  $f \in \mathcal{E}$ . Afirmamos que existe um aberto não-vazio  $U$  em  $M$  tal que  $\mathcal{E}$  é uniformemente limitado em  $U$ , ou seja, existe uma constante  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c$  para toda  $f \in \mathcal{E}$  e todo  $x \in U$ . Com efeito, para todo  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto

$$F_n = \{x \in M; |f(x)| \leq n \text{ para toda } f \in \mathcal{E}\}$$

é fechado em  $M$ . (Vide Corolário 3 da Proposição 9, Capítulo 3.) Além disso, como  $\mathcal{E}$  é pontualmente limitado, para cada  $x \in M$  existe algum  $n$  tal que  $x \in F_n$ . Em outras palavras, temos  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ . Sendo  $M$  completo, existe algum  $n$  tal que  $U = \text{int.} F_n \neq \emptyset$ . Para todo  $x \in U$  e toda  $f \in \mathcal{E}$ , temos  $|f(x)| \leq n$ , logo  $\mathcal{E}$  é uniformemente limitada no subconjunto aberto não-vazio  $U$ .

Exemplo 31 - O Teorema de Baire pode ser usado para provar que o conjunto de Cantor  $K$  não é enumerável. Como  $K$  é fechado na reta, basta mostrar que nenhum dos seus pontos é isolado. Com efeito, suponhamos inicialmente que  $x \in K$  seja extremidade de algum intervalo, digamos  $(x, b)$ , omitido de  $[0, 1]$  para formar  $K$ . Quando  $(x, b)$  foi retirado, restou um certo intervalo  $[a, x]$ . Nas etapas seguintes da construção de  $K$ , restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo  $[a_n, x]$ , com  $a_n \in K$ , como foi observado no Exemplo 27. O comprimento  $x - a_n$  tende para zero, logo  $a_n \rightarrow x$  e assim  $x$  não é ponto isolado de  $K$ . Admitamos agora que  $x \in K$  não seja extremo de intervalo retirado de  $[0, 1]$  durante a construção de  $K$ . Dado  $\epsilon > 0$ , não pode ser  $(x, x+\epsilon) \cap K = \emptyset$  pois se este fosse o caso, o intervalo  $(x, x+\epsilon)$  teria sido omitido durante a construção de  $K$ . Na primeira vez em que uma parte desse intervalo fosse retirada, nada mais restaria de  $(x, x+\epsilon)$  pois os extremos do intervalo omitido permanecem nas retiradas seguintes. Como  $x$  permaneceu, segue-se de  $(x, x+\epsilon) \cap K = \emptyset$  que o intervalo omitido foi da forma  $(x, b)$ . Mas  $x$  não é extremo de intervalo retirado, logo  $(x, x+\epsilon) \cap K \neq \emptyset$  para todo  $\epsilon > 0$  e, por conseguinte,  $x$  não é isolado em  $K$ . Segue-se que  $K$  não é enumerável. Mais ainda, como os pontos de

K que são extremos dos intervalos omitidos formam evidentemente um conjunto enumerável, os pontos que não são extremos de intervalos omitidos constituem um conjunto não-enumerável.

Sabemos que uma seqüência de aplicações contínuas  $f_n: M \rightarrow N$  pode convergir simplesmente para uma aplicação descontínua  $f: M \rightarrow N$ . Usaremos, a seguir, o Teorema de Baire para mostrar que, quando o espaço métrico  $M$  é completo, a função limite é contínua na maioria dos pontos de  $M$ , ou seja, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é magro. Começaremos com uma condição para que a aplicação  $f$  seja contínua num ponto.

Proposição 21 - É dada uma seqüência de aplicações

$f_n: M \rightarrow N$ , contínuas no ponto  $a \in M$ ,  
convergindo simplesmente para uma aplicação  $f: M \rightarrow N$ .  
A fim de que  $f$  seja contínua no ponto  $a$ , é necessário  
e suficiente que, para cada  $\epsilon > 0$ , existam  $\delta > 0$  e  
 $p \in \mathbb{N}$  tais que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \epsilon$ .

Demonstração: Suponhamos satisfeita a condição acima e provemos que  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , existem  $p \in \mathbb{N}$  e  $\delta' > 0$  tais que  $d(x, a) < \delta' \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Existe também  $\delta'' > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Seja  $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ .

Então  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_p(x)) + d(f_p(x), f_p(a)) + d(f_p(a), f(a)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ . Reciprocamente, seja  $f$  contínua no ponto  $a$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta' > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta' \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Existe também  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f_p(a), f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$  e, como  $f_p$  é contínua no ponto  $a$ , existe  $\delta'' > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta'' \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Seja  $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ . Então  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) \leq d(f_p(x), f_p(a)) + d(f_p(a), f(a)) + d(f(a), f(x)) < \epsilon$ .

Proposição 22 - Seja  $M$  completo. Se uma seqüência de aplicações contínuas  $f_n: M \rightarrow N$  converge simplesmente para  $f: M \rightarrow N$  então o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$  é magro em  $M$ .

Demonstração: Para quaisquer  $p, k \in \mathbb{N}$ , seja  $X_{pk} = \{x \in M; d(f_p(x), f(x)) \leq \frac{1}{k}\}$ . Segue-se da proposição anterior que  $f$  continua no ponto  $x \in M \Leftrightarrow$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \text{int. } X_{pk} \Leftrightarrow$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \bigcup_p \text{int. } X_{pk}$ . Seja  $A_k = \bigcup_p \text{int. } X_{pk}$ . Então  $f$  é contínua no ponto  $x \in M$  se, e somente se,  $x \in \bigcap_k A_k$ . Resta então provar que cada um dos conjuntos  $A_k$  é denso em  $M$ . Como  $M = \bigcup_p X_{pk}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , isto resultaria da Proposição 20 caso os conjuntos  $X_{pk}$  fossem fechados, o que não ocorre. Consideramos então os conjuntos

$$F_{pk} = \{x \in M; d(f_p(x), f_{n+p}(x)) \leq \frac{1}{k} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Como as  $f_n$  são contínuas, estes conjuntos são fechados em  $M$ . Além disso, para cada  $x \in M$ , a seqüência  $(f_n(x))$  é convergente em  $\mathbb{N}$ , e portanto de Cauchy. Logo, para cada  $k$  existe  $p$  tal que  $x \in F_{pk}$ . Isto diz que  $M = \bigcup_p F_{pk}$ . Agora podemos concluir que  $\bigcup_p \text{int.} F_{pk}$  é denso em  $M$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na definição de  $F_{pk}$ , vemos que  $F_{pk} \subset X_{pk}$ , sejam quais forem  $p$  e  $k$ . Logo  $\text{int.} X_{pk} \subset \text{int.} F_{pk}$  e daí concluímos que os abertos  $A_k = \bigcup_p \text{int.} X_{pk}$  são todos densos em  $M$ , como queríamos demonstrar.

Exemplo 32 - Usando a proposição acima, mostraremos que a convergência simples de funções reais de uma variável real não provém de uma métrica. Mais precisamente, dado um intervalo  $I = [a,b]$ , não existe uma métrica no conjunto  $\mathcal{B}(I;\mathbb{R})$ , das funções limitadas  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\lim f_n = f$  relativamente a  $d \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $I$ . Com efeito, sejam  $C$  o conjunto das funções contínuas  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  o conjunto dos números racionais de  $I$ . Para cada  $n$ , seja  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  a função que assume o valor 1 nos pontos  $r_1, r_2, \dots, r_n$  e 0 nos demais pontos de  $I$ . Se chamarmos de  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  a função característica de  $\mathbb{Q} \cap I$  (isto é,  $f(x) = 1$  se  $x$  é racional e  $f(x) = 0$  se  $x \notin \mathbb{Q}$ ), temos que  $f_n \rightarrow f$  relativamente a  $d$  (pois  $d(f_n, f) \leq 1$  para todo  $n$ ), mas  $f$  não é contínua. Portanto, não existe uma métrica no conjunto das funções limitadas de  $I$  que faça com que a convergência simples seja equivalente à convergência relativa a essa métrica.

irracional) então  $f_n \rightarrow f$  simplesmente em  $I$ . Por outro lado, para cada  $n$ , existe uma seqüência de funções contínuas que converge simplesmente para  $f_n$  em  $I$ . [Basta considerar funções cujos gráficos são formados por vários triângulos isósceles cujos vértices são os pontos  $(r_1, 1), \dots, (r_n, 1)$  e bases cada vez menores, contidas no eixo das abscissas.] Se existisse uma métrica em  $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$  em relação à qual a convergência fosse convergência simples, teríamos  $f_n \in \bar{\mathcal{C}}$  para cada  $n$  e portanto  $\lim f_n = f \in \bar{\mathcal{C}}$ . Então existiria uma seqüência de funções contínuas  $g_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  convergindo simplesmente para  $f$  em  $I$ . Entretanto, segundo a proposição anterior,  $f$  não pode ser limite simples de uma seqüência de funções contínuas pois é descontínua em todo ponto  $x \in I$ . Obtemos uma contradição, logo não existe uma tal métrica em  $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ .

Exemplo 33 - Usaremos agora o Teorema de Baire para mostrar que existem funções contínuas reais que não possuem derivada em ponto algum do intervalo onde são definidas. Mais precisamente, dado qualquer intervalo  $I = [a, b]$ , seja  $C = C_0(I; \mathbb{R})$  o conjunto das funções contínuas limitadas  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , com a métrica da convergência uniforme. (Será visto no próximo capítulo que toda função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.) Provaremos que

o conjunto das funções  $f \in C$  que possuem derivada em algum ponto de  $I$  é magro ou, mais precisamente, o conjunto das funções contínuas  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  que não possuem derivada em ponto algum do intervalo  $I$  contém uma interseção enumerável de abertos densos em  $C$ . Assim, esse conjunto é denso em  $C$  e, num sentido natural, contém "a maioria" das funções contínuas  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . No que se segue, sempre que escrevermos  $f(t+h)$ , estamos tacitamente supondo que  $t+h \in I$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideraremos o conjunto

$$A_n = \{f \in C; \text{ para todo } t \in I \text{ existe } h \text{ tal que } \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n\}$$

Segue-se imediatamente da definição de derivada que se  $f \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $f$  não possui derivada em ponto algum do intervalo  $[a,b]$ . Assim basta mostrar que cada conjunto  $A_n$  é aberto e denso em  $C$ . De fato, sabemos que  $C$  é um espaço métrico completo, logo a interseção  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  será um conjunto denso em  $C$ .

1. Cada  $A_n$  é aberto em  $C$ . Seja  $f \in A_n$ . Para todo  $t \in I$ , existe  $h$  tal que  $\xi(t,h) = \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| - n|h| > 0$ . Afirmando que se pode obter  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $t \in I$  existe  $h$  com  $\xi(t,h) > \epsilon$ . Com efeito, no caso contrário existiria, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , algum ponto  $t_k \in I$  tal que  $\xi(t_k, h) \leq \frac{1}{k}$ , seja qual for  $h$ .

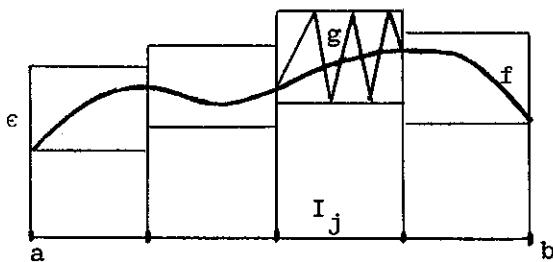
Um resultado a ser demonstrado no capítulo seguinte diz que toda seqüência em  $I = [a, b]$  possui subsequência convergente. Passando pois a uma subsequência, se necessário, podemos supor que  $t_k \rightarrow t_0 \in [a, b]$ . Como  $\xi$  é contínua, concluimos que, para todo  $h$ :  $\xi(t_0, h) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi(t_k, h) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$  o que é uma contradição. Obviamente então o número  $\epsilon > 0$ , afirmamos que  $g \in C$ ,  $\|g-f\| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow g \in A_n$ . Com efeito, para todo  $t \in I$  existe  $h$  tal que

$$n \cdot |h| + \epsilon < |f(t+h)-f(t)| \leq |f(t+h)-g(t+h)| + |g(t+h)-g(t)| + |g(t)-f(t)| < \frac{\epsilon}{2} + |g(t+h)-g(t)| + \frac{\epsilon}{2}$$

ou seja:  $|g(t+h)-g(t)| > n \cdot |h|$ . Isto mostra que  $g \in A_n$  e portanto  $A_n$  é aberto em  $C$ .

2. Cada  $A_n$  é denso em  $C$ . Novamente aqui utilizaremos um fato a ser provado no capítulo seguinte: toda função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num intervalo limitado e fechado, é uniformemente contínua. Dados arbitrariamente  $\epsilon > 0$  e  $f \in C$ , mostraremos que existe  $g \in A_n$  tal que  $\|g-f\| < \epsilon$ . Pela continuidade uniforme de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$ . Portanto, se subdividirmos o intervalo  $[a, b]$  num número finito de subintervalos  $I_1, \dots, I_r$ , de comprimentos meno-

res do que  $\delta$ , o gráfico de  $f$  em cada um desses sub-intervalos cabe num retângulo de altura  $<\epsilon$ . Construiremos agora uma função contínua  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , cumprindo as condições  $\|g-f\| < \epsilon$  e  $g \in A_n$ , fazendo com que  $g$  coincida com  $f$  nas extremidades de cada intervalo  $I_j$ .



e, no interior de cada  $I_j$ , o gráfico de  $g$  tem a forma de uma serra cujos dentes têm arestas com inclinação  $>n$  e estão contidos num retângulo de base  $I_j$  e altura  $<\epsilon$  que contenha o gráfico de  $f|_{I_j}$ .

#### §8. O método das aproximações sucessivas.

Trataremos agora de um princípio, conceitualmente bastante simples, que tem inúmeras aplicações à Geometria, à Análise e ao Cálculo Numérico.

Suponhamos que se deseje obter a solução (ou so-

luções)  $x$  de uma equação  $f(x) = b$ , onde  $f$  é, digamos, uma aplicação contínua, definida numa parte fechada do espaço  $\mathbb{R}^n$ , e tomado valores em  $\mathbb{R}^n$ . Escrevendo  $\varphi(x) = f(x) + x - b$ , vemos que  $\varphi$  é contínua e a equação original equivale a encontrar  $x$  tal que  $\varphi(x) = x$ . Para resolver esta última equação, tomamos um ponto arbitrário  $x_0$  e consideramos a seqüência de pontos  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ , ...,  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ , ..., chamados as aproximações sucessivas da solução procurada. Se esta seqüência convergir no domínio de  $\varphi$ , então  $a = \lim x_n$  será tal que  $a = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(a)$ , isto é,  $a$  é uma raiz da equação  $\varphi(x) = x$ , e portanto da equação original  $f(x) = b$ .

Estas observações de caráter intuitivo encontram sua formalização adequada no princípio do ponto fixo para contrações, que apresentaremos a seguir.

Um ponto fixo de uma aplicação  $f: M \rightarrow M$  é um ponto  $x \in M$  tal que  $f(x) = x$ .

Exemplo 34 - A origem  $0 \in \mathbb{R}^n$  é o único ponto fixo da aplicação  $x \mapsto -x$ , de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo. A aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^2$ , tem dois pontos fixos, a saber  $0$  e  $1$ . Os pontos fixos de uma função real de variável real  $f$  são as abscissas dos pontos do plano em que o gráfico de  $f$  intersecta a diagonal  $y = x$ . Se  $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$  então a translação  $x \mapsto x+a$ , de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo, não tem ponto fixo.

Exemplo 35 - Um famoso resultado de Topologia, chamado o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, diz que se  $B = B[0,1]$  é a bola unitária fechada do espaço  $\mathbb{R}^n$ , então toda aplicação contínua  $f: B \rightarrow B$  possui (pelo menos) um ponto fixo  $x \in B$ . Existem várias demonstrações deste fato, mas todas elas utilizam técnicas que não estudaremos aqui. O caso  $n = 1$ , entretanto, é de fácil demonstração: para provar que toda função contínua  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  possui um ponto fixo, consideramos a função contínua  $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\varphi(x) = f(x) - x$ . Como  $0 \leq f(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0,1]$ , segue-se que  $\varphi(0) = f(0) \geq 0$  e  $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário (Corolário 2, Prop.6, Cap.4), concluimos que deve existir  $x \in [0,1]$  tal que  $\varphi(x) = 0$ , isto é,  $f(x) = x$ .

Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  chama-se uma contração quando existe uma constante  $c$ , com  $0 \leq c < 1$ , tal que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ .

Toda contração é uniformemente contínua.

Exemplo 36 - Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real derivável no intervalo  $I$ . Se existir uma constante  $c$  tal que  $|f'(x)| \leq c < 1$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma contração. Por outro lado, a função  $f: (0,1) \rightarrow (0,1)$ ,

definida por  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ , não é uma contração pois  $|f'(x)| = x < 1$  para todo  $x \in (0,1)$  mas não existe uma constante  $c$  tal que  $x < c < 1$  para todo  $x \in (0,1)$ . Se  $E, F$  são espaços vetoriais normados, uma transformação linear  $T: E \rightarrow F$  é uma contração se, e somente se, sua norma  $|T|$  é menor do que 1.

Proposição 23 - (Teorema de Banach, sobre pontos fixos de contrações.) Se  $M$  é um espaço métrico completo, toda contração  $f: M \rightarrow M$  possui um único ponto fixo em  $M$ . Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer  $x_0 \in M$  e pusermos  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1), \dots$ ,  $x_{n+1} = f(x_n), \dots$  a seqüência  $(x_n)$  converge em  $M$  e  $a = \lim x_n$  é o único ponto fixo de  $f$ .

Demonstração: Admitamos, por enquanto, que a seqüência  $(x_n)$  converja para um ponto  $a \in M$ . Então, com  $f$  é contínua, temos  $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$ , logo  $a$  é ponto fixo de  $f$ . Mostremos agora que  $f$  não admite dois pontos fixos distintos. De fato, se  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ , e vale  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ , com  $0 \leq c < 1$ , para  $x, y \in M$  quaisquer, então  $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$ , donde  $(1-c) \cdot d(a, b) \leq 0$ . Como  $1-c > 0$ , concluimos que  $d(a, b) = 0$ , ou seja,  $a = b$ . Só nos resta portanto mostrar que

$(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $M$ . Ora,  $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1)$ ,  $d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1)$  e, em geral, temos  $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue-se que, para  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) = \\ &= c^n [1 + c + \dots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , concluimos que  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $M$ , o que completa a demonstração.

Observação: Fazendo  $p \rightarrow \infty$  na desigualdade  $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$ , obtemos  $d(x_n, a) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$ , o que nos fornece um limite superior para o erro que cometemos ao tomar o  $n$ -ésimo iterado  $x_n$  como um valor aproximado para o ponto fixo  $a$ .

Em outras aplicações da Proposição 23, tem-se uma aplicação  $f: M \rightarrow M$  ( $M$ , um espaço métrico completo) que, restrita a um subconjunto fechado  $F \subset M$ , é uma contração. Como  $F$  é um espaço métrico, a fim de concluir a existência de um ponto fixo de  $f$ , basta (e é indispensável!) verificar que  $f(F) \subset F$ , o que se exprime dizendo que  $F$  é um subconjunto fechado invariante por  $f$ . Em particular, toda bola fechada invariante por uma contração,

contém o ponto fixo dessa contração. A proposição seguinte dá uma condição suficiente para que uma bola fechada seja invariante.

Proposição 24 - Seja  $f: M \rightarrow M$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ , com  $0 \leq c < 1$ . Dado qualquer  $a \in M$ , se  $r \geq \frac{d(a, f(a))}{1-c}$  então a bola fechada  $B = B[a; r]$  é invariante por  $f$ , isto é,  $f(B) \subset B$ . Em particular, se  $M$  for completo, o ponto fixo de  $f$  está na bola  $B$ .

Demonstração:  $x \in B \Rightarrow d(x, a) \leq r \Rightarrow d(f(x), a) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), a) \leq c \cdot d(x, a) + (1-c) \cdot r \leq c \cdot r + (1-c)r = r \Rightarrow f(x) \in B$ .

Como aplicação do princípio da contração, provaremos um resultado que constitui o passo crucial para a demonstração do Teorema da Função Inversa em Análise.

Proposição 25 - (Perturbação da identidade.) Seja  $\varphi: U \rightarrow E$  uma contração definida num subconjunto aberto  $U$  do espaço de Banach  $E$ . A aplicação  $f: U \rightarrow E$ , dada por  $f(x) = x + \varphi(x)$ , é um homeomorfismo de  $U$  sobre um subconjunto aberto de  $E$ .

Demonstração: Suponhamos que, para  $x, y \in U$  quaisquer, se tenha  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c \cdot |x - y|$ , com

$0 \leq c < 1$ . Utilizando a desigualdade  $|a+b| \geq |a| - |b|$ , obtemos  $|f(x)-f(y)| = |x-y + \varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x-y| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x-y| - c \cdot |x-y|$ , ou seja,  $|f(x)-f(y)| \geq \geq (1-c) \cdot |x-y|$ . Isto mostra que  $f$  é injetiva e que sua inversa  $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$  é Lipschitziana, com constante  $(1-c)^{-1}$ . Logo,  $f$  é um homeomorfismo de  $U'$  sobre  $f(U)$ . Resta provar que  $f(U)$  é aberto em  $E$ . Neste ponto é que usamos a existência do ponto fixo para contrações. Seja então  $b = f(a)$ ,  $a \in U$ , um ponto qualquer de  $f(U)$ . Como  $U$  é aberto em  $E$ , existe um número  $r > 0$  tal que  $B = B[a;r] \subset U$ . Afirmando que a bola aberta de centro  $b$  e raio  $(1-c)r$  está contida em  $f(U)$ . Ou seja, dado  $y \in E$  tal que  $|y-b| < (1-c)r$ , devemos mostrar que a equação  $f(x) = y$  possui uma solução  $x \in U$ . Para isto, consideramos a contração  $\xi_y: B \rightarrow E$ , definida por  $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$ . É imediato que  $f(x) = y \Leftrightarrow \xi_y(x) = x$ . Como a bola fechada  $B = B[a;r]$  é completa, basta verificar que  $\xi_y(B) \subset B$ . Ora,  $|a - \xi_y(a)| = |a + \varphi(a) - y| = = |y - f(a)| = |y - b| < (1-c) \cdot r$ . Logo  $B$  é invariante por  $\xi_y$ , em virtude da Proposição 24.

Exemplo 37 - O método das aproximações sucessivas pode ser usado para provar a existência e a unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais

ordinárias. Neste problema, são dados um aberto  $U \subset \mathbb{R} \times E$ , onde  $E$  é um espaço de Banach e uma aplicação contínua  $f: U \rightarrow E$ , cumprido a condição de Lipschitz  $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c \cdot |x-y|$ , onde a constante  $c$  não depende dos pontos  $(t,x)$  e  $(t,y)$  em  $U$ . É dado ainda um ponto  $(t_0, x_0) \in U$  e procura-se uma aplicação diferenciável  $\varphi: I \rightarrow E$ , definida num intervalo  $I$  que contenha  $t_0$  no seu interior, tal que  $\varphi(t_0) = x_0$  e, para todo  $t \in I$ ,  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ . (Esta última igualdade implica, em particular, que  $\varphi$  é derivável e seu gráfico está contido em  $U$ .) Para obter  $\varphi$ , começamos observando que as duas condições  $\varphi(t_0) = x_0$  e  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ , podem ser englobadas numa única condição: para todo  $t \in I$ , deve-se ter  $\varphi(t) = x_0 = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ , conforme o Teorema Fundamental do Cálculo. Em seguida, tomamos o intervalo  $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  e a bola fechada  $B = B[x_0; \beta]$  em  $E$ , onde  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  cumprem: 1º)  $I \times B \subset U$ ; 2º)  $|f(t, x)| \leq M$  para todo  $(t, x) \in I \times B$ ; 3º)  $\alpha \cdot M \leq \beta$  e  $\alpha \cdot c < 1$ . [A primeira destas condições pode ser cumprida porque  $U$  é aberto; a segunda porque  $f$ , sendo contínua, é limitada numa vizinhança de  $(x_0, t_0)$ ; para cumprir as condições 3º), basta tomar  $\alpha$  suficientemente pequeno.] Depois disto, consideramos o espaço métrico  $C(I; B)$ , formado pelas aplicações contínuas  $\varphi: I \rightarrow B$ , com a mé-

trica da convergência uniforme, e definimos a aplicação  $F: C(I; B) \rightarrow C(I; B)$ , pondo:

$$[F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

para toda  $\varphi \in C(I; B)$  e todo  $t \in I$ .

Há alguns pontos a verificar: em primeiro lugar, que  $[F(\varphi)](t) \in B$  para toda  $\varphi \in C(I; B)$  e todo  $t \in I$ .

Com efeito,

$$|[F(\varphi)](t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq |t - t_0| \cdot M \leq \alpha \cdot M \leq \beta.$$

Além disso, dados  $t, t' \in I$  quaisquer, vale

$$|F(\varphi)(t) - F(\varphi)(t')| = \left| \int_t^{t'} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq |t - t'| \cdot M, \text{ de}$$

modo que  $F(\varphi)$  é Lipschitziana. Em particular, temos  $F(\varphi) \in C(I; B)$  para toda  $\varphi \in C(I; B)$ . Temos portanto o direito de escrever que  $F$  é uma aplicação do espaço métrico completo  $C(I; B)$  em si mesmo. Finalmente, se to-marmos  $k = \alpha \cdot c$ , veremos que  $0 < k < 1$  e que, para  $\varphi, \psi \in C(I; B)$  quaisquer, vale

$$\begin{aligned} \|F(\varphi) - F(\psi)\| &= \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \leq \\ &\leq \alpha \cdot \sup_{s \in I} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| \leq \alpha \cdot c \cdot \sup_{s \in I} |\varphi(s) - \psi(s)| \leq \\ &\leq \alpha \cdot c \cdot \|\varphi - \psi\| = k \cdot \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Logo  $F$  é uma contração do espaço métrico completo  $C(I; B)$  em si mesmo. Existe portanto uma única aplicação contínua  $\varphi: I \rightarrow B$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , ou seja  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ , o que é equivalente a dizer que  $\varphi(t_0) = x_0$  e  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .

Observação: É freqüente que o espaço de Banach  $E$  seja o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso,  $f: U \rightarrow E$  é dada por  $n$  funções reais  $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  e a solução  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  consta de  $n$  funções  $\varphi_1, \dots, \varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Isto é o que se chama a solução do sistema de  $n$  equações diferenciais  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ .

## CAPÍTULO 8

### ESPAÇOS MÉTRICOS COMPACTOS

#### §1. Compacidade na reta.

Os três teoremas seguintes são resultados clássicos sobre a Topologia da Reta e obrigatórios em todo curso de Análise.

Teorema 1 (Bolzano-Weierstrass) - Todo subconjunto infinito limitado  $X \subset \mathbb{R}$  possui um ponto de acumulação.

Demonstração: Seja  $A = \{a \in \mathbb{R}; X \cap (a, +\infty) \text{ é infinito}\}$ .

Em outras palavras,  $A$  é formado pelos pontos  $a \in \mathbb{R}$  tais que existem infinitos pontos de  $X$  à direita de  $a$ . O conjunto  $A$  é não-vazio e limitado superiormente: se  $X \subset [\alpha, \beta]$  então  $\alpha \in A$  e  $\beta$  é cota superior de  $A$ . Seja  $c = \sup.A$ . Afirmando que  $c$  é ponto de acumulação do conjunto  $X$ . Com efeito, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $c-\epsilon < a \leq c$ . Logo existem infinitos pontos de  $X$  à direita de  $c-\epsilon$ . Por

outro lado, não há uma infinidade de pontos de  $X$  à direita de  $c+\epsilon$ . Logo  $(c-\epsilon, c+\epsilon) \cap X$  é infinito, o que prova o teorema.

Teorema 2 (À vezes também chamado de Bolzano-Weierstrass.)

Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.

Demonstração: Seja  $\alpha \leq x_n \leq \beta$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Pondo  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , vemos que  $x_1 \supset x_2 \supset \dots \supset x_n \supset \dots$  e  $X_n \subset [\alpha, \beta]$ . Seja  $a_n = \inf.X_n$ . Então  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq \beta$ . Existe portanto  $a = \lim a_n$ . Para provar que  $a$  é limite de alguma subseqüência de  $(x_n)$  mostraremos que, para quaisquer  $\epsilon > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ , existe  $n > n_1$  tal que  $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ . Com efeito, existe  $n_0 > n_1$  tal que  $a-\epsilon < a_{n_0} \leq a < a+\epsilon$ , pois  $a = \lim a_n$ . Como  $a_{n_0} = \inf.X_{n_0}$ , existe  $n \geq n_0$  tal que  $a_{n_0} \leq x_n < a+\epsilon$ . Temos então  $n > n_1$  e  $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ .

Teorema 3 (Borel-Lebesgue) - Seja  $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , onde  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de subconjuntos abertos da reta. Então existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$  tais que  $[a,b] \subset \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ .

Demonstração: A hipótese significa que para cada  $t \in [a,b]$

existe algum índice  $\lambda \in L$  tal que  $t \in A_\lambda$ . Seja  $X$  o conjunto dos pontos  $x \in [a,b]$  tais que o intervalo  $[a,x]$  está contido em alguma reunião finita  $A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Temos:

$$X = \{x \in [a,b] ; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in L \text{ tais que } [a,x] \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

$X$  é um subconjunto não-vazio de  $[a,b]$ . De fato, para algum  $\lambda \in L$  temos  $a \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, existe  $\delta > 0$  tal que  $a+\delta < b$  e  $[a, a+\delta) \subset A_\lambda$ . Então  $[a, a+\delta) \subset X$ . É evidente que se  $x \in X$  e  $a \leq y < x$  então  $y \in X$ . Logo  $X$  é um intervalo, da forma  $[a,c]$  ou da forma  $[a,c)$ , onde  $c = \sup X$ . Afirmamos que  $c \in X$ . Com efeito, existe  $\lambda_0 \in L$  tal que  $c \in A_{\lambda_0}$ . Como  $A_{\lambda_0}$  é aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset A_{\lambda_0}$ . Pela definição de sup., podemos encontrar  $x \in X$ , com  $c-\epsilon < x \leq c$ . Ora, temos  $[a,x] \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Logo  $[a,c] \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}$ . Portanto,  $c \in X$ . Finalmente, devemos ter  $c = b$  porque se fosse  $c < b$  poderíamos, neste último raciocínio, ter tomado  $\epsilon$  tal que  $c+\epsilon < b$ . Então teríamos  $[a, c+\epsilon) \subset X$ , contrariando o fato de que  $c = \sup X$ . Assim,  $X = [a,b]$ , o que demonstra o teorema.

Teorema 3' (Forma geral do Teorema de Borel-Lebesgue) -

Seja  $F$  um subconjunto fechado e limitado da reta. De toda família  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  de abertos tais que

$F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , pode-se extrair uma subfamília finita  $(A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_n})$  cuja reunião ainda contém  $F$ .

Demonstração: Existe um intervalo  $[a, b]$  tal que  $F \subset [a, b]$ .

Seja  $A_{\lambda_0} = R - F$ . Então  $A_{\lambda_0}$  é aberto e  $[a, b] \subset (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup A_{\lambda_0}$ . Pelo Teorema 3, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$  tais que  $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Como  $A_{\lambda_0}$  não contém pontos de  $F$ , concluimos daí que  $F \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ .

Nosso objetivo, no que se segue, é estudar os espaços métricos nos quais teoremas dos tipos acima são válidos. Entre outras coisas, veremos que são equivalentes as propriedades enunciadas nesses três teoremas, os quais foram apresentados na ordem crescente de importância.

## §2. Espaços métricos compactos.

Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Uma cobertura de  $X$  é uma família  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Isto significa que, para cada  $x \in X$ , existe pelo menos um índice  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ .

Se existe um subconjunto  $L' \subset L$  tal que, para

cada  $x \in X$ , ainda se pode obter  $\lambda \in L'$  com  $x \in C_\lambda$ , isto é,  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$ , então a subfamília  $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$  chama-se uma subcobertura de  $C$ . Quando  $L'$  é um subconjunto próprio de  $L$ ,  $C'$  diz-se uma subcobertura própria de  $C$ .

Uma cobertura  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  diz-se aberta quando cada conjunto  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in L$ , é aberto em  $M$ . A cobertura  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  diz-se finita quando  $L$  é um conjunto finito. Neste caso, temos  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e escrevemos  $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$ .

Veremos diversos exemplos de cobertura a seguir. Agora vamos definir o conceito central deste capítulo.

Um espaço métrico  $M$  chama-se compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Noutros termos,  $M$  compacto significa que se  $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , onde cada  $A_\lambda$  é aberto em  $M$ , então existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$  tais que  $M = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Abreviadamente:  $M = \bigcup A_\lambda$  com cada  $A_\lambda$  aberto  $\Rightarrow M = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ .

Um subconjunto  $K$  de um espaço métrico  $M$  chama-se um subconjunto compacto quando o subespaço métrico  $X$  é compacto.

Isto significa que de toda cobertura  $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ ,

por meio de abertos  $A_\lambda^i$  em  $X$  se pode extrair uma subcobertura finita  $X = A_{\lambda_1}^i \cup \dots \cup A_{\lambda_n}^i$ . Como, para cada  $\lambda \in L$ ,  $A_\lambda^i = X \cap A_\lambda$ , onde  $A_\lambda$  é aberto em M, vemos que  $X = \bigcup A_\lambda^i \Leftrightarrow X \subset \bigcup A_\lambda$ .

Logo, o subconjunto  $X \subset M$  é compacto se, e somente se, de cada cobertura  $X \subset \bigcup A_\lambda$ , por abertos  $A_\lambda \subset M$ , se pode extrair uma subcobertura finita  $X \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ .

Como a definição de compacto é formulada em termos dos abertos do espaço, segue-se que a compacidade é um invariante topológico: se  $M$  e  $N$  são homeomorfos, então  $M$  é compacto se, e somente se  $N$  o é.

Exemplo 1 - Em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue, todo subconjunto limitado e fechado da reta é compacto. Em particular, o conjunto de Cantor é compacto. Todo espaço métrico finito é compacto, pois toda sua cobertura contém apenas um número finito de subconjuntos distintos. Por outro lado, se  $M$  é um espaço discreto infinito, ( $\mathbb{Z}$ , por exemplo) seus pontos constituem uma cobertura aberta infinita que não possui subcobertura própria, logo não se pode extrair dela uma subcobertura finita. Portanto  $M$  não é compacto. Também não é compacto um intervalo aberto  $(a, b)$ . Com efeito, para todo  $n$  suficientemente grande, temos  $a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n}$ , logo existe o

intervalo aberto  $A_n = (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$ . Temos  $(a, b) = \bigcup A_n$  mas esta cobertura aberta não admite subcobertura finita. Com efeito, a reunião de uma coleção finita qualquer de conjuntos  $A_n$  é igual ao  $A_n$  de maior índice na coleção e portanto não é igual a  $(a, b)$ .

Exemplo 2 - Se  $K, L \subset M$  são subconjuntos compactos, então  $K \cup L$  é compacto. Com efeito, se  $K \cup L \subset \bigcup A_\lambda$  então, em particular,  $K \subset \bigcup A_\lambda$  e  $L \subset \bigcup A_\lambda$ , donde  $K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$  e  $L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup \dots \cup A_{\lambda_p}$  e portanto  $K \cup L \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_p}$ . Segue-se que a reunião de um número finito de subconjuntos compactos é compacta. Por outro lado, uma reunião infinita de compactos pode não ser compacta. Com efeito, todo conjunto é reunião de seus pontos, que são compactos.

A noção de espaço compacto pode também ser formulada em termos de conjuntos fechados.

Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de abertos em  $M$ , os complementares  $F_\lambda = M - A_\lambda$  formam uma família  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos fechados de  $M$ . Tem-se  $M = \bigcup A_\lambda \Leftrightarrow \bigcap F_\lambda = \emptyset$ .

Portanto, um espaço métrico  $M$  é compacto se, e somente se, toda família  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  de fechados com interseção vazia possui uma subfamília finita com interseção vazia:  $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n} = \emptyset$ .

Diz-se que uma família  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  goza da propriedade da interseção finita quando, para qualquer subconjunto finito  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset L$  tem-se  $F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset$ .

A seguinte condição é necessária e suficiente para que um espaço métrico  $M$  seja compacto:

Se  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de fechados com a propriedade da interseção finita, então  $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$ .

Um exemplo de família de fechados com a propriedade da interseção finita é uma seqüência decrescente  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  de subconjuntos não-vazios, fechados em  $M$ . Se  $M$  é compacto, isto obriga portanto  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ . A demonstração abaixo se enquadra nessa ordem de idéias.

Proposição 0 (Teorema de Dini) - Se uma seqüência de funções reais contínuas  $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas num espaço métrico compacto  $M$ , converge simplesmente para uma função contínua  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  e, além disso, tem-se  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$  para todo  $x \in M$  então a convergência  $f_n \rightarrow f$  é uniforme em  $M$ .

Demonstração: Dado  $\epsilon > 0$ , ponhamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n = \{x \in M; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}. \text{ Então}$$

$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  e cada  $F_n$  é fechado em  $M$ . Deveremos provar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0} = \emptyset$ . (Então

$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in M$ ;) Ora, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in M$ , segue-se que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ . Sendo  $M$  compacto, deve-se ter  $F_n = \emptyset$  para algum  $n$ .

Proposição 1 - Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração: Sejam  $M$  compacto e  $F \subset M$  fechado. Dada uma cobertura aberta  $F \subset \bigcup A_\lambda$ , obtemos a cobertura aberta  $M = (\bigcup A_\lambda) \cup (M-F)$ , da qual extraímos a subcobertura finita  $M = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup (M-F)$ . Como nenhum ponto de  $F$  pertence a  $M-F$ , concluimos daí que  $F \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ . Logo  $F$  é compacto. Reciprocamente, seja  $K \subset M$  um subconjunto compacto de um espaço métrico arbitrário  $M$ . Se  $K$  não fosse fechado em  $M$ , existiria  $x \in \bar{K}-K$ . Pondo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = M-B[x; \frac{1}{n}]$ , teríamos uma cobertura aberta  $K \subset \bigcup A_n$ . [De fato, como  $\bigcap_n B[x; \frac{1}{n}] = \{x\}$ , temos  $\bigcup A_n = M-\{x\} \supset K$  pois  $x \notin K$ .] Como  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , a reunião de uma coleção finita de conjuntos  $A_n$  é igual ao conjunto de maior índice da coleção. Como  $x \in \bar{K}$ , cada bola  $B[x; \frac{1}{n}]$  contém algum ponto de  $K$ , ou seja, nenhum  $A_n$  contém  $K$ . Logo a co-

bertura aberta  $K \subset \bigcup A_n$  não admite subcobertura finita. Isto contradiz a compacidade de  $K$  e completa a demonstração.

Corolário 1 - Qualquer interseção  $K = \bigcap K_\lambda$  de compactos  $K_\lambda \subset M$  é compacta.

Com efeito, cada  $K_\lambda$  sendo fechado em  $M$ , a interseção  $K$  é um subconjunto fechado em  $M$  e portanto em cada  $K_\lambda$ . Logo  $K$  é compacto.

Corolário 2 - Todo espaço métrico compacto é completo.

Com efeito, se  $M$  é compacto, então  $M$  é um subconjunto fechado denso do seu completamento  $\hat{M}$ . Logo  $M = \hat{M}$ .

Observação: Um espaço métrico compacto  $(M, d)$  é completo em relação a qualquer métrica equivalente a  $d$ , pois  $d_1 \sim d \Rightarrow (M, d_1)$  compacto.

Proposição 2 - Todo espaço métrico compacto é limitado.

Demonstração: Se  $M$  é compacto, da cobertura aberta  $M = \bigcup_{x \in M} B(x; 1)$  podemos extrair uma subcobertura finita  $M = B(x_1; 1) \cup \dots \cup B(x_n; 1)$ , logo  $M$  é limitado.

Poderíamos também ter raciocinado indiretamente,

assim: fixemos um ponto  $a \in M$ . Se  $M$  fosse ilimitado, para nenhum  $n \in \mathbb{N}$  teríamos  $M = B(a; n)$ . Logo, a cobertura aberta  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a; n)$  não possuiria subcobertura finita. [Pois a reunião de um número finito qualquer dessas bolas é a bola de maior raio entre elas.]

Exemplo 3 - De acordo com as Proposições 1 e 2, um subconjunto compacto em qualquer espaço métrico é sempre limitado e fechado. A recíproca é válida na reta (Borel-Lebesgue) e, mais geralmente, em  $\mathbb{R}^n$ , como será mostrado no §5 adiante. Mas um subconjunto limitado e fechado, mesmo no espaço de Hilbert  $\ell^2$ , pode não ser compacto. Por exemplo, seja  $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset \ell^2$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  tem todas as coordenadas nulas exceto a  $n$ -ésima, que é igual a 1. Como  $m \neq n \Rightarrow |e_m - e_n| = \sqrt{2}$ , vemos que  $X$  é limitado e uniformemente discreto, donde completo e portanto fechado em  $\ell^2$ . Mas, sendo discreto e infinito,  $X$  não é compacto.

Proposição 3 - A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.

Demonstração: Sejam  $f: M \rightarrow N$  contínua e  $K \subset M$  compacto.

Dada uma cobertura aberta  $f(K) \subset \bigcup A_\lambda$ , obtemos a cobertura aberta  $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$ , da qual extraímos uma subcobertura finita  $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$

e daí  $f(K) \subset ff^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup ff^{-1}(A_{\lambda_n}) \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ .  
Logo  $f(K)$  é compacto.

Corolário 1 - Se  $M$  é compacto, toda aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  é fechada, isto é,  $F \subset M$  fechado  $\Rightarrow f(F) \subset N$  fechado.

Com efeito,  $F \subset M$  fechado  $\Rightarrow F$  compacto  $\Rightarrow f(F)$  compacto  $\Rightarrow f(F)$  fechado em  $N$ .

Corolário 2 - Se  $M$  é compacto, toda bijeção contínua  $f: M \rightarrow N$  é um homeomorfismo.

Com efeito, sendo  $f$  fechada, sua inversa  $g: N \rightarrow M$  é tal que  $F \subset M$  fechado  $\Rightarrow g^{-1}(F) = f(F) \subset N$  fechado.  
Logo,  $g$  é contínua.

Corolário 3 - Se  $M$  é compacto, então toda aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  é limitada.

Com efeito,  $f(M) \subset N$ , sendo compacto, é limitado.

Assim, quando  $K$  é compacto, o conjunto  $C(K; N)$  de todas as aplicações contínuas  $f: K \rightarrow N$  é um espaço métrico, com a métrica da convergência uniforme.

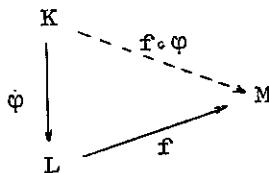
Exemplo 4 - O círculo  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  é compacto, pois é a imagem, pela aplicação con-

tínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ , de qualquer intervalo compacto  $[a,b]$ , com  $b-a \geq 2\pi$ . Mais geralmente, dado um caminho qualquer  $f: [a,b] \rightarrow M$ , sua imagem  $f([a,b])$  é um subconjunto compacto de  $M$ . Em particular, num espaço vetorial normado  $E$ , todo segmento de reta  $[x,y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$  é um conjunto compacto, pois é imagem do intervalo  $[0,1]$  pela aplicação contínua  $t \mapsto (1-t)x + ty$ .

Exemplo 5 - O Corolário 2 simplifica bastante a verificação de que certas aplicações são homeomorfismos. Por exemplo, num espaço vetorial normado  $E$ , se  $x \neq y$  então o segmento de reta  $[x,y]$  é homeomorfo ao intervalo fechado  $[0,1]$  (e portanto a qualquer intervalo  $[a,b]$ ) pois a aplicação contínua  $t \mapsto (1-t)x + ty$  é uma bijeção de  $[0,1]$  sobre  $[x,y]$ . O Corolário 2 também explica por que foi possível dar, no Capítulo 2, exemplos de bijeções contínuas com inversas descontínuas: todas elas tinham domínio não-compacto.

Exemplo 6 - Se  $K$  é compacto, então toda aplicação contínua sobrejetiva  $\varphi: K \rightarrow L$  é uma aplicação quociente. Isto significa que, dado um espaço métrico arbitrário  $M$ , uma aplicação  $f: L \rightarrow M$  é contínua se, e somente se,  $f \circ \varphi: K \rightarrow M$  é contínua. É evidente que  $f$

contínua  $\Rightarrow f \circ \varphi$  contínua. Reciprocamente, se  $f \circ \varphi$  é con-



tínua então para todo subconjunto fechado  $F \subset M$ , temos  $(f \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} f^{-1}(F) \subset K$  fechado, donde  $f^{-1}(F) = \varphi \varphi^{-1} f^{-1}(F)$  é fechado em  $L$ . [Como  $\varphi$  é sobrejetiva,  $\varphi \varphi^{-1}(x) = x$ , para todo  $x \in L$ . Além disso,  $\varphi$  é fechada.] Isto mostra que  $f$  é contínua. Mais geralmente, se  $\varphi: M \rightarrow N$  é uma aplicação contínua tal que existe um compacto  $K \subset M$  com  $\varphi(K) = N$ , então  $\varphi$  é uma aplicação quociente. Com efeito, dada  $f: N \rightarrow P$  tal que  $f \circ \varphi: M \rightarrow P$  seja contínua então  $(f \circ \varphi)|_K = f \circ (\varphi|_K)$  é contínua. Como  $\varphi|_K$  é uma aplicação quociente, isto implica  $f$  contínua. Por exemplo,  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$  é uma aplicação quociente, pois  $b-a \geq 2\pi \Rightarrow \varphi([a,b]) = S^1$ . Assim, uma aplicação  $f: S^1 \rightarrow M$  é contínua se, e somente se, a aplicação  $f \circ \varphi: t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ , de  $\mathbb{R}$  em  $M$ , é contínua. Mais geralmente, uma aplicação  $g: \mathbb{R} \rightarrow M$  chama-se periódica se existe um número  $a > 0$  tal que  $g(t+a) = g(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O menor número  $a > 0$  com esta propriedade chama-se o período de  $g$ . Dado  $a > 0$ , a

aplicação  $\varphi_a: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , dada por  $\varphi_a(t) = (\cos \frac{2\pi}{a}t, \sin \frac{2\pi}{a}t)$  é uma aplicação quociente. A correspondência  $f \mapsto f\varphi_a$  estabelece uma bijeção entre as aplicações contínuas  $f: S^1 \rightarrow M$  e as aplicações contínuas periódicas, de período  $a$ ,  $g = f\varphi_a: \mathbb{R} \rightarrow M$ . Isto se exprime, resumidamente, dizendo-se que "uma função contínua periódica na reta é o mesmo que uma função contínua no círculo". De modo análogo, se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo fechado (de comprimento  $a > 0$ ), a correspondência  $f \mapsto f \circ (\varphi_a|I) = g$  dá uma bijeção entre as aplicações contínuas  $f: S^1 \rightarrow M$  e as aplicações contínuas  $g: I \rightarrow M$  que assumem o mesmo valor nas duas extremidades de  $I$ .

Proposição 4 (Weierstrass) - Se M é compacto, toda função real contínua  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente: existem  $x_0, x_1 \in M$  ta que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para qualquer  $x \in M$ .

Demonstração: A imagem  $f(M)$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Logo, é limitado e fechado. Assim,  $f$  é limitada e, pondo-se  $\alpha = \inf.f(M)$ ,  $\beta = \sup.f(M)$ , temos  $\alpha \in f(M)$ ,  $\beta \in f(M)$ . Ou seja, existem  $x_0, x_1 \in M$  tais que  $f(x_0) = \alpha$ ,  $f(x_1) = \beta$ . Portanto  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in M$ .

Corolário - Sejam  $M$  compacto e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in M$ . Então existe  $c > 0$  tal que  $f(x) \geq c$  para todo  $x \in M$ .

Exemplo 7 - A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , é contínua e  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Mas, para todo  $c > 0$ , é possível obter  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) < c$ . Isto ocorre porque  $\mathbb{R}$  não é compacto.

Exemplo 8 - Sejam  $K, L \subset M$  compactos. A função distância  $d: K \times L \rightarrow \mathbb{R}$  atinge seu mínimo ( $= d(K, L)$ ) num ponto  $(a, b) \in K \times L$ . Ou seja, existem  $a \in K$ ,  $b \in L$  tais que  $d(a, b) \leq d(x, y)$  sejam quais forem  $x \in K$ ,  $y \in L$ . Em particular, se  $K \cap L = \emptyset$ , temos  $0 < c = d(a, b)$  e  $d(x, y) \geq c$  para  $x \in K$  e  $y \in L$  quaisquer. Se  $F, G \subset M$  são apenas fechados, podemos ter  $d(F, G) = \inf\{d(x, y); x \in F, y \in G\} = 0$ , mesmo com  $F \cap G = \emptyset$ . [Basta tomar  $G =$  eixo das abscissas e  $F =$  gráfico da função  $f$  do exemplo anterior.] Mas se  $K \subset M$  é compacto e  $F \subset M$  é fechado, com  $K \cap F = \emptyset$ , então existe  $c > 0$  tal que  $x \in K, y \in F \Rightarrow d(x, y) \geq c$ , isto é  $d(K, F) > 0$ . Com efeito, a função  $d_F: K \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $d_F(x) = d(x, F)$  é contínua. (Vide Proposição 2, Capítulo 1.) Como  $F$  é fechado,  $x \in K \Rightarrow x \notin F \Rightarrow d_F(x) > 0$ . Logo, pelo corolário acima, existe  $c > 0$  tal que  $x \in K \Rightarrow d(x, F) \geq c \Rightarrow d(x, y) \geq c$  para todo  $y \in F$ .

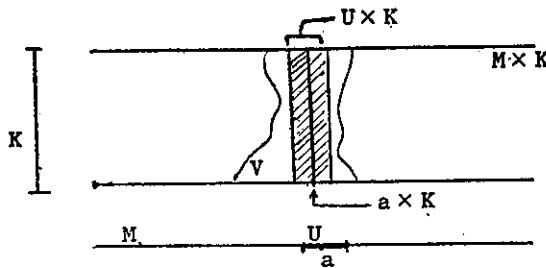
$\geq c$  para todo  $y \in F$ . Este fato muitas vezes se usa sob a seguinte forma: se  $K \subset V \subset M$  onde  $K$  é compacto e  $V$  aberto em  $M$ , então  $d(K, M-V) > 0$ , ou seja, existe  $c > 0$  tal que  $x \in K, y \in M-V \Rightarrow d(x, y) \geq c$ .

### §3. Produtos de dois fatores, um dos quais é compacto.

O lema abaixo tem várias consequências interessantes. Ele é apresentado aqui porque decorre do Exemplo 8. A leitura deste parágrafo e do seguinte pode, entretanto, ser adiada sem prejuízo para a compreensão do texto.

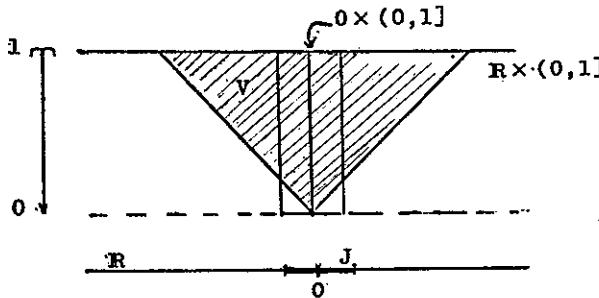
Lema - Sejam  $K, M$  espaços métricos,  $K$  compacto,  $a \in M$ ,  $a \times K \subset V \subset M \times K$ , onde  $V$  é aberto. Existe um aberto  $U$  em  $M$  tal que  $a \times K \subset U \times K \subset V$ .

Demonstração: O conjunto  $a \times K$  é homeomorfo a  $K$  e portanto é compacto. Existe portanto  $r > 0$  tal que  $z \in (M \times K) - V$ ,  $t \in K \Rightarrow d(z, (a, t)) \geq r$ . Tomemos  $U = B(a; r)$  em  $M$ . Então  $(x, t) \in U \times K \Rightarrow d(x, a) < r \Rightarrow$



$\Rightarrow (x, t) \in V$ . Logo  $U \times K \subset V$ , como queríamos demonstrar.

Exemplo 9 - O lema acima não vale sem a hipótese de  $K$  ser compacto. Por exemplo, se  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1] ; y > |x|\}$  então  $0 \times (0, 1] \subset V \subset \mathbb{R} \times (0, 1]$ , e  $V$  é aberto em  $\mathbb{R} \times (0, 1]$ , mas não existe um intervalo aberto  $J$  contendo 0 tal que  $J \times (0, 1] \subset V$ . Note-se que



a distância de  $0 \times (0, 1]$  ao complementar de  $V$  é zero.

Corolário 1 (do Lema) - Se  $K$  é compacto, a projeção  $p_1: M \times K \rightarrow M$  é uma aplicação fechada.

O leitor pode facilmente verificar que se  $U \subset M$

e  $F \subset M \times K$ , então  $U \cap p_1(F) = \emptyset \Leftrightarrow (U \times K) \cap F = \emptyset$ . Seja então  $F \subset M \times K$  fechado. Se  $a \in M$  e  $a \notin p_1(F)$ , pondo  $V = (M \times K) - F$ , temos  $a \times K \subset V$ . Pelo lema, existe  $U \subset M$  aberto tal que  $a \times K \subset U \times K \subset V$ , ou seja  $a \in U$  e  $(U \times K) \cap F = \emptyset$ . Logo  $U \cap p_1(F) = \emptyset$ . O conjunto  $p_1(F)$  é, então, fechado em  $M$ .

Exemplo 10 - A projeção  $p_2: M \times K \rightarrow K$  pode não ser fechada. Basta considerar o subconjunto  $F \subset \mathbb{R} \times [0,1]$ , gráfico da função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .  $F$  é fechado mas sua projeção  $p_2(F) = (0,1]$  não é fechada em  $[0,1]$ .

Corolário 2 - Seja  $K$  compacto. Uma aplicação  $f: M \rightarrow K$  é contínua se, e somente se, seu gráfico é fechado.

Seja  $G \subset M \times K$  o gráfico de  $f$ . Se  $G$  é fechado então, pelo Corolário 1, a aplicação injetiva  $\varphi: G \rightarrow M$ , dada por  $\varphi = p_1|_G$ , é fechada. Logo  $\varphi^{-1}: M \rightarrow G$ , dada por  $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$ , é contínua e, por conseguinte,  $f$  é contínua.

Exemplo 11 - A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{1}{x}$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , tem gráfico fechado em  $\mathbb{R}^2$  mas é descontínua.

O Lema acima também pode ser usado para demonstrar que se  $f: M \times K \rightarrow N$  é contínua e  $K$  é compacto, então  $f(x, t)$  é contínua em  $x$ , uniformemente em relação a  $t \in K$ . Mais precisamente:

Proposição 5 - Seja  $f: M \times K \rightarrow N$  contínua,  $K$  compacto.

Dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  em  $M \Rightarrow d(f(x, t), f(a, t)) < \epsilon$  qualquer que seja  $t \in K$ .

Demonstração: Seja  $V = \{(x, t) \in M \times K; d(f(x, t), f(a, t)) < \epsilon\}$ .

É óbvio que  $a \times K \subset V$  e, como  $f$  é contínua,  $V$  é aberto em  $M \times K$ . Pelo Lema, existe uma bola  $B = B(a; \delta)$  em  $M$  tal que  $B \times K \subset V$ , o que demonstra a proposição.

Exemplo 12 - Seja  $M$  um espaço métrico. A toda função contínua  $f: M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , associaremos uma função  $L \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $(L \cdot f)(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ , se  $x \in M$ . Afirmamos que, para cada  $f \in C(M \times [a, b]; \mathbb{R})$ , tem-se  $L \cdot f \in C(M; \mathbb{R})$ . Com efeito, sejam dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$ . Pela Proposição 5, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$ ,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(a, t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Logo:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow |(L \cdot f)(x) - (L \cdot f)(a)| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x,t) - f(a,t)| dt \leq (b-a) \cdot \sup_{a \leq t \leq b} |f(x,t) - f(a,t)| \leq \epsilon.$$

Além disso, é claro que se  $f: M \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada então  $L \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, com  $\|L \cdot f\| \leq (b-a) \cdot \|f\|$ .

Temos então uma aplicação

$$L: C_0(M \times [a,b]; \mathbb{R}) \rightarrow C_0(M; \mathbb{R}).$$

$L$  é uma transformação linear contínua entre estes espaços de Banach.

A seguir, estabeleceremos uma bijeção natural entre as aplicações contínuas  $f: M \rightarrow C(K; N)$  e as aplicações contínuas  $\tilde{f}: M \times K \rightarrow N$ , válida para  $K$  compacto.

Quando  $K$  é um espaço métrico compacto, toda aplicação contínua  $f: K \rightarrow N$  é limitada, de modo que o conjunto  $C(K; N)$ , das aplicações contínuas de  $K$  em  $N$ , é um espaço métrico, onde  $d(f, g) = \sup_{t \in K} d(f(t), g(t))$ . Se, porém,  $M$  e  $N$  são espaços métricos quaisquer, então  $C(M; N)$  é uma reunião de espaços métricos disjuntos  $C_\alpha(M; N)$ , cada um deles formado por uma aplicação contínua  $\alpha: M \rightarrow N$ , juntamente com todas as aplicações contínuas  $f: M \rightarrow N$  tais que  $d(\alpha, f) < +\infty$ . Diremos que uma aplicação  $T: C(M; N) \rightarrow C(M'; N')$  é uma "isometria" quando, para  $f, g \in C(M; N)$  quaisquer, vale  $d(f, g) < +\infty \Leftrightarrow d(T \cdot f, T \cdot g) < +\infty$  e, no caso afirmativo,  $d(T \cdot f, T \cdot g) =$

$$= d(f, g).$$

Consideremos agora espaços métricos  $K, M, N$ , sendo  $K$  compacto. Cada ponto  $f \in C(M; C(K; N))$  é uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow C(K; N)$ , cujo valor num ponto  $x \in M$  indicaremos com  $f_x$ , em vez de  $f(x)$ . Assim, para cada  $x \in M$ , temos  $f_x \in C(K; N)$ , ou seja,  $f_x: K \rightarrow N$  é uma aplicação contínua.

A cada  $f \in C(M; C(K; N))$ , associaremos a aplicação  $\tilde{f}: M \times K \rightarrow N$ , definida por  $\tilde{f}(x, t) = f_x(t)$ . Afirmando que  $\tilde{f}$  é contínua.

Com efeito, seja  $(x_0, t_0) \in M \times K$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $d(t, t_0) < \delta_1 \Rightarrow d(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t_0)) < \frac{\epsilon}{2}$ , pois  $f_{x_0}$  é contínua. Além disso como  $f$  é contínua, existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(f_x, f_{x_0}) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow d(f_x(t), f_{x_0}(t)) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $t \in K$ . Tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então  $d[(x, t), (x_0, t_0)] = \max\{d(x, x_0), d(t, t_0)\} < \delta \text{ em } M \times K \Rightarrow d(\tilde{f}(x, t), \tilde{f}(x_0, t_0)) = d(f_x(t), f_{x_0}(t_0)) \leq d(f_x(t), f_{x_0}(t)) + d(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t_0)) < \epsilon$ .

Fica então definida a aplicação canônica

$$T: C(M; C(K; N)) \rightarrow C(M \times K; N), \quad T \cdot f = \tilde{f}.$$

Evidentemente,  $T$  é injetiva. Além disso, dada qualquer aplicação contínua  $g: M \times K \rightarrow N$ , consideramos, para cada  $x \in M$ , a aplicação  $f_x: K \rightarrow N$ , dada por

$f_x(t) = g(x, t)$ . Evidentemente, cada  $f_x$  é contínua, logo  $x \mapsto f_x$  define uma aplicação  $f: M \rightarrow C(K; N)$ , tal que  $\tilde{f} = g$ . Resta provar que  $f$  é contínua. Ou seja, dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$ , devemos achar  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_x, f_a) = \sup_{t \in K} d(f_x(t), f_a(t)) \leq \epsilon$ , isto é,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(g(x, t), g(a, t)) \leq \epsilon$  para todo  $t \in K$ . Isto porém é a Proposição 5.

Proposição 6 - Se  $K$  é compacto, a bijeção  $T: C(M; C(K; N)) \rightarrow C(M \times K; N)$  é uma "isometria".

Demonstração: Basta observar que, para  $f, g \in C(M; C(K; N))$  quaisquer,

$$\begin{aligned} d(T \cdot f, T \cdot g) &= \sup_{\substack{x \in M \\ t \in K}} d(f(x, t), g(x, t)) = \\ &= \sup_{x \in M} [\sup_{t \in K} d(f(x, t), g(x, t))] = \sup_{x \in M} d(f_x, g_x) = d(f, g). \end{aligned}$$

Corolário - Se  $K$  e  $L$  são compactos, então  $T: C(K; C(L; N)) \rightarrow C(K \times L; N)$  é uma isometria.

As vezes se usa a notação  $M^K = C(K; M)$ . Então a Proposição 6 diz que  $(N^K)^M$  e  $N^{K \times M}$  são homeomorfos. Por isso ela é chamada a "lei exponencial".

§4. Uma base para  $C(K;M)$ .

Outra aplicação do Exemplo 8 (ou seja, do Teorema de Weierstrass) consiste em caracterizar a topologia (isto é, os conjuntos abertos) de  $C(K;M)$ , quando  $K$  é compacto, por meio das vizinhanças de gráficos.

Sabemos que uma coleção  $\mathcal{V}$  de partes de um espaço métrico  $M$  chama-se uma base de abertos de  $M$  quando:  
1º) Todo  $V \in \mathcal{V}$  é aberto em  $M$ ; 2º) Todo aberto de  $M$  é reunião de conjuntos  $V$  pertencentes à coleção  $\mathcal{V}$ . Para assegurar esta segunda condição, basta mostrar que, para toda bola aberta  $B(x;r)$ , existe um conjunto  $v \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in V \subset B(x;r)$ .

Sejam então  $K, M$  espaços métricos, dos quais  $K$  é compacto. Definiremos uma coleção de abertos  $\mathcal{V} \subset C(K;M)$ , os quais mostraremos que constituem uma base do espaço métrico  $C(K;M)$ .

Dada  $f \in C(K;M)$ , seja  $G(f) \subset K \times M$  o gráfico de  $f$ . Sabemos que  $G(f)$  é homeomorfo a  $K$  e portanto é compacto.

Para cada aberto  $V \subset K \times M$ , definiremos o conjunto

$$V^* = \{f \in C(K;M); G(f) \subset V\}.$$

Pode perfeitamente ocorrer que  $V^*$  seja vazio, com  $V \neq \emptyset$ . Basta, por exemplo, que  $p_1(V) \neq K$ . De qualquer maneira,  $V^*$  é um subconjunto aberto de  $C(K;M)$ .

Com efeito, se  $f \in V^*$  então  $d(G(f);(K \times M) - V) = r > 0$ . Logo  $d(f,g) < r \Rightarrow d[(t,f(t)),(t,g(t))] = d(f(t),g(t)) < r \Rightarrow (t,g(t)) \in V$  para todo  $t \in K \Rightarrow G(g) \subset V \Rightarrow g \in V^*$ . Ou seja  $f \in V^* \Rightarrow B(f;r) \subset V^*$ .

Além disso, dada qualquer bola aberta  $B(f;r)$  em  $C(K;M)$ , o conjunto  $V = \{(t,y) \in K \times M; d(f(t),y) < r/2\}$  é aberto em  $K \times M$ , pois  $f$  é contínua. Ora  $g \in V^* \Rightarrow G(g) \subset V \Rightarrow d(f(t),g(t)) < \frac{r}{2}$  para todo  $t \in K \Rightarrow d(f,g) \leq \frac{r}{2} < r \Rightarrow g \in B(f;r)$ . Logo  $f \in V^* \subset B(f;r)$ .

Isto conclui a verificação de que a coleção  $V^*$  dos abertos acima definidos é uma base de abertos para  $C(K;M)$ .

Uma consequência importante deste fato é que, quando  $K$  é compacto, a topologia de  $C(K;M)$  depende apenas das topologias de  $K$  e de  $M$  mas não das métricas particulares usadas para defini-las. Em outras palavras, se os espaços métricos compactos  $K$  e  $K_1$  são homeomorfos, e também são homeomorfos os espaços métricos  $M$  e  $M_1$ , então  $C(K;M)$  é homeomorfo a  $C(K_1;M_1)$ . (Compare com o Item 28 do Capítulo 6.)

O interesse da noção de base de abertos reside na

seguinte observação. Sejam  $M$ ,  $N$  espaços métricos,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  bases de abertos em  $M$  e  $N$  respectivamente. A fim de que  $f: M \rightarrow N$  seja contínua num ponto  $a \in M$  é necessário que, para cada vizinhança  $Z$  de  $f(a)$  em  $N$  exista um aberto básico  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $a \in V$  e  $f(V) \subset Z$ , e é suficiente que, para cada aberto básico  $W \in \mathcal{W}$  com  $f(a) \in W$ , exista uma vizinhança  $X$  de  $a$  em  $M$  tal que  $f(X) \subset W$ .

As bolas de raio  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  formam uma base de abertos em todo espaço métrico. Num produto cartesiano  $\prod M_i$ , os conjuntos da forma  $A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$ , onde  $A_1 \subset M_1, \dots, A_n \subset M_n$  são abertos, também constituem uma base de abertos.

#### §5. Caracterizações de espaços compactos.

Há algum tempo atrás, a demonstração mais popular do Teorema de Borel-Lebesgue usava um método de bissecções repetidas, que operava assim:

Se  $[a,b] \subset \bigcup A_\lambda$  fosse uma cobertura aberta que não admitisse subcobertura finita, dividindo  $[a,b]$  ao meio, em pelo menos uma das metades, a qual chamaríamos

$[a_1, b_1]$ , a cobertura aberta  $[a_1, b_1] \subset \cup A_\lambda$  não admitiria subcobertura finita. Prosseguindo desta maneira, obteríamos uma seqüência de intervalos  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ , com  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  e, para nenhum  $n$ ,  $[a_n, b_n] \subset \cup A_\lambda$  admite subcobertura finita. Pela Proposição 18, Capítulo 7, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$ . Ora, para algum  $\lambda$  deve-se ter  $c \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, para todo  $n$  suficientemente grande, temos  $c \in [a_n, b_n] \subset A_\lambda$ . Assim  $[a_n, b_n]$  pode ser coberto por um único  $A_\lambda$ , o que nos dá uma contradição.

Este interessante argumento de bissecção deu origem a duas coisas.

A primeira foi uma piada sobre como caçar um leão no deserto, a qual serve apenas para mostrar que tipo de senso de humor têm os matemáticos.

A segunda foi a noção de espaço métrico totalmente limitado.

Um espaço métrico  $M$  chama-se totalmente limitado quando, para todo  $\epsilon > 0$ , pode-se obter uma decomposição  $M = X_1 \cup \dots \cup X_n$ , de  $M$  como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro menor do que  $\epsilon$ .

A fim de que  $M$  seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, para todo  $\epsilon > 0$ , se possa es-

crever  $M = B(x_1; \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n; \epsilon)$  como reunião de um número finito de bolas abertas de raio  $\epsilon$ . Com efeito, se  $\text{diam } X_i < \epsilon$  então  $x_i$  está contido numa bola aberta de raio  $\epsilon$  (e centro num ponto qualquer de  $X_i$ ). Reciprocamente, toda bola  $B(x_i, \epsilon/2)$  tem diâmetro  $< \epsilon$ .

Dito de outra maneira, um espaço métrico  $M$  é totalmente limitado se, e somente se, dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe um número finito de pontos  $x_1, \dots, x_n \in M$  tais que todo ponto  $x \in M$  dista menos de  $\epsilon$  de algum dos  $x_i$ .

Todo subespaço de um espaço métrico totalmente limitado ainda é totalmente limitado.

Se  $M$  é totalmente limitado então  $M$  é, em particular, limitado.

Exemplo 13 - Se  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado então  $X$  é totalmente limitado. Com efeito, dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $0 < \delta < \epsilon$  e exprimimos a reta como reunião dos intervalos  $I_n = [n \cdot \delta, (n+1)\delta]$ , todos de comprimento  $\delta$ . Sendo limitado,  $X$  está contido numa reunião finita desses intervalos. Analogamente, decompondo  $\mathbb{R}^n$  como reunião de pequenos paralelepípedos  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , (mediante de composição de cada eixo em pequenos intervalos) vemos que todo subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$  é totalmente limitado.

Exemplo 14 - No espaço de Hilbert  $\ell^2$ , seja  $X = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$  onde  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Todo subconjunto não-vazio de  $X$  com diâmetro menor do que  $\sqrt{2}$  reduz-se a um único ponto. Logo, se  $\epsilon < \sqrt{2}$ , não se pode decompor  $X$  como reunião de um número finito de subconjuntos, todos com diâmetro  $< \epsilon$ . Assim,  $X$  não é totalmente limitado. Segue-se que nenhum conjunto contendo  $X$  é totalmente limitado. Em particular, não é totalmente limitada a bola unitária fechada  $B[0;1] \subset \ell^2$ .

Observação: Quando  $M$  é totalmente limitado, na decomposição  $M = X_1 \cup \dots \cup X_n$  podemos, se for conveniente, supor cada  $X_i$  fechado, pois  $\text{diam.} \bar{X}_i = \text{diam.} X_i$ . Do mesmo modo se vê que um subconjunto  $X \subset M$  é totalmente limitado então seu fecho  $\bar{X}$  também o é. Em particular, um espaço métrico  $M$  é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento  $\hat{M}$  o é.

Proposição 7 - As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico  $M$  são equivalentes:

- 1)  $M$  é compacto;
- 2) Todo subconjunto infinito de  $M$  possui um ponto de acumulação;
- 3) Toda seqüência em  $M$  possui uma subseqüência convergente;

4) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração: Provaremos que  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$ .

$1) \Rightarrow 2)$ . Suponhamos  $M$  compacto, e seja  $X \subset M$  um subconjunto sem ponto de acumulação, isto é,

$X^c = \emptyset$ . Então  $X = X \cup X^c = \bar{X}$ , isto é,  $X$  é fechado.

Além disso, como nenhum  $x \in X$  é ponto de acumulação, podemos, para cada  $x \in X$ , obter uma bola aberta  $B_x$ , de centro  $x$ , tal que  $B_x \cap X = \{x\}$ . Temos assim uma cobertura aberta  $M = (\bigcup_{x \in X} B_x) \cup (M-X)$ , da qual extraímos uma subcobertura finita  $M = B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n} \cup (M-X)$ . Segue-se que  $X \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n}$ , donde  $X = (B_{x_1} \cap X) \cup \dots \cup (B_{x_n} \cap X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Portanto  $X$  é finito, o que prova que  $1) \Rightarrow 2)$ .

$2) \Rightarrow 3)$ . Dada uma seqüência  $(x_n)$  em  $M$ , se o conjunto dos valores  $x_n$  é finito então existe algum valor  $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$  que se repete infinitas vezes e portanto a subseqüência  $(x_{n_k})$  trivialmente converge para  $a$ . Se, porém, o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  é infinito então possui um ponto de acumulação  $a$ . Toda bola de centro  $a$  contém termos  $x_n$  com índices arbitrariamente grandes, logo  $a$  é limite de alguma subseqüência de  $(x_n)$ .

$3) \Rightarrow 4)$ . Supondo 3), toda seqüência de Cauchy em  $M$

possui uma subsequência convergente, logo é convergente. Assim,  $M$  é completo. Mostremos agora que, para todo  $\epsilon > 0$  dado, podemos exprimir  $M$  como reunião de um número finito de bolas de raio  $\epsilon$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , escolhamos um ponto  $x_1 \in M$ . Se for  $M = B(x_1; \epsilon)$ , o resultado está provado. Caso contrário, existe  $x_2 \in M$  tal que  $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$ . Se for  $M = B(x_1; \epsilon) \cup B(x_2; \epsilon)$ , acabou. Caso contrário, existe  $x_3 \in M$ , com  $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$ ,  $d(x_3, x_1) \geq \epsilon$ . Prosseguindo assim, ou chegamos a um  $n$  tal que  $M = B(x_1; \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n; \epsilon)$  ou então obtemos uma seqüência  $(x_n)$  tal que  $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$  para  $m \neq n$  quaisquer. Neste caso, nenhuma subsequência de  $(x_n)$  seria de Cauchy, e muito menos convergente. Logo, isto não ocorre, e  $M$  é totalmente limitado.

4)  $\Rightarrow$  1). Seja  $M$  completo e totalmente limitado. Por absurdo, suponhamos que exista uma cobertura aberta  $M = \bigcup A_\lambda$ , a qual não possui subcobertura finita. Escrevamos  $M$  como reunião de um número finito de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro  $< 1$ . Pelo menos um deles - que chamaremos  $X_1$  - é tal que  $X_1 \subset \bigcup A_\lambda$  não admite subcobertura finita.  $X_1$  também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro  $< \frac{1}{2}$ . Ao menos um desses conjuntos, digamos  $X_2$ , não pode ser coberto

por um número finito dos  $A_\lambda$ . Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$  de subconjuntos fechados de  $M$ , tais que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{diam}.X_n < \frac{1}{n}$  e  $X_n$  não está contido numa reunião finita dos  $A_\lambda$ 's. Em particular, nenhum  $X_n$  é vazio. Pela Proposição 18, Capítulo 7, existe  $a \in M$  tal que  $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ . Para algum  $\lambda$ , tem-se  $a \in A_\lambda$ . Sendo  $A_\lambda$  aberto, deve-se ter  $B(a; \frac{1}{n}) \subset A_\lambda$  para algum  $n$ . Como  $a \in X_n$  e  $\text{diam}.X_n < \frac{1}{n}$ , concluimos que  $X_n \subset B(a; \frac{1}{n})$ , donde  $X_n \subset A_\lambda$ , o que é uma contradição.

Corolário 1 - Um espaço métrico é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento é compacto.

Com efeito,  $M$  totalmente limitado  $\Leftrightarrow \hat{M}$  totalmente limitado (e completo)  $\Leftrightarrow \hat{M}$  compacto.

Corolário 2 - Um subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.

Com efeito  $K \subset \mathbb{R}^n$  limitado e fechado  $\Leftrightarrow K$  totalmente limitado e completo. (Vide Exemplo 13)  $\Leftrightarrow K$  compacto

Corolário 2' - Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  tem fecho compacto se, e somente se, é limitado.

Corolário 3 - Todo espaço métrico compacto  $M$  contém um subconjunto enumerável denso.

Isto decorre do fato de  $M$  ser totalmente limitado. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um subconjunto finito  $F_n \subset M$  tal que  $d(x, F_n) < \frac{1}{n}$ , para todo  $x \in M$ . Seja  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ . Então  $F$  é enumerável e, para todo  $x \in M$ , temos  $d(x, F) = 0$ . Logo  $F$  é denso em  $M$ .

Diz-se que um espaço é seqüencialmente compacto quando toda seqüência de pontos nele contida possui uma subseqüência convergente. A Proposição 7 diz que um espaço métrico é seqüencialmente compacto se, e somente se, é compacto.

Exemplo 15 - A esfera unitária  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  é compacta. O mesmo se dá com a bola fechada unitária  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$ . Já no espaço de Hilbert  $\ell^2$ , a esfera unitária  $S = \{x \in \ell^2; \langle x, x \rangle = 1\}$  e a bola fechada unitária  $B = \{x \in \ell^2; |x| \leq 1\}$  não são compactas, seja porque não são totalmente limitadas, seja porque o subconjunto infinito  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset S \subset B$  não possui ponto de acumulação.

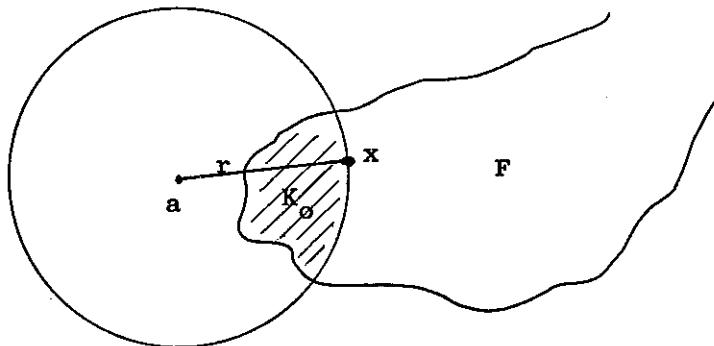
Exemplo 16 - Se um espaço métrico  $M$  não é compacto então existe uma função contínua ilimitada  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . De fato, pela Proposição 7, existe um subconjunto (que podemos supor enumerável)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset M$ , sem pontos de acumulação. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$D_n = B[x_n; s_n]$ . O leitor pode verificar (como exercício) que as afirmações seguintes são verdadeiras:

- 1) É possível escolher os números  $s_n$  de modo que as bolas fechadas  $D_n$  sejam duas a duas disjuntas e  $0 < s_n < \frac{1}{n}$  para cada  $n$ .
- 2)  $D = \bigcup D_n$  é fechado em  $M$ .
- 3) Definindo-se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = 0$  se  $x \notin D$  e  $f(x) = \frac{n}{s_n} [s_n - d(x, x_n)]$ , obtemos uma função contínua tal que  $f(x_n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e ilimitada.

Exemplo 17 - Sejam  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $F \subset \mathbb{R}^n$  fechado não-vazio.

Então existe  $x_0 \in F$  tal que  $d(a, F) = d(a, x_0)$ . Com efeito, tomemos um ponto  $x \in F$  e obser-



vemos que, se  $r = d(a, x)$  então  $K_0 = B[a; r] \cap F$  é fechado no compacto  $B[a; r]$  e portanto é compacto. Além

disso, é claro que  $d(a; F) = \inf_{y \in F} d(a, y) = \inf_{y \in K_0} d(a, y) = d(a; K_0)$  pois os pontos de  $F$  que não pertencem a  $K_0$  estão, por definição, mais longe de  $a$  do que qualquer ponto de  $K_0$ . Pelo Teorema de Weierstrass, a função  $y \mapsto d(a, y)$ ,  $y \in K_0$ , assume seu mínimo num ponto  $x_0 \in K_0$ . Notemos que o resultado análogo é falso em  $\ell^2$ , como se vê tomando  $a = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in \ell^2$  e  $F = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset \ell^2$ . Entretanto, se tomássemos  $F$  convexo e fechado em  $\ell^2$ , para cada  $a \in \ell^2$  existiria  $x_0 \in F$  tal que  $d(a, F) = d(a, x_0)$ . (Vide qualquer texto sobre Espaços de Hilbert.)

Exemplo 18 (O Teorema Fundamental da Álgebra) - Este teorema diz que todo polinômio  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ , com  $n > 0$  e  $a_n \neq 0$ , possui uma raiz no corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos, o qual identificaremos no plano  $\mathbb{R}^2$  pela isometria  $x+iy \mapsto (x, y)$ . Dado  $p$ , observamos em primeiro lugar que  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ . Isto significa que, para todo  $k > 0$  dado, pode-se achar  $r > 0$  tal que  $|z| > r \Rightarrow |p(z)| > k$ . A demonstração consiste em escrever  $p(z) = z^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n})$ . Para valores muito grandes de  $z$ , o fator dentro do parênteses é praticamente igual a  $a_n$ , que é  $\neq 0$ . Logo podemos tornar  $|p(z)|$  tão grande quanto desejemos tomando  $|z|$  grande. Por exemplo, existe  $r > 0$  tal que  $|z| > r \Rightarrow$

$\Rightarrow |p(z)| > |z_0| = |p(0)|$ . Seja  $z_0$  o ponto do disco com pacto  $B[0;r]$ , no qual a função contínua  $z \mapsto |p(z)|$  assume seu valor mínimo. Assim  $|z| \leq r \Rightarrow |p(z)| \geq |p(z_0)|$ . Como  $|z| > r \Rightarrow |p(z)| > |p(0)|$ , concluimos que  $|p(z_0)| \leq |p(z)|$  para todo  $z \in C$ , isto é,  $|p|: C \rightarrow \mathbb{R}$  assume seu valor mínimo em  $C$  no ponto  $z_0$ , embora  $C$  não seja compacto. Afirmamos que  $p(z_0) = 0$ . Com efeito, suponhamos, por absurdo, que fosse  $p(z_0) = c \neq 0$ . Escrevemos  $q(z) = p(z+z_0)$ , donde  $p(z_0) = q(0) = c$  e  $q(z) = c + z^i [a+r(z)]$ , com  $a \neq 0$  e  $r(0) = 0$ . Vamos achar  $z$  tal que  $|q(z)| < |c|$ , o que nos dará uma contradição. Ora,  $B = \{w; |w+c| < |c|\}$  é a bola aberta de centro  $-c$  e raio  $|c|$ . Se  $w \in B$  e  $t > 0$  então  $t \cdot w \in B$ . Começamos tomando  $w$  tal que  $a \cdot w^i = -c$  (ou seja  $w$  é uma raiz  $i$ -ésima de  $-c/a$ ). Então  $a \cdot w^i \in B$ . Por continuidade, existe uma bola  $C$ , de centro  $a$ , tal que  $u \in C \Rightarrow u \cdot w^i \in B$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|z| < \epsilon \Rightarrow a+r(z) \in C \Rightarrow w^i \cdot [a+r(z)] \in B$ . Seja  $t > 0$  tal que  $|t \cdot w| < \epsilon$ . Então  $w^i \cdot [a+r(tw)] \in B$ . Segue-se que  $t^i w^i \cdot [a+r(tw)] \in B$ . Logo, pondo  $z = tw$ , vem  $z \cdot [a+r(z)] \in B$ , isto é,  $|q(z)| < c$ , ou seja,  $|p(z+z_0)| < c$ , uma contradição. Logo  $c = 0$  e  $z_0$  é uma raiz de  $p$ .

## §6. Produtos cartesianos de espaços compactos.

Proposição 8 - O produto cartesiano de dois espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.

Demonstração: Sejam  $M, N$  espaços métricos compactos.

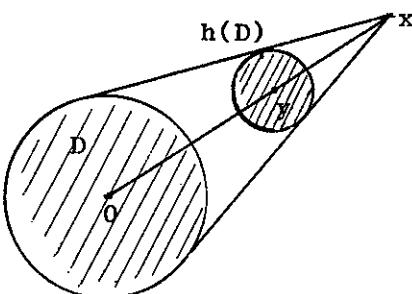
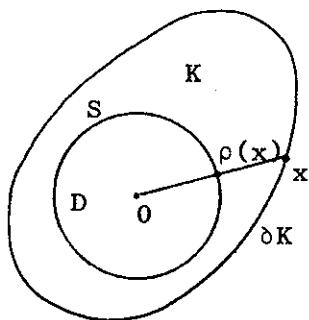
Dada arbitrariamente uma seqüência de pontos  $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ , a seqüência das primeiras coordenadas  $x_n \in M$  possui uma subseqüência convergente, isto é, existem  $N_1 \subset \mathbb{N}$  infinito e  $a \in M$  tais que  $\lim_{n \in N_1} x_n = a$ . Por sua vez, a seqüência  $(y_n)_{n \in N_1}$  em  $N$  possui também uma subseqüência convergente, isto é, existem  $N_2 \subset N_1$  infinito e  $b \in N$  tais que  $\lim_{n \in N_2} y_n = b$ . É claro que  $\lim_{n \in N_2} x_n = a$ . Logo  $\lim_{n \in N_2} z_n = (a, b)$  em  $M \times N$ . Portanto  $M \times N$  é (seqüencialmente) compacto.

Corolário - Se  $M_1, \dots, M_n$  são espaços métricos compactos, então  $M_1 \times \dots \times M_n$  é compacto.

Exemplo 19 - O espaço métrico  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  fatores) é chamado o toro n-dimensional. Ele é compacto, em virtude do corolário acima ou então por ser a imagem de  $[0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]$  - que já sabíamos ser compacto - pela aplicação contínua  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto$

$\longmapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}).$

Exemplo 20 - Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, convexo e tem interior não-vazio, então  $K$  é homeomorfo a uma bola fechada  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Começamos estabelecendo um homeomorfismo  $\rho: \partial K \rightarrow S$  entre a fronteira de  $K$  e uma esfera  $S$  em  $\mathbb{R}^n$ . Para simplificar a notação, vamos admitir que  $0 \in \text{int. } K$ . (Isto se consegue por translação.) Sejam  $D = B[0; \epsilon]$  uma bola fechada de centro  $0$  contida em  $K$  e  $S = S(0; \epsilon)$  a fronteira de  $D$ . Definimos  $\rho: \partial K \rightarrow S$  pondo  $\rho(x) = \frac{\epsilon}{|x|} \cdot x$ . Evidentemente,  $\rho$  é uma aplicação contínua de  $\partial K$  em  $S$ . Para cada  $x \in \partial K$ ,  $\rho(x)$  é o ponto onde a semireta que sai de zero e contém  $x$  corta a esfera  $S$ . Para cada  $u \in S$ , como  $K$  é limitado e a semireta  $\overrightarrow{Ou}$  é ilimitada, existem nela pontos que não pertencem a  $K$ . Como a semireta  $\overrightarrow{Ou}$  é um conjunto conexo, segue-se do Teorema da Alfândega (Proposição 9, Capítulo 4) que  $\overrightarrow{Ou}$  contém algum ponto  $x$  da fronteira de  $K$ . ou seja,  $\rho(x) = u$ . Isto mostra que  $\rho: K \rightarrow S$  é sobrejetiva. Afirmamos que  $\rho$  é injetiva. Com efeito, suponhamos que existissem  $x, y \in \partial K$ , com  $x \neq y$  e  $\rho(x) = \rho(y)$ . Então  $x$  e  $y$  pertenceriam à mesma semireta. Escolhendo a notação de modo que seja  $y \in [0, x]$ , temos  $y = (1-\lambda)x$ , com  $0 < \lambda < 1$ . A apli-



cação  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $h(z) = x + \lambda(z-x)$ , é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  (homotetia de centro  $x$  e razão  $\lambda$ ), tal que  $h(0) = y$ . Como  $K$  é convexo e  $h(z) = (1-\lambda)x + \lambda z$ , vemos que  $h(K) \subset K$ . Segue-se que  $h(D)$  é uma vizinhança de  $y$ , contida em  $K$ , o que contradiz ser  $y \in \partial K$ . Assim  $\rho: \partial K \rightarrow S$  é uma bijeção contínua. Como  $\partial K$  é um subconjunto fechado do compacto  $K$ , e portanto é compacto, segue-se (Corolário 2, Proposição 3) que  $\rho$  é um homeomorfismo.

Definamos uma aplicação  $f: K \rightarrow D$  do seguinte modo:  $f(0) = 0$  e, se  $0 \neq y \in K$  então, como vimos acima, a semi-reta  $\overrightarrow{Oy}$  corta a fronteira  $\partial K$  num único ponto  $x$ . Temos portanto  $y = t \cdot x$ , com  $t \in (0,1]$  e  $x \in \partial K$  univocamente determinados. Pомos  $f(y) = t \cdot \rho(x)$ . Para provar que  $f: K \rightarrow D$ , assim definida, é um homeomorfismo, observamos primeiramente que, se  $I = [0,1]$ , o produto  $I \times \partial K$  é compacto e portanto a sobrejeção contínua

$m: I \times \partial K \rightarrow K$ , dada por  $m(t,x) = t \cdot x$ , é uma aplicação quociente (Exemplo 6). Ora,  $f \circ m: I \times \partial K \rightarrow D$ , dada por  $(f \circ m)(t,x) = t \cdot \rho(x)$ , é contínua. Logo  $f$  é contínua. A verificação de que  $f$  é bijetiva é simples. Segue-se que  $f: K \rightarrow D$  é um homeomorfismo.

Proposição 8 (Teorema de Cantor-Tychonov) - O produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é compacto se, e somente se, cada fator  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) é compacto.

Demonstração: Dada uma seqüência arbitrária  $(x_n)$  em  $M$ , provaremos que ela possui uma subseqüência convergente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{ni}, \dots)$ . Obteremos um subconjunto infinito  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$  tal que, para cada  $i = 1, 2, 3, \dots$  existe  $\lim_{n \in \mathbb{N}^*} x_{ni} = a_i \in M_i$ . Então, pondo  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in M$ , teremos  $\lim_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = a$ . (Vide Corolário da Proposição 16, Capítulo 5.) Com efeito, sendo  $M_1$  compacto, a seqüência  $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, \dots)$  em  $M_1$  possui uma subseqüência convergente. Isto é, existem  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  infinito e  $a_1 \in M_1$  tais que  $\lim_{n \in \mathbb{N}_1} x_{n1} = a_1$ . Por sua vez, sendo  $M_2$  compacto, a seqüência  $(x_{n2})_{n \in \mathbb{N}_1}$  possui uma subseqüência convergente, ou seja: existem  $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$  infinito e  $a_2 \in M_2$  tais que  $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} x_{n2} = a_2$ . Prosseguindo assim, obtemos uma seqüência de conjuntos infinitos  $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \dots \supset \mathbb{N}_i \supset \dots$  e um ponto

$a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \in M$ , com  $\lim_{n \in N_i} x_{n_i} = a_i$ , para cada  $i \in N$ . Definimos o conjunto  $N^* \subset N$  estipulando que seu  $i$ -ésimo elemento (na ordem crescente dos números naturais) seja o  $i$ -ésimo elemento de  $N_i$ . Assim sendo, para cada  $i \in N$ , a seqüência  $(x_{n_i})_{n \in N^*}$  é, a partir do seu  $i$ -ésimo elemento, uma subseqüência de  $(x_{n_i})_{n \in N_i}$ . Logo,  $\lim_{n \in N^*} x_{n_i} = a_i$  para cada  $i$ , o que completa a demonstração.

Observação: O método da demonstração acima, devido a Cantor, chama-se "método da diagonal".

Exemplo 21 - Um subconjunto  $X \subset \ell^2$  chama-se equiconvergente quando, dado  $\epsilon > 0$  arbitrariamente, pode-se obter  $k \in N$  tal que para todo  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots) \in X$ , tem-se  $\sum_{i>k} x_i^2 < \epsilon^2$ . É conveniente definir, para cada  $k \in N$ , as contrações fracas lineares  $P_k: \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $Q_k: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ , pondo  $P_k(x) = (x_1, \dots, x_k)$  e  $Q_k(x) = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$ . Então,  $X \subset \ell^2$  é equiconvergente se, e somente se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $k$  tal que  $|Q_k(x)| < \epsilon$ , seja qual for  $x \in X$ . Afirmamos que um subconjunto  $X \subset \ell^2$  é compacto se, e somente se, é limitado, fechando e eqüiconvergente. Com efeito, seja  $X$  compacto. Dado  $\epsilon > 0$ , existe, para cada  $x \in X$ , um número  $k = k_x \in N$  tal que  $|Q_k(x)| < \epsilon$ . Por continui-

dade, existe uma bola  $B_x = B(x; r_x)$  tal que  $y \in B_x \Rightarrow |Q_{k_x}(y)| < \epsilon$ . A cobertura  $X \subset \bigcup_{x \in X} B_x$  admite uma subcobertura finita  $X \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n}$ . Seja  $k = \max\{k_{x_1}, \dots, k_{x_n}\}$ . Então, para qualquer  $x \in X$ , temos  $|Q_k(x)| < \epsilon$ . Logo,  $X$  é eqüiconvergente. É claro que  $X$  é também limitado e fechado. Reciprocamente, suponhamos  $X \subset \ell^2$  eqüiconvergente e tomemos uma seqüência de pontos  $x_n \in X$  tais que  $\lim_n x_{ni} = a_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \in \ell^2$  e que  $\lim x_n = a$  em  $\ell^2$ . Com efeito, em primeiro lugar,  $(x_n)$  é de Cauchy em  $\ell^2$ , pois, dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|Q_k(x)| < \frac{\epsilon}{4}$  para todo  $x \in X$ . Então  $x, y \in X \Rightarrow |Q_k(x-y)| = |Q_k(x) - Q_k(y)| \leq |Q_k(x)| + |Q_k(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ . A seqüência de pontos  $p_k(x_n) = (x_{n1}, \dots, x_{nk})$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}^k$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow |p_k(x_m) - p_k(x_n)| = |p_k(x_m - x_n)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim,  $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |p_k(x_m - x_n)| + |Q_k(x_m - x_n)| < \epsilon$ . Como  $\ell^2$  é completo, existe  $\lim x_n = b$  em  $\ell^2$ . Para cada  $i$ , temos  $b_i = \lim_n x_{ni} = a_i$ . Portanto  $b = a = \lim x_n$ . Mostremos agora que  $X \subset \ell^2$  eqüiconvergente, limitado e fechado  $\Rightarrow X$  compacto. Primeiro notamos que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p_i(X)$  é limitado, logo existe  $J_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$  tal que  $p_i(X) \subset J_i$  para todo  $i$ . Seja  $j: X \rightarrow \prod J_i$  a aplicação de inclusão:  $j(x) = x$ . O que acabamos de ver acima si-

nifica que, dada uma sequência de pontos  $x_n \in X$ , temos  $\lim_n j(x_n) = a$  em  $\Pi J_i$  se, e somente se,  $a \in \ell^2$  e  $\lim x_n = a$  em  $\ell^2$ . Sendo  $X \subset \ell^2$  fechado, podemos afirmar:  $\lim_n j(x_n) = a \in \Pi J_i \Leftrightarrow \lim x_n = a \in X$ . Isto quer dizer que  $j$  é um homeomorfismo de  $X$  sobre um subconjunto fechado de  $\Pi J_i$ . Como  $\Pi J_i$  é compacto, segue-se que  $X$  é compacto.

Exemplo 22 - O cubo de Hilbert é o conjunto  $C$  das sequências de números reais  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$  tais que  $0 \leq x_i \leq \frac{1}{i}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Como a série  $\sum \frac{1}{i^2}$  é convergente, vemos que  $C \subset \ell^2$ . Consideramos  $C$  com a métrica induzida de  $\ell^2$ . Para todo  $x \in C$ , temos  $|x|^2 \leq \sum_i \frac{1}{i^2}$ , logo  $C$  é limitado. Além disso, considerando as projeções  $p_i: \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}([0, \frac{1}{i}])$ , logo  $C$  é fechado em  $\ell^2$ . Finalmente, dado  $\epsilon > 0$ , se tomarmos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{i>k} \frac{1}{i^2} < \epsilon^2$ , teremos  $\sum_{i>k} x_i^2 < \epsilon^2$  para todo  $x \in C$ . Logo  $C$  é eqüiconvergente. Portanto o cubo de Hilbert  $C$  é um subconjunto compacto do espaço  $\ell^2$ . Em  $C$ , a topologia de  $\ell^2$  coincide com a de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , ou seja, a métrica  $d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$  em  $C$  é equivalente à métrica produzida por  $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ . (É desnecessário tomar parcelas do tipo  $\frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$  para  $d_1$  em  $C$ .) O cubo de Hilbert  $C$  é homeomorfo a  $I^{\mathbb{N}}$ , onde  $I = [0, 1]$ . Basta de-

finir  $h: C \rightarrow I^{\mathbb{N}}$  pondo  $h(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$ .

Exemplo 23 (Curva de Peano) - No último ano do século 19, o matemático italiano Giuseppe Peano causou grande surpresa ao exibir o primeiro exemplo de uma curva que preenche todos os pontos de um quadrado, isto é, uma sobrejeção contínua  $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ . Seja  $I = [0,1]$ . Chama-se hoje curva de Peano no espaço métrico  $M$  a uma aplicação contínua  $f: I \rightarrow M$  tal que  $f(I) = M$ . Demonstraremos a seguir a existência de uma curva de Peano no quadrado  $I^2$ , mais geralmente, no cubo  $n$ -dimensional  $I^n$  e mesmo no cubo de Hilbert  $C$ , que tem "dimensão infinita". Desempenharão papel importante em nossa construção o conjunto de Cantor  $K$  e o produto cartesiano  $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$  de uma infinidade enumerável de cópias do espaço discreto  $\{0,2\}$ . Dividiremos a discussão em etapas, a fim de facilitar o entendimento.

A) Existe um homeomorfismo  $\varphi: \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$ .

Antes de definir  $\varphi$ , lembremos que os números reais admitem não somente uma expressão decimal como também, fixado qualquer número  $b > 1$ , todo número real possui uma expressão na base  $b$ . Em particular, se  $0 \leq x \leq 1$ , a expressão  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$  de  $x$  na base  $b$  sig-

nifica que

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \dots + \frac{x_n}{b^n} + \dots$$

onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  é um inteiro tal que  $0 \leq x_n < b$ .

Consideremos, por exemplo,  $b = 3$ . Se  $x \in [0,1]$  tem a expressão  $x = 0, x_1 x_2 \dots$  na base 3, cada algarismo  $x_n$  pode ser igual a 0, 1 ou 2. O algarismo  $x_1$  diz quantas vezes  $x$  contém  $\frac{1}{3}$ . Assim,  $x_1 = 0$  significa que  $x$  pertence ao primeiro terço do intervalo  $[0,1]$ ;  $x_1 = 1$  quer dizer que  $x$  pertence ao terço médio de I e  $x_1 = 2$  significa que  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ . O algarismo  $x_2$  diz quantas vezes  $x - \frac{x_1}{3}$  contém  $\frac{1}{9}$ . Assim, por exemplo,  $x = 0,12\dots$  significa que  $x$  pertence ao terço médio  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  e, mais ainda, está no terço final,  $[\frac{5}{9}, \frac{2}{3}]$  deste intervalo. Vemos portanto que o conjunto de Cantor K foi definido de tal maneira que os seus pontos são exatamente os números  $x \in [0,1]$  cuja expressão  $x = 0, x_1 x_2 \dots$  na base 3 contém apenas os algarismos 0 e 2. Definimos então  $\varphi: \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$  pondo, para cada seqüência  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  de algarismos zeros e dois,

$$\varphi(x) = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}.$$

Tomamos em  $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$  a métrica  $d(x,y) = \sum \frac{1}{3^n} |x_n - y_n|$ . Então é claro que  $\varphi$  é contínua, pois  $\varphi(x) = d(x,0)$ , on-

de  $0 = (0,0,\dots,0,\dots)$ . A existência de uma expressão na base 3 para todo  $x \in K$  mostra que  $\varphi$  é sobrejetiva. Para ver que  $\varphi$  é injetiva, basta lembrar que, assim como a representação decimal de um número real  $x \in [0,1]$  é única, exceto por ambigüidades do tipo  $0,47999\dots = 0,48000\dots$ , também na base 3 os únicos números  $x \in I$  que admitem duas expressões distintas são os da forma  $x = 0, x_1 \dots x_{n-1} x_n 222\dots = 0, x_1 \dots x_{n-1} y_n 000\dots$ , onde  $0 \leq x_n < 2$  e  $y_n = x_n + 1$ . Ora, nestas condições, ou  $x_n = 1$  ou  $y_n = 1$  e portanto as seqüências distintas  $(x_1, \dots, x_n, 2, 2, \dots)$  e  $(x_1, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$  não pertencem ambas a  $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ . Logo  $\varphi$  é uma bijeção contínua do espaço compacto  $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$  sobre  $K$  e portanto é um homeomorfismo.

Em particular, vemos que, ao contrário do caso finito, o produto cartesiano  $\{0,2\} \times \{0,2\} \times \dots$  de infinitas cópias do espaço discreto  $\{0,2\}$  não somente não é discreto, como nenhum dos seus pontos é isolado.

Outra consequência interessante de A) é que  $K$  é isomorfo a  $K \times K$ . Com efeito, existe um homeomorfismo evidente  $\xi: \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,2\}^{\mathbb{N}} \times \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ , dado por  $\xi(x) = (x', x'')$ , onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  e  $x' = (x_1, x_3, x_5, \dots)$ ,  $x'' = (x_2, x_4, x_6, \dots)$ .

Dai resulta que  $K$  é homeomorfo a  $K \times (K \times K) = K^3$ ,

etc. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $K$  homeomorfo a  $K^n$ .

Mais geralmente, temos  $K$  homeomorfo a  $K^{\mathbb{N}}$ . Basta escrever  $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ , onde os  $N_i$  são infinitos e dois a dois disjuntos. (Por exemplo,  $N_1 = \{\text{números naturais divisíveis por } 2^1 \text{ mas não por } 2^{i+1}\}.$ ) Isto fornece um homeomorfismo  $\{0,1\} \approx \{0,1\}^{N_1} \times \dots \times \{0,1\}^{N_i} \times \dots$ , dado por  $x \mapsto (x|_{N_1}, x|_{N_2}, \dots)$ , e portanto um homeomorfismo  $K \rightarrow K \times K \times \dots \times K \times \dots = K^{\mathbb{N}}$ .

B) Existe uma sobrejeção contínua  $g: K \rightarrow I$ .

Basta definir  $\psi: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow I$ , pondo  $\psi(x) = \sum \frac{1}{2^n} x_n$ . Como todo número real  $x \in [0,1]$  possui uma expressão na base 2,  $\psi$  é sobrejetiva. Além disso, usando em  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  a métrica  $d(x,y) = \sum \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$ , vemos que  $\psi(x) = d(x,0)$ , onde  $0 = (0,0,\dots,0,\dots)$ , logo  $\psi$  é contínua. Ora temos os homeomorfismos  $\phi: K \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  e  $j: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  (evidente). Tomamos  $g = \psi \circ j \circ \phi: K \rightarrow I$ .

Então  $(x,y) \mapsto (g(x),g(y))$  define uma sobrejeção contínua  $g \times g: K \times K \rightarrow I \times I$  e, como  $K$  é homeomorfo a  $K \times K$ , obtemos uma sobrejeção contínua  $K \rightarrow I \times I$ .

Mais geralmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma sobrejeção contínua  $K \rightarrow I^n$ . Finalmente, existe uma sobrejeção contínua  $K \rightarrow I^{\mathbb{N}}$ , ou seja, o cubo de Hilbert  $C$  é uma imagem contínua do conjunto de Cantor  $K$ .

- c) Seja  $X$  um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Toda aplicação contínua  $f_0: K \rightarrow X$  admite uma extensão contínua  $f: I \rightarrow X$ .

Com efeito, o complemento de  $K$  em  $I$  é uma reunião de intervalos abertos disjuntos, estando  $f_0$  definida nas extremidades de cada um deles. Para obter a extensão  $f$ , basta defini-la em cada um desses intervalos como um caminho retilíneo cujos extremos são dados por  $f_0$ .

Para obter uma curva de Peano  $f: I \rightarrow IXI$ , tomamos uma sobrejeção contínua  $g: K \rightarrow IXK$  e a estendemos continuamente a  $f: I \rightarrow IXI$ . Da mesma maneira, obtemos curvas de Peano  $I \rightarrow I^n$  e  $I \rightarrow C$ , onde  $C$  é o cubo de Hilbert.

#### §7. Continuidade uniforme.

Proposição 9 - Se o espaço métrico  $M$  é compacto, então toda aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  é uniformemente contínua.

Demonstração: Se  $f$  não fosse uniformemente contínua, existiriam  $\epsilon > 0$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pon-

tos  $x_n, y_n \in M$  tais que  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$  e  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ . Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de  $M$ , que existe  $\lim x_n = a \in M$ . Então  $\lim y_n = a$  também. A continuidade de  $f$  e da distância nos dá  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0$ , em contradição com  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$  para todo  $n$ .

Corolário - Se dois espaços métricos compactos são homeomorfos, então eles são uniformemente homeomorfos. Em particular, duas métricas equivalentes num espaço compacto são uniformemente equivalentes.

Existe uma versão mais geral da proposição acima que tem utilidade em certas aplicações. A idéia da demonstração é a mesma.

Proposição 9' - Sejam  $f: M \rightarrow N$  contínua e  $K \subset M$  compacto. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in K, y \in M, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Demonstração: Negar a validade da proposição significa admitir a existência de  $\epsilon > 0$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pontos  $x_n \in K, y_n \in M$  tais que  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$  e  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ . Como  $K$  é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$\lim x_n = a \in K$ . Sendo  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ , temos também  $\lim y_n = a$ . Logo  $\epsilon \leq \lim d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0$ , uma contradição.

Outra maneira de demonstrar a Proposição 9 consiste em fazer uso da noção de número de Lebesgue de uma cobertura.

Diz-se que um número  $\epsilon > 0$  é número de Lebesgue de uma cobertura  $M = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$  quando todo subconjunto  $S \subset M$  com diâmetro menor do que  $\epsilon$  está contido em algum  $C_\lambda$  da cobertura. Evidentemente, se  $\epsilon$  é número de Lebesgue de uma cobertura e  $0 < \delta < \epsilon$ , então  $\delta$  também é número de Lebesgue da mesma cobertura.

Exemplo - Se existirem subconjuntos fechados  $F, G \subset M$  com  $F \cap G = \emptyset$  e  $d(F, G) = 0$  então  $M = (M-F) \cup U (M-G)$  é uma cobertura aberta de  $M$  da qual nenhum número  $\epsilon > 0$  é número de Lebesgue. Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existem  $a \in F$ ,  $b \in G$  tais que  $d(a, b) < \epsilon$ . Logo  $S = \{a, b\}$  é um conjunto com diâmetro inferior a  $\epsilon$ , o qual não está contido em nenhum dos dois conjuntos  $M-F$  ou  $M-G$  da cobertura.

Proposição 10 - Se o espaço métrico  $M$  é compacto, então toda cobertura aberta  $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  possui um número de Lebesgue.

Demonstração: Supondo, por absurdo, que a cobertura dada não possuisse número de Lebesgue obteríamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , um conjunto  $S_n \subset M$ , com  $\text{diam. } S_n < \frac{1}{n}$ , tal que nenhum  $A_\lambda$  conteria  $S_n$ . Escolhamos em cada  $S_n$  um ponto  $x_n$ . Passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que  $\lim x_n = a \in M$ . Temos  $a \in A_\lambda$  para algum  $\lambda \in L$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(a; \epsilon) \subset A_\lambda$ . Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$  e  $d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ . Então

$$y \in S_n \Rightarrow d(a, y) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo  $S_n \subset B(a; \epsilon) \subset A_\lambda$ , uma contradição.

Mostremos agora como se usa a Proposição 10 para provar a Proposição 9.

Outra demonstração da Proposição 9: Sejam  $M$  compacto e  $f: M \rightarrow N$  contínua. Dado  $\epsilon > 0$  existe, para cada  $x \in M$ , uma bola aberta  $A_x$ , de centro  $x$ , tal que  $y \in A_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ . Segue-se da desigualdade triangular que  $u, v \in A_x \Rightarrow d(f(u), f(v)) < \epsilon$ . Seja  $\delta > 0$  um número de Lebesgue da cobertura  $M = \bigcup_{x \in M} A_x$ . Então  $u, v \in M$ ,  $d(u, v) < \delta \Rightarrow$  existe  $x \in M$ , com  $u, v \in A_x \Rightarrow d(f(u), f(v)) < \epsilon$ . Logo  $f$  é uniformemente contínua.

A noção de número de Lebesgue tem aplicações diversas, na Teoria da Dimensão, na Topologia Diferencial, etc.

§8. Espaços localmente compactos.

Um espaço métrico  $M$  chama-se localmente compacto quando todo ponto  $x \in M$  possui uma vizinhança compacta. Isto significa, naturalmente, que para todo  $x \in M$  existe um compacto  $K$ , com  $x \in \text{int.}K$ .

A fim de que  $M$  seja localmente compacto, é necessário e suficiente que, para todo  $x \in M$ , exista um aberto  $A$ , com  $x \in A$  e  $\bar{A}$  compacto.

Finalmente,  $M$  é localmente compacto se, e somente se, para cada  $x \in M$  existe  $r > 0$  tal que a bola fechada  $B[x;r]$  seja compacta.

Um subconjunto  $X$  diz-se localmente compacto quando o subespaço métrico  $X$  o for.

Exemplo 24 - A reta  $\mathbb{R}$  e, mais geralmente, os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$  são localmente compactos. Nesses exemplos, toda bola fechada é compacta. O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais não é localmente compacto pois nenhum intervalo fechado de  $\mathbb{Q}$  é compacto. Todo espaço métrico discreto é localmente compacto, pois cada ponto é uma vizinhança compacta de si mesmo. Todo espaço compacto é, em particular, localmente compacto. (Qualquer bola

fechada é compacta.) O espaço  $\ell^2$  não é localmente compacto: nenhuma bola  $B[a;r]$  em  $\ell^2$  pode ser compacta pois a seqüência de pontos  $x_n = a + r \cdot e_n$  em  $B[a;r]$  é tal que  $|x_m - x_n| = r\sqrt{2}$  se  $m \neq n$  e portanto não possui subsequência convergente. [Como sempre,  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , com 1 no  $n$ -ésimo lugar.]

Exemplo 25 - Todo subconjunto aberto  $A$  de um espaço localmente compacto  $M$  é localmente compacto. Com efeito, para todo  $x \in A$  existem  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $B[a;r]$  é compacta e  $B[a;s] \subset A$ . A menor destas duas bolas é compacta e está contida em  $A$ . (Neste exemplo, nem toda bola fechada é compacta. Pense num disco aberto do plano.)

Exemplo 26 - Todo subconjunto fechado  $F$  de um espaço localmente compacto é localmente compacto. Com efeito, para todo  $x \in F$  existe uma bola  $B[x;r]$  em  $M$  que é compacta. Então  $B[x;r] \cap F$  é uma bola fechada em  $F$ , a qual, sendo um subconjunto fechado de um compacto, é compacta.

Exemplo 27 - Se  $X, Y \subset M$  são subconjuntos localmente compactos então  $X \cap Y$  é localmente compacto. Com efeito, para cada  $x \in X \cap Y$  existem bolas fechadas  $B = [x;r]$  e  $B' = [x;r']$  em  $M$  tais que  $B \cap X$  e  $B' \cap Y$

(que são bolas fechadas em  $X$  e  $Y$  respectivamente) são compactas. Então a interseção  $(B \cap X) \cap (B' \cap Y) = (B \cap B') \cap (X \cap Y)$ , que é uma bola fechada em  $X \cap Y$ , é compacta. Em particular, se  $M$  é localmente compacto,  $A \subset M$  é aberto e  $F \subset M$  é fechado, então  $A \cap F$  é localmente compacto. (Também se chega a esta conclusão notando que  $A \cap F$  é fechado em  $A$ , ou então aberto em  $F$ .) Observe-se, porém, que a reunião de dois subconjuntos localmente compactos pode não ser localmente compacta: tome  $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  (semi-plano superior aberto) e  $p = (0,0)$ . Então  $Y = X \cup \{p\}$  não é localmente compacto porque nenhuma bola de centro  $p$  em  $Y$  é compacta. O leitor verificará que  $Z = \mathbb{R}^2 - Y$  é localmente compacto (interseção do aberto  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  com o fechado  $\mathbb{R}^2 - X$ ), enquanto seu complementar  $Y$  não é.

Proposição 11 - Se um subconjunto localmente compacto  
 $X \subset M$  é denso em  $M$  então  $X$  é aberto  
em  $M$ .

Demonstração: Lembremos que, para todo aberto  $A \subset M$ ,  $A \cap X$  é denso em  $A$ . Para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  em  $M$  tal que  $V \cap X = F$  é compacto, e portanto fechado em  $M$ . Seja  $A$  aberto em  $M$  tal que  $x \in A \subset V$ . Então  $A \cap X$  é denso em  $A$  e fe-

chado em  $A$  pois  $A \cap X = A \cap V \cap X = A \cap F$ . Sendo assim,  $A \cap X = A$ , isto é,  $A \subset X$ . Obtemos portanto, para cada ponto  $x \in X$  um aberto  $A$  tal que  $x \in A \subset X$ . Logo  $X$  é aberto.

Corolário 1 - Todo subconjunto localmente compacto  $X \subset M$  é interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado.

Com efeito,  $X$  é denso em  $\bar{X}$ , logo é aberto em  $\bar{X}$ , ou seja, existe  $A$  aberto em  $M$  tal que  $X = A \cap \bar{X}$ , o que prova o corolário.

Corolário 2 - Todo espaço métrico localmente compacto é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Com efeito, se  $M$  é localmente compacto, então  $M$  é aberto no seu completamento  $\hat{M}$  e portanto é homeomorfo a um espaço métrico completo, em virtude da Proposição 5, Capítulo 7.

Exemplo 28 - Seja  $f: M \rightarrow N$  contínua, aberta e sobrejetiva. Se  $M$  é localmente compacto então  $N$  também o é. Com efeito, dado  $y \in N$  existe  $x \in M$  tal que  $f(x) = y$ . Seja  $V$  uma vizinhança compacta de  $x$ . Como  $f$  é aberta,  $f(V)$  é uma vizinhança de  $y$ , a qual é compacta pois  $f$  é contínua. Não é verdade, porém, que

a imagem de um conjunto localmente compacto  $X \subset M$  por uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  seja sempre um conjunto localmente compacto  $f(X) \subset N$ , mesmo se  $f$  é aberta. Por exemplo, seja  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção  $f(x,y,z) = (x,y)$  sobre o plano horizontal. Seja  $X \subset \mathbb{R}^3$  a reunião do disco unitário aberto horizontal  $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 < 1\}$  com o ponto  $p = (1,0,1)$ . Então  $X = D \cup \{p\}$  é localmente compacto mas sua projeção horizontal  $f(X) = D \cup \{(1,0)\}$  não é.

Exemplo 29 - Resulta do exemplo acima que se o produto  $M \times N$  é localmente compacto, então  $M$  e  $N$  também o são. Reciprocamente, se  $M$  e  $N$  são localmente compactos então  $M \times N$  também o é. Com efeito, dado arbitrariamente  $z = (x,y) \in M \times N$ , existem vizinhanças compactas  $U \ni x$  em  $M$  e  $V \ni y$  em  $N$ . Então  $U \times V$  é uma vizinhança compacta de  $z$  em  $M \times N$ . É claro que este resultado continua válido para o produto  $M_1 \times \dots \times M_n$  de um número finito qualquer de fatores. Quanto a um produto infinito  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ , deve-se tomar cuidado pois o produto cartesiano de uma infinidade de vizinhanças pode não ser uma vizinhança. Na realidade,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (produto de uma infinidade enumerável de cópias de  $\mathbb{R}$ ) não é localmente compacto. Com efeito, dado qualquer  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , toda vizinhança  $V$  de  $x$  deve conter um a-

berto básico. Logo existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $\epsilon > 0$  tais que  $B(x_1; \epsilon) \times \dots \times B(x_n; \epsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \subset V$ . Em particular  $p_i(V) = \mathbb{R}$  para todo  $i > n$ . Segue-se daí que nenhum ponto  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  possui uma vizinhança compacta. O resultado correto é o seguinte: o produto cartesiano  $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$  é localmente compacto se, e somente se, cada fator  $M_i$  é localmente compacto e, salvo um número finito deles, todos são compactos. Com efeito, se  $M$  é localmente compacto, tomamos  $x \in M$ . Existe uma vizinhança compacta  $V \ni x$ , a qual contém um aberto básico, do tipo  $A_1 \times \dots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$ . Segue-se que  $p_i(V) = M_i$  para todo  $i > n$ . Logo  $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots$  são compactos. Além disso, os demais  $M_i = p_i(M)$  são, pelo menos, localmente compactos porque cada  $p_i$  é aberta, contínua e sobrejetiva. Reciprocamente, se  $M_1, \dots, M_n$  são localmente compactos e  $i > n \Rightarrow M_i$  compacto, então  $\prod_{i>n} M_i$  é compacto, donde  $M = M_1 \times \dots \times M_n \times \prod_{i>n} M_i$  é localmente compacto.

## §9. Espaços vetoriais normados de dimensão finita.

Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados. Um homeomorfismo linear  $f: E \rightarrow F$  é o que o nome diz: uma bijeção linear contínua cuja inversa (automaticamente linear)

também é contínua. As vezes se diz também que uma aplicação nestas condições é um isomorfismo topológico.

Proposição 12 - Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão finita  $n$ . Então:

- 1)  $E$  é linearmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ;
- 2)  $E$  é completo;
- 3) Toda aplicação linear  $f: E \rightarrow F$  é contínua;
- 4) Duas normas quaisquer em  $E$  são equivalentes;
- 5)  $E$  é localmente compacto.

Demonstração: 1) Seja  $\{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $E$ . Definimos  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  pondo  $h(x) =$   
 $= h(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$ . Pela definição de base,  $h$  é uma bijeção linear. Além disso ( $\S 4$  do Capítulo 2),  $h$  é contínua. Para mostrar que  $h^{-1}$  é contínua, devemos obter  $\alpha > 0$  tal que  $|h(x)| \geq \alpha \cdot |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . (Vide Corolário, Proposição 8, Capítulo 2.) Ora, a esfera unitária  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  é compacta e, como  $h$  é linear injetiva, temos  $|h(u)| > 0$  para todo  $u \in S^{n-1}$ . Pelo Corolário da Proposição 4 (Teorema de Weierstrass), existe  $\alpha > 0$  tal que  $|h(u)| \geq \alpha$  para todo  $u \in S^{n-1}$ . Ora, para todo  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$  logo  $|h(x)| = |h(\frac{x}{|x|})| \cdot |x| \geq \alpha \cdot |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2) Todo homeomorfismo linear  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  é um homeomorfismo uniforme. Como  $\mathbb{R}^n$  é completo,  $E$  também é.

3) Seja  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  um homeomorfismo linear. Como toda aplicação linear definida em  $\mathbb{R}^n$ , a aplicação  $f \circ h: \mathbb{R}^n \rightarrow F$  é contínua. Logo  $f = (f \circ h) \circ h^{-1}$  é contínua.

4) Dadas duas normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  em  $E$ , as aplicações identidade  $i_{12}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$  e  $i_{21}: (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$  são lineares e portanto contínuas.

5)  $\mathbb{R}^n$  é localmente compacto, logo  $E$  também é.

Corolário - Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Todo subespaço vetorial de dimensão finita  $F \subset E$  é fechado.

De fato,  $F$  é completo.

Exemplo 30 - Seja  $(p_n)$  uma seqüência de polinômios, todos com grau  $\leq h$ . Então podemos escrever, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p_n(x) = \sum_{i=0}^k a_{ni} x^i$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1)  $(p_n)$  converge uniformemente num intervalo  $[a, b]$ ;
- 2)  $(p_n)$  converge simplesmente em  $k+1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ ;

3) Para cada  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ni} = a_i \in \mathbb{R}$ .

No caso afirmativo,  $\lim p_n$  é o polinômio  $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ .

Com efeito, seja  $P_{k+1}$  o espaço vetorial (de dimensão  $k+1$ ) formado pelos polinômios de grau  $\leq k$ . Dado um polinômio  $q(x) = \sum_{i=0}^k b_i x^i \in P_{k+1}$ , podemos considerar as seguintes normas:  $|q|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |q(x)|$ ,  $|q|_2 = \max\{|q(x_0)|, \dots, |q(x_k)|\}$  e  $|q|_3 = \max\{|b_0|, \dots, |b_k|\}$ . (Para verificar que são normas, usa-se o fato de que um polinômio de grau  $\leq k$  que se anula em  $k+1$  pontos distintos é identicamente nulo.) Estas três normas determinam em  $P_{k+1}$  os três tipos de convergência expressos pelas condições 1), 2) e 3) acima. Como as normas são equivalentes, segue-se que  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ . Além disso, se, por exemplo,  $p_n \rightarrow p$  uniformemente em  $[a, b]$ , como  $P_{k+1}$  é fechado em  $C([a, b]; \mathbb{R})$ , segue-se que  $p \in P_{k+1}$ . A forma de  $p$  é dada por 3).

Para encerrar, demonstraremos o Teorema de Riesz, segundo o qual nenhuma bola num espaço vetorial normado de dimensão infinita é compacta.

Lembremos que, num espaço vetorial normado, duas bolas fechadas quaisquer são homeomorfas, de modo que uma delas é compacta se, e somente se, todas são. (No caso afirmativo, o espaço é localmente compacto.)

Lema - Seja  $F$  um subespaço vetorial fechado de um espaço vetorial normado  $E$ . Se  $F \neq E$  então, para todo  $\epsilon > 0$  dado, pode-se obter um vetor  $u \in E$  com  $|u| = 1$  e  $d(u, F) \geq 1 - \epsilon$ .

Demonstração: Tomemos  $x \in E - F$ . Como  $F$  é fechado, temos  $d(x, F) > 0$ . Escolhemos  $y \in F$  bem próximo de  $x$ : com  $|x-y| < d(x, F) + \delta$ , onde  $\delta > 0$  será determinado logo mais. Escrevamos  $u = \frac{x-y}{|x-y|}$ . Então  $|u| = 1$  e, para todo  $y' \in F$ , levando em conta que  $y'' = y + |x-y|y' \in F$ , vem:

$$|u-y'| = \frac{|x-y-|x-y||y'|}{|x-y|} = \frac{|x-y''|}{|x-y|} \geq \frac{d(x, F)}{d(x, F)+\delta}.$$

Como o último quociente acima tem limite 1 quando  $\delta \rightarrow 0$ , segue-se que podemos escolher  $\delta > 0$  tal que ele seja  $\geq 1 - \epsilon$ . Então, para todo  $y' \in F$ , temos  $|u-y'| \geq 1 - \epsilon$ , o que significa  $d(u, F) \geq 1 - \epsilon$ .

Proposição 13 (Teorema de Riesz) - Todo espaço vetorial normado localmente compacto  $E$  tem dimensão finita.

Demonstração: A esfera unitária  $S = \{u \in E; |u| = 1\}$  é compacta. Usaremos repetidamente o lema acima, com  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Sejam  $u_1 \in S$  e  $F_1$  o subespaço vete-

rial (fechado) gerado por  $u_1$ . Se  $F_1 \neq E$ , existe  $u_2 \in S$  com  $d(u_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$ . Em particular,  $|u_2 - u_1| \geq \frac{1}{2}$ . Seja  $F_2$  o subespaço vetorial (fechado) gerado por  $\{u_1, u_2\}$ . Se  $F_2 \neq E$ , existe  $u_3 \in S$ , com  $d(u_3, F_2) \geq \frac{1}{2}$ . Em particular,  $|u_3 - u_2| \geq \frac{1}{2}$  e  $|u_3 - u_1| \geq \frac{1}{2}$ . Prosseguindo assim, ou chegaremos a um conjunto finito de vetores  $u_1, \dots, u_n$  que geram  $E$  (e então  $E$  tem dimensão finita) ou obtemos uma seqüência de vetores unitários  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  tais que  $|u_m - u_n| \geq \frac{1}{2}$  para  $m \neq n$  quaisquer (e então a esfera unitária  $S$  não é compacta).

#### §10. Eqüicontinuidade.

Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  tem fecho compacto se, e somente se, é limitado. Um subconjunto  $X \subset C(K; N)$ , onde  $K$  é compacto, pode ser limitado e fechado sem ser compacto. Neste parágrafo mostraremos que a propriedade conhecida como eqüicontinuidade é a condição adicional que precisa cumprir um subconjunto limitado  $X \subset C(K; N)$  para ter fecho compacto.

Exemplo 31 - A bola unitária fechada  $D \subset C([0,1]; \mathbb{R})$  é formada pelas funções contínuas  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

tais que  $|f(x)| \leq 1$  para todo  $x \in [0,1]$ . D, embora limitado e fechado, não é compacto porque o espaço vetorial normado  $C[0,1];\mathbb{R}$ ) tem dimensão infinita. De fato, as funções  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f_n(x) = x^n$  são linearmente independentes, para  $n = 1, 2, \dots$ . Para verificar diretamente que D não é compacto basta considerar a seqüência de funções contínuas  $g_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $g_n(x) = 0$  se  $0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $g_n(x) = 1$  se  $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$  e  $g_n(x)$  linear, do tipo  $ax + b$ , se  $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$ . (Isso obriga  $g_n(x) = n(n+1)x - n$  nesse intervalo. O leitor deve traçar o gráfico de  $g_n$ .) Então  $\|g_m - g_n\| = 1$  se  $m \neq n$  e  $\|g_n\| = 1$  para todo  $n$ . Logo D não é compacto.

Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações  $f: M \rightarrow N$ . O conjunto E diz-se equicontínuo no ponto  $a \in M$  quando, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  em M implique  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ , seja qual for  $f \in E$ .

A essência da definição acima reside no fato de que a escolha de  $\delta$  a partir do  $\epsilon$  dado é a mesma para todas as aplicações f pertencentes ao conjunto E.

Evidentemente, se E é equicontínuo no ponto a, então todas as aplicações  $f \in E$  são contínuas nesse ponto.

Um conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  chama-se eqüicontínuo quando é eqüicontínuo em todos os pontos de  $M$ .

Uma seqüência de aplicações  $f_n: M \rightarrow N$  diz-se eqüicontínua no ponto  $a \in M$  (respect. eqüicontínua) quando o conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$  o for.

Exemplo 32 - Se  $M$  é discreto, todo conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  é eqüicontínuo: dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  em  $M$  implique  $x = a$ . Todo conjunto finito  $E = \{f_1, \dots, f_n\}$  de aplicações  $f_i: M \rightarrow N$  contínuas (num ponto  $a \in M$ ) é eqüicontínuo (no ponto  $a$ ). De fato, dado  $\epsilon > 0$  existe, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\delta_i > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Então  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$  para toda  $f \in E$ . De modo análogo se mostra que a reunião  $E_1 \cup \dots \cup E_n$  de um número finito de conjuntos eqüicontínuos é um conjunto eqüicontínuo. É evidente que todo subconjunto de um conjunto eqüicontínuo é eqüicontínuo.

Exemplo 33 - O caso mais freqüente de conjunto eqüicontínuo ocorre quando se tem uma constante  $c > 0$  e toda aplicação  $f: M \rightarrow N$  pertencente ao conjunto  $E$  cumpre a condição de Lipschitz  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ .

Mais geralmente, se, para cada ponto  $x \in M$  existem uma bola  $B_x = B(x; r_x)$  e uma constante  $c_x > 0$  tais que  $d(f(y), f(z)) \leq c_x \cdot d(y, z)$  para  $y, z \in B_x$  e  $f \in E$  quaisquer, então o conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  é equicontínuo. Um exemplo dessa situação é dado por um conjunto  $E$  de funções  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , deriváveis num intervalo  $I$ , tais que  $|f'(x)| \leq c$  para toda  $f \in E$  e todo  $x \in I$  ou, mais geralmente, quando cada ponto de  $I$  é centro de um intervalo menor, no qual as derivadas das funções pertencentes a  $E$  são limitadas (em valor absoluto) por uma constante. A seqüência de funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , é equicontínua.

Exemplo 34 - Se uma seqüência equicontínua de aplicações

$f_n: M \rightarrow N$  converge simplesmente para  $f: M \rightarrow N$  então o conjunto  $\{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$  é equicontínuo. Com efeito, dados  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e portanto  $d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$ . Note, em particular, que  $f$  é contínua.

Lema - Se uma seqüência equicontínua de aplicações

$f_n: M \rightarrow N$  converge simplesmente em  $M$ , então a convergência é uniforme em cada parte compacta  $K \subset M$ .

Demonstração: Supondo  $f_n \rightarrow f$  simplesmente, seja dado  $\epsilon > 0$ . Para cada  $x \in M$  existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_x \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Pelo Exemplo 34 acima,  $\{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$  é eqüicontínuo. Logo cada  $x \in M$  pertence a uma bola aberta  $B_x$  tal que  $y \in B_x \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{3}$  e  $d(f(y), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Da cobertura aberta  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$  extraímos a subcobertura finita  $K \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_p}$ . Seja  $n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_p}\}$ . Afirmamos que  $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in K$ . Com efeito, se  $n > n_0$  e  $x \in K$ , então existe  $i$ , com  $1 \leq i \leq p$ , tal que  $x \in B_{x_i}$ . Logo  $d(f_n(x), f_n(x_i)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Assim,  $d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon$ .

Proposição 14 - Dada uma seqüência eqüicontínua de aplicações  $f_n: M \rightarrow N$ , suponhamos que, para cada  $x \in M$ , o conjunto  $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$  tenha fecho completo em  $N$ . Se  $(f_n)$  converge simplesmente num subconjunto denso  $D \subset M$  então  $(f_n)$  converge uniformemente em cada parte compacta de  $M$ .

Demonstração: Mostraremos, em primeiro lugar, que  $(f_n)$  converge simplesmente em todo o espaço. Para isso, basta verificar que, tomado arbitrariamente  $x \in M$ , a seqüência  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $N$ . Ora, dado

$\epsilon > 0$  existe, pela eqüicontinuidade, uma bola  $B = B(x; r)$  tal que  $y \in B \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{3}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escolhamos um  $y \in B$ . Como  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(y), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ . Então:  $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < \epsilon$ . Segue-se então do lema anterior que  $(f_n)$  converge uniformemente em cada parte compacta de  $M$ .

Exemplo 35 - A seqüência de funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , é eqüicontínua e converge simplesmente para 0 em  $\mathbb{R}$  mas a convergência não é uniforme em toda a reta.

Um conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  diz-se uniformemente eqüicontínuo quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta$  em  $M \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$  para toda  $f \in E$ .

Uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$  que não seja uniformemente contínua nos fornece um exemplo de um conjunto eqüicontínuo  $E = \{f\}$  que não é uniformemente eqüicontínuo.

Proposição 15 - Se  $K$  é compacto, todo conjunto eqüicontínuo de aplicações  $f: K \rightarrow N$  é uniformemente eqüicontínuo.

Demonstração: Dado  $\epsilon > 0$ , cada ponto  $x \in K$  é centro de uma bola  $B_x$  tal que  $y \in B_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$  para toda  $f \in E$ . Então  $y, z \in B_x \Rightarrow d(f(y), f(z)) < \epsilon$  para toda  $f \in E$ . Seja  $\delta$  um número de Lebesgue da cobertura  $K = \bigcup_{x \in K} B_x$ . Se  $y, z \in K$  são tais que  $d(y, z) < \delta$ , existe algum  $x \in K$  com  $y, z \in B_x$ . Logo  $d(y, z) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(z)) < \epsilon$ .

Dados um conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  e um ponto  $x \in M$ , poremos  $E(x) = \{f(x); f \in E\}$ . Assim,  $E(x)$  é o subconjunto de  $N$  formado pelos valores que as aplicações  $f \in E$  assumem no ponto  $x$ . Por exemplo, quando  $M = N = \mathbb{R}$ ,  $E(x)$  pode ser visualizado geometricamente tomando-se a reta vertical que passa pelo ponto  $(x, 0)$  e vendo em que pontos ela corta os gráficos das funções  $f \in E$ .

Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  chama-se relativamente compacto quando seu fecho  $\bar{X}$  é compacto. Isto significa que toda seqüência de pontos  $x_n \in X$  possui uma subseqüência convergente em  $M$  (podendo ocorrer que o limite dessa subseqüência não pertença a  $X$ ).

Se  $X \subset M$  é relativamente compacto e  $f: M \rightarrow N$  é contínua, então  $f(X) \subset N$  é relativamente compacto. Com efeito, sendo  $\bar{X}$  compacto,  $f(\bar{X})$  é compacto. Em particular,  $f(\bar{X})$  é fechado em  $N$ . Como  $f(X) \subset f(\bar{X})$ , segue-

se que  $\overline{f(X)} \subset f(\bar{X})$  e portanto  $\overline{f(X)}$  é compacto. [Na realidade, para qualquer subconjunto  $X \subset M$ , a continuidade de  $f$  garante  $f(\bar{X}) \subset \overline{f(X)}$ , de modo que, para  $X$  relativamente compacto, temos  $f(\bar{X}) = \overline{f(X)}$ .]

Proposição 16 (Teorema de Ascoli-Arzela) - Seja E um conjunto de aplicações contínuas  $f: K \rightarrow N$ , onde K é compacto. A fim de que  $E \subset C(K;N)$  seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:

- 1º) E seja eqüicontínuo;
- 2º) Para cada  $x \in K$ , o conjunto  $E(x)$  seja relativamente compacto em N.

Demonstração: Suponhamos, em primeiro lugar, que  $E \subset C(K;N)$  seja relativamente compacto. Fixado  $x \in M$ , a aplicação  $v_x: C(K;N) \rightarrow N$ , dada por  $v_x(f) = f(x)$ , é uma contração, e portanto é contínua. Como  $E(x) = v_x(E)$ , segue-se que  $E(x)$  é relativamente compacto. Sejam agora  $a \in K$  e  $\epsilon > 0$ . A função  $\varphi: \bar{E} \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(f, x) = d(f(x), f(a))$ , também é contínua. Usando apenas a compacidade de  $\bar{E}$ , a Proposição 5 nos permite obter  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$  para toda  $f \in \bar{E}$ . Logo  $\bar{E}$  (e portanto  $E$ ) é eqüicontínuo em qualquer ponto  $a \in K$ . Isto mostra que as condições 1º) e 2º)

acima são necessárias para a compactade de  $E$ . Reciprocamente, supondo satisfeitas estas condições, tomemos um subconjunto enumerável  $D = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$  denso em  $K$ . (Vide Corolário 3, Proposição 7.) Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $L_i = \overline{E(x_i)} \subset N$ . O produto cartesiano  $\prod_{i=1}^{\infty} L_i$  é compacto (Teorema de Cantor-Tychonov). Para cada  $f \in E$ , chamemos de  $f'$  o ponto de  $\prod L_i$  cuja  $i$ -ésima coordenada é  $f(x_i)$ . [Essencialmente,  $f'$  é a restrição de  $f$  a  $D$ .] Uma seqüência de aplicações  $f_n \in E$  converge simplesmente em  $D$  se, e somente se,  $(f'_n)$  converge em  $\prod L_i$ . A compactade de  $\prod L_i$  garante então que toda seqüência de aplicações  $f_n \in E$  possui uma subseqüência que converge simplesmente em  $D$  e portanto uniformemente em  $K$ . (Vide Proposição 14.) Logo  $E \subset C(K; N)$  é relativamente compacto.

Observação: Dada uma aplicação  $\alpha: M \rightarrow N$ , seja  $C_{\alpha}(M; N)$  o conjunto das aplicações contínuas  $f: M \rightarrow N$  tais que  $d(f, \alpha) = \sup_{x \in M} d(f(x), \alpha(x)) < +\infty$ . Munindo  $C_{\alpha}(M; N)$  da métrica do sup., a demonstração acima mostra que  $E \subset C_{\alpha}(M; N)$  relativamente compacto  $\Rightarrow E$  equicontínuo e  $E(x)$  relativamente compacto, sem ser necessário fazer a hipótese de  $M$  compacto.

O Teorema de Ascoli-Arzelá, conforme enunciado acima, não é válido para aplicações definidas num espaço não-compacto. Com efeito, a seqüência de funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

dadas por  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ , é equicontínua e, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$  é relativamente compacto. Mas nenhuma subsequência de  $(f_n)$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Por outro lado,  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente em cada parte compacta. A Proposição 16, usada diretamente, nos diz que, dada uma seqüência equicontínua de aplicações  $f_n: M \rightarrow N$ , com  $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$  relativamente compacto para cada  $x \in M$ , então, para cada compacto  $K \subset M$  pode-se obter uma subsequência  $(f_{n_k})_{n \in \mathbb{N}_K}$ , uniformemente convergente em  $K$ . Isto, porém, é insatisfatório. Gostaríamos de obter uma subsequência  $(f_{n_i})_{n \in \mathbb{N}_1}$  que convergisse uniformemente (a mesma subsequência!) em cada compacto  $K \subset M$ . Isto é possível de conseguir mediante uma restrição conveniente sobre  $M$ .

Até o fim desta secção suporemos que o espaço métrico  $M$  satisfaz à seguinte condição:

(C)  $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_i \cup \dots$  onde cada  $K_i$  é compacto e  $K_i \subset \text{int. } K_{i+1}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Exemplo 36 - O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  satisfaz à condição (C). Basta tomar  $K_i = \text{bola fechada de centro } 0 \text{ e raio } i$ . Se  $M$  satisfaz (C) então  $M$  é localmente compacto pois  $x \in M \Rightarrow x \in K_i$  para algum  $i \Rightarrow K_{i+1}$  é uma vizinhança compacta de  $x$ . Logo  $Q$ , por exemplo,

não cumpre a condição (C), embora seja uma reunião enumerável de compactos (seus pontos).

Observamos que se um espaço  $M$  cumpre a condição (C) então todo compacto  $K \subset M$  está contido em algum dos  $K_i$ . Com efeito, a cobertura aberta  $K \subset M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int. } K_i$  admite uma subcobertura finita  $K \subset \text{int. } K_{i_1} \cup \dots \cup \text{int. } K_{i_p}$ , com  $i_1 < \dots < i_p$ . Logo  $K \subset \text{int. } K_{i_p} \subset K_{i_p}$ .

Assim, se  $M$  cumpre (C), dizer que uma seqüência de aplicações  $f_n: M \rightarrow N$  converge uniformemente em cada um dos  $K_i$  é o mesmo que afirmam que  $(f_n)$  converge uniformemente em cada parte compacta  $K \subset M$ .

Se o espaço métrico  $M$  cumpre (C), dado qualquer espaço métrico  $N$ , definiremos uma métrica  $d^*$  no espaço  $C(M;N)$  das aplicações contínuas  $f: M \rightarrow N$ , de modo que  $\lim f_n = f$  segundo essa métrica se, e somente se,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em cada parte compacta  $K \subset M$ .

Dadas  $f, g: M \rightarrow N$  contínuas poremos, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i = f|_{K_i}$  e  $g_i = g|_{K_i}$ . Logo,  $d(f_i, g_i) = \sup_{x \in K_i} d(f(x), g(x))$ . E definiremos:

$$d^*(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f_i, g_i)}{1+d(f_i, g_i)}.$$

Escreveremos  $C_c(M;N) = (C(M;N), d^*)$  para indicar o espaço

métrico formado pelas aplicações contínuas  $f: M \rightarrow N$ , com a métrica  $d^*$ .

É interessante observar que a aplicação natural

$$\varphi: C_c(M; N) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} C(K_i; N),$$

dada por  $\varphi(f) = (f|_{K_i})_{i \in \mathbb{N}} = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , é uma imersão isométrica, se considerarmos o produto cartesiano  $\prod_i C(K_i; N)$  munido da métrica usual  $d(u, v) = \sum \frac{d(u_i, v_i)}{2^i \frac{1}{1+d(u_i, v_i)}}$ , onde  $u = (u_i)$  e  $v = (v_i)$ .

Como a convergência no produto cartesiano é convergência coordenada por coordenada e a convergência em cada fator  $C(K_i; N)$  é convergência uniforme em  $K_i$ , segue-se que  $\lim f_n = f$  em  $C_c(M; N)$  se, e somente se,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em cada  $K_i$ , ou seja, em cada parte compacta  $K \subset M$ .

Para uso abaixo, registremos o seguinte

Lema - A imagem  $F$  da imersão isométrica  $\varphi$  é um subconjunto fechado de  $\prod_i C(K_i; N)$ .

Demonstração:  $F$  é formado pelas seqüências  $u = (u_i)$  tais que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $u_i: K_i \rightarrow N$  é contínua e  $i < j \Rightarrow u_i = u_j|_{K_i}$ . Portanto  $u \in \bar{F} \Rightarrow u = \lim u_n$ , onde cada  $u_n \in F$ . Logo  $u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{ni}$  uniformemente, para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Assim  $i < j \Rightarrow u_i = u_j = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{ni} =$

$= \lim_n u_{nj}|_{K_i} = u_j|_{K_i}$ . Portanto  $u \in \bar{F} \Rightarrow u \in F$ .

Podemos agora enunciar e demonstrar a forma abaixo do Teorema de Ascoli-Arzelá, que inclui a Proposição 16 como caso particular.

Proposição 17 - Se  $M = \bigcup K_i$  é uma reunião enumerável de compactos, com  $K_i \subset \text{int. } K_{i+1}$  para cada  $i$ , então um conjunto  $E \subset C_c(M; N)$  é relativamente compacto se, e somente se:

1º)  $E$  é equicontínuo;

2º)  $E(x) \subset N$  é relativamente compacto, para cada  $x \in M$ .

Demonstração: Usando a isometria  $\varphi: C_c(M; N) \rightarrow F \subset \prod_i C(K_i; N)$ , vemos que  $E$  relativamente compacto  $\Leftrightarrow \varphi(E)$  relativamente compacto em  $F \Leftrightarrow \varphi(E)$  relativamente compacto em  $\prod_i C(K_i; N)$ , pois  $F$  é fechado.  
Ora, um subconjunto  $X \subset \prod_i Y_i$  é relativamente compacto se, e somente se, cada projeção  $p_i(X) \subset Y_i$  é relativamente compacta. (Verificação imediata, a partir de Cantor-Tychonov.) Ora,  $p_i(\varphi(E)) = E|_{K_i} (= \{f|_{K_i}; f \in E\})$  e os itens 1º) e 2º) são válidos para  $E$  se, e somente se, são válidos para cada  $E|_{K_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Logo a Proposição 17 decorre da Proposição 16.

Um conjunto  $E$  de aplicações  $f: M \rightarrow N$  diz-se pontualmente limitado quando, para cada  $x \in M$ , o conjunto  $E(x) \subset N$  é limitado. Definição análoga se dá para seqüência pontualmente limitada.

Corolário - Seja  $M$  como na Proposição 17. Toda seqüência eqüicontínua e pontualmente limitada de aplicações  $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada parte compacta de  $M$ .

Com efeito, todo subconjunto limitado do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^k$  é relativamente compacto. Logo  $E = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$  cumpre as condições da Proposição 17.

Exemplo - Algumas das aplicações mais interessantes do Teorema de Ascoli-Arzelá ocorrem na teoria das funções de uma variável complexa devido ao fato de que todo conjunto limitado de funções holomorfas é eqüicontínuo. Mais precisamente, seja  $U$  um subconjunto aberto do plano  $\mathbb{R}^2$ , que identificaremos com o corpo dos números complexos. Seja  $E$  um conjunto de funções holomorfas  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  (isto é, funções que possuem derivadas, no sentido dos números complexos, em todos os pontos de  $U$ ). Suponhamos que, para cada compacto  $K \subset U$ , existe uma

constante  $c = c_K > 0$  tal que  $z \in K, f \in E \Rightarrow |f(z)| \leq c$ . Diz-se então que as funções  $f \in E$  são uniformemente limitadas em cada compacto  $K \subset U$ . Afirmamos que, neste caso,  $E$  é equicontínuo. Com efeito, dado  $z_0 \in U$ , seja  $K = \{w \in \mathbb{R}^2; |w-z_0| \leq 2r\}$  um disco fechado de centro  $z_0$  e raio  $2r$ , contido em  $U$ . Sejam  $c = c_K$  e  $B = B[z_0; r]$ . Mostremos que  $z \in B \Rightarrow |f'(z)| \leq 2c/r$ . De fato, chamando de  $C = \{w \in \mathbb{R}^2; |w-z_0| = 2r\}$  o bordo de  $K$ , a fórmula integral de Cauchy nos dá, para todo  $z \in B$ :

$$|F'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(z-w)^2} dw \right| \leq \frac{c}{2\pi r^2} \cdot 4\pi r = \frac{2c}{r},$$

pois, para todo  $w \in C$ ,  $|z-w| \geq r$  e  $|f(w)| \leq c$ .

Segue-se do Teorema do Valor Médio que  $|f(z)-f(w)| \leq \frac{2c}{r} |z-w|$  para  $z, w \in B$  quaisquer. Portanto  $E$  é equicontínuo.

Concluimos então do Teorema de Ascoli-Arzela (Proposição 17) que uma seqüência de funções holomorfas  $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , uniformemente limitadas em cada parte compacta de  $U$ , possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de  $U$ . O limite da subseqüência é necessariamente uma função holomorfa em  $U$ , em virtude do Teorema de Morera. As derivadas das funções da subseqüência também convergem uniformemente em cada parte compacta de  $U$ , em virtude da fórmula de Cauchy.