Pontificia Universidad Javeriana

Análisis Matemático I — ID 1074

Profesor: Humberto Rafeiro — Primer Período de 2015

№1: Inducción matemática y propiedades básicas de los números reales.

Índice de ejercicios

Ejercicio 1 Inducción

Demuestre que:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $\binom{n}{k}$ son definidos por la ecuación (1).

Ejercicio 2 Binomio de Newton

Sea $\binom{n}{k}$ los coeficientes binomiales dados por

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}. \tag{1}$$

Pruebe:

1. La validad de la formula
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{2}$$
2. Utilizando la formula (2), demuestre el *binomio de Newton*
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$
para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicio 3 Suma parcial de Abel

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $b_0, b_1, \ldots b_n$ números reales y

$$A_k := \sum_{i=0}^{k} a_i, \quad B_k := \sum_{i=0}^{k} b_i,$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$. Pruebe la formula de la *suma parcial de Abel* dada por

$$\sum_{k=0}^{n} A_n b_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k.$$

Ejercicio 4 Principio de inducción

Pruebe que el *principio de inducción* se puede obtener del principio de buena ordenación.

Ejercicio 5 Cardinalidad de $\mathscr{P}(X)$

Sea $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de las partes de X. Pruebe, utilizando el método de inducción, que si X es finito entonces $\#(\mathscr{P}(X)) = 2^{\#(X)}$, donde $\#(A)$ es la cardinalidad del conjunto A.

Ejercicio 6 Cardinalidad de Y^X

Denotemos por Y^X el conjunto de todas las funciones $f : X \longrightarrow Y$. Pruebe que si $\#(X) = m$ y $\#(Y) = n$, entonces tenemos que $\#(Y^X) = n^m$. (Esto justifica la utilización de la notación Y^X para el conjunto de todas las funciones de X en Y.)

Ejercicio 7 Suma geometrica

Pruebe que

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

para todo $n \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Ejercicio 8 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Pruebe la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Sugerencia: Utilizar el hecho que $\sum_{k=1}^{n}(x_k + \lambda y_k)^2 \geq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.