

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kommutative Ringe</b>	<b>3</b>
1.1	Ringe . . . . .	3
1.2	Einheiten, Teilbarkeit, Quotientenkörper (Seite 34) . . . . .	5
1.3	Ring der Polynome (Seite 41) . . . . .	7
1.4	Ideale und Faktorringe . . . . .	11
1.5	Charakteristik eines Körpers . . . . .	15
1.6	Primideale und Maximalideale . . . . .	15
1.7	Unterring . . . . .	17
1.8	Matrizen . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Faktorisierungen von Ringen</b>	<b>20</b>
2.1	Euklidische Ringe . . . . .	20
2.2	Hauptidealring . . . . .	23
2.3	Faktorielle Ringe . . . . .	26
2.4	Einige algebraische Euklidische Ringe . . . . .	29
2.5	Polynomringe . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Gruppentheorie</b>	<b>40</b>
3.1	Definition und Beispiele . . . . .	40
3.2	Konjugation . . . . .	43
3.3	Untergruppen und Erzeuger . . . . .	44
3.4	Nebenklassen und Quotienten . . . . .	46
3.5	Gruppenwirkungen . . . . .	50
3.6	Nilpotente und auflösbare Gruppen . . . . .	52
3.7	Satz von Sylow . . . . .	54
3.8	Symmetrische und Alternierende Gruppen . . . . .	56
3.9	Gruppen kleiner Ordnung & Klassifikation . . . . .	60
3.10	Freie Gruppen und Relationen . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Modultheorie</b>	<b>62</b>
4.1	Definition & Beispiel . . . . .	62
4.2	Freie Moduln . . . . .	64
4.3	Torsionsmoduln . . . . .	64
4.4	Struktur von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringe . . . . .	65
4.5	Endlich erzeugte abelsche Gruppen . . . . .	70
4.6	Jordan-Normalform . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Körpertheorie</b>	<b>72</b>
5.1	Körpererweiterungen . . . . .	72
5.2	Zerfällungskörper . . . . .	75
5.3	Algebraischer Abschluss . . . . .	76
5.4	Eindeutigkeit . . . . .	77
5.5	Endliche Körper . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Galois Theorie</b>	<b>83</b>
6.1	Einleitung . . . . .	83
6.2	Galois Gruppe einer Körpererweiterung: grundlegende Eigenschaften und Beispiele	84
<b>A</b>	<b>Auswahlaxiom und das Zornsche Lemma</b>	<b>86</b>

# Kapitel 1: Kommutative Ringe

## 1.1 Ringe

**Definition.** Ein *Ring* ist eine Menge  $R$  ausgestattet mit Elementen  $0 \in R$ ,  $1 \in R$  und drei Abbildungen

$$\begin{cases} + : R \times R \rightarrow R \\ - : R \rightarrow R \\ \cdot : R \times R \rightarrow R \end{cases}$$

so dass folgende Axiome gelten.

$(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0$  und Inversem  $-$  d.h.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ 0 + a &= a \\ (-a) + a &= 0 \\ a + b &= b + a \end{aligned}$$

für alle  $a, b, c \in R$ .

$(R, \cdot)$ : Assoziativität  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  und Einselement  $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ .

Distributivität:  $a(b + c) = ab + ac$  und  $(b + c)a = ba + ca$ .

Falls zusätzlich Kommutativität von  $\cdot$  gilt:  $ab = ba$ , dann sprechen wir von einem *kommutativen Ring*.

*Bemerkung.* •  $0$  ist eindeutig durch die Axiome bestimmt.

- Ebenso ist  $-a$  durch die Axiome für jedes  $a \in R$  eindeutig bestimmt.
- $0 \neq 1$  wurde nicht verlangt.
- $0 \cdot a = 0$  für jedes  $a \in R$  :

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 = 0 \cdot a.$$

*Konvention.* • Klammern bei  $+$  (und ebenso bei  $\cdot$ ) lassen wir auf Grund der Assoziativität der Addition (Mult.) weg also  $a + b + c + d$ .

- Punktrechnung vor Strichrechnung, d.h.  $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c$ .
- Den Multiplikationspunkt lässt man oft weg.

*Notation.*

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= 0 & 1 \cdot a &= a & 2 \cdot a &= a + a & 3 \cdot a &= a + a + a \\ (n + 1) \cdot a &= n \cdot a + a, & (-n) \cdot a &= -(n \cdot a) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dies definiert eine Abbildung  $\mathbb{Z} \times R \rightarrow R$ ,  $(n, a) \mapsto n \cdot a$ . Diese erfüllt:  $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$ ,  $n \cdot (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$ .

Ebenso definieren wir

$$a^0 = 1_R \quad a^1 = a \quad a^2 = a \cdot a \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Diese erfüllt

$$a^{m+n} = a^m + a^n \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

in kommutativen Ringen.

**Definition.** Angenommen  $R, S$  sind Ringe und  $f : R \rightarrow S$  ist eine Abbildung. Wir sagen  $f$  ist ein *Ringhomomorphismus* falls

$$f(1_R) = 1_S \quad f(a+b) = f(a) + f(b) \quad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

für alle  $a, b \in R$ . Falls  $f$  invertierbar ist, so nennen wir  $f$  einen *Ringisomorphismus*.

*Bemerkung.*  $f(0_R = 0_S)$  denn  $f(0_R) = f(0+0) = f(0) + f(0) \geq 0_S = f(0_R)$ .  
 $f(-a) = -f(a)$  für  $a \in R$  (ähnlicher Beweis).

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $S \subseteq R$  auch ein Ring. Wir sagen  $S$  ist ein *Unterring*, falls  $\text{id} : S \rightarrow R, s \mapsto s$  ein Ringhomomorphismus ist.

**Beispiel (Ringe).** (1)  $R = \{0\}$ . Hier ist  $0 = 1$ .  
 (2)  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  sind jeweils Unterringe.  
 (3) Sei  $V$  ein Vektorraum, dann ist

$$\text{End}(V) = \{f : V \rightarrow V \text{ linear}\}$$

ein Ring, wobei  $+$  punktweise definiert wird und  $\cdot$  die Verknüpfung ist.

- (4)  $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{Q})$  bzw.  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ .  
 (5) Sei  $m \geq 1$ . Dann ist  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/Z_m$  ein Ring. Wenn dies die Übersicht erhöht können wir die Restklasse  $[a]_{\equiv \text{ mod } m}$  einer Zahl  $a$  einfach mit  $\bar{a}$ . In dieser Notation haben wir

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

- (6)  $\mathbb{Z}$ -adjungiert- $i : \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ .  
 $\mathbb{Z}$ -adjungiert- $\sqrt{2} : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ .

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

- (7) Sei  $X$  eine Menge und  $R = \mathbb{Z}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{Z}\}$  mit punktweise Operationen. Dies ist ein kommutativer Ring z.B.  $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ .  
 Antibeispiel:  $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig und } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$  ist kein Ring

**Beispiel (Ringhomomorphismen).** (1)  $R = \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}, 0 \mapsto 0, 0_R = 1_R \mapsto f(1_R) = f(0_R) = 0_{\mathbb{Z}} \neq 1_{\mathbb{Z}}$   
 (2)  $R \rightarrow \{0\}, a \mapsto 0$  ist ein Ringhomomorphismus.  
 (3)  $\mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto n \cdot 1_R$  ist ein Ringhomomorphismus.  
 (4)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  da Unterringe.  
 (5)  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}), t \mapsto tI_n$ . Umgekehrt geht nicht.  
 (6)  $C([0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x_0)$  für ein festes  $x_0 \in [0, 1]$   
 (7)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m, a \mapsto \bar{a}$   
 (8)  $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n), A \mapsto (x \in \mathbb{C}^n \mapsto Ax)$  ist ein Ringisomorphismus.

**Lemma.** Falls in einem Ring  $R$  gilt  $0 = 1$ , dann ist  $R = \{0\}$ .

*Beweis.* Sei  $a \in R$ . Dann gilt  $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$  □

**Lemma (Binomialformel).** Sei  $R$  ein Ring und  $a, b \in R$  mit  $ab = ba$  (z.B. weil  $R$  kommutativ ist). Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

*Beweis.* Die Eigenschaften von  $\binom{n}{k}$  sind bekannt, und damit funktioniert der übliche Beweis.  $\square$

Falls  $n = 2$  ist und  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  gilt. Dann folgt  $ab = ba$ .

$\triangle$  **Achtung.** Ab nun werden wir nur kommutative Ringe betrachten.

## 1.2 Einheiten, Teilbarkeit, Quotientenkörper (Seite 34)

**Beispiel.** In  $\mathbb{Z}_{15}$  gilt  $\bar{3} \cdot \bar{15} = \bar{15} = \bar{0}$  aber  $\bar{3} \neq \bar{0} \neq \bar{5}$ .

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Ein Element  $a \in R \setminus \{0\}$  heißt ein Nullteiler falls es ein  $b \in R \setminus \{0\}$  mit  $ab = 0$  gibt.

**Definition.** Ein kommutativer Ring heißt ein Integritätsbereich falls  $0 \neq 1$  und falls aus  $ab = ac$  und  $a \neq 0$   $b = c$  folgt (Kürzen).

**Lemma.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit  $0 \neq 1$ . Dann ist  $R$  ein Integritätsbereich gdw.  $R$  keine Nullteiler besitzt.

*Beweis.* Angenommen  $R$  ist ein Integritätsbereich und  $a \in R \setminus \{0\}, b \in R$  erfüllt  $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = a \cdot 0 \Rightarrow b = 0$ . Also kann es keine Nullteiler geben.

Angenommen  $R$  hat keine Nullteiler und  $a, b, c \in R, a \neq 0$  erfüllen  $ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0, a(b - c) = 0 \Rightarrow b = c$ .  $\square$

**Beispiel.** 1.  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$   
2. Antibeispiel:  $C([0, 1])$  ist kein Integritätsbereich.  
3. Wann ist  $\mathbb{Z}_m$  ein Integritätsbereich?

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $a, b \in R$ . Wir sagen  $a$  teilt  $b$ ,  $a|b$  [in  $R$ ] falls es ein  $c$  in  $R$  gibt mit  $b = a \cdot c$ .

**Definition.** Wir sagen  $a \in R$  ist eine *Einheit* falls  $a|1 \Leftrightarrow \exists b$  mit  $ab = 1 \Leftrightarrow \exists a^{-1} \in R$ . Einheiten mit  $R^\times = \{a \in R \mid a|1\}$

*Bemerkung.*  $R^\times$  bildet eine Gruppe,  $1 \in R^\times, a, b \in R^\times \Rightarrow (ab)(a^{-1}b^{-1}) = aa^{-1}bb^{-1} = 1 \Rightarrow ab \in R^\times$ .

**Beispiel.** 1.  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$   
2.  $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$   
3.  $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$   
4.  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = ?$ . Auf jedenfall enthält es  $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 1$ .

**Definition.** Ein *Körper (field)*  $K$  ist ein kommutativer Ring in dem  $0 \neq 1$  und jede Zahl ungleich Null eine multiplikative Inverse besitzt.

**Lemma.** Ein Körper ist ein Integritätsbereich.

*Beweis.* Angenommen  $a \neq 0, b, c \in R$ .

$$ab = ac \stackrel{a^{-1}}{\Rightarrow} a^{-1}ab = a^{-1}ac \Rightarrow b = c.$$

$\square$

**Proposition.** Sei  $m \geq 1$  eine natürliche Zahl. Dann ist  $\mathbb{Z}_m$  ein Körper genau dann wenn  $m$  eine Primzahl ist.

*Beweis.* Falls  $m = 1$  ist, dann ist  $\mathbb{Z}_1 = \{\bar{0}\}$  sicher kein Körper (da  $0 \neq 1$  gelten muss). Falls  $m = ab$  mit  $a, b < m$ , dann ist  $\bar{0} = \bar{m} = \bar{a}\bar{b}$  mit  $\bar{a} \neq 0 \neq \bar{b}$ . Also hat  $\mathbb{Z}_m$  Nullteiler, ist kein Integritätsbereich und kein Körper.

Sei nun  $m$  eine Primzahl und  $\bar{a} \neq 0$ . Sei  $d = \text{ggT}(m, a)$ . Nach Definition ist  $d \geq 1$  ein Teiler von  $m$ . Falls  $d = m$  wäre, dann folgt  $m|a \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \nmid$ . Also ist  $d = 1$ . Nach dem Lemma vom letzten Mal folgt daraus, dass es  $k, l \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = k \cdot m + l \cdot a$ . Modulo  $m$  ist die  $\bar{1} = \bar{l} \cdot \bar{a}$ . Dies zeigt, dass  $\bar{a} \neq 0$  die multiplikative Inverse  $\bar{l}$  besitzt.  $\square$

**Satz** (Quotientenkörper (S.38)). Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann gibt es einen Körper  $K$ , der  $R$  enthält und so dass  $K = \{\frac{p}{q} : p, q \in R, q \neq 0\}$ . z.B. für  $R = \mathbb{Z}$  haben wir  $K = \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Wir definieren die Relation  $\sim$  auf  $X = R \times (R \setminus \{0\})$  :

$$(a, b) \sim (p, q) \Leftrightarrow aq = pb \quad [\text{in } R] \quad [\text{versteckt wollen wir } \frac{a}{b} = \frac{p}{q}].$$

Äquivalenzrelation:

- $(a, b) \sim (a, b)$  denn  $ab = ab$ .
- $(a, b) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (a, b)$  denn  $aq = pb$  ist  $pb = aq$ .
- $(a, b) \sim (p, q)$  und  $(p, q) \sim (m, n)$ .  $aq = pb$  und  $pn = mq$ . Multipliziere erste mit  $n$  und zweite mit  $b$ .

$$aqn = pbn = pnb = mqb \Rightarrow aqn = mqb \xrightarrow{q \neq 0} an = mb.$$

und somit  $(a, b) \sim (m, n)$ .

Wir definieren  $K = X / \sim$  und die Elemente  $0_K = [(0, 1)]_\sim$  und  $1_K = [(1, 1)]_\sim$ . und die Operationen  $+$  und  $\cdot$ :

$$\begin{aligned} [(a, b)]_\sim + [(p, q)]_\sim &= [(aq + pb, bq)]_\sim \\ [(a, b)]_\sim \cdot [(p, q)]_\sim &= [(ap, bq)]_\sim. \end{aligned}$$

Diese Operationen sind wohldefiniert (für  $+$  siehe Buch).

Angenommen  $(a, b) \sim (a', b')$ ,  $(p, q) \sim (p', q')$  somit  $ab' = a'b$  und  $pq' = p'q$ . Schließlich multipliziere beide Gleichungen  $(ap)(b'q') = (a'p')(bq)$  und somit  $(ap, bq) \sim (a'p', b'q')$ .

Wir überprüfen Schritt für Schritt die Axiome eines Körpers:

- Kommutativität der Addition:

$$[(a, b)]_\sim + [(p, q)]_\sim = [(aq + pb, bq)]_\sim = [(pq + aq, qb)]_\sim = [(p, q)]_{\text{sim}} + [(a, b)]_\sim.$$

unter Verwendung der Kommutativität der Addition und Multiplikation in  $R$ .

$K$  ist sogar ein Körper.

$$[(0, 1)]_\sim \neq [(1, 1)]_\sim \text{ da } 0 \cdot 1 \neq 1 \cdot 1 \text{ in } R$$

Falls  $[(a, b)]_\sim \neq [(0, 1)]_\sim$ , dann ist  $[(a, b)]_\sim^{-1} = [(b, a)]_\sim$ , da

$$[(a, b)]_\sim \cdot [(b, a)]_\sim = [(ab, ab)]_\sim = [(1, 1)]_\sim$$

$\square$

Ab sofort schreiben wir  $\frac{a}{b} = [(a, b)]_\sim$ . Wir identifizieren  $a \in R$  mit  $\frac{a}{1} \in K$ . Hierzu bemerken wir, dass  $\iota : a \in R \mapsto \frac{a}{1} \in K$  ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

*Beweis.* Angenommen  $a \neq 0$ , dann gilt  $\frac{a}{1} \neq \frac{0}{1}$ . Also gilt  $\text{Ker } \iota = \{0\}$  und  $\iota$  ist injektiv.

$\iota(1) = \frac{1}{1} = 1_K$  und  $\iota(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \iota(a) + \iota(b)$  sowie  $\iota(ab) = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \iota(a)\iota(b)$   $\square$

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper und  $L \subseteq K$  ein Unterring der auch ein Körper ist. Dann nennen wir  $L$  auch einen *Unterkörper*.

**Beispiel.** Verwenden sie SageMath um herauszufinden für welche  $p = 2, 3, \dots, 100$  es ein  $g \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^X$  mit

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^X = \{g^k : k = 0, 1, \dots\}$$

gibt ( $k < p$  genügt)?

## 1.3 Ring der Polynome (Seite 41)

Im Folgenden ist  $R$  immer ein kommutativer Ring. Wir wollen einen neuen Ring, den Ring  $R[X]$  der Polynome in der Variablen  $X$  und Koeffizienten in  $R$  definieren.

**Beispiel.** Sei  $K = \mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Dann soll  $X^2 + X$  *nicht* das Nullpolynom sein, obwohl die zugehörige Polynomfunktion gleich 0 ist:

$$\begin{aligned} 0 \in \mathbb{F}_2 &\mapsto 0^2 + 0 = 0 \\ 1 \in \mathbb{F}_2 &\mapsto 1^2 + 1 = 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Wir verwenden die Koeffizienten um Polynome zu definieren.

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Wir definieren den *Ring der formalen Potentreihen* (in einer Variable über dem Ring  $R$ ) als

1. die Menge aller Folgen  $(a_n)_{n=0}^\infty \in R^\mathbb{N}$
2.  $0 = (0)_{n=0}^\infty, 1 = (1, 0, 0, \dots)$
3.  $+: (a_n)_{n=0}^\infty + (b_n)_{n=0}^\infty = (a_n + b_n)_{n=0}^\infty$
4.  $\cdot: (a_n)_{n=0}^\infty \cdot (b_n)_{n=0}^\infty = (c_n)_{n=0}^\infty$  wobei

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} a_i b_j.$$

Die Menge aller Folgen mit  $a_n = 0$  für alle hinreichend großen  $n \geq 0$  wird als der *Polynomring* (in einer Variable und über  $R$ ) bezeichnet.

*Beweis.* Wir überprüfen die Axiome welche die Multiplikation betreffen und überlassen die anderen dem Leser.

1.  $a \cdot b = b \cdot a$  gilt, denn  $\sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} b_i a_j$ .
2.  $(1 \cdot a)_n = \sum_{i+j=n} 1_i a_j = a_n$ , da  $1_i = 0$  außer wenn  $i = 0$ .
3.  $\underbrace{(ab)c}_{=d} = a(bc)$  gilt, denn

$$d_n = \sum_{i+j=n} \underbrace{(ab)_i}_{=\sum_{k+l=i} a_k b_l} c_j = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$$

ohne Klammern wegen Assoziativität von  $\cdot$  in  $R$ . Rechts ergibt sich dieselbe Antwort.

4.

$$((a+b) \cdot c)_n = \sum_{i+j=n} \underbrace{(a+b)_i c_j}_{a_i c_j + b_i c_j} = \sum_{i+j=n} a_i c_j + \sum_{i+j=n} b_i c_j = (ac + bc)_n$$

Des Weiteren überprüfen wir, dass der Polynomring unter  $+$  und  $\cdot$  abgeschlossen ist:  
Angenommen  $a, b$  sind Polynome, so dass  $a_i = 0$  für  $i > I$  und  $b_j = 0$  für  $j > J$ . Daraus folgt

$$(a+b)_n = 0 \text{ für } n > \max(I, J) \quad (a \cdot b)_n = 0 \text{ für } n > I + J$$

denn  $(a \cdot b)_n = \sum_{i+j=n} \underbrace{a_i b_j}_{=0}$ . Falls  $a_i b_j \neq 0$  wäre, dann würde  $a_i \neq 0$  und  $b_j \neq 0$  folgen, was wiederum  $i \leq I, j \leq J$  und damit  $n = i + j \leq I + J$  impliziert.  $\square$

*Notation.* Wir führen ein neues Symbol, eine Variable, z.B.  $X$  ein und identifizieren  $X$  mit

$$X^0 = 1 = (1, 0, 0, \dots) \quad X^1 = (0, 1, 0, 0, \dots) \quad X^2 = (0, 0, 1, 0, \dots) \quad \dots$$

Allgemeiner: Sei  $a$  ein Polynom, dann ist

$$X \cdot a = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

denn  $(X \cdot a)_n = \sum_{i+j=n} X_i a_j = a_{n-1}$  da  $X = 0$  außer wenn  $i = 1$  ist.  $(X \cdot a)_0 = X_0 \cdot a_0 = 0$ .

Wir schreiben  $R[X] = \{\sum_{i=0}^n a_i X^i : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R\}$  ( $R$ -adjungiert- $X$ ) für den *Ring der Polynome in der Variablen  $X$*  und  $R[[X]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n : a_0, a_1, \dots \in R\}$  für den *Ring der formalen Potenzreihen in der Variable  $X$*

**Definition.** Sei  $p \in R[X] \setminus \{0\}$ . Der Grad von  $p$   $\deg(p)$  ist gleich  $n \in \mathbb{N}$  falls  $p_n \neq 0$  ist und  $p_k = 0$  für  $k > n$ . In diesem Fall nennen wir  $p_n$  auch den *führenden Koeffizienten*.

Wir definieren  $\deg(0) = -\infty$ .

**Proposition.** Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann ist  $R[X]$  auch ein Integritätsbereich. Des weiteren gilt für  $p, q \in R[X] \setminus \{0\}$

- $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$  und der führende Koeffizient von  $pq$  ist das Produkt der führenden Koeffizienten von  $p$  und  $q$ .
- $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$
- Falls  $p \mid q$ , dann gilt  $\deg(p) \leq \deg(q)$ .

*Beweis.* Sei  $f = p \cdot q$ , also  $f_n = \sum_{i+j=n} p_i q_j$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- Angenommen  $n > \deg(p) + \deg(q) \Rightarrow p_i q_j = 0$  für alle  $i+j=n \Rightarrow f_n = 0$ .
- Angenommen  $n = \deg(p) + \deg(q)$ . Behauptung:  $f_n = p_{\deg(p)} q_{\deg(q)}$  (führende Koeffizienten  $\in R \setminus \{0\}$ ) da

$$f_n = \sum_{i+j=\deg(p)+\deg(q)} p_i q_j$$

Falls  $i < \deg(p)$  ist, so ist  $j > \deg(q) \Rightarrow q_j = 0$  und vice versa.

Somit ist  $f_n \neq 0$ , da  $R$  ein Integritätsbereich ist.

Diese beiden Punkte beweisen  $\deg(f) = \deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$  also die erste Behauptung in der Proposition.

Angenommen  $p \mid q$ , dann gibt es ein Polynom  $g$  so dass  $q = p \cdot g$  ist  $\deg(q) = \deg(p) + \underbrace{\deg(g)}_{\geq 0} \geq \deg(p)$ . Beweise die dritte Aussage in der Proposition.



Angenommen  $p = \sum_{n=0}^{\deg(p)} p_n X^n, q = \sum_{n=0}^{\deg(q)} q_n X^n$ , dann ist

$$p + q = \sum_{n=0}^{\max(\deg(p), \deg(q))} (p_n + q_n) X^n.$$

Daraus folgt  $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$ .  $\square$

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Dann wird der Quotientenkörper von  $K[X]$  als der *Körper der rationalen Funktionen*  $K(X) = \{\frac{f}{g} : f, g \in K[x], g \neq 0\}$  bezeichnet.

Wenn wir obige Konstruktion (des Polynomrings) iterieren, erhalten wir den Ring der Polynome in mehreren Variablen

$$R[X_1, X_2, \dots, X_d] := (R[X_1])[X_2][X_3] \dots [X_d].$$

Falls  $R = K$  ein Körper ist, definieren wir auch

$$K(X_1, X_2, \dots, X_d) = \text{Quot}(K[X_1, \dots, X_d]).$$

*Bemerkung.* Auf  $R[X_1, \dots, X_d]$  gibt es mehrere Grad-Funktionen

$$\begin{aligned} & \deg(x_1), \deg(x_2), \dots, \deg(x_d) \\ & \deg_{\text{total}}(f) = \max\{m_1 + \dots + m_d \mid f_{m_1, \dots, m_d} \neq 0\} \end{aligned}$$

für  $f = \sum_{m_1, \dots, m_d} f_{m_1, \dots, m_d} X_1^{m_1} \dots X_d^{m_d}$ . z.B.

$$\deg_{\text{total}}(1 + X_1^3 + X_2 X_3) = 3 \quad \deg_{X_2}(1 + X_1^3 + X_2 X_3) = 1.$$

**Satz.** Seien  $R, S$  zwei kommutative Ringe. Ein Ringhomomorphismus  $\Phi$  von  $R[x]$  nach  $S$  ist eindeutig durch seine Einschränkung  $\varphi = \Phi|_R$  und durch das Element  $x = \Phi(X) \in S$  bestimmt. Des weiteren definiert

$$\Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a_n) x^n \quad (*)$$

einen Ringhomomorphismus falls  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus ist und  $x \in S$  beliebig ist.

*Beweis.* Sei  $\Phi : R[X] \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus,  $\varphi = \Phi|_R, x = \Phi(X) \in S$ . Dann gilt

$$\Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(a_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) x^n$$

wie im Satz behauptet. Dies zeigt bereits den ersten Teil des Satzes, da die rechte Seite der Formel nur  $\varphi$  und  $x = \Phi(X)$  benötigt.

Sei nun  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus und  $x \in S$  beliebig. Wir verwenden  $(*)$  um  $\Phi$  zu definieren  $\Phi : R[X] \rightarrow S$  ist nun definiert.

- $\Phi(1) = \phi(1_R) \underbrace{x^0}_{=1_S} = 1_S.$

•

$$\begin{aligned}\Phi(a+b) &= \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n + b_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b_n) x^n = \Phi(a) + \Phi(b)\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\Phi(a \cdot b) &= \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\varphi\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)}_{\sum_{i+j=n} \varphi(a_i) \varphi(b_j)} x^n \\ &= \sum_{i,j} \varphi(a_i) \varphi(b_j) x^{i+j} = \left(\sum_i \varphi(a_i) x^i\right) \left(\sum_j \varphi(b_j) x^j\right) = \Phi(a) \Phi(b).\end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  in der Tat ein Ringhomomorphismus von  $R[X]$  nach  $S$ . □

*Notation.* Wir schreiben für zwei kommutative Ringe  $R, S$

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S = \{\varphi : R \rightarrow S \mid \varphi \text{ ist ein Ringhomomorphismus}\})$$

in dieser Notation können wir obigen Satz in der Form

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(R[X], S) \cong \text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S) \times S$$

schreiben. Dies kann iteriert werden:

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(R[x_1, \dots, x_d], S) \cong \text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S) \times \underbrace{S \times \dots \times S}_{d\text{-mal}}.$$

**Beispiel.** Falls wir  $R = S$  und  $\varphi = \text{id}$  setzen, so erhalten wir für jedes  $a \in R$  die entsprechende Auswertungsabbildung

$$\text{ev}_a : f \mapsto f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n.$$

Wenn wir  $a \in R$  variieren, ergibt sich auch eine Abbildung

$$\Psi : f \in R[X] \rightarrow \left( f(\cdot) : \begin{cases} R \rightarrow R \\ a \mapsto f(a) \end{cases} \right) \in R^R.$$

Wir statteten  $R^R$  mit den punktweise Operationen aus, womit  $\Psi : R[X] \rightarrow R^R$  ein Ringhomomorphismus ist.

Falls  $|R| < \infty$  und  $R \neq \{0\}$ , so kann  $\Psi$  nicht injektiv sein.

**Beispiel.** Sei  $R = \mathbb{Z}$  und  $S = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[X]$  für ein  $m \geq 1$ . Dann gibt es einen Ringhomomorphismus

$$f \in \mathbb{Z}[X] \mapsto \bar{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \bmod m) X^n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[X^n].$$

Hier ist  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, a \mapsto a \bmod m$ .

**Beispiel.**  $R = \mathbb{C}, S = \mathbb{C}[X], \varphi(a) = \bar{a}, a \in \mathbb{C}$ .

$$f \in \mathbb{C}[X] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n X^n \in \mathbb{C}[X].$$

ist sogar ein Ringautomorphismus.

## 1.4 Ideale und Faktorringer

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ein Ideal in  $R$  ist eine Teilmenge  $I \subseteq R$  so dass

- (i)  $0 \in I$
- (ii)  $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$
- (iii)  $a \in I, x \in R \Rightarrow xa \in I$

**Beispiel.** Seien  $R, S$  zwei kommutative Ringe und  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Dann ist

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}$$

ein Ideal.

Beweis von (iii): Falls  $a \in \text{Ker}(\varphi), x \in R$  dann gilt  $\varphi(xa) = \varphi(x) \underbrace{\varphi(a)}_{=0} = 0 \Rightarrow xa \in \text{Ker}(\varphi)$ .

**Satz.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal.

1. Die Relation  $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $R$ . Wir schreiben auch  $a \equiv b \pmod I$  für die Äquivalenzrelation und  $R/I$  für den Quotienten, den wir Faktoring nennen wollen.
2. Die Addition, Multiplikation, das Negative induzieren wohldefinierte Abbildungen

$$R/I \times R/I \rightarrow R/I \quad \text{bzw.} \quad R/I \rightarrow R/I.$$

3. Mit diesen Abbildungen,  $0_{R/I} = [0]_{\sim}, 1_{R/I} = [1]_{\sim}$  ist  $R/I$  ein Ring und die kanonische Projektion  $p : R \rightarrow R/I$  mit  $a \in R \mapsto [a]_{\sim} = a + I$  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

*Beweis.* 1) :

1.  $a \sim a$  dann  $a - a = 0 \in I$ .

2.  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  denn  $b - a = \underbrace{(-1)}_{\in R} \underbrace{(a - b)}_{\in I} \in I$

3.  $a \sim b$  und  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$  denn  $a - c = \underbrace{(a - b)}_{\in I} + \underbrace{(b - c)}_{\in I} \in I$

Also ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation und wir können den Quotienten  $R/\sim = R/I$  betrachten.

2) : Wir zeigen, dann  $+: R/I \times R/I \rightarrow R/I$  wohldefiniert ist:

$$[a]_{\sim} + [b]_{\sim} = [a + b]_{\sim}$$

über die Identifikation  $[a]_{\sim} \rightsquigarrow a, [b]_{\sim} \rightsquigarrow b$  und  $(a, b) \mapsto a + b \mapsto [a + b]_{\sim}$ .

Also müssen wir zeigen:  $a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a + b \sim a' + b'$ . Dies gilt da  $a - a' \in I, b - b' \in I \Rightarrow (a + b) - (a' + b') \in I$  wegen Eigenschaft (ii) von Idealen.

Angenommen  $a \sim a', b \sim b' \Rightarrow ab \sim a'b'$ .

$$ab - a'b' = ab - a'b + a'b - a'b' = b \underbrace{(a - a')}_{\in I} + a' \underbrace{(b - b')}_{\in I} \in I.$$

wegen (iii) in der Def von Idealen Dies zeigt, dass die Multiplikation von Restklassen

$$[a]_{\sim} \cdot [b]_{\sim} = [a \cdot b]_{\sim}$$

wohldefiniert ist. Der Beweis für  $-a$  ist analog, oder ergibt sich aus der Multiplikation mit  $[-1]_{\sim}$ . Dies beweist 2).

3): Da die Ringaxiome nur Gleichungen enthalten, sind die Ringaxiome in  $R/I$  direkte Konsequenzen der Ringaxiome in  $R$ : z.B. Kommutativität von  $+$  in  $R/I$

$$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$$

wobei das zweite Gleich wegen der Kommutativität in  $R$  gilt.

Alle anderen Axiome folgen auf dieselbe Weise. Des Weiteren gilt für die Projektion  $p : R \rightarrow R/I, a \mapsto [a]_{\sim}$

$$\begin{aligned} p(0) &= [0]_{\sim}, p(1) = [1]_{\sim} \\ p(a + b) &= [a + b]_{\sim} = [a]_{\sim} + [b]_{\sim} = p(a) + p(b) \\ p(a \cdot b) &= [a \cdot b]_{\sim} = [a]_{\sim} \cdot [b]_{\sim} = p(a) \cdot p(b) \end{aligned}$$

Also ist  $p : R \rightarrow R/I$  ein Ringhomomorphismus. □

**Beispiel.** •  $I = \mathbb{Z}_m \subseteq \mathbb{Z}$  ist ein Ideal  
•  $I = R, I = \{0\}$  (Nullideal) sind Ideale in einem beliebigen kommutativen Ring.

**Lemma.** Sei  $I \subseteq R$  ein Ideal in einem kommutativen Ring. Dann gilt

$$I = R \Leftrightarrow 1 \in I \Leftrightarrow I \cap R^{\times} \neq \emptyset.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $u = v^{-1} \in I$  und  $v \in R, a \in R$ . Dann gilt

$$a = a \cdot \underbrace{v \cdot u}_{=1} \in I.$$

Da  $a \in R$  beliebig war folgt also  $I = R$ . □

**Beispiel.** Welche Ideale gibt es in einem Körper? Nur  $\{0\}$  und  $K$ . Da jede andere Teilmenge von  $K$  eine Einheit besitzt (Lemma).

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $a_1, \dots, a_n \in R$ . Dann wird

$$I = (a_1, \dots, a_n) = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n : x_1, \dots, x_n \in R\}$$

das von  $a_1, \dots, a_n$  erzeugte Ideal genannt.

Für  $a \in R$  wird  $I = (a) = Ra$  das von  $a$  erzeugte Hauptideal genannt.

**Lemma.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring.

- 1)  $(a) \subseteq (b) \Leftrightarrow b \mid a$
- 2) Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist, dann gilt  $(a) = (b) \Leftrightarrow \exists u \in R^{\times}$  mit  $b = ua$

*Beweis.* Angenommen  $(a) \subseteq (b)$  wie in 1). Da  $a = 1 \cdot a \in (a)$  folgt  $a \in (b) = Rb$ . Also gilt  $a = x \cdot b$  für ein  $x \in R$ , also  $b \mid a$ .

Falls umgekehrt  $b \mid a$ , dann ist  $a \in (b) \Rightarrow (a) = Ra \subseteq (b)$ .

Die Implikation  $\Leftarrow$  in 2) folgt aus 1). Also nehmen wir nun an, dass  $(a) = (b)$ . Dies impliziert  $a = xb$  und  $b = ya$  für  $x, y \in R$ . Daraus folgt  $a = xb = xya$ .

Falls  $a = 0$  ist, so ist auch  $b = 0$  und wir setzen  $u = 1$ .

Falls  $a \neq 0$ , so können wir kürzen und erhalten  $1 = xy$  also  $x, y \in R^{\times}$  und wir setzen  $u = y$ . □

**Beispiel.** Sei  $R = C_{\mathbb{R}}([0, 3])$ .

$$a = \begin{cases} -x + 1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in (1, 2) \\ x - 2 & \text{für } x \in [2, 3] \end{cases} \quad b = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in (1, 2) \\ x - 2 & \text{für } x \in [2, 3] \end{cases}.$$

Behauptung:  $(a) = (b)$  aber  $b \notin R^X a$ . Es gilt  $a \in (b)$ , denn  $a = b \cdot f$  und  $b = a \cdot f$  für

$$f = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 2x - 3 & \text{für } x \in (1, 2) \\ 1 & \text{für } x \in [2, 3] \end{cases}$$

$b \notin R^X a$  folgt aus dem Zwischenwertsatz.

Falls  $I \subseteq R$  ein Ideal ist und  $a \in R$ , dann ist die Restklasse für Äquivalent modulo  $I$  gleich

$$[a]_N = \{x \in R : x \sim a\} = a + I.$$

**Satz** (Erster Isomorphiesatz). *Angenommen  $R, S$  sind kommutative Ringe und  $\varphi : R \rightarrow S$  ist ein Ringhomomorphismus.*

1. *Dann induziert  $\varphi$  einen Ringisomorphismus*

$$\bar{\varphi} : R/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi) = \varphi(R) \subseteq S$$

so dass  $\varphi = \bar{\varphi} \circ p$  wobei  $p : R \rightarrow R/\text{Ker}(\varphi)$  die kanonische Projektion ist (Diagramm links).

2. *Sei  $I \subseteq \text{Ker}(\varphi)$  ein Ideal in  $R$ . Dann induziert  $\varphi$  einen Ringhomomorphismus  $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow S$  mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ p_I$  (Diagramm rechts). Des weiteren gilt  $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \text{Ker}(\varphi)/I$  und  $\text{Im}(\bar{\varphi}) = \text{Im}(\varphi)$*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow p & \nearrow \bar{\varphi} & \\ R/\text{Ker}(\varphi) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow p_I & \nearrow \bar{\varphi} & \\ R/I & & \end{array}$$

*Beweis.* Wir beginnen mit 2) und definieren  $\bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x)$ . Dies ist wohldefiniert: Falls  $x + I = y + I$  ist, so ist  $x - y \in I \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ . Daher gilt  $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) = 0$ .

Da  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus ist, gilt

$$\varphi(1_R) = 1_S \Rightarrow \bar{\varphi}(1 + I) = 1_S$$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \Rightarrow \bar{\varphi}(x + I + y + I) = \varphi(x + I) + \varphi(y + I)$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \bar{\varphi}((x + I)(y + I)) = \bar{\varphi}(xy + I) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(x + I)\bar{\varphi}(y + I)$$

$\varphi = \bar{\varphi} \circ p_I$  denn für  $x \in R$  gilt  $p_I(x) = x + I$ ,  $\bar{\varphi} \circ p_I(x) = \bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x)$  nach Definition von  $\bar{\varphi}$ . Da dies für alle  $x \in R$  gilt ergibt sich obiges und das kommutative Diagramm.

$$\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{x + I : \underbrace{\varphi(x)}_{\bar{\varphi}(x+I)} = 0\} = \text{Ker}(\varphi/I)$$

$$\text{Im}(\bar{\varphi}) = \{\bar{\varphi}(x) : x \in R/I\} = \{\varphi(x) : x \in R\} = \text{Im}(\varphi)$$

Dies beweist 2) vom Satz.

Wir wollen nun 1) beweisen und wenden 2) für  $I = \text{Ker}(\varphi)$  an. Also ist  $\bar{\varphi}(x + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(x)$  für  $x + \text{Ker}(\varphi) \in R/\text{Ker}(\varphi)$  ein Ringhomomorphismus mit Bild  $\text{Im}(\varphi)$ .

Hier gilt  $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \text{Ker}(\varphi)/\text{Ker}(\varphi) = \{0 + \text{Ker}(\varphi)\}$ , also ist  $\bar{\varphi}$  injektiv. Daher ist  $\bar{\varphi}$  ein Ringhomomorphismus von  $R/\text{Ker}(\varphi)$  nach  $\text{Im}(\varphi)$  wie in 1) behauptet.  $\square$

*Bemerkung.* Sei  $I_0 \subseteq R$  ein Ideal in einem kommutativen Ring. Dann gibt es eine Korrespondenz (kanonische Bijektion) zwischen Idealen in  $R/I_0$  und Idealen in  $R$ , die  $I_0$  enthalten.

$$\begin{aligned} I \subseteq R, I_0 \subseteq I &\mapsto I/I_0 = \{x + I_0 : x \in I\} \subseteq R/I_0 \\ J \subseteq R/I_0 &\mapsto p_{I_0}^{-1}(J) \subseteq R \quad (p_{I_0} : \begin{cases} R \rightarrow R/I_0 \\ x \mapsto x + I_0 \end{cases}). \end{aligned}$$

**Definition.** Wir sagen zwei Ideale  $I, J$  in einem kommutativen Ring sind *coprim*, falls  $I + J = R$  ist. D.h.  $\exists a \in I, b \in J$  mit  $1 = a + b$ .

**Beispiel.**  $I = (p)$  und  $J = (q) \subseteq \mathbb{Z} = R$  falls  $p, q$  verschiedene (positive) Primzahlen sind.

**Proposition** (Chinesischer Restsatz). *Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $I_1, \dots, I_n$  paarweise coprime Ideale. Dann ist der Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n$  mit  $x \mapsto (x + I_1, \dots, x + I_n)$  surjektiv mit  $\text{Ker}(\varphi) = I_1 \cap \dots \cap I_n$ .*

*Dies induziert einen Ringisomorphismus  $R/I_1 \cap \dots \cap I_n \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ .*

*Beweis.* Dass der Kern  $\text{Ker}(\varphi)$  genau  $I_1 \cap \dots \cap I_n$  ist, ergibt sich aus den Definitionen. Wir zeigen, dass  $\varphi$  surjektiv ist. Hierfür wollen wir für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $x_i \in R$  finden so dass

$$\varphi(x_i) = (0 + I_1, \dots, \underbrace{1 + I_i}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, 0 + I_n).$$

Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir den Fall  $i = 1$ .

**Behauptung:**  $I_1$  und  $I_2 \cap \dots \cap I_n$  sind coprime, d.h. es existieren  $a \in I_1$  und  $b \in I_2 \cap \dots \cap I_n$  so dass  $a + b = 1$ .

Aus der Behauptung folgt, dass  $x_1 = b$  erfüllt:

$$\varphi(x_1) = (b + I_1, b + I_2, \dots, b + I_n) = (1 + I_1, 0 + I_2, \dots, 0 + I_n)$$

wegen der Definition von  $b$  und  $a + b = 1$ .

Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion nach  $n$  :

$n = 2$  :  $I_1$  und  $I_2$  sind coprime. Dies gilt nach Annahme in der Proposition.

Induktionsschritt ( $n - 1 \rightarrow n$ ): Wir nehmen an, dass  $I_1$  und  $I_2 \cap \dots \cap I_{n-1}$  coprime sind, d.h. es gibt  $a \in I_1, b \in I_2 \cap \dots, I_{n-1}$  mit  $a + b = 1$ . Des weiteren ist  $I_1$  coprime zu  $I_n$ , d.h. es gibt  $c \in I_1, d \in I_n$  mit  $c + d = 1$ .

$$\Rightarrow a + b(\underbrace{c + d}_{=1}) = 1 \Rightarrow \underbrace{a + bc}_{\in I_1} + \underbrace{bd}_{\in I_2 \cap \dots \cap I_{n-1} \cap I_n} = 1.$$

Folgt  $I_1$  ist coprime zu  $I_2 \cap \dots \cap I_n$ , Also haben wir die Behauptung mittels Induktion gezeigt.

Wir können  $x_1, \dots, x_n$  wie oben verwenden um die Surjektivität zu zeigen: Sei  $(a_1 + I_1, \dots, a_n + I_n) \in R/I_1 \times \dots \times R/I_n$  beliebig. Dann gilt

$$\varphi(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) = (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + I_1, \dots, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + I_n) = (a_1 + I_1, a_2 + I_2, \dots, a_n + I_n).$$

da  $x_i$  modulo  $I_i$  gleich 1 ist und ansonsten  $x_i \in I_j$  ( $j \neq i$ ) gilt und daher  $x_i$  modulo  $I_j$  gleich 0 ist.  $\square$

## 1.5 Charakteristik eines Körpers

Sei  $K$  ein Körper. Dann gibt es einen Ringhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$  mit

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} \mapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \\ -n \in \mathbb{N} \mapsto -(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) \end{cases}$$

Sei  $I = \text{Ker}(\varphi)$  so, dass  $\mathbb{Z}/I \cong \text{Im}(\varphi) \subseteq K$ . Da  $K$  ein Körper ist, ist  $\text{Im}(\varphi)$  ein Integritätsbereich.

**Lemma.** Sei  $I \subseteq \mathbb{Z}$  ein Ideal. Dann gilt  $I = (m)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Der Quotient ist ein Integritätsbereich genau dann wenn  $m = 0$  oder  $m$  eine Primzahl ist.

*Beweis.* Falls  $I \cap \mathbb{N}_{>0} = \{\}$  ist, so ist  $I = (0)$ . Ansonsten können wir das kleinste Element  $m$  in  $I \cap \mathbb{N}_{>0}$  finden. Falls  $n \in I$  ist, so können wir Division mit Rest anwenden und erhalten  $\underbrace{n}_{\in I} = \underbrace{k \cdot m}_{\in I} + r$  für  $k \in \mathbb{Z}, r \in \{0, \dots, m-1\}$ . Folgt  $r \in I \Rightarrow r = 0$  da  $m$  das kleinste Element von  $I \cap \mathbb{N}_{>0}$  war. Da  $n \in I$  beliebig war, folgt  $I = (m)$ .

Falls  $m = a \cdot b$  für  $a, b < m$  ist, so ist  $\mathbb{Z}/(m)$  kein Integritätsbereich, da  $(a + (m))(b + (m)) = ab + (m) = 0 + (m)$  ist. Falls  $m > 0$  eine Primzahl ist, so ist  $\mathbb{Z}/(m)$  ein Körper und damit auch ein Integritätsbereich.  $\square$

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Wir sagen, dass  $K$  Charakteristik 0 hat, falls  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$  injektiv ist. Wir sagen, dass  $K$  Charakteristik  $p \in \mathbb{N}_{>0}$  hat falls  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$  den Kern  $(p)$  hat.

**Beispiel.** Charakteristik 0:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$  Wenn  $K$  Charakteristik 0 hat, dann enthält  $K$  eine isomorphe Kopie von  $\mathbb{Q}$ .

Charakteristik  $p : \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p), \mathbb{F}_p(X)$

**Proposition.** Sei  $K$  ein Körper mit Charakteristik  $p > 0$ . Dann ist die Frobeniusabbildung  $F : x \in K \rightarrow x^p \in K$  ein Ringhomomorphismus. Falls  $|K| < \infty$ , dann ist  $F$  ein Ringautomorphismus.

*Beweis.* Es gilt  $F(0) = 0^p, F(1) = 1^p = 1, F(xy) = (xy)^p = x^p y^p = F(x)F(y)$ . Wir müssen noch  $F(x+y) = F(x) + F(y)$  zeigen.

$$(x+y)^p = x^p + \underbrace{\binom{p}{1}}_{=p \cdot 1_K=0} x^{p-1}y + \binom{p}{2} x^{p-2}y^2 + \dots + \binom{p}{p-1} xy^{p-1} + y^p = x^p + y^p \quad [\text{in } K].$$

**Behauptung:** Für  $0 < k < p$  gilt  $p \mid \binom{p}{k}$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!} \Rightarrow k! \binom{p}{k} = p(p-1) \dots (p-k+1) = 0 \mod p.$$

aber  $k! \mod p \neq 0$ . Da Rechnen modulo  $p$  einen Körper definiert, erhalten wir  $k! \not\equiv 0, k! \binom{p}{k} \equiv 0 \mod p \Rightarrow \binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ . Folgt  $p \mid \binom{p}{k}$ .

Wenn  $|K| < \infty$ , dann ist  $F$  auch surjektiv! Warum:  $\text{Ker}(f) \subseteq K$  ist ein Ideal  $\Rightarrow \text{Ker}(F) = \{0\}$  und  $F$  ist injektiv. Wenn  $|K| < \infty$ , folgt aus der Injektivität auch die Surjektivität.  $\square$

## 1.6 Primideale und Maximalideale

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring, und sei  $I \subseteq R$  ein Ideal. Wir sagen  $I$  ist ein *Primideal*, falls  $R/I$  ein Integritätsbereich ist. Wir sagen  $I$  ist ein *Maximalideal*, falls  $R/I$  ein Körper ist.

**Proposition.** Sei  $I \subseteq R$  ein Ideal in einem kommutativen Ring.

- 1) Dann ist  $I$  ein Primideal genau dann wenn  $I \neq R$  und für alle  $a, b \in R$  gilt  $ab \in I \Rightarrow a \in I$  oder  $b \in I$ .
- 2) Dann ist  $I$  ein Maximalideal genau dann wenn  $I \neq R$  und es gibt kein Ideal  $J$  mit  $I \subsetneq J \subsetneq R$ .

*Beweis.* 1)  $I$  ist ein Primideal  $\Leftrightarrow R/I \neq \{0 + I\}$  und  $([a][b] = 0 \Rightarrow [a] = 0 \text{ oder } [b] = 0 \Leftrightarrow I \neq R \text{ und } (ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ oder } b \in I)$ .

- 2)  $I$  ist ein Maximalideal  $\Leftrightarrow R/I$  ist ein Körper  $\Leftrightarrow I \neq R$  und es gibt kein Ideal  $J \subseteq R$  mit  $I \subsetneq J \subsetneq R$ .

Letztes „genau dann wenn“:  $\Rightarrow$ : Sei  $J \subseteq R$  ein Ideal und  $I \subsetneq J$  und  $x \in J \setminus I$ . Dann ist  $x + I \in R/I \setminus \{0 + I\}$  ist invertierbar in  $R/I$ , also  $(x + I)^{-1} = y + I$ . Daraus folgt  $\underbrace{x}_{\in J} y - 1 \in I \subseteq J \Rightarrow 1 \in J$ ,

also  $J = R$ .

$\Leftarrow$ : Angenommen  $x + I \neq 0 + I$ , dann können wir  $J = (x) + I$  definieren. Dies ist ein Ideal  $I \subsetneq J \subseteq R$ . Also ist  $J = R$  und es gibt ein  $y \in R$  mit  $xy + I = 1 + I$   $\square$

**Beispiel.** In  $R = \mathbb{Z}$  gilt:

- $I = (m)$  ist ein Primideal  $\Leftrightarrow m = 0$  oder  $m = \pm p$  eine Primzahl ist.
- $I = (m)$  ist ein Maximalideal  $\Leftrightarrow m = \pm p$  eine Primzahl ist.

z.B.  $(0) \leq (2)$  mit  $(0)$  Primideal und  $(2)$  Prim- und Maximalideal.

**Beispiel.** Sei  $K$  ein Körper und  $a_1, \dots, a_n \in K$ . Wir definieren das Ideal

$$I = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$$

Dann ist  $I$  ein Maximalideal, und ist gleich dem Kern  $\text{Ker}(\text{ev}_{a_1, \dots, a_n})$  des Auswertungshomomorphismus

$$\text{ev}_{a_1, \dots, a_n}(f) = f(a_1, \dots, a_n).$$

*Beweis.*  $I \subseteq \text{Ker}(\text{ev}_{a_1, \dots, a_n})$  da  $\text{ev}(X_j - a_j) = a_j - a_j = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Sei nun  $f \in \text{Ker}(\text{ev}_{a_1, \dots, a_n})$ .

$$f = \sum a_{(k_1, \dots, k_n)} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$$

Wir schreiben  $X_j^{k_j} = (a_j + X_j - a_j)^{k_j} = a_j^{k_j} + \underbrace{k_j a_j^{k_j-1} (X_j - a_j) + \dots}_{\in I}$

Also gilt  $X_j^{k_j} + I = a_j^{k_j} + I$

$$\Rightarrow f + I = \underbrace{\sum a_{(k_1, \dots, k_n)} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}}_{f(a_1, \dots, a_n)=0} + I \in I$$

Weiters folgt  $I = \text{Ker}(\text{ev}_{a_1, \dots, a_n})$

$$\Rightarrow K[X_1, \dots, X_n]/I = K[X_1, \dots, X_n]/\text{Ker}(\text{ev}_{a_1, \dots, a_n}) \cong K$$

ist ein Körper  $\Rightarrow I$  ist ein Maximalideal.  $\square$

*Bemerkung.* Der Hilbert'sche Nullstellensatz besagt, dass jedes Maximalideal in  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  von dieser Gestalt ist.

**Satz.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring, und  $I \subsetneq R$  ein Ideal. Dann existiert ein Maximalideal  $m \supseteq I$ . Insbesondere existiert in jedem Ring  $R \neq [0]$  ein Maximalideal.



*Beweis.* Wir werden das Zornsche Lemma verwenden. Hierzu definieren wir

$$X = \{J \subsetneq R \mid J \text{ ist ein Ideal und } I \subseteq J\}$$

und betrachten die Inklusion von Teilmengen als unsere Relation auf  $X$ . Wir müssen zeigen, dass jede Kette  $K$  in  $X$  eine obere Schranke besitzt. Falls  $K = \emptyset$ , dann ist  $I \in X$  eine obere Schranke. Sei nun  $K$  eine nichtleere Kette in  $X$ .

Wir behaupten, dass  $\tilde{J} = \bigcup_{J \in K} J$  eine obere Schranke von  $K$  in  $X$  darstellt. Für jedes  $J \in K$  gilt  $J \subseteq \tilde{J}$  nach Definition von  $\tilde{J}$ . Weiters gilt:

- $\tilde{J} \neq R$  weil  $(J \in K \Rightarrow 1 \notin J)$  gilt  $1 \notin \tilde{J}$
- $\tilde{J} \supseteq I$ , weil  $K \neq \emptyset$ , also ein  $J \in K$  existiert, welches nach Definition von  $X \supseteq K$   $I$  enthalten muss.
- $\tilde{J}$  ist auch ein Ideal.
  - $0 \in \tilde{J}$  da  $0 \in I \subseteq \tilde{J}$
  - Sei  $x \in R$  und  $a \in \tilde{J}$ , dann gibt es ein  $J \in K$  mit  $a \in J$ . Dies impliziert  $xa \in J \subseteq \tilde{J}$ .
  - Sei nun  $a, b \in \tilde{J}$ , dann gibt es ein  $J_a \in K$  mit  $a \in J_a$  und  $J_b \in K$  mit  $b \in J_b$ . Da  $K$  eine Kette ist, gilt  $J_a \subseteq J_b$  oder  $J_a \supseteq J_b$  also entweder  $a, b \in J_b \Rightarrow a + b \in J_b \subseteq \tilde{J}$  oder  $a, b \in J_a \Rightarrow a + b \in J_a \subseteq \tilde{J}$ .

Somit ist  $\tilde{J}$  eine obere Schranke in  $X$ . Zusammenfassend folgt  $X$  ist induktiv geordnet, also existiert nach dem Zorn'schen Lemma ein maximales Element in  $X$ , d.h. es existiert ein Ideal  $m$ , welches  $I$  enthält, nicht gleich  $R$  ist und so sodass es zwischen  $m$  und  $R$  kein weiteres Ideal gibt.  $\square$

## 1.7 Unterring

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $S \subseteq R$  auch ein Ring. Wir sagen  $S$  ist ein *Unterring* falls  $\text{id} : S \rightarrow R, s \mapsto s$  ein Ringhomomorphismus ist.

**Alternativ Definition:** Sei  $R$  ein Ring und  $S \subseteq R$ . Dann ist  $S$  ein Unterring falls

1.  $0, 1 \in S$ .
2.  $a - b \in S$  für alle  $a, b \in S$ .
3.  $a \cdot b \in S$  für alle  $a, b \in S$ .

*Notation.* Sei  $S \subseteq R$  ein Unterring in einem Ring  $R$ . Seien  $a_1, \dots, a_n \in R$ . Wir definieren

$$S[a_1, \dots, a_n] = \bigcap_{\substack{T \subseteq R \text{ Unterring} \\ T \supseteq S \\ a_1, \dots, a_n \in T}} T.$$

genannt „s-adjungiert  $a_1, \dots, a_n$ “.

$$= \text{ev}_{a_1, \dots, a_n}(S[x_1, \dots, x_n]) = \left\{ \sum_{k_1, \dots, k_n \in M} c_{k_1, \dots, k_n} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \right\}.$$

mit  $|M| < \infty, M \subseteq \mathbb{N}^n, c_{k_1, \dots, k_n} \in S$ .

*Beweis von  $\subseteq$ .* Wir wissen aus der Serie, dass  $S[a_1, \dots, a_n]$  ein Unterring ist, der nach Definition  $S$  und  $a_1, \dots, a_n$  enthält. Auch wissen wir, dass  $\text{ev}_{a_1, \dots, a_n}(S[x_1, \dots, x_n])$  ein Unterring ist (da  $S[x_1, \dots, x_n]$  ein Ring ist und  $\text{ev}_{a_1, \dots, a_n}$  ein Ringhomomorphismus ist). Also tritt  $T = \text{ev}_{a_1, \dots, a_n}(S[x_1, \dots, x_n])$  als eine der Mengen im Durchschnitt auf und wir erhalten

$$S[a_1, \dots, a_n] \subseteq \text{ev}_{a_1, \dots, a_n}(S[x_1, \dots, x_n]).$$

□

*Beweis von  $\supseteq$ .* Wir wissen  $S[a_1, \dots, a_n]$  ist ein Unterring. Ebenso haben wir  $S$  und  $a_1, \dots, a_n$  sind in diesem Unterring enthalten. Folgt

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in M} \underbrace{c_{k_1, \dots, k_n}}_{\in S} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \subseteq S[a_1, \dots, a_n].$$

Durch variieren von  $M \subseteq \mathbb{N}^n, |M| < \infty$  und der Koeffizienten zeigt  $\supseteq$ . □

**Beispiel.** •  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ .

- $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ .
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Körper:

$$\frac{a + \sqrt{2}b}{\underbrace{c + \sqrt{2}d}_{\neq 0}} = \frac{a + \sqrt{2}b}{c + \sqrt{2}d} \cdot \frac{c - \sqrt{2}d}{c - \sqrt{2}d} = \frac{ac - 2bd + \sqrt{2}(ad - bc)}{c^2 - 2d^2}$$

mit Nenner in  $\mathbb{Q}$ .

## 1.8 Matrizen

Sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Dann bezeichnen wir die Menge  $\text{Mat}_{mn}(R)$  als die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

mit Koeffizienten oder Eintragungen  $a_{11}, \dots, a_{mn} \in R$ . Für  $m = n$  definieren wir auch auf  $\text{Mat}_{mm}(R)$  auf übliche Weise die Addition und Multiplikation. Dies definiert auf  $\text{Mat}_{mm}(R)$  gemeinsam mit dem Einselement  $I_m = (\delta_{ij})_{i,j}$  eine Ringstruktur. Sobald  $m > 1$  ist, ist dieser Ring nichtkommutativ.

Die Einheiten in  $\text{Mat}_{mm}(R)$  werden auch als invertierbare Matrizen bezeichnet. Die Menge wird auch die allgemeine lineare Gruppe vom Grad  $m$  über  $R$  genannt:

$$\text{Gl}_m(R) = \text{Mat}_{mm}(R)^\times = \{A \in \text{Mat}_{mm}(R) \mid \text{es existiert ein } B \in \text{Mat}_{mm}(R) \text{ mit } AB = BA = I_n\}.$$

**Proposition (Meta).** *Jede Rechenregel für Matrizen über  $\mathbb{R}$  die nur  $+, -, \cdot, 0, 1$  beinhalten, gilt auch über einem beliebigen kommutativen Ring.*

**Proposition.** *Sei  $R$  ein kommutativer Ring*

- $\text{Mat}_{mm}(R)$  erfüllt die Ringaxiome, also z.B.  $A(BC) = (AB)C$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I_m$ , wobei  $\tilde{A}$  die komplementäre Matrix

$$\tilde{A} = ((-1)^{i+j} \det(A_{ji}))_{i,j}.$$

- $\text{char}_A(A) = 0$  für das charakteristische Polynom  $\text{char}_A(X) = \det(XI_m - A)$  einer Matrix  $A$ .

*Bemerkung.*  $\det(A)$ , jeder Koeffizient von  $A(BC)$ ,  $(AB)C$ ,  $A\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}A$ ,  $\det(A)I$ ,  $\text{char}_A(X)$ ,  $\text{char}_A(A)$  hängt polynomiell von den Eintragungen von  $A, B, C$  ab, wobei die Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  liegen z.B.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\text{sgn}(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

welche Monome in den Eintragungen von  $A$  sind.

**Lemma.** Wenn ein Polynom  $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  verschwindet, dann ist  $f = 0$ .

*Beweis.* Sei  $f = \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$  ein Polynom für das die zugehörige Polynomfunktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$  verschwindet. Dies gilt dann auch für jede partielle Ableitung von  $f$ . Sei  $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$  mit  $k_i \geq l_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_1}^{l_1} \cdots \partial_{x_n}^{l_n} f(0) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1, \dots, k_n} k_1(k_1 - 1) \cdots (k_1 - l_1 + 1) x_1^{k_1 - l_1} \cdots k_n(k_n - 1) \cdots (k_n - l_n + 1) x_n^{k_n - l_n} \\ &= c_{l_1, \dots, l_n} l_1! \cdots l_n! \end{aligned}$$

Da dies für alle  $(l_1, \dots, l_n)$  gilt, folgt  $f = 0$ . □

*Bemerkung.* Das Lemma gilt analog für jeden Körper  $K$  mit  $|K| = \infty$ .

*Beweis der Proposition.* Wir bemerken zuerst, dass

- Jede Eintragung von  $A(BC) - (AB)C$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen

$$a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{mm}, c_{11}, \dots, c_{mm}$$

ist.

- $\det(AB) - \det(A)\det(B)$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen  $a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{mm}$  ist.
- jede Eintragung von  $A\tilde{A} - (\det(A))I_m$  (oder  $\tilde{A}A - (\det(A))I_m$ ) ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen  $a_{11}, \dots, a_{mm}$  ist.
- jede Eintragung von  $\text{char}_A(A)$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen  $a_{11}, \dots, a_{mm}$  ist.

Für  $R = \mathbb{R}$  wissen wir, dass diese Polynome ausgewertet an einer beliebigen Stelle gleich Null sind. D.h. mit dem Lemma sind bereits die Polynome gleich Null. Wenn wir den Ringhomomorphismus von  $\mathbb{Z}$  nach  $R$  auf die Koeffizienten anwenden, erhalten wir wieder das Nullpolynom.  $\Rightarrow$  All diese Gleichungen gelten auch für Matrizen über  $R$ . □

# Kapitel 2: Faktorisierungen von Ringen

*Buch Seiten 83-114.* Wir wollen in diesem Kapitel Ringe mit eindeutiger Primfaktorzerlegung betrachten. Im Folgenden ist  $R$  immer ein Integritätsbereich.

**Definition** (Wiederholung).  $a \mid b \Leftrightarrow \exists c$  mit  $b = ac$  für  $a, b \in R$ .  
 $a \in R^\times$  ist eine Einheit  $\Leftrightarrow a \mid 1$ .

**Definition.** Wir sagen  $p \in R \setminus \{0\}$  ist *irreduzibel*, falls  $p \notin R^\times$  und für alle  $a, b \in R$  gilt  $p = ab \Rightarrow a \in R^\times$  oder  $b \in R^\times$ .

**Definition.** Wir sagen  $p \in R \setminus \{0\}$  ist *prim* falls  $(p)$  ein Primideal ist, in anderen Worten falls  $p \notin R^\times$  und für alle  $a, b \in R$  gilt  $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$  oder  $p \mid b$ .

**Lemma.** Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann ist jedes prim  $p \in R$  auch irreduzibel.

*Beweis.* Angenommen  $p \in R \setminus \{0\}$  ist prim und angenommen  $p = ab$  (wie in der Definition von irreduzibel). Daraus folgt  $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$  oder  $p \mid b$ .

Angenommen  $p \mid a$ , dann ist  $a = p \cdot c$  für ein  $c \in R$ . Folgt  $p = p \cdot c \cdot b \Rightarrow 1 = c \cdot b$  weil  $R$  ein Integritätsbereich ist, also  $b, c \in R^\times$ . Des Weiteren ist auch  $p \notin R^\times$ . Also ist  $p$  irreduzibel.  $\square$

*Bemerkung.* Die Umkehrung des Lemmas stimmt im Allgemeinen nicht. Wenn sie doch stimmt, so hilft dies für die Eindeutigkeit in einer Primfaktorzerlegung. Siehe später in 3.3.

## 2.1 Euklidische Ringe

**Definition.** Ein Integritätsbereich  $R$  heißt ein *Euklidischer Ring* falls es eine gradfunktion  $N : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt, so dass die beiden folgenden Eigenschaften gelten:

- *Gradungleichung:*  $N(f) \leq N(fg)$  für alle  $f, g \in R \setminus \{0\}$ .
- *Division mit Rest:* Für  $f, g \in R$  mit  $f \neq 0$  gibt es  $q, r \in R$  mit  $g = q \cdot f + r$  wobei  $r = 0$  oder  $N(r) < N(f)$  ist. Wir nennen  $r$  den *Rest* (bei Division durch  $f$ ).

**Beispiel.** 0) z.B. erfüllt jeder Körper  $K$  mit  $N(f) = 0$  für alle  $f \in K$  diese Axiome (uninteressant, da es hier nur Einheiten und keine irreduziblen oder primen Elemente gibt).

- 1) Der  $R = \mathbb{Z}$  und  $N(n) = |n|$  für  $n \in \mathbb{Z}$  (erfüllt alle Eigenschaften auf Grund bekannter Eigenschaften von  $\mathbb{Z}$ ).
- 2) Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[x]$  und  $N(f) = \deg(f)$  für  $f \in R \setminus \{0\}$ .
- 3) Sei  $R = \mathbb{Z}[i]$  der Ring der *Gausschen ganzen Zahlen* und  $N(a + ib) = |a + ib|^2$
- 4) Sei  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  und  $N(a + \sqrt{2}b) = |a^2 - 2b^2|$  für  $a + \sqrt{2}b \in R$  (algebraische Zahlentheorie betrachtet solche Beispiele).

*Beweis von Beispiel 2.*

- Gradungleichung: Seien  $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$N(fg) = \deg(fg) = \deg(f) + \underbrace{\deg(g)}_{\geq 0} \geq \deg(f) = N(f).$$

- Division mit Rest: Sei  $f \neq 0, g \in R = K[X]$ . Dann gibt es  $q, r \in K[X]$  mit  $g = fq + r$  und  $\deg(r) < \deg(f)$ .

*Beweis.* Falls  $\deg(g) < \deg(f)$ , dann setzen wir  $q = 0$   $r = g$ . Wir verwenden Induktion nach  $\deg(g)$ . Obiger Fall ist unser Induktionsanfang.

Sei  $m \in \mathbb{N}$  und angenommen wir haben Division mit Rest bereits für alle Polynome mit  $\text{Grad} < m$  bewiesen. Sei  $g \in K[X]$  mit  $\text{Grad } \deg(g) = m$ . Aufgrund des Induktionsanfangs haben wir  $m \geq \deg(f) =: n$ .

Sei  $g = g_m X^m + \dots$ ,  $f = f_n X^n + \dots$ . Wir definieren

$$\tilde{g} = g - \underbrace{g_m f_n^{-1} X^{m-n} f}_{\substack{\text{hat f\"uhrenden Koeffizient } g_m \\ \text{und auch Grad } m \text{ (wie } g)}}.$$

womit  $\deg(\tilde{g}) < \deg(g) = m$ . Auf Grund der Induktionsvoraussetzung können wir  $\tilde{g}$  und  $\tilde{r}$  finden, so dass

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= f\tilde{q} + \tilde{r} & \deg(\tilde{r}) < \deg(f) \\ g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f &= f\tilde{g} + \tilde{r} \\ g &= f \underbrace{(g_m f_n^{-1} X^{m-n} + \tilde{q})}_{=q} + \underbrace{\tilde{r}}_{=r}\end{aligned}$$

Dies beendet den Induktionsschritt. □

□

**Beispiel** (Bsp für Polynomdivision).  $g = x^6 + x^4 + 4x^3 + 2$ ,  $f = x^2 + 5$

$$\begin{array}{r} x^6 + 0x^5 + x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x + 2 : x^2 + 5 = x^4 - 4x^2 + 3x \\ \underline{-x^6} \phantom{+ 0x^5} \phantom{+ x^4} \phantom{+ 3x^3} \phantom{+ 0x^2} \phantom{+ 0x} \phantom{+ 2} \\ \phantom{x^6 + } 0x^5 + \phantom{x^4 + } -5x^4 \phantom{+ 3x^3} \phantom{+ 0x^2} \phantom{+ 0x} \phantom{+ 2} \\ \phantom{x^6 + } \underline{-4x^4} + 4x^3 + 0x^2 \phantom{+ 0x} + 2 \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } -4x^4 \phantom{+ 4x^3} + 20x^2 \phantom{+ 0x} \phantom{+ 2} \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } \underline{4x^3} + 20x^2 + 0x + 2 \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } \phantom{4x^3 + } -3x^3 \phantom{+ 20x^2} -15x \phantom{+ 2} \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } \phantom{4x^3 + } \underline{20x^2} -15x + 2 \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } \phantom{4x^3 + } \phantom{20x^2 + } -20x^2 \phantom{-15x} -100 \\ \phantom{x^6 + } \phantom{-4x^4 + } \phantom{4x^3 + } \phantom{20x^2 + } \underline{-15x} \phantom{-100} = r \end{array}$$

*Beweis von Beispiel 3.*  $R = \mathbb{Z}[i]$  der Ring der Gaußschen ganzen Zahlen

$$\begin{aligned}N(a + ib) &= |a + ib|^2 \text{ für } a + ib \in \mathbb{Q}[i] \\ &\in \mathbb{N} \text{ für } a + ib \in \mathbb{Z}[i]\end{aligned}$$

$$N(z \cdot w) = N(z)N(w) \text{ für } z, w \in \mathbb{Q}[i]$$

$$N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ multiplikativ}$$

**Normungleichung:** Sei  $z, w \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$N(zw) = N(z) \underbrace{N(w)}_{\geq 1} \geq N(z).$$

**Lemma.** Die Division mit Rest gilt in  $\mathbb{Z}[i]$ .

*Beweis.* Seien  $f, g \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $f \neq 0$ . Wir definieren  $z = \frac{g}{f} \in \mathbb{Q}[i]$ ,  $z = a + ib$  für  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Sei  $[r] =$

die beste Näherung von  $r \in \mathbb{Q}$  innerhalb von  $\mathbb{Z}$ . Definiere  $q = [a] + i[b] \in \mathbb{Z}[i]$ . Dann gilt

$$|z - q| \leq \sqrt{\underbrace{(a - [a])^2}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{(b - [b])^2}_{\leq \frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad N(z - q) < 1$$

Definiere  $r = g - fq \Rightarrow g = fq + r$ . Dann gilt

$$N(r) = |r|^2 = |g - fq|^2 = |f|^2 \underbrace{|z - q|^2}_{< 1} < N(f).$$

□

□

*Beweis von Beispiel 4.* Der Ring  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$  ist ein euklidischer Ring. Wir definieren  $\phi : a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{22}(\mathbb{Q})$ . Dann ist  $\phi$  ein Ringhomomorphismus. In der Tat ist  $\phi$  auch  $\mathbb{Q}$ -linear,

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\ \phi(\sqrt{2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \phi(\sqrt{2})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 2I_2 = \phi(\sqrt{2}^2) \end{aligned}$$

daraus folgt  $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$  für  $f, g \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Wir definieren die Normfunktion

$$N(f) = |\det(\phi(f))| = \left| \det \left( \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \right) \right| = |a^2 - 2b^2|.$$

mit  $f = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Daher gilt  $N(fg) = N(f)N(g)$  für  $f, g \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Des weiteren gilt  $N(f) \geq 1$  für  $f \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . Folgt die Normungleichung

$$N(fg) = N(f) \underbrace{N(g)}_{\geq 1} \geq N(f)$$

für  $g \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ .

**Lemma.** In  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  gilt die Division mit Rest.

*Beweis.* Seien  $f, g \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $f \neq 0$  und  $z = \frac{g}{f} = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Wir definieren  $q = [a] + \sqrt{2}[b] \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . Dann gilt

$$N(z - q) = \left| (a - [a])^2 - 2(b - [b])^2 \right| \leq \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} < 1.$$

Der restliche Beweis läuft analog zu  $\mathbb{Z}[i]$ .

□

□

**Satz.** In einem Euklidischen Ring ist jedes Ideal ein Hauptideal.

*Beweis.* Sei  $I \subseteq R$  ein Ideal in einem Euklidischen Ring  $R$ . Falls  $I = \{0\}$ , so ist  $I = (0)$  ein Hauptideal. Wir nehmen nun an, dass  $I \neq \{0\}$ . Wir definieren  $f \in I$  als ein Element mit  $N(f) = \min \underbrace{\{N(g) : g \in I \setminus \{0\}\}}_{\subseteq \mathbb{N} \text{ nichtleer}}$ .

**Behauptung:**  $I = (f)$ . Da  $f \in I$  ist, gilt auch  $(f) \subseteq I$ . Für die Umkehrung nehmen wir an, dass  $g \in I$ . Nach Division mit Rest gibt es  $q, r \in R$  mit  $g = qf + r$  und  $r = 0$  oder  $N(r) < N(f)$ .

Falls  $r = 0$  ist, so ergibt sich  $g = qf \in (f)$ .

Falls  $r \neq 0$  ist, so ergibt sich

$$r = \underbrace{g}_{\in I} - q \underbrace{f}_{\in I} \in I$$

mit  $N(r) < N(f)$ . Aber dies widerspricht der Definition von  $f$ . Folgt  $I = (f)$  wie behauptet und dies ist der Satz.  $\square$

## 2.2 Hauptidealring

**Definition.** Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann heißt  $R$  ein *Hauptidealring* falls jedes Ideal in  $R$  ein Hauptideal ist.

**Beispiel.** Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

*Bemerkung.* Der Ring  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{163})]$  ist ein Hauptidealring und kann nicht zu einem Euklidischen Ring gemacht werden.

**Proposition.** Sei  $R$  ein Hauptidealring. Für je zwei Elemente  $f, g \in R \setminus \{0\}$  gibt es einen größten gemeinsamen Teiler  $d$  mit  $(d) = (f) + (g)$ .

**Definition.** Seien  $f, g, d \in R \setminus \{0\}$ . Wir sagen  $d$  ist ein gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $g$  falls  $d \mid f$  und  $d \mid g$ . Wir sagen  $d$  ist ein größter gemeinsamer Teiler falls  $d$  ein gemeinsamer Teiler ist und jeder gemeinsame Teiler  $t$  auch  $d$  teilt.

*Bemerkung.* Zwei ggT's unterscheiden sich um eine Einheit (wenn  $R$  ein Integritätsbereich ist).

*Beweis.* Da  $I = (f) + (g)$  ein Ideal ist und  $R$  ein Hauptidealring ist, gibt es ein  $d \in R$  mit  $I = (d) = (f) + (g)$ . Daraus folgt,  $(f) \subseteq (d)$  und damit  $d \mid f$ . Genauso  $(g) \subseteq (d)$  und damit  $d \mid g$ . Also ist  $d$  ein gemeinsamer Teiler. Falls  $t \in R$  ein weiterer gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $g$  ist, so folgt  $(f) \subseteq (t)$ ,  $(g) \subseteq (t)$  und somit  $(d) = (f) + (g) \subseteq (t)$  und damit  $t \mid d$ . Also ist  $d$  ein größter gemeinsamer Teiler.  $\square$

In einem Euklidischen Ring kann man einen ggT von  $f, g \in R \setminus \{0\}$  durch den *euklidischen Algorithmus* bestimmen.

- 0) Falls  $N(f) > N(g)$ , so vertauschen wir  $f$  und  $g$ . Also dürfen wir annehmen, dass  $N(f) \leq N(g)$ .
- 1) Dividiere  $g$  durch  $f$  mit Rest:  $g = qf + r$
- 2) Falls  $r = 0$  ist, so ist  $f$  ein ggT und der Algorithmus stoppt.
- 3) Falls  $r \neq 0$  ist, so ersetzen wir  $(f, g)$  durch  $(r, f)$  und springen nach 1).

**Lemma.** Der Euklidische Algorithmus (wie oben beschrieben) endet nach endlich vielen Schritten und berechnet einen ggT.

*Beweis.* Nach Schritt 0) gilt  $\min(N(f), N(g)) = N(f)$ . Bei jedem Durchlauf von 1) – 3) wird diese natürliche Zahl echt kleiner. Nach endlich vielen Schritten müssen wir also im Fall 2) sein.

Im Schritt 0) ändern wir  $I = (f) + (g)$  nicht. In 1) erhalten wir  $q, r \in R$  mit  $r = g - qf \in I, f \in I$ . Außerdem ist  $f \in I' = (r) + (f), g = qf + r \in I'$ . Dies impliziert  $(f) + (g) = I = I' = (r) + (f)$ . Also ändert sich das Ideal  $I$  nicht während des Algorithmus. Nach endlich vielen Schritten erreichen wir Falls 2) im Algorithmus:

$$I = (f) + (g) = (a) + (b).$$

mit  $f, g$  den ursprünglichen Elementen und  $a, b$  denen nach endlich vielen Schritten. Nun gilt  $b = q \cdot a + \underbrace{0}_{r=0}$  und somit  $I = (f) + (G) = (a)$ . Mit dem Beweis von der Proposition folgt  $a$  ist ein ggt von  $f$  und  $g$  und  $a$  ist dann auch der Output vom Algorithmus.  $\square$

**Satz** (Prime Elemente). *Sei  $R$  ein Hauptidealring.*

- 1) *Dann ist  $p \in R \setminus \{0\}$  prim genau dann wenn  $p$  irreduzibel ist.*
- 2) *Jedes  $f \in R \setminus \{0\}$  lässt sich als Produkt einer Einheit und endlich vielen primen Elementen schreiben.*

*Beweis von 1)* . Wir wissen bereits, dass jedes prime Element irreduzibel ist (siehe Lemma in 3.0). Wir nehmen nun an, dass  $p \in R \setminus \{0\}$  irreduzibel ist. Wie nehmen weiters an, dass  $p \mid ab$  für  $a, b \in R$ . Falls  $p \mid a$ , so gibt es nichts zu beweisen. Also nehmen wir an, dass  $p \nmid a$ .

Sei  $d$  ein ggT von  $p$  und  $a$ , also insbesondere ist  $d \mid p = d \cdot e$ . Da  $p$  irreduzibel ist gilt  $d \in R^\times$  oder  $e \in R^\times$ . Angenommen  $e \in R^\times$  dann folgt  $d = pe^{-1}$  also  $p \mid d, d \mid a$  folgt  $p \mid a$  was unserer Annahme widerspricht.

Somit ist  $d \in R^\times$ .  $d = xp + ya$  für  $x, y \in R$  da dies nach der Proposition in einem Hauptidealring gilt. Multipliziert man dies  $bd^{-1}$  so erhält man

$$b = \underbrace{xbd^{-1}p}_{p \mid -''-} + \underbrace{yd^{-1}ab}_{p \mid ab}.$$

Somit folgt  $p \mid b$ .  $\square$

**Satz.** *Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $p \in R$  irreduzibel. Dann ist  $(p)$  ein Maximalideal. Insbesondere ist  $p$  prim.*

*Beweis.* Sei  $R$  ein Hauptideal Ring und  $p \in R$  irreduzibel. Sei  $J \subseteq R$  ein Ideal mit  $J \supsetneq (p)$ . Da  $R$  ein Hauptidealring ist, gibt es ein  $d \in R$  mit  $J = (d) \supsetneq (p)$ . Also gibt es ein  $c$  mit  $p = d \cdot c$ . Also folgt  $d \in R^\times$  oder  $c \in R^\times$  (da  $p$  irreduzibel ist).

Falls  $c \in R^\times$  ist, so ist  $d = p \cdot c^{-1} \in (p)$  und damit  $J = (d) = (p)$  - ein Widerspruch zur Annahme an  $J$ .

Also gilt  $d \in R^\times$  und  $1 = dd^{-1} \in (d) = J = R$ . Da  $J \subseteq R$  mit  $(p) \subsetneq J$  beliebig war, ist  $(p)$  ein Maximalideal.  $\square$

Für den Beweis vom Satz über Prime Elemente Eigenschaft 2 verwenden wir:

**Proposition.** *Sei  $R$  ein Hauptidealring und seien  $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$  eine ansteigende Kette von Idealen in  $R$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $J_m = J_n$  für alle  $m \geq n$ .*

*Beweis.* Wir definieren  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  und erhalten, dass  $J$  ein Ideal ist. Da  $R$  ein Hauptidealring ist, gibt es also ein  $d \in R$  mit  $J = (d)$ . Also gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $d \in J_n$ . Daraus folgt

$$J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i = (d) \subseteq J_n \subseteq J_m \subseteq J = (d).$$



für alle  $m \geq n$ .

□

*Beweis vom Satz über Prime Elemente Eigenschaft 2.* Sei  $f \in R \setminus \{0\}$ . Für diesen Beweis sagen wir, dass  $f$  zerlegbar ist. Falls sich  $f$  als ein Produkt einer Einheit und endlich vielen ( $n \in \mathbb{N}$ ) irreduziblen Elementen schreiben lässt. Falls  $f \in R^\times$  ( $n = 0$ ) oder  $f$  irreduzibel ( $n = 1$ ) ist, so ist  $f$  zerlegbar.

Wir beweisen die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis und nehmen an  $f \in R \setminus \{0\}$  sei nicht zerlegbar. Also ist  $f$  nicht irreduzibel,  $f = f_0 = f_1 \widetilde{f_1}$  wobei  $f_1, \widetilde{f_1} \notin R^\times$ . Falls  $f_1$  und  $\widetilde{f_1}$  beider zerlegbar wären, so würde dies auch für  $f$  folgen.

O.B.d.A. dürfen wir also annehmen, dass  $f_1$  nicht zerlegbar ist. Wir iterieren dieses Argument und erhalten

$$f_0 = f_1 \widetilde{f_1} \quad f_1 = f_2 \widetilde{f_2} \quad f_2 = f_3 \widetilde{f_3} \dots$$

mit  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  nicht zerlegbar und  $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}, \dots \notin R^\times$ .

Es gilt  $f_{n+1} \mid f_n$  und daher  $(f_n) \subseteq (f_{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir wenden also die Proposition von vorhin an und erhalten, dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(f_n) = (f_{n+1})$  gibt. Da  $R$  ein Integritätsbereich ist, folgt aus  $(f_n) = (f_{n+1})$ , dass sich  $f_n$  und  $f_{n+1}$  multiplikativ um eine Einheit unterscheiden. Also gilt

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \widetilde{f_{n+1}} \in R^\times,$$

was den Konstruktion von  $f_n, \widetilde{f_n}$  widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, dass jedes Element  $f \in R \setminus \{0\}$  wie im Satz formuliert zerlegbar ist. □

**Beispiel.** Einige Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$ , z.B. sind  $1 \pm i, 3, 2 \pm i$  Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$ .

2 ist keine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$ , da  $2 = (1+i)(1-i)$ . 5 ist auch keine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$ , da  $5 = (2+i)(2-i)$ .

Nach dem ersten folgenden Lemma ergibt sich nun, dass  $1 \pm i, 2 \pm i$  Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$  sind. Nach dem zweiten Lemma sind 3, 7 Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Lemma.** Sei  $z \in \mathbb{Z}[i]$  so dass  $N(z) = p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl in  $\mathbb{N}$  ist. Dann ist  $z$  irreduzibel (also prim) in  $\mathbb{Z}[i]$ .

*Beweis.* Angenommen  $z = u \cdot v$  ist ein Produkt von  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ . Dann ist  $p = N(z) = \underbrace{N(u)}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{N(v)}_{\in \mathbb{N}}$  und daher  $N(u) = 1$  ( $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ ) oder  $N(v) = 1$  ( $v \in \mathbb{Z}[i]^\times$ ). □

**Lemma.** Angenommen  $p \in \mathbb{N}$  ist eine Primzahl in  $\mathbb{N}$ , die sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt. Dann ist  $p$  auch eine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $p$  in  $\mathbb{Z}[i]$  irreduzibel ist. Also angenommen  $p = z \cdot w$  für  $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ . Dann folgt  $N(p) = N(z)N(w) = p^2$  und damit  $N(z) \mid p^2$  in  $\mathbb{N}$ , womit  $N(z), N(w) \in \{1, p, p^2\}$  ist. Dabei ist aber  $N(z) = N(a+ib) = a^2 + b^2 = p$  nicht möglich. Also gilt  $N(z), N(w) \in \{1, p^2\}$  und es folgt  $N(z) = 1$  (und  $N(w) = p^2$ ) oder  $N(w) = 1$  (und  $N(z) = p^2$ ). Also ist  $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$  oder  $w \in \mathbb{Z}[i]^\times$ . □

**Beispiel.** Im Ring der Polynome  $K[x]$  mit einer Variable über einem Körper  $K$  gibt es irreduzible Elemente:

Grad 1: jedes Polynom vom Grad 1 ist irreduzibel.

Grad 2: ein Polynom vom Grad 2 ist irreduzibel genau dann wenn es keine Nullstellen im Körper  $K$  hat.

Grad 3: selbes wie bei Grad 2.

Grad 4: das betrachten von Nullstellen ist nicht mehr ausreichend.

Dies hängt stark vom Körper  $K$  ab.

## 2.3 Faktorielle Ringe

**Definition.** Ein Integritätsbereich  $R$  heißt ein *faktorieller Ring* falls jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  sich als ein Produkt von einer Einheit und endlich vielen Primelemente von  $R$  schreiben lässt:  $a = u \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_m$  für  $u \in R^\times$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_m \in R$  prim.

**Beispiel.** Jeder Euklidische und jeder Hauptidealring. Es gibt noch weitere Bsp, wir werden zeigen, dass z.B.  $\mathbb{Z}[x, y, z]$  ein faktorieller Ring ist.

**Proposition.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Dann ist  $p \in R \setminus \{0\}$  irreduzibel gdw.  $p$  prim ist.

*Beweis.*  $\Leftarrow$ : ✓ schon gezeigt

$\Rightarrow$ : Sei also  $p$  irreduzibel. Dann ist  $p = u \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_n$  ein Produkt einer Einheit  $u \in R^\times$  und Primelementen  $q_1, \dots, q_n \in R$  nach Annahme an  $R$ . Da  $p$  irreduzibel ist folgt  $n = 1$  und  $(p) = (q_1)$ , womit  $(p)$  ein Primideal ist und  $p$  selbst ein Primelement ist.  $\square$

**Korollar.** Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann ist  $R$  faktoriell gdw. jedes Element von  $R \setminus \{0\}$  eine Zerlegung als ein Produkt von einer Einheit und endlich vielen irreduziblen Elementen besitzt und jedes irreduzible Element auch ein Primelement ist.

**Definition.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $a, b \in R$ . Wir sagen  $a, b$  sind *assoziiert* und schreiben  $a \sim b$  falls es eine Einheit  $u \in R^\times$  gibt mit  $a = ub$ .

**Lemma.** Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf  $R$ .

*Beweis.* •  $a \sim a$  da  $a = 1 \cdot a$  und  $1 \in R^\times$ .

•  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ : Gilt  $a = ub \Rightarrow b = u^{-1}a$  mit  $u^{-1} \in R^\times$ .

•  $a \sim b$  und  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ : Gilt  $a = ub$  und  $b = vc \Rightarrow a = (uv)c$  mit  $uv \in R^\times$ . Also  $a \sim c$ .  $\square$

**Lemma.** Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Seien  $p, q \in R \setminus \{0\}$  irreduzibel und  $p \mid q$ . Dann gilt  $p \sim q$ .

*Beweis.* Nach Annahme gibt es ein  $a \in R$  mit  $q = a \cdot p$ . Da  $q$  irreduzibel ist folgt  $a \in R^\times$  oder  $p \in R^\times$ . Da  $p$  irreduzibel ist, kann  $p \in R^\times$  nicht gelten. Also ist  $a \in R^\times$  und  $p \sim q$ .  $\square$

**Definition** (Wh.). Für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . sei  $S_n$  die *symmetrische Gruppe* auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$ , d.h.

$$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}.$$

**Satz** (Eindeutige Primfaktorzerlegung). Sei  $R$  ein faktorieller Ring, dann besitzt jedes nichttriviale Element von  $R$  eine bis auf Permutation und Assoziierung eindeutige Primfaktorzerlegung.

Genauer gilt also für jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  gibt es eine Einheit  $u \in R^\times$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , und Primelemente  $p_1, \dots, p_m$  mit  $a = up_1 \dots p_m$ .

Falls  $a = vq_1 \dots q_n$  eine weitere Zerlegung ist, wobei  $v \in R^\times$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $q_1, \dots, q_n$  prim sind, dann gibt es  $\sigma \in S_n$  so dass  $q_j \sim p_{\sigma(j)}$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $m = n$ .

Die Existenz der Zerlegung ist die Definition von „faktorieller Ring“. Wir nennen  $p_1, \dots, p_m$  die Primfaktorzerlegung von  $a$ .

*Beweis der Eindeutigkeit.* Angenommen  $a = up_1 \dots p_m = vq_1 \dots q_n$  mit  $u, v \in R^\times, m, n \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$  Primelemente in  $R$ . Falls  $n = 0$  ist, so ist  $a = v \in R^\times$ . Daraus folgt aber auch  $m = 0$  (Falls  $m > 0$  wäre, so folgt mit  $p_1 \mid a$  und  $a \mid 1$  dass  $p_1 \mid 1$  - ein Widerspruch zur Annahme an  $p_1$  prim).

Wir verwenden Induktion nach  $n$  und nehmen an, dass die Eindeutigkeit bereits gilt falls eine der beiden Zerlegungen weniger als  $n$  Faktoren besitzt. Wir nehmen an  $n > 0$ . Da  $a = up_1 \dots p_m = vq_1 \dots q_n$  gilt  $q_n \mid a$ . Da  $q_n$  ein Primelement von  $R$  ist, gibt es einen Index  $i = \sigma(n)$ , so dass  $q_n \mid p_{\sigma(n)}$ . Nach einem Lemma vom letzten Mal folgt daraus  $q_n \sim p_{\sigma(n)}$ . Wir verwenden nun die Induktionsannahme für

$$\frac{a}{q_n} = u \underbrace{\frac{p_{\sigma(n)}}{q_n}}_{\in R^\times} p_1 \dots p_{\sigma(n)-1} p_{\sigma(n)+1} \dots p_m = vq_1 \dots q_{n-1}.$$

Es folgt  $n - 1 = m - 1$  und es gibt eine Bijektion

$$\sigma : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, \sigma(n) - 1, \sigma(n) + 1, \dots, m\}$$

so dass  $q_j \sim p_{\sigma(j)}$  für  $j = 1, \dots, n - 1$ . Dies gilt auch für  $j = n$ . Dies beendet den Induktionsschritt.  $\square$

**Definition.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Wir sagen  $P \subseteq R$  ist eine *Repräsentantenmenge* (der Primelemente) falls jedes  $p \in P$  ein Primelement in  $R$  ist und es zu jedem Primelement  $q \in R$  ein eindeutig bestimmtes  $p \in P$  gibt mit  $q \sim p$ .

**Beispiel.** Für  $R = \mathbb{Z}$  betrachten wir  $P = \{p \in \mathbb{Z} \text{ prim und positiv}\}$ . Für  $R = K[x]$  betrachten wir

$$P = \{f \in K[x] \text{ irreduzibel und } f \text{ normiert}\}.$$

Normiert: Der führende Koeffizient von  $f$  ist gleich 1.

Für  $R = \mathbb{Z}[i]$  verwenden wir  $P = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}, a + ib \text{ prim und } -a < b \leq a\}$

**Lemma.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Dann existiert eine Repräsentantenmenge.

*Beweis.* Wir verwenden das Auswahlaxiom für die Menge  $\{[p]_\sim : p \in R \text{ prim}\}$  und erhalten  $P$  als Bild der Auswahlfunktion.  $\square$

**Satz** (Eindeutige Primfaktorzerlegung). Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $P \subseteq R$  eine Repräsentantenmenge. Dann besitzt jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  eine eindeutige Primfaktorzerlegung der Form

$$a = u \prod_{p \in P} p^{n_p} \left[ = u \prod_{\substack{p \in P \\ n_p > 0}} p^{n_p} \right]$$

wobei  $n_p = 0$  für alle bis auf endlich viele  $p \in P$ .

*Beweis der Existenz.* Falls  $a \in R^\times$  so setzen wir  $u = a$  und  $n_p = 0$  für alle  $p \in P$ . Ansonsten ist  $a = up_1 \dots p_n$ , wie in der Definition von faktoriellen Ringen. Zu jedem  $p_j$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $p \in P$  mit  $p_j \sim p$ . Damit erhalten wird

$$a = u \underbrace{\frac{p_1 \dots p_m}{\prod_{p \in P} p^{n_p}}}_{\in R^\times} \prod_{p \in P} p^{n_p}$$

wobei  $n_p = \#j$  mit  $p_j \sim p$ . □

*Beweis der Eindeutigkeit.* Angenommen  $a = u \prod_{p \in P} p^{n_p} = v \prod_{p \in P} p^{n'_p}$ . Falls  $n'_p = 0$  für alle  $p \in P$ , so ist  $a = v \in R^\times$  und  $n_p = 0$  für alle  $p \in P$  und  $a = u$ .

Ansonsten ist  $n'_p > 0$  für ein  $p_0 \in P$  und daher gilt  $p_0 \mid a = u \prod_{p \in P} p^{n_p}$ , was  $n_{p_0} > 0$  impliziert auf Grund der Eigenschaften der Repräsentantenmenge. Wir verwenden Induktion nach  $\sum_{p \in P} n'_p$ . □

**Lemma.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $P \subseteq R$  eine Repräsentantenmenge. Sei  $a = u \prod_{p \in P} p^{m_p}$  und  $b = v \prod_{p \in P} p^{n_p}$ . Dann gilt  $a \mid b$  gdw.  $m_p \leq n_p$  für alle  $p \in P$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $b = ac$  und  $c = w \prod_{p \in P} p^{k_p}$ . Dann folgt

$$v \prod_{p \in P} p^{n_p} = b = uw \prod_{p \in P} p^{m_p + k_p}$$

und daher  $n_p = m_p + k_p \geq m_p$  für alle  $p \in P$ .

„ $\Leftarrow$ “: Wir definieren  $c = vu^{-1} \prod_{p \in P} p^{n_p - m_p} \in R$ . Dann gilt

$$ac = u \prod_{p \in P} p^{m_p} \cdot vu^{-1} \prod_{p \in P} p^{n_p - m_p} = v \prod_{p \in P} p^{n_p} = b.$$

also  $a \mid b$ . □

**Proposition** (ggT). Sei  $R$  ein faktorieller Ring mit Repräsentantenmenge  $P$ . Dann existiert für jedes Paar  $a, b \in R$ , nicht beide 0, ein ggT. Falls  $a = u \prod_{p \in P} p^{m_p}, b = v \prod_{p \in P} p^{n_p}$  ist, so ist  $\prod_{p \in P} p^{\min(m_p, n_p)}$  ein ggT von  $a$  und  $b$ .

*Beweis.* Wir haben  $d \mid a$  und  $d \mid b$  auf Grund des Lemmas. Falls  $t = w \prod_{p \in P} p^{k_p}$  ein weiterer gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, so folgt  $k_p \leq m_p, k_p \leq n_p$  und damit  $k_p \leq \min(m_p, n_p)$  für alle  $p \in P$ . Daraus folgt  $t \mid d$ . □

Wir können analog den ggT von mehreren Elementen  $a_1, \dots, a_l \in R$  definieren und die obige Proposition gilt analog.

**Definition.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Wir sagen  $a_1, \dots, a_l \in R$  sind *coprim* falls 1 ein ggT von  $a_1, \dots, a_l$  ist, oder äquivalenterweise falls es zu jedem Primelement  $p$  in  $R$  ein  $a_j$  gibt so dass  $a_j$  nicht durch  $p$  teilbar ist.

**Korollar.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper  $K$ . Dann hat jedes  $x \in K$  eine Darstellung  $x = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \in R$  coprim,  $b \neq 0$ .

*Beweis.* Angenommen  $x = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \in K$  und sei  $d$  der ggT von  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$ . Wir definieren  $a = \frac{\tilde{a}}{d}$  und  $b = \frac{\tilde{b}}{d}$  und erhalten, dass  $a, b$  coprim sind und

$$x = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\frac{\tilde{a}}{d}}{\frac{\tilde{b}}{d}} = \frac{a}{b}.$$

□

**Korollar.** Sei  $R$  faktoriell und  $K = \text{Quot}(R)$ . Dann hat jedes  $x \in K$  eine Darstellung der Form

$$x = u \prod_{p \in P} p^{n_p},$$

wobei  $n_p \in \mathbb{Z}$  und gleich 0 für alle bis auf endlich viele  $p \in P$  ist.

**Beispiel** (Ein Gegenbeispiel). Wir definieren  $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subseteq K = \mathbb{Q}[i\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{C}$ . Also  $R = \{a + i\sqrt{5}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Zerlegungen der 6 :

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

1. Behauptung: 2, 3,  $1 \pm i\sqrt{5}$  sind alle irreduzibel in  $R$ .
2. Behauptung:  $2 \nmid 1 \pm i\sqrt{5}$  und  $3 \nmid 1 \pm i\sqrt{5}$ .

*Beweis der 2. Behauptung.*

$$\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{5}\frac{1}{2} \notin R \quad \text{und} \quad \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3} \pm i\sqrt{5}\frac{1}{3} \notin R.$$

Folgt die 2. Behauptung. □

**2 ist irreduzibel:**

Angenommen  $2 = z \cdot w$ ,  $z, w \in R$ . Wir verwenden die Normfunktion  $N(a + i\sqrt{5}b) = |a + i\sqrt{5}b|^2 = a^2 + 5b^2$  für  $a + i\sqrt{5}b \in R$  hat diese Normfunktion Werte in  $\mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow 4 = N(2) = N(z)N(w) \Rightarrow N(z), N(w) \in \{1, 2, 4\}.$$

2 kann nicht sein also  $\{N(z), N(w)\} = \{1, 4\}$ . Falls  $N(z) = 1$  ist, so ist  $z \pm 1$  eine Einheit in  $R$ . Analog für  $N(w) = 1$ .

**3 ist irreduzibel:**

Analog:  $N(z) = 3 = a^2 + 5b^2$  ist nicht möglich.

**Auch  $1 \pm i\sqrt{5}$  sind irreduzibel:**

$1 \pm i\sqrt{5} = zw \Rightarrow N(1 \pm i\sqrt{5}) = 6 = N(z)N(w) \Rightarrow N(z)N(w) \in \{1, 2, 3, 6\}$  Also ist  $z$  oder  $w$  eine Einheit in  $R$ .

Beispiele dieser Art führten zur Erfindung von „idealisierten Primfaktoren“ (heute Primideale).  
 $(6) = (2, 1 + i\sqrt{5})^2(3, 1 + i\sqrt{5})(3, 1 - i\sqrt{5})$

## 2.4 Einige algebraische Euklidische Ringe

Alle Beispiele, die wir hier betrachten wollen, leben in einem quadratischen Zahlkörper:  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  mit  $d \in \mathbb{Z}$ , das kein Quadrat ist. Isomorph dazu  $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$ .

Wir definieren auf  $K$  die Konjugation  $\tau : K \rightarrow K, a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$ . Dies definiert einen Körperautomorphismus.

*Beweis.* Wir definieren  $\text{ev}_{\sqrt{d}} : \mathbb{Q}[x] \rightarrow K, f \mapsto f(\sqrt{d})$ .  $\text{ev}_{\sqrt{d}}(x^2 - d) = 0$ . Da  $x^2 - d$  keine Nullstellen in  $\mathbb{Q}$  hat (Annahme an  $d$ ), ist  $x^2 - d$  irreduzibel/prim in  $\mathbb{Q}[x]$ . Daher folgt  $(x^2 - d)$  ist ein Maximalideal. Gemeinsam mit  $(x^2 - d) \subseteq \text{Ker}(\text{ev}_{\sqrt{d}})$ , erhalten wir  $(x^2 - d) = \text{Ker}(\text{ev}_{\sqrt{d}})$ . Der erste Isomorphiesatz ergibt nun

$$\mathbb{Q}[x]/(x^2 - d) = \mathbb{Q}[x]/\text{Ker}(\text{ev}_{\sqrt{d}}) \xrightarrow{\varphi_+} \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = K.$$

Beweis Körperautomorphismus:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\varphi_+} & \mathbb{Q}[x]/(x^2 - d) & \xrightarrow{\varphi_-} & K \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \tau & & \\ \sqrt{d} & \longmapsto & X + (x^2 + d) & \longmapsto & -\sqrt{d} \end{array}$$

Wobei der Isomorphismus  $\varphi_+$  Auswertungen bei  $\sqrt{d}$  verwendet und analog dazu der Isomorphismus  $\varphi_-$  Auswertungen bei  $\sqrt{-d}$  verwendet.  $\square$

Auf  $K$  definieren wir die Normfunktion

$$N(a + b\sqrt{d}) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$

so dass  $N : K \rightarrow \mathbb{Q}$  multiplikativ ist, daher

$$N(zw) = (zw) \underbrace{\tau(zw)}_{\tau(z)\tau(w)} = N(z)N(w) \quad \text{für } z, w \in K.$$

Weiters  $N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$  für alle  $z = a + b\sqrt{d} \in K$ .

Wir werden den Ring  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  betrachten und wollen  $\phi(z) = |N(z)|$  als Gradfunktion verwenden.

**Satz.** Für  $d = -1, -2, 2, 3$  ist  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  ein Euklidischer Ring, wobei wir  $\phi(z) = |N(z)|$  als Gradfunktion verwenden.

*Beweis.* Seien  $f, g \in R, f \neq 0$ . Wir definieren  $z = \frac{g}{f} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = a + b\sqrt{d}$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Wir definieren  $q = \underbrace{[a]}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{[b]}_{\in \mathbb{Z}} \sqrt{d} \in R$  als die beste Approximation. Dann gilt

$$\phi(z - q) = |N(z - q)| = \left| \underbrace{(a - [a])^2}_{\leq \frac{1}{4}} - d \underbrace{(b - [b])^2}_{\leq \frac{1}{4}} \right| \leq \frac{1}{4} + |d| \frac{1}{4} < 1 \quad (*)$$

für  $d = -1, -2, 2$ . Für  $d = 3$  gilt in  $(*)$  Gleichheit, aber da die beiden Ausdrücke im Absolutbetrag verschiedene Vorzeichen haben, gilt auch hier  $\phi(z - q) < 1$ .

Wir definieren  $r = g - f \cdot q \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ , und erhalten  $g = fq + r$  und

$$\phi(r) = |N(r)| = |N(g - f \cdot q)| = |N(f)N(z - q)| < |N(f)| = \phi(f).$$

$\square$

Sei  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .

**Lemma.** Es gilt  $u \in R^\times \Leftrightarrow N(u) = \pm 1$ .

**Lemma.** Falls  $z \in R$  eine Primzahl in  $\mathbb{Z}$  als Norm hat, so ist  $z$  in  $R$  irreduzibel.

**Lemma.** Falls  $p \in \mathbb{Z}$  eine Primzahl in  $\mathbb{Z}$  ist, so dass weder  $p$  noch  $-p$  eine Norm von einem Element in  $R$  ist, so ist  $p$  ein irreduzibles Element in  $R$ .

*Beweis von Lemma 1.* Sei  $u \in R^\times$ . Dann gibt es  $v \in R^\times$  mit  $uv = 1$ . Daraus folgt  $\underbrace{N(u)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{N(v)}_{\in \mathbb{Z}} = N(uv) = 1$  und daher  $N(u) = \pm 1$ .

Angenommen  $u \in R$  erfüllt  $N(u) = \pm 1$ . Dann gilt  $u \cdot (\pm \tau(u)) = \pm N(u) = 1$  also  $u^{-1} = \pm \tau(u)$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 2.* Angenommen  $z \in R$  erfüllt  $N(z) = p$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}$  eine Primzahl ist. Angenommen  $z = v \cdot w$  für  $v, w \in R$ . Dann folgt  $p = N(z) = N(v)N(w)$ . Da  $p \in \mathbb{Z}$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}$  ist, folgt daraus  $\underbrace{N(v) = \pm 1}_{v \in R^\times}$  oder  $\underbrace{N(w) = \pm 1}_{w \in R^\times}$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 3.* Sei  $p \in \mathbb{Z}$  prim und weder  $p$  noch  $-p$  eine Norm. Angenommen  $p = vw$  für  $v, w \in R$ . Dann folgt  $p^2 = N(p) = N(v)N(w)$ . Da  $p$  eine Primzahl ist folgt daraus  $N(v), N(w) \in \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\}$ . Wobei  $\pm p$  nach Annahme nicht auftritt. Also gilt  $\underbrace{N(v) = \pm 1}_{v \in R^\times}$  (und  $N(w) = \pm p^2$ )

oder  $\underbrace{N(w) = \pm 1}_{w \in R^\times}$  (und  $N(v) = \pm p^2$ ).  $\square$

**Satz** (Gaußsche ganze Zahlen). Sei  $R = \mathbb{Z}[i]$  der Ring der Gaußschen ganzen Zahlen. Dann ist  $R$  ein Euklidischer Ring. Wir können in  $R$  die Repräsentantenmenge

$$P = \{z = a + ib \in R \mid z \text{ prim, } -a < b \leq a\}$$

verwenden. Diese Menge  $P$  enthält

- (Ramified):  $z = 1 + i$  mit  $2 = -i(1 + i)^2$
- (Inert):  $p \in \mathbb{N}$  prim mit  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , z.B. 3, 7, 11, ...
- (Split):  $z = a \pm bi$  prim in  $R$ , wobei  $a, b \in \mathbb{N}, b < a$  und  $a^2 + b^2 = p = 1 \pmod{4}$  mit  $p \in \mathbb{N}$  prim.  $p = (a + ib)(a - ib)$  z.B. 5, 13, ...

**Lemma.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim. Dann ist  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

*Beweis.*

$$(p - 1)! = \prod_{k=1}^{p-1} k \stackrel{(*)}{\equiv} 1 \cdot \left( \prod_{\substack{1 < a < p < p-1 \\ a \cdot b = 1 \pmod{p}}} (ab) \right) \cdot (p - 1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wann gilt  $x = x^{-1}$  für  $x \in \mathbb{F}_p^\times$ ?

$$x = x^{-1} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

in  $\mathbb{F}_p$  ist. Dies beweist (\*).  $\square$

**Proposition.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  kongruent  $1 \pmod{4}$ . Dann gibt es in  $\mathbb{F}_p$  zwei Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 = -1$ .

**Beispiel.**  $p = 5, x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 = -1$  in  $\mathbb{F}_5$ .  
 $p = 13, x = 5 \Rightarrow x^2 = 25 = -1$  in  $\mathbb{F}_{13}$ .

*Beweis.* Wir definieren  $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$  in  $\mathbb{F}_p$ . Dann gilt

$$x^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\frac{p-1}{2} \text{ -Faktoren}} \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

und  $\frac{p-1}{2}$  ist gerade.

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right) \left(-\frac{p-1}{2}\right) \dots (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right) \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) \dots (p-3) \cdot (p-2) \cdot (p-1) \\
&= (p-1)! = -1 \text{ in } \mathbb{F}_p.
\end{aligned}$$

□

**Korollar.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  kongruent 1 mod 4. Dann ist  $p$  keine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$ .

*Beweis.* Wir betrachten  $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$ ,  $a+ib+(p) \mapsto a+bX \pmod{p}$ . Aber  $x^2+1$  ist über  $\mathbb{F}_p$  nicht irreduzibel, da  $x^2+1$  zwei Nullstellen in  $\mathbb{F}_p$  hat (siehe Proposition). Also ist  $\mathbb{Z}[i]/(p)$  kein Integritätsbereich und  $p$  kein Primelement. □

*Alternativer Beweis.* Angenommen  $a \in \mathbb{Z}$  erfüllen  $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Insbesondere gilt damit  $p \mid (a^2+1) = (a^2-i^2) = (a+i)(a-i)$ . Da aber  $a \in \mathbb{Z}$  ist, gilt  $p \nmid (a+i)$  und  $p \nmid (a-i)$ . □

*Beweis der Beschreibung der Primzahlen in  $\mathbb{Z}[i]$ .*  $N(1+i) = 2$  und Lemma 2 zeigt, dass  $1+i$  irreduzibel, also prim, ist. Angenommen  $p \in \mathbb{N}$  ist kongruent 3 mod 4. Dann gilt

$$p \neq a^2 + b^2 \in \{0, 1, 2 \pmod{4}\}$$

für  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt  $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Also ist  $p$  (und auch  $-p$ ) keine Norm  $N(a+ib) = a^2 + b^2 > 0$  eines Elements von  $\mathbb{Z}[i]$ . Lemma 3 zeigt also, dass  $p$  eine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$  ist.

Sei nun  $p \in \mathbb{N}$  kongruent 1 mod 4 und prim in  $\mathbb{Z}$ . Dann ist  $p$  keine Primzahl in  $\mathbb{Z}[i]$  wegen dem Korollar. Also kann Lemma 3 nicht angewendet werden und daher gibt es ein  $z \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $\underbrace{N(z)}_{>0} = p$ . Anders formuliert haben wir also  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $p = a^2 + b^2$  gefunden. O.B.d.A. dürfen wir  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $b < a$  annehmen. Dann gilt  $a+ib, a-ib \in P$ ,  $p = (a+ib)(a-ib)$  und  $a \pm ib$  sind nicht assoziiert, da  $\pm 1, \pm i$  die einzigen Einheiten sind und der Winkel zwischen  $a+ib$  und  $a-ib$  echt kleiner als  $90^\circ$  ist.

Wir zeigen noch, dass obige drei Fälle alle Primzahlen in  $P \subseteq \mathbb{Z}[i]$  liefern. Angenommen  $z \in \mathbb{Z}[i]$  ist eine Primzahl. Dann ist  $n = N(z) = z\bar{z}$  eine natürliche Zahl. Sei  $p \in \mathbb{N}$  ein Primfaktor von  $n$ .

- $p = 2 \Rightarrow 2 = (1+i)(1-i) \mid n = z\bar{z} \Rightarrow (1+i) \mid z\bar{z} \Rightarrow 1+i \mid z$  oder  $1+i \mid \bar{z}$ . Folgt  $1-i \mid z$ . Also  $1+i \sim z$  und  $1+i \sim 1-i \sim z$ .
- $p \equiv 3 \pmod{4}$ : Und  $p \mid z\bar{z}$  und  $p$  ist prim in  $\mathbb{Z}[i]$ . Also  $p \mid z$  oder  $p \mid \bar{z}$ . Und somit  $p \sim z$ .
- $p \equiv 1 \pmod{4}$ :  $(a+ib) \mid p = (a+ib)(a-ib) \mid z\bar{z}$ . Folgt  $a+ib \mid z \Rightarrow a+ib \sim z$  oder  $a+ib \sim \bar{z} \Rightarrow a-ib \mid z \Rightarrow a-ib \sim z$ .

□

**Satz.** Im  $R_{falsch} = \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$  funktioniert Division mit Rest nicht wie in den obigen Fällen. Aber in  $R_{richtig} = \mathbb{Z}[\zeta] = \{a+b\zeta : a, b \in \mathbb{Z}\}$  für  $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$  funktioniert dies wieder.

*Beweis Skizze.*  $z = \frac{a}{f} = (a + \frac{1}{2}) + (b + \frac{1}{2})\sqrt{3}i$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  hat Abstand 1 zu allen Elementen von  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$ . Beweis scheitert für  $R_{falsch}$ .

Aber in diesem Fall ist  $z \in R_{richtig}$  und deswegen hat es Abstand 0 zu sich selbst. Beweis klappt nun.

□



## 2.5 Polynomringe

Seite 108

**Satz** (Gauss). Falls  $R$  ein faktorieller Ring ist, so ist auch  $R[x]$  ein faktorieller Ring.

**Korollar.** Der Ring  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  und der Ring  $K[x_1, \dots, x_n]$  für einen Körper  $K$  sind faktoriell.

**Definition.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $f \in R[x] \setminus \{0\}$ . Dann nennen wir den ggT der Koeffizienten von  $f$  den *Inhalt*  $I(f)$  von  $f$  (welcher bis auf Einheiten in  $R$  eindeutig bestimmt ist).

Wir sagen  $f$  ist *primitiv* falls  $I(f) \sim 1$ .

**Beispiel.** Sei  $R = \mathbb{Z}$ . Dann ist  $I(2x + 2) \sim 2$  und  $3x + 2$  ist primitiv.

### Beobachtungen

- Jedes normierte Polynom ist primitiv.
- Für  $a \in R \setminus \{0\}, f \in R[x] \setminus \{0\}$  gilt  $I(af) \sim aI(f)$ .
- Falls  $f \in R[x]$  irreduzibel ist, so ist entweder  $f \in R$  oder  $f$  ist primitiv. (Grad  $f = 0 \Rightarrow f \in R$ , Grad  $f > 0 \Rightarrow f = af^*, a \in R, f^*$  primitiv. Folgt  $a$  oder  $f^*$  ist eine Einheit  $\Rightarrow \deg(f^*) = \deg(f) > 0$  also  $f^*$  ist keine Einheit)

**Lemma.** Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $K = \text{Quot}(R)$ . Dann hat jedes  $f \in K[x] \setminus \{0\}$  eine Darstellung  $f = df^*$  wobei  $d \in K^\times$  und  $f^* \in R[x]$  ist primitiv. Diese Darstellung ist bis auf Assoziierung eindeutig:

Falls  $f = d_1 f_1^* = d_2 f_2^*, d_1, d_2 \in K^\times, f_1^*, f_2^* \in R[x]$  primitiv, dann ist  $d_1 \sim_R d_2, f_1^* \sim_R f_2^*$ .

Wobei  $\sim_R$  assoziiert über eine Einheit in  $R$  bedeutet.

*Beweis.* Sei  $f = \sum_{i=0}^n \underbrace{a_i}_{\in K} x^i \in K[x] \setminus \{0\}$  und  $a_i = \frac{b_i}{c_i}$  für  $b_i, c_i \in R, c_i \neq 0$  für  $i = 0, \dots, n$ . Wir definieren

$$g = \left( \prod_{i=0}^n c_i \right) f \in R[x]$$

Sei  $\underbrace{d}_{\in R} \sim I(g)$  ein ggT der Koeffizienten von  $g$ . Dann ist  $g = d'g^*$  für ein primitives  $g^* \in R[x]$ .

$$\Rightarrow f = \frac{d'}{\underbrace{\prod_{i=0}^n c_i}_d} g^* \quad \text{mit} \quad d \in K^\times, f^* \in R[x] \text{ primitiv.}$$

Wir erhalten die Existenzaussage im Lemma.

Sei nun  $f = d_1 f_1^* = d_2 f_2^*$ . Wir schreiben  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{a_1}{a_2}$  mit  $a_1, a_2 \in R$  coprim.

$$f_2^* = \frac{d_1}{d_2} f_1^* = \frac{a_1}{a_2} f_1^* \Rightarrow a_1 f_1^* = a_2 f_2^* \Rightarrow a_1 \sim I(a_1 f_1^*) \sim I(a_2 f_2^*) \sim a_2.$$

Aus  $a_1, a_2$  coprim folgt nun  $a_1 \sim 1 \sim a_2$ .

Wir haben also  $\frac{d_1}{d_2} \in R^\times$  gezeigt was genau  $d_1 \sim_R d_2$  und  $f_1^* \sim_R f_2^*$  bedeutet.  $\square$

**Definition.** Für  $f \in K[x] \setminus \{0\}$  nennen wir das  $d \in K^\times$  mit  $f = df^*, f^* \in R[x]$  primitiv, wieder den *Inhalt* von  $f$ .

**Proposition** (Gauss). Sei  $R$  faktoriell. Für  $f, g \in R[x]$  gilt  $I(fg) \sim I(f)I(g)$ . Insbesondere ist das Produkt von primitiven Elementen von  $R[x]$  wieder primitiv.

Im folgenden werden wir die „Reduktion der Koeffizienten“ verwenden: Für ein  $p \in R$  gibt es einen Ringhomomorphismus  $f \in R[x] \mapsto f \bmod p \in R/(p)[x]$ ,  $\sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n (a_i + (p)) X^i$ . Dies folgt aus dem Satz von 4. VO (wobei  $\varphi(a) = a + (p)$  und  $\Phi(X) = X$ ).

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die zweite Aussage der Proposition. Seien also  $f, g \in R[x]$  primitive Polynome. Sei  $p \in R$  ein Primelement. Dann gilt  $f \bmod p \neq 0$  und  $g \bmod p \neq 0$ . Da  $p$  ein Primelement ist, ist  $R/(p)$  ein Integritätsbereich. Daraus folgt, dass  $R/(p)[x]$  auch ein Integritätsbereich ist. Daher ist also

$$(fg) \bmod p = f \bmod p g \bmod p \neq 0.$$

Anders formuliert, sind also nicht alle Koeffizienten von  $fg$  durch  $p$  teilbar. Da  $p \in R$  ein beliebiges Primelement war, sehen wir, dass  $fg$  ein primitives Polynom ist.

Seien nun  $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt  $f = af^*, g = bg^*$  für  $a \sim I(f), b \sim I(g)$ ,  $f^*, g^* \in R[x]$  primitiv.

$$\Rightarrow fg = ab \underbrace{f^* g^*}_{\in R[x]}$$

ist primitiv. Aus der Eindeutigkeit im Lemma folgt nun  $I(fg) \sim_R ab \sim_R I(f)I(g)$  □

**Satz (Gauss).** Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Dann ist auch  $R[x]$  faktoriell. Des Weiteren hat  $R[x]$  genau die beiden Typen von Primelementen:

- $p \in R$  prim ist auch ein Primelement von  $R[x]$ .
- $f \in R[x]$  primitiv so dass  $f$  irreduzibel als Element von  $K[x]$  ist, ist ein Primelement von  $R[x]$ .

**Korollar.** Sei  $f \in R[x]$  primitiv. Dann ist  $f$  irreduzibel als Element von  $R[x]$  gdw.  $f$  ist irreduzibel als Element von  $K[x]$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die beiden Typen von Primelementen im Satz tatsächlich Primelemente von  $R[x]$  sind.

- Sei  $p \in R$  ein Primelement. Dann ist

$$R[x]/(p)_{R[x]} \cong R/(p)_R[x]. \quad (*)$$

Warum:  $\Phi : R[x] \rightarrow R/(p)_R[x], f \mapsto f \bmod p$  ist ein Ringhomomorphismus. Der Kern von  $\Phi$  besteht aus allen  $f \in R[x]$  so dass  $p$  alle Koeffizienten teilt - oder aus  $\text{Ker}(\Phi) = (p)_{R[x]}$ . Also folgt (\*) aus dem ersten Isomorphiesatz.

Da  $R/(p)_R[x]$  ein Integritätsbereich ist, folgt, dass  $p \in R[x]$  ein Primelement ist.

- Sei  $f \in R[x]$  primitiv und als Element von  $K[x]$  irreduzibel. Wir wollen zeigen, dass  $f$  ein Primelement in  $R[x]$  ist.

Angenommen  $f \mid gh$  in  $R[x]$  für  $g, h \in R[x]$ . Folgt  $f \mid gh$  in  $K[x]$ , da  $gh = qf$  für  $q \in R[x] \subseteq K[x]$ . Da  $f \in K[x]$  irreduzibel/prim ist, folgt  $f \mid g$  oder  $f \mid h$ . O.B.d.A. nehmen wir an  $f \mid g$ . Dann existiert ein  $q \in K[x]$  mit  $g = qf$ . Aus der Proposition folgt

$$I(q) \sim_R I(q) \underbrace{I(f)}_{\sim_R 1} \sim_R I(qf) \sim_R I(g) \in R$$

also auch  $I(q) \in R$ . Da  $q \sim I(q)q^*$  folgt also  $q \in R[x]$ . Wir sehen also  $f \mid g$  in  $R[x]$ .

Also sehen wir, dass  $f$  ein Primelement von  $R[x]$  ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass jedes irreduzible Element  $f \in R[x]$  ein Element vom Typ 1 oder Typ 2 wie im Satz ist. Da diese Elemente bereits als Primelemente in  $R[x]$  bekannt sind, folgt daraus insbesondere dass alle irreduziblen Elemente in  $R[x]$  auch Primelemente sind.

Sei also  $f \in R[x]$  irreduzibel.

- Falls  $\deg(f) = 0$  ist, so ist  $f \in R$  irreduzibel ( $R[x]^\times = R^\times$ ). Also ist  $f \in R$  prim nach Annahme an  $R$  und  $f$  ist vom Typ 1 und prim in  $R[x]$ .
- Sei nun  $\deg(f) > 0$ . Daraus folgt  $f$  ist primitiv. Wir müssen zeigen, dass  $f$  als Element von  $K[x]$  irreduzibel ist. Dann ist  $f$  vom Typ 2 und prim in  $R[x]$ .  
Angenommen  $f = gh$  für  $g, h \in K[x]$ . Nach einem früheren Lemma gilt  $g = cg^*, h = dh^*$   $c, d \in K, g^*, h^* \in R[x]$  primitiv.  $\Rightarrow f = (cd)g^*h^*$ , wobei  $g^*, h^*$  primitiv ist (siehe frühere Proposition).  $I(f) \sim 1 \sim cd$ , womit  $cd \in R^\times$ . Also ist  $f = (cdg^*)h^*$  eine Zerlegung von  $f$  als Produkt von  $cdg^* \in R[x]$  und  $h^* \in R[x]$ . Da  $f$  in  $R[x]$  irreduzibel ist, ist  $cdg^*$  oder  $h^*$  eine Einheit in  $R[x]$ . Dies zeigt, dass  $f$  in  $K[x]$  irreduzibel ist.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes  $f \in R[x] \setminus \{0\}$  ein endliches Produkt von endlich vielen Primelementen von  $R[x]$  ist. Auf Grund des früheren Lemmas gilt  $f = df^*$ , wobei  $d \in R \setminus \{0\}$  und  $f^* \in R[x]$  primitiv ist.  $d \in R \setminus \{0\}$  ist dabei ein endliches Produkt von Primelementen in  $R$  (welche Primelemente in  $R[x]$  vom Typ I sind und einer Einheit) - weil  $R$  faktoriell ist.  $f^* \in R[x]$  ist ein endliches Produkt von Primelementen vom Typ II und einer Einheit - wir können dies mittels Induktion nachdem Grad beweisen.

$\deg(f^*) = 0 \Rightarrow f^* \in R^*$  (Produkt ohne Primfaktoren)

$\deg(f^*) = 1 \Rightarrow f^*$  ist selbst irreduzibel, da  $f^*$  primitiv ist und als Element von  $K[x]$  irreduzibel ist.

Falls die Aussage für alle primitiven Elemente vom Grad kleiner als  $\deg(f^*)$  von bekannt ist, so unterscheiden wir die Fälle

- $f^*$  ist irreduzibel  $\checkmark$ .
- $f^* = gh$  für  $g, h \in R[x]$  (automatisch primitiv) beide nicht Einheiten.

Nach Induktionsannahme sind daher sowohl  $g$  als auch  $h$  endliche Produkte von Primelementen, womit dies auch für  $f^*$  gilt.  $\square$

**Lemma.** Sei  $K$  ein Körper und  $a \in K$ . Dann gilt für jedes  $f \in K[x]$

$$f(x) = (x - a)g(x) + r \quad \text{für} \quad g(x) \in K[x], r \in K.$$

Daher gilt  $f(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \mid f(x)$ .

**Proposition.** Sei  $K$  ein Körper. Dann sind lineare Polynome der Form  $x - a$  für  $a \in K$  irreduzibel als Elemente von  $K[x]$ . Für quadratische ( $\deg(f) = 2$ ) und kubische ( $\deg(f) = 3$ ) Polynome  $f \in K[x]$  gilt

$$f \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow f \text{ hat keine Nullstelle } (\forall a \in K \text{ gilt } f(a) \neq 0)$$

*Beweis.*  $\Leftarrow$ : Falls  $\deg(f) \in \{2, 3\}$  und  $f = gh$ ,  $g, h \notin K[x]^\times$ , dann gilt  $\deg(f) = \deg(g) + \deg(h)$  und daher ist mindestens ein Faktor von Grad 1. Falls  $\deg(g) = 1$  ist, so hat  $g$  eine Nullstelle und  $f(x) = g(x)h(x)$  ebenso.

$\Rightarrow$ : Falls  $f$  irreduzibel ist, so kann  $f$  wegen dem Lemma keine Nullstelle haben.  $\square$

**Satz** (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes Polynom  $f \in \mathbb{C}[x]$  mit  $\deg(f) > 0$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

Die irreduziblen Elemente von  $\mathbb{C}[x]$  sind genau die linearen Polynome. Insbesondere hat jedes  $f \in \mathbb{C}[x]$  eine Faktorisierung in Linearfaktoren

$$f(x) = a \prod_{j=1}^{\deg(f)} (x - z_j).$$

für gewisse  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $z_1, \dots, z_{\deg(f)} \in \mathbb{C}$ .

**Korollar** (Fundamentalsatz für  $\mathbb{R}$ ). *Ein Polynom in  $\mathbb{R}[x]$  ist irreduzibel gdw. entweder  $\deg(f) = 1$  ist oder  $\deg(f) = 2$  ist und  $f$  keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$  besitzt.*

*Beweis.* Wir müssen  $\Rightarrow$  beweisen. Nach obigem Satz gibt es für jedes  $f \in \mathbb{R}[x]$  mit  $\deg(f) > 0$  eine Nullstelle  $z \in \mathbb{C}$ . Falls  $z = a \in \mathbb{R}$  ist, so folgt  $(x - a) | f(x)$  also  $f(x) \sim (x - a)$ . Falls  $z \notin \mathbb{R}$  ist, so folgt  $0 = \bar{0} = \overline{f(z)} = f(\bar{z})$ . Daher hat  $f(x)$  in  $\mathbb{C}[x]$  die Teiler  $x - z$  und  $x - \bar{z}$ .

$$\Rightarrow (x - z)(x - \bar{z}) = (x^2 - \underbrace{(z + \bar{z})}_{2 \operatorname{Re}(z)}x + \underbrace{\bar{z}z}_{|z|^2}) | f(x) \text{ in } \mathbb{C}[x]$$

und auch in  $\mathbb{R}[x]$  z.B. wegen der Polynomdivision. Daher gilt  $f(x) \sim (x^2 - (2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2))$  und  $\deg(f) = 2$ ,  $f$  hat keine reellen Nullstellen.  $\square$

**Proposition.** *Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Sei  $f \in R[x]$  und  $\frac{a}{b} \in K$  mit  $b \neq 0$ ,  $(a, b)$  coprim. Falls  $f(\frac{a}{b}) = 0$  ist, so ist  $b$  ein Teiler von führenden Koeffizienten von  $f$  und  $a$  ein Teiler vom konstanten Term von  $f$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an  $f(\frac{a}{b}) = 0$  an. Also gilt  $(x - \frac{a}{b}) | f(x)$  in  $K[x]$ . Und auch  $(bx - a) | f(x)$  in  $K[x]$ . Dann gilt sogar  $(bx - a) | f(x)$  in  $R[x]$ .

Denn: Angenommen  $f(x) = (bx - a)h(x)$  für  $h(x) \in K[x]$ . Für den Inhalt der Polynome gilt daher  $I(f) \in R$ .

$$I(f) = I((bx - a)h(x)) \sim I(bx - a)I(h) \sim I(h) \in R(h = ch^*, c \sim I(h)).$$

Also folgt  $h(x) \in R[x]$  und daher  $(bx - a) | f(x)$  in  $R[x]$ .

Also  $f(x) = (bx - a)h(x)$  für  $h(x) \in R[x]$ .  $\Rightarrow$  führende Koeffizient von  $f = b \cdot$  (führender Koeffizient von  $h$ ). Und Konstanter Term von  $f = -a \cdot$  (konstanter Term von  $h$ ).  $\square$

**Beispiel.** Für welche  $a \in \mathbb{Z}$  ist  $f_a(x) = x^2 + ax + 1 \in \mathbb{Z}[x]$  irreduzibel?

Wegen der Proposition ist eine Nullstelle von  $f_a(x)$  in  $\mathbb{Q}$  automatisch  $\pm 1$  ( $f_a(\frac{p}{q}) = 0 \Rightarrow p | 1, q | 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = \pm 1$ ).

$$f_a(1) = 2 + a1 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \quad f_a(-1) = 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Hier ist  $f_a$  reduzibel. Für  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$  ist  $f_a \in \mathbb{Z}[x]$  irreduzibel ( $f_a$  ist primitiv und  $f_a \in \mathbb{Q}[x]$  ist irreduzibel da  $f_a$  keine Nullstellen hat).

**Beispiel.** Sei  $K$  ein Körper. Dann ist  $f(x, y) = y^3 - x^5 \in K[x, y]$  irreduzibel. In diesem Fall wollen wir das Diskutierte für  $R = K[x]$  verwenden und den Polynomring  $R[y]$ . Wir bemerken zuerst, dass  $f \in R[y]$  primitiv ist (da  $f$  als Polynom in  $y$  normiert ist und Koeffizienten in  $K[x]$  besitzt). Daher (Korollar von Satz von Gauss) ist  $f \in R[y]$  irreduzibel gdw.  $f$  als Element von  $\underbrace{\operatorname{Quot}(R)[y]}_{K[x]}$  irreduzibel ist.

Wir nehmen an,  $f$  ist nicht irreduzibel als Element von  $K(x)[y]$ . Also muss  $f$  eine Nullstelle in  $K(x)$  besitzen. Seien  $p, q \in K[x]$  coprim,  $q \neq 0$  mit  $f(\frac{p}{q}) = 0$ . Folgt  $q | 1$ . Also o.B.d.A.  $q = 1$  und  $f(p) = 0$ ,  $f(y) = y^3 - x^5 \Rightarrow p(x)^3 = x^5$  in  $K[x]$ . Insbesondere  $p(x) | x^5$ , also  $p(x) = ax^k \Rightarrow p(x)^3 = a^3x^{3k} = x^5$  ist unmöglich. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $f(y)$  keine Nullstelle in  $K(x)$  hat. Folgt  $f(y)$  ist irreduzibel als Element von  $K(x)[y]$  und primitiv in  $(K[x])[y]$  und daher irreduzibel in  $K[x, y]$ .

**Proposition.** *Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $p \in R$  ein Primelement. Angenommen  $f \in R[x]$  erfülle:*

- $f$  primitiv
- $\deg(f) = \deg(f \bmod p)$  mit  $f \bmod p \in R/(p)[x]$
- $f \bmod p \in \frac{R}{(p)}[x]$  ist irreduzibel

Dann ist  $f \in R[x]$  ein Primelement.

*Beweis.* Angenommen  $f = gh$  für  $g, h \in R[x]$ . Dann ist auch  $f \bmod p = g \bmod p h \bmod p$  in  $R/(p)[x]$ . Da  $f \bmod p$  irreduzibel ist, folgt nun, dass  $g \bmod p$  oder  $h \bmod p$  eine Einheit in  $R/(p)[x]$  sein muss. Also insbesondere gilt  $\deg(g \bmod p) = 0$  oder  $\deg(h \bmod p) = 0$ . O.B.d.A. ist  $\deg(g \bmod p) = 0$ . Also  $g \equiv a \bmod p$  für ein  $a \in R$ . Wir behaupten, dass dies  $\deg(g) = 0$  impliziert. Dies impliziert, dass  $g \mid I(f) \sim 1$  womit  $g \in R^\times = R[x]^\times$  ist. Da dies für beliebige Zerlegungen von  $f$  gilt, folgt daraus, dass  $f$  irreduzibel ist. Da  $R[x]$  faktoriell ist, ist  $f$  also auch ein Primelement.

*Beweis der Behauptung.* Zu zeigen  $g \equiv a \bmod p \Rightarrow \deg(g) = 0$  mit  $a \in R$

Angenommen dies stimmt nicht. Dann ist der führende Koeffizient von  $g$  durch  $p$  teilbar. Aber dann ist auch der führende Koeffizient von  $f$  (gleich dem Produkt der führenden Koeffizienten von  $g$  und  $h$ ) durch  $p$  teilbar. Dies widerspricht der Annahme, dass  $\deg(f) = \deg(f \bmod p)$  ist.  $\square$

$\square$

**Beispiel.** Sei  $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ . Wir wählen  $p = 5$  und wollen zeigen, dass  $f$  alle Voraussetzungen der Proposition erfüllt  $\Rightarrow f$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$ .

- primitiv  $\checkmark$
- $\deg(f \bmod 5) = 4 = \deg(f)$   $\checkmark$

Wir müssen noch zeigen, dass  $f \bmod 5 \in \mathbb{F}_5[x]$  irreduzibel ist.

Linearfaktoren als Teiler? Dies tritt genau dann ein wenn  $f \bmod 5$  in  $\mathbb{F}_5$  eine Nullstelle hat.

$$f(0) = 1 \neq 0 \text{ in } \mathbb{F}_5 \quad f(1) = 4 \neq 0 \text{ in } \mathbb{F}_5 \quad \dots$$

Insbesondere folgt daraus, dass es keine Zerlegung der Form linear mal kubisch in  $\mathbb{F}_5[x]$  gibt.

Wir müssen noch überprüfen, dass es keine Zerlegung der Form quadratisch mal quadratisch gibt. Überprüfe dies mit Sage oder per Hand.

Eine alternative Beweismethode für die Irreduzibilität von  $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ .

- $p = 2$ :  $x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \bmod 2 = (x+1)(x^3 + x + 1)$  beide Faktoren irreduzibel.
- $p = 3$ :  $x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 \bmod 3 = (x^2 + 1)^2$  ist irreduzibel.

*Behauptung.* Aus der Rechnung oben für  $p = 2$  und  $p = 3$  folgt, dass  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  irreduzibel ist.

Falls  $f = gh$ ,  $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ , keine Einheiten, führende Koeffizienten  $\pm 1$ , wäre, so wäre  $f \bmod 2 =$

$$g \bmod 2 h \bmod 2 \Rightarrow g \bmod 2 = \begin{cases} x+1 \\ x^3+x+1 \end{cases}. \text{ Und somit } \deg(g) \in \{1, 3\}. \text{ Mittels } p = 3 \text{ folgt}$$

analog  $\deg(g) = 2$ .  $\nexists$

**Satz** (Eisenstein-Kriterium). Sei  $R$  ein faktorieller Ring und  $p \in R$  ein Primelement. Sei  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  primitiv mit  $n \geq 1$ ,  $p \nmid a_n$ ,  $p \mid a_i$  für  $i = 0, \dots, n-1$  und  $p^2 \nmid a_0$ . Dann ist  $f$  irreduzibel.

*Beweis.* Angenommen  $f = gh$  für  $g, h \in R[x]$  beide keine Einheiten. Da  $f$  primitiv ist, gilt dies auch für  $g$  und  $h$ , womit  $k := \deg(g) > 0$  und  $l := \deg(h) > 0$  ist und  $k + l = n$  Modulo  $p$  folgt

$$f \bmod p = a_n x^n = g \bmod p h \bmod p.$$

Wir betrachten diese Gleichung als Faktorisierung in  $\text{Quot}(R/(p))[x]$ , wo  $a_n \neq 0$  eine Einheit und  $x$  ein Primfaktor ist. Es folgt, dass  $g \bmod p = bx^{k'}, k' < k, b \neq 0$  und  $h \bmod p = cx^{l'}, l' < l, c \neq 0$ . Des Weiteren gilt  $k' + l' = n$ , also  $k' = k > 0$  und  $l' = l > 0$ . Daraus folgt nun, dass  $p$  den konstanten Term von  $g$  und auch den konstanten Term von  $h$  teilt. Für  $f = gh$  folgt daraus, dass der konstante Term

$$a_0 = (\text{konstanter Term von } g)(\text{konstanter Term von } h)$$

durch  $p^2$  teilbar ist. Dies widerspricht unserer Annahme an  $f$  und wir erhalten, dass  $f$  irreduzibel ist.  $\square$

**Beispiel.** Das Polynom  $x^n - 2 \in \mathbb{Z}[x]$  ist für jedes  $n \geq 1$  irreduzibel. Dies folgt aus dem Eisensteinkriterium für  $p = 2$ .

**Korollar.** Für jede Primzahl  $p \in \mathbb{N}$  ist das  $p$ -te Kreisteilungspolynom

$$\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

in  $\mathbb{Z}[x]$  irreduzibel.

*Beweis.* Wir wollen das Eisenstein-Kriterium für

$$f(y) = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = y^{-1} \left( \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} y^k - 1 \right) = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} y^{k-1}$$

anwenden. Für  $k = p$  ist  $\binom{p}{p} = 1$  also ist  $f$  normiert und primitiv. Des Weiteren wissen wir  $p \mid \binom{p}{k}$  für  $k = 1, \dots, p-1$ . Der konstante Term von  $f$  entspricht  $k = 1$  und ist daher durch  $\binom{p}{1} = p$  gegeben. Dieser ist nicht durch  $p^2$  teilbar, womit  $f \in \mathbb{Z}[y]$  irreduzibel ist.

Wir wollen „ $x = y + 1$ “ verwenden: Die Ringe

$$\Psi : \mathbb{Z}[y] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x],$$

sind isomorph, wobei wir jeweils den Auswertungshomomorphismus verwenden um beide Abbildungen zu definieren:

$$\underbrace{\Psi(f(y))}_{\in \mathbb{Z}[y]} = f(x-1) \in \mathbb{Z}[x] \quad \underbrace{\tilde{\Psi}(g(x))}_{\in \mathbb{Z}[x]} = g(y+1) \in \mathbb{Z}[y].$$

Da  $f \in \mathbb{Z}[y]$  irreduzibel ist und  $\Phi_p(x)$  das Bild von  $f$  unter diesem Isomorphismus ist, folgt die Irreduzibilität von  $\Phi_p(x)$ .  $\square$

**Beispiel.** Für jedes  $n \geq 1$  ist

$$f(x, y, z) = x^n + y^n - z^n \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

irreduzibel. Wir setzen  $R = \mathbb{C}[y, z]$  und  $p = y - z \in R$ . Als Element von  $R[x]$  ist  $f$  normiert und daher primitiv. Da es abgesehen vom führenden Koeffizienten von  $f$  nur noch den konstanten Term gibt müssen wir  $p \mid y^n - z^n$  und  $p^2 \nmid y^n - z^n$  zeigen:

$$y^n - z^n = (y - z)(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1})$$

also  $p \mid y^n - z^n$ .

*Behauptung.*  $(y - z)$  teilt  $(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1})$  nicht.

$(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1})$  modulo  $y - z$  ist gleich  $nz^{n-1}$ , was nicht durch  $y - z$  teilbar ist.

*Bemerkung.* Für  $p \in \mathbb{N}$  prim gilt allerdings

$$(x + y - z)^p = x^p + y^p - z^p \in \mathbb{F}_p[x, y, z].$$

nicht irreduzibel.

# Kapitel 3: Gruppentheorie

## 3.1 Definition und Beispiele

**Definition.** Eine Menge  $G$  gemeinsam mit einer Abbildung  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  heißt eine Gruppe falls folgende Axiome erfüllt sind:

- 1) Assoziativität:  $\forall a, b \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 2) Einheit:  $\exists e \in G \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
- 3) Inverse:  $\forall a \in G \exists x \in G : a \cdot x = x \cdot a = e$  (wobei  $e$  wie in 2) ist)

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe. Die Einheit  $e$  wie in 2) ist eindeutig bestimmt durch  $e \cdot a = a$  für alle  $a \in G$ , oder auch durch  $e \cdot e = e$ . Für jedes  $a \in G$  ist die Inverse  $x \in G$  durch  $a \cdot x = e$  eindeutig bestimmt, wir schreiben  $a^{-1} = x$ . Insbesondere gilt  $e^{-1} = e$ ,  $(a^{-1})^{-1} = a$  und  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  für alle  $a, b \in G$ .

*Bemerkung.* Wir bezeichnen die Einheit auch als das Einselement und schreiben  $e = e_G = 1 = 1_G$ .

*Beweis.* Angenommen  $f \in G$  erfüllt  $f \cdot a = a$  für alle  $a \in G$  und  $e \in G$  erfüllt Axiom 2). Dann gilt  $f \stackrel{2)}{=} f \cdot e = e$ .

Angenommen  $f \in G$  erfüllt  $f \cdot f = f$ . Wir multiplizieren mit  $f^{-1}$  wie in Axiom 3) und erhalten

$$f = f \cdot \underbrace{(f \cdot f^{-1})}_e = (f \cdot f) \cdot f^{-1} = f \cdot f^{-1} = e.$$

Angenommen  $a \cdot y = e$  und  $x$  ist wie in Axiom 3). Dann gilt

$$x \cdot (a \cdot y) = x \cdot e = x \Leftrightarrow \underbrace{(x \cdot a)}_e \cdot y = x \Leftrightarrow x = y.$$

□

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $a, b \in G$ . Falls  $ab = ba$  gilt, so sagen wir, dass  $a$  und  $b$  kommutieren. Falls alle Paare in  $G$  kommutieren, so heißt  $G$  kommutativ oder auch abelsch.

*Bemerkung.* Für abelsche Gruppen verwenden wir manchmal auch additive Notation  $+$  :  $G \times G \rightarrow G$ .

**Definition.** Für eine Gruppe  $G$  und  $a \in G$  definiere wir die Potenzen von  $a$  durch

$$a^k := \begin{cases} \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k\text{-fache}} & \text{für } k > 0 \\ e & \text{für } k = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{|k|\text{-fache}} & \text{für } k < 0 \end{cases} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

**Lemma** (Potenzregel). a)  $a^k a^l = a^{k+l}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $(a^k)^l = a^{kl}$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .

c) Falls  $a, b \in G$  kommutieren so kommutieren auch  $a^k$  und  $b^l$  und es gilt  $(ab)^k = a^k b^k$ .



*Beweis.* Für  $k, l \geq 0$  mittels Induktion nach  $l$  :

1. IA:  $a^k a^0 = a^{k+0}$   
IS:  $a^k a^{l+1} = a^k a^l a = a^{k+l} a = a^{k+l+1}$  per rekursiver Definition
2. IA:  $(a^k)^0 = e = a^{k \cdot 0}$   
IS:  $(a^k)^{l+1} = (a^k)^l a^k = a^{kl} a^k \stackrel{a)}{=} a^{k(l+1)}$
3. IA:  $ab^0 = b^0 a$   
IS:  $ab^{l+1} = ab^l b = b^l ab = b^l ba = b^{l+1} a$  also  $a$  kommutiert mit  $b^l$ .  
IA:  $(ab)^0 = e = a^0 b^0$   
IS:  $(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab) = a^k b^k ab = a^{k+1} b^{k+1}$

Beweis für negative Potenzen analog. □

**Lemma** (Gleichungen und Kürzen). Für alle  $a, b \in G$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $x \in G$  mit  $ax = b$ , nämlich  $x = a^{-1}b$ . Für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $a = b \Leftrightarrow ac = bc \Leftrightarrow ca = cb$ .

*Beweis.* Angenommen  $ax = b$ , dann gilt  $\underbrace{a^{-1}a}_e x = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b$ . Und in der Tat gilt  $a(a^{-1}b) = b$ .

$\Rightarrow$  trivial

$\Leftarrow$ : Angenommen  $ac = bc$ , dann gilt  $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \Rightarrow ae = be \Rightarrow a = b$ . □

**Definition.** Angenommen  $G_1, G_2$  sind Gruppen. Ein *Homomorphismus* von  $G_1$  nach  $G_2$  ist eine Abbildung  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  mit  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  für alle  $a, b \in G_1$ . Wir definieren den *Kern*  $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}\{e_{G_2}\} = \{a \in G_1 \mid \varphi(a) = e_{G_2}\}$  und das *Bild*  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(G_1) = \{b \in G_2 \mid \exists a \in G_1 \text{ mit } \varphi(a) = b\}$ . Falls  $\varphi$  bijektiv ist, so sprechen wir auch von einem *Isomorphismus* der Gruppen und sagen  $G_1$  und  $G_2$  sind *isomorph*.

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Eine Untergruppe von  $G$  ist eine nichtleere Teilmenge  $H \subseteq G$  mit  $ab^{-1} \in H$  für alle  $a, b \in H$ . Wir schreiben  $H < G$ .

**Übung.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$ . Äquivalent sind:

- 1)  $H$  ist eine Untergruppe
- 2)  $e \in H$ , und  $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$  und  $a^{-1} \in H$
- 3)  $H$  ist eine Gruppe und  $\iota : H \rightarrow G$  ist ein Homomorphismus.

Falls  $|H| < \infty$ , so ist auch folgende Aussage mit obigen Aussagen äquivalent:

- 4)  $H$  ist nichtleer, und  $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ .

**Beispiel.** Für einen Homomorphismus  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  ist  $\text{Ker}(\varphi)$  eine Untergruppe von  $G_1$  und  $\text{Im}(\varphi)$  eine Untergruppe von  $G_2$ .

**Beispiel.** 1.  $\{1\}$

2. Addition in Ringen (und Körper) und Vektorräume.
3. Die Gruppe  $R^\times$  der Einheiten in einem Ring. Insbesondere  $K^\times = K \setminus \{0\}$  für einen Körper. Also  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bzw  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
4. Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Dann ist  $\text{Bij}(M) = \{\varphi : M \rightarrow M \text{ bijektiv}\}$  eine Gruppe (bzgl. Verknüpfung der Abbildungen). Falls  $M = \{1, \dots, n\}$  für ein  $n \geq 1$ , so nennen wir  $\text{Sym}_n = S_n = \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$  auch die *symmetrische Gruppe*.
5. Sei  $M$  eine nichtleere Menge mit „einer Struktur“. Dann ist

$$\text{Aut}(M) = \{\varphi : M \rightarrow M \text{ bijektiv \& „strukturertretend“} \}$$

oft eine Gruppe.

$M$ & Struktur auf $M$	$\text{Aut}(M)$
$M$ & ohne Struktur	$\text{Bij}(M)$
$V$ Vektorraum über einem Körper	$\text{GL}(V)$
$K \supseteq \mathbb{Q}$ ein Körper	$\text{Gal}(K : \mathbb{Q}) = \{\varphi : K \rightarrow K : \mathbb{Q}\text{-linear, bijektiv und } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\}$ (Galois-Gruppe von $K$ )
$G$ eine Gruppe	$\text{Aut}(G) = \{\varphi : G \rightarrow G \underbrace{\text{Isomorphismus von } G \text{ nach } G}_{\text{Automorphismus von } G}\}$
Affine reelle Ebene	$\text{GL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$
Euklidische reelle Ebene	$O_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$
Sphärische Geometrie	$O_3(\mathbb{R})$
Hyperbolische Ebene	$\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R}), P\text{GL}_2(\mathbb{R})$ ( $P$ für Projektiv, also, dass man das Zentrum rausfaktoriert)
$\vdots$	
Topologischer-Raum $X$	$\text{Homöo}(X) = \{\varphi : X \rightarrow X \text{ bijektiv, stetig, } \varphi^{-1} \text{ stetig}\}$
Mannigfaltigkeit $M$	$\text{Diffo}^\infty(M) = \{\varphi : M \rightarrow M \text{ bijektiv, stetig, glatt und ebenso } \varphi^{-1}\}$
$M = \text{regelmäßiges Polygon in } \mathbb{R}^2$	Diedergruppe $D_n = \{\text{lineare Abb. in } \text{GL}_2(\mathbb{R}), \text{ die } M \text{ auf sich abbilden}\}$
$M = \text{Platonische Körper im } \mathbb{R}^3$	
$M = \text{Zauberwürfel Rubik's Cube}$	Bewegungen des Zauberwürfels

6. Sei  $K$  ein Körper. Dann ist

$$\text{GL}_n(K) = \{A \in \text{Mat}_{nn}(K) : A \text{ invertierbar}\}$$

ein Gruppe. Falls  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$  ist, so ist  $\text{GL}(V)$  isomorph zu  $\text{GL}_n(K)$  - dies ist mit der Auswahl einer Basis von  $V$  gleichzusetzen. Des Weiteren ist

$$\det : \text{GL}_n(K) \rightarrow K^\times.$$

ein Gruppenhomomorphismus und  $\text{Ker}(\det) = \text{SL}_n(K)$ .

7. .

$(0, \infty) < \mathbb{R}^\times$  ist eine Untergruppe.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \text{Ker}(|\cdot|) < \mathbb{C}^\times$  ist eine Untergruppe.

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$  ist ein Homomorphismus.

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ist ein Homomorphismus.

$$\text{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$$

8.  $G_1 \times G_2$  ist eine Gruppe (komponentenweisen Operationen) falls  $G_1, G_2$  Gruppen sind.

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $a \in G$ . Dann definiert  $k \in \mathbb{Z} \mapsto a^k \in G$  einen Gruppenhomomorphismus. Entweder ist  $\varphi$  injektiv oder es gibt ein  $n_0 > 0$  mit  $\text{Ker}(\varphi) = (n_0) = \mathbb{Z}n_0$ .

**Definition.** Falls  $\varphi$  wie im Lemma injektiv ist, so sagen wir, dass  $a$  unendliche Ordnung hat. Falls  $\text{Ker}(\varphi) = (n_0)$  mit  $n_0 > 0$  ist, so sagen wir, dass  $a$  Ordnung  $n_0$  hat.

*Beweis.*  $\varphi : n \mapsto a^n$  ist ein Homomorphismus wegen dem zweiten Lemma von heute.

*Bemerkung.*  $I = \text{Ker}(\varphi)$  ist ein Ideal in  $\mathbb{Z}$  und eine Untergruppe. Angenommen  $k \in I$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $\varphi(nk) = a^{nk} = (a^k)^n = e$  und daher  $nk \in I$ . Entweder  $I = (0)$  oder  $I = (n_0)$  für  $n_0 > 0$ :

$I = (0)$  dann ist  $\varphi$  injektiv: Angenommen  $\varphi(m) = \varphi(n) \Leftrightarrow \varphi(m-n) = e \Leftrightarrow m-n \in I = (0) \Rightarrow m = n$ .

□

**Beispiel.** z.B. hat  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  unendliche Ordnung und  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  hat Ordnung 4.

## 3.2 Konjugation

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe.

- a) Für jedes  $g \in G$  ist  $\gamma_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$  ein Automorphismus von  $G$ , welche ein innerer Automorphismus genannt wird.
- b) Die Abbildung  $g \in G \mapsto \gamma_g \in \text{Aut}(G)$  ist ein Homomorphismus. Der Kern von  $\Phi$  ist das Zentrum  $Z_G = \{g \in G \mid gx = xg \forall x \in G\}$ .

*Beweis.* Für  $g, x, y \in G$  gilt

$$\gamma_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \gamma_g(x)\gamma_g(y).$$

Also ist  $\gamma_g$  ein Homomorphismus  $G \rightarrow G$ . Für  $g, h, x \in G$  gilt

$$\gamma_g(\gamma_h(x)) = g(\gamma_h(x))g^{-1} = g(hxh^{-1})g = (gh)x(gh)^{-1} = \gamma_{gh}(x).$$

Insbesondere gilt

$$\gamma_g \cdot \gamma_{g^{-1}}(x) = \gamma_{gg^{-1}}(x) = \gamma_e(x) = \text{id}(x).$$

und daher  $\gamma_g\gamma_{g^{-1}} = \text{id} = \gamma_{g^{-1}}\gamma_g$ . Also ist  $\gamma_g$  ein Automorphismus und a) ist bewiesen.

Für b) haben wir bereits gezeigt, dass  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  ein Homomorphismus ist:

$$\Phi(gh) = \gamma_{gh} = \gamma_g \cdot \gamma_h = \Phi(g)\Phi(h).$$

Des Weiteren gilt

$$\text{Ker}(\Phi) = \{g \in G \mid \gamma_g = \text{id}\} = \{g \in G \mid \underbrace{gxg^{-1} = x}_{gx=xg} \text{ für alle } x \in G\}.$$

□

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$ . Dann ist die Menge der Fixpunkte  $\gamma_g$  gleich dem Zentralisator von  $g$  :

$$\text{Cent}_g = \{x \in G \mid gx = xg\}.$$

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $x, y \in G$ . Wir sagen  $x, y$  sind *zueinander konjugiert*, falls es ein  $g \in G$  mit  $gxg^{-1} = y$ .

**Lemma.** „Konjugiert sein“ definiert eine Äquivalenzrelation auf jeder Gruppe.

*Beweis.* Übung

□

**Beispiel.** a) Sei  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Zwei Matrizen  $A, B$  sind konjugiert falls es ein  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  gibt mit  $gAg^{-1} = B$ . Dies gilt genau dann, wenn  $A$  und  $B$  dieselbe Jordan-Normalform hat.

- b) Sei  $G = \text{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = AA^* = I\}$ . Jedes  $g \in G$  ist mittels einem Element von  $G$  diagonalisierbar.  $\Rightarrow$  Konjugationsklassen für  $G$  können wir durch Elemente von  $(S^1)^n$  modulo Vertauschung der Koordinaten beschreiben.

Manchmal ist  $G$  sehr kompliziert und unüberschaubar aber die Konjugationsklassen sind einfacher zu verstehen.

**Beispiel.**  $\text{Sym}_n = S_n$  hat  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  Elemente (Sterling-Formel). Die Anzahl der Konjugationsklassen ist hingegen ungefähr  $\frac{1}{4\sqrt{3n}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}$  (Hardy-Ramanujan 1918).

**Beispiel.** 1) Das Zentrum von  $S_n$  für  $n \geq 3$  ist  $\{1\}$ . (Ü)

2) Das Zentrum von  $\text{GL}_n(K)$  ist  $\{A \in \text{GL}_n(K) \mid A \text{ ist Diagonal mit Diagonaleintrag } t \in K^\times\}$  :

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Das Zentrum von  $\text{SL}_n(K)$  ist  $\{A \in \text{GL}_n(K) \mid A \text{ ist Diagonal mit Diagonaleintrag } t \in K^\times, t^n = 1\}$

### 3.3 Untergruppen und Erzeuger

**Wiederholung:**  $H \subseteq G$  nichtleer ist eine *Untergruppe* ( $H < G$ ) falls für alle  $a, b \in H$  gilt  $ab^{-1} \in H$ .

**Beispiel.** Sei  $G = \mathbb{Z}$ . Dann ist jede Untergruppe  $H < \mathbb{Z}$  ein Ideal und damit von der Form  $H = (n_0)$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Denn: Für  $n \in H$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$k \cdot n = \begin{cases} \underbrace{n + \dots + n}_{k\text{-mal}} \in H & \text{für } k > 0 \\ 0 \in H & \text{für } k = 0 \\ \underbrace{-n - \dots - n}_{|k|\text{-mal}} \in H & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

**Beispiel.** Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Dann definieren wir die *Diedergruppe*  $D_{2n}$  mittels  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  und  $\mathbb{R}$ -lineare Transformationen auf  $\mathbb{C}$  :

$$D_{2n} = \underbrace{\{z \mapsto \zeta^k z \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}}_{C_n \cong \mathbb{Z}/(n)} \cup \underbrace{\{z \mapsto \zeta^k \bar{z} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}}_{\sigma_k}$$

und es gilt  $\sigma_k(\sigma_k(z)) = \sigma_k(\zeta^k \bar{z}) = \zeta^k \overline{(\zeta^k \bar{z})} = z$ , also definiert  $\sigma_k$  eine Spiegelung des regelmäßigen  $n$ -Ecks.  $C_n$  definiert die Drehungen.

**Untergruppen:**  $\{\text{id}\}, D_{2n}, C_n, \{\text{id}, \sigma_k\}$  für  $k = 0, \dots, n-1$ , für  $k \mid n$  gibt es auch eine Untergruppe von  $C_n$  isomorph zu  $\mathbb{Z}/(n)$  und von  $D_{2n}$  isomorph zu  $D_{2k}$ .  $D_{2,2}$  hat noch eine weitere Untergruppe.

**Lemma.** Eine Untergruppe von einer Untergruppe ist eine Untergruppe.

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $I$  eine Menge und  $H_i < G$  für jedes  $i \in I$ . Dann ist  $\bigcap_{i \in I} H_i < G$ .

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X \subseteq G$  eine Teilmenge. Die Untergruppe, die von  $X$  erzeugt wird ist definiert als

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{H < G \\ X \subseteq H}} H.$$

Wir nennen  $X$  die *Erzeugendenmenge* von  $\langle X \rangle$ . Falls  $\langle X \rangle = G$  sagen wir, dass  $G$  *durch  $X$  erzeugt* wird. Falls  $X = \{g\}$  dann nennen wir  $\langle X \rangle = \langle g \rangle$  die von  $g$  erzeugte *zyklische Untergruppe* von  $G$ .

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X \subseteq G$ . Dann ist  $\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}\}$ .

*Beweis.* Sei  $H_0$  die Menge rechts im Lemma. Dann gilt  $X \subseteq H_0$  und  $H_0 < G$ . Daher tritt  $H_0$  als eine der Untergruppen in der Definition von  $\langle X \rangle$  auf und wir erhalten  $\langle X \rangle \subseteq H_0$ . Falls  $H < G$  und  $X \subseteq H$ , dann enthält  $H$  auch jeden Ausdruck der Form  $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ . Daher gilt  $H_0 \subseteq H$ . Da dies für alle derartigen  $H$ 's gilt, folgt  $H_0 \subseteq \langle X \rangle$ .  $\square$

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $a \in G$ . Dann gilt  $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}/(n_0)$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Wir definieren  $\varphi : n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n \in G$ . Dies ist ein Homomorphismus und  $\text{Ker}(\varphi) = I = (n_0)$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Nun definieren wir  $\Phi : \mathbb{Z}/(n_0) \rightarrow \langle a \rangle, k + (n_0) \mapsto a^k$ . Dies ist wohldefiniert und injektiv wegen

$$k + (n_0) = l + (n_0) \Leftrightarrow k - l \in (n_0) = \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow a^{k-l} = e \Leftrightarrow a^k = a^l.$$

$\square$

**Beispiel.**  $S_n$  (mit  $n!$  Elementen verschiedenster Natur) ist durch zwei Elemente erzeugt:

$$\tau_{1,2} = \text{Vertauschung von 1 und 2: } \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ \vdots \\ n \mapsto n \end{cases} \quad (\text{Ordnung } 2)$$

$$\sigma = \text{zyklische Vertauschung aller Zahlen: } \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ \vdots \\ n \mapsto 1 \end{cases} \quad (\text{Ordnung } n)$$

$$\text{Zum Beispiel } \sigma \tau_{1,2} \sigma^{-1} = \begin{cases} 1 \mapsto n \mapsto n \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ \vdots \end{cases} = \tau_{2,3}. \text{ Alle } \tau_{i,i+1} \in \langle \tau_{1,2}, \sigma \rangle. \text{ Diese Vertauschun-}$$

gen erzeugen ganz  $S_n$ . Sei  $\rho \in S_n$  beliebig. Durch Linksmultiplikation von  $\rho$  mit Vertauschungen  $\tau_{i,i+1}$  können wir  $\rho$  schrittweise vereinfachen und erhalten nach endlich vielen Schritten die Identität  $\tau_{i_k, i_k+1} \dots \tau_{i_n, i_n+1} \rho = \text{id}$ .

*Bemerkung.* Es gibt keinen „Basis- oder Dimensionsbegriff“: Denn in  $S_6$  gibt es eine Untergruppe, die von 3 oder mehr Elementen erzeugt wird, aber nicht von weniger:

$$H = \langle \tau_{1,2}, \tau_{3,4}, \tau_{5,6} \rangle \cong \mathbb{F}_2^3.$$

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Der *Kommutator* von  $a, b \in G$  ist

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Die Kommutatorgruppe ist

$$[G, G] = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle.$$

### 3.4 Nebenklassen und Quotienten

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ . Wir definieren zwei Relationen auf  $G$

$$a \sim_H b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H \quad a_H \sim b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H.$$

Wir nennen die Menge  $aH = \{ah \mid h \in H\}$  die Linksnebenklasse mit Linksrepräsentanten  $a$  und schreiben auch

$$G/H = \{aH \mid a \in G\}.$$

Außerdem nennen wir die Menge  $Ha = \{ha \mid h \in H\}$  die Rechtsnebenklasse mit Rechtsrepräsentanten  $a$  und schreiben

$$H/G = \{Ha \mid a \in G\}.$$

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ . Dann ist  $\sim_H$  eine Äquivalenzrelation und  $[a]_{\sim_H}$  und  $G/H$  ist der Quotient von  $G$  bzgl.  $\sim_H$ . Dies gilt analog für  $H \sim$

*Beweis.* •  $a \sim_H a$  denn  $a^{-1}a = e \in H$ .

•  $a \sim_H b \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow (b^{-1}a)^{-1} = a^{-1}b \in H \Rightarrow b \sim_H a$ .

•  $a \sim_H b$  und  $b \sim_H c \Rightarrow b^{-1}a, c^{-1}b \in H \Rightarrow c^{-1}a = (c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H \Rightarrow a \sim_H c$ .

Also ist  $\sim_H$  eine Äquivalenzrelation. Des Weiteren gilt:

$$[a]_{\sim_H} = \{b \mid b \sim_H a\} = \{b \mid b^{-1}a \in H\} = aH \quad (b^{-1}a = h \in H \Rightarrow a = bh \text{ für } h \in H).$$

□

**Beispiel.**  $S_3 > H = \langle \tau_{12} \rangle = \{e, \tau_{12}\}$ . Sei  $\sigma$  die zyklische Vertauschung von 1, 2, 3. Dann ist  $\sigma H \neq H\sigma$ , da  $\{\sigma, \sigma\tau_{12}\} \neq \{\sigma, \tau_{12}\sigma\}$ .

$$\sigma\tau_{12} : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \quad \tau_{12}\sigma : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

**Satz.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ .

(1)  $G/H$  und  $H/G$  sind (auf natürliche Weise) gleichmächtig.

(2) [Lagrange] Falls  $|G| < \infty$ , dann gilt  $|G| = |G/H| \cdot |H|$ . Insbesondere gilt  $|H|$  ist ein Teiler von  $|G|$ .

**Definition.** Die Kardinalität von  $G$  wird auch die *Ordnung* von  $G$  genannt. Die Kardinalität von  $G/H$  wird der *Index*  $[G : H]$  von  $H$  in  $G$  genannt.

*Beweis.* Wir definieren  $\varphi : G/H \rightarrow H/G$  und  $\psi : H/G \rightarrow G/H$  durch

$$aH \mapsto (aH)^{-1} = \{g^{-1} : g \in aH\} = Ha^{-1} \quad Ha \mapsto (Ha)^{-1} = a^{-1}H.$$

Wir sehen auch  $\psi(\varphi(aH)) = \psi(Ha^{-1}) = aH$  und analog  $\psi \circ \varphi = \text{id}$ . Also folgt  $|H/G| = |G/H|$  wie in (1) behauptet.

Für (2) wählen wir aus jeder Linksnebenklasse  $aH$  für  $a \in G$  genau einen Linksrepräsentanten  $x \in aH$  aus. Die Menge der ausgewählten Linksrepräsentanten bezeichnen wir mit  $X$ . Es gilt  $|G/H| = |X|$ .

*Behauptung.*

$$|G| \stackrel{!}{=} |X \times H| = |X| |H| = |G/H| \cdot |H|$$

$\psi : X \times H \rightarrow G$  mit  $(x, h) \mapsto xh$

$\psi$  ist *surjektiv*: Sei  $g \in G$ , dann ist  $gH \in G/H$  und wir haben in der Konstruktion von  $X$  aus  $G/H$  ein  $x \in X \cap gH$  ausgewählt. Insbesondere gibt es ein  $h \in H$  (weil  $g \sim_H x$ ) mit  $g = xh = \psi(x, h)$ . Also ist  $\psi$  surjektiv.

$\psi$  ist *injektiv*: Angenommen  $\psi(x_1, h_1) = \psi(x_2, h_2)$  also  $x_1 h_1 = x_2 h_2$  für  $(x_1, h_1), (x_2, h_2) \in X \times G$ . Insbesondere gilt  $x_1 H = x_2 H$  in der Konstruktion von  $X$  nur einen Linksrepräsentanten ausgewählt haben, gilt also  $x_1 = x_2$ . Daher gilt  $x_1 h_1 = x_1 h_2$  und auch  $h_1 = h_2$ . Wir haben also  $(x_1, h_1) = (x_2, h_2)$  überprüft. Da dies für alle Paare  $(x_1, h_1), (x_2, h_2)$  gilt, ist also  $\psi$  injektiv.  $\square$

**Korollar.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $g \in G$ . Dann teilt die Ordnung von  $g$  die Ordnung von  $G$ . Des Weiteren gilt  $g^{|G|} = e$ .

*Beweis.* Sei  $m = |G|$  und  $n = |\langle g \rangle| = \text{Ordnung von } g$ . Dann gilt  $n \mid m$  wegen des Satzes von Lagrange. Sei  $k = \frac{m}{n}$ . Dann gilt

$$g^{|G|} = g^m = g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e.$$

$\square$

**Korollar.** In  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$  gilt  $a^{p-1} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 1 & \text{für alle } a \in \mathbb{F}_p^\times \end{cases}$

*Beweis.*  $G = \mathbb{F}_p^\times$  hat Ordnung  $p - 1$ .  $\square$

**Korollar** (Erste Klassifikation von Gruppen). Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $|G| = p \in \mathbb{N}$  prim. Dann ist  $G$  isomorph zu  $\mathbb{Z}/(p)$ .

*Beweis.* Sei  $g \in G \setminus \{e\}$ . Dann ist  $n = \text{Ord}(g) = |\langle g \rangle| = 1$  und ein Teiler von  $p$ . Also ist  $n = p$  und  $\langle g \rangle = G$ .  $\square$

$\Rightarrow$  Es gibt bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung  $2, 3, 5, 7, \dots$

Im Allgemeinen haben  $G/H$  und  $H/G$  keine natürliche Gruppenstruktur.

**Satz.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent

- (1) Für alle  $x \in G$  ist  $xH = Hx$ .
- (2) Für alle  $x \in G$  ist  $xHx^{-1} = H$ .
- (3) Es existiert eine Gruppe  $G_1$  und ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow G_1$  mit  $H = \text{Ker}(\varphi)$ .
- (4) Für alle  $x, y \in G$  gilt  $(xH)(yH) = (xy)H$ .
- (5)  $G/H$  ist (auf natürliche Weise) eine Gruppe so dass  $\varphi : G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

*Beweis.* (5)  $\Rightarrow$  (3) :  $\text{Ker}(\varphi) = \{g \mid gH = eH\} = H$

(3)  $\Rightarrow$  (2) : Sei  $x \in G, h \in H = \text{Ker}(\varphi)$ . Dann gilt  $\varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x) \underbrace{\varphi(h)}_{=e} \varphi(x)^{-1} = e$  also

$xhx^{-1} \in H = \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow xHx^{-1} \subseteq H, x^{-1}Hx \subseteq H \Rightarrow H \subseteq xHx^{-1}$ . Somit folgt  $xHx^{-1} = H$

(2)  $\Leftrightarrow$  (1) : Rechtsmultiplikation mit  $x^{-1}$  oder  $x$ .

(1)  $\Rightarrow$  (4) : Seien  $x, y \in G$ . Dann gilt  $(xH)(yH) = (Hx)(yH) = (Hxy)H = xyHH = xyH$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5) : Nach Annahme in 4 ist die Abbildung

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H \quad (xh) \times (yh) \mapsto (xH)(yH) = (xy)H$$

wohldefiniert. Nun folgen die Gruppenaxiome in  $G/H$  direkt aus den Gruppenaxiome in  $G$ .

$$((xH)(yH))(zH) = ((xy)H)(zH) = ((xy)z)H = (x(yz)H) = \dots = (xH)((yH)(zH)).$$

also ist  $a$  in  $G/H$  assoziativ.

$$\begin{aligned}(xH)(eH) &= (eH)(xH) = xH \\ (xH)(x^{-1}H) &= (x^{-1}H)(xH) = eH.\end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ . Wir sagen  $H$  ist *normal* in  $G$  oder ein *Normalteiler* von  $G$  falls  $H$  die Bedingungen in obigem Satz erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall auch  $H \triangleleft G$ . Falls  $H \triangleleft G$  so nennen wir  $G/H$  die *Faktorgruppe* von  $G$  modulo  $H$ .

**Definition.** Sei  $G \neq \{e\}$  eine Gruppe. Wir sagen  $G$  ist *einfach* falls  $G$  nur  $\{e\}$  und  $G$  als Normalteiler besitzt.

**Beispiel.** Eine abelsche Gruppe ist genau dann einfach wenn  $G \cong \mathbb{Z}/(p)$  für eine Primzahl  $p \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel.** Auf  $S_n$  gibt es den Homomorphismus  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ . Der Kern  $A_n = \text{Ker}(\text{sgn})$  wird die *alternierende Gruppe* genannt. Für  $n \geq 5$  ist  $A_n$  eine nicht abelsche einfache Gruppe.

**Satz** (Erster Isomorphiesatz). Sei  $\varphi : G \rightarrow H$  eine Homomorphismus zwischen zwei Gruppen  $G$  und  $H$ . Dann induziert  $\varphi$  einen Isomorphismus  $|\varphi| : G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & & \uparrow \iota \\ G/\text{Ker}(\varphi) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \text{Im}(\varphi) < H \end{array}$$

mit  $\pi$  als der kanonischen Projektion und  $\iota$  der Einbettung. Also gilt  $\varphi = \iota \circ \bar{\varphi} \circ \pi$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\bar{\varphi}(x \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(x)$  auf  $G/\text{Ker}(\varphi)$  wohldefiniert und injektiv ist:

Seien  $x, y \in G$ , dann gilt

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(y)^{-1} \varphi(x) = e \Leftrightarrow \varphi(y^{-1}x) = e \Leftrightarrow y^{-1}x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow x \text{Ker}(\varphi) = y \text{Ker}(\varphi)$$

$\Rightarrow$  wohldefiniert.  $\Leftarrow$  injektiv.

Auch gilt  $\text{Im}(\bar{\varphi}) = \text{Im}(\varphi)$  womit  $\bar{\varphi} : G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  ein Isomorphismus ist. Für  $g \in G$  gilt  $\iota(\bar{\varphi}(\pi(g))) = \iota(\bar{\varphi}(g \text{Ker}(\varphi))) = \iota(\varphi(g)) = \varphi(g)$ . □

**Beispiel.** Sei  $p$  prim. Dann ist  $|\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$  und  $\det : \text{GL}_2(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$  ist surjektiv z.B. wegen  $\det \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t$ .

Weiters gilt  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_p) = \text{Ker}(\det)$ . Aus dem Satz von Lagrange und dem ersten Isomorphiesatz folgt

$$|\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)| \cdot (p - 1) = |\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)|$$

wobei  $\text{Index} = |G/\text{Ker}(\det)| = |\text{Im}(\det)| = p - 1$ .

$$\Rightarrow |\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)| = \frac{(p^2 - 1)(p^2 - p)}{p - 1} = p(p^2 - 1).$$



**Korollar** (Zweiter Isomorphiesatz). Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \triangleleft G$  und  $K < G$ . Dann gilt  $KH = HK < G$ ,  $H \triangleleft KH$ ,  $H \cap K \triangleleft K$  und

$$K/H \cap K \cong KH/H.$$

mit  $xH \cap K \leftrightarrow xH$  für  $x \in K$

*Beweis.* Für  $k \in K$  gilt  $kH = Hk$ . Für die Vereinigung über alle  $k \in K$  gilt daher  $KH = HK$ . Des Weiteren gilt für  $k_1, k_2 \in K, h_1, h_2 \in H$  dass

$$\begin{aligned} (k_1 h_1)(k_2 h_2) &\in \underbrace{KH}_{HK} KH = \underbrace{HK}_{KH} H = K \\ (k_1 h_1)^{-1} &= h_1^{-1} k_1^{-1} \in KH = HK \end{aligned}$$

Folgt  $KH < G$ .

Des Weiteren ist  $H \triangleleft KH$  weil  $H < KH$  und für  $x \in KH \subseteq G$  gilt  $xH = Hx$ .

Wir definieren den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & KH & \longrightarrow & KH/H \\ & & \searrow \varphi & & \end{array}$$

Es gilt  $\text{Ker}(\varphi) = \{k \in K \mid \underbrace{kH}_{k \in H} = eH\} = K \cap H \triangleleft K$  und  $K/K \cap H \cong \text{Im}(\varphi) = \{kH \mid k \in K\} = KH/K$  □

**Übung:** Das Produkt von zwei Untergruppen ist im Allgemeinen keine Untergruppen. Das Produkt von zwei normalen Untergruppen ist eine normale Untergruppe.

**Korollar** (Dritter Isomorphiesatz). Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \triangleleft G$ ,  $K \triangleleft G$  und  $K < H$ . Dann ist  $H/K \triangleleft G/K$  und es gilt

$$G/K/H/K \cong G/H$$

wobei  $(xK)^{H/K} \cong xH$  einander im Isomorphismus entsprechen.

*Beweis.* Wir definieren  $\varphi : G/K \rightarrow G/H, gK \mapsto gH$ . Dies ist wohldefiniert, da  $K \subseteq H$  und wir einfach  $gK$  rechts mit  $H$  multiplizieren:  $\varphi(gK) = (gK)H = gH$ . Da die Gruppenstrukturen in  $G/K$  und  $G/H$  durch Multiplikation der Repräsentanten definiert ist, ist  $\varphi$  auch ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi((g_1 K)(g_2 K)) = \varphi((g_1 g_2)K) = (g_1 g_2)H = (g_1 H)(g_2 H) = \varphi(g_1 K)\varphi(g_2 K).$$

$\varphi$  ist surjektiv. Daher gilt  $G/K/\text{Ker}(\varphi) \cong G/H$  und  $\text{Ker}(\varphi) = \{gK \mid gH = eH\} = \{hK \mid h \in H\} = H/K$  □

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \triangleleft G$ . Für eine beliebige weitere Gruppe  $K$  gibt es eine natürliche Bijektion zwischen

$$\text{Hom}(G/H, K) = \{\varphi : G/H \rightarrow K \text{ Homomorphismus}\} \quad \text{und} \quad \{\varphi : \text{Hom}(G, K) \mid \varphi|_H \equiv e_K\}.$$

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \triangleleft G$ . Dann sind die folgenden beiden Abbildungen invers zueinander:

$$(K < G \text{ mit } H < K) \mapsto K/H < G/H \quad \text{und} \quad (\pi^{-1}(\overline{K}) < G \text{ mit } H < \pi^{-1}(\overline{K})) \mapsto \overline{K} < G/H.$$

**Beispiel.** •  $C_n \triangleleft D_{2n}$  denn für eine Relation  $R \in C_n$  und eine Reflexion  $T \in D_{2n}$  gilt

$$TRT^{-1} = R^{-1} \in C_n.$$

(und jede Untergruppe  $H < C_n$  ist auch ein Normalteiler von  $D_{2n}$ )

- Zentrum und Kommutatorgruppe sind immer normal.
- Affine Gruppe  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^\times, b \in K \right\}$  für einen Körper  $K$ .

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\} \triangleleft G \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\} < G$$

aber nicht normal wenn  $|K^\times| > 1$ .

**Übung:** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$  mit Index 2. Dann gilt  $H \triangleleft G$ .

**Übung:** Klassifizieren/Beschreiben Sie alle Gruppen der Ordnung  $\leq 7$  /  $\leq 8$  /  $\leq 10$ .

## 3.5 Gruppenwirkungen

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine Menge. Eine *Gruppenwirkung* (Linkswirkung, Linksaktion) von  $G$  auf  $T$  ist eine Abbildung  $\cdot : G \times T \rightarrow T, (g, t) \mapsto g \cdot t$ , so dass

- $e \cdot t = t$  für  $t \in T$
- $g_1 \cdot (g_2 \cdot t) = (g_1 g_2) \cdot t$  für  $g_1, g_2 \in G$  und  $t \in T$ .

Wir sagen in diesem Fall auch kurz, dass  $T$  eine  $G$ -Menge ist.

*Bemerkung.* Obige Definition können wir äquivalent auch in folgender Form formulieren:

Es gibt einen Gruppenhomomorphismus  $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(T), g \mapsto \alpha_g$ .

Der Zusammenhang zur obigen Definition ergibt sich durch die Formel  $\alpha_g(t) = g \cdot t$

**Beispiel.** 0) Sei  $T$  eine Menge und  $G$  eine Gruppe. Dann ist die triviale Gruppenwirkung  $g \cdot t = t$  für alle  $g \in G, t \in T$  eine Gruppenwirkung.

- 1)  $G = S_n$  wirkt auf  $T = \{1, \dots, n\}$  durch  $\sigma \cdot t = \sigma(t)$  für  $\sigma \in S_n, t \in \{1, \dots, n\}$
- 2)  $G = \text{GL}(V)$  wirkt auf  $V$ , ein Vektorraum über  $K$  durch  $\varphi \cdot v = \varphi(v)$  für  $\varphi \in \text{GL}(V)$  und  $v \in V$ .
- 3) Sei  $G$  eine Gruppe und  $H < G$ . Wir definieren  $T = G/H$  und  $g \cdot (xH) = gxH$  für  $g \in G$  und  $xH \in G/H$ . Dies definiert eine Gruppenwirkung:
  - $e \cdot (xH) = exH = xH$  für  $xH \in G/H$
  - $g_1 \cdot (g_2 \cdot (xH)) = g_1 \cdot (g_2 xH) = (g_1 g_2)xH = (g_1 g_2) \cdot (xH)$  für  $g_1 g_2, x \in G$ .

**⚠ Achtung.** Wir können auch eine Gruppenwirkung auf  $H/G$  definieren, müssen dies aber mittels der Formel  $g \cdot (Hx) = Hxg^{-1}$  machen.

- 4) Sei  $G$  eine Gruppe und  $T = G$ . Dann können wir Konjugation als eine Gruppenwirkung betrachten:  $g \cdot x = gxg^{-1}$  für  $g \in G$  und  $x \in T = G$ .
- 5) Sei  $G$  eine Gruppe und  $T = \mathcal{P}(G) = \{A \subseteq G\}$ . Für  $g \in G$  und  $A \in T$  definieren wir  $g \cdot A = gA = \{ga \mid a \in A\}$ .
- 6) Sei  $G$  eine Gruppe und  $T = \{H < G\}$ . Für  $g \in G$  und  $H \in T$  definieren wir  $g \cdot H = gHg^{-1}$ .

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine  $G$ -Menge.

- $S \subseteq T$  heißt *invariant* falls  $g \cdot S = S$  für alle  $g \in G$ .

- $t_0 \in T$  heißt *Fixpunkt* falls  $g \cdot t_0 = t_0$  für alle  $g \in G$ . Die Menge der Fixpunkte wird mit  $\text{Fix}_G(T) = \{t_0 \in T \mid t_0 \text{ ist ein Fixpunkt}\}$  bezeichnet.
- Für  $t_0 \in T$  wird  $G \cdot t_0 = \{g \cdot t_0 : g \in G\}$  als die *Bahn* (*G-Bahn*) bezeichnet.
- Für  $t_0 \in T$  heißt  $\text{Stab}_G(t_0) = \{g \in G \mid g \cdot t_0 = t_0\}$  der *Stabilisator* von  $t_0$ .
- Falls  $g \in G \mapsto \alpha_g \in \text{Bij}(T)$  wie in obiger Bemerkung injektiv ist, so heißt die Gruppenwirkung *treu*.
- Die Gruppenwirkung heißt *transitiv* falls es zu jedem Paar  $t_1, t_2 \in T$  ein  $g \in G$  mit  $g \cdot t_1 = t_2$  gibt. Die Gruppenwirkung heißt *scharf transitiv* falls es zu jedem Paar  $t_1, t_2 \in T$  genau ein  $g \in G$  mit  $g \cdot t_1 = t_2$  gibt.
- Die Menge der *G-Bahnen* wird mit  $G \backslash T = \{G \cdot t_0 \mid t_0 \in T\}$  bezeichnet.

**Lemma.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine  $G$ -Menge. Dann definiert  $t_1 \sim_G t_2 \Leftrightarrow \exists g \in G$  mit  $g \cdot t_1 = t_2$  eine Äquivalenzrelation auf  $T$ . Die Bahnen sind genau die Äquivalenzklassen und  $G/\sim_G = G \backslash T$  ist der Quotientenraum.

*Beweis.* • Reflexivität:  $t \sim t$  da  $\underbrace{e}_{\in G} \cdot t = t$ .

- Symmetrie: Angenommen  $t_1 \sim t_2$ , dann existiert ein  $g \in G$  mit  $g \cdot t_1 = t_2$ . Wir wenden auf diesen Punkt  $g^{-1}$  an und erhalten  $g^{-1} \cdot (g \cdot t_1) = g^{-1} \cdot t_2$  und  $t_1 = e \cdot t_1 = g^{-1} t_2$  und damit  $t_2 \sim t_1$ .
- Transitivität: Angenommen  $t_1 \sim t_2, t_2 \sim t_3$ : Dann existieren  $g_1, g_2 \in G$  mit  $g_1 \cdot t_1 = t_2, g_2 \cdot t_2 = t_3$ .  $\underbrace{(g_2 g_1)}_{\in G} \cdot t_1 = g_2 \cdot \underbrace{(g_1 t_1)}_{t_2} = t_3 \Rightarrow t_1 \sim t_3$ .

Des Weiteren  $[t]_{\sim_G} = \{t_2 \sim t\} = \{g \cdot t : g \in G\} = G \cdot t$  und  $T/\sim = \{[t]_{\sim} : t \in T\} = G \backslash T$ .  $\square$

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T_1, T_2$  zwei  $G$ -Mengen. Ein  $G$ -Morphismus von  $T_1$  nach  $T_2$  ist eine Abbildung  $f : T_1 \rightarrow T_2$  mit

$$f(g \cdot \underbrace{t_1}_{\text{in } T_1}) = g \cdot \underbrace{f(t_1)}_{\text{in } T_2}$$

für alle  $t \in T_1$  und  $g \in G$ .  $g$  ist ein  $G$ -Isomorphismus falls  $f$  zusätzlich bijektiv ist.

**Satz** (Satz (über Bahnen und Stabilisator)). Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine  $G$ -Menge. Sei  $t_0 \in T$ ,  $T_0 = G \cdot t_0$  und  $H = \text{Stab}_G(t_0)$ . Dann ist  $H < G$ ,  $T_0$  ist invariant und

$$f : G/H \rightarrow T_0, gH \mapsto g \cdot t_0$$

ist ein wohldefinierter  $G$ -Isomorphismus. In diesem Satz ist also die Bahn isomorph zu  $G$  modulo Stabilisator.

*Beweis.* Seien  $h_1, h_2 \in H = \text{Stab}_G(t_0)$ . Dann gilt  $(h_1 h_2) \cdot t_0 = h_1 \cdot \underbrace{(h_2 \cdot t_0)}_{t_0} = t_0$  und  $h_1 h_2 \in H$ .

Außerdem  $h_1 \cdot t_0 = t_0 \Rightarrow t_0 = h_1^{-1} \cdot t_0$  und  $h_1^{-1} \in H$ . Folgt  $H < G$  (da auch  $e \in H$ ).

Angenommen  $g \in G$  und  $g' \cdot t_0 \in T_0 = G \cdot t_0$ . Dann ist  $g \cdot (g' \cdot t_0) = (gg') \cdot t_0 \in T_0 = G \cdot t_0$ .

Angenommen  $g_1, g_2 \in G$ . Dann gilt  $g_1 \cdot t_0 = g_2 \cdot t_0 \Leftrightarrow (g_2^{-1} g_1) \cdot t_0 = t_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H$ . Dies zeigt ( $\Leftarrow$ ), dass  $f$  wohldefiniert ist und ( $\Rightarrow$ ) injektiv ist.

$T_0 = G \cdot t_0 = \{g \cdot t_0\} = f(G)$  und  $f : G/H \rightarrow T_0$  ist surjektiv.

Sei nun  $g_1, g_2 \in G$ . Dann gilt

$$f(g_1 \cdot (g_2 H)) = f((g_1 g_2) H) = (g_1 g_2) \cdot t_0 = g_1 \cdot (g_2 \cdot t_0) = g_1 \cdot f(g_2 H).$$

Also ist  $f$  ein  $G$ -Isomorphismus.  $\square$

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine  $G$ -Menge. Falls  $|G| < \infty$ , dann gilt

$$|G| = |G \cdot t_0| \cdot |\text{Stab}_G(t_0)|$$

*Beweis.* Nach dem Satz gilt  $G \cdot t_0 \cong G/\text{Stab}_G(t_0)$ , d.h.  $|G \cdot t_0| = [G : \text{Stab}_G(t_0)]$  und das Korollar folgt aus dem Satz von Lagrange  $\square$

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T$  eine endliche  $G$ -Menge. Dann gilt

$$|T| = |\text{Fix}_G(T)| + \sum_{|G \cdot t| > 1} [G : \text{Stab}_G(t)],$$

also die Summe über die nicht trivialen Bahnen.

*Beweis.* Nach einem Lemma vom letzten Mal ist die Menge der Bahnen eine Partition von  $T$ .

$$T = \bigsqcup_{\text{alle Bahnen}} G \cdot t = \text{Fix}_G(T) \sqcup \bigsqcup_{|G \cdot t| > 1} G \cdot t.$$

Des Weiteren gilt für eine Bahn  $|G \cdot t| = [G : \text{Stab}_G(t)]$  womit das Korollar folgt.  $\square$

**Satz (Cayley).** Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Dann ist  $G$  isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe  $S_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Sei  $T = G$  und  $g_1 \cdot g_2$  für  $g_1 \in G$  und  $g_2 \in T = G$  durch Gruppenmultiplikation definiert. Äquivalent dazu definiert dies einen Homomorphismus  $\alpha : G \rightarrow \text{Bij}(G), g \mapsto (\alpha_{g_1} : g_2 \mapsto g_1 g_2)$ . Es gilt

$$\text{Ker}(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g = \text{id}\} \subseteq \{g \in G \mid \alpha_g(e) = e\} = \{g \in G \mid ge = e\} = \{e\}$$

also ist  $\alpha$  injektiv. Nach Annahme ist  $|G| = n \in \mathbb{N}$  und  $\text{Bij}(G) \cong S_n$ .  $\square$

*Bemerkung.* Falls  $H < G$  mit endlichem Index, so gibt es einen Homomorphismus  $\alpha : G \rightarrow S_n$  mit  $n = [G : H]$  und  $\text{Ker}(\alpha) < H$ .

## 3.6 Nilpotente und auflösbare Gruppen

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Wir sagen  $G$  ist *nilpotent mit Nilpotenzgrad* 1 falls  $G$  abelsch ist. Wir sagen  $G$  ist nilpotent mit *Nilpotenzgrad*  $n + 1$  (für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ) falls  $G/Z_G$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $n$  ist.

Wir sagen  $G$  ist *nilpotent* falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt so dass  $G$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $n$  ist.

**Beispiel.** Sei  $R$  ein Ring. dann ist die Heisenberggruppe

$$H_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

nilpotent mit Nilpotenzgrad 2. Hierfür muss man zeugen:

$$Z_{H_R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\}$$

und  $H_R/Z_{H_R} \cong R^2$ .

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Wir sagen  $G$  ist eine  $p$ -Gruppe falls  $|G| = p^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ .

**Lemma** (Fixpunkte von  $p$ -Gruppen). Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $G$  eine  $p$ -Gruppe. Sei  $T$  eine  $G$ -Menge. Dann gilt  $|\text{Fix}_G(T)| \equiv |T| \pmod{p}$ .

*Beweis.* Auf Grund des Korollars vom Anfang der Stunde wirsen wir

$$|T| = |\text{Fix}_G(T)| + \sum_{|G \cdot t| > 1} [G : \text{Stab}_G(t)].$$

Da  $|G| = p^k$  ist, ist  $[G : \text{Stab}_G(t)] = p^l$  für  $l \geq 1$  wenn  $t \notin \text{Fix}_G(T)$ . Daher gilt  $p \mid \sum_{|G \cdot t| > 1} [G : \text{Stab}_G(t)]$ .  $\square$

**Satz.** Eine  $p$ -Gruppe ist nilpotent.

*Beweis.* Angenommen  $p$  ist eine Primzahl und  $G$  ist eine  $p$ -Gruppe. Wir definieren  $T = G$  und machen  $G$  zu einer  $G$ -Menge mittels Konjugation. Dann gilt

$$\text{Fix}_G(T) = \{t \in G \mid gtg^{-1} = t \ \forall g \in G\} = Z_G.$$

Wegen obigem Lemma gilt also

$$|\text{Fix}_G(T)| = |Z_G| \equiv |T| = |G| = p^k \pmod{p}.$$

Da  $e \in Z_G$  gilt  $|T_G| \geq 1$ , also  $|Z_G| \geq p$ . Insbesondere ist  $Z_G$  eine nicht triviale Untergruppe, und  $G/Z_G$  ist eine kleinere  $p$ -Gruppe.

Falls  $|G| = p$  ist, so ist  $G = Z_G$  zyklisch, also abelsch, also nilpotent mit Nilpotenzgrad 1.

Ansonsten: Mittels Induktion nach  $G$  dürfen wir bereits annehmen, dass  $G/Z_G$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $e$  ist. Demnach ist also  $G$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $e + 1$ .  $\square$

**Korollar.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = p^2$ . Dann ist  $G$  abelsch.

*Beweis.* Aus dem Satz erhalten wir, dass  $Z_G$  eine nichttriviale Untergruppe ( $|Z_G| > 1$ ) ist. Falls  $Z_G = G$  ist, so folgt das Korollar. Angenommen dem ist nicht so, dann ist  $|Z_G| = p$ . Dann ist aber  $G/Z_G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$  und damit zyklisch. Also existiert ein  $g \in G$  so dass  $G/Z_G = \langle gZ_G \rangle = \{g^k Z_G \mid k = 0, \dots, p-1\}$ . Insbesondere gilt also

$$G = \{g^k z \mid k = 0, \dots, p-1, z \in Z_G\}.$$

Damit gilt aber für  $g^{k_1} z_1, g^{k_2} z_2 \in G$ , dass  $g^{k_1} z_1 g^{k_2} z_2 = g^{k_1+k_2} \underbrace{z_1 z_1}_{=z_2 z_1} = g^{k_2} z_2 g^{k_1} z_1$ . Dies widerspricht der Annahme, dass  $Z_G \subsetneq G$ .  $\square$

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Eine *Subnormalreihe* in  $G$  ist eine Folge von Untergruppen so dass

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

jede Untergruppe in der nächsten normal ist.

**Definition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Wir sagen  $G$  ist *auflösbar* falls es eine Subnormalreihe in  $G$  (wie oben) gibt, so dass  $G_{k+1}/G_k$  eine abelsche Gruppe (für  $k = 0, \dots, n-1$ ) ist.

**Beispiel.** 1. Diedergruppe  $D_{2 \cdot n}$  ist auflösbar.

2. Affine Gruppe  $A_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in R^\times, b \in R \right\}$  ist auflösbar und ist nicht nilpotent falls  $|R^\times| > 1$ .

**Proposition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist  $[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle \triangleleft G$ , und  $G/[G, G]$  ist abelsch. Falls  $H$  eine abelsche Gruppe ist und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus ist, so ist  $\varphi([G, G]) = \{e_H\}$  und  $\varphi$  induziert einen Gruppenhomomorphismus  $\bar{\varphi} : G/[G, G] \rightarrow H$ . In diesem Sinne ist  $G/[G, G]$  die größte abelsche Faktorgruppe von  $G$ .

*Beweis.* In der Tat ist  $[G, G]$  eine charakteristische Untergruppe (siehe Übung) und damit auch normal. Seien  $a, b \in G$ . Dann gilt  $[a[G, G], b[G, G]] = [a, b][G, G] = [G, G]$ , aber dies bedeutet genau, dass die Elemente  $a[G, G]$  und  $b[G, G]$  in  $G/[G, G]$  kommutieren. Da  $a, b \in G$  beliebig waren, ist also  $G/[G, G]$  abelsch.

Sei nun  $H$  abelsch und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Für  $a, b \in G$  gilt dann

$$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] = e_H$$

Da dies für alle  $a, b \in G$  gilt und  $[G, G]$  von diesen Elementen erzeugt wird, erhalten wir daraus  $\varphi([G, G]) = \{e_H\}$ . Auf Grund eines Korollars zum ersten Isomorphiesatz gibt es damit einen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} G/[G, G] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & H \\ \uparrow \pi & \nearrow \varphi & \\ G & & \end{array}$$

mit  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ . □

**Proposition.** Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist  $G$  auflösbar genau dann wenn die folgende induktiv definierten höheren Kommutatorgruppen nach endlich vielen Schritten die triviale Untergruppe  $\{e\}$  erreicht:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G \\ G^{(1)} &= [G^{(0)}, G^{(0)}] \text{ (Kommutatorgruppe)} \\ G^{(2)} &= [G^{(1)}, G^{(1)}] \text{ (2. Kommutatorgruppe)} \\ &\vdots \\ G^{(n+1)} &= [G^{(n)}, G^{(n)}] \end{aligned}$$

*Beweis.* Angenommen  $G^{(n+1)} = \{e\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\{e\} = G^{(n+1)} \triangleleft G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G^{(0)}$$

eine Subnormalreihe für  $G$  (mit umgekehrter Indizesreihenfolge). Des Weiteren sind die Quotienten  $G^{(k)}/G^{(k+1)}$  auf Grund der letzten Proposition abelsch. Also ist  $G$  auflösbar.

Sei nun umgekehrt  $G$  auflösbar und  $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$  eine Subnormalreihe mit abelschen Faktorgruppen. Da  $G/G_{n-1} = G_n/G_{n-1}$  abelsch ist, gilt  $[G, G] = G^{(1)} < G_{n-1}$ . Mittels Induktion können wir analog  $G^{(k)} < G_{n-k}$ . Für  $k = n$  erhalten wir also  $G^{(n)} < G_0 = \{e\}$ . □

## 3.7 Satz von Sylow

Für eine endliche Gruppe  $G$  besagt der Satz von Lagrange, dass für  $H < G$  sowohl die Ordnung  $|H|$  als auch der Index  $[G : H]$  Teiler von  $|G|$  sind.

**Satz (Sylow).** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $p \in \mathbb{N}$  prim und  $n = |G| = p^k m$  für  $k \geq 1$  und  $m$  teilerfremd zu  $p$ .

- 1) Es existiert eine maximale  $p$ -Untergruppe  $H_p$  mit  $|H_p| = p^k$ , welche Sylow  $p$ -Untergruppen genannt werden.
- 2) Falls  $H < G$  eine  $p$ -Untergruppe ist, so existiert eine  $p$ -Sylow Untergruppe  $H_p$  mit  $H < H_p$ .
- 3) Je zwei Sylow  $p$ -Untergruppen sind konjugiert.

**Lemma.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim,  $n = p^k m$  mit  $m$  teilerfremd zu  $p$ . Dann ist  $\binom{n}{p^k}$  nicht durch  $p$  teilbar.

*Beweis.* Sei  $S = \mathbb{Z}/(p^k) \times \{1, \dots, m\}$ ,  $G = \mathbb{Z}/(p^k)$ , und definiere eine Wirkung von  $G$  auf  $S$  durch Addition in der ersten Komponente:  $g \cdot (a, j) = (a + g, j)$ . Wir bemerken dass die  $G$ -Bahnen in  $S$  genau die Mengen der Form  $G \times \{j\}$  für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  sind.

Wir definieren  $T = \{A \subseteq S : \text{Teilmenge mit } |A| = p^k\}$  und lassen  $G$  auf  $A \in T$  mittels  $g \cdot A = \{g \cdot (a, j) \mid (a, j) \in A\}$  wirken. Damit ist  $T$  eine  $G$ -Menge.

Da  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist, können wir das frühere Lemma über  $p$ -Gruppen und Fixpunkte verwenden:

$$\binom{n}{p^k} = |T| = |\text{Fix}_G(T)| = m \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

nach Annahme im Lemma.

$$\begin{aligned} A \in \text{Fix}_G(T) &\Leftrightarrow A \subseteq S, |A| = p^k \text{ und } g \cdot A = A \text{ für alle } g \in G \\ &\Leftrightarrow A \subseteq S, |A| = p^k \text{ und } A \text{ ist eine Vereinigung von } G\text{-Bahnen} \\ &\Leftrightarrow A \subseteq S \text{ ist eine } G\text{-Bahn} \\ &\Leftrightarrow A = G \times \{j\} \text{ für ein } j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

**Beispiel (Sylow-Untergruppe).** Sei  $G = \text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$  mit Ordnung  $p(p^2 - 1)$ . Dann ist  $H_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p \right\} \cong \mathbb{F}_p$  eine Sylow  $p$ -Untergruppe.

□

*Beweis von 1) Satz.* Sei  $T = \{A \subseteq G : |A| = p^k\}$ . Dann ist  $T$  eine  $G$ -Menge mittels Linksmultiplikation ( $A \in T, g \in G, g \cdot A = \{g \cdot a \mid a \in A\}$ ) mit  $|T| = \binom{n}{p^k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Auf Grund eines Korollars zu dem Satz über Bahn und Stabilisator gilt

$$|T| = |\text{Fix}_G(T)| + \sum_{|G \cdot t| > 1} [G : \text{Stab}_G(A)]. \quad (*)$$

Falls  $n = p^k$  ist, so ist  $H_p = G$  selbst die gesuchte Sylow  $p$ -Untergruppe. Ansonsten ist  $p^k < n$  und es gibt keine  $G$ -invariante Teilmenge  $A \subseteq G$  mit  $|A| = p^k$ . Also ist  $\text{Fix}_G(T) = \{\}$ . Da  $|T| \not\equiv 0 \pmod{p}$ , folgt aus (\*), dass es ein  $A \in T$  gibt, so dass  $[G : \text{Stab}(A)] \not\equiv 0 \pmod{p}$  ist.

*Bemerkung.*  $H_p = \text{Stab}_G(A_0)$  ist eine Sylow  $p$ -Untergruppe mit  $|H_p| = p^k$ .

Da  $|G| = |H_p| [G : H_p] = p^k m$  und  $p \nmid [G : H_p]$ , folgt  $p^k \mid |H_p|$ . Des Weiteren wissen wir  $H_p \cdot A_0 = A_0$ . Sei  $a_0 \in A_0$  beliebig, dann gilt also  $h \cdot a_0 \in H_p \cdot A_0 = A_0$  für alle  $h \in H_p$ . Also gilt  $H_p = a_0 \subseteq A_0$  und  $|H_p| = |H_p \cdot a_0| \leq |A_0| = p^k$ . Dies beweist die Behauptung und damit 1) im Satz. □

*Beweis von 2).* Sei  $H$  eine beliebige  $p$ -Untergruppe und  $H_p$  eine beliebige Sylow  $p$ -Untergruppe. Wir definieren  $T = G/H_p$  und lassen  $H$  mittels linksmultiplikation auf  $T$  wirken. Wegen dem

Lemma über Fixpunkte von  $p$ -Gruppen gilt

$$|\text{Fix}_H(T)| \equiv |T| = [G : H_p] = \frac{n}{p^k} = m \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Insbesondere gibt es einen Fixpunkt  $gH_p \in T$  (für die Wirkung von  $H$ ). D.h.

$$\begin{aligned} hgH_p &= gH_p \text{ für alle } h \in H \\ \Rightarrow hg &\in gH_p \text{ für alle } h \in H \\ \Rightarrow h &\in gH_pg^{-1} \text{ für alle } h \in H \\ \Rightarrow H &< gH_pg^{-1} \text{ \& } gH_pg^{-1} \text{ ist eine Sylow } p\text{-Untergruppe} \end{aligned}$$

□

*Beweis von 3).* Angenommen  $H, H_p$  sind zwei Sylow  $p$ -Untergruppen. Dann ist  $H$  eine  $p$ -Untergruppe und obiger Beweis von 2) zeigt, dass es ein  $g \in G$  mit  $H < gH_pg^{-1}$  gibt. Da aber  $|H| = |H_p| = p^k$  ist, gilt  $H = gH_pg^{-1}$ . □

## 3.8 Symmetrische und Alternierende Gruppen

**Definition.** Sei  $n \geq 1$  natürlich, dann ist  $S_n = \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$ . Die Elemente von  $S_n$  heißen *Permutationen*.

**Satz.** Sei  $n \geq 1$ . Auf  $S_n$  gibt es einen Homomorphismus  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ , der jeder Permutation ein Vorzeichen zuordnet und einer Vertauschung  $\tau_{ij}$  für  $i \neq j$  das Vorzeichen  $-1$  mit

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} i & \text{für } k = j \\ j & \text{für } k = i \\ k & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Definition.**  $\sigma \in S_n$  heißt *gerade* falls  $\text{sgn}(\sigma) = 1$ , *ungerade* falls  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . Die *alternierende Gruppe*  $A_n = \text{Ker}(\text{sgn})$  ist die Gruppe aller geraden Permutationen.

*Beweis.* Siehe lineare Algebra. Alternative Beweis-Skizze: Für  $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  definieren wir  ${}^\sigma F = F(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ . Dies definiert eine Gruppenwirkung von  $S_n$  auf  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  mittels Ringhomomorphismen. Wir definieren  $P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$  und erhalten

$${}^\sigma P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}) = \text{sgn}(\sigma)P.$$

kann als Definition von  $\text{sgn}(\sigma)$  verwendet werden. □

*Notation* (für  $\sigma \in S_n$ ).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Besser:

*Notation* (mittels Zyklen für  $\sigma \in S_n$ ). Falls  $\sigma = \text{id}$  schreiben wir einfach  $\sigma = \text{id}$ . Sei nun  $\sigma \neq \text{id}$  und  $i_1 \in \{1, \dots, n\}$  der erste Nichtfixpunkt (also  $i_1$  minimal mit  $\sigma(i_1) \neq i_1$ ). Wir bestimmen

$$\sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \dots, \sigma^{k_1}(i_1) = i_1 \quad \text{für } k_1 > 1 \text{ minimal} \quad .$$



Falls dies alle Nichtfixpunkte von  $\sigma$  sind, so nennen wir  $\sigma$  einen  $(k-)$ Zyklus und schreiben

$$\sigma = (i_1, \sigma(i_1), \sigma^2(i_1), \dots, \sigma^{k-1}(i_1)).$$

Falls nicht, so sei  $i_2 > i_1$  der nächste Nichtfixpunkt (der noch nicht gefunden wurde) und bestimme

$$i_2, \sigma(i_2), \dots, \sigma^{k_2}(i_2) = i_2 \quad \text{für } k_2 > 1 \text{ minimal}$$

etc. Nach endlich vielen Schritten haben wir alle Nichtfixpunkte gefunden und schreiben

$$\sigma = (i_1, \sigma(i_1), \dots, \sigma^{k_1-1}(i_1))(i_2, \sigma(i_2), \dots, \sigma^{k_2-1}(i_2)) \dots (i_r, \sigma(i_r), \dots, \sigma^{k_r-1}(i_r)).$$

In diesem Fall sagen wir auch, dass  $\sigma$  *Zyklentyp*(Struktur)  $k_1, k_2, \dots, k_r$  hat (wobei die Zahlen  $k_1, \dots, k_r$  auch in einer anderen Reihenfolge auftreten dürfen).

**Beispiel.**  $n = 5$

$$(3, 2, 5) = (2, 5, 3) = \sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 3 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Proposition.** Zwei Permutationen sind in  $S_n$  genau dann konjugiert, falls sie dieselbe Zyklensstruktur haben.

**Beispiel.**  $n = 5$  :  $(2, 5, 3)$  und  $(1, 2, 3)$  sind konjugiert.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = \begin{cases} 1 \mapsto 4 \mapsto 4 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 3 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 5 \mapsto 5 \mapsto 4 \\ 5 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 3 \end{cases} = (2, 5, 3)$$

*Beweis-Skizze (Seite 122).* Sei  $\sigma \in S_n$  beliebig und  $(i_1, \dots, i_k)$  ein Zyklus. Dann ist

$$\sigma(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k))$$

mit einer kleinen Rechnung wie im Beispiel.

Dies gilt analog auch für Produkte von Zyklen für zwei Permutationen mit demselben Zyklentyp kann man  $\sigma$  finden:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1})(i_{2,1}, \dots, i_{2,k_2}) \dots (i_{r,1}, \dots, i_{r,k_r}) \overbrace{(i_{r+1}) \dots (i_s)}^{\text{Fixpunkte von } \tau_1} \\ \tau_2 &= (j_{1,1}, \dots, j_{1,k_1})(j_{2,1}, \dots, j_{2,k_2}) \dots (j_{r,1}, \dots, j_{r,k_r}) \overbrace{(j_{r+1}) \dots (j_s)}^{\text{Fixpunkte von } \tau_2}. \end{aligned}$$

wobei in beiden Zeilen jede Zahl von  $1, \dots, n$  einmal auftritt. Definiere man nun  $\sigma$  mittels  $\sigma(i_*) = j_*$ . □

**Satz.**  $A_n$  und  $S_n$  sind auflösbar für  $n \leq 4$ .  $A_n$  ist einfach für  $n \geq 5$ .

*Beweis für  $n \leq 4$ .  $A_1 \cong A_2 \cong \{e\}$*

$A_3 \cong \mathbb{Z}/(3)$  ist abelsch.

$A_4 : V_4 = \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$  (Kleinsche Vierergruppe) ist eine Untergruppe (wo jedes nichttriviale Element Ordnung 2 hat). Dies bedarf einer kleinen Nebenrechnung, z.B.

$$(1,2)(3,4) \cdot (1,3)(2,4) = \begin{cases} 1 \mapsto 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \mapsto 3 \\ \dots \end{cases} = (1,4)(2,3)$$

insbesondere ist  $V_4 \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ .

$V_4$  enthält neben  $e$  genau die Elemente vom Zyklentyp 2, 2.  $\Rightarrow V_4 \triangleleft A_4$ .

$$|A_4| = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12, |V_4| = 4 \Rightarrow |A_4/V_4| = 3 \quad \& \quad A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/(3).$$

Folgt  $A_4$  ist auflösbar. Weiters ist  $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}/(2)$  also auch  $S_4$  auflösbar. □

Für  $n \geq 5$  wollen wir die Gruppenwirkung von  $A_n$  auf  $\{1, \dots, n\}$  und folgende Lemmas verwenden.

**Lemma.** *Sei  $n \geq 3$ . Dann ist die Wirkung von  $A_n$  auf  $\{1, \dots, n\}$  transitiv.*

*Beweis.*  $(1, 2, 3) \in A_n$  bildet 1 auf 2 ab. Für  $i \geq 3$  bildet  $(1, i, 2) \in A_n$  die 1 auf  $i$  ab. Also ist in beiden Fällen die Bahn von 1 ganz  $\{1, \dots, n\}$ . □

**Lemma.** *Sei  $n \geq 5$  und  $H \triangleleft A_n$  nicht die triviale Gruppe. Dann enthält  $H$  eine Permutation  $\sigma \neq e$  mit mindestens einem Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $\sigma \in H$  und  $\tau \in A_n$ . Dann gilt  $[\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in H$ , da  $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in H$ . Angenommen  $\sigma \in H \setminus \{e\}$ . Falls  $\sigma$  einen Fixpunkt hat, so gilt das Lemma in diesem Fall. Wir nehmen also an, dass  $\sigma$  keinen Fixpunkt hat und werden je nach Zyklentyp von  $\sigma$  immer ein  $\sigma' \in H \setminus \{e\}$  finden, dass ein Fixpunkt besitzt (Meist  $\sigma' = [\tau, \sigma]$  für ein geeignetes  $\tau \in A_n$ ).

- $\sigma$  enthält ein Zyklus der Länge  $k \geq 4$ . Sei  $\sigma = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) \dots$  und  $\tau = (i_1, i_2, i_3) \in A_n$ . Folgt

$$\sigma' = [\tau, \sigma] = (i_1, i_2, i_3)\sigma(i_1, i_2, i_3)^{-1}\sigma^{-1} : \begin{cases} i_1 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_k \mapsto \xrightarrow{\tau^{-1}} i_k \xrightarrow{\sigma} i_1 \xrightarrow{\tau} i_2 \\ i_3 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_2 \mapsto \xrightarrow{\tau^{-1}} i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \xrightarrow{\tau} i_3 \end{cases}$$

Nichttrivial (wegen  $k \geq 4$ ), ein Fixpunkt.

- $\sigma$  enthält sowohl Zyklen der Länge 2 als auch Zyklen der Länge 3.  $\sigma' = \sigma^2 \in H$  hat Zyklen der Länge 3 und Fixpunkte.
- $\sigma$  enthält nur Zyklen der Länge 3 (mind. 2 wegen  $n \geq 5$ ) Sei  $\sigma = (i_1, i_2, i_3)(i_4, i_5, i_6) \dots$  und  $\tau = (i_1, i_2, i_4)$ . Folgt

$$\sigma' = [\tau, \sigma] = (i_1, i_2, i_4)\sigma(i_1, i_2, i_4)^{-1}\sigma^{-1} : \begin{cases} i_1 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_3 \mapsto \xrightarrow{\tau^{-1}} i_3 \xrightarrow{\sigma} i_1 \xrightarrow{\tau} i_2 \\ i_6 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_5 \mapsto \xrightarrow{\tau^{-1}} i_5 \xrightarrow{\sigma} i_6 \xrightarrow{\tau} i_6 \end{cases}$$

Nichttrivial, ein Fixpunkt.

- $\sigma$  enthält nur Zyklen der Länge 2 (mind. wegen  $N \geq 5$ ) Sei  $\sigma = (i_1, i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6) \dots$  und  $\tau = (i_1, i_2, i_3)$ . Folgt

$$\sigma' = [\tau, \sigma] = (i_1, i_2, i_3)\sigma(i_1, i_2, i_3)^{-1}\sigma^{-1} : \begin{cases} i_1 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_2 \mapsto \tau^{-1} i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \mapsto i_3 \\ i_5 \xrightarrow{\sigma^{-1}} i_6 \mapsto \tau^{-1} i_6 \xrightarrow{\sigma} i_5 \mapsto i_5 \end{cases}$$

Nichttrivial (wegen  $k \geq 4$ ). Es existiert Fixpunkt.

Dies deckt alle Fälle ab.  $\square$

*Beweis, dass  $A_5$  einfach ist.* Sei  $\{e\} \neq H \triangleleft A_5$  und  $\sigma \in H \setminus \{e\}$  eine Permutation mit einem Fixpunkt wie im Lemma. Insbesondere ist  $\sigma$  kein 5-Zyklus und wegen  $\sigma \in H$  auch kein 4-Zyklus. Also ist  $\sigma$  entweder ein 3-Zyklus oder mit Zyklentyp 2, 2. Angenommen  $\sigma = (i_1, i_2)(i_3, i_4)$  und  $\tau = (i_1, i_2, i_3)$  für  $i_5 \neq i_1, i_2, i_3, i_4$ . Dann ist  $\tau\sigma\tau^{-1} = (i_2, i_5)(i_3, i_4)$  und

$$\underbrace{\sigma}_{\in H} \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in H} = (i_1, i_2)(i_3, i_4)(i_2, i_5)(i_3, i_4) = \begin{cases} i_1 \mapsto i_1 \mapsto i_1 \mapsto i_1 \mapsto i_2 \\ i_2 \mapsto i_2 \mapsto i_5 \mapsto i_5 \mapsto i_5 \\ i_5 \mapsto i_5 \mapsto i_2 \mapsto i_2 \mapsto i_1 \\ i_3 \mapsto i_4 \mapsto i_4 \mapsto i_3 \mapsto i_3 \\ \dots \end{cases} = (i_1, i_2, i_5) \in H.$$

Also enthält  $H$  auch einen 3-Zyklus.

*Behauptung.* Alle 3-Zyklen sind in  $A_5$  konjugiert. Also enthält die normale Untergruppe  $H$  alle 3-Zyklen. Sei  $\sigma = (i_1, i_2, i_3)$  für beliebige verschiedene  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, 5\}$ . Wir definieren  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_2 & i_2 & i_3 & * & \diamond \end{pmatrix}$ , wobei wir die verbleibenden Eintragungen  $* \neq \diamond$  in  $\{1, \dots, 5\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$  wählen. Falls  $\text{sgn}(\tau) = -1$  vertauschen wir  $*$  und  $\diamond$  und erhalten  $\tau \in A_n$ . Damit gilt dann  $\tau(1, 2, 3)\tau^{-1} = (i_1, i_2, i_3)$ , was die Behauptung beweist. Wir berechnen

$$(i_1, i_2, i_3)(i_2, i_3, i_4) = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \quad \text{und} \quad \underbrace{(i_1, i_2, i_3)(i_3, i_4, i_5)}_{\in H} = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$$

für eine beliebige Aufzählung  $i_1, \dots, i_5$  von  $1, \dots, 5$ . Folgt  $H = A_5$  enthält alle 5-Zyklen und alle Elemente vom Zyklentyp 2, 2.  $\square$

*Beweis für  $n > 5$  mittels Induktion.* Angenommen  $\{e\} \neq H \triangleleft A_n$  und  $\sigma \in H \setminus \{e\}$  hat einen Fixpunkt. Wegen dem ersten Lemma dürfen wir auch ohne Beschränkung annehmen, dass  $\sigma(n) = n$ .

$$\Rightarrow \{e\} \neq H \cap A_{n-1} \triangleleft A_{n-1}.$$

Nach Induktionsannahme gilt also  $H \cap A_{n-1} = A_{n-1}$ . Wegen dem ersten Lemma folgt, dass jedes Element von  $A_n$  mit einem Fixpunkt zu einem Element von  $A_{n-1}$  konjugiert ist. Zusammengekommen erhalten wir, dass  $H$  jedes Element mit einem Fixpunkt enthält.

Sei  $\sigma \in A_n$  beliebig.

- Falls  $\sigma$  einen Fixpunkt hat so ist  $\sigma \in H$ .
- Ansonsten schreiben wir  $\sigma = (1, \sigma(1), i)((1, \sigma(1), i)^{-1}\sigma)$  wobei  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, \sigma(1)\}$  und der erste Zyklus  $n - 3$  Punkte fixiert und der zweite einen fixiert und daher beide in  $H$  sind.

Es folgt also  $\sigma \in H$ .

Da  $\sigma \in A_n$  beliebig war, gilt  $H = A_n$ . □

### 3.9 Gruppen kleiner Ordnung & Klassifikation

**Satz.** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $n = |G| < 100$ . Dann ist entweder  $G$  auflösbar oder  $n = 60$  und  $G \simeq A_5$ .

Für den Beweis des Satzes bedienen wir uns vieler bereits bewiesenen kleinen Lemmas, dem Sylowsatz und weiteren Lemmas mit zunehmender Komplexität. Des Weiteren verwenden wir Induktion nach  $n$  und eine grundlegende Eigenschaft von Auflösbarkeit.

**Definition** (Wiederholung). Sei  $G$  eine Gruppe. Wir sagen  $G$  ist *auflösbar* falls es eine Subnormalreihe

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = G$$

gibt für die die Faktorgruppen  $\frac{G_j}{G_{j-1}}$  für  $j = 1, \dots, k$  alle abelsch sind.

**Proposition** (Lageeigenschaft und Auflösbarkeit). Sei  $G$  eine Gruppe und  $N \triangleleft G$ . Falls  $N$  und  $G/N$  auflösbar sind, so gilt dasselbe für  $G$ .

*Beweis.* Seien  $N \triangleleft G$  und  $G/N$  auflösbar. Dann existieren Subnormalreihen

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_l = N \tag{*1}$$

$$\{eN\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_m = G/N \tag{*2}$$

mit abelschen Faktorgruppen. Sei  $\pi : G \rightarrow G/N$  die kanonische Projektion. Wir definieren

$$G'_j = \pi^{-1}(H_j) < G$$

und erhalten

$$G_l = N = \pi^{-1}(eN) = G'_0 < G'_1 < \dots < G'_m = G.$$

*Behauptung.*  $G'_{j-1} \triangleleft G'_j$  und  $G'_j/G'_{j-1} \cong H_j/H_{j-1}$  für  $j = 1, \dots, m$ .

Gemeinsam mit  $(*1)$  beweist die Behauptung die Proposition, da damit die Subnormalreihe

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_l = N = G'_0 \triangleleft \dots \triangleleft G'_m = G$$

alle Eigenschaften wie in der Definition erfüllt.

Seien  $h \in G$  □

Für den Rest dieses Beweises siehe Algebra 21 und 22

### 3.10 Freie Gruppen und Relationen

**Definition.** Sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Dann wird  $\mathbb{Z}^n$  als die *freie abelsche Gruppe* mit  $n$  Erzeugenden  $b_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, b_n = (0, \dots, 0, 1)^T$  bezeichnet.

**Lemma.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe und  $a_1, \dots, a_n \in G$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus  $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  mit  $\phi(b_j) = a_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

*Beweis Idee.* Verwende  $\phi(m) = \phi(\sum_{j=1}^n m_j b_j) = \sum_{j=1}^n m_j \phi(b_j) = \sum_{j=1}^n m_j a_j$  □

**Satz.** Sei  $n \geq 1$  und  $b_1, \dots, b_n$  paarweise verschieden. Dann existiert eine „freie Gruppe“  $F_n$ , welche von  $b_1, \dots, b_n$  erzeugt wird, mit folgender „universeller“ Eigenschaft: Für jede Gruppe  $G$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in G$  gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus  $\phi : F_n \rightarrow G$  mit  $\phi(b_j) = a_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

**Konstruktion von  $F_n$ :**  $F_n = \{\text{reduzierte Wörter in } b_1, b_1^{-1}, \dots, b_n, b_n^{-1}\}$ . Eine endliche Liste mit Eintragungen  $b_1^{\pm 1}, \dots, b_n^{\pm 1}$  wird *Wort* genannt. Die leere Liste bezeichnen wir mit  $e$  und gilt als reduziert.

Ein Wort  $w$  wird *reduziert* genannt falls in  $w$  nie direkt ein  $b_j$  auf  $b_j^{-1}$  oder ein  $b_j^{-1}$  auf ein  $b_j$  folgt ( $b_1 \underbrace{b_2 b_2^{-1}} b_3$  ist nicht reduziert,  $b_1 b_2 b_3 b_2^{-1} b_3^{-1}$  ist reduziert).

Durch Löschen von aufeinanderfolgenden  $b_j$  &  $b_j^{-1}$  oder  $b_j^{-1}$  &  $b_j$  kann ein Word reduziert werden.

Dadurch kann  $F_n$  zu einer Gruppe gemacht werden: Für  $w_1, w_2 \in F_n$  hängen wir an  $w_1$  das Wort  $w_2$  an und wenn nötig reduzieren wir  $w_1 w_2$  zu einem Element von  $F_n$ . - Dies definiert  $w_1 \cdot w_2 \in F_n$ .

*Universelle Eigenschaft* beruht auf der Definition

$$\phi(\underbrace{b_{j_1}^{\varepsilon_1} b_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots b_{j_k}^{\varepsilon_k}}_{\in F_n}) = a_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{j_k}^{\varepsilon_k}.$$

Wir überspringen den formalen Beweis des Satzes.

**Definition (Relation).** Sei  $F_n$  die freie Gruppe mit  $n$  Erzeugenden,  $W \subseteq F_n$  eine Teilmenge. Sei  $N = \langle g w g^{-1} \mid g \in F_n, w \in W \rangle$  der von  $W$  erzeugte Normalteiler von  $F_n$ . Dann heißt  $F_n/N$  die *Gruppe mit Erzeugenden  $b_1, \dots, b_n$  und Relationen  $w \in W$*  und wird mit  $\langle b_1, \dots, b_n \mid w = e \text{ für } w \in W \rangle$  bezeichnet.

**Beispiel.**

- $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid ab = ba \rangle = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle$
- $D_6 \cong \langle D, R \mid D^3 = R^3 = e, RDR = D^{-1} \rangle$

# Kapitel 4: Modultheorie

(siehe Seite 288, aber „kommutativ“)

## 4.1 Definition & Beispiel

„Moduln verhalten sich zu Ringen wie Vektorräume zu Körpern.“

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Modul  $M$  ist eine abelsche Gruppe gemeinsam mit einer Skalarmultiplikation  $R \times M \rightarrow M, (a, m) \mapsto a \cdot m$  mit folgenden Eigenschaften:

- $a \cdot (m_1 + m_2) = am_1 + am_2$  für  $a \in R, m_1, m_2 \in M$ .
- $(a + b) \cdot m = am + bm$  für  $a, b \in R, m \in M$ .
- $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$  für  $a, b \in R, m \in M$ .
- $1 \cdot m = m$  für  $m \in M$ .

**Definition.** Seien  $R$  ein Ring und  $M, N$   $R$ -Moduln. Wir sagen  $\phi : M \rightarrow N$  ist  $R$ -linear (ein *Modulmorphismus über  $R$* ) falls  $\phi$  ein Gruppenmorphismus ist und  $\phi(am) = a\phi(m)$  für alle  $a \in R$  und  $m \in M$ .

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Ein *Unterm modul* ist eine Untergruppe  $N < M$  mit  $a \cdot n \in N$  für alle  $a \in R$  und  $n \in N$ .

**Lemma.** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N < M$  ein Unterm modul. Dann induziert die  $R$ -Modulstruktur auf  $M$  eine  $R$ -Modulstruktur auf  $M/N$  so dass die kanonische Projektion

$$\begin{cases} \pi : M \rightarrow M/N \\ m \mapsto m + N \end{cases} \quad R\text{-linear ist.}$$

*Beweis.* Übung □

**Beispiel.** 0. Falls  $R = K$  ein Körper ist, so reden wir genau über *Vektorräume über  $K$* .

1.  $M = R$  ist ein  $R$ -Modul und Ideale  $I < R$  sind genau die Unterm oduln von  $R$ .
2. Angenommen  $M, N$  sind  $R$ -Moduln. Dann ist auch

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ ist } R\text{-linear}\}$$

ein  $R$ -Modul:  $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$  und  $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$ .

3. Sei  $R = \mathbb{Z}$ . Dann ist jede abelsche Gruppe  $M$  auch ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Falls wir  $\mathbb{Z}$ -Modul klassifizieren können, so erhalten wir eine Klassifikation von abelschen Gruppen. Dies ist eines der *Hauptziele des Kapitels*.

**Proposition** (Erster Isomorphiesatz). Seien  $R$  ein Ring,  $M, N$   $R$ -Moduln,  $\phi : M \rightarrow N$   $R$ -linear. Dann sind  $\text{Ker}(\phi) < M, \text{Im}(\phi) < N$  Unterm oduln und  $\phi$  induziert einen  $R$ -linearen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : M/\text{Ker}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi).$$

**Lemma.** Seien  $R$  ein Ring und  $M_1, \dots, M_n$   $R$ -Moduln. Dann ist auch  $M_1 \times \dots \times M_n$  ein  $R$ -Modul mit koordinatenweiser Skalarmultiplikation

$$a \cdot (m_1, \dots, m_n) = (am_1, \dots, am_n) \quad \text{für } a \in R, (m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \dots \times M_n.$$

Beweis. Übung

□

**Lemma.** Seien  $R, S$  zwei Ringe,  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N$  ein  $S$ -Modul. Dann ist  $M \times N$  ein  $R \times S$ -Modul mit koordinatenweiser Skalarmultiplikation

$$(a, b) \cdot (m, n) = (am, bn) \quad \text{für} \quad (a, b) \in R \times S, (m, n) \in M \times N.$$

Beweis. Übung

□

**Übung:** Charakterisiere die Untermoduln von  $M \times N$  (über  $R \times S$ ).

Welche Ringe könnten interessant sein?

$$\text{Körper} \rightarrow \text{Vektorräume} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \text{Abelsche Gruppen} \quad K[X] \rightarrow ?$$

**Satz.** Sei  $K$  ein Körper und  $M$  ein Vektorraum über  $K$ . Die Definition einer Modulstruktur auf  $M$  über  $K[X]$  (die mit der Vektorraumstruktur von  $M$  über  $K$  kompatibel ist) ist gleichzusetzen mit der Auswahl einer  $K$ -linearen Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M$ . Formaler formuliert sind die folgenden beiden Abbildungen invers zueinander:

Eine Skalarmultiplikation auf  $M$  über  $K[X]$  dessen Einschränkung auf  $K \times M$  die Skalarmultiplikation von  $M$  über  $K$  ist.

Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M$

$$\begin{aligned} \cdot & \longmapsto \varphi(m) = X \cdot m \text{ für } m \in M \\ f \cdot m = (f(\varphi))(m) = (\sum_k a_k \varphi^k)(m) & \longleftarrow \varphi \\ f = \sum_k a_k X^k \in K[X] & \end{aligned}$$

*Beweis.* Angenommen  $\cdot : K[X] \times M \rightarrow M$  definiert eine Modulstruktur auf  $M$  über  $K[X]$ . Dann ist  $\varphi(m) = X \cdot m$  für  $m \in M$  eine  $K$ -lineare Abbildung auf  $M$ .

$$\begin{cases} \varphi(m_1 + m_2) = X \cdot (m_1 + m_2) = X \cdot m_1 + X \cdot m_2 = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \\ \varphi(a \cdot m) = X \cdot (a \cdot m) = (aX) \cdot m = a \cdot \varphi(m) \end{cases}.$$

Angenommen  $\varphi : M \rightarrow M$  ist  $K$ -linear. Dann definiert  $f = \sum_k a_k X^k \in K[X] \mapsto f(\varphi) = \sum_k a_k \varphi^k \in \text{Hom}_K(M, M)$  einen Ringhomomorphismus. Wir verwenden dies um  $f \cdot m = (f(\varphi))(m)$  für  $f \in K[X]$  und  $m \in M$  zu definieren. Dies erfüllt die Axiome eines  $K[X]$ -Moduls:

Z.B. gilt für  $f_1, f_2 \in K[X], m \in M$

$$f_1 \cdot (f_2 \cdot m) = f_1(\varphi)(f_2(\varphi)m) = \underbrace{(f_1(\varphi) \cdot f_2(\varphi))}_{=(f_1 \cdot f_2)(\varphi)} = (f_1 \cdot f_2) \cdot m.$$

wobei  $(f_1 \cdot f_2)(\varphi)$  die Auswertung ein Ringhomomorphismus ist. Diese beiden Abbildungen sind invers zueinander.

$$\begin{aligned} \cdot & \mapsto \begin{cases} \varphi(m) = X \cdot m \\ \varphi^2(m) = X^2 \cdot m \\ \vdots \end{cases} \mapsto f(X) \cdot m = \sum_k a_k \underbrace{(X^k \cdot m)}_{=\varphi^k(m)} = f \cdot m \\ \varphi & \mapsto \begin{cases} \cdot \text{ definiert durch} \\ f \cdot m = f(\varphi)m \end{cases} \mapsto X \cdot m = \varphi(m). \end{aligned}$$

Wobei  $*$  die neue Skalarmultiplikation und  $\cdot$  die alte Skalarmultiplikation ist. Und außerdem  $X \cdot m$  die neue lineare Abbildung und  $\varphi(m)$  die alte lineare Abbildung ist. □

Wir wollen endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen klassifizieren!

$\xrightarrow{\mathbb{Z}}$  Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen.

$\xrightarrow{K[X]}$  Satz über Jordan Normalform.

## 4.2 Freie Moduln

**Definition.** Sei  $I$  eine Menge und  $R$  ein Ring. Wir bezeichnen

$$R^{(I)} = \{x : I \rightarrow R \mid x_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I\}$$

als den *freien  $R$ -Modul* (über der Indexmenge  $I$ ). Wir nennen

$$e_i = \mathbb{1}_{\{i\}} \quad \text{für } i \in I$$

die *Standardbasis* von  $R^{(I)}$ . Ein *freier Modul*  $M$  ist ein Modul isomorph zu  $R^{(I)}$  für eine Menge  $I$ . Die Kardinalität von  $I$  wird als der *Rang* von  $M \cong R^{(I)}$  bezeichnet.

**Lemma.** Sei  $R \neq \{0\}$  ein Ring. Dann ist der Rang eines Moduls wohldefiniert.

*Beweis.* Sei  $J_{\max} \subseteq R$  ein Maximalideal (welches auf grund eines Satzes aus dem Kapitel über Ringe existiert). Sei  $M$  ein freier  $R$ -Modul. Dann ist

$$J_{\max} \cdot M = \left\{ \sum_k a_k m_k \mid a_k \in J_{\max}, m_k \in M \right\}$$

ist ein Untermodul. Sei  $I$  eine Menge mit  $M \cong R^{(I)}$ . Dann gilt

$$J_{\max} \cdot M \quad \text{wird auf} \quad \left\{ \sum_{i \in I} a_i e_i \mid a_i \in J_{\max}, a_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I \right\}$$

abgebildet. Daraus folgt, dass

$$M/J_{\max} \cdot M \cong (R/J_{\max})^{(I)}$$

ein Vektorraum über  $R/J_{\max}$  der Dimension  $|I|$  ist. Das Lemma folgt nun aus der Linearen Algebra.  $\square$

*Behauptung.* Freie Moduln verhalten sich am ehesten wie Vektorräume ...

**Proposition.** Seien  $m, n \geq 1$  natürliche Zahlen und  $R$  ein Ring. Dann gilt

$$\text{Hom}(R^n, R^m) \cong \text{Mat}_{mn}(R)$$

wie in der Linearen Algebra.

*Beweis.* wie in der Linearen Algebra.  $\square$

**Definition.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul über einem Ring  $R$ . Wir sagen  $x_1, \dots, x_n \in M$  sind *frei* oder *linear unabhängig* (l.u.) falls die Abbildung  $a \in R^n \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$  injektiv ist.

Falls  $x_1, \dots, x_n \in M$  l.u. sind, so ist das Bild der Abbildung ein freier Untermodul von  $M$ .

## 4.3 Torsionsmoduln

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Wir sagen  $m \in M$  ist ein *Torsionselement*, falls es ein  $a \in R \setminus \{0\}$  gibt mit  $a \cdot m = 0$ . Wir sagen  $M$  ist ein *Torsionsmodul* falls jedes  $m \in M$



ein Torsionselement ist. Wir sagen  $M$  ist *torsionsfrei* falls  $m = 0$  das einzige Torsionselement von  $M$  ist.

**Beispiel.** • Sei  $R = \mathbb{Z}$  und  $M = G$  eine additiv geschriebene endliche abelsche Gruppe. Dann ist  $M$  ein Torsionsmodul. Jedes  $g \in M$  hat endliche Ordnung  $n < \infty$  womit  $n \cdot g = 0$  ist.

- Sei  $R = \mathbb{Z}$ . Dann ist  $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ein Torsionsmodul.
- Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ , und  $A : V \rightarrow V$   $K$ -linear. Wir verwenden  $A$  um  $V$  zu einem  $K[X]$ -Modul zu machen. Dann ist  $V$  ein Torsionsmodul über  $K[X]$ . Sei  $v \in V \setminus \{0\}$ . Dann ist die Abbildung  $f \in K[X] \mapsto f \cdot v \in V$  nicht injektiv (wegen  $\dim(V) < \infty = \dim(K[X])$ ). Also gibt es ein  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  mit  $f \cdot v = 0$ .
- Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist in  $M$  ein freier  $R$ -Modul ist, so ist  $M$  torsionsfrei.

## 4.4 Struktur von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Für eine Teilmenge  $X \subseteq M$  wird

$$\langle X \rangle_R = \left\{ \sum_{x \in E} a_x x \mid a_x \in R \text{ für } x \in E \text{ und } E \subseteq X \text{ endlich} \right\}$$

als die  *$R$ -lineare Hülle von  $X$*  oder als der *von  $X$  erzeugte Untermodul* bezeichnet. Falls es eine Teilmenge  $X \subseteq M$  mit  $|X| < \infty$  und  $\langle X \rangle_R = M$  gibt, so heißt  $M$  *endlich erzeugt*.

**Beispiel.** Für  $R = K[X_1, X_2, \dots]$  ist der Untermodul  $I = \langle X_1, X_2, \dots \rangle$  nicht endlich erzeugt.

Wir wollen ab nun nur Hauptidealringe betrachten - dort wäre jeder Untermodul von  $R$  wieder frei mit Rang 0 oder 1.

**Satz** (Klassifikationssatz (1. Teil)). *Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M$  ein endlich erzeugter Modul über  $R$ . Dann ist  $M$  isomorph zu einem direkten Produkt  $R^n \times T$  wobei*

$$T = M_{\text{tors}} = \{m \in M \mid m \text{ ist ein Torsionselement von } M\}$$

und  $n$  ist der Rang von  $M/M_{\text{tors}}$ . Insbesondere ist  $M$  ein freier Modul genau dann wenn  $M_{\text{tors}} = \{0\}$ .

**Proposition.** *Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $n \geq 1$ . Dann ist jeder Untermodul  $M \subseteq R^n$  ein freier  $R$ -Modul mit Rang  $\leq n$ .*

*Beweis.* Sei  $e_i$  für  $i = 1, \dots, n$  die Standardbasis von  $R^n$ . Wir definieren die Untermoduln

$$M_i = M \cap \langle e_1, e_2, \dots, e_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt  $M_n = M$ .

*Behauptung.*  $M_i$  ist ein freier Modul mit Rang  $\leq i$ . Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach  $i$ .

**Induktionsanfang:** Für  $i = 1$  ist  $M_1 = M \cap \langle e_1 \rangle \cong J \subseteq R$ . Dies zeigt, dass  $M_1$  isomorph zu einem Ideal  $J$  in  $R$ . Da  $R$  ein Hauptidealring ist, folgt entweder  $J = (0)$  und  $M_i = \{0\}$  hat Rang 0 oder  $J = (d_1)$  für  $d_1 \in R \setminus \{0\}$  und  $M_1 \cong (d_1) \cong \underbrace{R}_{\in a \mapsto ad_1}$  hat Rang 1.

**Induktionsschritt:** Angenommen  $M_{i-1}$  ist frei mit  $\text{Rang} \leq i-1$ . Wir betrachten die Abbildung  $\phi : M_i \rightarrow R, (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \mapsto x_i$ . Das Bild  $\text{Im}(\phi)$  ist ein Untermodul von  $R$  also entweder  $\text{Im}(\phi) = \{0\}$ , und  $M_i = M_{i-1}$  ist frei mit  $\text{Rang} \leq i-1 < i$ . Oder  $\text{Im}(\phi) = (d_i)$  und es gibt ein  $m_i \in M_i$  mit  $\phi(m_i) = d_i$ . In diesem Fall definieren wir

$$\psi : M_{i-1} \times R \rightarrow M_i \quad (m', a) \mapsto m' + am_i \in M_i.$$

Wir zeigen, dass  $\psi$  ein Isomorphismus ist. Dies impliziert dann, dass  $M_i$  frei ist und der Rang von  $M_i$  eins höher ist als der Rang von  $M_{i-1}$ .

**Injektivität von  $\psi$ :**  $\psi(m', a) = 0 = m' + am_i \xrightarrow[\phi(m')=0]{\phi} ad_i$  und  $m' = 0$ .

**Surjektivität von  $\psi$ :** Sei  $m \in M_i$  beliebig, dann ist  $\phi(m) \in \text{Im}(\phi) = (d_i)$  und es existiert ein  $a \in R$  mit  $\phi(m) = ad_i$ . Damit ist aber  $m' = m - am_i \in M_{i-1}$  und  $m = m' + am_i \in \text{Im}(\psi)$ .

Dies schließt den Induktionsschritt und damit den Beweis.  $\square$

*Beweis des ersten Teils vom Klassifikationssatz.*

- $M_{\text{tors}}$  ist ein Untermodul, z.B.  $a_1 m_1 = 0 = a_2 m_2$ ,  $m_1, m_2 \in M_{\text{tors}}$  für  $a_1, a_2 \in R \setminus \{0\}$   
Impliziert  $a_1 a_2 (m_1 + m_2) = a_2 \underbrace{a_1 m_1}_{=0} + a_1 \underbrace{a_2 m_2}_{=0} = 0$ .
- Da  $R$  ein Integritätsbereich ist, hat ein freier Modul ( $\cong R^l$ ) keine nichttrivialen Torsionselemente. Also gilt  $M \text{ frei} \Rightarrow M_{\text{tors}} = \{0\}$ .
- Wir zeigen nun die Umkehrung dieser Aussage, also  $M_{\text{tors}} = \{0\} \Rightarrow M$  ist frei.  
Seien  $x_1, \dots, x_n \in M$  eine Erzeugendenmenge von  $M$ . Wir wählen aus dieser Liste eine maximale l.u. Teilmenge  $y_1, \dots, y_k$  aus. Dies impliziert  $N = \langle y_1, \dots, y_k \rangle \cong R^k$ .

*Behauptung.* Für alle  $x_i$  in der Erzeugendenmenge gibt es ein  $a_i \in R \setminus \{0\}$  mit  $a_i x_i \in N$ . Falls  $x_i = y_i$  ein Erzeuger von  $N$  ist, so setzen wir  $a_i = 1$ .

*Beweis von  $M$  ist frei mittels der Behauptung.* Für  $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  gilt auf Grund der Behauptung  $aM \subseteq N \cong R^k$ . Also ist  $aM$  isomorph zu einem Untermodul von  $R^k$  und wegen der Proposition selbst frei. Des Weiteren ist  $a \cdot : M \rightarrow aM$  ein Isomorphismus und daher ist auch  $M$  frei, weil  $\text{Ker}(a \cdot) = \{m \in M \mid am = 0\} \subseteq M_{\text{tors}} = \{0\}$   $\square$

*Beweis der Behauptung.* Sei  $x_i$  ein Erzeuger von  $M$  ungleich  $y_1, \dots, y_k$ . Wir definieren  $\varphi : R \times N \rightarrow M, (a, m) \mapsto ax_i + m$ . Dann kann  $\varphi$  nicht injektiv sein. Denn wenn  $\varphi$  injektiv wäre, so wäre  $\text{Im}(\varphi)$  frei mit Rang  $k+1$  und  $y_1, \dots, y_k$  wäre nicht maximal gewesen. Es gibt also  $(a, m) \neq 0$  mit  $ax_i + m = 0$ . Falls  $a = 0$ , so wäre auch  $m = 0$ . Also gilt  $a \neq 0$  und  $ax_i \in N$  und die Behauptung gilt.  $\square$

Dies beweist die Äquivalenz:  $M$  ist frei  $\Leftrightarrow M_{\text{tors}} = \{0\}$ .

Sei nun  $M$  ein beliebiger endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann ist  $M' = M/M_{\text{tors}}$  ebenso endlich erzeugt. Des Weiteren ist  $M'$  torsionsfrei (also frei wegen obiger Aussage). Sei  $m + M_{\text{tors}} \in M'$  ein Torsionselement und  $a \in R \setminus \{0\}$  mit  $a(m + M_{\text{tors}}) = 0 + M_{\text{tors}}$ . Dies impliziert also  $am \in M_{\text{tors}}$ . Also existiert ein  $b \in R \setminus \{0\}$  mit  $bam = 0$ . Folgt  $\underbrace{(ab)}_{\in R \setminus \{0\}} \cdot m = 0 \Rightarrow m \in M_{\text{tors}}$  und

$$m + M_{\text{tors}} = 0 + M_{\text{tors}}.$$

Wir erhalten also für einen beliebigen endlich erzeugten Modul  $M$ , dass  $M/M_{\text{tors}} \cong R^n$  ein freier Modul ist.

Angenommen  $x_1 + M_{\text{tors}}, \dots, x_n + M_{\text{tors}} \in M/M_{\text{tors}}$  sind freie Erzeuger von  $M/M_{\text{tors}}$ . Dann sind auch  $x_1, \dots, x_n$  in  $M$  frei ( $\cdot$ ): Falls  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  in  $M$  ist, so ist

$$\sum_{i=1}^n a_i (x_i + M_{\text{tors}}) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

Wir definieren  $\psi : (a, m') \in R^n \times M_{\text{tors}} \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i + m' \in M$  und behaupten, dass  $\psi$  ein Isomorphismus zwischen  $R^n \times M_{\text{tors}}$  und  $M$  darstellt.

**Injektiv:** Angenommen  $\psi(a, m') = \sum_{i=1}^n a_i x_i + m' = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (x_i + M_{\text{tors}}) = 0 \Rightarrow a = 0$  &  $m' = 0$  Also ist  $\psi$  injektiv.

**Surjektiv:** Sei  $m \in M$  beliebig. Dann gibt es ein  $a \in R^n$  mit  $m + M_{\text{tors}} = \sum_{i=1}^n a_i (x_i + M_{\text{tors}})$ . Also ist  $m - \sum_{i=1}^n a_i x_i = m' \in M_{\text{tors}}$  und  $\psi(a, m') = m$ . Damit ist  $\psi$  auch surjektiv.  $\square$

**Satz** (Klassifikationssatz (2. Teil)). *Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $M_{\text{tors}}$  ein endlich erzeugter Torsionsmodul. Dann existieren  $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n$  in  $R \setminus \{0\}$  so dass*

$$M_{\text{tors}} = R/(d_1) \times \dots \times R/(d_n).$$

*Alternativ gilt*

$$M_{\text{tors}} \cong \prod_{j=1}^k M_{\text{tors}}^{(p_j)}$$

wobei  $p_1, \dots, p_k \in R$  inäquivalente Primzahlen in  $R$  sind und

$$M_{\text{tors}}^{(p_j)} = \{m \in M_{\text{tors}} \mid \text{es existiert ein } l \in \mathbb{N} \text{ mit } p_j^l m = 0\} \cong R/(p_j^{n_{j,1}}) \times \dots \times R/(p_j^{n_{j,n}}).$$

**Satz** (Smith Normalform). *Sei  $R$  ein Hauptidealring,  $k, l \geq 1$  natürliche Zahlen und  $A \in \text{Mat}_{kl}(R)$ . Dann existieren  $g \in \text{GL}_k(R)$  und  $h \in \text{GL}_l(R)$  so dass*

$$gAh^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

für  $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n$  in  $R \setminus \{0\}$ .

- Wir beweisen diesen Satz nur für Euklidische Ringe.
- Im Gauss'schen Eliminationsalgo entsprechen Zeilenoperationen einer Linksmultiplikation und Spaltenoperationen einer Rechtsmultiplikation.
- Wir kombinieren Gauss mit Division mit Rest.
- Falls  $R = K$  ein Körper ist, so können wir  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$  annehmen und  $n = \text{Rang von } A$ .

*Beweis für Euklidische Ringe.* Wir beweisen den Satz mittels doppelter Induktion und zuerst nach  $\max(k, l)$ .

- Falls  $\max(k, l) = 1$  ist, so ist  $k = l = 1$  und  $A = (0)$  oder  $A = (d_1)$  für  $d_1 \in R \setminus \{0\}$ .
- Wir können annehmen, dass  $\max(k, l) > 1$  ist und der Satz für „kleinere“ Matrizen bereits gilt.

Falls  $A = 0$  ist, so gibt es nichts zu beweisen.

Also können wir annehmen, dass  $A \neq 0$ . Wir definieren die „Norm von  $A$ “ durch

$$N = \min_{A_{ii} \neq 0} \phi(A_{ii}) \in \mathbb{N},$$

wobei  $\phi : R \setminus \{0\}$  die Euklidische Normfunktion von  $R$  bezeichnet.

Durch Vertauschung von Zeilen und Spalten können wir annehmen, dass

$$d_1 = A_{11} \neq 0 \quad \text{und} \quad \phi(d_1) = N.$$

Wir verwenden Division durch  $d_1$  mit Rest und erhalten

$$A_{1j} = a_j d_1 + r_j \quad \text{für } j = 2, \dots, l \quad \text{mit } r_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \phi(r_j) < \phi(d_1).$$

Wir ziehen das  $a_j$ -fache der 1. Spalte von der  $j$ -ten Spalte für  $j = 2, \dots, l$  ab und erhalten die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_l \\ A_{21} & & & & \\ \vdots & & * & & \\ A_{k1} & & & & \end{pmatrix}.$$

Falls  $r_j \neq 0$  für ein  $j \in \{2, \dots, l\}$ , so ist  $N' = \min_{A'_{ij} \neq 0} \phi(A'_{ij}) < N$  und wir können per Induktion annehmen, dass  $A'$  (und damit auch  $A$ ) eine Smith Normalform hat. Also können wir annehmen, dass  $r_2 = r_3 = \dots = r_l = 0$  ist.

Analog können wir dieses Argument nun auch für die erste Spalte wiederholen. Damit erhalten wir den verbleibenden Fall

$$A'' = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Falls  $\min(k, l) = 1$ , dann ist  $A''$  bereits die Smith Normalform von  $A$ . Falls  $B = 0$ , dann ist  $A''$  bereits die Smith Normalform von  $A$ .

Ansonsten hat  $B$  Dimension  $k-1$  &  $l-1$ . Also hat nach Induktionsannahme  $B$  eine Smith Normalform. Also können wir nach weiteren Zeilen- und Spaltenoperationen eine Matrix der Form

$$A''' = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

erreichen.

Falls  $d_1 \mid d_2$  (und ebenso  $d_2 \mid d_3 \mid \dots \mid d_n$  nach Induktionsannahme), dann ist  $A'''$  die Smith Normalform von  $A$ .

Falls  $d_1 \nmid d_2$ , so addieren wir die zweite Zeile zur ersten, verwenden Division mit Rest und erhalten eine Matrix mit kleinerem Minimum.

$$A''' \mapsto \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & r & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Matrix mit kleinerer Norm}} \xrightarrow{i.A.} A''''$$

wobei  $A''''$  in Smith Normalform und  $r$  der Rest bei Division durch  $d_1$  ist.

Dies schließt die Induktion(en) und den Beweis. □

*Beweis beider Teile des Klassifikationssatzes.* Sei  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $R$  ein

Euklidischer Ring. Angenommen  $x_1, \dots, x_k \in M$  erzeugen  $M$ . Dann ist

$$\phi : a \in R^k \mapsto \sum_{i=1}^k a_i x_i \in M$$

surjektiv. Sei  $N = \text{Ker}(\phi) \subseteq R^k$  - ein Untermodul. Nach einer früheren Proposition wissen wir, dass  $N$  selbst auch ein freier Modul ist - sei  $N = \langle r_1, \dots, r_l \rangle$ . Damit ist  $M \cong R^k/N$  (induziert von  $\phi$ ).

Wir definieren die Matrix

$$A = (r_1, \dots, r_l) \in \text{Mat}_{kl}(R)$$

und wenden den Satz über die Smith Normalform an: Es existieren Matrizen  $g \in \text{GL}_k(R)$  und  $h \in \text{GL}_l(R)$  so dass

$$B = gAh^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_n & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n \quad \text{in } R \setminus \{0\}.$$

Da wir  $A$  mit einer  $R$ -linearen Abbildungen  $R^l \rightarrow R^k$  identifizieren können erhalten wir

$$\begin{aligned} N &= \text{Im}(A) = A(R^l) \\ \text{Im}(B) &= B(R^l) = ga \underbrace{h^{-1}(R^l)}_{R^l} = g \text{Im}(A) = gN. \end{aligned}$$

Des Weiteren erhalten wir

$$\begin{aligned} R^k &\xrightarrow{\sim^g} R^k \\ N &= \text{Im}(A) \xrightarrow{\sim^g} gN = \text{Im}(B). \end{aligned}$$

Verwende man den Isomorphiesatz indem man die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ R^k & \xrightarrow{g} & R^k & \longrightarrow & R^k/gN \end{array}$$

betrachtet folgt  $R^k/\text{Ker}(\psi) \cong R^k/gN$  und  $\text{Ker}(\psi) = N$  da  $g$  bijektiv ist.

$$M \cong R^k/N \xrightarrow{\sim} R^k/gN = R^k/\text{Im}(B) \cong R/(d_1) \times \dots \times R/(d_n) \times R^{k-n}$$

und

$$\text{Im}(B) = (d_1) \times (d_2) \times \dots \times (d_n) \times \{0\}^{k-n}.$$

wobei die erste Kongruenz von  $\phi$  und die derste Abbildung von  $g$  induziert ist. Außerdem gilt wegen dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} R \times R/(d_1) \times (d_2) &\cong R/(d_1) \times R/(d_2) \\ R \times R &\xrightarrow{\psi} R/(d_1) \times R/(d_2) \\ \text{Ker}(\psi) &= \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in (d_1), a_2 \in (d_2)\} = (d_1) \times (d_2). \end{aligned}$$

□

## 4.5 Endlich erzeugte abelsche Gruppen

**Satz.** Sei  $G$  eine endlich erzeugte (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Dann gilt

$$G \cong \mathbb{Z}/(d_1) \times \dots \times \mathbb{Z}/(d_n) \times \mathbb{Z}^k$$

wobei  $1 \leq s_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n \neq 0$  und  $k \geq 0$ .

Alternativ gilt

$$G \cong \prod_{p>0 \text{ prim}} G_p \times \mathbb{Z}^k \quad \text{und} \quad G_p \cong \mathbb{Z}/(p^{k_{p,1}}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p^{k_{p,n}}).$$

wobei  $G_p$  die Sylow  $p$ -Untergruppe ist.

*Beweis.* Folgt aus dem Klassifikationssatz □

## 4.6 Jordan-Normalform

**Satz.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{C}$  und  $\varphi : V \rightarrow V$  linear. Dann existiert eine Basis von  $V$ , so dass  $\varphi$  eine Matrixdarstellung der folgenden Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und jeder Block } J_k \text{ hat die Form} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Jordan-Normalform von  $\varphi$ .

*Beweis.* Da  $V$  endlich-dimensional ist und  $\mathbb{C}[X]$  unendlich-dimensional ist, muss  $V$  ein Torsionsmodul über  $\mathbb{C}[X]$  sein (wobei wir  $\varphi$  verwenden um die Modulstruktur zu definieren). Ebenso ist  $V$  als  $\mathbb{C}[X]$ -Modul endlich erzeugt weil  $V$  endlich-dimensional ist.

Also können wir den Klassifikationssatz für Module anwenden und erhalten

$$V \cong \prod_{\substack{\text{endlich} \\ \text{viele } (\lambda, k)}} \mathbb{C}[X]/((X - \lambda)^k)$$

mit  $V$  aufgefasst als  $\mathbb{C}[X]$ -Modul.

Wir beschreiben nun Multiplikation mit  $X$  ( $\cong$  Anwendung von  $\varphi$  auf Teilräumen von  $V$ ) auf  $\frac{\mathbb{C}[X]}{((X - \lambda)^k)} = M$ .  $M$  hat über  $\mathbb{C}$  die Basis

$$1, (X - \lambda), (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^{k-1}.$$

und  $X \cdot$  hat die folgende Matrixdarstellung bzgl. dieser (geordneten) Basis

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

denn

$$X \cdot 1 = X = (X - \lambda) + \lambda \cdot 1 \Rightarrow \text{bestimmt die 1. Spalte}$$

$$X \cdot (X - \lambda)^j = (X - \lambda)^{j+1} + \lambda(X - \lambda)^j \Rightarrow \text{bestimmt die } (j + 1). \text{ Spalte}$$

$\vdots$

$$X \cdot (X - \lambda)^{k-1} = (X - \lambda + \lambda)(X - \lambda)^{k-1} = \cancel{(X - \lambda)^k} + \lambda(X - \lambda)^{k-1} = 0 \text{ in } M.$$

Nach Umordnung der Basisvektoren ( $(X - \lambda)^{k-1}$  zuerst, 1 zuletzt) ergibt sich ein Jordanblock wie im Satz.  $\square$

# Kapitel 5: Körpertheorie

## 5.1 Körpererweiterungen

*Bemerkung.* Ein Ringhomomorphismus von einem Körper zu einem anderen Körper ist immer injektiv

**Definition.** Sei  $L$  ein Körper und  $K \subseteq L$  ein Unterring und auch ein Körper. Dann heißt  $K \subseteq L$  auch ein *Unterkörper* und  $L$  wird eine *Körpererweiterung* von  $K$  genannt. Wir schreiben auch  $L | K$  („ $L$  über  $K$ “) falls  $L$  eine Körpererweiterung von  $K$  ist. Da  $L$  in diesem Fall ein Vektorraum über  $K$  ist, können wir die Dimension von  $L$  über  $K$  betrachten - diese wir als der *Grad*  $[L : K]$  der Körpererweiterung  $L | K$  bezeichnet. Falls  $[L : K] < \infty$ , so heißt  $L$  eine *endliche Körpererweiterung* von  $K$ .

**Beispiel.** •  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) | \mathbb{Q}$

- $\mathbb{C} | \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}() \cong \mathbb{Q}[T]/(T^3 - 2) | \mathbb{Q}$

**Satz** (Multiplikativität der Grade). *Angenommen  $F | L$  und  $L | K$  sind (endliche) Körpererweiterungen. Dann gilt  $[F : K] = [F : L][L : K]$ .*

*Beweis.* Angenommen  $[F : L] = m$  und  $x_1, \dots, x_m \in F$  bilden eine Basis von  $F$  über dem Körper  $L$ . Angenommen  $[L : K] = n$  und  $y_1, \dots, y_n \in L$  bilden eine Basis von  $L$  über dem Körper  $K$ .

*Behauptung.* Die Produkte  $x_i x_j$  für  $\begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases}$  bilden eine Basis von  $F$  über dem Körper  $K$ .

Wir zeigen zuerst, dass diese Produkte l.u. sind. Angenommen  $\alpha_{ij} \in K$  und  $\sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j}_{\in L} \right) x_i = 0 \text{ \& auf Grund der ersten Annahme erhalten wir } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j = 0 \text{ (für}$$

jedes). Folgt  $\alpha_{ij} = 0$  auf Grund der zweiten Annahme für  $\begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases}$ , d.h.  $x_i y_j$  für diese  $i, j$  sind l.u. über  $K$ .

Angenommen  $z \in F$ . Aufgrund der ersten Annahme existieren dann Elemente  $\beta_1, \dots, \beta_m \in L$  s.d.  $z = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$ ,  $\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j$ . Auf Grund der zweiten Annahme für  $\beta_i$  existieren auch Elemente  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in} \in K$  s.d.

$$\Rightarrow z = \sum_{i,j} \underbrace{\alpha_{ij}}_{\in K} x_i y_j.$$

Daher gilt die Behauptung und auch der Satz. □

**Definition.** Sei  $L | K$  eine Körpererweiterung,  $x \in L$ , und  $\varphi_x : K[T] \rightarrow L, f \mapsto f(x)$  der Auswertungshomomorphismus.

Falls  $\varphi_x$  injektiv ist, so heißt  $x$  *transzendent* über  $K$



Falls  $\varphi_x$  nicht injektiv ist, so heißt  $x$  *algebraisch* über  $K$ . In diesem Fall ist  $\text{Ker}(\varphi_x) = (m_x(T))$  &  $m_x(T)$  heißt das *Minimalpolynom* von  $X$ , der Grad von  $m_x(T)$  ist auch der *Grad* von  $X$ .

**Beispiel.** •  $e, \pi$  sind transzendent über  $\mathbb{Q}$

- $\sqrt[3]{2}$  ist algebraisch über  $\mathbb{Q}$ ,  $\cos(20^\circ)$  ist algebraisch

**Proposition.** Sei  $L \mid K$  und  $x \in L$ . Falls  $x$  transzendent ist, so ist

$$K[X] = \text{Im}(\varphi_x) \cong K[T].$$

und der kleinste Unterkörper  $K(X)$  von  $L$ , der sowohl  $K$  als auch  $x$  enthält ist, erfüllt

$$K(X) \cong K(T)$$

mit  $K(T)$  der Körper der rationalen Funktionen.

Falls  $x$  algebraisch ist, so ist

$$K[X] = \text{Im}(\varphi_x) \cong K[T]/(m_x(T))$$

bereits der kleinste Unterkörper  $K(X)$ , der sowohl  $K$  als auch  $e$  enthält. Es gilt

$$[K(x) : K] = \deg(m_x(T)).$$

*Beweis.* Die Isomorphie ergibt sich aus dem ersten Isomorphiesatz. Angenommen  $x$  ist transzendent. Dann ist

$$K(X) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(T), g(T) \in K[T], g \neq 0 \right\} \cong \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \mid f, g \in K[T], g \neq 0 \right\}.$$

Angenommen  $x$  ist algebraisch. Dann ist  $(m_x(T)) = \text{Ker}(\varphi_x)$  ein Primideal. In einem Hauptidealring ist ein von  $(0)$  verschiedenes Primideal ein Maximalideal  $\Rightarrow K[T]/(m_x(T))$  ist ein Körper und damit ist  $K[X]$  ein Unterkörper von  $L$ . In  $K[T]/(m_x(T))$  ist

$$1 + (m_x(T)), T + (m_x(T)), \dots, T^{\deg(m_x)-1} + (m_x(T))$$

eine Basis. □

**Definition.** Sei  $L \mid K$  und  $x_1, \dots, x_n \in L$ . Dann bezeichnen wir den kleinsten Unterkörper der sowohl  $K$  als auch  $x_1, \dots, x_n$  enthält mit

$$K(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \mid f, g \in K[T_1, \dots, T_n], g(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \right\}.$$

**Korollar** (Wantzel, 1837). Mit Zirkel und Lineal lassen sich weder  $\sqrt[3]{2}$  noch ein Winkel von  $29^\circ$  konstruieren. Des Weiteren gilt: Falls  $p > 2$  eine Primzahl ist und das regelmäßige  $p$ -Ecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so ist  $p$  eine Fermat-Primzahl ( $p - 1 = 2^{2^n}$ ).

*Beweis-Skizze.* Angenommen nach endlich vielen Konstruktionsschritten ausgehend von einer Einheitslänge und Anwendung von Gerade  $\cap$  Gerade, Gerade  $\cap$  Kreis, Kreis  $\cap$  Kreis, erhalten wir die Länge auf der ersten Geraden, wobei  $x = \sqrt[3]{2}$  oder  $x = \cos(20^\circ)$ .

Wir definieren  $L_0 = \mathbb{Q}$ ,  $L_{n+1} = L_n$  falls im nächsten Kostruktionsschnitt zwei Geraden geschnitten werden.  $L_{n+1} = L_n$  oder eine quadratische Körpererweiterung von  $L_n$ , die die Koordinaten

der Schnittpunkte Geraden  $\cap$  Kreis enthält Kreis  $\cap$  Kreis

$$\begin{cases} (x - x_0)st + (y - y_0)^2 = r^2 \\ ax + by = c \end{cases}.$$

$\Rightarrow$  quadratische Gleichung in  $x$ . Gleichung hat Nullstellen in  $L_n$ . Dann setze  $L_{n+1} = L_n$  & Schnittpunkte haben Koordinaten in  $L_n$ .

Hat sie keine Nullstellen, dann setze  $L_{n+1} = L_n$  ( $x$ -Koordinate eines Schnittpunkts).

$x \in L_n \mid Q$ . Dann ist, da nur quadratische Körpererweiterungen auftraten  $[L_n : \mathbb{Q}] = 2^k$ . Aber  $\mathbb{Q}[X] \mid \mathbb{Q}$  hat Grad 3.  $L_N \mid \underbrace{K \mid \mathbb{Q}}_3$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{2^l}$$

Da  $[L_N : \mathbb{Q}] = [L_N : K][K : \mathbb{Q}] = 2^l$  und  $[K : \mathbb{Q}] = 3$ , erhalten wir einen Widerspruch.  $\square$

**Definition.** Eine Körpererweiterung  $L \mid K$  heißt *algebraisch* falls jedes  $x \in L$  algebraisch über  $K$  ist.

**Lemma.** Eine endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

*Beweis.* Für  $[L : K] < \infty$  und  $x \in L$  gilt  $\varphi_x : K[T] \rightarrow L$  ( $K[T]$  unendlich-dim. über  $K$ ,  $L$  endlich-dim.) ist nicht injektiv.  $\square$

**Korollar.** Sei  $L \mid K$  und  $x, y \in L$  algebraisch über  $K$ . Dann sind auch  $x + y, x \cdot y, x - y, \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  algebraisch über  $K$ .

*Beweis.* Nach Annahme gilt  $[K(X) : K] < \infty$  und das Minimalpolynom  $m_y(T) \in K[T]$  kann auch als Polynom in  $K(X)[T]$  angesehen werden. Dies impliziert, dass  $y$  auch algebraisch über  $K(X)$  ist und daher gilt  $[K(X)(Y) : K(X)] < \infty$ . Aus dem Satz folgt also für  $K(X, Y) = K(X)(Y)$ , dass

$$[K(X, Y) : K] = [K(X, Y) : K(X)][K(X) : K] < \infty.$$

Also ist  $K(X, Y)$  eine endliche Körpererweiterung und alle seine Elemente  $x+y, x \cdot y, x^{17}y^2, \dots \in K(x, y)$  sind algebraisch über  $K$ .  $\square$

**Korollar.** Angenommen  $F \mid L$  und  $L \mid K$ . Dann ist  $F \mid K$  ist algebraisch genau dann wenn  $F \mid L$  algebraisch ist und  $L \mid K$  algebraisch ist.

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : überlassen wir als Übung

$\Leftarrow$ : Angenommen  $F \mid L$  und  $L \mid K$  sind algebraische Körpererweiterungen. Sei  $x \in L$ . Dann existiert ein Minimalpolynom  $m_x^L(T) \in L[T]$  von  $x$  über  $L$ . Angenommen  $y_1, \dots, y_n \in L$  sind die Koeffizienten von  $m_x^L(T)$ . Wie im Beweis vom letzten Korollar können wir zeigen, dass

$$[K(y_1, \dots, y_n) : K] < \infty.$$

Da  $m_x^L(T)$  Koeffizienten in  $K(y_1, \dots, y_n)$  hat, ist  $[K(y_1, \dots, y_n, x) : K(y_1, \dots, y_n)] < \deg(m_x^L) < \infty$ . Daraus ergibt sich

$$[K(y_1, \dots, y_n, x) : K] < \infty.$$

Da  $x \in K(y_1, \dots, y_n, x)$  und  $K(y_1, \dots, y_n, x) \mid K$  endlich ist, ist  $x$  algebraisch auf Grund des Lemmas.  $\square$

**Beispiel.**  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  sind algebraisch über  $\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$  ist algebraisch über  $\mathbb{Q}$ .

## 5.2 Zerfällungskörper

**Satz** (Kronecker). Sei  $K$  ein Körper,  $f \in K[T]$  mit  $n = \deg(f) > 0$ . Dann existiert eine Körpererweiterung  $L$  von  $K$ , so dass

$$f(T) = a \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i),$$

$a \in k, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ .

*Beweis.* Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $f$  einen Faktor  $p(T)$ . Wir definieren

$$K_1 := K[T_1]/(p(T_1))$$

und wir betrachten  $K_1$  als Körpererweiterung von  $K$ . In  $K_1$  gilt

$$p(T_1 + (p(T_1))) = p(t_1) + (p(T_1)) = 0 + (p(T_1))$$

also hat  $f(T)$  eine Nullstelle in  $K_1$ , nämlich  $T_1 + (p(T_1)) =: \alpha_1$ . Wir schreiben  $f(T) = (T - \alpha_1)f_1(T)$  für ein  $f_1(T) \in K_1[T]$ . Falls  $f_1 = 1$ , setzen wir  $L = K_1$ . Da  $\deg(d_1) < \deg(f)$  gibt es aufgrund der Induktionsannahme eine Körpererweiterung  $L|K_1$  mit  $f_1(T) = \prod_{j=2}^n (T - \alpha_j), \alpha_j \in L$ .  $\square$

**Beispiel.** •  $\mathbb{R}, f(T) = T^2 + 1, \mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$

- $K = \mathbb{Q}, f(T) = T^3 - 2, L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi \sqrt[3]{2}, \xi^2 \sqrt[3]{2})$ , wobei  $\xi =$  dritte Einheitswurzel  $= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ . Minimalpolynom ist  $T^2 + T + 1$  und nicht  $T^3 - 1$  (nicht irreduzibel). Hat Grad 6 nach Multiplizitivität.

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper,  $f \in K[T]$  mit  $\deg(f) > 0$ . Ein *Zerfällungskörper* von  $f$  über  $K$  ist eine Körpererweiterung  $L|K$  so dass

- 1)  $f$  zerfällt (in Linearfaktoren) in  $L[i]$ .
- 2) Falls  $K \subseteq E \subsetneq L$ , dann zerfällt  $f$  über  $E$  nicht.

*Bemerkung.* • Ein Zerfällungskörper existiert immer (und ist bis auf Isomorphie eindeutig).

Falls  $f \in K[T]$  und  $F|K$  eine Körpererweiterung, so dass  $f$  in  $F[T]$  zerfällt (Kronecker) mit Nullstellen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$  so ist  $L := K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ein Zerfällungskörper.

- Ein Zerfällungskörper ist eine algebraische Körpererweiterung von  $K$ .

**Beispiel.** •  $K = \mathbb{Q}, f(T) = T^2 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ ; die Nullstellen von  $f$  sind  $\pm i \Rightarrow f$  zerfällt über  $\mathbb{C}$  aber  $\mathbb{C}$  ist kein Zerfällungskörper von  $f$  über  $\mathbb{Q}$

*Bemerkung.* Sei  $K$  ein Körper,  $f \in K[T]$  und  $L$  ein Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ , dann gilt

$$[L : K] \leq (\deg(f))!.$$

Ist  $f$  über  $K$  irreduzibel, so gilt  $[L : K] \geq \deg(f)$ .

- $T^3 - 2$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  mit Grad 6.
- $T^2 + 1$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  mit Grad 2.
- $T^3 - 2$  nicht irreduzibel über  $\mathbb{R}$  und hat Zerfällungskörper mit Grad 2.

## 5.3 Algebraischer Abschluss

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper.  $K$  ist *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes Polynom  $f \in K[T]$  mindestens eine Nullstelle in  $K$  hat.

Es folgt (Induktion), dass  $f$  über  $K$  zerfällt.

**Beispiel.**  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen

*Bemerkung.* Ein algebraisch abgeschlossener Körper hat unendlich viele Elemente.

*Beweis Idee.* Angenommen  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$  ist algebraisch abgeschlossen. Betrachte das Polynom

$$f(T) = (T - k_1) \cdot \dots \cdot (T - k_n) + 1 \not\equiv 0.$$

□

**Proposition.** Sei  $L \mid K$  eine Körpererweiterung und  $L$  algebraisch abgeschlossen. Dann ist

$$E = \{x \in L \mid x \text{ ist algebraisch über } K\}$$

eine algebraisch abgeschlossene algebraische Körpererweiterung von  $K$ .

**Definition.** Wir nennen  $E$  wie in der Proposition den *algebraischen Abschluss*  $\overline{K}$  von  $K$

*Beweis.* (1)  $E$  ist ein Körper: Folgt aus einem Korollar vom letzten Mal [ $x, y \in L$  algebraisch  $\Rightarrow x + y, x \cdot y, \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  algebraisch].

(2)  $E \mid K$  ist algebraisch per Definition

(3)  $E$  ist algebraisch abgeschlossen: Sei  $f \in E[T]$  mit  $\deg(f) > 0$ . Sei  $E_1$  eine algebraische Erweiterung von  $E$  so dass  $f$  eine Nullstelle  $\alpha$  in  $E_1$  hat (Kronecker). Dann ist  $E_1 \mid E$  algebraisch und  $E \mid K$  algebraisch  $\Rightarrow E_1 \mid K$  algebraisch. Nun ist  $\alpha \in L$  ( $L$  algebraisch abgeschlossen) und  $\alpha$  ist algebraisch über  $K \Rightarrow \alpha \in E$ .

□

*Bemerkung.* •  $K$  endlich  $\Rightarrow \overline{K}$  ist abzählbar

•  $K$  abzählbar  $\Rightarrow \overline{K}$  ist abzählbar [Bsp:  $\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ alg. über } \mathbb{Q}\}$  genannt algebraische Zahlen]

**Satz.** Sei  $K$  ein Körper, dann existiert eine Körpererweiterung  $L \mid K$  mit  $L$  algebraisch abgeschlossen ( $L$  ist bis auf Isomorphie eindeutig).

*Beweis.* Für jedes  $f \in K[T]$ ,  $\deg(f) > 0$ , sei  $T_f$  eine Unbestimmte. Wir betrachten den Polynomring (in  $\infty$ -vielen Unbestimmten)

$$R := K[(T_f)_f].$$

Sei  $I \triangleleft R$  das Ideal, das von den Elementen  $f(T_f)$  erzeugt wird. [ $f(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0 \rightsquigarrow f(T_f) = (T_f)^n + a_{n-1} + (T_f)^{n-1} + \dots + a_0$ ]

*Behauptung.*  $I \neq R$

*Beweis.* Angenommen  $1 \in I$ ,  $1 = \sum_{i \in X} g_i f_i(T_{f_i}) \in I$ ,  $g_i \in K[(T_f)_f]$ ,  $X$  endlich. jedes  $f_i$  eine Nullstelle in  $\alpha_i$  in  $E$  hat. Nun werten wir  $f_i$  an  $T_{f_i} = \alpha_i$  aus und erhalten

$$1 = \sum_{i \in X} \underbrace{g_i(\dots)}_{\in E} \underbrace{f_i(\alpha_i)}_{=0} = 0 \not\equiv 1.$$

□

Da  $R \neq \{0\}$  existiert ein maximales Ideal  $M$  in  $R$ , das  $I$  enthält. Sei

$$L_1 := \frac{R}{M},$$

dann ist  $L_1$  ein Körper und  $K \rightarrow L_1$  ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Wir identifizieren  $K$  mit seinem Bild in  $L_1$ . ( $K \hookrightarrow \underbrace{K[(T_f)_f]}_{=R} \rightarrow K[(T_f)_f]/M = L_1$ )

*Behauptung.* Jedes  $f \in K[T]$ ,  $\deg(f) > 0$ , hat eine Nullstelle in  $L_1$  und  $L_1 \mid K$  ist eine algebraische Körpererweiterung.

*Beweis.* Das Bild von  $T_f$  in  $L_1$  ist eine Nullstelle von  $f \in L_1[T]$

$$f(T_f + M) = \underbrace{f(T_f)}_{\in I \subseteq M} + M = 0 + M \Rightarrow 1. \text{ Teil.}$$

Jedes  $x \in L_1$  ist im Bild von  $K[T_{f_1}, \dots, T_{f_m}]$  für eine endliche Menge von Unbestimmten. Jedes  $T_{f_i} \in L_1$  ist algebraisch über  $K$ , also auch  $x \Rightarrow 2. \text{ Teil}$  □

Nun wiederholen wir die Konstruktion  $L_0 = k \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$ , wobei jedes Polynom  $f \in L_i[T]$ ,  $\deg(f) > 0$ , eine Nullstelle in  $L_{i+1}$  hat und  $L_{i+1} \mid L$  ist eine algebraische Körpererweiterung. Definiere

$$L := \bigcup_{n \geq 0} L_n.$$

Man rechnet nach, dass  $L$  ein Körper ist und  $K$  enthält (Übung). Außerdem ist  $L$  algebraisch über  $K$  (Übung).

Wir behaupten, dass  $L$  algebraisch abgeschlossen ist: Sei  $f \in L[T]$ ,  $\deg(f) > 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists i : f \in L_i[T] & \quad (f \text{ hat nur endlich viele Koeffizienten}) \\ \Rightarrow \exists \alpha_1 \in L_{i+1} \mid f = (T - \alpha_1)f_1, & \quad f_1 \in L_{i+1}[T], \\ \Rightarrow \exists \alpha_2 \in L_{i+2} \mid f = (T - \alpha_2)f_2, & \quad f_2 \in L_{i+2}[T], \\ \Rightarrow \text{usw.} \Rightarrow f \text{ zerfällt in Linearfaktoren} & \text{ über } L. \end{aligned}$$

□

## 5.4 Eindeutigkeit

(Seite 343, Teile auch S. 88 )

Wir haben gesehen:

- Für jedes  $f \in K[T]$  gibt es einen Zerfällungskörper.
- Es gibt einen algebraischen Abschluss.

Sind diese (bis auf Isomorphie) eindeutig?

**Satz.** Sei  $K$  ein Körper,  $L \mid K$  eine Körpererweiterung und  $L$  algebraisch abgeschlossen.

1. Falls  $E = K[\alpha]$  eine endliche Körpererweiterung von  $K$  ist, so gibt es mindestens eine und höchstens  $[E : K]$  Körpereinbettungen  $\sigma : E \rightarrow L$  mit  $\underbrace{\sigma|_K = \text{id}_K}_{\sigma \text{ K-linear}}$ . Falls  $\text{char}(K) = 0$ , so gibt es genau  $[E : K]$  derartige Einbettungen.

2. Falls  $E \mid K$  eine algebraische Körpererweiterung ist, so gibt es eine  $K$ -lineare Körpereinbettung  $\sigma : E \rightarrow L$ .

**Lemma.** Sei  $K$  eine Körper,  $m(T) \in K[T]$  coprime zu  $m'(T)$ . Dann hat  $m$  in einer algebraisch abgeschlossenen Körpererweiterung genau  $\deg(m(T))$  viele einfache Nullstellen.

Dies gilt z.B. wenn  $\text{char}(K) = 0$  und  $m(T)$  irreduzibel in  $K[T]$  ist.

*Beweis.* Die Ableitung definieren wir mitteld

$$D : f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \mapsto f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n T^{n-1}.$$

Dann ist  $D$   $K$ -linear und erfüllt die Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'. \quad (*)$$

Denn dies stimmt für  $K = \mathbb{C}$  und  $(*)$  ist eine polynomielle Gleichung über  $\mathbb{Z}$  in den Koeffizienten von  $f$  und von  $g$ . Insbesondere gilt also

$$((T - \alpha)^2 g(T))' = 2(T - \alpha)g(T) + (T - \alpha)^2 g'(T) = (T - \alpha)(2g(T) + (T - \alpha)g'(T)).$$

D.h. falls  $f$  eine mehrfache Nullstelle hat, so ist diese auch eine Nullstelle von  $f'$ . Dies gilt für  $\alpha \in K$  aber auch für  $\alpha \in L$  wenn  $L \mid K$ .

Angenommen  $m(T)$  &  $m'(T)$  sind in  $K[T]$  coprime. Dann existieren  $h_1, h_2 \in K[T]$  mit

$$1 = h_1(T)m(T) + h_2(T)m'(T).$$

Falls nun  $L \mid K$  eine Körpererweiterung ist und  $\alpha \in L$  eine Nullstelle von  $m(T)$  ist, so ist  $m'(T) \neq 0$ . Auf grund des oben gesagten ist also  $\alpha$  eine einfache Nullstelle von  $m(T)$ . Falls  $L$  algebraisch abgeschlossen ist, so gilt

$$m(T) = a \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i)$$

und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  sind paarweise verschieden.

Für  $\text{char}(K) = 0$  gilt  $\deg(m'(T)) = \deg(m(T)) - 1$  falls nun  $m(T) \in K[T]$  irreduzibel ist, so ist  $m'(T)$  coprime zu  $m(T)$  und obiges gilt.  $\square$

*Bemerkung.* Für  $K = \mathbb{F}_p$  und  $m(T) = T^p$  gilt  $m'(T) = 0$  und daher nicht  $\deg(m'(T)) = \deg(m(T)) - 1$ .

*Beweis von 1) im Satz.* Sei  $m(T)$  das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $K$ . Sei  $\beta = \varphi(\alpha)$  für  $K$ -lineare Körpereinbettung  $\sigma : E \rightarrow L$  so gilt  $m(\beta) = m(\sigma(\alpha)) = 0$ , da  $m(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$  mit Koeffizienten  $a_n \in K$ ,  $\sigma$  ist ein Ringhomomorphismus und  $\sigma(a_n) = a_n$ .

Des Weiteren gilt für ein  $f(\alpha) \in K[\alpha]$  dass  $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha)) = f(\beta)$ . Also ist  $\beta = \sigma(\alpha)$  eine Nullstelle und  $\sigma$  ist durch diese Nullstelle bereits eindeutig festgelegt. Folgt da  $m(T)$  in  $L$  höchstens  $\deg(m(T)) = [E : K]$  viele verschiedene Nullstellen hat, gibt es höchstens so viele  $K$ -lineare Körpererweiterungen.

Sei nun umgekehrt  $\beta \in L$  eine beliebige Nullstelle von  $m(T)$  - Es gibt mindestens eine Nullstelle in  $L$  und falls  $\text{char}(K) = 0$  so gibt es genau  $\deg(m(T))$  viele verschiedene Nullstellen. Wir verwenden  $\beta$  um eine  $K$ -lineare Körpererweiterung

$$\sigma = \sigma_\beta : E = K[\alpha] \rightarrow L$$

zu definieren. Wir betrachten das linke Diagramm. Dann gilt  $\text{Ker}(\text{ev}_\alpha) = (m(T))$ . Und wegen  $m(\beta) = 0$  folgt  $(m(T)) \subseteq \text{Ker}(\text{ev}_\alpha)$  (Gleichheit, da  $(m(T))$  ein Maximalideal ist). Daraus ergibt sich das rechte Diagramm und  $\sigma = \overline{\text{ev}_\beta} \circ (\overline{\text{ev}_\alpha}^{-1}) : E \rightarrow L$  ist eine  $K$ -lineare Körpereinbettung.

$$\begin{array}{ccc} & f(\alpha) \in K[\alpha] = E & \\ \text{ev}_\alpha \nearrow & & \searrow \text{ev}_\alpha \\ f(T) \in K[T] & & f(T) + (m(T)) \in K[T]/(m(T)) \\ \text{ev}_\beta \searrow & & \nearrow \text{ev}_\beta \\ & f(\beta) \in K[\beta] \subseteq L & \end{array} \quad .$$

Für zwei verschiedene Nullstellen  $\beta_1 \neq \beta_2 \in L$  gilt

$$\sigma_{\beta_1}(\alpha) = \beta_1 \neq \beta_2 = \sigma_{\beta_2}(\alpha) \quad \text{also} \quad \sigma_{\beta_1} \neq \sigma_{\beta_2}.$$

Wir sehen also, dass es genauso viele Körpererweiterungen von  $E = K[\alpha]$  nach  $L$  gibt, wie es Nullstellen von  $m(T)$  in  $L$  gibt.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $K = \mathbb{F}_p((X))$  und  $m(T) = T^p - X$  (dies ist irreduzibel). Für  $E = K[T]/(m(T))$  gibt es eine Nullstelle  $T + (m(T)) = \alpha$  von  $m(T)$ . Hier gilt  $m(T) = (T - \alpha)^p = T^p - \alpha^p = T^p - X$  und  $m$  hat  $\alpha$  als eine  $p$ -fache Nullstelle.

*Beweis von 2) im Satz (mittels dem Zorn'schen Lemma).* Wir definieren

$$\mathcal{O} = \{(F, \sigma) \mid F \text{ ein Körper mit } K \subseteq F \subseteq E, \sigma : F \rightarrow L \text{ } K\text{-lineare Körpereinbettung}\}.$$

und die partielle Ordnung

$$(F_1, \sigma_1) \leq (F_2, \sigma_2) \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 \subseteq F_2 \\ \sigma_2|_{F_1} = \sigma_1 \end{cases}.$$

Dann gilt:

- $\mathcal{O} \neq \emptyset$  da  $(K, \text{id}) \in \mathcal{O}$ .
- Angenommen  $T \leq \mathcal{O}$  ist eine totalgeordnete Kette in  $\mathcal{O}$ . Wir definieren

$$F_T = \bigcup_{(F, \sigma) \in T} F \subseteq E.$$

Dies ist ein Unterkörper von  $E$ . (kleine Übung)

Wir definieren

$$\begin{aligned} \sigma_T : F_T &\rightarrow L \\ x \in F & \\ \text{mit } (F, \sigma) \in T &\mapsto \sigma(x). \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert: Falls  $\begin{matrix} x \in F_1 \\ (F_1, \sigma_1) \in T \end{matrix}$  und  $\begin{matrix} x \in F_2 \\ (F_2, \sigma_2) \in T \end{matrix}$  ist, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $(F_1, \sigma_1) \leq (F_2, \sigma_2) \Rightarrow \sigma_2(x) = \sigma_2|_{F_1}(x) = \sigma_1(x)$ . Dies zeigt, dass  $\sigma_T$  wohldefiniert ist.  $\sigma_T$  ist auch eine Körpereinbettung: Für  $x_1, x_2 \in F_T$  gibt es  $\begin{matrix} (F_1, \sigma_1) \in T \\ (F_2, \sigma_2) \in T \end{matrix}$  mit  $\begin{matrix} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \end{matrix}$ .

O.B.d.A. sei  $(F_1, \sigma_1) \leq (F_2, \sigma_2)$ . Dann gilt

$$\sigma_T(x_1 + x_2) = \sigma_2(x_1 + x_2) = \sigma_2(x_1) + \sigma_2(x_2) = \sigma_T(x_1) + \sigma_T(x_2).$$

und analog für  $x_1 \cdot x_2$  und  $\frac{1}{x_1}$  falls  $x_1 \neq 0$ .

Folgt  $(F_T, \sigma_T) \in \mathcal{O}$  ist eine obere Schranke von der total geordneten Kette  $T$ . Auf Grund des Zorn'schen Lemmas existiert also ein maximales Element

$$(F, \sigma) \in \mathcal{O}.$$

*Behauptung.*  $F = E$  und  $\sigma : F \rightarrow L$  ist die gesuchte  $K$ -lineare Körpereinbettung.

Falls  $F \neq E$  ist, dann gibt es ein  $\alpha \in E \setminus F$ . In diesem Fall verwenden wir  $\sigma : F \rightarrow L$  und die Elemente von  $F$  mit den Elementen in  $\sigma(F)$  zu identifizieren:

$$L \supseteq \underset{\sigma}{F} \xleftarrow{\varphi} F \subseteq F[\alpha] \subseteq E.$$

Nach Teil 1 vom Satz gibt es eine  $F$ -lineare Körpereinbettung  $\varphi : F[\alpha] \rightarrow L$ . Da wir  $\sigma$  verwendet haben um Elemente von  $F$  mit Elementen von  $\sigma(F)$  zu identifizieren, bedeutet dies gerade, dass  $\varphi : F[\alpha] \rightarrow L$  die Abbildung  $\sigma : F \rightarrow L$  erweitert.

Also gilt  $(F, \sigma) \prec (F[\alpha], \varphi)$  und dies widerspricht der Maximalität von  $(F, \sigma)$ .  $\square$

**Korollar.** Sei  $K$  ein Körper

- 1) Für jedes  $f \in K[T]$  ist die Zerfällungskörper bis auf einen  $K$ -linearen Körperisomorphismus eindeutig bestimmt.
- 2) Je zwei algebraische Abschlüsse von  $K$  sind  $K$ -linear isomorph.

*Beweis.* Angenommen  $f(T) \in K[T]$  und  $E_1, E_2$  sind zwei Zerfällungskörper von  $f(T)$ . Sei  $L_2$  ein algebraischer Abschluss von  $E_2$ . Wir verwenden den 2. Teil vom Satz:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & E_1 \\ & \searrow & \downarrow \sigma \\ & & E_2 \subseteq L_2 \end{array}.$$

Es folgt  $f(T) = a \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i) \sigma(f(T)) = a \prod_{i=1}^n (T - \sigma(\alpha_i - 1))$  für  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E_1$ . Da  $E_1 = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $E_2 = K[\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)]$ , folgt, dass  $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$  ein Isomorphismus ist.

Angeommen  $L_1$  &  $L_2$  sind algebraische Abschlüsse von  $K$ .

Auf Grund vom 2. Teil vom Satz gibt es eine  $K$ -lineare Körpereinbettung  $\sigma : L_1 \rightarrow L_2$ . Damit ist  $K \subseteq \sigma(L_1) \subseteq L_2$ . Des Weiteren ist  $L_2 \mid K$  algebraisch und  $\sigma(L_1)$  ist algebraisch abgeschlossen. Daraus folgt

$$L_2 = \{\alpha \in L_2 \mid \exists f \in K[T] \setminus \{0\} \text{ mit } f(\alpha) = 0\} \subseteq \sigma(L_1) \subseteq L_2.$$

$\square$



## 5.5 Endliche Körper

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$  für  $p \in \mathbb{N}$  prim ist ein endlicher Körper.

Gibt es weitere? Können wir diese klassifizieren?

**Satz** (Gauss, Galois). 1. Falls  $K$  ein endlicher Körper ist, so ist  $|K| = p^n$  für eine Primzahl  $p \in \mathbb{N}$  und ein  $n \geq 1$ .  
 2. Für jede Primzahlpotenz  $p^n$  gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Körper mit  $p^n$  Elementen.  
 3. Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim und  $K$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}_p$ . Dann enthält  $K$  einen eindeutig bestimmten Unterkörper  $\mathbb{F}_{p^n}$  mit  $p^n$  Elementen.

$$\mathbb{F}_{p^n} = \{x \in K \mid x^{(p^n)} = x\}.$$

4. Für  $m, n \geq 1$  und die Körper wie in 3) gilt

$$F^{p^m} \subseteq F^{p^n} \Leftrightarrow m \mid n.$$

*Beweis.* 1) Angenommen  $|K| < \infty$ . Dann ist  $\mathbb{Z} \cdot 1_K \cong \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$  für eine Primzahl  $p \in \mathbb{N}$ .  
 Damit ist  $K$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F}_p$  und  $K \cong \mathbb{F}_p^{[K:\mathbb{F}_p]} \Rightarrow |K| = p^{[K:\mathbb{F}_p]}$ .

2) Sei  $q = p^n$  wie in 2. Seien weiters

$$f(T) = T^q - T \in \mathbb{F}_p[T]$$

$L =$  Zerfällungskörper von  $f$  (über  $\mathbb{F}_p$ )

$$E = \{x \in L \mid x_q = x\} = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$$

$$\phi : \begin{array}{l} L \rightarrow L \\ x \mapsto x^p \end{array} \quad \text{Frobenius-Homomorphismus}$$

$$\phi^n : \begin{array}{l} L \rightarrow L \\ x \mapsto x^{p^n} \end{array} = x^q$$

wobei  $L$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{F}_p$  und damit ein endlicher Körper und  $\phi$  ist ein Automorphismus, da  $\phi$  injektiv und  $|L| < \infty$  ist.

Es folgt

$$E = \{x \in L \mid \underbrace{\phi^n(x) = x}_{\text{Körperautomorphismus}}\} = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$$

ist ein Unterkörper von  $L$ , der alle Nullstellen von  $f$  enthält. Also ist  $E = L$ . Daraus ergibt sich auch, dass  $E = L$  als Zerfällungskörper bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Da  $f'(T) = qT^{q-1} - 1 = -1$  ist, sind  $f$  und  $f'$  coprime. Daher hat  $f$  keine mehrfachen Nullstellen in  $L$  (wegen dem Lemma von früher). Es gibt also genau  $q$  Nullstellen in  $L$ , also gilt

$$|L| = |E| = q = p^n.$$

Dies beweist die Existenz in 2.

Sei  $F$  ein beliebiger Körper mit  $p^n$  Elementen. Wie im Beweis von 1. wissen wir, dass  $F \mid F_p$ . Des Weiteren gilt  $x \in F^\times$  dass  $x^{p^n-1} = 1$  (weil  $|\mathbb{F}^\times| = p^n - 1$  und  $F^\times$  eine Gruppe ist). Also gilt  $x^{p^n} = x$  für alle  $x \in F$ . D.h.  $F$  enthält (besteht aus) den Nullstellen von  $f(T) = T^q - T$ , ist also der Zerfällungskörper von  $f$ . - Auf Grund des Korollars im letzten Abschnitt ist also  $F$  isomorph zu  $L$  von oben.

3) Sei  $K$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}_p$ . Dann ist

$$\mathbb{F}_{p^n} = \{x \in K \mid x^{p^n} = x\} \subseteq K$$

ein Unterkörper. Wie in 2, sehen wir, dass  $\mathbb{F}_{p^n}$  der Zerfällungskörper von  $T^{p^n} - T$  ist und auf Grund von dem oben bewiesenen, gilt  $|\mathbb{F}_{p^n}| = p^n$ .

4) Angenommen  $m \mid n$  also  $n = mk$

$$\phi^n = (\phi^m)^k.$$

Daraus folgt  $\mathbb{F}_{p^n} \{x \mid \phi^n(x) = x\} \supseteq \{x \mid \phi^m(x) = x\} = \mathbb{F}_{p^m}$ .

Angenommen  $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ . Dann ist  $\mathbb{F}_{p^n} \mid \mathbb{F}_{p^m}$  und  $\mathbb{F}_{p^n}$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{F}_{p^m}$ . Folgt  $p^n = |\mathbb{F}_{p^n}| = |\mathbb{F}_{p^m}|^k = (p^m)^k = p^{mk}$  mit  $k = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_{p^m}]$ .

□

**Satz.** Sei  $K$  ein Körper und  $G \subseteq K^\times$  eine endliche Untergruppe. Dann ist  $G$  zyklisch. Insbesondere ist  $\mathbb{F}_{p^n}^\times$  zyklisch für jede Primzahlpotenz  $p^n$ .

*Beweis.* Auf Grund der Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen gilt

$$(G, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/(d_1) \times \dots \times \mathbb{Z}/(d_n), +).$$

für gewisse natürliche  $1 < d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n$ .

*Behauptung.* In  $G$  gilt damit  $x^{d_n} = 1$  für alle  $x \in G$ .

*Beweis.* Denn  $d_n \cdot (a_1 + (d_1), \dots, a_n + (d_n)) = (0 + (d_1), \dots, 0 + (d_n))$  da  $d_1 \mid d_n, d_2 \mid d_n, \dots$ . Dies zeigt die Behauptung wenn wir obigen Isomorphismus verwenden. □

Die Behauptung zeigt: jedes  $x \in G$  ist eine Nullstelle von  $T^{d_n} - 1$ . Des Weiteren gilt  $|G| = d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ . Falls  $n > 1$  wäre, so hätten wir  $d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_n > d_n = \deg(T^{d_n} - 1)$  viele Nullstellen von  $f$  in  $K$ . Das ist unmöglich, also ist  $n = 1$  und  $G$  ist zyklisch. □

**Korollar.** Sei  $p > 2$  eine Primzahl. Für  $a \in \mathbb{F}_p$  gilt

$$a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0 \\ 1 & \text{falls } a = b^2 \text{ für ein } b \in \mathbb{F}_p^\times \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis-Idee.*  $\mathbb{F}_p^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)$  und in  $\frac{\mathbb{Z}}{(p-1)}$  lässt sich die Aussage leichter bestätigen. □

# Kapitel 6: Galois Theorie

## 6.1 Einleitung

Das motivierende Problem der Galois Theorie ist folgendes: Finde eine „Formel“ für die Lösungen der Gleichung  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  in Funktion von den Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .

Methoden für den linearen und quadratischen Fall waren schon babylonischen Mathematikern bekannt.  $\sim 1700$  B.C.

Euklid ( $\sim 300$  B.C.) hat die Lösung von Quadratischen Gleichungen auf geometrische Probleme zurückgeführt.

al-Khwarizmi (780 – 850): Systematische Behandlung von linearen und quadratischen Gleichungen.

16. Jh: Gleichung 3. Grades: Scipione del Ferro 1515. 4. Grades: Ludovico Ferrar.

Cardano „Ars Magna“ 1545: Cardano's Formeln für 3. Grad. Sei  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ . Durch die Substitution  $z = x - \frac{a}{3}$  erhält man eine Gleichung der Form:  $z^3 + pz + q = 0$ .

Idee:  $z = y + u$  wobei man später  $u$  geeignet wählen kann. Durch Substitution in  $z^3 + pz + q = 0$  erhalten wir:

$$y^3 + \underbrace{2y^2u + 3yu^2}_{3yu(y+u)} + u^3 + p(y+u) + q = 0$$

und erhalten  $y^3 + (y+u)(3yu+p) + u^3 + q = 0$ . Setze  $3yu + p = 0$  also  $u = -\frac{p}{3y}$ .

$$y^4 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0 \Rightarrow y^6 + py^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (\text{Resolvante}).$$

Diese Gleichung ist quadratisch in  $y^3$ :

$$y^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}.$$

und bekommt für  $z$  die Formel:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Wesentlicher Schritt: Lagrange (1736-1813): Falls  $z_1, z_2, z_3$  Lösungen von  $z^3 + pz + q = 0$  sind. Sind  $w = e^{\frac{2}{3}\pi i}$  primitive 3. Wurzeln von 1. Dann sind die 6 Lösungen der Resolvante  $y^6 + qy^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$  sind gegeben durch

$$y_\sigma := \frac{1}{3} \left( z_{\sigma(1)} + w z_{\sigma(2)} + w^2 z_{\sigma(3)} \right)$$

wobei  $\sigma$  die Menge der Permutationen über 3 Elemente durchläuft.

Fundamentale Einsicht:  $\left( z_{\sigma(1)} + w z_{\sigma(2)} + w^2 z_{\sigma(3)} \right)^3$  nimmt nur 2 Werte an.

Paolo Ruffini: Zeige dass die allgemeine Gleichung 5. Grades keine „Lösung“ besitzt. Rationale Funktionen  $f(z_1, \dots, z_5)$  wobei  $z_1, \dots, z_5$  Wurzeln der Gleichung  $z^5 + \dots + a_0 = 0$  sind. Hat realisiert, dass die Menge der  $\sigma \in S_5$  für welche  $f(z_1, \dots, z_5) = f(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(5)})$  ist eine Untergruppe von  $S_5$ .

Untergruppen von  $S_5$  klassifiziert. Niels Abels (1812-1829)

**Satz** (Abels-Raffini). Die allgemeine Gleichung 5. Grades  $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  ist mittels Radikalen nicht auflösbar.

Eine Lösung mittels Radikalen ist eine *Formel* die endlich viele arithmetische Operationen und Wurzelziehen der Koeffizienten zulässt.

Galois Theorie und Thm. Die alternierende Gruppe  $A_5$  ist nicht abelsch und einfach.

Wir werden jedem Polynom  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in K[x]$ ,  $K$  Körper ordnen wir eine Gruppe  $\text{Gal}(f) < S_n$ .

**Satz.** Falls  $K$  gute Eigenschaften besitzt (z.B.  $\text{char} = 0$ )  $f(x) = 0$  ist genau dann Mittels Radikalen Lösbar falls  $\text{Gal}(f)$  auflösbar.

## 6.2 Galois Gruppe einer Körpererweiterung: grundlegende Eigenschaften und Beispiele

Sei  $E$  ein Körper. Die Menge  $\text{Aut}(E) = \{\sigma : E \rightarrow E \mid \sigma \text{ ist eine Körperisomorphismus}\}$  ist für die Operation der Verkettung von Abbildungen eine Gruppe.

Sei  $K \subseteq E$  eine Unterkörper;  $E$  ist eine Körpererweiterung von  $K$ .

$$\text{Gal}(E/K) = \{\sigma \in \text{Aut}(E) \mid \sigma(x) = x \forall x \in K\}$$

ist eine Untergruppe von  $\text{Aut}(E)$ .

**Definition.**  $\text{Gal}(E/K)$  ist eine Galoisgruppe der Erweiterung  $E/K$ .

Aus der Algebra I wissen wir, dass  $E$  ein  $K$ -Vektorraum ist.

**Übung:** Jedes  $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$  ist ein Isomorphismus des  $K$ -Vektorraums  $E$ .

**Übung:** Sei  $K = \mathbb{R}$  und  $E = \mathbb{C}$  dann ist  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\text{id}_{\mathbb{C}}, \sigma\}$  wobei  $\sigma(x + iy) = x - iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wie groß ist  $\text{Aut}(\mathbb{C})$ .

Sei  $f \in K[x]$  ein Polynom und  $E/K$  eine Körpererweiterung so dass in  $E[x]$   $f$  Produkt von linearen Faktoren ist. Sei  $R(f) \subseteq E$  die Menge der Nullstellen von  $f$ .

**Lemma.** Jedes  $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$  induziert eine Permutation der Menge  $R(f)$  der Nullstellen von  $f$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha \in R(f)$  d.h.  $f(\alpha) = 0$  und  $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$ . Sei  $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$  wobei  $a_n, \dots, a_0 \in K$ .

$$0 = f(\alpha) = \sigma(f(\alpha)) = \sigma(a_n \alpha^n + \dots + a_0) = \sigma(a_n) \sigma(\alpha)^n + \dots + \sigma(a_0) = a_n \sigma(\alpha)^n + \dots + a_0 = f(\sigma(\alpha))$$

Also folgt  $\sigma(\alpha) \in R(f)$ .  $\sigma(R(f)) \subseteq R(f)$ . Da  $\sigma : E \rightarrow E$  injektiv und  $|R(f)| < \deg(f) = n$  folgt  $\sigma(R(f)) = R(f)$ .  $\square$

Sei  $f \in K[X]$ .

**Definition.** Die Galois Gruppe  $\text{Gal}(f)$  von  $f$  ist die Galois Gruppe  $\text{Gal}(E/K)$  wobei  $E/K$  ein Zerfällungskörper von  $f$  bezeichnet.

Existenz: Kronecker + Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus siehe Algebra I

**Übung:** Zeige dass falls  $E/K$  und  $E'/K$  Zerfällungskörper von  $f$  bezeichnen, die Gruppen  $\text{Gal}(E/K)$  und  $\text{Gal}(E'/K)$  isomorph sind.

*Notation.* Sei  $X$  eine Menge. Wir bezeichnen mit  $S_X$  die Gruppe aller Bijektionen (Permutationen) von  $X \rightarrow X$ . Falls  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  dann setzen wir  $S_X = S_n$ .

**Lemma.** Sei  $E/K$  Zerfällungskörper eines Polynoms  $f \in K[X]$  und  $R(f) \subseteq E$  die Menge der Nullstellen. Dann ist die Restriktionsabbildung

$$\begin{aligned} \text{Gal}(E/K) &\rightarrow S_{R(f)} \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{R(f)} \end{aligned}$$

ist eine injektiver Gruppenhomomorphismus.

# Anhang A: Auswahlaxiom und das Zornsche Lemma

**Auswahlaxiom** (in der Mengenlehre)

Sei  $I$  eine nichtleere Menge und seien  $X_i$  für  $i \in I$  nichtleere Mengen. Dann ist  $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ , d.h. es existiert eine Funktion

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

mit  $f(i) \in X_i$  für alle  $i \in I$ .

**Bemerkung.** • unabhängig von den anderen ZF-Axiomen der Mengenlehre

- kritisiert wegen der Nichtkonstruktivität des Axioms und mancher scheinbar paradoxen Folgerung
- notwendig für einen großen Teil der Mathematik

Häufig wird nicht das Auswahlaxiom sondern ein dazu äquivalentes Lemma, das Zornsche Lemma, verwendet. Für dieses benötigen wir etwas mehr Begriffe:

**Definition.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Ordnung* auf  $X$  ist eine Relation  $\leq$  so dass

- 1) reflexivität:  $x \leq x$
- 2) antisymmetrie:  $x \leq y$  und  $y \leq x$
- 3) transitivität:  $x \leq y$  und  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$  für alle  $x, y, z \in X$ .

Die Ordnung heißt *total* oder *linear* falls zusätzlich

- 4) linearität:  $x \leq y$  oder  $y \leq x$

gilt. Ansonsten heißt sie *partiell*.

**Beispiel.** •  $\leq$  in  $\mathbb{R}$  ist total

- $|$  in  $\mathbb{Z}$  partiell, da  $2X3$  und  $3X2$ .
- $\subseteq$  auf  $\mathcal{P}(A) = \{B \subseteq A\}$

**Definition.** Sei  $\leq$  eine Ordnung auf einer Menge  $X$ . Ein Element  $x \in X$  heißt *maximal* falls für alle  $y \in X$  gilt  $x \leq y \Rightarrow x = y$ . Ein Element  $m \in X$  ein *Maximum* falls  $x \leq m$  für alle  $x \in X$  gilt.

**Definition.** Sei  $\leq$  eine Ordnung auf einer Menge  $X$  und sei  $A \subseteq X$ . Ein Element  $x \in X$  heißt eine *obere Schranke* von  $A$  falls  $a \leq x$  für alle  $a \in A$ . Analog definiert man *untere Schranke* von  $A$ .

**Definition.** Sei  $\leq$  eine Ordnung auf einer Menge  $X$ . Eine Teilmenge  $K \subseteq X$  heißt eine *Kette* falls für alle  $x, y \in K$  gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ . Wir sagen die Ordnung  $\leq$  sei *induktiv* falls jede Kette in  $X$  eine obere Schranke besitzt.

**Satz** (Zornsches Lemma). *Sei  $\leq$  eine induktive Ordnung auf einer Menge  $X$ . Dann existiert ein maximales Element in  $X$ .*

**Typische Anwendung:** Jeder Vektorraum über  $K$  hat eine Hamel-Basis.

*Beweisidee.* Ausgehend von der leeren Menge (die eine Kette darstellt) wollen wir Elemente einer immer Länger werdenden Kette finden, wobei wir immer wieder eine obere Schranke hinzufügen

wollen - sofern dies möglich ist.

...

⇒ eine Art Induktion

**Problem:** Die Vereinigung von Ketten muss keine Kette sein. □

Vorerst einige Definitionen und Lemmata:

**Definition.** Für eine Teilmenge  $C \subseteq X$  definieren wir

$$\widehat{C} = \{x \in X \setminus C \mid x \text{ ist eine obere Schranke}\}.$$

Um die Beweisidee umzusetzen verwenden wir eine *Auswahlfunktion* auf der Menge  $\{\widehat{C} : C \subseteq X \text{ s.d. } \widehat{C} \neq \emptyset\}$

**Definition.** Eine Teilkette  $K \subseteq X$  heißt eine *f-Kette* falls für jede Teilmenge  $C \subseteq K$  mit  $\widehat{C} \cap K \neq \emptyset$  das Element  $f(\widehat{C})$  zu  $K$  gehört und eine minimale obere Schranke von  $C$  in  $K$  ist, also  $f(\widehat{C}) \leq y$  für alle  $y \in \widehat{C} \cap K$  gilt. Dies vermeidet „unnötige Zwischenschritte“, die zu Problemen bei einer Vereinigung von Ketten führen würde.

**Beispiel.**  $K_{\min} = \emptyset$ ,  $\widehat{K}_{\min} = X$  ist eine *f-Kette*, die in jeder anderen *f-Kette* enthalten ist.  $K_1 = \{f(\widehat{K}_{\min})\} = K_{\min} \cup \{f(\widehat{K}_{\min})\}$  ist eine weitere *f-Kette*, die in jeder anderen nichtleeren *f-Kette* enthalten ist.

- $\widehat{\emptyset} = X \Rightarrow f(x) \in X$  ist definiert
- $K_{\min}$  ist eine *f-Kette*:  $C = \emptyset$  und  $f(\widehat{\emptyset}) \in K_{\min}$  ist minimal  $C = K_{\min}$  erfüllt  $\widehat{C} \cap K_{\min} = \emptyset$
- Falls  $K$  eine *f-Kette* ist, so können wir  $C = \emptyset$  in der Definition verwenden und erhalten  $f(\widehat{\emptyset}) \in K$ , also  $K_{\min} \subseteq K_1 \subseteq K$ .

**Lemma** (Verlängerung). Falls  $K$  eine *f-Kette* ist und  $\widehat{K} \neq \emptyset$  ist, so ist  $K_{\text{neu}} = K \cup \{f(\widehat{K})\}$  wieder eine *f-Kette*.

*Beweis.* Sei  $C \subseteq K_{\text{neu}}$ .

- Falls  $\widehat{C} \cap K \neq \emptyset$  ist, so gilt  $C \subseteq K$ ,  $f(\widehat{C}) \in K$  und  $f(\widehat{C})$  ist ein minimales Element von  $\widehat{C} \cap K$  (da  $K$  eine *f-Kette* ist). Damit ist aber auch  $f(\widehat{C}) \in K_{\text{neu}}$  und  $f(\widehat{C})$  ist ein minimales Element von  $\widehat{C} \cap K_{\text{neu}}$  (da  $f(\widehat{K})$  eine obere Schranke von  $K$  ist).
- Falls  $C \subseteq K$  und  $\widehat{C} \cap K = \emptyset$ , dann ist  $\widehat{C} = \widehat{K}$ , da  $K$  eine Kette ist gilt  $\widehat{C} \supseteq \widehat{K}$ . Sei  $x \in \widehat{C}, k \in K \Rightarrow k \neq \widehat{C}$ , also existiert ein  $c \in C$  mit  $k \leq c \leq x \Rightarrow x$  ist eine obere Schranke von  $K$  und  $x \notin K$  also  $x \in \widehat{K}$  und somit  $\widehat{C} \in \widehat{K}$ .  
Folglich ist  $f(\widehat{C}) = f(\widehat{K}) \in K_{\text{neu}}$  eine minimale obere Schranke von  $C$  in  $K_{\text{neu}}$ .
- Falls  $f(\widehat{K}) \in C$ , so ist  $\widehat{C} \cap K_{\text{neu}} = \emptyset$  und es gibt nichts zu beweisen.

□

**Lemma** (Zwei *f-Ketten*). Angenommen  $K, K'$  sind zwei *f-Ketten* und  $K' \setminus K \neq \emptyset$ . Dann ist  $K \subseteq K'$  und es gilt  $x \leq x'$  für alle  $x \in K$  und  $x' \in K' \setminus K$ .

*Informell:* „ $K$  ist eine Anfangsabschrift von  $K'$ “.

*Beweis.* Sei  $x' \in K' \setminus K$ . Wir definieren

$$C = \{x \in K \cap K' : x \leq x'\} \subseteq K' \cap K$$

und verwenden, dass  $K'$  eine *f-Kette* ist. Da  $x' \in \widehat{C} \cap K'$  ist, folgt  $f(\widehat{C}) \in K'$  und  $f(\widehat{C}) \leq x'$ . Falls  $\widehat{C} \cap K \neq \emptyset$  wäre, so wäre  $f(\widehat{C}) \in K$  (da  $K$  eine *f-Kette* ist) womit aber  $f(\widehat{C}) \in C \cap \widehat{C}$  der Definition von  $\widehat{C}$  widerspricht.

Also ist  $\widehat{C} \cap K = \emptyset$ . In anderen Worten bedeutet dies, dass es zu jedem  $x \in K$  ein  $c \in C$  mit

$x \leq c$  geben muss. Nach Definition von  $C$  folgt daher  $x \leq c \leq x'$ . Also  $x \leq x'$  für alle  $x \in K$ . Unsere Annahmen an  $K$  und  $K'$  war bloss, dass es  $x' \in K' \setminus K$  gibt. Daraus folgt nun auch  $K \subseteq K'$ , denn ansonsten könnten wir die Rollen von  $K$  und  $K'$  vertauschen.  $\square$

**Lemma** (Vereinigung). *Wir definieren  $K_{max} = \bigcup_{f\text{-Kette}} K$ . Dann ist  $K_{max}$  eine  $f$ -Kette.*

*Beweis.* Da für je zwei Ketten  $K, K'$   $K \subseteq K'$  oder  $K' \subseteq K$  gilt, sehen wir, dass  $K_{max}$  wieder eine Kette ist. Wir müssen noch zeigen, dass  $K_{max}$  eine  $f$ -Kette ist und nehmen hierzu eine Teilmenge  $C \subseteq K_{max}$  mit  $\hat{C} \cap K_{max} \neq \emptyset$ . Sei  $x' \in \hat{C} \cap K_{max}$  und sei  $K'$  eine  $f$ -Kette mit  $x' \in K'$ .

**Behauptung:**  $C \subseteq K'$ .

Sei also  $x \in C$ , dann existiert eine  $f$ -Kette  $K$  mit  $x \in K$ . Nach obigem Lemma gilt  $K \subseteq K'$  ( $\Rightarrow x \in K' \checkmark$ ) oder  $K' \subseteq K$ . Woraus folgt  $K'$  enthält wegen obigem Lemma alle Elemente von  $K$  unterhalb von  $x'$ . Da  $x' \in \hat{C}$  und  $x \in C$  folgt  $x \leq x'$  und  $x \in K'$ .

Da  $C \subseteq K'$ ,  $c \in \hat{C} \cap K'$  und da  $K'$  eine  $f$ -Kette ist, folgt nun  $f(\hat{C}) \in K' \subseteq K_{max}$  und  $f(\hat{C}) \leq x'$ . Da  $x' \in \hat{C} \cap K_{max}$  beliebig war, sehen wir, dass  $f(\hat{C}) \in K_{max}$  ein minimales Element von  $\hat{C} \cap K_{max}$  ist. Dies zeigt aber, dass  $K_{max}$  eine  $f$ -Kette ist.  $\square$

*Beweis vom Zornschen Lemma.*  $K_{max}$  ist nach Definition eine größte  $f$ -Kette in  $X$ . Insbesondere ist also das erste Lemma nicht anwendbar, d.h.  $\hat{K}_{max} = \emptyset$ .

Des Weiteren ist aber  $K_{max}$  eine Teilkette, die nach Annahme an  $\leq$  eine obere Schranke  $x_{max}$  besitzen muss. Es folgt also  $x_{max} \in K_{max}$  ist ein Maximum von  $K_{max}$  und auch, dass  $x_{max}$  ein maximales Element von  $X$  ist.  $\square$