Unidad II: Solución Numérica de Ecuaciones No Lineales.

José Luis Ramírez B.

November 17, 2024

Motivación.

- La determinación de las raíces de una ecuación o de un sistema de ecuaciones, es uno de los problemas más antiguos de aproximación numérica que se presenta con frecuencia en la solución de una gran variedad de problemas en la matemática aplicada.
- En un problema más general, si f es una función cualquiera, la ecuación $f(x) = 0$ no puede resolverse analíticamente. De hecho, ni siquiera se sabe a priori cuántos ceros tiene f: ¿varios, uno, ninguno?

Motivación.

La ecuación de Peng-Robinson es una ecuación de estado que proporciona la presión P de un gas mediante:

$$P = \frac{R * T}{V - b} - \frac{a}{V * (V + b) + b * (V - b)} \quad (1)$$

donde a y b son constantes, T es la temperatura absoluta a la que se encuentra el gas, V es el volumen específico y R es la constante de los gases perfectos $(8.31441 J/(mol.°K))$. Para el CO_2 las constantes a y b toman los valores $a = 364.61 m^6.kPa/(kg.mol)^2$ y $b = 0.02664 m^3/kg.mol$. Supongamos que se desea encontrar la densidad $(1/V)$ del CO_2 a una presión de $10^4 kPa$ y a una temperatura de $340°K$ usando la ecuación de Peng- Robinson.

Dos casos importantes:

Dos casos importantes:

1. Solución de una ecuación no lineal con una incógnita, donde:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

   La solución es un escalar x para el cual $f(x) = 0$

Dos casos importantes:

1. Solución de una ecuación no lineal con una incógnita, donde:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

La solución es un escalar x para el cual $f(x) = 0$

2. Solución a un sistema acoplado de n ecuaciones no lineales en las n incógnitas, donde:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

La solución es un vector x para el cual todas las componentes de f son cero simultáneamente, $f(x) = 0$

Ejemplos:

Ejemplos:

1. Ecuación no lineal en una dimensión

$$x^2 - 4\sin(x) = 0$$

para la cual $x = 1.9$ es una solución aproximada.

Ejemplos:

1. Ecuación no lineal en una dimensión

$$x^2 - 4\sin(x) = 0$$

para la cual $x = 1.9$ es una solución aproximada.

2. Sistema de ecuaciones no lineales en dos dimensiones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^2 - x_2 + 0.25 & = & 0 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 & = & 0 \end{array} \right.$$

para el cual el vector solución es $x = [0.5, 0.5]^t$

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ posee tres soluciones.

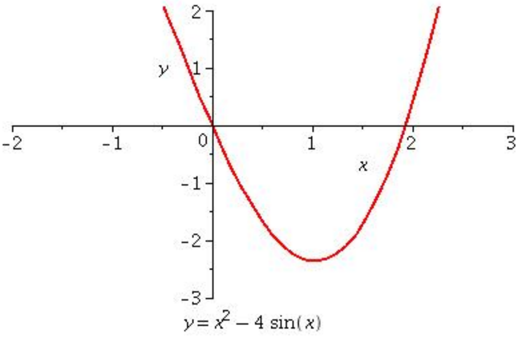
Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ posee tres soluciones.
- $\sin(x) = 0$ posee infinitas soluciones.

El Método Gráfico

El método gráfico es un método muy simple, consiste en calcular valores de la variable dependiente para distintos valores de la variable independiente, para luego observar el punto de intersección de la función con el eje de las abscisas. Este punto proporciona una primera aproximación a la raíz de la ecuación.



Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.
- Separación: Aislar raíces en caso de la existencia de varias.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.
- Separación: Aislar raíces en caso de la existencia de varias.
- Aproximación Numérica: Generación de una sucesión convergente a la raíz α.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad $p \in \mathbb{Z}$, si

$$f(x) = (x - \alpha)^p q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad $p \in \mathbb{Z}$, si

$$f(x) = (x - \alpha)^p q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$.

Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ pero $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$, entonces la raíz α posee multiplicidad m