Autovalores y Autovectores.

José Luis Ramírez B.

March 3, 2025

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos
    - Análisis de sistemas eléctricos:
        - Sincronismo del sistema productor
        - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
        - Planificación nuevo equipo
        - Otros muchos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos
  - Mercados financieros.

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos
  - Mercados financieros.
- Es también muy importante para analizar el comportamiento de métodos numéricos.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.
- Para que exista una solución distinta de la trivial, $x = 0$, el valor propio λ deberá ser raíz del polinomio de grado n, polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

- El radio espectral de una matriz es el radio del menor círculo del plano complejo centrado en el origen que contiene a todos los valores propios de la matriz.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.
- $tr(A) = \sum \lambda_i$, $\det(A) = \prod \lambda_i$

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.
- Los valores propios de una matriz se localizan en el plano complejo, dentro del círculo centrado en el origen de radio $\|A\|$.

Localización de valores propios.

Teorema: Círculos de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y definiendo los círculos de Gershgorin como los conjuntos

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

entonces el espectro de A es subconjunto de la unión de los círculos, esto es:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i = S_R$$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$
- Dado que B es singular, por lo tanto existe un vector no nulo x tal que $B_\lambda x = 0$, por lo tanto $((D - \lambda I) + P)x = 0$, luego $x = -(D - \lambda I)^{-1} P x$ aplicando $\| \cdot \|_\infty$ a ambos de la igualdad

$$\|x\|_\infty \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty \|x\|_\infty$$

$$1 \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|p_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|}$$

es decir λ satisface la condición de pertenencia al círculo R_k. Por lo tanto si se unen todos los círculos con seguridad los autovalores estarán dentro del conjunto resultante.

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \rightarrow \lambda \in S_R \cap S_C$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$

- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4 \\ R_2 &= \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16 \\ R_3 &= \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8 \end{aligned}$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.
- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.
- Se Puede mejorar este estimado con el Teorema de Gershgorin.
- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Gershgorin Circles

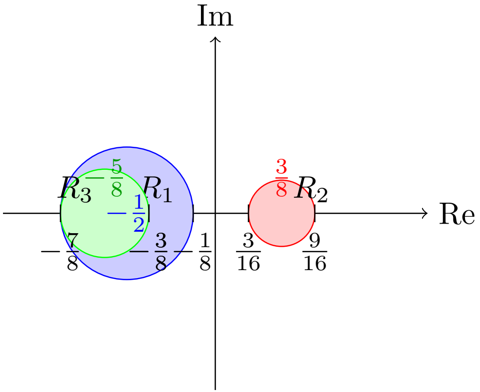


Figure: Círculos de Gerschgorin para la matriz A.

Ejemplo:

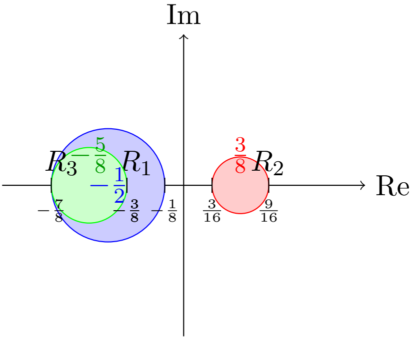
- La matriz A es no singular ya que el cero esta fuera de los círculos.
- Hay un autovalor en R_2 y los otros dos están en $R_1 \cup R_3$.
- Se puede hacer el mismo análisis para la matriz A^t y obtener otra familia de círculos R_1', R_2', R_3'.

$$A^t = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

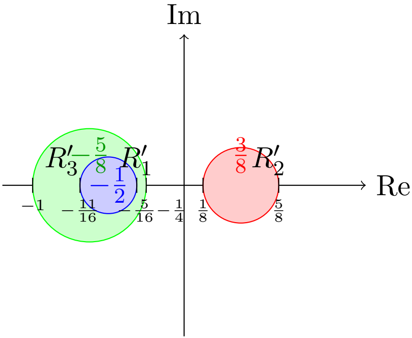
- Se tiene que $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, $r_3' = r_3$. Los discos son:

$$R_1' = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1/2| \leq 3/16\}, \Rightarrow -11/16 \leq z \leq -5/16$$
$$R_2' = \{z \in \mathbb{C} / |z - 3/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow 1/8 \leq z \leq 5/8$$
$$R_3' = \{z \in \mathbb{C} / |z + 5/8| \leq 3/8\}, \Rightarrow -1 \leq z \leq -1/4$$

Círculos de Gershgorin - A y A^t



(a) Círculos de Gershgorin para A



(b) Círculos de Gershgorin para A^t

Figure: Círculos de Gershgorin para A y A^t

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R'_1 \bigcup R'_2 \bigcup R'_3)$ nos da un refinamiento y se obtienen 3 círculos disjuntos: C_1, C_2 y C'_3. Se puede concluir que A tiene tres autovalores reales y cada uno de ellos está en los intervalos $[-5, -3], [-2, 2]$ y $[3, 5]$.

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z-1| \leq 5\}, \Rightarrow -4 \leq z \leq 6$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z-2| \leq 4\}, \Rightarrow -2 \leq z \leq 6$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z-1| \leq 4\}, \Rightarrow -3 \leq z \leq 5$$
$$C_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z-2| \leq 5\}, \Rightarrow -3 \leq z \leq 7$$