

Métodos Iterativos para la Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

José Luis Ramírez B.

February 21, 2025

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.
- Cuando el tamaño de la matriz A es grande ($n \gg 100$), la propagación del error de redondeo es también grande, y los resultados obtenidos pueden diferir de los exactos.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
 - ④ Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como LU .

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
 - ① Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como LU .
 - ② Si no ocurre lo anterior, al aplicar métodos directos se produce un fenómeno de llenado. Entonces, si no se realiza una adaptación de los métodos directos los resultados no van a ser, en general, buenos.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial $x^{(0)}$ es convergente a la solución del sistema.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial $x^{(0)}$ es convergente a la solución del sistema.
- El vector $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el vector residual obtenido en la k -ésima iteración.

Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

Ejemplo:

El método $x^{(n+1)} = 2x^{(n)} - A^{-1}b$ es consistente con el sistema $Ax = b$ pero no es convergente. En efecto:

Métodos Iterativo

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\&= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x)\end{aligned}$$

y como $A^{-1}b = x$, se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

Métodos Iterativo

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\&= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x)\end{aligned}$$

y como $A^{-1}b = x$, se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$, se tiene que:

$$x^* - x = 2(x^* - x) \Rightarrow x^* - x = 0 \Rightarrow x^* = x$$

es decir, el límite es solución del sistema $Ax = b$, por lo que el método es consistente.

Métodos Iterativo

Sin embargo, de $x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$ se obtiene que:

$$\|x^{(n+1)} - x\| = 2\|x^{(n)} - x\|$$

es decir, el vector $x^{(n+1)}$ dista el doble de lo que distaba $x^{(n)}$, por lo que el método no puede ser convergente.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación \tilde{x} de la verdadera solución del sistema.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación \tilde{x} de la verdadera solución del sistema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación \tilde{x} de la verdadera solución del sistema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.
- Sea x la solución exacta del sistema y \tilde{x} es la aproximación, por lo tanto cuando se sustituye \tilde{x} en el sistema se obtiene:

$$A\tilde{x} \approx b$$

esto significa que al realizar la resta $b - A\tilde{x} \neq 0$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$

$$Az = r$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$

$$Az = r$$

- Una vez que obtenida z se puede crear una mejor aproximación $\tilde{x} + z$ de la solución.

Ejemplo:

Al resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 110 \\ 65 \\ 47 \end{bmatrix}$$

suponiendo que una solución aproximada es $b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$
- Verificando criterio de parada $\|r^{(0)}\|_{\infty} = 8 > tol$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

- Generando la nueva aproximación

$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

- Generando la nueva aproximación

$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.14210854715202 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-13}$$

Ejemplo:

- Verificando criterio de parada
 $\|r^{(1)}\|_{\infty} = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$

Ejemplo:

- Verificando criterio de parada

$$\|r^{(1)}\|_{\infty} = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$$

- Según el criterio de parada la mejor aproximación es $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal $Ax = b$ se determina usando aritmética de t dígitos, se puede demostrar que el vector residual r para la aproximación \tilde{x} tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|$$

Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal $Ax = b$ se determina usando aritmética de t dígitos, se puede demostrar que el vector residual r para la aproximación \tilde{x} tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|$$

- De esta ecuación aproximada, se puede obtener una estimación del número de condición efectivo para la aritmética de t dígitos, sin la necesidad de invertir la matriz A .

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho \tilde{z} , la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho \tilde{z} , la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que \tilde{z} es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned}\|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\|\|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\| (10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|) = 10^{-t}\|\tilde{x}\|\kappa(A)\end{aligned}$$

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho \tilde{z} , la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que \tilde{z} es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned}\|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\|\|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\| (10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|) = 10^{-t}\|\tilde{x}\|\kappa(A)\end{aligned}$$

- Esto proporciona una aproximación para el número de condición involucrado en la solución del sistema $Ax = b$ usando t dígitos:

$$\kappa(A) \approx 10^t \frac{\|\tilde{z}\|}{\|\tilde{x}\|}$$

Ejemplo:

- El sistema lineal $Ax = b$ dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

tiene la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$

Ejemplo:

- El sistema lineal $Ax = b$ dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

tiene la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$

- Usando eliminación Gaussiana y aritmética de redondeo de 5 dígitos a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.333 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.079 & -4.7 \end{array} \right)$$

La solución aproximada a este sistema es

$$\tilde{x}^{(0)} = (1.2001; 0.99991; 0.92538)^t$$

Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a \tilde{x} calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= b - A\tilde{x}^{(0)} = \\ &= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a \tilde{x} calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= b - A\tilde{x}^{(0)} = \\ &= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- así que

$$\|r^{(0)}\|_{\infty} = 0.27413$$

Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema $Az^{(0)} = r$:

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema $Az^{(0)} = r$:

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

- La solución $z^{(0)} = (-0.20008; 8.9989 \times 10^{-5}; 0.074607)^t$ Usando la estimación del número de condición

$$\kappa(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{z}^{(0)}\|_{\infty}}{\|\tilde{x}^{(0)}\|_{\infty}} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|_{\infty} = 1.0 \times 10^{-5}$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|_{\infty} = 1.0 \times 10^{-5}$$

- calculando $r^{(1)} = b - A\tilde{x}^{(1)}$, y resolviendo el sistema $Az^{(1)} = r^{(1)}$, se obtiene

$$\tilde{z}^{(1)} = (-2.7003 \times 10^{-8}; 1.2973 \times 10^{-8}; 9.9817 \times 10^{-6})^t$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|_{\infty} = 1.0 \times 10^{-5}$$

- calculando $r^{(1)} = b - A\tilde{x}^{(1)}$, y resolviendo el sistema $Az^{(1)} = r^{(1)}$, se obtiene

$$\tilde{z}^{(1)} = (-2.7003 \times 10^{-8}; 1.2973 \times 10^{-8}; 9.9817 \times 10^{-6})^t$$

- Puesto que $\|\tilde{z}^{(1)}\| \leq 10^{-5}$, se concluye que

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{z}^{(1)} = (1.0000; 1.0000; 1.0000)^t$$

es suficientemente preciso.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde \tilde{z} es la solución aproximada al sistema $Az = r$.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde \tilde{z} es la solución aproximada al sistema $Az = r$.
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación $\tilde{x} + \tilde{z}$.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde \tilde{z} es la solución aproximada al sistema $Az = r$.
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación $\tilde{x} + \tilde{z}$.
- Este proceso puede ser repetido para refinar la solución sucesivamente hasta alcanzar convergencia.

Algoritmo

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, Número máximo de iteraciones N ,
tolerancia TOL .

output: Solución aproximada $x \in \mathbb{R}^n$.

Resolver $Ax = b$

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**

$r = b - Ax$

 Resolver $Ay = r$ (usando eliminación Gaussiana en el mismo orden
 que en el paso 1).

 Calcular $K(A) = 10^t \frac{\|y\|}{\|x\|}$ (solo se calcula la primera vez).

$x = x + y$

if $\|y\| < TOL$ **then**

 salida x

 parar

end

end

Algorithm 1: Algoritmo de Refinamiento Iterativo.

Esquemas de Punto Fijo

Supongase un (SL) $Ax = b$, se busca una matriz $T \in \mathcal{M}_n$ y un vector $c \in \mathbb{R}^n$, de forma que la matriz $I - T$ sea inversible y que la única solución del sistema lineal

$$\underbrace{x = Tx + c}_{(I-T)x=c}$$

es la solución de $Ax = b$.

Esquemas de Punto Fijo

Considerando $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario, se construye una sucesión de vectores $\{x\}_{k=0}^{\infty}$ dada por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y se pretende que la sucesión $\{x\}_k$ converja a la solución del sistema lineal.

Esquemas de Punto Fijo

Definición

El método iterativo $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. En ese caso,

$$x = Tx + c$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) =$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &= Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &= Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \\ \Rightarrow e^{(k)} &= T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &= Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \\ \Rightarrow e^{(k)} &= T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

De ese modo, el error en las iteraciones depende de las potencias sucesivas de la matriz T , lo que dará el criterio para la convergencia del Método Iterativo.

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces $e^{(k)} \rightarrow 0$ para todo $e^{(0)}$ si y sólo si $T^k \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| \rightarrow 0 \quad \text{sii} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0$$

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces $e^{(k)} \rightarrow 0$ para todo $e^{(0)}$ si y sólo si $T^k \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| \rightarrow 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0$$

- Si T es una matriz diagonalizable, existen matrices P y Λ , tales que $T = P\Lambda P^{-1}$, donde Λ es una matriz diagonal con los autovalores de T en la diagonal.

$$\begin{aligned} T &= P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \dots P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

- De esta manera

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|P\Lambda^k P^{-1}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Lambda^k\| \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_i^k| \rightarrow 0 \Rightarrow |\lambda_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left. \begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda| \|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\| \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left. \begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda| \|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\| \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

Por lo que una condición suficiente para la convergencia es:

$$\|T\| < 1$$

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución, $x^{(k)}$ con q cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-q}\|x\|$$

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución, $x^{(k)}$ con q cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-q}\|x\|$$

- y se desea saber cuántas iteraciones más se tienen que hacer para obtener m cifras correctas más. Interesa, por lo tanto, saber cuántas iteraciones N hay que hacer para que,

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-(q+m)}\|x\|$$

es decir

$$\|e^{(k+N)}\| \leq 10^{-m}\|e^{(k)}\|$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las m cifras significativas es suficiente exigir que $\|T^N\| \leq 10^{-m}$ o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las m cifras significativas es suficiente exigir que $\|T^N\| \leq 10^{-m}$ o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

- Así, para conseguir m cifras significativas es suficiente hacer N iteraciones con

$$N \geq \frac{m}{R}$$

Tasa de Convergencia

- Donde R se define como:

$$R = -\frac{1}{N} \log_{10} \|T^N\| = -\log_{10} \left(\|T^N\|^{1/N} \right)$$

- El parámetro R se puede interpretar como la velocidad de convergencia: cuanto mayor es R menos iteraciones hay que hacer para incrementar la precisión en la aproximación.
- Se puede comprobar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T^N\|^{1/N} = \rho(T)$$

por lo tanto, la velocidad asintótica de convergencia del método es

$$R_{\infty} = \log_{10} \left(\frac{1}{\rho(T)} \right)$$

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para $\rho(T) = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \simeq 0$ positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para $\rho(T) = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \simeq 0$ positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.
- En cambio, si $\rho(T) > 1$ la velocidad de convergencia es negativa por lo que la convergencia no está asegurada.

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

donde $T = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b = (I - T)A^{-1}b$, por lo que el método así construido es consistente con el sistema.

Construcción de los Métodos

- El esquema anterior también es equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el residual de la k -ésima iteración y M es un preconditionador del sistema.

Construcción de los Métodos

- El esquema anterior también es equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el residual de la k -ésima iteración y M es un preconditionador del sistema.

- En lo sucesivo se considera la descomposición aditiva de la matriz A como

The diagram shows the equation $A = L_A + D_A + U_A$ using square matrices. Matrix A is a solid gray square. Matrix L_A is a white square with a gray lower triangular region below the diagonal. Matrix D_A is a white square with a gray diagonal line. Matrix U_A is a white square with a gray upper triangular region above the diagonal. Plus signs are placed between the matrices to represent the sum.

donde L_A es la parte triangular inferior de la matriz sin incluir la diagonal, D_A es la diagonal de A , y U_A es la parte triangular superior sin incluir la diagonal.

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo
 $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A , y
 $N = L + U$

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A , y $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A , y $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.
- De esta manera queda que $A = D - L - U = D - (L + U)$, por lo tanto el sistema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - (L + U))x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$$

Método de Jacobi

- Así, se calcula la solución del sistema, como el límite de la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ donde se define el término $(k+1)$ -ésimo como:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

siendo así su matriz de iteración:

$$T = D^{-1}(L + U)$$

Entonces el sistema ha sido escrito como un proceso iterativo de la forma

$$x^{(n+1)} = Tx^{(n)} + c.$$

Método de Jacobi

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,i}x_i + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Método de Jacobi

- Si $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces despejando x_i de la i -ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Método de Jacobi

- Si $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces despejando x_i de la i -ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Conocido $x^{(k-1)}$, se calcula la aproximación $x^{(k)}$, mediante la fórmula:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

que es llamada fórmula escalar de iteración del método de Jacobi.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

y tomando como vector inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Procedamos a realizar la descomposición de la matriz del sistema:

$$M = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$N = L + U$$

Para comprobar si estamos convergiendo a la solución tomaremos el valor de la norma del residuo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(0)}\|_{\infty} = 4$$

Ejemplo:

El primero paso del esquema vendría dado por:

$$Dx^{(1)} = Nx^{(0)} + b = (L + U)x^{(0)} + b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al resolver el sistema diagonal:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.75 \\ 3 \\ -0.75 \end{pmatrix}$$

Con vector residual

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(1)}\|_{\infty} = 1$$

Ejemplo:

Por tanto, el residuo ha disminuido. Si seguimos iterando:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.125 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \|r^{(2)}\|_{\infty} = 0.5$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.5312 \\ 3.0000 \\ -0.50312 \end{pmatrix} \quad \|r^{(3)}\|_{\infty} = 0.125$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.0156 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \|r^{(4)}\|_{\infty} = 0.0625$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} -1.5039 \\ 3.0000 \\ -0.5039 \end{pmatrix} \quad \|r^{(5)}\|_{\infty} = 1.5625e - 02$$

Método de Jacobi

- El siguiente teorema de convergencia se refiere a un tipo de matrices.

Método de Jacobi

- El siguiente teorema de convergencia se refiere a un tipo de matrices.

Teorema

Supongamos que una matriz A sea diagonal estrictamente dominante:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad i = 1, \dots, n$$

Entonces, el método de Jacobi converge para esta matriz.

Método de Jacobi

- La demostración es sencilla:

Método de Jacobi

- La demostración es sencilla:

$$\begin{aligned}
 T &= M^{-1}N = D^{-1}(L + U) \\
 &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & \frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Método de Jacobi

- Si calculamos la norma de esta matriz:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{i=1,n} \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}$$

Método de Jacobi

- Si calculamos la norma de esta matriz:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{i=1,n} \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}$$

- Este cociente es siempre inferior a la unidad al ser la matriz diagonal estrictamente dominante, por tanto:

$$\|T\|_{\infty} < 1$$

Método de Jacobi

- Si calculamos la norma de esta matriz:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{i=1,n} \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}$$

- Este cociente es siempre inferior a la unidad al ser la matriz diagonal estrictamente dominante, por tanto:

$$\|T\|_{\infty} < 1$$

- Pero al ser esta una norma inducida, se tiene también que $\rho(T) < 1$, y por tanto el método es convergente.

Método de Jacobi

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$u_i \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

end

 Actualizar x con u

end

Algorithm 2: Método de Jacobi.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51 \end{cases}$$

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51 \end{cases}$$

- Antes de proceder en la solución respectiva, se observa que los elementos ubicados en la diagonal principal cumplen satisfactoriamente con el criterio de convergencia o diagonal dominante.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51 \end{cases}$$

- Antes de proceder en la solución respectiva, se observa que los elementos ubicados en la diagonal principal cumplen satisfactoriamente con el criterio de convergencia o diagonal dominante.
- Dado lo anterior, las ecuaciones de recurrencia para el método de Jacobi son:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{3 - x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{9 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{51 + 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{8} \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

- En el método de Jacobi cada componente $x_i^{(k+1)}$ se calcula utilizando las componentes de la aproximación anterior, $x^{(k)}$.

Método de Gauss-Seidel

- En el método de Jacobi cada componente $x_i^{(k+1)}$ se calcula utilizando las componentes de la aproximación anterior, $x^{(k)}$.
- Sin embargo, a la hora de calcular la componente $x_i^{(k+1)}$ ya se han calculado previamente las componentes anteriores, $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$.

Método de Gauss-Seidel

- En el método de Jacobi cada componente $x_i^{(k+1)}$ se calcula utilizando las componentes de la aproximación anterior, $x^{(k)}$.
- Sin embargo, a la hora de calcular la componente $x_i^{(k+1)}$ ya se han calculado previamente las componentes anteriores, $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$.
- En el método de Gauss-Seidel se aprovechan estas $i - 1$ componentes para el cálculo de $x_i^{(k+1)}$.

Esquema de Gauss-Seidel

- En este método, usando la misma descomposición de A que en Jacobi, el problema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow (D - L)x = Ux + b$$

Esquema de Gauss-Seidel

- En este método, usando la misma descomposición de A que en Jacobi, el problema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow (D - L)x = Ux + b$$

- y el vector solución se calcula como el límite de la sucesión definida por

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

Esquema de Gauss-Seidel

- En este método, usando la misma descomposición de A que en Jacobi, el problema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow (D - L)x = Ux + b$$

- y el vector solución se calcula como el límite de la sucesión definida por

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

- siendo así su matriz de iteración

$$T = (D - L)^{-1}U$$

Esquema de Gauss-Seidel

- En este método, usando la misma descomposición de A que en Jacobi, el problema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow (D - L)x = Ux + b$$

- y el vector solución se calcula como el límite de la sucesión definida por

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

- siendo así su matriz de iteración

$$T = (D - L)^{-1}U$$

- El método obliga a resolver un sistema triangular por sustitución hacia adelante en cada paso. Por tanto, cada paso es más complicado que en el método de Jacobi, pero la velocidad de convergencia es superior en cierto tipo de matrices.

Esquema de Gauss-Seidel

- Si del sistema $Ax = b$ se despeja x_1 de la primera ecuación, y usando el vector $x^{(0)}$ se calcula la aproximación $x_1^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j} x_j^{(0)}}{a_{1,1}},$$

Esquema de Gauss-Seidel

- Si del sistema $Ax = b$ se despeja x_1 de la primera ecuación, y usando el vector $x^{(0)}$ se calcula la aproximación $x_1^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j}x_j^{(0)}}{a_{1,1}},$$

- En general, para $i = 2, \dots, n-1$, se calcula la aproximación $x_i^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(0)}}{a_{i,i}}$$

Esquema de Gauss-Seidel

- Si del sistema $Ax = b$ se despeja x_1 de la primera ecuación, y usando el vector $x^{(0)}$ se calcula la aproximación $x_1^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j} x_j^{(0)}}{a_{1,1}},$$

- En general, para $i = 2, \dots, n-1$, se calcula la aproximación $x_i^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(0)}}{a_{i,i}}$$

- Finalmente para $i = n$, se calcula la aproximación $x_n^{(1)}$ mediante la fórmula:

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} x_j^{(1)}}{a_{n,n}}$$

Esquema de Gauss-Seidel

De esta manera, el método de Gauss-Seidel se puede resumir en el siguiente esquema:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Ejemplo:

Aplicando el método de Gauss-Seidel en el ejemplo dado en Jacobi, se tiene que:

$$M = D - L, \quad N = U$$

por lo tanto

$$Mx^{(1)} = Nx^{(0)} + b = Ux^{(0)} + b$$

Por lo que hay que resolver el sistema triangular superior

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se tiene que resolver el sistema triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} -6.1875 \\ 10.5469 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

por sustitución progresiva, obteniendo

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.7500 \\ 3.1875 \\ -0.5469 \end{pmatrix} \quad \|r^{(1)}\|_{\infty} = 0.8125$$

Por tanto, el residuo ha disminuido. Si seguimos iterando:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.5469 \\ 3.0234 \\ -0.5059 \end{pmatrix} \quad \|r^{(2)}\|_{\infty} = 0.1641$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} -1.5001 \\ 3.0000 \\ -0.5000 \end{pmatrix} \quad \|r^{(5)}\|_{\infty} = 0.0003$$

El residuo en el quinto paso es inferior al correspondiente en el método de Jacobi, 0.0003 frente a 0.01.

Esquema de Gauss-Seidel

- Respecto a la convergencia enunciamos un resultado equivalente al ya referido en el método de Jacobi.

Esquema de Gauss-Seidel

- Respecto a la convergencia enunciamos un resultado equivalente al ya referido en el método de Jacobi.
- El siguiente teorema de convergencia se refiere a un tipo de matrices.

Teorema

Supongamos que una matriz A sea diagonal estrictamente dominante:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad i = 1, \dots, n$$

Entonces, el método de Gauss-Seidel converge para esta matriz.

Esquema de Gauss-Seidel

- La matriz de iteración T de Gauss-Seidel viene dada por:

$$T = (D - L)^{-1}U$$

Esquema de Gauss-Seidel

- La matriz de iteración T de Gauss-Seidel viene dada por:

$$T = (D - L)^{-1}U$$

- Para determinar el radio espectral de T , calcularemos primero los valores propios, es decir, las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - T) = 0 \\ &= \det(\lambda I - (D - L)^{-1}U) \\ &= \det(\lambda(D - L)^{-1}(D - L) - (D - L)^{-1}U) \\ &= \det((D - L)^{-1}(\lambda(D - L) - U)) \\ &= \det((D - L)^{-1}) \det\left(\lambda(D - L) - \frac{U}{\lambda}\right) \\ &= \lambda^N \det((D - L)^{-1}) \det\left(D - L - \frac{U}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Esquema de Gauss-Seidel

- de donde $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ o bien si $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$

Esquema de Gauss-Seidel

- de donde $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ o bien si $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$
- Se quiere demostrar que todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ verifican $|\lambda| < 1$.

Esquema de Gauss-Seidel

- de donde $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ o bien si $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$
- Se quiere demostrar que todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ verifican $|\lambda| < 1$.
- Supongamos por reducción al absurdo que existe al menos una raíz λ tal que $|\lambda| \geq 1$.

Esquema de Gauss-Seidel

- de donde $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ o bien si $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$
- Se quiere demostrar que todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ verifican $|\lambda| < 1$.
- Supongamos por reducción al absurdo que existe al menos una raíz λ tal que $|\lambda| \geq 1$.
- Entonces por una parte $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$ y por otra parte como $A = D - L - U$ es estrictamente diagonal dominante, lo será también $D - L - \frac{U}{\lambda}$ si $|\lambda| \geq 1$.

Esquema de Gauss-Seidel

- de donde $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = 0$ o bien si $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$
- Se quiere demostrar que todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ verifican $|\lambda| < 1$.
- Supongamos por reducción al absurdo que existe al menos una raíz λ tal que $|\lambda| \geq 1$.
- Entonces por una parte $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$ y por otra parte como $A = D - L - U$ es estrictamente diagonal dominante, lo será también $D - L - \frac{U}{\lambda}$ si $|\lambda| \geq 1$.
- Por lo tanto $D - L - \frac{U}{\lambda}$ es no singular en contradicción con $\det \left(D - L - \frac{U}{\lambda} \right) = 0$.

Esquema de Gauss-Seidel

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$x_i \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

end

end

Algorithm 3: Método de Gauss-Seidel.

Métodos de Relajación

- La rapidez en la convergencia depende del radio de convergencia que, a su vez, depende del método empleado.

Métodos de Relajación

- La rapidez en la convergencia depende del radio de convergencia que, a su vez, depende del método empleado.
- Sería conveniente buscar el método con el menor radio de convergencia que resuelva un sistema dado para acelerar la convergencia.

Métodos de Relajación

- La rapidez en la convergencia depende del radio de convergencia que, a su vez, depende del método empleado.
- Sería conveniente buscar el método con el menor radio de convergencia que resuelva un sistema dado para acelerar la convergencia.
- La relajación representa una ligera modificación del método iterativo y ésta permite mejorar la convergencia en algunos casos.

Métodos de Relajación

- La rapidez en la convergencia depende del radio de convergencia que, a su vez, depende del método empleado.
- Sería conveniente buscar el método con el menor radio de convergencia que resuelva un sistema dado para acelerar la convergencia.
- La relajación representa una ligera modificación del método iterativo y ésta permite mejorar la convergencia en algunos casos.
- Después de que se calcula cada nuevo valor de x , ése valor se modifica mediante un promedio ponderado de los resultados de las iteraciones anterior y actual.

$$x^{(k+1)} = \omega x^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

$$A = \frac{1}{\omega}D - \frac{1-\omega}{\omega}D - L - U = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right) = M - N$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

$$A = \frac{1}{\omega}D - \frac{1-\omega}{\omega}D - L - U = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right) = M - N$$

El sistema se transforma entonces en:

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

$$A = \frac{1}{\omega}D - \frac{1-\omega}{\omega}D - L - U = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right) = M - N$$

El sistema se transforma entonces en:

$$\frac{1}{\omega}(D - \omega L)x = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right)x + b$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

$$A = \frac{1}{\omega}D - \frac{1-\omega}{\omega}D - L - U = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right) = M - N$$

El sistema se transforma entonces en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega}(D - \omega L)x &= \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right)x + b \\ (D - \omega L)x &= ((1-\omega)D + \omega U)x + \omega b \end{aligned}$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Este método fue ideado para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel. La idea del método es que para producir un nuevo valor x_i se ponderan los valores x_i^k actuales, obtenidos por Gauss-Seidel, y x_i^{k-1} .

$$A = \frac{1}{\omega}D - \frac{1-\omega}{\omega}D - L - U = \frac{1}{\omega}(D - \omega L) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right) = M - N$$

El sistema se transforma entonces en:

$$\frac{1}{\omega}(D - \omega L)x = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U \right)x + b$$

$$(D - \omega L)x = ((1 - \omega)D + \omega U)x + \omega b$$

$$x = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega)D + \omega U)x + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Por lo tanto el esquema de iteración se puede escribir como:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U) x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Por lo tanto el esquema de iteración se puede escribir como:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U) x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

- La matriz de iteración T es:

$$T = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U)$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

- Por lo tanto el esquema de iteración se puede escribir como:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U) x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

- La matriz de iteración T es:

$$T = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U)$$

- La solución se calcula como el límite de la sucesión definida por:

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D + \omega U) x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

El esquema de SOR de forma general se puede escribir como:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

Teorema

Para toda matriz A , el radio espectral de la matriz del método de relajación S.O.R. es superior o igual a $|\omega - 1|$ en consecuencia una condición necesaria para que el método sea convergente es $0 < \omega < 2$.

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

Los valores propios de la matriz T_ω del método de relajación verifican la relación

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n \lambda_i(T_\omega) &= \det(T_\omega) = \det((D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)) \\ &= \frac{\det((1 - \omega)D + \omega U)}{\det(D - \omega L)} = \frac{\det(\omega(\frac{1-\omega}{\omega}D + U))}{\det(\omega(\frac{1}{\omega}D - L))} \\ &= \frac{\det(\frac{1-\omega}{\omega}D + U)}{\det(\frac{1}{\omega}D - L)} = \frac{(\frac{1-\omega}{\omega})^n \prod a_{i,i}}{(\frac{1}{\omega})^n \prod a_{i,i}} = (1 - \omega)^n\end{aligned}$$

Método de de Sobrerelajación Sucesiva (SOR)

por otro lado se tiene que

$$\rho(T_\omega) \geq |\lambda_i|$$

lo que implica que

$$\rho^n(T_\omega) \geq \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |1 - \omega|^n$$

por lo tanto

$$\rho(T_\omega) \geq |1 - \omega|$$

La matriz T_ω recibe el nombre de matriz de relajación.

La matriz T_ω recibe el nombre de matriz de relajación.

- Si $\omega = 1$ la matriz se reduce a la matriz de iteración de Gauss-Seidel.

La matriz T_ω recibe el nombre de matriz de relajación.

- Si $\omega = 1$ la matriz se reduce a la matriz de iteración de Gauss-Seidel.
- Si $\omega > 1$ se dice que se trata de un método de sobre-relajación, y son utilizados para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel.

La matriz T_ω recibe el nombre de matriz de relajación.

- Si $\omega = 1$ la matriz se reduce a la matriz de iteración de Gauss-Seidel.
- Si $\omega > 1$ se dice que se trata de un método de sobre-relajación, y son utilizados para acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel.
- Si $\omega < 1$ se dice que se trata de un método de sub-relajación, y pueden servir para alcanzar la convergencia, cuando el método de Gauss-Seidel no converge.

Métodos Iterativos no Estacionarios

- Hacen uso de información evaluada en cada iteración, esto permite obtener la solución de modo dinámico.

Métodos Iterativos no Estacionarios

- Hacen uso de información evaluada en cada iteración, esto permite obtener la solución de modo dinámico.
- Suelen ser más eficientes que los métodos estacionarios.

Métodos Iterativos no Estacionarios

- Hacen uso de información evaluada en cada iteración, esto permite obtener la solución de modo dinámico.
- Suelen ser más eficientes que los métodos estacionarios.
- Un ejemplo de método iterativo no estacionario es el método de Gradiente Conjugado.

Método del Descenso más Rápido

- El método del descenso más rápido es un método iterativo no estacionario.

Método del Descenso más Rápido

- El método del descenso más rápido es un método iterativo no estacionario.
- El método que se plantea es válido para sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde la matriz de coeficientes A es simétrica y positiva definida, es decir, para matrices tales que $A = A^T$ y $x^T Ax > 0$ cualquiera sea el vector $x \neq 0$.

Método del Descenso más Rápido

Lema

Si A es simétrica y positiva definida, el problema de resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente al de minimizar la forma cuadrática

$$q(x) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle$$

donde $\langle x, y \rangle = x^T y$ representa el producto escalar de los vectores x y y .

Método del Descenso más Rápido

Demostración. Sea v una dirección (rayo unidimensional), interesa ver como se comporta la forma cuadrática q para vectores de la forma $x + tv$, donde t es un escalar.

Método del Descenso más Rápido

Demostración. Sea v una dirección (rayo unidimensional), interesa ver como se comporta la forma cuadrática q para vectores de la forma $x + tv$, donde t es un escalar.

Tomando en cuenta que A es simétrica

$$\begin{aligned}q(x + tv) &= \langle x + tv, A(x + tv) \rangle - 2\langle x + tv, b \rangle \\&= \langle x, Ax \rangle + 2t\langle x, Av \rangle + t^2\langle v, Av \rangle - 2\langle x, b \rangle - 2t\langle v, b \rangle \\&= q(x) + 2t\langle v, Ax \rangle - 2t\langle v, b \rangle + t^2\langle v, Av \rangle\end{aligned}$$

$$q(x + tv) = q(x) + 2t\langle v, Ax - b \rangle + t^2\langle v, Av \rangle$$

Método del Descenso más Rápido

Esta es una ecuación de segundo grado en t con coeficiente de t^2 positivo, que posee un mínimo que se puede obtener igualando a cero la derivada

$$\frac{d}{dt}q(x + tv) = 2\langle v, Ax - b \rangle + 2t\langle v, Av \rangle$$

es decir, en el punto

$$\hat{t} = \frac{\langle v, b - Ax \rangle}{\langle v, Av \rangle}$$

Método del Descenso más Rápido

El valor mínimo que toma la forma cuadrática sobre el rayo viene dado por

$$\begin{aligned}q(x + \hat{t}v) &= q(x) + \hat{t} (2\langle v, Ax - b \rangle + \hat{t}\langle v, Av \rangle) \\&= q(x) + \hat{t} (2\langle v, Ax - b \rangle + \langle v, b - Ax \rangle) \\&= q(x) - \hat{t}\langle v, b - Ax \rangle \\&= q(x) - \frac{\langle v, b - Ax \rangle^2}{\langle v, Av \rangle}\end{aligned}$$

Método del Descenso más Rápido

- Al pasar de x a $x + \hat{t}v$ siempre hay una reducción en el valor de q excepto si $v \perp b - Ax$, es decir, si $\langle v, b - Ax \rangle = 0$.

Método del Descenso más Rápido

- Al pasar de x a $x + \hat{t}v$ siempre hay una reducción en el valor de q excepto si $v \perp b - Ax$, es decir, si $\langle v, b - Ax \rangle = 0$.
- Si x no es una solución del sistema $Ax = b$ existen muchos vectores v tales que $\langle v, b - Ax \rangle \neq 0$ y por tanto x no minimiza a la forma cuadrática q .

Método del Descenso más Rápido

- Al pasar de x a $x + \hat{t}v$ siempre hay una reducción en el valor de q excepto si $v \perp b - Ax$, es decir, si $\langle v, b - Ax \rangle = 0$.
- Si x no es una solución del sistema $Ax = b$ existen muchos vectores v tales que $\langle v, b - Ax \rangle \neq 0$ y por tanto x no minimiza a la forma cuadrática q .
- Por el contrario, si $Ax = b$, no existe ningún rayo que emane de x sobre el que q tome un valor menor de $q(x)$, es decir, x minimiza el valor de q .

Método del Descenso más Rápido

- Esto permite sugerir un método para resolver el sistema $Ax = b$ procediendo a minimizar la forma cuadrática q a través de una sucesión de rayos.

Método del Descenso más Rápido

- Esto permite sugerir un método para resolver el sistema $Ax = b$ procediendo a minimizar la forma cuadrática q a través de una sucesión de rayos.
- En el paso k del algoritmo, se tienen los vectores $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, los cuales permiten buscar una dirección apropiada $v^{(k)}$ y el siguiente punto de la sucesión viene dado por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k v^{(k)}$$

Método del Descenso más Rápido

- Esto permite sugerir un método para resolver el sistema $Ax = b$ procediendo a minimizar la forma cuadrática q a través de una sucesión de rayos.
- En el paso k del algoritmo, se tienen los vectores $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, los cuales permiten buscar una dirección apropiada $v^{(k)}$ y el siguiente punto de la sucesión viene dado por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k v^{(k)}$$

- donde

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, b - Ax^{(k)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$

Método del Descenso más Rápido

- Gráficamente, si $\|v^{(k)}\| = 1$, t_k mide la distancia que nos movemos de $x^{(k)}$ para obtener $x^{(k+1)}$.

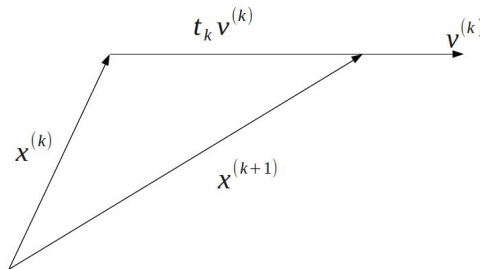


Figure: Paso de $x^{(k)}$ a $x^{(k+1)}$.

Método del Descenso más Rápido

- Tomando $v^{(k)}$ como el gradiente negativo de q en $x^{(k)}$, es decir, la dirección del residuo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ se obtiene el denominado método del descenso más rápido.

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{Z}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

$$r^{(k)} \leftarrow b - Ax^{(k)}$$

$$t_k \leftarrow \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + t_k r^{(k)}$$

end

Algorithm 4: Método del Descenso más Rápido.

Método del Descenso más Rápido

- Analizando el costo operacional del algoritmo, se llega a que:

Operación vectorial	Nro. Oper. Elem.	Operación más costosa
$r^{(k)} \leftarrow b - Ax^{(k)}$	$2n^2$	$Ax^{(k)}$
$t_k \leftarrow \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle}$	$2n^2 + 3n - 1$	$Ar^{(k)}$
$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + t_k r^{(k)}$	$2n$	$t_k r^{(k)}$

Table: Costo de Operaciones. Algoritmo de Descenso.

Se comprueba que las dos operaciones que determinan el “costo” de cada una de las iteraciones del método son $Ax^{(k)}$ y $Ar^{(k)}$.

Método del Descenso más Rápido

- La primera se puede evitar si se toma en cuenta que:

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + t_{k-1}r^{(k-1)}) = \\ &= b - Ax^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} \end{aligned}$$

Método del Descenso más Rápido

- La primera se puede evitar si se toma en cuenta que:

$$\begin{aligned}r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + t_{k-1}r^{(k-1)}) = \\&= b - Ax^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)}\end{aligned}$$

- Por lo tanto, salvo en la iteración inicial, no es necesario calcular el producto $Ax^{(k)}$

Método del Descenso más Rápido

- La primera se puede evitar si se toma en cuenta que:

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + t_{k-1}r^{(k-1)}) = \\ &= b - Ax^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, salvo en la iteración inicial, no es necesario calcular el producto $Ax^{(k)}$
- basta calcular $Ar^{(k)}$ y utilizarlo en la siguiente iteración.

Método del Descenso más Rápido

- La primera se puede evitar si se toma en cuenta que:

$$\begin{aligned}r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + t_{k-1}r^{(k-1)}) = \\&= b - Ax^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)}\end{aligned}$$

- Por lo tanto, salvo en la iteración inicial, no es necesario calcular el producto $Ax^{(k)}$
- basta calcular $Ar^{(k)}$ y utilizarlo en la siguiente iteración.
- Se puede introducir una ligera modificación en el algoritmo para conseguir un algoritmo de descenso más eficiente.

Método del Descenso más Rápido

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{Z}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

$r^{(0)} \leftarrow b - Ax^{(0)}$

for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

$b \leftarrow Ar^{(k)}$

$t_k \leftarrow \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, b \rangle}$

$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + t_k r^{(k)}$

$r^{(k+1)} \leftarrow r^{(k)} - t_k b$

end

Algorithm 5: Método del Descenso más Rápido. Versión eficiente.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}, x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{r_1^t A r_1} = \frac{1}{2}, x_2 = x_1 + t_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{r_1^t A r_1} = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_1 + t_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
- $r_2 = r_1 - t_1 A r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}, x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{r_1^t A r_1} = \frac{1}{2}, x_2 = x_1 + t_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
- $r_2 = r_1 - t_1 A r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $t_2 = \frac{r_2^t r_2}{r_2^t A r_2} = \frac{1}{2}, x_3 = x_2 + t_2 r_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{r_0^t A r_0} = \frac{1}{2}, x_1 = x_0 + t_0 r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{r_1^t A r_1} = \frac{1}{2}, x_2 = x_1 + t_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
- $r_2 = r_1 - t_1 A r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $t_2 = \frac{r_2^t r_2}{r_2^t A r_2} = \frac{1}{2}, x_3 = x_2 + t_2 r_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
- $r_3 = r_2 - t_2 A r_2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$

Método del Gradiente Conjugado

- Es un método iterativo para minimizar funciones cuadráticas convexas de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

donde $x, b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva definida.

Método del Gradiente Conjugado

- Es un método iterativo para minimizar funciones cuadráticas convexas de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

donde $x, b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva definida.

- Es un método de descenso de gradiente que utiliza direcciones conjugadas.

Método del Gradiente Conjugado

- Se plantea modificar el método del descenso eligiendo una dirección distinta al gradiente en la segunda iteración: la dirección que une $x^{(1)}$ con la solución exacta x^* .

Método del Gradiente Conjugado

- Se plantea modificar el método del descenso eligiendo una dirección distinta al gradiente en la segunda iteración: la dirección que une $x^{(1)}$ con la solución exacta x^* .
- El problema es cómo determinar esta nueva dirección sin conocer la solución exacta del sistema.

Método del Gradiente Conjugado

- Se plantea modificar el método del descenso eligiendo una dirección distinta al gradiente en la segunda iteración: la dirección que une $x^{(1)}$ con la solución exacta x^* .
- El problema es cómo determinar esta nueva dirección sin conocer la solución exacta del sistema.
- Sea $v_*^{(1)}$ al vector que une $x^{(1)}$ con x^* :

$$v_*^{(1)} = x^* - x^{(1)} = x^* - x^{(0)} - t_0 v^{(0)}$$

Método del Gradiente Conjugado

- Se plantea modificar el método del descenso eligiendo una dirección distinta al gradiente en la segunda iteración: la dirección que une $x^{(1)}$ con la solución exacta x^* .
- El problema es cómo determinar esta nueva dirección sin conocer la solución exacta del sistema.
- Sea $v_*^{(1)}$ al vector que une $x^{(1)}$ con x^* :

$$v_*^{(1)} = x^* - x^{(1)} = x^* - x^{(0)} - t_0 v^{(0)}$$

- En donde $v^{(0)}$ es la primera dirección de descenso, $v^{(0)} = r^{(0)}$.

Método del Gradiente Conjugado

Definición

Sea $P = \{p_0, \dots, p_k\}$ un conjunto de vectores no nulos, sea $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ simétrica y definida positiva. Se dice que P es un conjunto conjugado con respecto a A si

$$\langle p_i, p_j \rangle_A = p_i^t A p_j = 0 \text{ para toda } i \neq j$$

Método del Gradiente Conjugado

Proposición

Los vectores $v^{(0)}$ y $v_*^{(1)}$ son conjugados respecto a la matriz A .

Método del Gradiente Conjugado

Proposición

Los vectores $v^{(0)}$ y $v_*^{(1)}$ son conjugados respecto a la matriz A .

Para su demostración basta comprobar que $(v^{(0)})^T A v_*^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned}
 (v^{(0)})^t A v_*^{(1)} &= (v^{(0)})^t A(x^* - x^{(0)} - t_0 v^{(0)}) \\
 &= (v^{(0)})^t \left(\underbrace{Ax^* - Ax^{(0)}}_{v^{(0)}} - t_0 A v^{(0)} \right) \\
 &= (v^{(0)})^T v^{(0)} - t_0 (v^{(0)})^t A v^{(0)} \\
 &= (v^{(0)})^t v^{(0)} - \frac{(r^{(0)})^t v^{(0)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}} (v^{(0)})^t A v^{(0)} \\
 &= (v^{(0)})^t v^{(0)} - (v^{(0)})^t v^{(0)} = 0
 \end{aligned}$$

Método del Gradiente Conjugado

- Por otro lado $v_*^{(1)}$ se puede expresar como combinación lineal de $r^{(1)}$ y $v^{(0)}$:

$$v_*^{(1)} = \beta_1 r^{(1)} + \beta_2 v^{(0)}$$

Método del Gradiente Conjugado

- Por otro lado $v_*^{(1)}$ se puede expresar como combinación lineal de $r^{(1)}$ y $v^{(0)}$:

$$v_*^{(1)} = \beta_1 r^{(1)} + \beta_2 v^{(0)}$$

- No es preciso obtener el vector $v_*^{(1)}$, basta con determinar su dirección, para ello se realiza lo siguiente:

$$v^{(1)} = \frac{1}{\beta_1} v_*^{(1)} = r^{(1)} + \frac{\beta_2}{\beta_1} v^{(0)} = r^{(1)} + \alpha_0 v^{(0)}$$

Método del Gradiente Conjugado

- Por otro lado $v_*^{(1)}$ se puede expresar como combinación lineal de $r^{(1)}$ y $v^{(0)}$:

$$v_*^{(1)} = \beta_1 r^{(1)} + \beta_2 v^{(0)}$$

- No es preciso obtener el vector $v_*^{(1)}$, basta con determinar su dirección, para ello se realiza lo siguiente:

$$v^{(1)} = \frac{1}{\beta_1} v_*^{(1)} = r^{(1)} + \frac{\beta_2}{\beta_1} v^{(0)} = r^{(1)} + \alpha_0 v^{(0)}$$

- En donde α_0 se puede obtener fácilmente a partir de la proposición vista anteriormente.:

$$(v^{(0)})^t A v^{(1)} = (v^{(0)})^t A (r^{(1)} + \alpha_0 v^{(0)}) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{(v^{(0)})^t A r^{(1)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}}$$

Método del Gradiente Conjugado

- la dirección de descenso en la iteración i será una combinación lineal del residuo en la iteración i y de la dirección de descenso en la iteración $i - 1$:

$$v^{(i)} = r^{(i)} + \alpha_{i-1}v^{(i-1)}$$

Método del Gradiente Conjugado

- la dirección de descenso en la iteración i será una combinación lineal del residuo en la iteración i y de la dirección de descenso en la iteración $i - 1$:

$$v^{(i)} = r^{(i)} + \alpha_{i-1} v^{(i-1)}$$

- con

$$\alpha_{i-1} = -\frac{(v^{(i-1)})^T A r^{(i)}}{(v^{(i-1)})^T A v^{(i-1)}}$$

Método del Gradiente Conjugado

El método del gradiente conjugado se puede resumir en el siguiente esquema:

$$v^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

$$t_0 = \frac{r^{(0)} \cdot v^{(0)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 v^{(0)}$$

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)}$$

$$\alpha_0 = -\frac{(v^{(0)})^t A r^{(1)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}}$$

$$v^{(1)} = r^{(1)} + \alpha_0 r^{(0)}$$

$$\vdots$$

Método del Gradiente Conjugado

El método del gradiente conjugado se puede resumir en el siguiente esquema:

$$v^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

$$t_0 = \frac{r^{(0)} \cdot v^{(0)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 v^{(0)}$$

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)}$$

$$\alpha_0 = -\frac{(v^{(0)})^t A r^{(1)}}{(v^{(0)})^t A v^{(0)}}$$

$$v^{(1)} = r^{(1)} + \alpha_0 v^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$t_i = \frac{r^{(i)} \cdot v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + t_i v^{(i)}$$

$$r^{(i+1)} = b - Ax^{(i+1)}$$

$$\alpha_i = -\frac{(v^{(i)})^t A r^{(i+1)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

$$v^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \alpha_i v^{(i)}$$

Método del Gradiente Conjugado

- A partir del esquema del método del gradiente conjugado se puede diseñar un algoritmo que resuelva el sistema $Ax = b$ con A de dimensión n simétrica y definida positiva:

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{N}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

$v^{(0)} = r^{(0)} \leftarrow b - Ax^{(0)}$

for $i \leftarrow 0$ **to** M **do**

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^T \cdot v^{(i)}}{(v^{(i)})^T A v^{(i)}}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + t_i v^{(i)}$$

$$r^{(i+1)} = b - Ax^{(i+1)}$$

$$\alpha_i = - \frac{(r^{(i+1)})^T A v^{(i)}}{(v^{(i)})^T A v^{(i)}}$$

$$v^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \alpha_i v^{(i)}$$

end

Algorithm 6: Método del Gradiente Conjugado. Versión provisional.

Método del Gradiente Conjugado

Propiedades del Método del Gradiente Conjugado

Proposición 1

Cada dirección de descenso del método del gradiente conjugado es conjugada, respecto a la matriz A , con todas las direcciones de descenso calculadas anteriormente:

$$(v^{(i)})^t A v^{(j)} = 0 \quad 0 \leq j < i$$

Método del Gradiente Conjugado

Propiedades del Método del Gradiente Conjugado

Proposición 1

Cada dirección de descenso del método del gradiente conjugado es conjugada, respecto a la matriz A , con todas las direcciones de descenso calculadas anteriormente:

$$(v^{(i)})^t A v^{(j)} = 0 \quad 0 \leq j < i$$

Proposición 2

Los gradientes de f ($f(x) = \frac{1}{2}x^t A x - b^t x$) en los puntos generados en el método del gradiente conjugado son ortogonales a las direcciones de descenso de las iteraciones anteriores:

$$r^{(i)} \cdot v^{(j)} = 0 \quad 0 \leq j < i$$

Método del Gradiente Conjugado

Proposición 3

Si se utiliza aritmética exacta al realizar las operaciones, el método del gradiente conjugado alcanza la solución exacta del sistema $Ax = b$ en no más de n iteraciones:

$$\exists k \leq n \quad / \quad r^{(k)} = 0$$

Método del Gradiente Conjugado

Proposición 3

Si se utiliza aritmética exacta al realizar las operaciones, el método del gradiente conjugado alcanza la solución exacta del sistema $Ax = b$ en no más de n iteraciones:

$$\exists k \leq n \quad / \quad r^{(k)} = 0$$

Proposición 4

$$r^{(i)} \cdot v^{(i)} = r^{(i)} \cdot r^{(i)}$$

Prop. 2

$$\text{Dem. } r^{(i)} \cdot v^{(i)} = r^{(i)} \cdot (r^{(i)} + \alpha_{i-1} v^{(i-1)}) \quad \underbrace{=}_{\text{Prop. 2}} \quad r^{(i)} \cdot r^{(i)}$$

Método del Gradiente Conjugado

Proposición 3

Si se utiliza aritmética exacta al realizar las operaciones, el método del gradiente conjugado alcanza la solución exacta del sistema $Ax = b$ en no más de n iteraciones:

$$\exists k \leq n \quad / \quad r^{(k)} = 0$$

Proposición 4

$$r^{(i)} \cdot v^{(i)} = r^{(i)} \cdot r^{(i)}$$

Prop. 2

$$\text{Dem. } r^{(i)} \cdot v^{(i)} = r^{(i)} \cdot (r^{(i)} + \alpha_{i-1} v^{(i-1)}) \quad \underbrace{\quad}_{= \quad} \quad r^{(i)} \cdot r^{(i)}$$

Proposición 5

$$r^{(i)} \cdot r^{(j)} = 0 \quad 0 \leq j < i$$

Método del Gradiente Conjugado

- El problema, al igual que en el caso del descenso, son los productos matriz por vector.

Método del Gradiente Conjugado

- El problema, al igual que en el caso del descenso, son los productos matriz por vector.
- Utilizando las propiedades vistas se puede modificar el algoritmo para conseguir que en cada iteración solamente haya que realizar un producto matriz vector.

Método del Gradiente Conjugado

1 Modificación del término

$$\alpha_i = -\frac{(r^{(i+1)})^t A v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

Despejando $Av^{(i)}$ de $r^{(i+1)} = r^{(i)} - t_i Av^{(i)}$ se obtiene:

$$Av^{(i)} = \frac{1}{t_i}(r^{(i)} - r^{(i+1)})$$

e introduciendo $Av^{(i)}$ en α_i se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{\frac{1}{t_i}(r^{(i+1)})^t(r^{(i)} - r^{(i+1)})}{\frac{1}{t_i}(v^{(i)})^t(r^{(i)} - r^{(i+1)})} \\ &= -\frac{r^{(i+1)} \cdot r^{(i)} - r^{(i+1)} \cdot r^{(i+1)}}{v^{(i)} \cdot r^{(i)} - v^{(i)} \cdot r^{(i+1)}} = \frac{r^{(i+1)} \cdot r^{(i+1)}}{r^{(i)} \cdot r^{(i)}}\end{aligned}$$

En donde $r^{(i+1)} \cdot r^{(i)} = 0$ por la prop. 5, $v^{(i)} \cdot r^{(i+1)} = 0$ por la prop. 2 y $v^{(i)} \cdot r^{(i)} = r^{(i)} \cdot r^{(i)}$ por la prop. 4.

Método del Gradiente Conjugado

1 Modificación del término

$$r^{(i+1)} = b - Ax^{(i+1)}$$

De la igualdad

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - t_{k-1}Ar^{(k-1)}$$

y tomando como dirección de descenso $v^{(i)}$ en vez de $r^{(i)}$ se obtiene:

$$r^{(i+1)} = r^{(i)} - t_i Av^{(i)}$$

Método del Gradiente Conjugado

1 Modificación del término

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

De nuevo utilizando la prop. 4:

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot r^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

Método del Gradiente Conjugado

1 Modificación del término

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

De nuevo utilizando la prop. 4:

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot r^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

- Por tanto para calcular α_i ya no es necesario realizar ningún producto matriz vector y para calcular $r^{(i+1)}$ y t_i basta con un solo producto matriz vector $(A v^{(i)})$ que es el mismo en ambos casos.

Método del Gradiente Conjugado

1 Modificación del término

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot v^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

De nuevo utilizando la prop. 4:

$$t_i = \frac{(r^{(i)})^t \cdot r^{(i)}}{(v^{(i)})^t A v^{(i)}}$$

- Por tanto para calcular α_i ya no es necesario realizar ningún producto matriz vector y para calcular $r^{(i+1)}$ y t_i basta con un solo producto matriz vector $(A v^{(i)})$ que es el mismo en ambos casos.
- Estas modificaciones permiten construir un nuevo algoritmo del gradiente conjugado.

Método del Gradiente Conjugado

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{N}$.

output: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ solución aproximada de $Ax = b$.

$r \leftarrow b - Ax$

$v \leftarrow r$

$\beta \leftarrow r^T r$

for $i \leftarrow 1$ **to** M **do**

$z \leftarrow Av$

β

$t \leftarrow \frac{\beta}{v^T z}$

$x \leftarrow x + tv$

$r \leftarrow r - tz$

$\gamma \leftarrow \beta$

$\beta \leftarrow r^T r$

β

$\alpha \leftarrow -\frac{\beta}{\gamma}$

γ

$v \leftarrow r + \alpha v$

end

Algorithm 7: Método del Gradiente Conjugado. Versión final.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{v_0^t A v_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{v_0^t A v_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r_1^t \cdot r_0 = 0$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{v_0^t A v_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r_1^t \cdot r_0 = 0$
- $\beta_0 = \frac{r_1^t r_1}{r_0^t r_0} = \frac{1}{4}$, $v_1 = r_1 + \beta_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{v_0^t A v_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r_1^t \cdot r_0 = 0$
- $\beta_0 = \frac{r_1^t r_1}{r_0^t r_0} = \frac{1}{4}$, $v_1 = r_1 + \beta_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{v_1^t A v_1} = \frac{2}{3}$, $x_2 = x_1 + t_1 v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iniciando con $x_0 = [0, 0]^t$
- $v_0 = r_0 = b - Ax_0 = [1, 0]^t$
- $t_0 = \frac{r_0^t r_0}{v_0^t A v_0} = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 + t_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $r_1 = r_0 - t_0 A v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r_1^t \cdot r_0 = 0$
- $\beta_0 = \frac{r_1^t r_1}{r_0^t r_0} = \frac{1}{4}$, $v_1 = r_1 + \beta_0 v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- $t_1 = \frac{r_1^t r_1}{v_1^t A v_1} = \frac{2}{3}$, $x_2 = x_1 + t_1 v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
- $r_2 = r_1 - t_1 A v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$