

# Unidad III: Aproximación de funciones.

José Luis Ramírez B.

February 25, 2025

## 1 Introducción

## 2 Interpolación

- Taylor
- Lagrange
- Newton
- Interpolación de Chebyshev
- Interpolación a trozos

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.
- Se desea extraer información de esos datos.

# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).



# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).
- o bien “intentando recrear/reconstruir el fenómeno en su totalidad” (en un dominio continuo de espacio, tiempo o cualquier otra magnitud), con la función que represente “lo mejor posible” esos datos.

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan (“interpolan” es el término matemático) exactamente por los puntos dados.

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan (“interpolan” es el término matemático) exactamente por los puntos dados.
- Curvas de ajuste: cálculo de funciones aproximadas a los datos que tenemos (en algún sentido, para cierta distancia)

# Resultados Fundamentales

Polinomio de grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

# Resultados Fundamentales

Polinomio de grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Teorema:

Si  $p_n$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces  $p_n(x) = 0$  tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

# Resultados Fundamentales

## Teorema:

Sea  $p_n$  un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces existen constantes  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , posiblemente complejas, y enteros positivos  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , tales que  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

# Resultados Fundamentales

## Teorema:

Sea  $p_n$  un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces existen constantes  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , posiblemente complejas, y enteros positivos  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , tales que  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

## Teorema:

Sean  $p_n$  y  $q_n$  dos polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Si existen  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , con  $k > n$ , números distintos tales que  $p_n(x_i) = q_n(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , entonces  $p_n(x) = q_n(x)$  para todo  $x$ .



# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar  $p_n(x_0)$

# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)) \cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar  $p_n(x_0)$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

entonces:  $p_n(x_0) = b_{-1}$

# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots (a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)) \cdots))$$

## Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

entonces:  $p_n(x_0) = b_{-1}$

Además, si se llama

$$q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

se tiene que:

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_{-1}$$

y por lo tanto

$$p'_n(x_0) = q_{n-1}(x_0)$$

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.
- División Sintética: Está relacionado con el método de división sintética para polinomios, lo que lo hace muy útil en el campo del álgebra y el análisis numérico.



# Evaluación de polinomios

En Resumen:

- El algoritmo de Horner es una herramienta poderosa para evaluar polinomios y también para obtener información sobre su derivada.
- Es un método eficiente, estable y muy utilizado en diversos campos de las matemáticas y la informática.

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Tenemos el polinomio:

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Y queremos evaluarlo en  $x_0 = 2$  y también calcular  $p'_3(2)$ .

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para  $p_3(2)$   
Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para  $p_3(2)$   
Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3\text{)}$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

► Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3)$$

► Iteración:

$$b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \text{ (coeficiente de } x^2)$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ (coeficiente de } x^1)$$

$$b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11 \text{ (término independiente)}$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

► Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3)$$

► Iteración:

$$b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \text{ (coeficiente de } x^2)$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ (coeficiente de } x^1)$$

$$b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11 \text{ (término independiente)}$$

► Resultado:

$$p_3(2) = b_{-1} = 11$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$

Con los valores de  $b$  que obtuvimos (excepto  $b_{-1}$ ), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$

Con los valores de  $b$  que obtuvimos (excepto  $b_{-1}$ ), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

### 3. Relación entre $p_3(x)$ , $q_2(x)$ y $b_{-1}$

El polinomio  $p_3(x)$  se puede expresar como:

$$p_3(x) = (x - x_0) \cdot q_2(x) + b_{-1}$$

$$p_3(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + x + 6) + 11$$



## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$   
Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$   
Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$   
Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$   
Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$   
Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$   
Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

- Iteración:

$$c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$   
Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$   
Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

- Iteración:

$$c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

- Resultado:

$$q_2(2) = c_{-1} = 16$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$



## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$
- $p'_3(2) = q_2(2) = 16$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio  $p_3(x)$  y evaluándolo en  $x = 2$ .

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$p'_3(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

# Ejemplo: Polinomio de Grado 3

## Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio  $p_3(x)$  y evaluándolo en  $x = 2$ .

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$p'_3(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Evaluando en  $x = 2$ :

$$p'_3(2) = 6(2^2) - 6(2) + 4 = 6(4) - 12 + 4 = 24 - 12 + 4 = 16$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero  $n$  no negativo, un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  y los valores  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  de una función y sus  $n$  primeras derivadas en  $x_0$ , encontrar un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero  $n$  no negativo, un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  y los valores  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  de una función y sus  $n$  primeras derivadas en  $x_0$ , encontrar un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

## Teorema:

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única, que se denomina polinomio de Taylor de grado  $\leq n$  de la función  $f$  en el punto  $x_0$ :

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Teorema:

Para  $n > 1$  sea  $f(x)$  una función  $n$  veces derivable en  $x_0$ . El polinomio de Taylor  $P(x)$  verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

con la notación  $o$  pequeña de Landau  $f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$  para  $x \rightarrow x_0$ . Además,  $P(x)$  es el único polinomio de grado  $\leq n$  con esta propiedad.

# Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

# Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

## Teorema:

Sean  $x$  y  $x_0$  dos números reales distintos y  $f(x)$  una función con  $n$  derivadas continuas en un intervalo conteniendo a  $x$  y  $x_0$ , en el que también existe  $f^{(n+1)}$ . Entonces existe un punto  $\xi$  entre  $x$  y  $x_0$  tal que:

$$f(x) - P(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$



# Problema de interpolación de Taylor

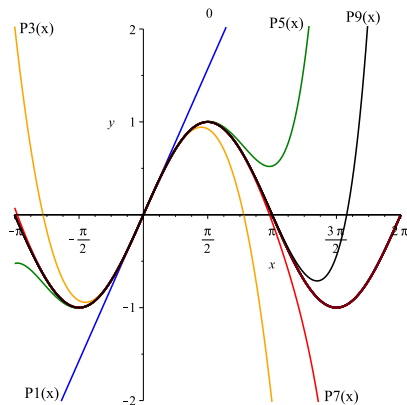
## Colorario:

Además de las hipótesis del teorema supongase que para cada  $t$  entre  $x$  y  $x_0$  se verifica que  $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1}$  constante, entonces:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{(n+1)} K_{n+1}}{(n+1)!}$$

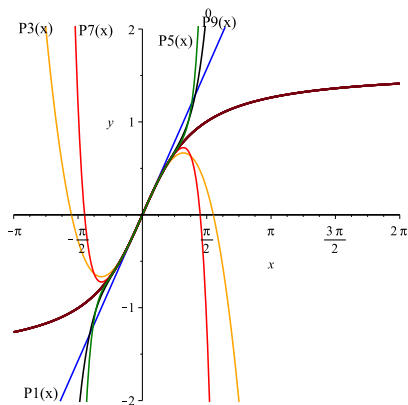
## Ejemplo:

A continuación se muestran las gráficas de la función  $f(x) = \sin(x)$  y de su polinomio de Taylor de orden 1 al 9 en el cero. Se puede comprobar que la aproximación es más exacta a medida que se aumenta el orden.



## Ejemplo:

El hecho de que la función seno y su polinomio de Taylor se parezcan tanto como se quiera, con sólo aumentar el grado del polinomio lo suficiente, no es algo que le ocurra a todas las funciones. Para la función arctan la situación no es tan buena:



## Ejemplo:

- Se desea aproximar la función  $f(x) = e^x$  mediante el polinomio de Taylor centrado en  $x_0 = 0$  de orden 5 y hallar el error obtenido en la estimación para  $x = 1.5$
- El polinomio de Taylor de grado 5 viene dada por la siguiente expresión

$$P_5(x) = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 + \frac{1}{5!}(x - 0)^5$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

## Ejemplo:

Con la expresión del residuo se calcula el error de Truncamiento:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0)^6 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = \frac{e^\xi}{6!}x^6$$
$$R_5(x) = \frac{e^\xi}{6!}x^6$$

## Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar  $f(1.5) = e^{1.5}$  usando  $P_5(1.5)$ :

$$P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$$

## Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar  $f(1.5) = e^{1.5}$  usando  $P_5(1.5)$ :

$$P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$$

- Obtenemos:

$$P_5(1.5) \approx 4.462$$

## Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar  $f(1.5) = e^{1.5}$  usando  $P_5(1.5)$ :

$$P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$$

- Obtenemos:

$$P_5(1.5) \approx 4.462$$

- Cálculo del error en  $x = 1.5$

El error en la aproximación de Taylor está dado por el término del resto.

La forma del resto para el polinomio de Taylor de orden  $n$  es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$



## Ejemplo:

- En nuestro caso,  $n = 5$ ,  $x = 1.5$ ,  $x_0 = 0$ , y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de  $e^x$  es  $e^x$ .

Por lo tanto:

$$R_5(1.5) = \frac{e^\xi \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$

$$R_5(1.5) = \frac{e^\xi \cdot 1.5^6}{720}$$

Donde  $\xi$  es un número entre 0 y 1.5.

## Ejemplo:

- En nuestro caso,  $n = 5$ ,  $x = 1.5$ ,  $x_0 = 0$ , y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de  $e^x$  es  $e^x$ .

Por lo tanto:

$$R_5(1.5) = \frac{e^\xi \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$

$$R_5(1.5) = \frac{e^\xi \cdot 1.5^6}{720}$$

Donde  $\xi$  es un número entre 0 y 1.5.

- Para maximizar el error, tomamos el mayor valor posible de  $e^\xi$  en el intervalo  $[0, 1.5]$ . Este valor es cuando  $c = 1.5$ .

Por lo tanto

$$R_5(1.5) = e^{1.5} \cdot \frac{(1.5)^6}{720} \approx 0.0708$$

# Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto

## Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de  $e^{1.5}$  es aproximadamente 4.481689.

## Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de  $e^{1.5}$  es aproximadamente 4.481689.
- El error exacto es:

$$\text{Error} = |e^{1.5} - P_5(1.5)|$$

$$\text{Error} = |4.481689 - 4.462|$$

$$\text{Error} = 0.019689$$

# Interpolación

- Nos centraremos ahora en el problema de obtener, a partir de una tabla de parejas  $(x, f(x))$  definida en un cierto intervalo  $[a, b]$ , el valor de la función para cualquier  $x$  perteneciente a dicho intervalo.

# Interpolación

- Nos centraremos ahora en el problema de obtener, a partir de una tabla de parejas  $(x, f(x))$  definida en un cierto intervalo  $[a, b]$ , el valor de la función para cualquier  $x$  perteneciente a dicho intervalo.
- Supongamos que se dispone de las siguientes parejas de datos:

<b>x</b>	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
<b>y</b>	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\tilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

en donde  $x_k$  y  $f(x_k)$  son datos conocidos.



- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\tilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

en donde  $x_k$  y  $f(x_k)$  son datos conocidos.

- Se dice entonces que la función  $\tilde{f}(x)$  , es una función interpolante de los datos representados en la tabla.

- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\tilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$$

en donde  $x_k$  y  $f(x_k)$  son datos conocidos.

- Se dice entonces que la función  $\tilde{f}(x)$ , es una función interpolante de los datos representados en la tabla.

## Observación:

En general, trabajaremos con  $f =$  polinomios de grado  $\leq n$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinomio algebraico

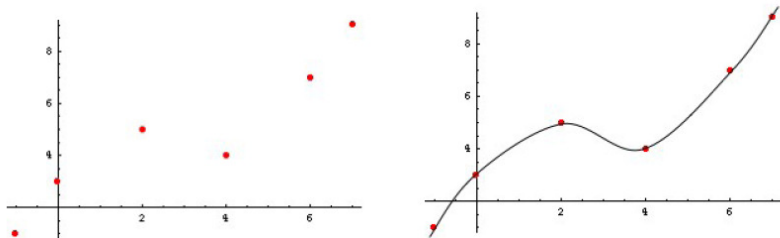


Figure: Datos de iterpolación y curva interpolante.

## Teorema de Weierstrass:

Sea  $f$  continua sobre  $[a, b]$ , dado  $\varepsilon > 0$   $\exists P(x)$  polinomio tal que  
 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$ .

# Polinomio interpolador de Lagrange

- Si se escribe  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Así,  $P(x)$  será solución del problema si, y sólo si, el S.E.L:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

admite solución.

# Polinomio interpolador de Lagrange

- Si se escribe  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Así,  $P(x)$  será solución del problema si, y sólo si, el S.E.L:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

admite solución.

- que se denomina sistema cuadrado de Vandermonde. La matriz  $A$  del sistema se denomina matriz de Vandermonde y es no-singular si los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son diferentes. Esta matriz es mal condicionada a medida que  $n$  aumenta.

# Polinomio interpolador de Lagrange

- Llamando  $A$  a la matriz de coeficientes del sistema; se tiene que el problema de interpolación admite una única solución si, y sólo si, los nodos de interpolación son distintos. Para ello basta con probar que  $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$  y, por lo tanto,  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j$ .

# Polinomio interpolador de Lagrange

- Llamando  $A$  a la matriz de coeficientes del sistema; se tiene que el problema de interpolación admite una única solución si, y sólo si, los nodos de interpolación son distintos. Para ello basta con probar que  $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$  y, por lo tanto,  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j$ .
- El método de Lagrange para interpolación polinomial resulta de resolver este sistema para obtener los coeficientes pero lo hace de una forma más sencilla y sistemática.



# Interpolación de Lagrange

Para calcular el polinomio interpolador  $P(x)$  asociado a una tabla de datos  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, \dots, n$  se puede plantear una simplificación previa: se construyen polinomios  $l_i(x)$  de grado  $n$  que valgan 1 en el nodo  $x_i$  y 0 en el resto.

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

# Interpolación de Lagrange

Para calcular el polinomio interpolador  $P(x)$  asociado a una tabla de datos  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, \dots, n$  se puede plantear una simplificación previa: se construyen polinomios  $l_i(x)$  de grado  $n$  que valgan 1 en el nodo  $x_i$  y 0 en el resto.

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Si se escribe el polinomio factorizado para que tenga en cada nodo  $x_j$  (con  $j \neq i$ ) una raíz, el candidato es:

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)$$

# Polinomio interpolador de Lagrange

Lo único que no se consigue es que en  $x_i$  valga 1, para ello hay que “normalizar” la función anterior.

# Polinomio interpolador de Lagrange

Lo único que no se consigue es que en  $x_i$  valga 1, para ello hay que “normalizar” la función anterior.

Así, finalmente la fórmula de interpolación de Lagrange es:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, \dots, n$$

Los polinomios  $l_k(x)$  reciben el nombre de polinomios de Lagrange.

# Interpolación de Lagrange

## Teorema:

Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  números diferentes, y sea  $f$  una función tal que sus valores se obtengan a partir de los números dados  $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ , entonces existe un único polinomio  $p_n(x)$  de grado  $n$ , que cumple con la propiedad

$$f(x_k) = p_n(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, \dots, n$$

y este polinomio está dado por la siguiente expresión

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)$$

# Interpolación de Lagrange

Demostración:

- Se tiene que  $p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$  ya que  $L_k(x)$  son polinomios de grado menor o igual a  $n$  esto implica que  $p(x)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $n$ .

# Interpolación de Lagrange

Demostración:

- Se tiene que  $p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$  ya que  $L_k(x)$  son polinomios de grado menor o igual a  $n$  esto implica que  $p(x)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $n$ .
- Además

$$L_k(x_k) = 1, \quad L_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k$$
$$\Rightarrow p_n(x_k) = 0 + 0 + \cdots + f(x_k) + \cdots + 0 = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

# Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:



# Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:
- Supongase que  $p_n(x)$  y  $q_n(x)$  son dos polinomios de grado  $\leq n$  que interpolan a  $f(x)$  en los  $n + 1$  puntos distintos  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , es decir

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

# Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:
- Supongase que  $p_n(x)$  y  $q_n(x)$  son dos polinomios de grado  $\leq n$  que interpolan a  $f(x)$  en los  $n + 1$  puntos distintos  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , es decir

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Entonces,  $r_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$  es un polinomio de grado  $\leq n$  con  $n + 1$  raíces  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Pero cualquier polinomio de grado  $n$  con un número de raíces mayor a  $n$  debe ser constante e igual a cero. Por lo tanto  $r_n(x) \equiv 0, \forall x$ , y en consecuencia  $p_n(x) = q_n(x), \forall x \in [a, b]$ .

# Polinomio interpolador de Lagrange

Si  $x_0, \dots, x_n$  son  $n + 1$  números reales distintos y  $f$  es una función real definida sobre ellos, entonces existe un único polinomio  $P_n(x)$  de grado menor o igual a  $n$  tal que  $f(x_k) = P(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$ .

# Polinomio interpolador de Lagrange

Si  $x_0, \dots, x_n$  son  $n + 1$  números reales distintos y  $f$  es una función real definida sobre ellos, entonces existe un único polinomio  $P_n(x)$  de grado menor o igual a  $n$  tal que  $f(x_k) = P(x_k) \quad \forall k = 0, \dots, n$ .

## Teorema

Si  $f \in C^{n+1}[a, b]$  y  $p_n(x)$  es el polinomio de interpolación en  $n + 1$  puntos distintos  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ , entonces para cada  $x \in [a, b]$  existe  $\xi(x) \in I[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$  (el intervalo cerrado más pequeño que contiene  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ ) tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w(x) \quad \text{con } w(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

# Polinomio interpolador de Lagrange

Demostración:

# Polinomio interpolador de Lagrange

## Demostración:

- Si  $x = x_k$  para algún  $0 \leq k \leq n$ , la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.

# Polinomio interpolador de Lagrange

## Demostración:

- Si  $x = x_k$  para algún  $0 \leq k \leq n$ , la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.
- Así que supongase que  $x \neq x_k, k = 0, 1, \dots, n$ , y sea

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}w(t), \quad t \in [a, b]$$

# Polinomio interpolador de Lagrange

## Demostración:

- Si  $x = x_k$  para algún  $0 \leq k \leq n$ , la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.
- Así que supongase que  $x \neq x_k, k = 0, 1, \dots, n$ , y sea

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}w(t), \quad t \in [a, b]$$

- Claramente  $F(t)$  está bien definida pues  $w(x) \neq 0$  ya que  $x \neq x_k, \forall k$ . Además  $F(t)$  es de clase  $\mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  y tiene al menos  $n + 2$  ceros, a saber  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ . Luego  $F'(t)$  tiene al menos  $n + 1$  ceros,  $F''(t)$  tiene al menos  $n$  ceros, así sucesivamente, y  $F^{(n+1)}(t)$  tiene al menos un cero en  $[a, b]$  que será denotado por  $\xi(x)$ .



# Polinomio interpolador de Lagrange

- Por lo tanto

$$0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}(n+1)!$$

# Polinomio interpolador de Lagrange

- Por lo tanto

$$0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}(n+1)!$$

Se concluye que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}w(x)$$

## Ejemplo:

Sea la función  $f : x \rightarrow 2xe^{-(4x+2)}$  definida en  $[0.2, 1]$

## Ejemplo:

Sea la función  $f : x \rightarrow 2xe^{-(4x+2)}$  definida en  $[0.2, 1]$

- 1 Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte  $\{0.2, 1.0\}$ .

## Ejemplo:

Sea la función  $f : x \rightarrow 2xe^{-(4x+2)}$  definida en  $[0.2, 1]$

- 1 Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte  $\{0.2, 1.0\}$ .
- 2 Hallar el polinomio  $P(x)$  que interpola  $f(x)$  en el sentido de Lagrange sobre el soporte  $\{0.2, 1\}$ .

## Ejemplo:

Sea la función  $f : x \rightarrow 2xe^{-(4x+2)}$  definida en  $[0.2, 1]$

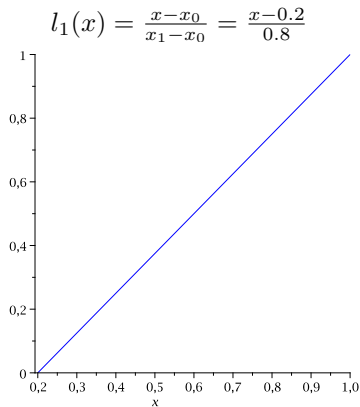
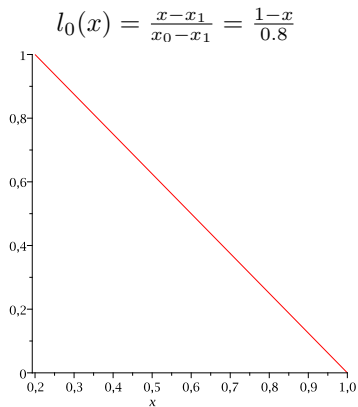
- 1 Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte  $\{0.2, 1.0\}$ .
- 2 Hallar el polinomio  $P(x)$  que interpola  $f(x)$  en el sentido de Lagrange sobre el soporte  $\{0.2, 1\}$ .
- 3 Obtener la expresión del error de interpolación.

## Ejemplo:

Sea la función  $f : x \rightarrow 2xe^{-(4x+2)}$  definida en  $[0.2, 1]$

- 1 Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte  $\{0.2, 1.0\}$ .
- 2 Hallar el polinomio  $P(x)$  que interpola  $f(x)$  en el sentido de Lagrange sobre el soporte  $\{0.2, 1\}$ .
- 3 Obtener la expresión del error de interpolación.
- 4 Hallar una cota de error válida en todo  $(0.2, 1)$ .

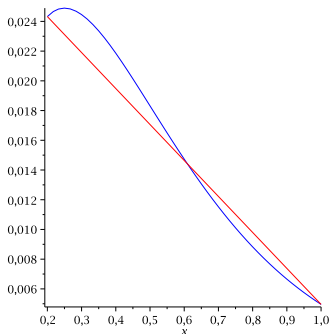
# Ejemplo:





## Ejemplo:

$$\begin{aligned}P_1(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = \\& (0.4)e^{-2.8} \left( \frac{1-x}{0.8} \right) + 2e^{-6} \left( \frac{x-0.2}{0.8} \right) \\ \Rightarrow P_1(x) &\approx -0.02420815088x + 0.02916565523\end{aligned}$$



# Expresión del error

Aplicamos la expresión:

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} \prod_{j=0}^1 (x - x_j)$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{(-16 + 32\xi_x)e^{-(4\xi_x+2)}}{2!} (x - 0.2)(x - 1)$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{(-16 + 32\xi_x)e^{-(4\xi_x+2)}}{2} (x^2 - 1.2x + 0.2)$$

## Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

## Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Obteniendo  $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$ , nos interesa  $\max |f''(x)|$

## Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Obteniendo  $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$ , nos interesa  $\max |f''(x)|$ . Dado que la función  $g(x)$  es continua en  $[0.2, 1]$ , su mayor valor absoluto en  $[0.2, 1]$  será el mayor de los siguientes:

## Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Obteniendo  $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$ , nos interesa  $\max |f''(x)|$ . Dado que la función  $g(x)$  es continua en  $[0.2, 1]$ , su mayor valor absoluto en  $[0.2, 1]$  será el mayor de los siguientes:

- Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas de  $[0.2, 1]$  para las que  $g'(x) = 0$ .

# Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Obteniendo  $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$ , nos interesa  $\max |f''(x)|$ . Dado que la función  $g(x)$  es continua en  $[0.2, 1]$ , su mayor valor absoluto en  $[0.2, 1]$  será el mayor de los siguientes:

- Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas de  $[0.2, 1]$  para las que  $g'(x) = 0$ .
- Valor de  $|g(0.2)|$ .

## Cota de error

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{2!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Obteniendo  $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$ , nos interesa  $\max |f''(x)|$ . Dado que la función  $g(x)$  es continua en  $[0.2, 1]$ , su mayor valor absoluto en  $[0.2, 1]$  será el mayor de los siguientes:

- Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas de  $[0.2, 1]$  para las que  $g'(x) = 0$ .
- Valor de  $|g(0.2)|$ .
- Valor de  $|g(1)|$ .



# Cota de error

Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas para las que  $g'(x) = 0$ .

# Cota de error

Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas para las que  $g'(x) = 0$ .

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

# Cota de error

Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas para las que  $g'(x) = 0$ .

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (96 - 128x)e^{-(4x+2)} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{96}{128} = 0.75$$

# Cota de error

Valor de  $|g(x)|$  en las abscisas para las que  $g'(x) = 0$ .

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (96 - 128x)e^{-(4x+2)} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{96}{128} = 0.75$$

de donde  $|g(0.75)| \approx 0.0539$

# Cota de error

Valor de  $g(x)$  en los extremos del intervalo  $[0.2, 1]$ .

# Cota de error

Valor de  $g(x)$  en los extremos del intervalo  $[0.2, 1]$ .

$$g(0.2) \approx -0.5838 = 0.5838$$

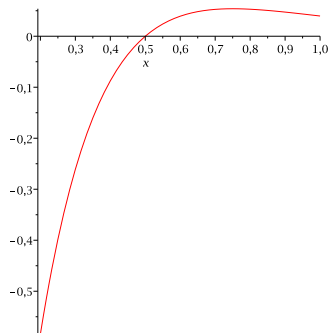
$$g(1) \approx 0.0397 = 0.0397$$

# Cota de error

Valor de  $g(x)$  en los extremos del intervalo  $[0.2, 1]$ .

$$g(0.2) \approx -0.5838 = 0.5838$$

$$g(1) \approx 0.0397 = 0.0397$$



# Cota de error

Se busca ahora  $\max_{x \in [0.2, 1]} |(x - 0.2)(x - 1)|$  Llamamos

$$q(x) = (x - 0.2)(x - 1) = x^2 - 1.2x + 0.2$$



# Cota de error

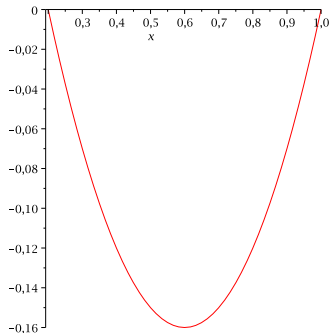
Se busca ahora  $\max_{x \in [0.2, 1]} |(x - 0.2)(x - 1)|$  Llamamos

$q(x) = (x - 0.2)(x - 1) = x^2 - 1.2x + 0.2$   $q(x)$  es un polinomio de segundo grado que se anula en los puntos 0.2 y 1, luego, necesariamente, tendrá algún extremo en el intervalo  $[0.2, 1]$ .

# Cota de error

Se busca ahora  $\max_{x \in [0.2, 1]} |(x - 0.2)(x - 1)|$  Llamamos

$q(x) = (x - 0.2)(x - 1) = x^2 - 1.2x + 0.2$   $q(x)$  es un polinomio de segundo grado que se anula en los puntos 0.2 y 1, luego, necesariamente, tendrá algún extremo en el intervalo  $[0.2, 1]$ .



# Cota de error

El máximo de  $|q(x)|$  se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación  $q'(x) = 0$ :

# Cota de error

El máximo de  $|q(x)|$  se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación  $q'(x) = 0$ :

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

# Cota de error

El máximo de  $|q(x)|$  se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación  $q'(x) = 0$ :

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

de donde se obtiene  $x = 0.6$  como abscisa en la que se encuentra el máximo de  $q(x)$

# Cota de error

El máximo de  $|q(x)|$  se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación  $q'(x) = 0$ :

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

de donde se obtiene  $x = 0.6$  como abscisa en la que se encuentra el máximo de  $q(x)$

$$q(0.6) = -0.16 \Rightarrow |q(0.6)| = 0.16$$

# Cota de error

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, una cota de error vendrá dada por:

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{0.5838}{2}(0.16) = 0.046704$$

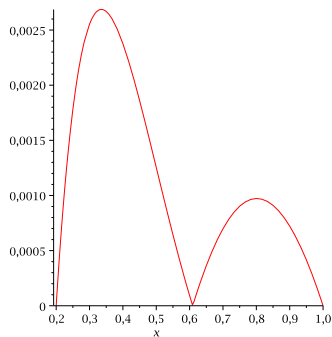
# Cota de error

La cota del error obtenida es una cota “teórica”. Si se representa el valor absoluto del error exacto:  $|E(x)| = |f(x) - P(x)|$  se obtiene la siguiente figura:



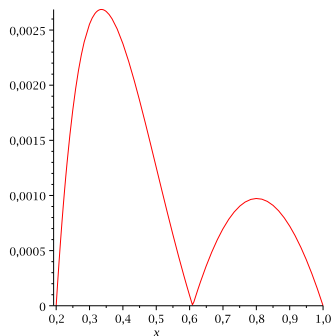
# Cota de error

La cota del error obtenida es una cota “teórica”. Si se representa el valor absoluto del error exacto:  $|E(x)| = |f(x) - P(x)|$  se obtiene la siguiente figura:



## Cota de error

La cota del error obtenida es una cota “teórica”. Si se representa el valor absoluto del error exacto:  $|E(x)| = |f(x) - P(x)|$  se obtiene la siguiente figura:



El error máximo real que se comete es del orden de 0.0026, mucho menor que la cota teórica 0.046702.

# Desventajas:

- 1 El polinomio no viene expandido.

## Desventajas:

- 1 El polinomio no viene expandido.
- 2 La interpolación para otro valor de  $x$  necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.

# Desventajas:

- ❶ El polinomio no viene expandido.
- ❷ La interpolación para otro valor de  $x$  necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.
- ❸ La incorporación de un nuevo nodo obliga a rehacer todos los cálculos.

# Desventajas:

- ❶ El polinomio no viene expandido.
- ❷ La interpolación para otro valor de  $x$  necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.
- ❸ La incorporación de un nuevo nodo obliga a rehacer todos los cálculos.
- ❹ La evaluación del error no es fácil.

# Interpolación Iterada

- 1 A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado.

# Interpolación Iterada

- 1 A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado.
- 2 Además en este caso se desea poder aumentar el orden del polinomio interpolador a voluntad y parar cuando el error sea suficientemente pequeño.



# Interpolación Iterada

- ➊ A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado.
- ➋ Además en este caso se desea poder aumentar el orden del polinomio interpolador a voluntad y parar cuando el error sea suficientemente pequeño.
- ➌ Para estos propósitos la interpolación iterada está especialmente indicado.

# Interpolación Iterada

- ➊ A veces no es necesario obtener la forma explícita del polinomio interpolador y basta con obtener su valor numérico en un punto dado.
- ➋ Además en este caso se desea poder aumentar el orden del polinomio interpolador a voluntad y parar cuando el error sea suficientemente pequeño.
- ➌ Para estos propósitos la interpolación iterada está especialmente indicado.

## Definición

Sea  $f$  una función definida en  $x_0, \dots, x_n$  y supongamos  $m_0, \dots, m_k$  sean  $k + 1$  enteros distintos con  $0 \leq m_i \leq n$  para cada  $i = 0, \dots, k$ . El polinomio de Lagrange de grado menor o igual a  $k$  que coincide con  $f$  en  $x_{m_0}, \dots, x_{m_k}$  se denota  $P_{m_0, \dots, m_k}$ .

## Ejemplo:

Sea  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ , calcule  $P_{0,3,4}(x)$  y  $P_{1,2,4}(x)$ .

## Ejemplo:

Sea  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ , calcule  $P_{0,3,4}(x)$  y  $P_{1,2,4}(x)$ .

$$\begin{aligned} P_{0,3,4}(x) &= \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)}1^3 + \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)}4^3 + \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)}6^3 = \\ &= 11x^2 - 34x + 24. \end{aligned}$$

## Ejemplo:

Sea  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ , calcule  $P_{0,3,4}(x)$  y  $P_{1,2,4}(x)$ .

$$\begin{aligned}P_{0,3,4}(x) &= \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)}1^3 + \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)}4^3 + \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)}6^3 = \\&= 11x^2 - 34x + 24.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{1,2,4}(x) &= \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}2^3 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}3^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}6^3 = \\&= 10x^2 - 27x + 18.\end{aligned}$$

# Interpolación Iterada

## Teorema

Sea  $f$  definida en  $x_0, \dots, x_k$  y sea  $x_i, x_j$  dos números distintos en este conjunto. Entonces el Polinomio de Interpolación de Lagrange de grado menor o igual a  $k$  que interpola a  $f$  en  $x_0, \dots, x_k$  viene dado por la siguiente relación:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{x_i - x_j}$$

# Interpolación Iterada

## Teorema

Sea  $f$  definida en  $x_0, \dots, x_k$  y sea  $x_i, x_j$  dos números distintos en este conjunto. Entonces el Polinomio de Interpolación de Lagrange de grado menor o igual a  $k$  que interpola a  $f$  en  $x_0, \dots, x_k$  viene dado por la siguiente relación:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{x_i - x_j}$$

Prueba: Hay que probar que  $P(x_s) = f(x_s), \forall s = 0, 1, 2, \dots, k$ .

# Interpolación Iterada

## Caso I

Sea  $x_r \neq x_i$  y  $x_r \neq x_j$  un nodo:

$$\begin{aligned} P(x_r) &= \frac{(x_r - x_j)P_{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x_r) - (x_r - x_i)P_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x_r)}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x_r - x_j)f(x_r) - (x_r - x_i)f(x_r)}{x_i - x_j} \\ &= \frac{-x_j + x_i}{x_i - x_j} f(x_r) \\ &= f(x_r) \end{aligned}$$



# Interpolación Iterada

## Caso II

Sea  $x_r = x_i$

$$\begin{aligned}P(x_i) &= \frac{(x_i - x_j)P_{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x_i) - 0}{x_i - x_j} \\&= \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \\&= f(x_i)\end{aligned}$$

Es análogo si  $x_r = x_j$ , por lo tanto  $P(x)$  es el polinomio de Lagrange que coincide con  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_k$  pues este es único.

# Método de Neville

Se desea aproximar  $f(x^*)$  dada la siguiente tabla de valores para  $f$ :

$x$	$x_0$	$x_1$	$\cdots$	$x_n$
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Se genera la tabla de  $f(x^*)$

$x_0$	$P_0$					
$x_1$	$P_1$	$P_{0,1}$				
$x_2$	$P_2$	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$			
$x_3$	$P_3$	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$		
$x_4$	$P_4$	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$x_n$	$P_n$	$P_{n-1,n}$	$P_{n-2,n-1,n}$	$P_{n-3,n-2,n-1,n}$	$\cdots$	$P_{0,1,\dots,n}$

# Método de Neville

Ejemplo: Aproxime  $f(2.5)$  dada la siguiente tabla

	$x$	$f(x)$
$x_0$	2.0	0.5103757
$x_1$	2.2	0.5207843
$x_2$	2.4	0.5104147
$x_3$	2.6	0.4813306
$x_4$	2.8	0.4359160

La tabla de Neville es

2.0	0.5103757				
2.2	0.5207843	0.5363972	$\leftrightarrow P_{0,1}$		
2.4	0.5104147	0.5052299	0.4974380750		
2.6	0.4813306	0.4958726	0.4982119625	0.49808298125	
2.8	0.4359160	0.5040379	0.4979139625	0.49806296250	0.498070469531250

De donde  $f(2.5) \approx 0.498070469531250$ .

# Método de Neville

Un ejemplo del cálculo la matriz anterior es:

$$\begin{aligned}P_{0,1} &= \frac{(x - x_0)P_1 - (x - x_1)P_0}{x_1 - x_0} \\&= \frac{(2.5 - 2.0)0.5207843 - (2.5 - 2.2)0.5103757}{2.2 - 2.0} \\&= 0.5363972\end{aligned}$$

# Método de Neville

## Notación

Se denota por  $Q_{ij}$  el polinomio interpolante de Lagrange de grado  $j$  que pasa por los  $j + 1$  nodos siguientes:

$$x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$$

es decir

$$Q_{ij} = P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1, i}(x)$$

# Método de Neville

## Notación

Se denota por  $Q_{ij}$  el polinomio interpolante de Lagrange de grado  $j$  que pasa por los  $j + 1$  nodos siguientes:

$$x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$$

es decir

$$Q_{ij} = P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1, i}(x)$$

Ahora usando el método de Neville

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \frac{(x - x_i)P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1}(x) - (x - x_{i-j})P_{i-j+1, \dots, i-1, i}(x)}{x_{i-j} - x_i} \\ &= \frac{(x - x_{i-j})P_{i-j+1, \dots, i-1, i}(x) - (x - x_i)P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1}(x)}{x_i - x_{i-j}} \\ &= \frac{(x - x_{i-j})Q_{i, j-1} - (x - x_i)Q_{i-1, j-1}}{x_i - x_{i-j}} \end{aligned}$$

# Método de Neville

Con esta nueva notación, la tabla de Neville se puede escribir como:

$x_0$	$Q_{00}$					
$x_1$	$Q_{10}$	$Q_{11}$				
$x_2$	$Q_{20}$	$Q_{21}$	$Q_{22}$			
$x_3$	$Q_{30}$	$Q_{31}$	$Q_{32}$	$Q_{33}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$x_n$	$Q_{n0}$	$Q_{n1}$	$Q_{n2}$	$Q_{n3}$	$\cdots$	$Q_{nn}$

# Método de Neville

**input** : Los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Sus imágenes  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  como primera columna de  $Q$

**output:** La tabla o matriz  $Q$ , donde  $f(x^*) \approx Q_{nn}$ .

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**

```
  | for  $j \leftarrow 1$  to  $i$  do  
  |   |  $Q_{ij} \leftarrow \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$   
  |   end
```

**end**

Salida  $Q_{nn}$

**Algorithm 1:** Algoritmo para calcular la tabla de Neville y aproximar  $f(x^*) \approx P_n(x^*)$ .



# Método de Aitken

Existe el método de Aitken, que es similar al método de Neville, y que se genera de manera similar.

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & P_0 & & & & & \\ x_1 & P_1 & P_{0,1} & & & & \\ x_2 & P_2 & P_{0,2} & P_{0,1,2} & & & \\ x_3 & P_3 & P_{0,3} & P_{0,1,3} & P_{0,1,2,3} & & \\ x_4 & P_4 & P_{0,4} & P_{0,1,4} & P_{0,1,2,4} & P_{0,1,2,3,4} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_n & P_n & P_{0,n} & P_{0,1,n} & P_{0,1,2,n} & \cdots & P_{0,1,\dots,n} \end{array}$$

# Método de Interpolación Inversa

- Sea  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y que  $f$  posee un cero  $p$  en  $[a, b]$ .

# Método de Interpolación Inversa

- Sea  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y que  $f$  posee un cero  $p$  en  $[a, b]$ .
- Sea  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  números distintos en  $[a, b]$  con  $f(x_k) = y_k$  para cada  $k = 0, \dots, n$ .

# Método de Interpolación Inversa

- Sea  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y que  $f$  posee un cero  $p$  en  $[a, b]$ .
- Sea  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  números distintos en  $[a, b]$  con  $f(x_k) = y_k$  para cada  $k = 0, \dots, n$ .
- Si se quiere aproximar  $p$ , se construye el polinomio interpolante de grado  $n$  en los nodos  $y_0, \dots, y_n$  para  $f^{-1}$ .

# Método de Interpolación Inversa

- Sea  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y que  $f$  posee un cero  $p$  en  $[a, b]$ .
- Sea  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  números distintos en  $[a, b]$  con  $f(x_k) = y_k$  para cada  $k = 0, \dots, n$ .
- Si se quiere aproximar  $p$ , se construye el polinomio interpolante de grado  $n$  en los nodos  $y_0, \dots, y_n$  para  $f^{-1}$ .
- Puesto que  $y_k = f(x_k)$  y  $0 = f(p)$ , se deduce que  $f^{-1}(y_k) = x_k$  y  $p = f^{-1}(0)$ .

# Método de Interpolación Inversa

- Sea  $f \in C^1[a, b]$ ,  $f'(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y que  $f$  posee un cero  $p$  en  $[a, b]$ .
- Sea  $x_0, \dots, x_n$   $n + 1$  números distintos en  $[a, b]$  con  $f(x_k) = y_k$  para cada  $k = 0, \dots, n$ .
- Si se quiere aproximar  $p$ , se construye el polinomio interpolante de grado  $n$  en los nodos  $y_0, \dots, y_n$  para  $f^{-1}$ .
- Puesto que  $y_k = f(x_k)$  y  $0 = f(p)$ , se deduce que  $f^{-1}(y_k) = x_k$  y  $p = f^{-1}(0)$ .
- Se da el nombre de interpolación iterada inversa al uso de la interpolación para aproximar  $f^{-1}(0)$ .

# Ejercicios:

- 1 Aproximar  $\sqrt{3}$  usando el método de Neville y Aitken en la función  $f(x) = 3^x$  para los valores  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 2$ .
- 2 Realizar el algoritmo del método de Aitken.
- 3 Use la interpolación iterada inversa para obtener una aproximación a la solución de  $x - e^{-x} = 0$ , por medio de los datos:

$x$	0.3	0.4	0.5	0.6
$e^{-x}$	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

- 4 Construya un algoritmo que sirva para obtener la interpolación iterada inversa.

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- En ocasiones es útil considerar varios polinomios aproximantes  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  y, después, elegir el más adecuado a las necesidades.



# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- En ocasiones es útil considerar varios polinomios aproximantes  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  y, después, elegir el más adecuado a las necesidades.
- Uno de los inconvenientes de los polinomios interpoladores de Lagrange es que no hay relación entre la construcción de  $P_{n-1}(x)$  y la de  $P_n(x)$ ; cada polinomio debe construirse individualmente y se requieren muchas operaciones para calcular polinomios de grado elevado.

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  números distintos y  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  para alguna función  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  que contiene a los nodos.

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  números distintos y  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  para alguna función  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  que contiene a los nodos.
- El polinomio  $P(x)$  de grado menor o igual a  $n$  que interpola a  $f$  en los datos dados, puede expresarse en la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

es decir:

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

para ciertas constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n$

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Algunas propiedades de esta forma de representar el polinomio de interpolación permite la construcción de un polinomio de interpolación de grado  $k$  a partir del de grado menor  $k - 1$ .

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Algunas propiedades de esta forma de representar el polinomio de interpolación permite la construcción de un polinomio de interpolación de grado  $k$  a partir del de grado menor  $k - 1$ .
- Sea  $q_k(x)$  la suma de los primeros  $k + 1$  términos de  $p_n(x)$ , es decir
$$q_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Algunas propiedades de esta forma de representar el polinomio de interpolación permite la construcción de un polinomio de interpolación de grado  $k$  a partir del de grado menor  $k - 1$ .
- Sea  $q_k(x)$  la suma de los primeros  $k + 1$  términos de  $p_n(x)$ , es decir
$$q_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$
- Entonces los términos restantes de  $p_n(x)$  tienen como factor común el producto

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)$$

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Así que

$$p_n(x) = q_k(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)r(x)$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $\leq n - (k + 1)$ .

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Así que

$$p_n(x) = q_k(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)r(x)$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $\leq n - (k + 1)$ .

- Además  $q_k(x)$  interpola  $f(x)$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , pues

$$\begin{aligned} q_k(x_j) &= p_n(x_j) - (x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_k)r(x_j) \\ &= p_n(x_j) \quad \text{si } 0 \leq j \leq k \\ &= f(x_j) \end{aligned}$$



# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Entonces  $q_k(x)$  es el único polinomio de interpolación  $p_k(x)$  para  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , y se puede escribir

$$p_{k+1}(x) = q_k(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)r(x)$$

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Entonces  $q_k(x)$  es el único polinomio de interpolación  $p_k(x)$  para  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , y se puede escribir

$$p_{k+1}(x) = q_k(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)r(x)$$

- y con  $k = n - 1$ , se obtiene

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

# Fórmula de Newton del Polinomio de Interpolación

- Entonces  $q_k(x)$  es el único polinomio de interpolación  $p_k(x)$  para  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , y se puede escribir

$$p_{k+1}(x) = q_k(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)r(x)$$

- y con  $k = n - 1$ , se obtiene

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

- Entonces, el polinomio de interpolación  $p_n(x)$  puede construirse paso a paso construyendo la sucesión de polinomios de interpolación  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ , donde  $p_k(x)$  se construye de  $p_{k-1}(x)$  agregando el siguiente término en la forma de Newton, el cual es

$$a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

# Polinomio Interpolador de Newton

Los polinomios interpoladores de Newton se calculan mediante un esquema recursivo

$$\begin{aligned}P_0(x) &= a_0 \\P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) \\P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\&\vdots \\&\vdots \\P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\&\quad + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots \\&\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

- Las  $n + 1$  ecuaciones que surgen al evaluar  $x_i$  se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots (x_n - x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

- Las  $n + 1$  ecuaciones que surgen al evaluar  $x_i$  se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots (x_n - x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- La matriz del sistema es triangular inferior.

# Polinomio Interpolador de Newton

- Las  $n + 1$  ecuaciones que surgen al evaluar  $x_i$  se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots (x_n - x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- La matriz del sistema es triangular inferior.
- $O(n^2)$  operaciones necesarias para resolver el sistema.

# Polinomio Interpolador de Newton

Cálculo de los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

- Se puede observar que cada coeficiente  $a_k$  es el coeficiente principal del polinomio  $p_k(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .



# Polinomio Interpolador de Newton

Cálculo de los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

- Se puede observar que cada coeficiente  $a_k$  es el coeficiente principal del polinomio  $p_k(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .
- Además este coeficiente depende de los puntos y valores de  $f(x)$  en estos puntos

$$f(x_0) = p_0(x_0) = a_0$$

# Polinomio Interpolador de Newton

Cálculo de los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

- Se puede observar que cada coeficiente  $a_k$  es el coeficiente principal del polinomio  $p_k(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .
- Además este coeficiente depende de los puntos y valores de  $f(x)$  en estos puntos

$$f(x_0) = p_0(x_0) = a_0$$

$$f(x_1) = p_1(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$

# Polinomio Interpolador de Newton

Cálculo de los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

- Se puede observar que cada coeficiente  $a_k$  es el coeficiente principal del polinomio  $p_k(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .
- Además este coeficiente depende de los puntos y valores de  $f(x)$  en estos puntos

$$f(x_0) = p_0(x_0) = a_0$$

$$f(x_1) = p_1(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$

$$f(x_2) = p_2(x_2) = f(x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$\begin{aligned} f(x_2) &= p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$



# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$f(x_2) = p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow a_2 = \left( \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) \frac{1}{x_2 - x_0}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$\begin{aligned}f(x_2) &= p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \left( \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) \frac{1}{x_2 - x_0} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}\end{aligned}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

$$\begin{aligned}f(x_2) &= p_2(x_2) = p_1(x_2) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{x_1 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{f(x_2)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ \Rightarrow a_2 &= \left( \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \right) \frac{1}{x_2 - x_0} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}\end{aligned}$$

El numerador es una diferencia de cocientes de diferencias, a cada uno de estos cocientes, se les llama diferencias divididas

# Polinomio Interpolador de Newton

## Definición

Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  números distintos y  $f$  alguna función definida sobre ella, se define:

# Polinomio Interpolador de Newton

## Definición

Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  números distintos y  $f$  alguna función definida sobre ella, se define:

❶ **La diferencia dividida cero de  $f$  con respecto a  $x_k$  es:**

$$\mathcal{F}[x_k] = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

por lo tanto en el polinomio interpolante se tiene que  $a_0 = \mathcal{F}[x_0]$

# Polinomio Interpolador de Newton

## Definición

Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$  con  $x_0, x_1, \dots, x_n$  números distintos y  $f$  alguna función definida sobre ella, se define:

- ❶ **La diferencia dividida cero de  $f$  con respecto a  $x_k$  es:**

$$\mathcal{F}[x_k] = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

por lo tanto en el polinomio interpolante se tiene que  $a_0 = \mathcal{F}[x_0]$

- ❷ **La diferencia dividida uno de  $f$  respecto a  $x_k$  y  $x_{k+1}$  es:**

$$\mathcal{F}[x_k, x_{k+1}] = \frac{\mathcal{F}[x_{k+1}] - \mathcal{F}[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

las diferencias divididas uno dependen de las diferencias divididas cero, dado que existen  $n + 1$  diferencias divididas cero, solo hay  $n$  diferencias divididas uno. Se tiene que  $a_1 = \mathcal{F}[x_0, x_1] = \frac{\mathcal{F}[x_1] - \mathcal{F}[x_0]}{x_1 - x_0}$

# Polinomio Interpolador de Newton

## Definición

❸ La diferencia dividida dos de  $f$  con respecto a  $x_k$ ,  $x_{k+1}$  y  $x_{k+2}$  es:

$$\mathcal{F}[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{\mathcal{F}[x_{k+1}, x_{k+2}] - \mathcal{F}[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-2$$

las diferencias divididas dos dependen de las diferencias divididas uno, dado que existen  $n$  diferencias divididas uno, solo hay  $n-1$  diferencias divididas dos. Obsérvese que en el polinomio

$$a_2 = \mathcal{F}[x_0, x_1, x_2] = \frac{\mathcal{F}[x_1, x_2] - \mathcal{F}[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$



# Polinomio Interpolador de Newton

## Definición

- En general conocidas las  $n - (i - 1) + 1 = n - i + 2$  diferencias divididas  $i - 1$  de  $f$  con respecto a  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}$ ,  $\mathcal{F}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - (i - 1)$ , se definen las  $n - i + 1$  **diferencias divididas  $i$  de  $f$  con respecto a  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}$** , así

$$\mathcal{F}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] = \frac{\mathcal{F}[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i}] - \mathcal{F}[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, n - i$$

# Polinomio Interpolador de Newton

Con esta notación de diferencia dividida se tiene que  $a_i = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_i]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y así el polinomio interpolante toma la siguiente forma:

$$P_n(x) = \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

# Polinomio Interpolador de Newton

¿Cómo organizar el cálculo de la tabla de diferencias divididas?

# Polinomio Interpolador de Newton

¿Cómo organizar el cálculo de la tabla de diferencias divididas?

El cálculo de las diferencias divididas para cuatro puntos se ordenaría como sigue:

$$\begin{array}{llll} x_0 \rightarrow y_0 = \mathcal{F}[x_0] & & & \\ x_1 \rightarrow y_1 = \mathcal{F}[x_1] & \mathcal{F}[x_0, x_1] & & \\ x_2 \rightarrow y_2 = \mathcal{F}[x_2] & \mathcal{F}[x_1, x_2] & \mathcal{F}[x_0, x_1, x_2] & \\ x_3 \rightarrow y_3 = \mathcal{F}[x_3] & \mathcal{F}[x_2, x_3] & \mathcal{F}[x_1, x_2, x_3] & \mathcal{F}[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{array}$$

# Polinomio Interpolador de Newton

- Esta forma del polinomio interpolante de Newton se conoce como Fórmula de Diferencias Divididas Progresivas Interpolante de Newton, y se usa en los cálculos numéricos cuando se interpola en un punto  $x$  que está más cerca de  $x_0$  que de  $x_n$ .

# Polinomio Interpolador de Newton

- Esta forma del polinomio interpolante de Newton se conoce como Fórmula de Diferencias Divididas Progresivas Interpolante de Newton, y se usa en los cálculos numéricos cuando se interpola en un punto  $x$  que está más cerca de  $x_0$  que de  $x_n$ .
- Si el punto  $x$  en el cual vamos a interpolar está mas cerca de  $x_n$  que de  $x_0$  se usa la Fórmula de Diferencias Divididas Regresivas Interpolante de Newton:

$$p_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

## Ejemplo:

Obtener el polinomio interpolador para la función  $f(x) = \sin(x)$  sobre el soporte formado por los puntos:

$$x = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

## Ejemplo:

Obtener el polinomio interpolador para la función  $f(x) = \sin(x)$  sobre el soporte formado por los puntos:

$$x = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Tabla de Diferencias Divididas

0	→	0		
$\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	
$\frac{\pi}{2}$	→	1	$\frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi}$	$\frac{8(1 - \sqrt{2})}{\pi^2}$

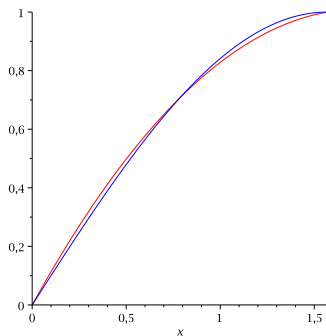


## Ejemplo:

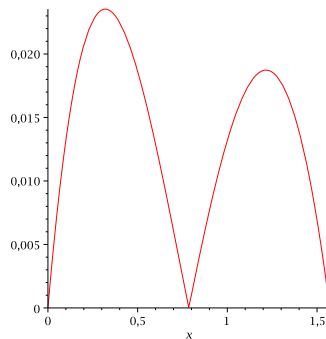
Formando el polinomio interpolante de Newton

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \mathcal{F}[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(x - 0) + \frac{8(1 - \sqrt{2})}{\pi^2}(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

# Ejemplo:



$\sin(x)$  vs  $P_2(x)$



$|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$

## Ejemplo:

Obtener el polinomio interpolador para la función  $f(x) = \sin(x)$  sobre el soporte formado por los puntos:

$$x = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

## Ejemplo:

Obtener el polinomio interpolador para la función  $f(x) = \sin(x)$  sobre el soporte formado por los puntos:

$$x = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Tabla del ejercicio anterior

0	→	0		
$\frac{\pi}{4}$	→	0.707	0.90	
$\frac{\pi}{2}$	→	1	0.373	-0.336

## Ejemplo:

Obtener el polinomio interpolador para la función  $f(x) = \sin(x)$  sobre el soporte formado por los puntos:

$$x = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Tabla del ejercicio anterior

0	→	0		
$\frac{\pi}{4}$	→	0.707	0.90	
$\frac{\pi}{2}$	→	1	0.373	-0.336

Se agregan los nuevos nodos al final de la tabla y queda:

0	→	0				
$\frac{\pi}{4}$	→	0.707	0.90			
$\frac{\pi}{2}$	→	1	0.373	-0.336		
$\frac{\pi}{6}$	→	0.5	0.477	-0.399	-0.121	
$\frac{\pi}{3}$	→	0.867	0.699	-0.423	-0.091	0.0288

## Ejemplo:

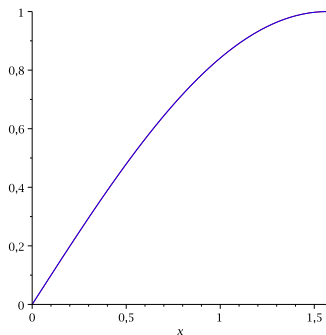
Formando el polinomio interpolante de Newton

$$P_4(x) = P_2(x) - 0.121(x - 0)(x - \pi/4)(x - \pi/2) + 0.0228(x - 0)(x - \pi/4)(x - \pi/2)(x - \pi/6)$$

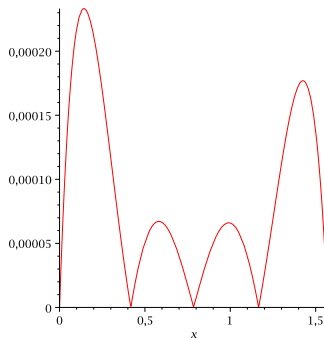
# Ejemplo:

Formando el polinomio interpolante de Newton

$$P_4(x) = P_2(x) - 0.121(x-0)(x-\pi/4)(x-\pi/2) + 0.0228(x-0)(x-\pi/4)(x-\pi/2)(x-\pi/6)$$



$\sin(x)$  vs  $P_4(x)$



$|E(x)| = |f(x) - P_4(x)|$

# Cota de error para el polinomio de Newton

## Teorema:

Sea  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  y  $p$  el polinomio de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  del intervalo  $[a, b]$ . Entonces

$$f(x) - p(x) = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$



# Cota de error para el polinomio de Newton

## Teorema:

Sea  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  y  $p$  el polinomio de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  del intervalo  $[a, b]$ . Entonces

$$f(x) - p(x) = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

**Demostración:** Por el Teorema del Residuo, existe  $\xi = \xi(x)$  tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

# Cota de error para el polinomio de Newton

## Teorema:

Sea  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  y  $p$  el polinomio de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  del intervalo  $[a, b]$ . Entonces

$$f(x) - p(x) = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

**Demostración:** Por el Teorema del Residuo, existe  $\xi = \xi(x)$  tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Por otra parte, el polinomio de interpolación de Newton está dado por

$$p(x) = \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

# Cota de error para el polinomio de Newton

El polinomio de Newton que interpola a  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ :

$$p(x) = \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

# Cota de error para el polinomio de Newton

El polinomio de Newton que interpola a  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ :

$$p(x) = \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

y por tanto

$$f(x) - p(x) = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

# Cota de error para el polinomio de Newton

El polinomio de Newton que interpola a  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ :

$$p(x) = \mathcal{F}[x_0] + \mathcal{F}[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

y por tanto

$$f(x) - p(x) = \mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

De esta manera se puede concluir que:

$$\mathcal{F}[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

# Observaciones

- Si  $p_n$  interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

con  $\xi \in [x_0, x_n]$ .

# Observaciones

- Si  $p_n$  interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

con  $\xi \in [x_0, x_n]$ .

- $\xi$  es desconocido y la fórmula del error sólo es útil si la derivada está acotada.

# Observaciones

- Si  $p_n$  interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

con  $\xi \in [x_0, x_n]$ .

- $\xi$  es desconocido y la fórmula del error sólo es útil si la derivada está acotada.
- Si  $|f^{(n+1)}(x)| < M$  y  $h = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \dots, n\}$

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$



# Observaciones

- Si  $p_n$  interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

con  $\xi \in [x_0, x_n]$ .

- $\xi$  es desconocido y la fórmula del error sólo es útil si la derivada está acotada.
- Si  $|f^{(n+1)}(x)| < M$  y  $h = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \dots, n\}$

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

- El error disminuye a medida que  $n$  crece y  $h$  disminuye, sólo si  $|f^{(n+1)}(x)|$  está acotada.

# Observaciones

- Si  $p_n$  interpola a  $f$  en los  $n + 1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

con  $\xi \in [x_0, x_n]$ .

- $\xi$  es desconocido y la fórmula del error sólo es útil si la derivada está acotada.
- Si  $|f^{(n+1)}(x)| < M$  y  $h = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \dots, n\}$

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

- El error disminuye a medida que  $n$  crece y  $h$  disminuye, sólo si  $|f^{(n+1)}(x)|$  está acotada.
- Aumentar el grado del polinomio no garantiza una mejor aproximación (pueden aparecer oscilaciones entre los puntos de interpolación)

# Observaciones

- Por fuera del intervalo que contiene a los puntos de interpolación,

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

puede crecer “rápido” (extrapolación)

# Observaciones

- Por fuera del intervalo que contiene a los puntos de interpolación,

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

puede crecer “rápido” (extrapolación)

- En el interior del intervalo aumentar los puntos de interpolación no implica mejorar la aproximación.

# Observaciones

- Por fuera del intervalo que contiene a los puntos de interpolación,

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

puede crecer “rápido” (extrapolación)

- En el interior del intervalo aumentar los puntos de interpolación no implica mejorar la aproximación.
- Al aumentar el grado del polinomio, aumentan las oscilaciones.

# Observaciones

- Por fuera del intervalo que contiene a los puntos de interpolación,

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

puede crecer “rápido” (extrapolación)

- En el interior del intervalo aumentar los puntos de interpolación no implica mejorar la aproximación.
- Al aumentar el grado del polinomio, aumentan las oscilaciones.
- Hasta ahora las aproximaciones de los polinomios de interpolación no dependen de la distribución de los puntos  $x_0, \dots, x_n$  de interpolación.

# Observaciones

- Por fuera del intervalo que contiene a los puntos de interpolación,

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

puede crecer “rápido” (extrapolación)

- En el interior del intervalo aumentar los puntos de interpolación no implica mejorar la aproximación.
- Al aumentar el grado del polinomio, aumentan las oscilaciones.
- Hasta ahora las aproximaciones de los polinomios de interpolación no dependen de la distribución de los puntos  $x_0, \dots, x_n$  de interpolación.
- Puntos de interpolación igualmente espaciados a menudo conducen a resultados erróneos en los extremos.

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- Sea  $f$  una función definida en algunos puntos  $x_0, \dots, x_n$ . Denotando por  $y_0, \dots, y_n$  sus valores correspondientes. Recordamos la fórmula de Newton para el polinomio interpolante que tiene valores  $y_i = f(x_i)$  en los puntos  $x_i$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \mathcal{F}[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$



# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- Sea  $f$  una función definida en algunos puntos  $x_0, \dots, x_n$ . Denotando por  $y_0, \dots, y_n$  sus valores correspondientes. Recordamos la fórmula de Newton para el polinomio interpolante que tiene valores  $y_i = f(x_i)$  en los puntos  $x_i$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \mathcal{F}[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

- Las diferencias divididas  $\mathcal{F}[x_0, \dots, x_k]$  se definen de manera recursiva:

$$\mathcal{F}[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \mathcal{F}[x_i, \dots, x_j] = \frac{\mathcal{F}[x_{i+1}, \dots, x_j] - \mathcal{F}[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- Considerando el caso particular cuando los puntos  $x_0, \dots, x_n$  son equidistantes:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- Considerando el caso particular cuando los puntos  $x_0, \dots, x_n$  son equidistantes:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- Planteando el cambio de variables

$$x = x_0 + th \quad \text{con } t \in (0, n)$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- Considerando el caso particular cuando los puntos  $x_0, \dots, x_n$  son equidistantes:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- Planteando el cambio de variables

$$x = x_0 + th \quad \text{con } t \in (0, n)$$

- Obtenemos entonces que

$$x - x_1 = (t - 1)h; \quad x - x_2 = (t - 2)h; \quad \dots \quad ; x - x_{n-1} = (t - n + 1)h$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

## Definición: Diferencia Finita Progresiva

Se define como diferencia finita progresiva de una función  $f(x)$  en un punto  $x_0$ , y se representa  $\Delta f(x_0)$  a la diferencia:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

## Definición: Diferencia Finita Progresiva

Se define como diferencia finita progresiva de una función  $f(x)$  en un punto  $x_0$ , y se representa  $\Delta f(x_0)$  a la diferencia:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

Del mismo modo se puede definir la de segundo orden:

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

En general:

$$\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_1) - \Delta^{k-1} f(x_0)$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- La relación entre las diferencias finitas progresivas y las diferencias divididas viene dada por:

$$\begin{aligned}f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \Rightarrow \Delta f(x_0) = hf[x_0, x_1] \\f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{2h^2} \\&\Rightarrow \Delta^2 f(x_0) = 2h^2 f[x_0, x_1, x_2]\end{aligned}$$

En general

$$\Delta^n f(x_0) = n!h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- A partir de la fórmula de Newton con diferencias divididas y de la relación entre estas últimas y las diferencias finitas progresivas se tiene:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$



# Interpolación de Newton con puntos igualmente espaciados

- A partir de la fórmula de Newton con diferencias divididas y de la relación entre estas últimas y las diferencias finitas progresivas se tiene:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

- A partir del cambio de variable  $x = x_0 + th$  se tiene que

$$\begin{aligned} P_n(x_0 + th) &= Q_n(t) \\ &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}th + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}t(t-1)h^2 + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}t(t-1) \cdots (t-n+1)h^n \\ &= f(x_0) + \Delta f(x_0)t + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}t(t-1) \cdots (t-n+1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!}t(t-1) \cdots (t-k+1) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(x_0) \binom{t}{k} \end{aligned}$$

## Ejemplo:

- Construir el polinomio  $P$  de grado  $\leq 3$  que en los puntos  $-1/2; 0; 1/2; 1$  tome los valores  $-4; 3; 13/2; 8$ .

## Ejemplo:

- Construir el polinomio  $P$  de grado  $\leq 3$  que en los puntos  $-1/2; 0; 1/2; 1$  tome los valores  $-4; 3; 13/2; 8$ .
- Construyendo la tabla de diferencias divididas se obtiene:

$x$	$\Delta^0 f(x) = f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
$-1/2$	$-4$			
$0$	$3$	$7$		
$1/2$	$13/2$	$7/2$	$-7/2$	
$1$	$8$	$3/2$	$-2$	$3/2$

## Ejemplo:

- Construir el polinomio  $P$  de grado  $\leq 3$  que en los puntos  $-1/2; 0; 1/2; 1$  tome los valores  $-4; 3; 13/2; 8$ .
- Construyendo la tabla de diferencias divididas se obtiene:

$x$	$\Delta^0 f(x) = f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
$-1/2$	$-4$			
$0$	$3$	$7$		
$1/2$	$13/2$	$7/2$	$-7/2$	
$1$	$8$	$3/2$	$-2$	$3/2$

- El polinomio  $Q_n(t)$  viene dado por:

$$\begin{aligned} Q_n(t) = P\left(\frac{-1}{2} + \frac{t}{2}\right) &= \sum_{k=0}^n \Delta^k f(x_0) \binom{t}{k} \\ &= -4 + 7t - \frac{7}{2} \frac{t(t-1)}{2} + \frac{3}{2} \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \\ &= -4 + \frac{37t}{4} - \frac{5t^2}{2} + \frac{t^3}{4} \end{aligned}$$

## Ejemplo:

- El polinomio  $P(x)$  viene dado por:

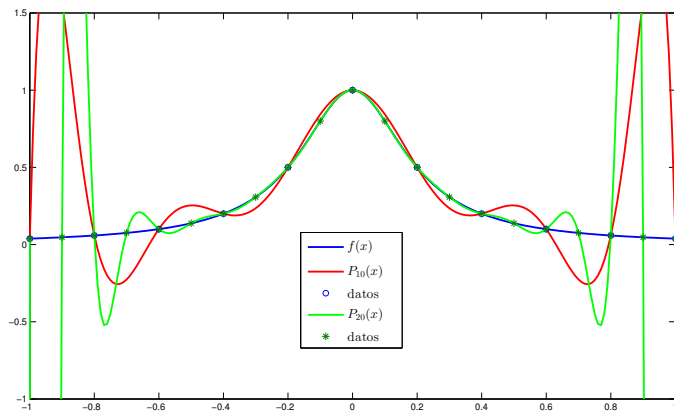
$$P(x) = Q(2x + 1) = 3 + 10x - 7x^2 + 2x^3$$

# Fenómeno de Runge

Polinomios interpolantes para la función de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

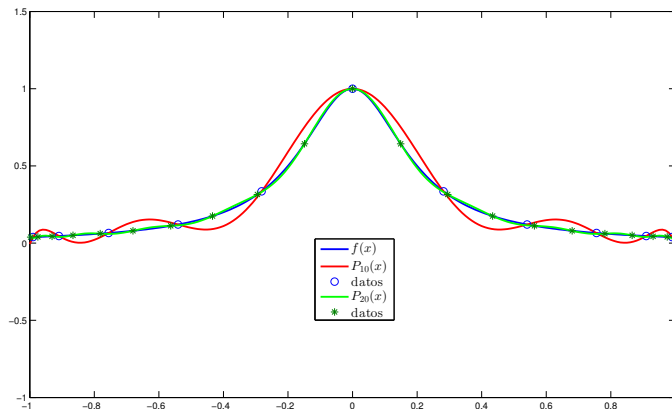
sobre puntos igualmente espaciados no converge



# Fenómeno de Runge

Los puntos de interpolación se pueden distribuir no uniformemente con el fin de minimizar el fenómeno de Runge

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n-1$$



# Interpolación de Chebyshev

Dada una función  $f(x)$  definida en un intervalo  $[a, b]$ , la mejor aproximación polinómica de grado  $n$  será aquella que minimice

$$E[q(x)] \equiv \max_{x \in [a, b]} |f(x) - q(x)|$$

Si un determinado polinomio  $Q_n(x)$  hace que  $E[Q_n(x)]$  sea el de valor mínimo entre todos los polinomios de grado  $n$  entonces se dice  $Q_n(x)$  es la aproximación minimax de grado  $n$  de la función  $f(x)$  en  $[a, b]$ .



# Interpolación de Chebyshev

## Polinomios de Chebyshev: definición

El polinomio de Chebyshev de orden  $n$ -ésimo se define como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2 \dots$$

# Interpolación de Chebyshev

## Polinomios de Chebyshev: definición

El polinomio de Chebyshev de orden  $n$ -ésimo se define como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2 \dots$$

La definición anterior establece una relación de recurrencia:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1 \text{ y } T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$T_n(x) = \cos(\underbrace{n \arccos(x)}_{\theta}) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

de lo cual

# Interpolación de Chebyshev

## Polinomios de Chebyshev: definición

El polinomio de Chebyshev de orden  $n$ -ésimo se define como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2 \dots$$

La definición anterior establece una relación de recurrencia:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1 \text{ y } T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$T_n(x) = \cos(\underbrace{n \arccos(x)}_{\theta}) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

de lo cual

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

y al sumar las dos últimas con  $x = \cos(\theta)$ ,

# Interpolación de Chebyshev

## Polinomios de Chebyshev: definición

El polinomio de Chebyshev de orden  $n$ -ésimo se define como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2 \dots$$

La definición anterior establece una relación de recurrencia:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1 \text{ y } T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$T_n(x) = \cos(\underbrace{n \arccos(x)}_{\theta}) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

de lo cual

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

y al sumar las dos últimas con  $x = \cos(\theta)$ ,

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

$$T_{n+1}(x) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ➊ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ➊ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ❶ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ➊ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$



# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ❶ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

- ❷ El coeficiente del término  $x^n$  en  $T_n(x)$  es  $2^{n-1}$  y se cumple que  $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ .

# Polinomios de Chebyshev: propiedades

- ➊ Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo los valores iniciales de la recurrencia

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

- ➋ El coeficiente del término  $x^n$  en  $T_n(x)$  es  $2^{n-1}$  y se cumple que  $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ .
- ➌ Los  $n$  ceros de  $T_n(x)$  están en el intervalo  $[-1, 1]$  y están dados por

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

$T_n(x)$  tiene  $n+1$  extremos en el intervalo  $[-1, 1]$  que vienen dados por  $x'_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ ,  $k = 0, \dots, n$ , donde los polinomios valen:  $T(x'_k) = (-1)^k$

# Ejemplo:

# Interpolación a trozos

- $S(x)$  En un polinomio interpolador de grado  $n$  es posible tener  $n - 1$  extremos relativos, lo cual trae como consecuencia que tenga muchas oscilaciones o fluctuaciones al pasar por los puntos dados.

# Interpolación a trozos

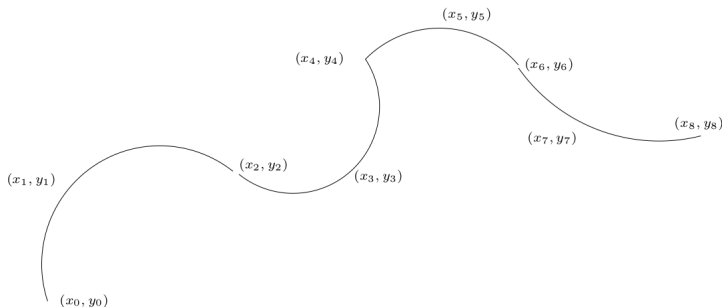
- $S(x)$  En un polinomio interpolador de grado  $n$  es posible tener  $n - 1$  extremos relativos, lo cual trae como consecuencia que tenga muchas oscilaciones o fluctuaciones al pasar por los puntos dados.
- Una alternativa para evitar dichas fluctuaciones es generar polinomios  $S_k(x)$  que solo interpolen dos nodos consecutivos y luego unirlos en sus extremos.

# Interpolación a trozos

- $S(x)$  En un polinomio interpolador de grado  $n$  es posible tener  $n - 1$  extremos relativos, lo cual trae como consecuencia que tenga muchas oscilaciones o fluctuaciones al pasar por los puntos dados.
- Una alternativa para evitar dichas fluctuaciones es generar polinomios  $S_k(x)$  que solo interpolen dos nodos consecutivos y luego unirlos en sus extremos.
- El conjunto  $\{S_k(x)\}$  forman una curva polinomial a trozos o spline que se denota  $S(x)$ .

# Interpolación a trozos

- $S(x)$  En un polinomio interpolador de grado  $n$  es posible tener  $n - 1$  extremos relativos, lo cual trae como consecuencia que tenga muchas oscilaciones o fluctuaciones al pasar por los puntos dados.
- Una alternativa para evitar dichas fluctuaciones es generar polinomios  $S_k(x)$  que solo interpolen dos nodos consecutivos y luego unirlos en sus extremos.
- El conjunto  $\{S_k(x)\}$  forman una curva polinomial a trozos o spline que se denota  $S(x)$ .



# Interpolación Lineal a trozos

- Sean  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (x_n, y_n)$ , los puntos por los cuales debe pasar el polinomio interpolador



# Interpolación Lineal a trozos

- Sean  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (x_n, y_n)$ , los puntos por los cuales debe pasar el polinomio interpolador
- El polinomio más simple que se puede construir es el polinomio de grado uno, el cual produce una línea poligonal.

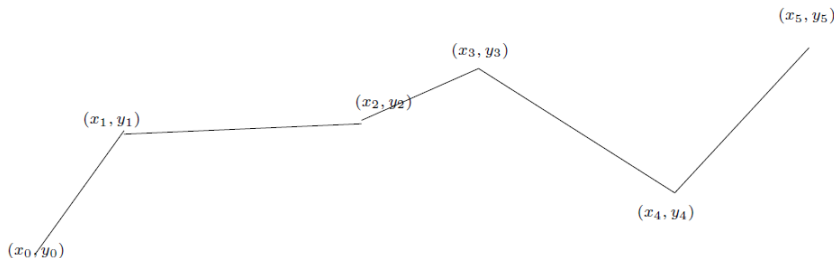


Figure: Interpolación Lineal a Trozos.

# Interpolación Lineal a trozos

- Por los polinomios interpoladores de Lagrange se puede determinar cada uno de los segmentos que forman esta línea poligonal.

# Interpolación Lineal a trozos

- Por los polinomios interpoladores de Lagrange se puede determinar cada uno de los segmentos que forman esta línea poligonal.
- Si  $S_k(x)$  es el  $k$ -ésimo segmento que une los puntos  $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$  se tiene entonces que

$$S_k(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

o también

$$S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k), \quad d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

# Interpolación Lineal a trozos

- Que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados, luego entonces,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = y_0 + d_0(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = y_1 + d_1(x - x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_k(x) = y_k + d_k(x - x_k), & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = y_{n-1} + d_{n-1}(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

# Interpolación Lineal Segmentaria

## Evaluación

- Localizar el intervalo tal que  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ . (Algoritmo de localización).

# Interpolación Lineal Segmentaria

## Evaluación

- Localizar el intervalo tal que  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ . (Algoritmo de localización).
- $S_i(x) = y_i + (x - x_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ ,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$

# Interpolación Lineal Segmentaria

## Evaluación

- Localizar el intervalo tal que  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ . (Algoritmo de localización).
- $S_i(x) = y_i + (x - x_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ ,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$

## Error

Si  $y_i = f(x_i)$  con  $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ :

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{x \in [x_0, x_n]} |f''(x)| = O(h^2)$$

donde  $h$  es la distancia máxima entre dos nodos adyacentes.

# Interpolación Lineal Segmentaria

## Evaluación

- Localizar el intervalo tal que  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ . (Algoritmo de localización).
- $S_i(x) = y_i + (x - x_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ ,  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$

## Error

Si  $y_i = f(x_i)$  con  $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ :

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{x \in [x_0, x_n]} |f''(x)| = O(h^2)$$

donde  $h$  es la distancia máxima entre dos nodos adyacentes.

## Derivada

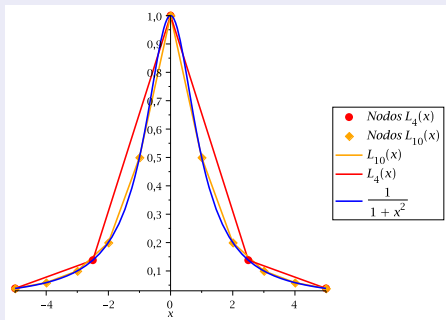
$$S'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x_i < x < x_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

$$|S'(x) - f'(x)| = O(h) \quad x \neq x_i, x_0 < x < x_n$$



# Función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$S(x)$  interpolante lineal segmentaria determinado en  $n + 1$  nodos equidistantes

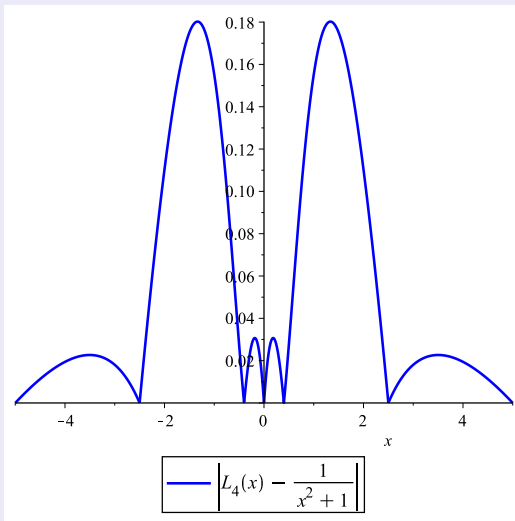


$$x_j = -5 + j \frac{10}{n}, j = 0, 1, \dots, n$$

$n$	$\ f - S\ _\infty$
50	9.33e-03
100	2.46e-03
200	6.22e-04
400	1.50e-04
800	3.75e-05
1600	9.37e-06
3200	2.34e-06
6400	5.86e-07

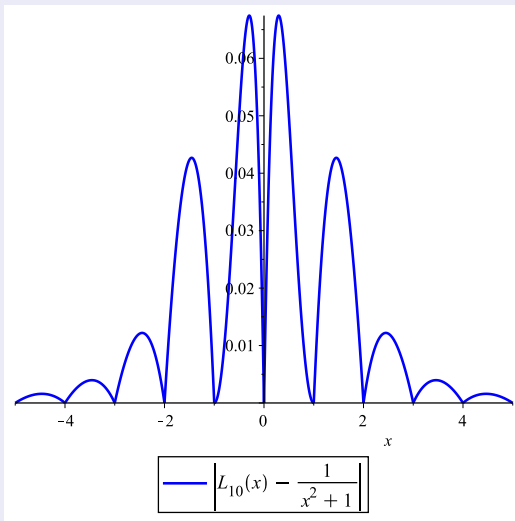
Función de Runge  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Error del interpolante lineal segmentaria 5 nodos.



Función de Runge  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Error del interpolante lineal segmentaria 11 nodos.



# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.

# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.
- Segmentaria: no crece con el número de nodos.

# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.
- Segmentaria: no crece con el número de nodos.

## Convergencia uniforme

- Lagrange: no está garantizado.

# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.
- Segmentaria: no crece con el número de nodos.

## Convergencia uniforme

- Lagrange: no está garantizado.
- Segmentaria: si

# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.
- Segmentaria: no crece con el número de nodos.

## Convergencia uniforme

- Lagrange: no está garantizado.
- Segmentaria: si

## Derivabilidad

- Lagrange: Indefinidamente derivable.



# Interpolación de Lagrange vs segmentaria

## Coste de evaluación en un punto

- Lagrange: se incrementa con el número de datos.
- Segmentaria: no crece con el número de nodos.

## Convergencia uniforme

- Lagrange: no está garantizado.
- Segmentaria: si

## Derivabilidad

- Lagrange: Indefinidamente derivable.
- Segmentaria: Sólo continua.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La interpolación segmentaria cúbica utiliza polinomios de tercer grado para cada subintervalo entre los puntos de datos.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La interpolación segmentaria cúbica utiliza polinomios de tercer grado para cada subintervalo entre los puntos de datos.
- Cada polinomio cúbico se ajusta de manera que no solo pase por los puntos de datos, sino que también asegure que las primeras y segundas derivadas sean continuas en los puntos de unión.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La interpolación segmentaria cúbica utiliza polinomios de tercer grado para cada subintervalo entre los puntos de datos.
- Cada polinomio cúbico se ajusta de manera que no solo pase por los puntos de datos, sino que también asegure que las primeras y segundas derivadas sean continuas en los puntos de unión.
- Esto resulta en una curva suave y continua que no presenta las oscilaciones que pueden ocurrir con polinomios de grado más alto.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La interpolación segmentaria cúbica utiliza polinomios de tercer grado para cada subintervalo entre los puntos de datos.
- Cada polinomio cúbico se ajusta de manera que no solo pase por los puntos de datos, sino que también asegure que las primeras y segundas derivadas sean continuas en los puntos de unión.
- Esto resulta en una curva suave y continua que no presenta las oscilaciones que pueden ocurrir con polinomios de grado más alto.
- La forma general de un polinomio cúbico en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  es:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La interpolación segmentaria cúbica utiliza polinomios de tercer grado para cada subintervalo entre los puntos de datos.
- Cada polinomio cúbico se ajusta de manera que no solo pase por los puntos de datos, sino que también asegure que las primeras y segundas derivadas sean continuas en los puntos de unión.
- Esto resulta en una curva suave y continua que no presenta las oscilaciones que pueden ocurrir con polinomios de grado más alto.
- La forma general de un polinomio cúbico en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  es:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

- Los coeficientes  $a_i, b_i, c_i, d_i$  se determinan imponiendo condiciones de continuidad y suavidad en los puntos de unión.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.



# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:
  - ①  $S_k(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:
  - ①  $S_k(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .
  - ②  $S_k(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:
  - ①  $S_k(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .
  - ②  $S_k(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$
  - ③  $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:
  - ❶  $S_k(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .
  - ❷  $S_k(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$
  - ❸  $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$
  - ❹  $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Es posible construir una función cúbica  $S_k(x)$  en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , tal que la curva a trozos  $y = S(x)$  sea dos veces diferenciable y  $S(x)$  sea continua en  $[x_0, x_n]$
- lo primero implica que  $y = f(x)$  no tiene esquinas y lo segundo que  $S(x)$  tiene un radio de curvatura definido.
- Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Un spline cúbico  $S(x)$  para  $f(x)$  es una función que satisface:
  - ❶  $S_k(x)$  es un polinomio cúbico en cada intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .
  - ❷  $S_k(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$
  - ❸  $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$
  - ❹  $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$
  - ❺  $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

Considerse los polinomios cúbicos

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n - 1$$

las dos primeras derivadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} S'_k(x) &= b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \\ S''_k(x) &= 2c_k + 6d_k(x - x_k) \end{aligned}$$

La condición de que los splines pasen por los puntos de interpolación da

$$S_k(x_k) = a_k = y_k$$

lo que dice que los coeficientes  $a_k$  son los valores de la función interpolada en los nodos.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- El significado de los otros coeficientes es obviamente

$$S'_k(x_k) = b_k, \quad S''_k(x_k) = 2c_k$$



# Interpolación Segmentaria Cúbica

- El significado de los otros coeficientes es obviamente

$$S'_k(x_k) = b_k, \quad S''_k(x_k) = 2c_k$$

- Las ecuaciones de continuidad de las funciones  $S_k(x)$  y sus derivadas primera y segunda en los  $n - 1$  puntos de interpolación intermedios  $x_{k+1}, k = 0, \dots, n - 2$  (las condiciones de continuidad no se aplican a los extremos) dan

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3 \\b_{k+1} &= b_k + 2c_k(x_{k+1} - x_k) + 3d_k(x_{k+1} - x_k)^2 \\2c_{k+1} &= 2c_k + 6d_k(x_{k+1} - x_k)\end{aligned}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Esto constituye un sistema de  $3(n - 1)$  ecuaciones para determinar los  $3n$  coeficientes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Esto constituye un sistema de  $3(n - 1)$  ecuaciones para determinar los  $3n$  coeficientes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ .
- Una condición adicional es que el último spline pase por el último punto:  $S_{n-1}(x_n) = y_n$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Esto constituye un sistema de  $3(n - 1)$  ecuaciones para determinar los  $3n$  coeficientes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ .
- Una condición adicional es que el último spline pase por el último punto:  $S_{n-1}(x_n) = y_n$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Esto constituye un sistema de  $3(n - 1)$  ecuaciones para determinar los  $3n$  coeficientes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ .
- Una condición adicional es que el último spline pase por el último punto:  $S_{n-1}(x_n) = y_n$ .
- Se requieren por tanto dos condiciones adicionales para poder determinar todos los coeficientes.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Esto constituye un sistema de  $3(n - 1)$  ecuaciones para determinar los  $3n$  coeficientes  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ .
- Una condición adicional es que el último spline pase por el último punto:  $S_{n-1}(x_n) = y_n$ .
- Se requieren por tanto dos condiciones adicionales para poder determinar todos los coeficientes.
- Para simplificar la notación, sea  $h_k = x_{k+1} - x_k$ . De esta manera se pueden escribir las ecuaciones de continuidad anteriores como

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} = b_k + c_k h_k + d_k h_k^2$$

$$b_{k+1} - b_k = 2c_k h_k + 3d_k h_k^2$$

$$c_{k+1} - c_k = 3d_k h_k$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- De las posibles formas de resolver el sistema de ecuaciones anterior, la más cómoda es despejar los coeficientes  $d_k$  y  $b_k$  de forma que se obtenga un sistema de ecuaciones para los coeficientes  $c_k$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- De las posibles formas de resolver el sistema de ecuaciones anterior, la más cómoda es despejar los coeficientes  $d_k$  y  $b_k$  de forma que se obtenga un sistema de ecuaciones para los coeficientes  $c_k$ .
- Si se despeja

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$$

en la última ecuación y se introduce en la segunda ecuación, se obtiene

$$b_{k+1} - b_k = 2c_k h_k + 3 \left( \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \right) h_k^2 = (c_k + c_{k+1})h_k$$



# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Se necesita otra expresión independiente de  $b_{k+1} - b_k$  para obtener una ecuación para los  $c_k$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Se necesita otra expresión independiente de  $b_{k+1} - b_k$  para obtener una ecuación para los  $c_k$ .
- En la primera de las ecuaciones se puede despejar  $b_k$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2 = \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - c_k h_k - \left( \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \right) h_k^2 \\ &= \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{2}{3} c_k h_k - \frac{1}{3} c_{k+1} h_k \end{aligned}$$

y cambiando  $k$  por  $k + 1$  se obtiene

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{2}{3} c_{k+1} h_{k+1} - \frac{1}{3} c_{k+2} h_{k+1}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Restando estas dos ecuaciones queda

$$b_{k+1} - b_k =$$

$$\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{1}{3}c_{k+2}h_{k+1} + \frac{1}{3}c_{k+1}h_k - \frac{2}{3}c_{k+1}h_{k+1} + \frac{2}{3}c_k h_k$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Restando estas dos ecuaciones queda

$$b_{k+1} - b_k =$$

$$\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} - \frac{1}{3}c_{k+2}h_{k+1} + \frac{1}{3}c_{k+1}h_k - \frac{2}{3}c_{k+1}h_{k+1} + \frac{2}{3}c_k h_k$$

- Igualando ambas expresiones se obtiene una relación entre los  $c_k$ :

$$\frac{1}{3}c_{k+2}h_{k+1} + \frac{2}{3}c_{k+1}(h_k + h_{k+1}) + \frac{1}{3}c_k h_k = \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Estas ecuaciones forman un sistema tridiagonal. Si se define

$$v_{k+1} = 3 \left( \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} \right)$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Estas ecuaciones forman un sistema tridiagonal. Si se define

$$v_{k+1} = 3 \left( \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{a_{k+1} - a_k}{h_k} \right)$$

- El sistema tridiagonal queda como

$$c_{k+2}h_{k+1} + 2c_{k+1}(h_k + h_{k+1}) + c_k h_k = v_{k+1}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Donde la matriz de coeficientes es:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \end{bmatrix}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Donde la matriz de coeficientes es:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \end{bmatrix}$$

- Y vector de incógnitas y términos independientes

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-3} \\ v_{n-2} \end{bmatrix}$$



# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Este es un sistema de  $n - 2$  ecuaciones para  $n$  incógnitas.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Este es un sistema de  $n - 2$  ecuaciones para  $n$  incógnitas.
- Se necesitan dos ecuaciones adicionales para determinar los  $c_k$ .

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- Este es un sistema de  $n - 2$  ecuaciones para  $n$  incógnitas.
- Se necesitan dos ecuaciones adicionales para determinar los  $c_k$ .
- Estas dos ecuaciones se proporcionan mediante dos condiciones en cierta forma arbitrarias, pero de las que depende la calidad del ajuste.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

## Condiciones Naturales

### Teorema

Sea  $f(x)$  una función definida en  $[x_0, x_n]$ . Entonces existe un único  $S(x)$  spline interpolante cúbico para  $f(x)$  en  $[x_0, x_n]$  tal que  $S''(x_0) = 0$  y  $S''(x_n) = 0$ .

$$c_n = S''(x_n)/2 = 0 \rightarrow c_n = 0$$

$$S''(x_0) = 2c_0 = 0 \rightarrow c_0 = 0$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

## Condiciones Naturales

### Teorema

Sea  $f(x)$  una función definida en  $[x_0, x_n]$ . Entonces existe un único  $S(x)$  spline interpolante cúbico para  $f(x)$  en  $[x_0, x_n]$  tal que  $S''(x_0) = 0$  y  $S''(x_n) = 0$ .

$$c_n = S''(x_n)/2 = 0 \rightarrow c_n = 0$$

$$S''(x_0) = 2c_0 = 0 \rightarrow c_0 = 0$$

- El coeficiente  $c_n$  no pertenece a ninguno de los splines en  $[x_0, x_n]$ , sino a un spline arbitrario que comienza en el extremo  $x_n$ , pero la introducción de  $S_n(x)$  permite extender las ecuaciones para los coeficientes  $c_k$  con una ecuación adicional

$$h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} = v_{n-1}$$

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La condición  $c_0 = 0$  permite eliminar la primera columna de la matriz del sistema.

# Interpolación Segmentaria Cúbica

- La condición  $c_0 = 0$  permite eliminar la primera columna de la matriz del sistema.
- Con estas dos modificaciones, el sistema de ecuaciones queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

que es un sistema de  $n - 1$  ecuaciones con  $n - 1$  incógnitas.

## Ejemplo:

Aproximar la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , empleando interpolación sobre el soporte formado por los puntos:

$$(-4.0, 0.05882352941), (-2.0, 0.2), (0.0, 1.0), (1.0, 0.5), (2.0, 0.2), (4.0, 0.05882352941)$$



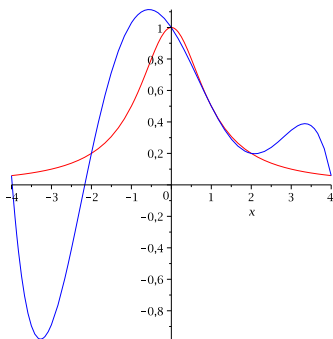
## Ejemplo:

Aproximar la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , empleando interpolación sobre el soporte formado por los puntos:

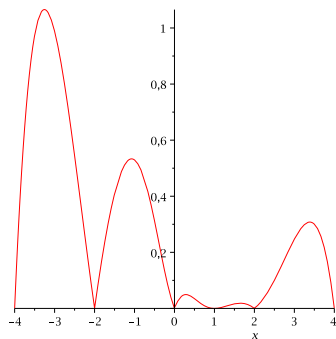
$$(-4.0, 0.05882352941), (-2.0, 0.2), (0.0, 1.0), (1.0, 0.5), (2.0, 0.2), (4.0, 0.05882352941)$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$1.0 - 0.3764x - 0.2470x^2 + 0.1176x^3 + 0.01176x^4 - 0.005882x^5$$



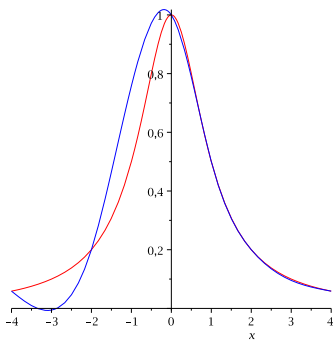
$$\frac{1}{1+x^2} \text{ vs } P_5(x)$$



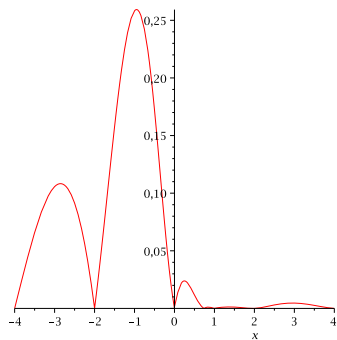
$$|E(x)| = |f(x) - P_5(x)|$$

## Spline cúbico

$$S(x) = \begin{cases} 2.502 + 2.052x + 0.5403x^2 + 0.04503x^3 & x < -2.0 \\ 1.0 - 0.2020x - 0.5866x^2 - 0.1428x^3 & x < 0.0 \\ 1.0 - 0.2020x - 0.5866x^2 + 0.2887x^3 & x < 1.0 \\ 1.359 - 1.279x + 0.4911x^2 - 0.07051x^3 & x < 2.0 \\ 0.8859 - 0.5699x + 0.1361x^2 - 0.01134x^3 & x \geq 2.0 \end{cases}$$



$$\frac{1}{1+x^2} \text{ vs } S(x)$$



$$|E(x)| = |f(x) - S(x)|$$

# Condiciones Sobre la Derivada

## Teorema

Sea  $f(x)$  una función definida en  $[x_0, x_n]$ . Entonces existe un único  $S(x)$  spline cúbico interpolante para  $f(x)$  en  $[x_0, x_n]$ , tal que:

$$S'(x_0) = f'(x_0) \text{ y } S'(x_n) = f'(x_n).$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

# Condiciones Sobre la Derivada

Añadiendo al sistema de ecuaciones que determina los  $c_k$  las dos ecuaciones adicionales, se tiene que los  $c_k$  vienen dados por la solución de un sistema de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

con

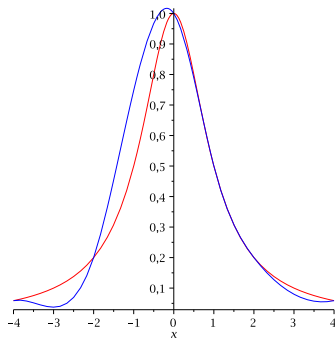
$$\begin{aligned} v_0 &= 3 \left( \frac{a_1 - a_0}{h_0} - f'_0 \right) \\ v_n &= 3 \left( f'_n - \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

## Ejemplo:

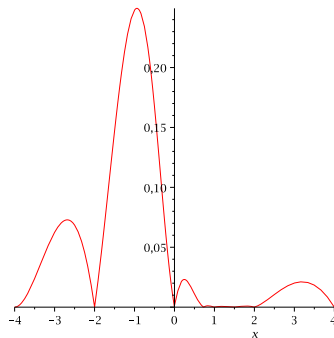
Spline cúbico

$$S(x) = \begin{cases} 2.765 + 2.452x + 0.7255x^2 + 0.07040x^3 & x < -2.0 \\ 1.0 - 0.1964x - 0.5988x^2 - 0.1503x^3 & x < 0.0 \\ 1.0 - 0.1964x - 0.5988x^2 + 0.2952x^3 & x < 1.0 \\ 1.374 - 1.318x + 0.5232x^2 - 0.07875x^3 & x < 2.0 \\ 0.7472 - 0.3784x + 0.05319x^2 - 0.0004064x^3 & x \geq 2.0 \end{cases}$$

# Ejemplo:



$$\frac{1}{1+x^2} \text{ vs } S(x)$$



$$|E(x)| = |f(x) - S(x)|$$



# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Supongase que existe una relación funcional  $y = f(x)$  entre dos cantidades  $x$  e  $y$ , con  $f$  desconocida y se conocen valores  $y_k$  que aproximan a  $f(x_k)$ , es decir:

$$f(x_k) = y_k + E_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

con  $E_k$  desconocido.

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Supongase que existe una relación funcional  $y = f(x)$  entre dos cantidades  $x$  e  $y$ , con  $f$  desconocida y se conocen valores  $y_k$  que aproximan a  $f(x_k)$ , es decir:

$$f(x_k) = y_k + E_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

con  $E_k$  desconocido.

- Se trata de recuperar la función  $f$  a partir de los datos aproximados  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ .

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Supongase que existe una relación funcional  $y = f(x)$  entre dos cantidades  $x$  e  $y$ , con  $f$  desconocida y se conocen valores  $y_k$  que aproximan a  $f(x_k)$ , es decir:

$$f(x_k) = y_k + E_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

con  $E_k$  desconocido.

- Se trata de recuperar la función  $f$  a partir de los datos aproximados  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ .
- Este problema se conoce como un problema de “ajuste de datos” o “Ajuste de curvas” (caso discreto).

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Supongase que existe una relación funcional  $y = f(x)$  entre dos cantidades  $x$  e  $y$ , con  $f$  desconocida y se conocen valores  $y_k$  que aproximan a  $f(x_k)$ , es decir:

$$f(x_k) = y_k + E_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

con  $E_k$  desconocido.

- Se trata de recuperar la función  $f$  a partir de los datos aproximados  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ .
- Este problema se conoce como un problema de “ajuste de datos” o “Ajuste de curvas” (caso discreto).
- Inicialmente se estudiará el caso en el que  $f$  es una función polinómica.

$$\left. \begin{aligned} \|\cdot\|_\infty \leftarrow E &= \max_{i=0,\dots,n} |y_i - p(x_i)| \\ \|\cdot\|_1 \leftarrow E &= \sum_{i=0}^n |y_i - p(x_i)| \\ \|\cdot\|_2 \leftarrow E &= \sum_{i=0}^n |y_i - p(x_i)|^2 \end{aligned} \right\} \text{ Hallar el mínimo } E$$

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Se buscan aproximaciones de funciones de modo tal que:

$$\sum_{i=0}^M (f(x_i) - p_n(x_i))^2 \text{ sea mínimo.}$$

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Se buscan aproximaciones de funciones de modo tal que:

$$\sum_{i=0}^M (f(x_i) - p_n(x_i))^2 \text{ sea mínimo.}$$

- En este tipo de aproximación no necesariamente la función aproximante pasa por los nodos.

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- Se buscan aproximaciones de funciones de modo tal que:

$$\sum_{i=0}^M (f(x_i) - p_n(x_i))^2 \text{ sea mínimo.}$$

- En este tipo de aproximación no necesariamente la función aproximante pasa por los nodos.
- En principio  $p(x)$  será una función lineal, es decir, se desea hallar la recta que mejor se ajuste a un conjunto de datos dados.

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- La ecuación punto-pendiente de una recta viene dada por la siguiente ecuación:  $f(x_i) = ax_i + b$ , de modo tal que  $E$  se convierte en una función de dos variables  $E(a, b)$ .

$$E(a, b) = E = \sum_{i=0}^M (y_i - b - ax_i)^2$$



# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- La ecuación punto-pendiente de una recta viene dada por la siguiente ecuación:  $f(x_i) = ax_i + b$ , de modo tal que  $E$  se convierte en una función de dos variables  $E(a, b)$ .

$$E(a, b) = E = \sum_{i=0}^M (y_i - b - ax_i)^2$$

- Esta función es continuamente diferenciable, o sea,  $E$  es diferenciable y las derivadas parciales son continuas, además  $E(a, b) \geq 0$ , o sea:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } E(a, b) \leq E(a', b') \forall a', b' \in \mathbb{R}$$

# Ajuste de curvas usando mínimos cuadrados.

- La ecuación punto-pendiente de una recta viene dada por la siguiente ecuación:  $f(x_i) = ax_i + b$ , de modo tal que  $E$  se convierte en una función de dos variables  $E(a, b)$ .

$$E(a, b) = E = \sum_{i=0}^M (y_i - b - ax_i)^2$$

- Esta función es continuamente diferenciable, o sea,  $E$  es diferenciable y las derivadas parciales son continuas, además  $E(a, b) \geq 0$ , o sea:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } E(a, b) \leq E(a', b') \forall a', b' \in \mathbb{R}$$

- Por la definición anterior

$$\exists \min_{a, b \in \mathbb{R}} E(a, b) \text{ y además } \underbrace{\frac{\partial E(a, b)}{\partial a} = 0 = \frac{\partial E(a, b)}{\partial b}}_{\text{Ecuaciones Normales}}$$