Práctica I-b. Cálculo III

1. Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E(económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 modelos M y 10 modelos L de butacas; 12 modelos E, 8 modelos M y 5 modelos L de mecedoras; y 18 modelos E, 20 modelos M y 12 modelos L de sillas. Representa esta información en una matriz.

2. El inventario de una librería de la carrera de Ciencias Económicas es:

   Libros de: Derecho 80 , Contabilidad 160 , matemática 120 y Administración 240

   Apuntes de : Derecho 40, Contabilidad 120 , Matemática 80 y Administración 160

   a) Represente mediante una matriz A , el inventario de esa librería.

   b) Expresar como el producto de un escalar por una matriz en forma conveniente, de manera que los elementos de esta última sean números de un dígito.

   c) Si la biblioteca de la Universidad tiene el 10 % de ese material ¿Cuál es la matriz en ese caso?

3. Don Antonio tiene dos estaciones de servicio, una en el centro y otra en el sur de la ciudad. Durante el primer fin de semana de mayo, las estaciones registraron las ventas de combustibles representadas por la siguiente información:

$$A = \begin{array}{rrrr} & \text{diesel} & \text{super} & \text{super plus} \\ \text{centro} & 1200 & 750 & 650 \\ \text{sur} & 1100 & 850 & 600 \end{array} \qquad B = \begin{array}{rrrr} & \text{diesel} & \text{super} & \text{super plus} \\ \text{centro} & 1260 & 860 & 520 \\ \text{sur} & 1160 & 750 & 750 \end{array}$$

   a) Halle la matriz que represente el total de ventas realizado en los dos días.

   b) Si el lunes las ventas son siempre el 10 % más de la del día anterior ¿Cuál resulta ser la nueva matriz?

4. Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S(sencillas), N(normales) y L(lujo). Cada vivienda de tipo S tiene 1 ventana grande, 7 medianas y1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.

   Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y2 bisagras.

   a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el numero de cristales y el número de bisagras de cada tipo de ventana.

   b) Calcular una matriz, a partir de las anteriores, que exprese el número de cristales y bisagras necesarios en cada tipo de vivienda.

5. Una empresa nacional tiene cuatro distribuidoras, una en cada región (norte, centro, sur y Cuyo). Las ventas de tres de sus productos por región, expresadas en millones de dólares, fueron:

Año 2004	Año 2005
Región 1, producto 1: 2.6	Región 1, producto 1: 3.6
Región 1, producto 2: 3.2	Región 1, producto 2: 4.5
Región 1, producto 3: 2.4	Región 1, producto 3: 2.9
Región 2, producto 1: 4.8	Región 2, producto 1: 2.5
Región 2, producto 2: 4.4	Región 2, producto 2: 5.0
Región 2, producto 3: 3.6	Región 2, producto 3: 3.0
Región 3, producto 1: 1.8	Región 3, producto 1: 3.0
Región 3, producto 2: 2.5	Región 3, producto 2: 3.5
Región 3, producto 3: 3.8	Región 3, producto 3: 4.6
Región 4, producto 1: 0.9	Región 4, producto 1: 2.5
Región 4, producto 2: 2.8	Región 4, producto 2: 3.8
Región 4, producto 3: 2.5	Región 4, producto 3: 4.0

a) Organizar los datos anteriores de modo que la información se presente en forma más clara.

b) Si llamamos A a la matriz de ventas del año 2004 y B a la del año 2005

1) Dar el significado de los elementos a23 y b21 .
2) Calcular las ventas totales de los dos años de cada producto y cada región.
3) Calcular e interpretar $A - B$
4) La gerencia de la empresa había proyectado para el año 2006 un 30 % de incremento en las ventas de los productos en todas las regiones respecto al año 2004. Calcular la diferencia entre los niveles de venta proyectados y los niveles de venta reales del año 2005.

6. El número de horas que ha trabajado durante los últimos meses en cada actividad está dada por la matriz:

	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Clases particulares	20	15	40	5
Trabajos con computadora	15	10	12	0
Ciber	30	20	16	10

Calcúlese la matriz de precios totales e interprete estas matrices.

7. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuar cuando sea posible los siguientes cálculos

a) $B + C$

b) $A + (-C)$

c) $B^t + C^t$

d) $A + B$

e) $A^t + (-D)$

f) $D + (-D)$

g) $B + D$

h) $C + C^t$

8. Hallar las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfacen en cada caso las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} X = X$

9. Encontrar una matriz X que verifique $X - B^2 = AB$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

10. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifique que:

a) $(A+B)^t = A^t + Bt$ *b)* $A^tB^t = (BA)^t$ *c)* $(A^t)^2 = (A^2)^t$

11. Sean A, B y C matrices invertibles y simétricas (es decir, que son iguales a su matriz transpuesta). Demostrar (justificando adecuadamente con las propiedades de las operaciones con matrices):

a) $(AB)^tA^{-1}B = B^2$
b) $(CA)^{-1}CA^t = I$
c) $(ABC)^{-1}A^t(C^{-1}B^{-1})^{-1} = I$

12. En cada uno de los siguientes ítems, determina todas las matrices B que verifican la ecuación dada.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Verificar que C es la inversa de A aplicando la definición.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & -4 \\ -1/2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices, y en el caso en que sea posible determinar la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

15. Completar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ para obtener una matriz 3×3:

a) con rango 1
b) con rango 2

c) con rango 3

16. ¿Para que valores de β la matriz A tiene rango r?

    a) $r = 2$

    b) $r = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\beta & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1-\beta \end{pmatrix}$$

17. Dadas las siguientes matrices obtener, si existe, la inversa aplicando el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

    a) Verificar que A es la inversa de B aplicando la definición.

    b) Aplicar el proceso de Gauss a la matriz B para obtener A.

19. Calcular el rango de las siguientes matrices aplicando operaciones elementales de fila. Para las matrices cuadradas cuyo rango sea igual a su orden, encuentre las respectivas inversas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Calcular los siguientes determinantes:

    a) $\begin{vmatrix} 18 & 5 & 7 & 8 \\ 18 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

    b) $\begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 27 & 7 & 7 \\ 18 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

    c) $\begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 28 & 8 & 8 \\ 18 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

    d) $\begin{vmatrix} 19 & 5 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

    e) $\begin{vmatrix} 16 & 5 & 7 & 10 \\ 16 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

    f) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 24 & 7 & 11 \\ 16 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

    g) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 25 & 8 & 12 \\ 16 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

    h) $\begin{vmatrix} 17 & 5 & 7 & 10 \\ 16 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

21. Cálcule el determinante para cada matriz dada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Calcule el valor de x en la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

23. Partiendo de la siguiente matriz, calcula el determinante de la matriz A por el desarrollo de Laplace (cofactores):

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -30 & 24 \\ 15 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Según la segunda fila.

   b) Según la tercera columna

24. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{cases}$$

   a) Escriba la matriz aumentada del sistema

   b) Utilice el método de eliminación de Gauss para determinar todas las soluciones, si existen, del sistema dado.

25. Exprese los sistemas de ecuaciones dados de la forma $Ax = b$ y obtenga su solución

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 10 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} -2x + 6y - 10z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - 7y + 11z &= -4 \end{cases}$$

26. Determine los valores de a, si existen, para que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 3)z &= a \end{cases}$$

   a) Sea inconsistente

   b) Tenga infinitas soluciones. Halle las soluciones para este caso.

   c) Tenga solución única. Halle la solución para este caso.

27. Halle los valores de k, si existen, para que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y - z = -1 \\ x + z = 9 \\ 3x + y + (k^2 + 3)z = k + 29 \end{cases}$$

   a) Sea inconsistente

   b) Tenga infinitas soluciones

   c) Tenga solución única

28. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Halle $Adj(A)$

   b) ¿Es la matriz A invertible?

   c) En caso de ser invertible determine su inversa a partir de la adjunta de A y usando Gauss-Jordan. Compare los resultados obtenidos.