Unidad III: Aproximación de funciones.

José Luis Ramírez B.

January 18, 2025

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.
- Se desea extraer información de esos datos.

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).
- o bien "intentando recrear/reconstruir el fenómeno en su totalidad" (en un dominio continuo de espacio, tiempo o cualquier otra magnitud), con la función que represente "lo mejor posible" esos datos.

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan ("interpolan" es el término matemático) exactamente por los puntos dados.

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan ("interpolan" es el término matemático) exactamente por los puntos dados.
- Curvas de ajuste: cálculo de funciones aproximadas a los datos que tenemos (en algún sentido, para cierta distancia)

Resultados Fundamentales

Polinomio de grado n:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

Resultados Fundamentales

Polinomio de grado n:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, (a_n \neq 0)$$

Teorema:

Si p_n es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $p_n(x) = 0$ tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

Resultados Fundamentales

Teorema:

Sea p_n un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen constantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, posiblemente complejas, y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

Resultados Fundamentales

Teorema:

Sea p_n un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen constantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, posiblemente complejas, y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

Teorema:

Sean p_n y q_n dos polinomios de grado menor o igual que n. Si existen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, con $k > n$, números distintos tales que $p_n(x_i) = q_n(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, entonces $p_n(x) = q_n(x)$ para todo x.

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_k &= a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \ldots, 1, 0, -1 \end{aligned}$$

entonces: $p_n(x_0) = b_{-1}$

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_k &= a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \ldots, 1, 0, -1 \end{aligned}$$

entonces: $p_n(x_0) = b_{-1}$
Además, si se llama

$$q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

se tiene que:

$$p_n(x) = (x - x_0) q_{n-1}(x) + b_{-1}$$

y por lo tanto

$$p_n'(x_0) = q_{n-1}(x_0)$$

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.
- División Sintética: Está relacionado con el método de división sintética para polinomios, lo que lo hace muy útil en el campo del álgebra y el análisis numérico.

Evaluación de polinomios

En Resumen:

- El algoritmo de Horner es una herramienta poderosa para evaluar polinomios y también para obtener información sobre su derivada.
- Es un método eficiente, estable y muy utilizado en diversos campos de las matemáticas y la informática.

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Tenemos el polinomio:

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Y queremos evaluarlo en $x_0 = 2$ y también calcular $p_3'(2)$.

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)
- Iteración:
  $b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$ (coeficiente de x^2)
  $b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$ (coeficiente de x^1)
  $b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11$ (término independiente)

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)
- Iteración:
  $b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$ (coeficiente de x^2)
  $b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$ (coeficiente de x^1)
  $b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11$ (término independiente)
- Resultado:
  $p_3(2) = b_{-1} = 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$
   Con los valores de b que obtuvimos (excepto b_{-1}), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$
   Con los valores de b que obtuvimos (excepto b_{-1}), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:
   $$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$
3. Relación entre $p_3(x)$, $q_2(x)$ y b_{-1}
   El polinomio $p_3(x)$ se puede expresar como:
   $p_3(x) = (x - x_0) \cdot q_2(x) + b_{-1}$
   $p_3(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + x + 6) + 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$
   - Iteración:
     $c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
     $c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$
   - Iteración:
     $c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
     $c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$
   - Resultado:
     $q_2(2) = c_{-1} = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$
- $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio $p_3(x)$ y evaluándolo en $x = 2$.

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$p_3'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio $p_3(x)$ y evaluándolo en $x = 2$.

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$p_3'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Evaluando en x = 2:

$$p_3'(2) = 6(2^2) - 6(2) + 4 = 6(4) - 12 + 4 = 24 - 12 + 4 = 16$$

Problema de interpolación de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero n no negativo, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y los valores $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ de una función y sus n primeras derivadas en x_0, encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Problema de interpolación de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero n no negativo, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y los valores $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ de una función y sus n primeras derivadas en x_0, encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Teorema:

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única, que se denomina polinomio de Taylor de grado $\leq n$ de la función f en el punto x_0:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Problema de interpolación de Taylor

Teorema:

Para $n > 1$ sea $f(x)$ una función n veces derivable en x_0. El polinomio de Taylor $P(x)$ verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

con la notación o pequeña de Landau
$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$ para $x \to x_0$. Además, $P(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ con esta propiedad.

Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

Teorema:

Sean x y x_0 dos números reales distintos y $f(x)$ una función con n derivadas continuas en un intervalo conteniendo a x y x_0, en el que también existe $f^{(n+1)}$. Entonces existe un punto ξ entre x y x_0 tal que:

$$f(x) - P(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Problema de interpolación de Taylor

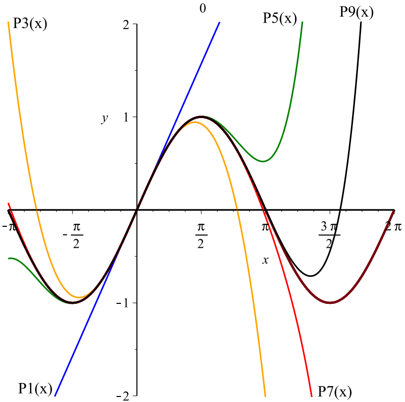
Colorario:

Además de las hipótesis del teorema supongase que para cada t entre x y x_0 se verifica que $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1}$ constante, entonces:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{(n+1)} K_{n+1}}{(n+1)!}$$

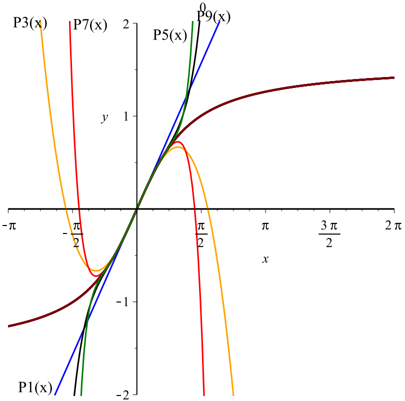
Ejemplo:

A continuación se muestran las gráficas de la función $f(x) = \sin(x)$ y de su polinomio de Taylor de orden 1 al 9 en el cero. Se puede comprobar que la aproximación es más exacta a medida que se aumenta el orden.



Ejemplo:

El hecho de que la función seno y su polinomio de Taylor se parezcan tanto como se quiera, con sólo aumentar el grado del polinomio lo suficiente, no es algo que le ocurra a todas las funciones. Para la función arctan la situación no es tan buena:



Ejemplo:

- Se desea aproximar la función $f(x) = e^x$ mediante el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ de orden 5 y hallar el error obtenido en la estimación para $x = 1.5$
- El polinomio de Taylor de grado 5 viene dada por la siguiente expresión

$$P_5(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

Ejemplo:

Con la expresión del residuo se calcula el error de Truncamiento:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0)^6 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = \frac{e^{\xi}}{6!}x^6$$

$$R_5(x) = \frac{e^{\xi}}{6!}x^6$$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$
- Obtenemos:
  $P_5(1.5) \approx 4.462$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \dfrac{(1.5)^2}{2} + \dfrac{(1.5)^3}{6} + \dfrac{(1.5)^4}{24} + \dfrac{(1.5)^5}{120}$
- Obtenemos:
  $P_5(1.5) \approx 4.462$
- Cálculo del error en $x = 1.5$
  El error en la aproximación de Taylor está dado por el término del resto. La forma del resto para el polinomio de Taylor de orden n es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Ejemplo:

- En nuestro caso, $n = 5$, $x = 1.5$, $x_0 = 0$, y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de e^x es e^x.
  Por lo tanto:
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot 1.5^6}{720}$$
  Donde ξ es un número entre 0 y 1.5.

Ejemplo:

- En nuestro caso, $n = 5$, $x = 1.5$, $x_0 = 0$, y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de e^x es e^x.
  Por lo tanto:
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot 1.5^6}{720}$$
  Donde ξ es un número entre 0 y 1.5.
- Para maximizar el error, tomamos el mayor valor posible de e^{ξ} en el intervalo $[0, 1.5]$. Este valor es cuando $c = 1.5$.
  Por lo tanto
  $$R_5(1.5) = e^{1.5} \cdot \frac{(1.5)^6}{720} \approx 0.0708$$

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de $e^{1.5}$ es aproximadamente 4.481689.

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de $e^{1.5}$ es aproximadamente 4.481689.
- El error exacto es:

$$\text{Error} = |e^{1.5} - P_5(1.5)|$$

$$\text{Error} = |4.481689 - 4.462|$$

$$\text{Error} = 0.019689$$

Interpolación

- Nos centraremos ahora en el problema de obtener, a partir de una tabla de parejas $(x, f(x))$ definida en un cierto intervalo $[a, b]$, el valor de la función para cualquier x perteneciente a dicho intervalo.

Interpolación

- Nos centraremos ahora en el problema de obtener, a partir de una tabla de parejas $(x, f(x))$ definida en un cierto intervalo $[a, b]$, el valor de la función para cualquier x perteneciente a dicho intervalo.
- Supongamos que se dispone de las siguientes parejas de datos:

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\widetilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n$$

en donde x_k y $f(x_k)$ son datos conocidos.

- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\widetilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n$$

  en donde x_k y $f(x_k)$ son datos conocidos.
- Se dice entonces que la función $\widetilde{f}(x)$, es una función interpolante de los datos representados en la tabla.

- El objetivo es hallar una función continua lo más sencilla posible tal que:

$$\widetilde{f}(x_k) = y_k = f(x_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n$$

en donde x_k y $f(x_k)$ son datos conocidos.

- Se dice entonces que la función $\widetilde{f}(x)$, es una función interpolante de los datos representados en la tabla.

Observación:

En general, trabajaremos con f = polinomios de grado $\leq n$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomio algebraico

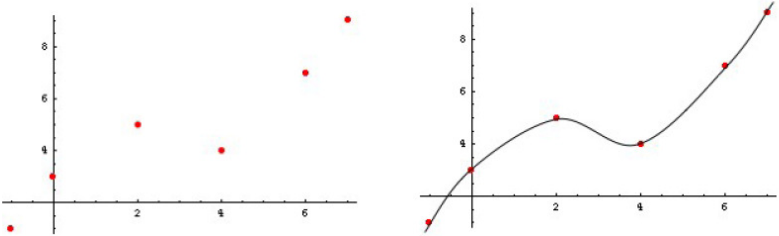


Figure: Datos de iterpolación y curva interpolante.

Teorema de Weierstrass:

Sea f continua sobre $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0 \quad \exists P(x)$ polinomio tal que $\mid f(x) - P(x) \mid < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$.

Polinomio interpolador de Lagrange

- Si se escribe $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Así, $P(x)$ será solución del problema si, y sólo si, el S.E.L:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

admite solución.

Polinomio interpolador de Lagrange

- Si se escribe $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Así, $P(x)$ será solución del problema si, y sólo si, el S.E.L:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  admite solución.

- que se denomina sistema cuadrado de Vandermonde. La matriz A del sistema se denomina matriz de Vandermonde y es no-singular si los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son diferentes. Esta matriz es mal condicionada a medida que n aumenta.

Polinomio interpolador de Lagrange

- Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema; se tiene que el problema de interpolación admite una única solución si, y sólo si, los nodos de interpolación son distintos. Para ello basta con probar que $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ y, por lo tanto, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j$.

Polinomio interpolador de Lagrange

- Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema; se tiene que el problema de interpolación admite una única solución si, y sólo si, los nodos de interpolación son distintos. Para ello basta con probar que $\det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ y, por lo tanto, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j$.
- El método de Lagrange para interpolación polinomial resulta de resolver este sistema para obtener los coeficientes pero lo hace de una forma más sencilla y sistemática.

Interpolación de Lagrange

Para calcular el polinomio interpolador $P(x)$ asociado a una tabla de datos (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$ se puede plantear una simplificación previa: se construyen polinomios $l_i(x)$ de grado n que valgan 1 en el nodo x_i y 0 en el resto.

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

Interpolación de Lagrange

Para calcular el polinomio interpolador $P(x)$ asociado a una tabla de datos (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$ se puede plantear una simplificación previa: se construyen polinomios $l_i(x)$ de grado n que valgan 1 en el nodo x_i y 0 en el resto.

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

Si se escribe el polinomio factorizado para que tenga en cada nodo x_j (con $j \neq i$) una raíz, el candidato es:

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x-x_j)$$

Polinomio interpolador de Lagrange

Lo único que no se consigue es que en x_i valga 1, para ello hay que “normalizar” la función anterior.

Polinomio interpolador de Lagrange

Lo único que no se consigue es que en x_i valga 1, para ello hay que "normalizar" la función anterior.
Así, finalmente la fórmula de interpolación de Lagrange es:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \quad l_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, k = 0, \ldots, n$$

Los polinomios $l_k(x)$ reciben el nombre de polinomios de Lagrange.

Interpolación de Lagrange

Teorema:

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ números diferentes, y sea f una función tal que sus valores se obtengan a partir de los números dados $(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$, entonces existe un único polinomio $p_n(x)$ de grado n, que cumple con la propiedad

$$f(x_k) = p_n(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, \ldots, n$$

y este polinomio está dado por la siguiente expresión

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$$

Interpolación de Lagrange

Demostración:

- Se tiene que $p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$ ya que $L_k(x)$ son polinomios de grado menor o igual a n esto implica que $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n.

Interpolación de Lagrange

Demostración:

- Se tiene que $p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$ ya que $L_k(x)$ son polinomios de grado menor o igual a n esto implica que $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n.
- Además

$$L_k(x_k) = 1, \quad L_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k$$
$$\Rightarrow p_n(x_k) = 0 + 0 + \cdots + f(x_k) + \cdots + 0 = f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n$$

Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:

Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:
- Supongase que $p_n(x)$ y $q_n(x)$ son dos polinomios de grado $\leq n$ que interpolan a $f(x)$ en los $n+1$ puntos distintos $x_k, \quad k = 0, \ldots, n$, es decir

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1 \ldots, n$$

Interpolación de Lagrange

- La unicidad puede demostrarse como sigue:
- Supongase que $p_n(x)$ y $q_n(x)$ son dos polinomios de grado $\leq n$ que interpolan a $f(x)$ en los $n+1$ puntos distintos $x_k, \quad k = 0, \ldots, n$, es decir

$$p_n(x_k) = q_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1 \ldots, n$$

Entonces, $r_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ con $n+1$ raices $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pero cualquier polinomio de grado n con un número de raices mayor a n debe ser constante e igual a cero. Por lo tanto $r_n(x) \equiv 0, \forall x$, y en consecuencia $p_n(x) = q_n(x), \forall x \in [a, b]$.

Polinomio interpolador de Lagrange

Si $x_0, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos y f es una función real definida sobre ellos, entonces existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual a n tal que $f(x_k) = P(x_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n.$

Polinomio interpolador de Lagrange

Si $x_0, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos y f es una función real definida sobre ellos, entonces existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual a n tal que $f(x_k) = P(x_k) \quad \forall k = 0, \ldots, n$.

Teorema

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ y $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación en $n+1$ puntos distintos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, entonces para cada $x \in [a,b]$ existe $\xi(x) \in I[x_0, x_1, ..., x_n, x]$ (el intervalo cerrado más pequeño que contiene $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$) tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w(x) \qquad \text{con } w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Polinomio interpolador de Lagrange

Demostración:

Polinomio interpolador de Lagrange

Demostración:

- Si $x = x_k$ para algún $0 \leq k \leq n$, la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.

Polinomio interpolador de Lagrange

Demostración:

- Si $x = x_k$ para algún $0 \leq k \leq n$, la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.
- Así que supongase que $x \neq x_k, k = 0, 1, \ldots, n$, y sea

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)} w(t), \qquad t \in [a, b]$$

Polinomio interpolador de Lagrange

Demostración:

- Si $x = x_k$ para algún $0 \leq k \leq n$, la igualdad se satisface trivialmente pues ambos lados son iguales a cero.
- Así que supongase que $x \neq x_k, k = 0, 1, \ldots, n$, y sea

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)} w(t), \qquad t \in [a, b]$$

- Claramente $F(t)$ está bien definida pues $w(x) \neq 0$ ya que $x \neq x_k, \forall k$. Además $F(t)$ es de clase $\mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ y tiene al menos $n + 2$ ceros, a saber $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$. Luego $F'(t)$ tiene al menos $n + 1$ ceros, $F''(t)$ tiene al menos n ceros, así sucesivamente, y $F^{(n+1)}(t)$ tiene al menos un cero en $[a, b]$ que será denotado por $\xi(x)$.

Polinomio interpolador de Lagrange

- Por lo tanto

$$0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}(n+1)!$$

Polinomio interpolador de Lagrange

- Por lo tanto

$$0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)}(n+1)!$$

Se concluye que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w(x)$$

Ejemplo:

Sea la función $f : x \to 2xe^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

Ejemplo:

Sea la función $f : x \to 2xe^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

1. Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte $\{0.2, 1.0\}$.

Ejemplo:

Sea la función $f : x \to 2xe^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

1. Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte $\{0.2, 1.0\}$.
2. Hallar el polinomio $P(x)$ que interpola $f(x)$ en el sentido de Lagrange sobre el soporte $\{0.2, 1\}$.

Ejemplo:

Sea la función $f : x \to 2xe^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

1. Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte $\{0.2, 1.0\}$.
2. Hallar el polinomio $P(x)$ que interpola $f(x)$ en el sentido de Lagrange sobre el soporte $\{0.2, 1\}$.
3. Obtener la expresión del error de interpolación.

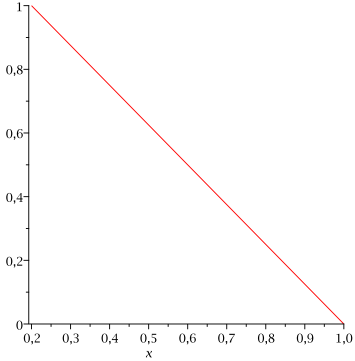
Ejemplo:

Sea la función $f : x \to 2xe^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

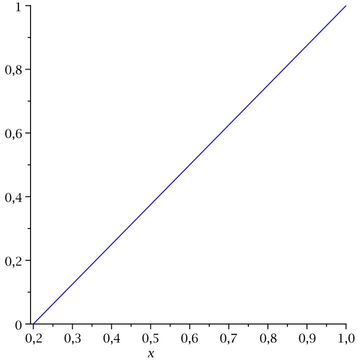
1. Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte $\{0.2, 1.0\}$.
2. Hallar el polinomio $P(x)$ que interpola $f(x)$ en el sentido de Lagrange sobre el soporte $\{0.2, 1\}$.
3. Obtener la expresión del error de interpolación.
4. Hallar una cota de error válida en todo $(0.2, 1)$.

Ejemplo:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1 - x}{0.8}$$

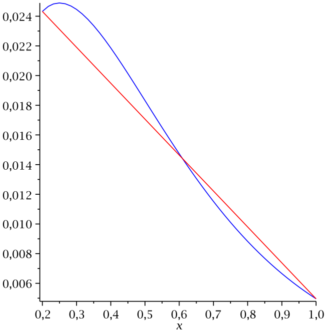


$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0.2}{0.8}$$



Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = \\
&\quad (0.4)e^{-2.8}\left(\frac{1-x}{0.8}\right) + 2e^{-6}\left(\frac{x-0.2}{0.8}\right) \\
\Rightarrow P_1(x) &\approx -0.02420815088x + 0.02916565523
\end{aligned}
$$



Expresión del error

Aplicamos la expresión:

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}\prod_{j=0}^{1}(x - x_j)$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{(-16 + 32\xi_x)e^{-(4\xi_x+2)}}{2!}(x - 0.2)(x - 1)$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{(-16 + 32\xi_x)e^{-(4\xi_x+2)}}{2}(x^2 - 1.2x + 0.2)$$

Cota de error

$$| E(x) | = | f(x) - P_1(x) | = \frac{\max\limits_{x \in [0.2,1]} | f''(x) |}{2!} \max_{x \in [0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) \right|$$

Cota de error

$$\mid E(x) \mid = \mid f(x) - P_1(x) \mid = \frac{\max\limits_{x\in[0.2,1]} \mid f''(x) \mid}{2!} \max_{x\in[0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) \right|$$

Obteniendo $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$, nos interesa $\max |f''(x)|$

Cota de error

$$| E(x) | = | f(x) - P_1(x) | = \frac{\max\limits_{x \in [0.2,1]} | f''(x) |}{2!} \max_{x \in [0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) \right|$$

Obteniendo $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$, nos interesa $\max |f''(x)|$

Dado que la función $g(x)$ es continua en $[0.2, 1]$, su mayor valor absoluto en $[0.2, 1]$ será el mayor de los siguientes:

Cota de error

$$| E(x) |=| f(x) - P_1(x) |= \frac{\max\limits_{x\in[0.2,1]} | f''(x) |}{2!} \max_{x\in[0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1}(x - x_j) \right|$$

Obteniendo $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$, nos interesa $\max |f''(x)|$

Dado que la función $g(x)$ es continua en $[0.2, 1]$, su mayor valor absoluto en $[0.2, 1]$ será el mayor de los siguientes:

- Valor de $|g(x)|$ en las abscisas de $[0.2, 1]$ para las que $g'(x) = 0$.

Cota de error

$$| E(x) | = | f(x) - P_1(x) | = \frac{\max\limits_{x\in[0.2,1]} | f''(x) |}{2!} \max_{x\in[0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) \right|$$

Obteniendo $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$, nos interesa $\max |f''(x)|$

Dado que la función $g(x)$ es continua en $[0.2, 1]$, su mayor valor absoluto en $[0.2, 1]$ será el mayor de los siguientes:

- Valor de $|g(x)|$ en las abscisas de $[0.2, 1]$ para las que $g'(x) = 0$.
- Valor de $|g(0.2)|$.

Cota de error

$$| E(x) |=| f(x) - P_1(x) |= \frac{\max\limits_{x\in[0.2,1]} | f''(x) |}{2!} \max_{x\in[0.2,1]} \left| \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) \right|$$

Obteniendo $g(x) = f''(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)}$, nos interesa $\max |f''(x)|$

Dado que la función $g(x)$ es continua en $[0.2, 1]$, su mayor valor absoluto en $[0.2, 1]$ será el mayor de los siguientes:

- Valor de $|g(x)|$ en las abscisas de $[0.2, 1]$ para las que $g'(x) = 0$.
- Valor de $|g(0.2)|$.
- Valor de $|g(1)|$.

Cota de error

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas para las que $g'(x) = 0$.

Cota de error

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas para las que $g'(x) = 0$.

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

Cota de error

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas para las que $g'(x) = 0$.

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (96 - 128x)e^{-(4x+2)} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{96}{128} = 0.75$$

Cota de error

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas para las que $g'(x) = 0$.

$$g(x) = (-16 + 32x)e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128x)e^{-(4x+2)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (96 - 128x)e^{-(4x+2)} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{96}{128} = 0.75$$

de donde $|g(0.75)| \approx 0.0539$

Cota de error

Valor de $g(x)$ en los extremos del intervalo $[0.2, 1]$.

Cota de error

Valor de $g(x)$ en los extremos del intervalo $[0.2, 1]$.

$$g(0.2) \approx -0.5838 = 0.5838$$

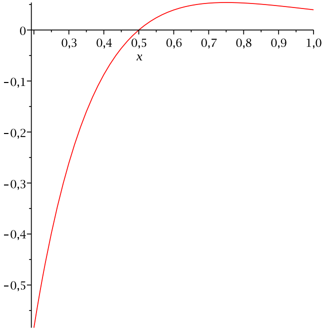
$$g(1) \approx 0.0397 = 0.0397$$

Cota de error

Valor de $g(x)$ en los extremos del intervalo $[0.2, 1]$.

$$g(0.2) \approx -0.5838 = 0.5838$$

$$g(1) \approx 0.0397 = 0.0397$$



Cota de error

Se busca ahora $\max_{x \in [0.2,1]} |(x-0.2)(x-1)|$

Llamamos $q(x) = (x-0.2)(x-1) = x^2 - 1.2x + 0.2$

Cota de error

Se busca ahora $\max_{x \in [0.2,1]} |(x-0.2)(x-1)|$

Llamamos $q(x) = (x-0.2)(x-1) = x^2 - 1.2x + 0.2$

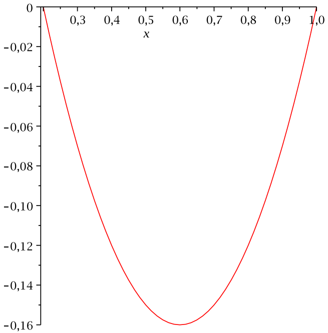
$q(x)$ es un polinomio de segundo grado que se anula en los puntos 0.2 y 1, luego, necesariamente, tendrá algún extremo en el intervalo $[0.2, 1]$.

Cota de error

Se busca ahora $\max_{x\in[0.2,1]} |(x-0.2)(x-1)|$

Llamamos $q(x) = (x-0.2)(x-1) = x^2 - 1.2x + 0.2$

$q(x)$ es un polinomio de segundo grado que se anula en los puntos 0.2 y 1, luego, necesariamente, tendrá algún extremo en el intervalo $[0.2, 1]$.



Cota de error

El máximo de $|q(x)|$ se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación $q'(x) = 0$:

Cota de error

El máximo de $|q(x)|$ se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación $q'(x) = 0$:

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

Cota de error

El máximo de $|q(x)|$ se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación $q'(x) = 0$:

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

de donde se obtiene $x = 0.6$ como abscisa en la que se encuentra el máximo de $q(x)$

Cota de error

El máximo de $|q(x)|$ se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación $q'(x) = 0$:

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

de donde se obtiene $x = 0.6$ como abscisa en la que se encuentra el máximo de $q(x)$

$$q(0.6) = -0.16 \Rightarrow |q(0.6)| = 0.16$$

Cota de error

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, una cota de error vendrá dada por:

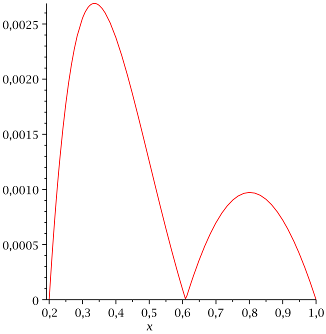
$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{0.5838}{2}(0.16) = 0.046704$$

Cota de error

La cota del error obtenida es una cota "teórica". Si se representa el valor absoluto del error exacto: $|E(x)| = |f(x) - P(x)|$ se obtiene la siguiente figura:

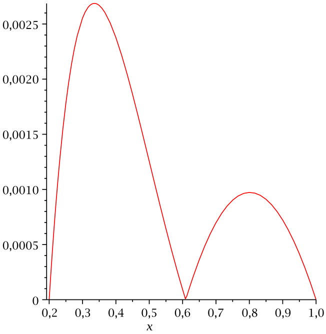
Cota de error

La cota del error obtenida es una cota "teórica". Si se representa el valor absoluto del error exacto:
$|E(x)| = |f(x) - P(x)|$ se obtiene la siguiente figura:



Cota de error

La cota del error obtenida es una cota "teórica". Si se representa el valor absoluto del error exacto:
$|E(x)| = |f(x) - P(x)|$ se obtiene la siguiente figura:



El error máximo real que se comete es del orden de 0.0026, mucho menor que la cota teórica 0.046702.

Desventajas:

1. El polinomio no viene expandido.

Desventajas:

1. El polinomio no viene expandido.
2. La interpolación para otro valor de x necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.

Desventajas:

1. El polinomio no viene expandido.
2. La interpolación para otro valor de x necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.
3. La incorporación de un nuevo nodo obliga a rehacer todos los cálculos.

Desventajas:

1. El polinomio no viene expandido.
2. La interpolación para otro valor de x necesita la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se pueden utilizar partes de la aplicación previa.
3. La incorporación de un nuevo nodo obliga a rehacer todos los cálculos.
4. La evaluación del error no es fácil.