

## Práctica II. Cálculo III

1. Se considera el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a  $n$ , en variable real  $x$ ,  $\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ . Demostrar que  $\mathcal{P}_n$  es un espacio vectorial real con las operaciones:

$$\text{Suma de polinomios: } \left. \begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \right\}$$

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in \mathcal{P}_n$$

Producto de un polinomio por un escalar:

$$\lambda p(x) = (\lambda a_n)x^n + (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Demuestra que  $\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ , junto con la suma usual de números complejos y la multiplicación escalar  $\alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha yi$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
3. Considere el conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y las operaciones

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_2) \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{aligned}$$

donde  $x_i, y_i, \alpha \in \mathbb{R}$ . Explica por qué  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , junto con estas operaciones, no es un espacio vectorial real.

4. Sea  $V = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ . Para  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , definamos

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1) \end{aligned}$$

Demuestra que  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . ¿Cuál es el vector cero?, ¿Cuál es el inverso aditivo?

5. Sea  $S = \mathbb{R}^+$ . Demuestra que  $S$  es un espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} v \oplus w &= vw \\ \alpha \odot v &= v^\alpha \end{aligned}$$

¿Qué elemento de  $S$  es la identidad aditiva? ¿Qué significado tiene  $-x$  en este contexto?

6. Sea  $\mathbb{R}$  el campo de los números reales. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifica tu respuesta.

- (a)  $W_1 = \{(x_1, 2x_2, 3x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
- (b)  $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$
- (c)  $W_3 = \{(x_1, x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$
- (d)  $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\}$

7. Determina si los conjuntos  $S_i$  son subespacios del espacio vectorial  $V_i$ . Justifica tu respuesta detalladamente.

- (a)  $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2\}, V_1 = \mathbb{R}^2$
- (b)  $S_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}, V_2 = \mathbb{R}^n$
- (c)  $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \quad \wedge \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}, V_3 = \mathbb{R}^4$

8. Sea  $V = E_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ . Estudiar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de  $V$ :

(a)  $W = \{A \in E_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / |A| = 0\}$

(b)  $U = \{A \in E_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A = A^2\}$

9. Establecer si los siguientes conjuntos son o no subespacios del respectivo espacio vectorial indicado justificando la respuesta (probar las propiedades de subespacio en caso que sea, o bien dar un contraejemplo que muestre la propiedad que falla en caso que no lo sea). En los casos que sea subespacio encontrar una base del mismo.

(a)  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3x_2\}$

(b)  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0\}$

(c)  $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \cdot x_2 = 9\}$

(d)  $N = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0 \wedge a_{21} = 5a_{12} \right\}$

10. Determinar si el vector  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$  pertenece al subespacio generado por  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Determinar el valor de  $x$  para que el vector  $(1, x, 5) \in \mathbb{R}^3$  pertenezca al subespacio  $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ .
12. Establecer si  $(1, -2, -3, -3)$  es o no una combinación lineal de los vectores  $(0, 1, 2, 3)$ ,  $(-1, 1, 1, 0)$ . Esos 3 vectores son dependientes o independientes? Justificar la respuesta.
13. Sean  $v_1 = (1; \alpha; \alpha^2)$ ,  $v_2 = (1; \beta; \beta^2)$  y  $v_3 = (1; \gamma; \gamma^2)$  tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son números reales distintos de cero. Que condiciones deben cumplir los números  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para que los tres vectores  $v_1, v_2$  y  $v_3$  sean linealmente independientes.
14. Determinar si los siguientes vectores de  $\mathbb{R}^3$  son linealmente independientes o dependientes:
- (a)  $(1, 2, 4), (3, 6, 2), (0, 0, 1)$
- (b)  $(1, 2, 0), (0, 6, 2), (4, 8, 0)$

¿En algún caso se puede afirmar que formen una base de  $\mathbb{R}^3$ ? Justificar.

15. Escribir la matriz  $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  como combinación lineal de las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

16. Escribir el polinomio  $v = x^2 + 4x - 3$  como una combinación lineal de los polinomios  $e_1 = x^2 - 2x + 5$ ,  $e_2 = 2x^2 - 3x$  y  $e_3 = x + 3$ .

17. ¿Para qué valores de  $\alpha$  dejan de formar base de  $\mathbb{R}^3$  los vectores  $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ?

18. Sea  $V = E_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ . Hallar las coordenadas de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in V$  en la base  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

19. En el espacio vectorial  $W$  de las matrices simétricas reales de orden 2, se considera la base  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Hallar las coordenadas de la matriz  $A$  en la base  $B$  en los siguientes casos:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

20. En  $\mathbb{R}^3$  se consideran las bases  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ , siendo  $B$  la base canónica y:

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 \\ v_2 = -e_2 + 2e_3 \\ v_3 = -3e_3 \end{cases}$$

Hallar las coordenadas del vector  $4e_1 + e_2 - 5e_3$  en la base  $B'$ .

21. Dado el vector  $u$ , cuyas coordenadas en la base canónica  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  son  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , calcular sus coordenadas en la base  $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ , relacionada con la anterior por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_3 \\ e'_3 = e_2 + e_4 \\ e'_4 = e_2 - e_3 \end{cases}$$

22. Encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$S = \{(1, 2, -1, 3), (2, 1, 0, -2), (0, 1, 2, 1), (3, 4, 1, 2)\}.$$

23. Encuentre una base y la dimensión del subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^4$ , que consta de todos los vectores de la forma  $v = (a + b; a - b + 2c; b; c)$  donde  $a, b$  y  $c$  son números reales.
24. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión 4 con base  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ . Se definen los vectores

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 \quad v_2 = 2u_1 + u_3 + 2u_4 \quad v_3 = u_1 + u_2 - u_3 \quad v_4 = -u_1 + 2u_3 + 3u_4$$

Probar que  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  es una base de  $V$  y calcular las coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$  de un vector  $v$  que tiene por coordenadas en  $\mathcal{B}$  a  $(1, 2, 0, 1)$ .

25. Calcular la dimensión y una base del siguiente subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / \begin{array}{l} a - b - c = 0 \\ a + 2b + d = 0 \\ 3b + c + d = 0 \end{array} \right\}$$

26. Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / BX = 3X\}$$

27. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / XA = 0\}$$

28. En  $\mathbb{R}^2$  se considera el conjunto  $\mathcal{B} = \{(3/5; 4/5); (-4/5; 3/5)\}$

- (a) Probar que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Calcular la matriz de cambio de base  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$  de la base  $\mathcal{B}$  a la base canónica  $\mathcal{C} = \{(1; 0); (0; 1)\}$  y probar que  $P$  es una matriz ortogonal
- (c) Usar que  $P$  es ortogonal para calcular la matriz  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}$  de cambio de base de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$  y calcular las coordenadas de  $v = (2; 1)$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

29. Considere las siguientes bases del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(0; -2; 3); (0; 1; 1); (1; 1; 0)\}$  y  $T = \{(0; -1; 1); (0; 3; 1); (1; 0; 0)\}$ . Sean  $[u]_T = (2; 1; 3)$  y  $[v]_S = (-1; 4; 1)$  dos vectores escritos en términos de las bases  $S$  y  $T$  respectivamente.

- (a) Determine la matriz de transición de la base  $T$  a la base  $S$ .
- (b) Encuentre  $[u]_S$ .
- (c) Determine la matriz de transición de la base  $S$  a la base  $T$ .
- (d) Encuentre  $[v]_T$ .

30. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el conjunto  $\mathcal{B} = \{(1; -1; 1); (-2; \lambda; 0); (-1; 1; \lambda)\}$ .

- (a) Hallar los valores de  $\lambda$  para los que  $\mathcal{B}$  no es una base de  $\mathbb{R}^3$ . Para  $\lambda = 1$ , calcular las coordenadas del vector  $v = (2; 1; 2)$  respecto de  $\mathcal{B}$ .
- (b) Para  $\lambda = 0$ , hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  a la base  $\mathcal{B}$ .
- (c) Para  $\lambda = 2$ , hallar una base ortonormal del subespacio generado por  $\mathcal{B}$ .

31. Se considera el plano de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + 2z\}$$

- (a) Hallar una base ortonormal de  $U$ .
- (b) Calcular la matriz  $P$  de proyección ortogonal sobre  $U$ .
- (c) Hallar la distancia de  $v = (1; 1; 1)$  a  $U$ .
- (d) Hallar una base del subespacio  $W$  formado por los vectores de  $\mathbb{R}^3$  cuya proyección ortogonal sobre  $U$  es  $(0; 0; 0)$ .