Universidad de Carabobo.
Facultad de Ciencias y Tecnología.
Departamento de Matemática.
Métodos Numéricos I.

Asignación 1

1. El valor de la intersección, de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con el eje x se puede encontrar mediante las expresiones

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \qquad \text{y} \qquad x = x_0 - y_0 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

Muestre que ambas fórmulas son algebraicamente correctas.

Usando los puntos $(x_0, y_0) = (1.31; 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93; 4.76)$ y una aritmética de redondeo correcto a tres dígitos, calcule la intersección de la recta con el eje x con ambas expresiones. Compare los resultados obtenidos con el valor exacto. (Recuerde aplicar redondeo correcto en cada operación aritmética)

2. Hallar el épsilon de la máquina para un computador personal, usando el agoritmo visto en clase. Para ello use como lenguaje de programación Matlab.

3. Determinar el número positivo x más pequeño de la forma $x = 2^{-k}$ (k entero no negativo) tal que $10^5 + x \neq 10^5$. Note que este enunciado es idéntico al que define al épsilon de la máquina, con la única diferencia que se ha reemplazado la condición $1 + x = 1$ por $10^5 + x = 10^5$. Compare con el resultado obtenido en el enunciado anterior. ¿Qué se puede concluir? Justifique su respuesta.

4. Elabore un algoritmo recursivo en Matlab que permita obtener el valor $x_n = \dfrac{1}{3^n}$ mediante la fórmula definida por:

$$x_{n+1} = A x_n + \left(\frac{1 - 3A}{9}\right) x_{n-1}$$

con los valores iniciales $x_0 = 1.0$ y $x_1 = 1/3$. Siendo A un dato de entrada. Muestre como el algoritmo se hace inestable a medida que el valor A es grande, mientras que si $0 < A < 1$ el algoritmo es estable. Realice diversas pruebas y muestre una tabla donde se compare el valor exacto y su aproximación, y así mismo calcule y muestre para cada uno su error absoluto y relativo.

5. Suponga que $fl(y)$ es una aproximación de y con un redondeo a k cifras. Demuestre las cotas para el error absoluto E_a y el error relativo E_r si se usa una técnica de aproximación por truncamiento o por redondeo correcto.

6. Escriba un código en Matlab que genere mil datos aleatorios de orden 10^{-5}, y que calcule $a = 10^{12} + x_1 + \cdots + x_{1000}$ y $b = x_1 + \cdots + x_{1000} + 10^{12}$ ¿Son a y b iguales? De no ser así, explique por qué y diga cuál es el más exacto.

7. Sea $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

   (a) Demuestre que $0 \leq f(x) \leq 0.5$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Además, demuestre que es posible extender la definición de $f(x)$ a todo $\mathbb{R}$. Luego, grafique la función en el intervalo $[-3, 3]$.

   (b) Evalúe la función $f(x)$ en el punto $x = 1.2 \times 10^{-8}$. ¿Qué observa?, ¿es confiable este resultado?, ¿por qué? Explique.

   (c) Usando el hecho de que $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$, la función dada se puede reescribir como $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$. Evalúe de nuevo en el punto $x = 1.2 \times 10^{-8}$, esta vez usando la nueva expresión de $f(x)$. ¿Qué obtuvo? Analice el resultado y explique lo que sucede.

8. Sea $\mathbb{F}$ el sistema de punto flotante caracterizado por $\beta = 2$,(base), $n = 4$(precisión), $m = -1$, $M = 2$, cada número en el conjunto $\mathbb{F}$ está representado por $\pm(.d_1 d_2 \ldots d_n)_\beta \beta^e$ donde $m \leq e \leq M$

   (a) ¿Cuál es el número más pequeño en valor absoluto del sistema $\mathbb{F}$?

   (b) Demuestre que $3/4$ y $5/16$ pertenecen al sistema $\mathbb{F}$, pero la suma "verdadera" de estos no pertenece a $\mathbb{F}$.

   (c) Suponga que el tipo de error introducido en la representación de un número real en el sistema $\mathbb{F}$ es por redondeo. Como queda representado el numero $3/4 + 5/16$ en $\mathbb{F}$. esto es:
   $$\frac{3}{4} \oplus \frac{5}{16} = fl\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16}\right)$$

   (d) Encuentre el épsilon de la máquina.