Métodos Iterativos para la Resolución Numérica de Sistemas de Ecuacionesl Lineales.

José Luis Ramírez B.

January 26, 2025

1. Introducción
2. Métodos Iterativos
3. Refinamiento Iterativo
4. Métodos Iterativos de Punto Fijo
    - Método de Jacobi

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.
- Cuando el tamaño de la matriz A es grande ($n >> 100$), la propagación del error de redondeo es también grande, y los resultados obtenidos pueden diferir de los exactos.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
    1. Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como LU.

Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
    1. Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como LU.
    2. Si no ocurre lo anterior, al aplicar métodos directos se produce un fenómeno de llenado. Entonces, si no se realiza una adaptación de los métodos directos los resultados no van a ser, en general, buenos.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$.
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$.
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial $x^{(0)}$ es convergente a la solución del sistema.

Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$.
- El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial $x^{(0)}$ es convergente a la solución del sistema.
- El vector $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el vector residual obtenido en la k-ésima iteración.

Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

Ejemplo:

El método $x^{(n+1)} = 2x^{(n)} - A^{-1}b$ es consistente con el sistema $Ax = b$ pero no es convergente. En efecto:

Métodos Iterativo

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\ &= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x) \end{aligned}$$

y como $A^{-1}b = x$, se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

Métodos Iterativo

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\ &= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x) \end{aligned}$$

y como $A^{-1}b = x$, se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

Si existe $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$, se tiene que:

$$x^* - x = 2(x^* - x) \Rightarrow x^* - x = 0 \Rightarrow x^* = x$$

es decir, el límite es solución del sistema $Ax = b$, por lo que el método es consistente.

Métodos Iterativo

Sin embargo, de $x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$ se obtiene que:

$$\|x^{(n+1)} - x\| = 2\|x^{(n)} - x\|$$

es decir, el vector $x^{(n+1)}$ dista el doble de lo que distaba $x^{(n)}$, por lo que el método no puede ser convergente.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación $\tilde{x}$ de la verdadera solución del sitema.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación $\tilde{x}$ de la verdadera solución del sitema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.

Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ utilizando un método numérico se obtiene una aproximación $\tilde{x}$ de la verdadera solución del sitema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.
- Sea x la solución exacta del sistema y $\tilde{x}$ es la aproximación, por lo tanto cuando se sustituye $\tilde{x}$ en el sistema se obtiene:

$$A\tilde{x} \approx b$$

esto significa que al realizar la resta $b - A\tilde{x} \neq 0$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) \quad = \quad b$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} A(\tilde{x} + z) &= b \\ A\tilde{x} + Az &= b \end{aligned}$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} A(\tilde{x} + z) &= b \\ A\tilde{x} + Az &= b \\ Az &= b - A\tilde{x} \end{aligned}$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} A(\tilde{x} + z) &= b \\ A\tilde{x} + Az &= b \\ Az &= b - A\tilde{x} \\ Az &= r \end{aligned}$$

Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia r (residuo), así $r = b - A\tilde{x}$.
- La solución deseada es de la forma $\tilde{x} + z$ tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} A(\tilde{x} + z) &= b \\ A\tilde{x} + Az &= b \\ Az &= b - A\tilde{x} \\ Az &= r \end{aligned}$$

- Una vez que obtenida z se puede crear una mejor aproximación $\tilde{x} + z$ de la solución.

Ejemplo:

Al resolver el sistema Ax = b donde

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 110 \\ 65 \\ 47 \end{bmatrix}$$

suponiendo que una solución aproximada es $b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$

Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando $tol = 10^{-5}$, se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$
- Verificando criterio de parada $\|r^{(0)}\|_\infty = 8 > tol$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene
$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene
  $z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$
- Generando la nueva aproximación

$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

- Obteniendo z resolviendo el sistema $Az = r$ se obtiene
$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$
- Generando la nueva aproximación
$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- Calculando el residuo
$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.14210854715202 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-13}$$

Ejemplo:

- Verificando criterio de parada
  $\|r^{(1)}\|_\infty = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$

Ejemplo:

- Verificando criterio de parada
  $\|r^{(1)}\|_\infty = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$
- Según el criterio de parada la mejor aproximación es
  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal $Ax = b$ se determina usando aritmética de t dígitos, se puede demostrar que el vector residual r para la aproximación $\tilde{x}$ tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|$$

Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal $Ax = b$ se determina usando aritmética de t dígitos, se puede demostrar que el vector residual r para la aproximación $\tilde{x}$ tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|$$

- De esta ecuación aproximada, se puede obtener una estimación del número de condición efectivo para la aritmética de t dígitos, sin la necesidad de invertir la matriz A.

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho $\tilde{z}$, la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho $\tilde{z}$, la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que $\tilde{z}$ es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\|\|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\|\left(10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|\right) = 10^{-t}\|\tilde{x}\|\kappa(A) \end{aligned}$$

Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición $\kappa(A)$ a t dígitos viene de considerar el sistema lineal $Az = r$.
- De hecho $\tilde{z}$, la solución aproximada de $Az = r$, satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que $\tilde{z}$ es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\|\|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\| \left(10^{-t}\|A\|\|\tilde{x}\|\right) = 10^{-t}\|\tilde{x}\|\kappa(A) \end{aligned}$$

- Esto proporciona una aproximación para el número de condición involucrado en la solución del sistema $Ax = b$ usando t dígitos:

$$\kappa(A) \approx 10^{t}\frac{\|\tilde{z}\|}{\|\tilde{x}\|}$$

Ejemplo:

- El sistema lineal $Ax = b$ dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

tiene la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$

Ejemplo:

- El sistema lineal $Ax = b$ dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

  tiene la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$

- Usando eliminación Gaussiana y aritmética de redondeo de 5 dígitos a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.333 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.079 & -4.7 \end{array}\right)$$

  La solución aproximada a este sistema es

$$\tilde{x}^{(0)} = (1.2001; 0.99991; 0.92538)^t$$

Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a $\tilde{x}$ calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$
\begin{aligned}
r^{(0)} &= b - A\tilde{x}^{(0)} = \\
&= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a $\tilde{x}$ calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$
\begin{aligned}
r^{(0)} &= b - A\tilde{x}^{(0)} = \\
&= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- así que

$$\|r^{(0)}\|_\infty = 0.27413$$

Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema $Az^{(0)} = r$:

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema $Az^{(0)} = r$:

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

- La solución $z^{(0)} = (-0.20008; 8.9989 \times 10^{-5}; 0.074607)^t$ Usando la estimación del número de condición

$$\kappa(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{z}^{(0)}\|_\infty}{\|\tilde{x}^{(0)}\|_\infty} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|\infty = 1.0 \times 10^{-5}$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|\infty = 1.0 \times 10^{-5}$$

- calculando $r^{(1)} = b - A\tilde{x}^{(1)}$, y resolviendo el sistema $Az^{(1)} = r^{(1)}$, se obteniene

$$\tilde{z}^{(1)} = (-2.7003 \times 10^{-8}; 1.2973 \times 10^{-8}; 9.9817 \times 10^{-6})^t$$

Ejemplo:

- Calculado $\tilde{z}^{(0)}$ se puede generar la nueva aproximación $\tilde{x}^{(1)}$

$$\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{z}^{(0)} = (1.0000; 1.0000; 0.99999)^t$$

- y el error real en esta aproximación es

$$\|x - \tilde{x}^{(1)}\|\infty = 1.0 \times 10^{-5}$$

- calculando $r^{(1)} = b - A\tilde{x}^{(1)}$, y resolviendo el sistema $Az^{(1)} = r^{(1)}$, se obteniene

$$\tilde{z}^{(1)} = (-2.7003 \times 10^{-8}; 1.2973 \times 10^{-8}; 9.9817 \times 10^{-6})^t$$

- Puesto que $\|\tilde{z}^{(1)}\| \leq 10^{-5}$, se concluye que

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{z}^{(1)} = (1.0000; 1.0000; 1.0000)^t$$

es suficientemente preciso.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde $\tilde{z}$ es la solución aproximada al sistema $Az = r$.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde $\tilde{z}$ es la solución aproximada al sistema $Az = r$.
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación $\tilde{x} + \tilde{z}$.

Ejemplo:

- Se ha usado la estimación $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$, donde $\tilde{z}$ es la solución aproximada al sistema $Az = r$.
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación $\tilde{x} + \tilde{z}$.
- Este proceso puede ser repetido para refinar la solución sucesivamente hasta alcanzar convergencia.

Algoritmo

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.
output: Solución aproximada $x \in \mathbb{R}^n$.

Resolver $Ax = b$
for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**
    $r = b - Ax$
    Resolver $Ay = r$ (usando eliminación Gaussiana en el mismo orden que en el paso 1).
    Calcular $K(A) = 10^t \dfrac{\|y\|}{\|x\|}$ (solo se calcula la primera vez).
    $x = x + y$
    if $\|y\| < TOL$ **then**
        salida x
        parar
    end
end

Algorithm 1: Algoritmo de Refinamiento Iterativo.

Esquemas de Punto Fijo

Supongase un (SL) $Ax = b$, se busca una matriz $T \in \mathcal{M}_n$ y un vector $c \in \mathbb{R}^n$, de forma que la matriz $I - T$ sea inversible y que la única solución del sistema lineal

$$\underbrace{x = Tx + c}_{(I-T)x=c}$$

es la solución de $Ax = b$.

Esquemas de Punto Fijo

Considerando $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario, se construye una sucesión de vectores $\{x\}_{k=0}^{\infty}$ dada por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c; \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y se pretende que la sucesión $\{x\}_k$ converja a la solución del sistema lineal.

Esquemas de Punto Fijo

Definición

El método iterativo $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. En ese caso,

$$x = Tx + c$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \quad = \quad (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) =$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &Te^{(k-1)} = \cdots = T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &Te^{(k-1)} = \cdots = T^k e^{(0)} \\ &\Rightarrow e^{(k)} = T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &Te^{(k-1)} = \cdots = T^k e^{(0)} \\ &\Rightarrow e^{(k)} = T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

De ese modo, el error en las iteraciones depende de las potencias sucesivas de la matriz T, lo que dará el criterio para la convergencia del Método Iterativo.

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces $e^{(k)} \to 0$ para todo $e^{(0)}$ si y sólo si $T^k \to 0$.

$$\lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| \to 0 \quad sii \quad \lim_{k\to\infty} \|T^k\| \to 0$$

Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces $e^{(k)} \to 0$ para todo $e^{(0)}$ si y sólo si $T^k \to 0$.

$$\lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| \to 0 \quad sii \quad \lim_{k\to\infty} \|T^k\| \to 0$$

- Si T es una matriz diagonalizable, exiten matrices P y Λ, tales que $T = P\Lambda P^{-1}$, donde Λ es una matriz diagonal con los autovalores de T en la diagonal.

$$\begin{aligned} T &= P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

- De esta manera

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|T^k\| \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|P\Lambda^k P^{-1}\| \to 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|\Lambda^k\| \to 0 \\ &\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |\lambda_i^k| \to 0 \Rightarrow |\lambda_i| < 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left.\begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda|\|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\|\|x\| \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda|\|x\| \leq \|T\|\|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración T son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

Teorema

Un esquema iterativo definido por $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ es convergente si y sólo si $\rho(T) < 1$.

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left.\begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda|\|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\|\|x\| \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda|\|x\| \leq \|T\|\|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

Por lo que una condición suficiente para la convergencia es: $\|T\| < 1$

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución, $x^{(k)}$ con q cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} 10^{-q} \|x\|$$

Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución, $x^{(k)}$ con q cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-q}\|x\|$$

- y se desea saber cuántas iteraciones más se tienen que hacer para obtener m cifras correctas más. Interesa, por lo tanto, saber cuántas iteraciones N hay que hacer para que,

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-(q+m)}\|x\|$$

es decir

$$\|e^{(k+N)}\| \leq 10^{-m}\|e^{(k)}\|$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las m cifras significativas es suficiente exigir que $\|T^N\| \leq 10^{-m}$ o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones $x^{(k)}$ se acerca a la solución.
- Se sabe que $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$, que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las m cifras significativas es suficiente exigir que $\|T^N\| \leq 10^{-m}$ o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

- Así, para conseguir m cifras significativas es suficiente hacer N iteraciones con

$$N \geq \frac{m}{R}$$

Tasa de Convergencia

- Donde R se define como:

$$R = -\frac{1}{N} \log_{10} \|T^N\| = -\log_{10} \left(\|T^N\|^{1/N} \right)$$

- El parámetro R se puede interpretar como la velocidad de convergencia: cuanto mayor es R menos iteraciones hay que hacer para incrementar la precisión en la aproximación.
- Se puede comprobar que

$$\lim_{N \to \infty} \|T^N\|^{1/N} = \rho(T)$$

por lo tanto, la velocidad asintótica de convergencia del método es

$$R_\infty = \log_{10} \left(\frac{1}{\rho(T)} \right)$$

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para $\rho(T) = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \simeq 0$ positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.

Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para $\rho(T) \simeq 0$, la velocidad de convergencia R_∞ es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para $\rho(T) = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \simeq 0$ positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.
- En cambio, si $\rho(T) > 1$ la velocidad de convergencia es negativa por lo que la convergencia no está asegurada.

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

donde $T = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b = (I - T)A^{-1}b$, por lo que el método así construido es consistente con el sistema.

Construcción de los Métodos

- El esquema anterior tambén es esquivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el residual de la k-ésima iteración y M es un precondicionador del sistema.

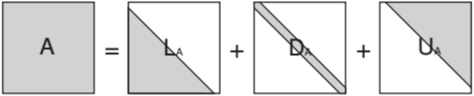
Construcción de los Métodos

- El esquema anterior tambén es esquivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ es el residual de la k-ésima iteración y M es un precondicionador del sistema.

- En lo sucesivo se considera la descomposición aditiva de la matriz A como



donde L_A es la parte triangular inferior de la matriz sin incluir la diagonal, D_A es la diagonal de A, y U_A es la parte triangular superior sin incluir la diagonal.

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A, y $N = L + U$

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A, y $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.

Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz A del tipo $A = M - N$, con $M = D$, parte diagonal de la matriz A, y $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.
- De esta manera queda que $A = D - L - U = D - (L + U)$, por lo tanto el sistema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - (L + U))x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$$

Método de Jacobi

- Así, se calcula la solución del sistema, como el límite de la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \in N}$ donde se define el término $(k+1)$-ésimo como:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

siendo así su matriz de iteración:

$$T = D^{-1}(L+U)$$

Entonces el sistema ha sido escrito como un proceso iterativo de la forma

$$x^{(n+1)} = Tx^{(n)} + c.$$

Método de Jacobi

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,i}x_i + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Método de Jacobi

- Si $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces despejando x_i de la i-ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Método de Jacobi

- Si $a_{i,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces despejando x_i de la i-ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

- Conocido $x^{(k-1)}$, se calcula la aproximación $x^{(k)}$, mediante la fórmula:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{i,i}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

que es llamada fórmula escalar de iteración del método de Jacobi.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

y tomando como vector inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Procedamos a realizar la descomposición de la matriz del sistema:

$$M = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$N = L + U$$

Para comprobar si estamos convergiendo a la solución tomaremos elvalor de la norma del residuo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(0)}\|_\infty = 4$$

Ejemplo:

El primero paso del esquema vendría dado por:

$$Dx^{(1)} = Nx^{(0)} + b = (L+U)x^{(0)} + b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al resolver el sistema diagonal:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.75 \\ 3 \\ -0.75 \end{pmatrix}$$

Con vector residual

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(1)}\|_\infty = 1$$

Ejemplo:

Por tanto, el residuo ha disminuido. Si seguimos iterando:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.125 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad \|r^{(2)}\|_\infty = 0.5$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.5312 \\ 3.0000 \\ -0.50312 \end{pmatrix} \qquad \|r^{(3)}\|_\infty = 0.125$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.0156 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad \|r^{(4)}\|_\infty = 0.0625$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} -1.5039 \\ 3.0000 \\ -0.5039 \end{pmatrix} \qquad \|r^{(5)}\|_\infty = 1.5625e-02$$