Práctica III. Cálculo III

1. Si $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (2, -1)$, $V_3 = (-3, 2)$ y $W_1 = (1, 0)$, $W_2 = (0, -1)$, $W_3 = (1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(V_i) = W_i$ para $i = 1, 2, 3$?

2. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y; y + 2z)$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y^2; y + 2z)$.

3. Sean $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y la transformación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por:
   $F(a, b, c) = (a + b)v_1 - cv_2$; donde $v_1 = x^2 + 1; v_2 = 3x - 1 \in \mathcal{P}_2 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
   Determinar si F es lineal.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una transformación lineal , tal que: $T(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$; $T(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$; $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Encontrar $T(x, y, z)$

5. Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación lineal tal que $f((1, -1)) = (-1, -2, -3)$ y $f((-3, 2)) = (0, 5, 3)$. Determinar, si es posible, $f((x, y))$ donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Sea la transformación $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{R}^2$, definida por:

   $$S(ax^2 + bx + c) = (a + b, c)$$

   Determinar:

   (a) Si S es una transformación lineal

   (b) El núcleo de la transformación S

   (c) El recorrido de la transformación S

   (d) Verificar $dim(\mathcal{P}_2) = dim(Nu(S)) + dim(Img(S))$

7. Para la transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2$ definida por:

   $$S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y & y + z \\ y + z & x - y + z \end{pmatrix}$$

   donde $\mathcal{M}_2$ es el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, obtener:

   (a) El núcleo $N(S)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

   (b) El recorrido $S(\mathbb{R}^3)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

   (c) Demostrar que: $dim\mathbb{R}^3 = dimN(S) + dimS(\mathbb{R}^3)$.

8. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

   $$T(x, y, z) = (3x + y, 6x - z, 2y + z)$$

   Obtener:

   (a) El núcleo de T y su dimensión.

   (b) El recorrido de T y su dimensión.

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = 2x - 3y + z$$

   (a) Encontrar $[T]_{\beta,\alpha}$ donde $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $\alpha = \{2\}$

   (b) Encontrar kernel (T), Imagen (T), Nulidad(T) y Rango (T).

10. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por.

$$\begin{aligned} T(1,1,1,1) &= (7,2,3) \\ T(1,1,1,0) &= (6,1,7) \\ T(1,1,0,0) &= (4,1,5) \\ T(1,0,0,0) &= (1,0,1) \end{aligned}$$

   Hallar $T(x, y, z, w)$.

11. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

12. Dada $f : V \to V$, calcular $M_{BB'}(f)$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$

      i. $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

      ii. $B = \{(1,2,1); (-1,1,3); (2,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0); (1,2,3); (2,3,4)\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

13. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

   (b) Hallar una base de $Nu(f)$ y una base de $Im(f)$.

   (c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

14. Sean $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales definidas por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - z \\ w + 2z \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y + 4z \end{pmatrix}$$

   encontrar la transformación lineal $S \circ T$.

15. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

   (a) $f(x, y) = (x, 0)$

   (b) $f(x, y) = (0, y)$

(c) $f(x,y) = (x, -y)$

(d) $f(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y))$

(e) $f(x,y) = (x \cdot cos(t) - y \cdot sen(t), x \cdot sen(t) + y \cdot cos(t))$

16. Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$$

y la siguiente aplicaciónla aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(v) = Av$.

(a) ¿Para qué valores de α el vector $u = (1, -1, 7)^t$ pertenece a la imagen de T?

(b) ¿Para qué valores de α el vector $v = (2, 1, -5, 0)^t$ pertenece al núcleo de T?

17. Considere los vectores

$$b_1 = (1,0,1)^t, \quad b_2 = (-1,1,2)^t, \quad b_3 = (0,1,5)^t, \quad u = (1,2,3)^t.$$

Demostrar que $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas de u con respecto a B. Cierta transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifica que $T(b_1) = e_1$, $T(b_2) = e_2$, $T(b_3) = e_3$, siendo $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. Escribir la correspondiente matriz A_{T,B_0} y hallar el núcleo y la imagen de T.

18. Sean la base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1,1)^t$ y $v_2 = (-1,0)^t$, y la transformación lineal dada por $T((x,y)^t) = (4x - 2y, 2x + y)^t$, expresada respecto a la base canónica. Encontrar la matriz de T relativa a la base dada.

19. Determinar las ecuaciones del giro en el plano con centro $(3,4)$ y ángulo $45°$. Calcular su inversa.