Práctica III. Cálculo III

1. Si $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (2, -1)$, $V_3 = (-3, 2)$ y $W_1 = (1, 0)$, $W_2 = (0, -1)$, $W_3 = (1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(V_i) = W_i$ para $i = 1, 2, 3$?

2. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y; y + 2z)$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y^2; y + 2z)$.

3. Sean $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y la transformación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por:
   $F(a, b, c) = (a + b)v_1 - cv_2$; donde $v_1 = x^2 + 1; v_2 = 3x - 1 \in \mathcal{P}_2 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
   Determinar si F es lineal.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una transformación lineal , tal que: $T(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$; $T(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$; $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Encontrar $T(x, y, z)$

5. Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación lineal tal que $f((1, -1)) = (-1, -2, -3)$ y $f((-3, 2)) = (0, 5, 3)$. Determinar, si es posible, $f((x, y))$ donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Sea la transformación $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{R}^2$, definida por:

   $$S(ax^2 + bx + c) = (a + b, c)$$

   Determinar:

   (a) Si S es una transformación lineal

   (b) El núcleo de la transformación S

   (c) El recorrido de la transformación S

   (d) Verificar $dim(\mathcal{P}_2) = dim(Nu(S)) + dim(Img(S))$

7. Para la transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2$ definida por:

   $$S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y & y + z \\ y + z & x - y + z \end{pmatrix}$$

   donde $\mathcal{M}_2$ es el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, obtener:

   (a) El núcleo $N(S)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

   (b) El recorrido $S(\mathbb{R}^3)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

   (c) Demostrar que: $dim\mathbb{R}^3 = dimN(S) + dimS(\mathbb{R}^3)$.

8. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

   $$T(x, y, z) = (3x + y, 6x - z, 2y + z)$$

   Obtener:

   (a) El núcleo de T y su dimensión.

   (b) El recorrido de T y su dimensión.

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = 2x - 3y + z$$

   (a) Encontrar $[T]_{\beta,\alpha}$ donde $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y $\alpha = \{2\}$
   (b) Encontrar kernel (T), Imagen (T), Nulidad(T) y Rango (T).

10. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por.

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1, 1) &= (7, 2, 3) \\ T(1, 1, 1, 0) &= (6, 1, 7) \\ T(1, 1, 0, 0) &= (4, 1, 5) \\ T(1, 0, 0, 0) &= (1, 0, 1) \end{aligned}$$

    Hallar $T(x, y, z, w)$.