

Práctica III. Cálculo III

1. Si $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (2, -1)$, $V_3 = (-3, 2)$ y $W_1 = (1, 0)$, $W_2 = (0, -1)$, $W_3 = (1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(V_i) = W_i$ para $i = 1, 2, 3$?
2. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:
 - (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y; y + 2z)$.
 - (b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x; y; z)) = (x - y^2; y + 2z)$.
3. Sean \mathcal{P}_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y la transformación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$ definida por:
 $F(a, b, c) = (a + b)v_1 - cv_2$; donde $v_1 = x^2 + 1$; $v_2 = 3x - 1 \in \mathcal{P}_2 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
Determinar si F es lineal.
4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una transformación lineal, tal que: $T(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$; $T(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$; $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Encontrar $T(x, y, z)$
5. Se considera $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicación lineal tal que $f((1, -1)) = (-1, -2, -3)$ y $f((-3, 2)) = (0, 5, 3)$. Determinar, si es posible, $f((x, y))$ donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
6. Sea la transformación $S : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{R}^2$, definida por:

$$S(ax^2 + bx + c) = (a + b, c)$$

Determinar:

- (a) Si S es una transformación lineal
 - (b) El núcleo de la transformación S
 - (c) El recorrido de la transformación S
 - (d) Verificar $\dim(\mathcal{P}_2) = \dim(Nu(S)) + \dim(Img(S))$
7. Para la transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_2$ definida por:

$$S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2y & y + z \\ y + z & x - y + z \end{pmatrix}$$

donde \mathcal{M}_2 es el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, obtener:

- (a) El núcleo $N(S)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.
 - (b) El recorrido $S(\mathbb{R}^3)$ de la transformación, su dimensión y una de sus bases.
 - (c) Demostrar que: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(S) + \dim S(\mathbb{R}^3)$.
8. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (3x + y, 6x - z, 2y + z)$$

Obtener:

- (a) El núcleo de T y su dimensión.
- (b) El recorrido de T y su dimensión.

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = 2x - 3y + z$$

- (a) Encontrar $[T]_{\beta, \alpha}$ donde $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y $\alpha = \{2\}$
- (b) Encontrar kernel (T), Imagen (T), Nulidad(T) y Rango (T).

10. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por.

$$T(1, 1, 1, 1) = (7, 2, 3)$$

$$T(1, 1, 1, 0) = (6, 1, 7)$$

$$T(1, 1, 0, 0) = (4, 1, 5)$$

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

Hallar $T(x, y, z, w)$.

11. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

12. Dada $f : V \rightarrow V$, calcular $M_{BB'}(f)$ en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$; $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$
 - i. $B = B'$ la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - ii. $B = \{(1, 2, 1); (-1, 1, 3); (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0); (1, 2, 3); (2, 3, 4)\}$.
- (b) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

13. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?
- (b) Hallar una base de $Nu(f)$ y una base de $Im(f)$.
- (c) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

14. Sean $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales definidas por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - z \\ w + 2z \end{pmatrix} \quad y \quad S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y + 4z \end{pmatrix}$$

encontrar la transformación lineal $S \circ T$.