Resolución Numérica de Sistemas de Ecuacionesl Lineales.

José Luis Ramírez B.

November 28, 2024

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.
- La búsqueda de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un tema de gran importancia en la ciencia.

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.
- La búsqueda de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un tema de gran importancia en la ciencia.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.
- Además, se analizarán con detalle algunos métodos directos.

Motivación.

Si bien existen métodos exactos como el método de Cramer, estos son muy costosos de aplicar en situaciones donde los sistemas a resolver tienen muchas ecuaciones.
El número total de operaciones para resolver un sistema de dimensión n con este método es

$$T_C = (n+1)^2 n! - 1$$

n	T_C
5	4319
10	4×10^8
100	10^{158}

Table: Operaciones elementales del método de Cramer segun el tamaño de la matriz(n).

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)
- Necesidades de almacenamiento (memoria)

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)
- Necesidades de almacenamiento (memoria)
- Rango de aplicabilidad (sobre que tipo de matrices se pueden aplicar)

Introducción.

Un sistema de n-ecuaciones (con coeficientes reales) en las n-incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de n ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n - b_i$$

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

A los números a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema y a los b_i términos independientes.

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

A los números a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema y a los b_i términos independientes.

Si $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $f_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, entonces se dice que C es una solución real del sistema planteado.

Si se introducen las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

el sistema se puede representar de forma más compacta por

$$Ax = b$$

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a:

1. Su tamaño
   1. Pequeños: $n \leq 300$ donde n representa el número de ecuaciones.
   2. Grandes: $n > 300$

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a:

1. Su tamaño
    1. Pequeños: $n \leq 300$ donde n representa el número de ecuaciones.
    2. Grandes: $n > 300$
2. Su estructura
    1. Si la matriz posee pocos elementos nulos diremos que se trata de un sistema lleno.
    2. Si, por el contrario, la matriz contiene muchos elementos nulos, diremos que la matriz, y por lo tanto, el sistema lineal es disperso o *sparce*.

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Superiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Superiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Inferiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m \times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m \times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Teorema

Si x_0 es una solución de $Ax = b$, el conjunto de soluciones de la ecuación está dado por $x_0 + ker(A)$.

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m\times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Teorema

Si x_0 es una solución de $Ax = b$, el conjunto de soluciones de la ecuación está dado por $x_0 + ker(A)$.

Corolario

Una solución de $Ax = b$ es única si y sólo si $ker(A) = \emptyset$.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.
- Existe una matriz cuadrada A^{-1} (matriz inversa) tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.
- Existe una matriz cuadrada A^{-1} (matriz inversa) tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- La matriz A tiene determinante no nulo

$$|A| = \det(A) \neq 0$$

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

- No es eficiente (demasiadas operaciones).

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

- No es eficiente (demasiadas operaciones).
- Si el determinante de A es próximo a cero, el error de redondeo puede ser muy grande, y esto es dificil de estimar numéricamente

$$\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$$

Se requieren métodos numéricos alternativos

Se requieren métodos numéricos alternativos

- métodos directos, son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes. Suelen ser algoritmos “complicados de implementar”

Se requieren métodos numéricos alternativos

- métodos directos, son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes. Suelen ser algoritmos “complicados de implementar”
- métodos indirectos o iterativos, tienen asociado un error de truncamiento y se usan preferiblemente para matrices grandes ($n >> 1000$) cuando los coeficientes de A son la mayoría nulos (matrices sparse). Algoritmos sencillos de implementar que requiere aproximación inicial y que en general no tiene porqué converger (requieren análisis de convergencia previo).

Métodos Directos

- **CASO 1**: La matriz A de coeficientes del sistema $Ax = b$ es triangular (superior o inferior) con todas sus componentes sobre la diagonal principal no nulas.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1.n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Como $a_{n,n} \neq 0$, se puede despejar x_n de la última ecuación, y se obtiene:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

conocido el valor de x_n, se puede emplear la penúltima ecuación para conocer x_{n-1}

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

conocidos x_n y x_{n-1}, se obtiene de la antepenúltima ecuación

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - (a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n)}{a_{n-2,n-2}}$$

En general, conocidos $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$, se obtiene:

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} x_k}{a_{i,i}} \qquad \forall i = n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

El método anterior para determinar la solución del sistema se denomina sustitución regresiva o hacia atrás.

Si la matriz de coeficientes del sistema es triangular inferior, para resolver el sistema podemos proceder de manera similar al caso anterior, pero empezando por despejar x_1 de la primera ecuación. El procedimiento en este caso se denomina sustitución progresiva o hacia adelante.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,i-1}x_{i-1} + a_{n,i}x_i + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

- **CASO 2**: La matriz A de coeficientes, del sistema lineal $Ax = b$, es tal que no se requieren intercambios de filas para culminar con éxito la eliminación Gaussiana. Digamos que el sistema $Ax = b$ tiene la forma

$$
\begin{cases}
E_1: & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
E_2: & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \\
E_j: & a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,j}x_j + \cdots + a_{j,n}x_n & = & b_j \\
 & \vdots & & \\
E_i: & a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & \vdots & & \\
E_n: & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{cases}
$$

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

1. Se elimina el coeficiente de x_1 en cada una de las ecuaciones $E_2, E_3, \ldots, E_n$ para obtener un sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\right) E_1\right) \to E_i^{(1)}, \quad \forall \ i = 2, 3, \ldots, n$$

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

1. Se elimina el coeficiente de x_1 en cada una de las ecuaciones $E_2, E_3, \ldots, E_n$ para obtener un sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\right) E_1\right) \to E_i^{(1)}, \quad \forall\ i = 2, 3, \ldots, n$$

2. Se elimina el coeficiente de x_2 en cada una de las ecuaciones $E_3^{(1)}, E_4^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)}$, para obtener un sistema equivalente $A^{(2)}x = b^{(2)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i^{(1)} - \left(\frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}\right) E_2^{(1)}\right) \to E_i^{(2)}, \quad \forall\ i = 3, 4, \ldots, n$$

1. En general, eliminados los coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$, se elimina el coeficiente de x_j en cada una de las ecuaciones, para obtener un sistema equivalente $A^{(j)}x = b^{(j)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i^{(j-1)} - \left(\frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}}\right) E_j^{(j-1)}\right) \to E_i^{(j)}, \quad \forall \; i = j+1, \ldots, n$$

debe ocurrir que $a_{j,j} \neq 0$.

Los números

$$m_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}} \quad \forall \ j = 1, \ldots, n-1, \ i = j+1, \ldots, n$$

se llaman multiplicadores.
El sistema resultante tendrá entonces la forma triangular superior con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto, se puede resolver mediante sustitución regresiva.

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$
output: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que A es triangular superior.

for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**
    $factor \leftarrow \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$
    $a_{i,k} \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - factor * a_{k,j}$
    end
    $b_i \leftarrow b_i - factor * b_k$
  end
end

Algorithm 1: Algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo.

Utilice la eliminación Gaussiana sin pivoteo para resolver el sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Pivoteo Parcial

Ejemplo de la necesidad de pivoteo parcial, en una aritmética de 4 dígitos con redondeo correcto

$$\begin{cases} 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 10,00$ y $x_2 = 1,000$.

Pivoteo Parcial

- Si se realizan los pasos de eliminación Gaussiana se obtiene el siguiente resultado $\tilde{x}_1 = -10,00$ y $\tilde{x}_2 = 1,001$, el cual difiere bastante de la solución real, en el valor x_1.

Pivoteo Parcial

- Si se realizan los pasos de eliminación Gaussiana se obtiene el siguiente resultado $\tilde{x}_1 = -10,00$ y $\tilde{x}_2 = 1,001$, el cual difiere bastante de la solución real, en el valor x_1.
- El error tan grande de la solución numérica de x_1, resulta del error pequeño de $0,001$ al resolver para x_2.

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.
- Pivote =max$(|0.003|; |5.291|) = 5.291$, por tanto se realiza un intercambio de filas quedando el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{cases}$$

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.
- Pivote $=$max$(|0.003|; |5.291|) = 5.291$, por tanto se realiza un intercambio de filas quedando el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{cases}$$

- cuya solución aproximada es $\tilde{x}_2 = 1 = x_2$ y $\tilde{x}_1 = 10 = x_1$.

Pivoteo Parcial

- Por tanto para cada paso de eliminación gaussiana tenemos que:

EGPP

$$\text{Paso } k \left\{ \begin{array}{l} \text{Elegir } p \text{ como el primero tal que} \\ |a_{p,k}^{(k-1)}| = \max |a_{i,k}^{(k-1)}| \quad k \leq i \leq n \end{array} \right.$$

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$

- Solución exacta con 4 decimales correctos $x_1 = x_2 = 0.9999$.

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

- Solución exacta con 4 decimales correctos $x_1 = x_2 = 0.9999$.
- No hay pivoteo, ya que $|a_{1,1}| = |a_{2,1}|$. Se obtiene $\tilde{x}_2 = 1$ y $\tilde{x}_1 = 0$.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$S_1 = \max(|1|, |10^4|) = 10^4$$
$$S_2 = \max(|1|, |10^{-4}|) = 1$$

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$S_1 = \max(|1|, |10^4|) = 10^4$$
$$S_2 = \max(|1|, |10^{-4}|) = 1$$

- se obtiene el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$S_1 = \max(|1|, |10^4|) = 10^4$$
$$S_2 = \max(|1|, |10^{-4}|) = 1$$

- se obtiene el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

- y a este nuevo sistema lineal, equivalente al sistema original, se aplica la estrategia de pivoteo parcial.

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.
- $$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 10^4 x_2 & = & 10^4 \\ x_1 + 10^{-4} x_2 & = & 1 \end{array} \right. \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.
- $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 10^4 x_2 & = & 10^4 \\ x_1 + 10^{-4} x_2 & = & 1 \end{array} \right. \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$
- $$\max(|1|, |10^4|, |1|, |10^{-4}|) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^4 & 1 & 10^4 \\ 10^{-4} & 11 & 1 \end{array} \right)$$

Pivoteo Completo

- Entonces la estrategia de pivoteo completo consiste en
  1. $$\text{Paso } k \left\{ \begin{array}{l} \text{elegir } p \text{ y } q \text{ como los menores tales que} \\ \left| a_{p,q}^{(k-1)} \right| = \max \left| a_{i,j}^{(k-1)} \right| \quad k \leq i, j \leq n \end{array} \right.$$
  2. Intercambiar filas k y p.
  3. Intercambiar columnas k y q.

Práctica

- Resuelva el siguiente sistema lineal con truncamiento a 5 dígitos
$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45 \\ -3x_1 - 2.249x_2 + 7x_3 = 1.751 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$
- Usando Eliminación Gaussiana sin Pivoteo y luego con las diferentes estrategias de pivoteo compare los resultados obtenidos.

Conteo de Operaciones

$$\sum_{i=1}^{m} cf(i) = c\sum_{i=1}^{m} f(i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f(i) + g(i) = \sum_{i=1}^{m} f(i) + \sum_{i=1}^{m} g(i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = m$$

$$\sum_{i=k}^{m} 1 = \sum_{i=k-k+1}^{m-k+1} 1 = \sum_{i=1}^{m-k+1} 1 = m - k + 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} i = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = 1 + 4 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Conteo de Operaciones

Dadas estas definiciones, se puede hacer el conteo de operaciones para el algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo.

$$\text{Total de Operaciones} = (+/-) + (\times/\div)$$

Algoritmo de Eliminación Gaussiana sin Pivoteo.

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

output: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que A es triangular superior.

for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**
    $factor \leftarrow \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$
    $a_{i,k} \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - factor * a_{k,j}$
    end
    $b_i \leftarrow b_i - factor * b_k$
  end
end

Práctica

- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de multiplicación de dos matrices triangulares superiores.
- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de solución de una sistema tridiagonal de ecuaciones lineales.
- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de Gauss-Jordan (cuando la matriz del sistema se reduce a la matriz identidad).

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior tiene como solución un vector de componentes unitarias.

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior tiene como solución un vector de componentes unitarias.
- El sistema lineal resultante en realidad no será ese, sino que será un sistema lineal perturbado tanto en la matriz del sistema como en el término independiente. El sistema lineal perturbado podría tener el siguiente aspecto.

Condicionamiento de Sistemas.

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}$$

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 23.02 \\ 33.03 \\ 31.04 \end{pmatrix}$$

y por tanto ΔA y Δb, las perturbaciones, tendrían los siguientes valores:

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

- Cómo varía la solución del sistema lineal cuando se perturba la matriz del sistema y cuando se perturba sólo el término independiente?.

Condicionamiento de Sistemas.

- Cómo varía la solución del sistema lineal cuando se perturba la matriz del sistema y cuando se perturba sólo el término independiente?.
- Resolviendo primero el sistema lineal:

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.36 \\ 1.35 \\ 0.79 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta x = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -1.36 \\ 0.35 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

Se ha perturbado el término independiente

$$\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 3.03 \times 10^{-4}$$

y esta perturbación induce una variación en la solución

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.36$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{ccc} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{ccc} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

Usando la propiedad para normas matriciales:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{ccc} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

Usando la propiedad para normas matriciales:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

De la solución exacta, $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$, lo que implica que:

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

De las dos relaciones anteriores se llega a que:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ representa el error relativo en los resultados, y $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ el error relativo en los datos.

De las dos relaciones anteriores se llega a que:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ representa el error relativo en los resultados, y $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ el error relativo en los datos.
De la relación, parece deducirse que el número $\|A\|\|A^{-1}\|$ es el factor determinante de la relación, ya que si es pequeño se tendrá el efecto deseado, y si no, ocurre lo contrario.

Definición

Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada y A una matriz invertible. Se denomina número de condición de la matriz A respecto de la norma $\|\cdot\|$ a la expresión:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que
$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que
$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$
- El concepto de número de condición de una matriz se generaliza a cualquier matriz A (no necesariamente cuadrada) de rango completo mediante la expresión
$$\kappa(A) = \|A\| \|A^\dagger\|$$
donde $A^\dagger$ es la matriz pseudoinversa de la matriz A.

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que
$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$
- El concepto de número de condición de una matriz se generaliza a cualquier matriz A (no necesariamente cuadrada) de rango completo mediante la expresión
$$\kappa(A) = \|A\|\|A^\dagger\|$$
donde $A^\dagger$ es la matriz pseudoinversa de la matriz A.
- El número de condición de una matriz A es un indicador del error de amplificación que produce en un vector x el someterlo a la transformación que define dicha matriz A.

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.
- Comparando la solución de

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.
- Comparando la solución de

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

- De la segunda igualdad, como $Ax = b$, haciendo $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$, despreciando el producto $\Delta A \cdot \Delta x$, resulta que

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\|$$

- Expresión que también se puede escribir como

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- Expresión que también se puede escribir como

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- Así pues, el error relativo que resulta de perturbar ligeramente los coeficientes de la matriz del sistema $Ax = b$ está también acotado en términos del número de condición de la matriz A.

Condicionamiento de una Matriz.

Por su definición está claro que el condicionamiento de una matriz depende de la norma elegida. Una propiedad interesante es que el condicionamiento tiene como cota inferior a la unidad. Esto es consecuencia de que la norma inducida de la matriz identidad es siempre 1.

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

Para cualquier norma subordinada se verifican las siguientes propiedades del condicionamiento de una matriz:

1. $cond(I) = 1.$
2. $cond(A) \geq 1.$
3. $cond(A) = cond(A^{-1}).$
4. $cond(kA) = cond(A) \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}.$

Para cualquier norma subordinada se verifican las siguientes propiedades del condicionamiento de una matriz:

1. $cond(I) = 1.$
2. $cond(A) \geq 1.$
3. $cond(A) = cond(A^{-1}).$
4. $cond(kA) = cond(A) \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}.$

Otra propiedad muy interesante es la que relaciona el condicionamiento con el radio espectral de la matriz del sistema caso de que esta sea simétrica. Si la matriz es simétrica su norma 2, es su radio espectral. Por tanto:

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

Práctica.

- Considere los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

  y

$$Bx = c \rightarrow \begin{bmatrix} 0.66 & 3.34 \\ 1.99 & 10.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

  La solución de ambos es el vector $[1, 1]^T$

- Si se introduce una perturbación $[-0.04; -0.06]^T$ en el término independiente, calcule el error que se genera en la solución.
- Halle el condicionamiento de cada sistema en norma 2.

Práctica.

- Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\varepsilon > 0$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$
- La matriz de Hilbert

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n-1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(n-1) & 1/n & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

  es un ejemplo clásico de una matriz mal condicionada. En MATLAB se puede construir fácilmente usando el comando `hilb(n)`. Escriba un script de MATLAB para calcular los valores de $\kappa_2(H_n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$. Dibuje los resultados en escala logarítmica (comando `semilogy`).

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.
- Sea $L^{-1} = N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$, entonces $L^{-1}A = U \Rightarrow A = LU$, ya que el determinante de una transformación fila es ± 1.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.
- Sea $L^{-1} = N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$, entonces $L^{-1}A = U \Rightarrow A = LU$, ya que el determinante de una transformación fila es ± 1.
- Además L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.
- El hecho de que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$ dice que $L^{-1}L' = I$.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.
- El hecho de que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$ dice que $L^{-1}L' = I$.
- Por lo tanto $L^{-1}L' = I$ por lo que $L = L'$ y por tanto $U = U'$, es decir, la factorización es única.

Práctica.

- Halle la descomposición LU de la siguiente matriz:

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:
- $Lz = b \Rightarrow$ sustitución hacia delante

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:
- $Lz = b \Rightarrow$ sustitución hacia delante
- $Ux = z \Rightarrow$ sustitución hacia atrás.

Definición

Se dice que una matriz A es diagonalmente dominante si

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Definición

Se dice que una matriz A es diagonalmente dominante si

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \ \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Teorema

Si A es estrictamente diagonal dominante entonces A admite una descomposición LU que se obtiene mediante el proceso de eliminación Gaussiana.

Descomposición de Matrices

- $a_{i,j} = \sum_{p=1}^{r} l_{i,p} u_{p,j} \;\; r = \min(i,j)$
- $a_{k,j} = \sum_{p=1}^{k} l_{k,p} u_{p,j} \;\; j \geq k$
- $a_{i,k} = \sum_{p=1}^{k} l_{i,p} u_{p,k} \;\; i > k$

Descomposición de Matrices

- $$\text{Diagonal } k = j = 1 \Rightarrow a_{1,1} = l_{1,1}u_{1,1}$$
  $$a_{k,j} = l_{k,1}u_{1,j} + l_{k,2}u_{2,j} + \cdots + l_{k,k}u_{k,j}$$
  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - l_{k,1}u_{1,j} - l_{k,2}u_{2,j} - \cdots - l_{k,k-1}u_{k-1,j}$$
  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j} \text{ como } k = j$$
  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,k}$$

Descomposición de Matrices

- $$\begin{aligned}
&j > k \\
&a_{k,j} = l_{k,1}u_{1,j} + l_{k,2}u_{2,j} + \cdots + l_{k,k}u_{k,j} \\
&\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - l_{k,1}u_{1,j} - l_{k,2}u_{2,j} - \cdots - l_{k,k-1}u_{k-1,j} \\
&\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j} \\
&\Rightarrow u_{k,j} = \frac{a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j}}{l_{k,k}}
\end{aligned}$$

Descomposición de Matrices

- $$i > k$$
  $$a_{i,k} = l_{i,1}u_{1,k} + l_{i,2}u_{2,k} + \cdots + l_{i,k}u_{k,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k}u_{k,k} = a_{i,k} - l_{i,1}u_{1,k} - l_{i,2}u_{2,k} - \cdots - l_{i,k-1}u_{k-1,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k}u_{k,k} = a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}}{u_{k,k}}$$

Dadas estas definiciones podemos escribir el algoritmo de factorización LU

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
output: Matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que L es TI y Matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que U es TS.

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  /*Especificar un valor distinto de cero para $l_{k,k}$ ó $u_{k,k}$ y calcular el otro a partir de él:*/

$$l_{k,k}u_{k,k} \leftarrow a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,k}$$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$u_{k,j} \leftarrow \frac{a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j}}{l_{k,k}}$$

  end
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$l_{i,k} \leftarrow \frac{a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}}{u_{k,k}}$$

  end
end

Algorithm 2: Algoritmo de factorización LU.

Descomposición de Matrices

- Si se hace $l_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Doolittle, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.

Descomposición de Matrices

- Si se hace $l_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Doolittle, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.
- Si se hace $u_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Crout, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.

Factorización LU con Pivoteo

- La forma práctica en la que se implementa el método de eliminación Gaussiana suele incorporar los pivoteos, al menos el pivoteo parcial para no producir resultados incorrectos. ¿Cómo se altera la factorización LU si se quiere tener en cuenta el pivoteo?

Factorización LU con Pivoteo

- La forma práctica en la que se implementa el método de eliminación Gaussiana suele incorporar los pivoteos, al menos el pivoteo parcial para no producir resultados incorrectos. ¿Cómo se altera la factorización LU si se quiere tener en cuenta el pivoteo?
- Cada una de las transformaciones elementales que se obtienen en la factorización LU son de la forma:

$$N_i = I - \alpha_i \otimes e_i^t$$

donde

Factorización LU con Pivoteo

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i+1,i}^{(i)}/a_{i,i}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{n,i}^{(i)}/a_{i,i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

y e_i es el elemento i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

- Estas matrices de permutación P_i actúan siempre permutando dos filas i, j con $j > i$.

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

- Estas matrices de permutación P_i actúan siempre permutando dos filas i, j con $j > i$.
- Veamos que definiendo $P = P_{n-1}\cdots P_1$ la eliminación Gaussiana con pivoteo proporciona la factorización LU de PA.

Factorización LU con Pivoteo

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}$ regular, entonces existe una matriz de permutación P y dos matrices L y U triangular inferior y superior respectivamente que satisfacen

$$PA = LU$$

La matriz L tiene todos los elementos de su diagonal iguales a unos (matriz triangular inferior unitaria).

Factorización LU con Pivoteo

Demostración

Del proceso de eliminación Gaussiana se tiene $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1A = U$, así:

$$A = P_1N_1^{-1}P_2N_2^{-1}\cdots P_{n-2}N_{n-2}^{-1}P_{n-1}N_{n-1}^{-1}U$$

Premultiplicando por $P = P = P_{n-1}\cdots P_1$ se obtiene

$$PA = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_2P_1P_1N_1^{-1}P_2N_2^{-1}\cdots P_{n-2}N_{n-2}^{-1}P_{n-1}N_{n-1}^{-1}U$$

como $P_1P_1 = I$ y $P_2N_1^{-1}P_2$ es triangular inferior y $P_{n-1}\cdots P_2N_1^{-1}P_2N_2^{-1}\cdots P_{n-1}N_{n-1}^{-1}$ también lo es, se concluye que PA posee descomposición LU como se quería demostrar.

Factorización LU con Pivoteo

Lema

La matriz A admite una factorización LU si y sólo si se cumple que $\det(A_k) \neq 0, k = 1, \ldots, n$.

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$
- $Lz = Pb$, hallando z por sustitución progresiva.

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$
- $Lz = Pb$, hallando z por sustitución progresiva.
- $Ux = z$, hallando x por sustitución regresiva.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.
- Es conocido que toda matriz simétrica y definida positiva tiene sus autovalores reales y positivos, además, en la factorización LU todos los pivotes son reales y positivos.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.
- Es conocido que toda matriz simétrica y definida positiva tiene sus autovalores reales y positivos, además, en la factorización LU todos los pivotes son reales y positivos.

Proposición (Criterio de Sylvester de matriz definida positiva)

Sea A una matriz real simétrica $n \times n$. Dicha matriz es definida positiva si y sólo si todos sus menores principales son positivos.

Factorización de Cholesky

Teorema

Si A es una matriz real, simétrica y positiva definida, entonces tiene una factorización única $A = LL^t$ en donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Factorización de Cholesky

Teorema

Si A es una matriz real, simétrica y positiva definida, entonces tiene una factorización única $A = LL^t$ en donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Demostración

Partiendo de que $A = LU$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
LU = A = A^T = (LU)^T = U^T L^T \quad &\Rightarrow \quad LU = U^T L^T \Rightarrow \\
LU(L^T)^{-1} = U^T L^T (L^T)^{-1} \quad &\Rightarrow \quad LU(L^T)^{-1} = U^T \\
L^{-1} LU(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T \quad &\Rightarrow \quad U(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T \\
U(L^T)^{-1} = D \Rightarrow U(L^T)^{-1} L^T = DL^T \quad &\Rightarrow \quad U = DL^T \Rightarrow A = LDL^T
\end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

Sabemos que A es positiva definida por tanto LDL^t es también positiva definida

Definición

Una matriz $A_{n\times n}$ es positiva definida si:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } x \neq 0 / x^t A x > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$
- Definiendo un vector $y = L^T x$. Como L es no singular (porque A es definida positiva, y la factorización LDL^T existe), la transformación de x a y es biyectiva. Esto significa que para cada x no nulo existe un y no nulo, y viceversa.

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$
- Definiendo un vector $y = L^T x$. Como L es no singular (porque A es definida positiva, y la factorización LDL^T existe), la transformación de x a y es biyectiva. Esto significa que para cada x no nulo existe un y no nulo, y viceversa.
- La desigualdad se convierte en:

$$y^T Dy > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$

donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$

  donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.
- La suma de términos de la forma $d_{ii}y_i^2$ (donde y_i^2 siempre es no negativo) es estrictamente mayor que cero para cualquier vector y no nulo.

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$
donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.
- La suma de términos de la forma $d_{ii}y_i^2$ (donde y_i^2 siempre es no negativo) es estrictamente mayor que cero para cualquier vector y no nulo.
- Esto solo es posible si todos los d_{ii} son positivos. Si hubiera un $d_{ii} \leq 0$, se podría elegir un vector y donde y_i sea la única componente no nula y la desigualdad no se cumpliría.

Factorización de Cholesky

- Por lo anterior todos los elementos de la diagonal de D son positivos, entonces podemos escribir $D = D^{1/2}D^{1/2}$, entonces tenemos que los elementos de $D^{1/2} = \sqrt{d_{i,i}}$, quedando de esta manera:

$$A = LDL^t = LD^{1/2}D^{1/2}L^t = \tilde{L}\tilde{L}^t \text{ con } \tilde{L} = LD^{1/2}$$

- El proceso señalado anteriormente es conocido como factorización de Cholesky.

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$a_{k,k} = \quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i}$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
a_{k,k} &= \quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\
a_{k,k} &= \quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_{k,k} = &\quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\ a_{k,k} = &\quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2 \\ \Rightarrow l_{k,k}^2 = &\quad a_{k,k} - l_{k,1}^2 - \cdots - l_{k,k-1}^2 \end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
a_{k,k} = &\quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\
a_{k,k} = &\quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2 \\
\Rightarrow l_{k,k}^2 = &\quad a_{k,k} - l_{k,1}^2 - \cdots - l_{k,k-1}^2 \\
\Rightarrow l_{k,k} = &\quad \sqrt{a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}^2}
\end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
&i > k \\
&a_{i,k} = \qquad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = &\quad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = &\quad l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
l_{i,k}l_{k,k} = & \quad a_{i,k} - l_{i,1}l_{k,1} - l_{i,2}l_{k,2} - \cdots - l_{i,k-1}l_{k,k-1}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = \quad & l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = \quad & l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
l_{i,k}l_{k,k} = \quad & a_{i,k} - l_{i,1}l_{k,1} - l_{i,2}l_{k,2} - \cdots - l_{i,k-1}l_{k,k-1} \\
\Rightarrow l_{i,k} = \quad & \frac{a_{i,k} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}l_{k,p}}{l_{k,k}}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y Positiva Definida.
output: Matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que L es triangular inferior de modo que $A = LL^t$.

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}^2}$$

for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p} l_{k,p}}{l_{k,k}}$$

end

end

Algorithm 3: Algoritmo de factorización de Cholesky.

Factorización QR

- Al resolver un sistema $Ax = b$ mediante la factorización LU (o la de Cholesky), se transforma el sistema en $Ax = LUx = b$ para hacer $Ux = L^{-1}b$ que es un sistema triangular que se resuelve por sustitución regresiva.

Factorización QR

- Al resolver un sistema $Ax = b$ mediante la factorización LU (o la de Cholesky), se transforma el sistema en $Ax = LUx = b$ para hacer $Ux = L^{-1}b$ que es un sistema triangular que se resuelve por sustitución regresiva.
- Sin embargo, la matriz del nuevo sistema es $U = L^{-1}A$ y dado que L^{-1} no es una matriz unitaria (ortogonal en el caso real) el número de condición de la matriz del sistema ha cambiado pudiendo estar peor condicionada que la matriz A del sistema original.

Factorización QR

- Se presenta otro tipo de factorización $A = QR$ donde R es, al igual que U, una matriz triangular superior, pero donde Q va a ser una matriz unitaria.

Factorización QR

- Se presenta otro tipo de factorización $A = QR$ donde R es, al igual que U, una matriz triangular superior, pero donde Q va a ser una matriz unitaria.
- Por lo que el sistema $Ax = b$ lo transformaremos en $Rx = Q^{-1}b = Q^{t}b$ y, a diferencia del método LU, el número de condición de la matriz del sistema no cambia.

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

- Por lo tanto

$$cond(A) = cond(QR) = cond(R)$$

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

- Por lo tanto

$$cond(A) = cond(QR) = cond(R)$$

- La Factorización QR desacopla el problema $Ax = b$ en dos subproblemas, uno de ellos ($Qy = b$) no posee amplificación del error, mientras que el otro ($Rx = y$) posee la mínima amplificación del error permitida por el problema original.

Solución: Factorización QR

Teorema:

Sea A una matriz $m \times n$, de rango $n \leq m$. Entonces existe una matriz ortogonal Q de $m \times m$ $(Q^{-1} = Q^T)$ y una matriz triangular superior R de $m \times n$, cuyas $m - n$ últimas filas son nulas, tales que

$$A = QR$$

$$A_{4\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}}_{[Q\tilde{Q}]} \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}} = QR$$

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde a_i representa a su columna i-ésima.

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  donde a_i representa a su columna i-ésima.

- Aplicando Gram-Schmidt existe un sistema ortonormal $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ tal que $\mathcal{L}\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, por lo que $y_{k+1} \in \mathcal{L}^{\perp}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  donde a_i representa a su columna i-ésima.

- Aplicando Gram-Schmidt existe un sistema ortonormal $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ tal que $\mathcal{L}\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, por lo que $y_{k+1} \in \mathcal{L}^{\perp}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.
- Sea Q la matriz cuyas columnas son los vectores y_i, $Q = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Factorización QR

- Entonces,

$$Q^tA = \begin{pmatrix} y_1^t \\ y_2^t \\ \vdots \\ y_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\iff Q^tA = \begin{pmatrix} \langle a_1, y_1 \rangle & \langle a_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, y_1 \rangle \\ \langle a_1, y_2 \rangle & \langle a_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, y_n \rangle & \langle a_2, y_n \rangle & \cdots & \langle a_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$