Ejemplos de Integración Definida por aproximación

Pregunta 1: Halle la longitud del arco de la curva $y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$ en $[0, 2\pi]$ usando la regla trapezoidal con $n = 6$.

Respuesta:

Para hallar la longitud del arco de la curva $y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando la regla trapezoidal con $n = 6$, seguiremos los siguientes pasos:

1. **Fórmula de la longitud del arco:** La longitud del arco L de una curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por la fórmula:
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

2. **Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$:** Nuestra función es $y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$. Derivamos y con respecto a x:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\,\mathrm{sen}(2x)) = 3 \cdot \cos(2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 3\cos(2x) \cdot 2 = 6\cos(2x)$$

3. **Calcular $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$:**
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (6\cos(2x))^2 = 36\cos^2(2x)$$

4. **Expresión para la longitud del arco:** Sustituyendo en la fórmula de la longitud del arco, obtenemos:
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 36\cos^2(2x)}\, dx$$

5. **Regla Trapezoidal:** La regla trapezoidal para aproximar la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ con n subintervalos es:
$$T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$
donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$.

6. **Aplicar la regla trapezoidal con $n = 6$:** En nuestro caso, $a = 0$, $b = 2\pi$, y $n = 6$.

   Calculamos Δx:
$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

   Los puntos x_i son: $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \pi, x_4 = \frac{4\pi}{3}, x_5 = \frac{5\pi}{3}, x_6 = 2\pi$

Nuestra función a evaluar es $f(x) = \sqrt{1 + 36\cos^2(2x)}$. Calculamos los valores de $f(x_i)$:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = \sqrt{37} \approx 6{,}0828 \\
f(x_1) &= f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{10} \approx 3{,}1623 \\
f(x_2) &= f(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{10} \approx 3{,}1623 \\
f(x_3) &= f(\pi) = \sqrt{37} \approx 6{,}0828 \\
f(x_4) &= f(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{10} \approx 3{,}1623 \\
f(x_5) &= f(\frac{5\pi}{3}) = \sqrt{10} \approx 3{,}1623 \\
f(x_6) &= f(2\pi) = \sqrt{37} \approx 6{,}0828
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos la regla trapezoidal:

$$
\begin{aligned}
T_6 &= \frac{\frac{\pi}{3}}{2}\left[f(0) + 2f(\frac{\pi}{3}) + 2f(\frac{2\pi}{3}) + 2f(\pi) + 2f(\frac{4\pi}{3}) + 2f(\frac{5\pi}{3}) + f(2\pi)\right] \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{37} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{37} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + \sqrt{37}\right] \\
&= \frac{\pi}{6}\left[4\sqrt{37} + 8\sqrt{10}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\sqrt{37} + 2\sqrt{10}\right] \\
&\approx \frac{2 \cdot 3{,}1416}{3}[6{,}0828 + 2(3{,}1623)] \\
&\approx 2{,}0944[6{,}0828 + 6{,}3246] \\
&\approx 2{,}0944 \cdot 12{,}4074 \\
&\approx 25{,}987
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la longitud del arco de la curva $y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$ en $[0, 2\pi]$ usando la regla trapezoidal con $n = 6$ es aproximadamente 25,987.

Pregunta 2: Integre la siguiente función entre los límites $a = -1$ y $b = 1$, utilizando 6 intervalos, usando la regla de Simpson:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Respuesta:

Para integrar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ entre los límites $a = -1$ y $b = 1$ utilizando la regla de Simpson con $n = 6$ intervalos, seguimos los siguientes pasos:

1. **Fórmula de la regla de Simpson:**

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$.

2. **Calcular Δx y los puntos x_i:** $\Delta x = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Los puntos x_i son: $x_0 = -1, x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{2}{3}, x_6 = 1.$

3. **Evaluar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \approx 0{,}39894e^{-x^2/2}$ en los puntos x_i:**

$$
\begin{aligned}
f(-1) &\approx 0{,}2420 \\
f(-\frac{2}{3}) &\approx 0{,}3138 \\
f(-\frac{1}{3}) &\approx 0{,}3779 \\
f(0) &\approx 0{,}3989 \\
f(\frac{1}{3}) &\approx 0{,}3779 \\
f(\frac{2}{3}) &\approx 0{,}3138 \\
f(1) &\approx 0{,}2420
\end{aligned}
$$

4. **Aplicar la regla de Simpson:**

$$
\begin{aligned}
S_6 &= \frac{1/3}{3}\left[f(-1) + 4f(-\frac{2}{3}) + 2f(-\frac{1}{3}) + 4f(0) + 2f(\frac{1}{3}) + 4f(\frac{2}{3}) + f(1)\right] \\
&\approx \frac{1}{9}\left[0{,}2420 + 4(0{,}3138) + 2(0{,}3779) + 4(0{,}3989) + 2(0{,}3779) + 4(0{,}3138) + 0{,}2420\right] \\
&\approx \frac{1}{9}\left[0{,}2420 + 1{,}2552 + 0{,}7558 + 1{,}5956 + 0{,}7558 + 1{,}2552 + 0{,}2420\right] \\
&\approx \frac{1}{9}[6{,}1016] \\
&\approx 0{,}6780
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral utilizando la regla de Simpson con $n = 6$ intervalos es aproximadamente 0,6780.

Pregunta 3: Dada la integral:

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(5x)\, dx$$

a) Calcularla por la regla de Simpson compuesta, dividiendo el intervalo de integración en 10 subintervalos, y hallar el error absoluto cometido.

Solución:

1. Regla de Simpson Compuesta: La regla de Simpson compuesta para aproximar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ con n (par) subintervalos es:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$.

2. Calcular Δx y los puntos x_i: Intervalo de integración: $[a, b] = [0, \pi]$ Número de subintervalos: $n = 10$ Ancho de cada subintervalo: $\Delta x = \frac{\pi-0}{10} = \frac{\pi}{10} \approx 0{,}314159$ Los puntos $x_i = a + i\Delta x = \frac{i\pi}{10}$ para $i = 0, 1, \ldots, 10$.

3. Evaluar la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(5x)$ en los puntos x_i:

i	$x_i = \frac{i\pi}{10}$	$5x_i$	$f(x_i) = (\frac{i\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(5 \cdot \frac{i\pi}{10})$
0	0	0	0
1	$\frac{\pi}{10} \approx 0{,}31416$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57080$	$(\frac{\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \approx 0{,}09870$
2	$\frac{2\pi}{10} \approx 0{,}62832$	$\pi \approx 3{,}14159$	$(\frac{2\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\pi) = 0$
3	$\frac{3\pi}{10} \approx 0{,}94248$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71239$	$(\frac{3\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) \approx -0{,}88826$
4	$\frac{4\pi}{10} \approx 1{,}25664$	$2\pi \approx 6{,}28319$	$(\frac{4\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(2\pi) = 0$
5	$\frac{5\pi}{10} \approx 1{,}57080$	$\frac{5\pi}{2} \approx 7{,}85398$	$(\frac{5\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\frac{5\pi}{2}) \approx 2{,}46740$
6	$\frac{6\pi}{10} \approx 1{,}88496$	$3\pi \approx 9{,}42478$	$(\frac{6\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(3\pi) = 0$
7	$\frac{7\pi}{10} \approx 2{,}19911$	$\frac{7\pi}{2} \approx 10{,}99557$	$(\frac{7\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{2}) \approx -7{,}56868$
8	$\frac{8\pi}{10} \approx 2{,}51327$	$4\pi \approx 12{,}56637$	$(\frac{8\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(4\pi) = 0$
9	$\frac{9\pi}{10} \approx 2{,}82743$	$\frac{9\pi}{2} \approx 14{,}13717$	$(\frac{9\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(\frac{9\pi}{2}) \approx 22{,}20662$
10	$\frac{10\pi}{10} \approx 3{,}14159$	$5\pi \approx 15{,}70796$	$(\frac{10\pi}{10})^2 \operatorname{sen}(5\pi) = 0$

4. Aplicar la regla de Simpson Compuesta:

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{\pi}{30}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + 2f(x_8) + 4f(x_9) + f(x_{10})\right] \\
&\approx \frac{\pi}{30}\left[0 + 4(0{,}09870) + 2(0) + 4(-0{,}88826) + 2(0) + 4(2{,}46740) + 2(0) + 4(-7{,}56868) + 2(0) + 4(22{,}20662) + \right. \\
&\approx \frac{\pi}{30}\left[0{,}3948 - 3{,}55304 + 9{,}8696 - 30{,}27472 + 88{,}82648\right] \\
&\approx \frac{\pi}{30}[65{,}26312] \\
&\approx 2{,}0257
\end{aligned}
$$

5. Cálculo del valor exacto de la integral: El valor exacto de la integral $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen}(5x)\,dx = \left[-\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{25}x\operatorname{sen}(5x) + \frac{2}{125}\cos(5x)\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{5} - \frac{4}{125} \approx 1{,}94192$.