Práctica II. Cálculo III

1. Se considera el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n, en variable real x, $\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad / \quad a_i \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial real con las operaciones:

   Suma de polinomios: $\left.\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\}$

   $$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in \mathcal{P}_n$$

   Producto de un polinomio por un escalar:

   $$\lambda p(x) = (\lambda a_n)x^n + (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Demuestra que $\mathbb{C} = \{x+yi : x, y \in \mathbb{R}\}$, junto con la suma usual de números complejos y la multiplicación escalar $\alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha yi, \alpha \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Considere el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y las operaciones

   $$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_2) \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{aligned}$$

   donde $x_i, y_i, \alpha \in \mathbb{R}$. Explica por qué $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, junto con estas operaciones, no es un espacio vectorial real.

4. Sea $V = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$. Para (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, definamos

   $$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1) \end{aligned}$$

   Demuestra que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. ¿Cuál es el vector cero?, ¿Cuál es el inverso aditivo?

5. Sea $S = \mathbb{R}^+$. Demuestra que S es un espacio vectorial con las operaciones

   $$\begin{aligned} v \oplus w &= vw \\ \alpha \odot v &= v^\alpha \end{aligned}$$

   ¿Qué elemento de S es la identidad aditiva? ¿Qué significado tiene $-x$ en este contexto?

6. Sea $\mathbb{R}$ el campo de los números reales. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$?. Justifica tu respuesta.

   (a) $W_1 = \{(x_1, 2x_2, 3x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

   (b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$

   (c) $W_3 = \{(x_1, x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$

   (d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\}$

7. Determina si los conjuntos S_i son subespacios del espacio vectorial V_i. Justifica tu respuesta detalladamente.

   (a) $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2\}, V_1 = \mathbb{R}^2$

   (b) $S_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}, V_2 = \mathbb{R}^n$

   (c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \quad \wedge \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}, V_3 = \mathbb{R}^4$

8. Sea $V = E_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Estudiar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V:

(a) $W = \{A \in E_{2\times 2}(\mathbb{R}) / |A| = 0\}$ (b) $U = \{A \in E_{2\times 2}(\mathbb{R}) / A = A^2\}$

9. Establecer si los siguientes conjuntos son o no subespacios del respectivo espacio vectorial indicado justificando la respuesta (probar las propiedades de subespacio en caso que sea, o bien dar un contraejemplo que muestre la propiedad que falla en caso que no lo sea). En los casos que sea subespacio encontrar una base del mismo.

   (a) $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x_1 = 3x_2\}$
   (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x_1 - 3x_2 = 0\}$
   (c) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \cdot x_2 = 9\}$
   (d) $N = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0 \wedge a_{21} = 5a_{12} \right\}$

10. Determinar si el vector $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio generado por $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Determinar el valor de x para que el vector $(1, x, 5) \in \mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$.

12. Establecer si $(1, -2, -3, -3)$ es o no una combinación lineal de los vectores $(0, 1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1, 0)$. Esos 3 vectores son dependientes o independientes? Justificar la respuesta.

13. Sean $v_1 = (1; \alpha; \alpha^2)$, $v_2 = (1; \beta; \beta^2)$ y $v_3 = (1; \gamma; \gamma^2)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$, donde α, β y γ son números reales distintos de cero. Que condiciones deben cumplir los números α, β y γ para que los tres vectores v_1, v_2 y v_3 sean linealmente independientes.

14. Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes o dependientes:

   (a) $(1, 2, 4), (3, 6, 2), (0, 0, 1)$
   (b) $(1, 2, 0), (0, 6, 2), (4, 8, 0)$

   ¿En algún caso se puede afirmar que formen una base de $\mathbb{R}^3$? Justificar.

15. Escribir la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Escribir el polinomio $v = x^2 + 4x - 3$ como una combinación lineal de los polinomios $e_1 = x^2 - 2x + 5$, $e_2 = 2x^2 - 3x$ y $e_3 = x + 3$.

17. ¿Para qué valores de α dejan de formar base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha - 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?

18. Sea $V = E_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden 2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Hallar las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \in V$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

19. En el espacio vectorial W de las matrices simétricas reales de orden 2, se considera la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Hallar las coordenadas de la matriz A en la base B en los siguientes casos:

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

20. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, siendo B la base canónica y:

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 \\ v_2 = -e_2 + 2e_3 \\ v_3 = -3e_3 \end{cases}$$

    Hallar las coordenadas del vector $4e_1 + e_2 - 5e_3$ en la base B'.

21. Dado el vector u, cuyas coordenadas en la base canónica $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular sus coordenadas en la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$, relacionada con la anterior por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_3 \\ e'_3 = e_2 + e_4 \\ e'_4 = e_2 - e_3 \end{cases}$$

22. Encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$S = \{(1, 2, -1, 3), (2, 1, 0, -2), (0, 1, 2, 1), (3, 4, 1, 2)\}.$$

23. Encuentre una base y la dimensión del subespacio W de $\mathbb{R}^4$, que consta de todos los vectores de la forma $v = (a + b; a - b + 2c; b; c)$ donde a, b y c son números reales.

24. Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 con base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Se definen los vectores

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - u3 \qquad v_2 = 2u_1 + u_3 + 2u_4 \qquad v_3 = u_1 + u_2 - u_3 \qquad v_4 = -u_1 + 2u_3 + 3u_4$$

    Probar que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V y calcular las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ de un vector v que tiene por coordenadas en $\mathcal{B}$ a $(1, 2, 0, 1)$.

25. Calcular la dimensión y una base del siguiente subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) / \begin{array}{c} a - b - c = 0 \\ a + 2b + d = 0 \\ 3b + c + d = 0 \end{array} \right\}$$

26. Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) / BX = 3X\}$$

27. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) / XA = 0\}$$

28. En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto $\mathcal{B} = \{(3/5; 4/5); (-4/5; 3/5)\}$

   (a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calcular la matriz de cambio de base $P = P_{B\to C}$ de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C} = \{(1; 0); (0; 1)\}$ y probar que P es una matriz ortogonal

   (c) Usar que P es ortogonal para calcular la matriz $P_{C\to B}$ de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ y calcular las coordenadas de $v = (2; 1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

29. Considere las siguientes bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, $S = \{(0; -2; 3); (0; 1; 1); (1; 1; 0)\}$ y $T = \{(0; -1; 1); (0; 3$
Sean $[u]_T = (2; 1; 3)$ y $[v]_S = (-1; 4; 1)$ dos vectores escritos en términos de las bases S y T respectivamente.

   (a) Determine la matriz de transición de la base T a la base S.

   (b) Encuentre $[u]_S$.

   (c) Determine la matriz de transición de la base S a la base T.

   (d) Encuentre $[v]_T$.

30. En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $\mathcal{B} = \{(1; -1; 1); (-2; \lambda; 0); (-1; 1; \lambda)\}$.

   (a) Hallar los valores de λ para los que $\mathcal{B}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$. Para $\lambda = 1$, calcular las coordenadas del vector $v = (2; 1; 2)$ respecto de $\mathcal{B}$.

   (b) Para $\lambda = 0$, hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

   (c) Para $\lambda = 2$, hallar una base ortonormal del subespacio generado por $\mathcal{B}$.

31. Se considera el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + 2z\}$$

   (a) Hallar una base ortonormal de U.

   (b) Calcular la matriz P de proyección ortogonal sobre U.

   (c) Hallar la distancia de $v = (1; 1; 1)$ a U.

   (d) Hallar una base del subespacio W formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya proyección ortogonal sobre U es $(0; 0; 0)$.