

# Métodos Iterativos para la Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

José Luis Ramírez B.

January 26, 2025

- 1 Introducción
- 2 Métodos Iterativos
- 3 Refinamiento Iterativo
- 4 Métodos Iterativos de Punto Fijo
  - Método de Jacobi

# Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.

# Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- El método de Gauss y sus variantes se conocen con el nombre de métodos directos: se ejecutan un número finito de pasos y dan a lugar a una solución que sería exacta si no fuese por los errores de redondeo.
- Cuando el tamaño de la matriz  $A$  es grande ( $n \gg 100$ ), la propagación del error de redondeo es también grande, y los resultados obtenidos pueden diferir de los exactos.

# Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.

# Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
  - ① Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como  $LU$ .

# Problemas de los métodos directos para la resolución de (SL).

- Muchas de las matrices que aparecen en (SL) poseen la mayoría de sus elementos nulos. Estas matrices reciben el nombre de matrices dispersas o sparse.
  - 1 Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, son de aplicación todavía los métodos directos que conservan la estructura diagonal, como  $LU$ .
  - 2 Si no ocurre lo anterior, al aplicar métodos directos se produce un fenómeno de llenado. Entonces, si no se realiza una adaptación de los métodos directos los resultados no van a ser, en general, buenos.

# Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema  $Ax = b$  es aquel que genera, a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$ , una sucesión de vectores  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$



# Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema  $Ax = b$  es aquel que genera, a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$ , una sucesión de vectores  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema  $Ax = b$ , si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.

# Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema  $Ax = b$  es aquel que genera, a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$ , una sucesión de vectores  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema  $Ax = b$ , si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial  $x^{(0)}$  es convergente a la solución del sistema.

# Métodos Iterativo

- Un método iterativo que da resolución al sistema  $Ax = b$  es aquel que genera, a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$ , una sucesión de vectores  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- El método se dirá que es consistente con el sistema  $Ax = b$ , si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema.
- Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial  $x^{(0)}$  es convergente a la solución del sistema.
- El vector  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  es el vector residual obtenido en la  $k$ -ésima iteración.

# Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

# Métodos Iterativo

Si un método es convergente es consistente, sin embargo, el recíproco no es cierto.

## Ejemplo:

El método  $x^{(n+1)} = 2x^{(n)} - A^{-1}b$  es consistente con el sistema  $Ax = b$  pero no es convergente. En efecto:

## Métodos Iterativo

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\&= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x)\end{aligned}$$

y como  $A^{-1}b = x$ , se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

## Métodos Iterativo

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} - x &= 2x^{(n)} - A^{-1}b - x = 2x^{(n)} - 2x - A^{-1}b + x \\&= 2(x^{(n)} - x) - (A^{-1}b - x)\end{aligned}$$

y como  $A^{-1}b = x$ , se tiene que:

$$x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$$

Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$ , se tiene que:

$$x^* - x = 2(x^* - x) \Rightarrow x^* - x = 0 \Rightarrow x^* = x$$

es decir, el límite es solución del sistema  $Ax = b$ , por lo que el método es consistente.

# Métodos Iterativo

Sin embargo, de  $x^{(n+1)} - x = 2(x^{(n)} - x)$  se obtiene que:

$$\|x^{(n+1)} - x\| = 2\|x^{(n)} - x\|$$

es decir, el vector  $x^{(n+1)}$  dista el doble de lo que distaba  $x^{(n)}$ , por lo que el método no puede ser convergente.



# Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones  $Ax = b$  utilizando un método numérico se obtiene una aproximación  $\tilde{x}$  de la verdadera solución del sistema.

## Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones  $Ax = b$  utilizando un método numérico se obtiene una aproximación  $\tilde{x}$  de la verdadera solución del sistema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.

## Refinamiento Iterativo

- Al resolver un sistema de ecuaciones  $Ax = b$  utilizando un método numérico se obtiene una aproximación  $\tilde{x}$  de la verdadera solución del sistema.
- La exactitud de dicha solución depende de errores inherentes a los cálculos realizados.
- Sea  $x$  la solución exacta del sistema y  $\tilde{x}$  es la aproximación, por lo tanto cuando se sustituye  $\tilde{x}$  en el sistema se obtiene:

$$A\tilde{x} \approx b$$

esto significa que al realizar la resta  $b - A\tilde{x} \neq 0$

## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .

# Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$



## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$

$$Az = r$$

## Refinamiento Iterativo

- Definiendo a esta diferencia  $r$  (residuo), así  $r = b - A\tilde{x}$ .
- La solución deseada es de la forma  $\tilde{x} + z$  tal que al sustituir en el sistema de ecuaciones se obtenga

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

y desarrollando se obtiene

$$A(\tilde{x} + z) = b$$

$$A\tilde{x} + Az = b$$

$$Az = b - A\tilde{x}$$

$$Az = r$$

- Una vez que obtenida  $z$  se puede crear una mejor aproximación  $\tilde{x} + z$  de la solución.

## Ejemplo:

Al resolver el sistema  $Ax = b$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 110 \\ 65 \\ 47 \end{bmatrix}$$

suponiendo que una solución aproximada es  $b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

## Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando  $tol = 10^{-5}$ , se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando  $tol = 10^{-5}$ , se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$

## Ejemplo:

- Aplicando un paso de refinamiento iterativo tomando  $tol = 10^{-5}$ , se tendría que:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$
- Verificando criterio de parada  $\|r^{(0)}\|_{\infty} = 8 > tol$

## Ejemplo:

- Obteniendo  $z$  resolviendo el sistema  $Az = r$  se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo:

- Obteniendo  $z$  resolviendo el sistema  $Az = r$  se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

- Generando la nueva aproximación

$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## Ejemplo:

- Obteniendo  $z$  resolviendo el sistema  $Az = r$  se obtiene

$$z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

- Generando la nueva aproximación

$$x^{(1)} = x^{(0)} + z = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Calculando el residuo

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.14210854715202 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-13}$$

## Ejemplo:

- Verificando criterio de parada

$$\|r^{(1)}\|_{\infty} = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$$

## Ejemplo:

- Verificando criterio de parada

$$\|r^{(1)}\|_{\infty} = 0.14210854715202 \times 10^{-13} < tol$$

- Según el criterio de parada la mejor aproximación es

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal  $Ax = b$  se determina usando aritmética de  $t$  dígitos, se puede demostrar que el vector residual  $r$  para la aproximación  $\tilde{x}$  tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|$$

## Refinamiento Iterativo

- Si suponemos que la solución aproximada al sistema lineal  $Ax = b$  se determina usando aritmética de  $t$  dígitos, se puede demostrar que el vector residual  $r$  para la aproximación  $\tilde{x}$  tiene la propiedad

$$\|r\| = 10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|$$

- De esta ecuación aproximada, se puede obtener una estimación del número de condición efectivo para la aritmética de  $t$  dígitos, sin la necesidad de invertir la matriz  $A$ .

# Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición  $\kappa(A)$  a  $t$  dígitos viene de considerar el sistema lineal  $Az = r$ .

## Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición  $\kappa(A)$  a  $t$  dígitos viene de considerar el sistema lineal  $Az = r$ .
- De hecho  $\tilde{z}$ , la solución aproximada de  $Az = r$ , satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

## Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición  $\kappa(A)$  a  $t$  dígitos viene de considerar el sistema lineal  $Az = r$ .
- De hecho  $\tilde{z}$ , la solución aproximada de  $Az = r$ , satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que  $\tilde{z}$  es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned}\|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\| (10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|) = 10^{-t} \|\tilde{x}\| \kappa(A)\end{aligned}$$



## Refinamiento Iterativo

- La aproximación del número de condición  $\kappa(A)$  a  $t$  dígitos viene de considerar el sistema lineal  $Az = r$ .
- De hecho  $\tilde{z}$ , la solución aproximada de  $Az = r$ , satisface que

$$\tilde{z} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}$$

- así que  $\tilde{z}$  es una estimación del error cometido al aproximar la solución del sistema original.

$$\begin{aligned}\|\tilde{z}\| &\approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| \\ &\approx \|A^{-1}\| (10^{-t} \|A\| \|\tilde{x}\|) = 10^{-t} \|\tilde{x}\| \kappa(A)\end{aligned}$$

- Esto proporciona una aproximación para el número de condición involucrado en la solución del sistema  $Ax = b$  usando  $t$  dígitos:

$$\kappa(A) \approx 10^t \frac{\|\tilde{z}\|}{\|\tilde{x}\|}$$

## Ejemplo:

- El sistema lineal  $Ax = b$  dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

tiene la solución exacta  $x = (1, 1, 1)^t$

## Ejemplo:

- El sistema lineal  $Ax = b$  dado por

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

tiene la solución exacta  $x = (1, 1, 1)^t$

- Usando eliminación Gaussiana y aritmética de redondeo de 5 dígitos a

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3.333 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.079 & -4.7 \end{array} \right)$$

La solución aproximada a este sistema es

$$\tilde{x} = (1.2001; 0.99991; 0.92538)^t$$

## Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a  $\tilde{x}$  calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$\begin{aligned} r &= b - A\tilde{x} = \\ &= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Ejemplo:

- El vector residual correspondiente a  $\tilde{x}$  calculado con doble precisión (y luego redondeado a cinco dígitos) es

$$\begin{aligned} r &= b - A\tilde{x} = \\ &= \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- así que

$$\|r\|_{\infty} = 0.27413$$

## Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema  $Az = r$ :

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

## Ejemplo:

- La estimación del número de condición se obtiene resolviendo primero el sistema  $Az = r$ :

$$\begin{pmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.222 & 16.71 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0051818 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{pmatrix}$$

- La solución  $z = (-0.20008; 8.9989 \times 10^{-5}; 0.074607)^t$   
Usando la estimación del número de condición

$$\kappa(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{z}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672$$

## Ejemplo:

- Se ha usado la estimación  $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$ , donde  $\tilde{z}$  es la solución aproximada al sistema  $Az = r$ .



## Ejemplo:

- Se ha usado la estimación  $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$ , donde  $\tilde{z}$  es la solución aproximada al sistema  $Az = r$ .
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación  $\tilde{x} + \tilde{z}$ .

## Ejemplo:

- Se ha usado la estimación  $\tilde{z} \approx x - \tilde{x}$ , donde  $\tilde{z}$  es la solución aproximada al sistema  $Az = r$ .
- A partir de este resultado, se genera la nueva aproximación  $\tilde{x} + \tilde{z}$ .
- Este proceso puede ser repetido para refinar la solución sucesivamente hasta alcanzar convergencia.

# Algoritmo

**input** :  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , Número máximo de iteraciones  $N$ ,  
tolerancia  $TOL$ .

**output:** Solución aproximada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Resolver  $Ax = b$

**for**  $k \leftarrow 1$  **to**  $N$  **do**

$r = b - Ax$

    Resolver  $Ay = r$  (usando eliminación Gaussiana en el mismo  
    orden que en el paso 1).

    Calcular  $K(A) = 10^t \frac{\|y\|}{\|x\|}$  (solo se calcula la primera vez).

$x = x + y$

**if**  $\|y\| < TOL$  **then**

        salida  $x$

        parar

**end**

**end**

**Algorithm 1:** Algoritmo de Refinamiento Iterativo.

## Esquemas de Punto Fijo

Supongase un (SL)  $Ax = b$ , se busca una matriz  $T \in \mathcal{M}_n$  y un vector  $c \in \mathbb{R}^n$ , de forma que la matriz  $I - T$  sea inversible y que la única solución del sistema lineal

$$\underbrace{x = Tx + c}_{(I-T)x=c}$$

es la solución de  $Ax = b$ .

## Esquemas de Punto Fijo

Considerando  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  un vector arbitrario, se construye una sucesión de vectores  $\{x\}_{k=0}^{\infty}$  dada por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y se pretende que la sucesión  $\{x\}_k$  converja a la solución del sistema lineal.

## Esquemas de Punto Fijo

### Definición

El método iterativo  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$  es convergente si existe un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

para cualquier vector inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ . En ese caso,

$$x = Tx + c$$

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$



## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x = (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) =$$

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &= Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \\ \Rightarrow e^{(k)} &= T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

## Criterio de Convergencia

El error en cada iteración se puede medir, por tanto como:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{(k)} = x^{(k)} - x &= (Tx^{(k-1)} + c) - (Tx + c) = T(x^{(k-1)} - x) = \\ &= Te^{(k-1)} = \dots = T^k e^{(0)} \\ \Rightarrow e^{(k)} &= T^k e^{(0)} \end{aligned}$$

De ese modo, el error en las iteraciones depende de las potencias sucesivas de la matriz  $T$ , lo que dará el criterio para la convergencia del Método Iterativo.

## Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

## Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces  $e^{(k)} \rightarrow 0$  para todo  $e^{(0)}$  si y sólo si  $T^k \rightarrow 0$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| \rightarrow 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0$$

## Criterio de Convergencia

- Se mostró por inducción que

$$e^{(k)} = T^k e^{(0)}$$

- Entonces  $e^{(k)} \rightarrow 0$  para todo  $e^{(0)}$  si y sólo si  $T^k \rightarrow 0$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| \rightarrow 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0$$

- Si  $T$  es una matriz diagonalizable, existen matrices  $P$  y  $\Lambda$ , tales que  $T = P\Lambda P^{-1}$ , donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal con los autovalores de  $T$  en la diagonal.

$$\begin{aligned} T &= P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \dots P\Lambda P^{-1} \\ T^k &= P\Lambda^k P^{-1} \end{aligned}$$



## Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

## Criterio de Convergencia

- Donde

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

- De esta manera

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| \rightarrow 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|P\Lambda^k P^{-1}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Lambda^k\| \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_i^k| \rightarrow 0 \Rightarrow |\lambda_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

## Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración  $T$  son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

## Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración  $T$  son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

### Teorema

Un esquema iterativo definido por  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$  es convergente si y sólo si  $\rho(T) < 1$ .

## Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración  $T$  son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

### Teorema

Un esquema iterativo definido por  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$  es convergente si y sólo si  $\rho(T) < 1$ .

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left. \begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda| \|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\| \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

## Criterio de Convergencia

- Si la magnitud de todos los autovalores de la matriz de iteración  $T$  son menores que 1, entonces el esquema iterativo es convergente.

### Teorema

Un esquema iterativo definido por  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$  es convergente si y sólo si  $\rho(T) < 1$ .

- Es más sencillo calcular la norma de una matriz que el cálculo de sus autovalores

$$\left. \begin{array}{lcl} Tx & = & \lambda x \\ \|Tx\| & = & |\lambda| \|x\| \\ \|Tx\| & \leq & \|T\| \|x\| \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| \|x\| \leq \|T\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$$

Por lo que una condición suficiente para la convergencia es:

$$\|T\| < 1$$

## Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.

## Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución,  $x^{(k)}$  con  $q$  cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-q}\|x\|$$



## Tasa de Convergencia

- En el diseño de un método iterativo, además de asegurar la consistencia y convergencia del método, es importante el concepto de velocidad de convergencia.
- Supongase que se tiene una aproximación de la solución,  $x^{(k)}$  con  $q$  cifras significativas,

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-q}\|x\|$$

- y se desea saber cuántas iteraciones más se tienen que hacer para obtener  $m$  cifras correctas más. Interesa, por lo tanto, saber cuántas iteraciones  $N$  hay que hacer para que,

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \frac{1}{2}10^{-(q+m)}\|x\|$$

es decir

$$\|e^{(k+N)}\| \leq 10^{-m}\|e^{(k)}\|$$

## Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones  $x^{(k)}$  se acerca a la solución.

## Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones  $x^{(k)}$  se acerca a la solución.
- Se sabe que  $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$ , que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

## Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones  $x^{(k)}$  se acerca a la solución.
- Se sabe que  $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$ , que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las  $m$  cifras significativas es suficiente exigir que  $\|T^N\| \leq 10^{-m}$  o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

## Tasa de Convergencia

- Esto permitirá dar información sobre la velocidad con que la sucesión de aproximaciones  $x^{(k)}$  se acerca a la solución.
- Se sabe que  $e^{(k+N)} = T^N e^{(k)}$ , que tomando norma es

$$\|e^{(k+N)}\| \leq \|T^N\| \|e^{(k)}\|$$

- De manera que para conseguir las  $m$  cifras significativas es suficiente exigir que  $\|T^N\| \leq 10^{-m}$  o, equivalentemente

$$-\log_{10} \|T^N\| \geq m$$

- Así, para conseguir  $m$  cifras significativas es suficiente hacer  $N$  iteraciones con

$$N \geq \frac{m}{R}$$

## Tasa de Convergencia

- Donde  $R$  se define como:

$$R = -\frac{1}{N} \log_{10} \|T^N\| = -\log_{10} \left( \|T^N\|^{1/N} \right)$$

- El parámetro  $R$  se puede interpretar como la velocidad de convergencia: cuanto mayor es  $R$  menos iteraciones hay que hacer para incrementar la precisión en la aproximación.
- Se puede comprobar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T^N\|^{1/N} = \rho(T)$$

por lo tanto, la velocidad asintótica de convergencia del método es

$$R_{\infty} = \log_{10} \left( \frac{1}{\rho(T)} \right)$$

## Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.

## Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para  $\rho(T) \simeq 0$ , la velocidad de convergencia  $R_\infty$  es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.



## Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para  $\rho(T) \simeq 0$ , la velocidad de convergencia  $R_\infty$  es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para  $\rho(T) = 1 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon \simeq 0$  positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.

## Tasa de Convergencia

- El radio espectral hace el papel del factor asintótico de convergencia del método.
- Para  $\rho(T) \simeq 0$ , la velocidad de convergencia  $R_\infty$  es muy grande y el método tiene una convergencia muy rápida.
- Para  $\rho(T) = 1 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon \simeq 0$  positivo, la velocidad de convergencia es positiva pero pequeña y el método converge pero lo hace lentamente.
- En cambio, si  $\rho(T) > 1$  la velocidad de convergencia es negativa por lo que la convergencia no está asegurada.

## Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

## Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema  $Ax = b$  se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

## Construcción de los Métodos

Considerando la descomposición

$$A = M - N, \quad M \text{ regular}$$

El sistema  $Ax = b$  se puede escribir en la forma

$$Mx = Nx + b, \text{ es decir, } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

lo que sugiere el esquema iterativo

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

donde  $T = M^{-1}N$  y  $c = M^{-1}b = (I - T)A^{-1}b$ , por lo que el método así construido es consistente con el sistema.

## Construcción de los Métodos

- El esquema anterior también es equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  es el residual de la  $k$ -ésima iteración y  $M$  es un preconditionador del sistema.

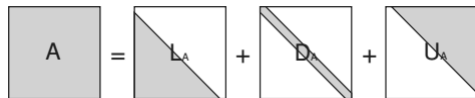
## Construcción de los Métodos

- El esquema anterior también es equivalente a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

donde  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  es el residual de la  $k$ -ésima iteración y  $M$  es un preconditionador del sistema.

- En lo sucesivo se considera la descomposición aditiva de la matriz  $A$  como



The diagram shows the equation  $A = L_A + D_A + U_A$  using square matrices. The matrix  $A$  is a solid gray square. The matrix  $L_A$  is a white square with a gray lower triangular region (below the diagonal). The matrix  $D_A$  is a white square with a gray diagonal line. The matrix  $U_A$  is a white square with a gray upper triangular region (above the diagonal). Plus signs are placed between the matrices to represent the sum.

donde  $L_A$  es la parte triangular inferior de la matriz sin incluir la diagonal,  $D_A$  es la diagonal de  $A$ , y  $U_A$  es la parte triangular superior sin incluir la diagonal.

# Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz  $A$  del tipo  $A = M - N$ , con  $M = D$ , parte diagonal de la matriz  $A$ , y  $N = L + U$



# Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz  $A$  del tipo  $A = M - N$ , con  $M = D$ , parte diagonal de la matriz  $A$ , y  $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.

# Método de Jacobi

- Se basa en una descomposición de la matriz  $A$  del tipo  $A = M - N$ , con  $M = D$ , parte diagonal de la matriz  $A$ , y  $N = L + U$
- Obliga a resolver un sistema diagonal en cada paso.
- De esta manera queda que  $A = D - L - U = D - (L + U)$ , por lo tanto el sistema se transforma en:

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - (L + U))x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$$

# Método de Jacobi

- Así, se calcula la solución del sistema, como el límite de la sucesión  $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  donde se define el término  $(k+1)$ -ésimo como:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

siendo así su matriz de iteración:

$$T = D^{-1}(L + U)$$

Entonces el sistema ha sido escrito como un proceso iterativo de la forma

$$x^{(n+1)} = Tx^{(n)} + c.$$

# Método de Jacobi

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,i}x_i + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

# Método de Jacobi

- Si  $a_{i,i} \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces despejando  $x_i$  de la  $i$ -ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

# Método de Jacobi

- Si  $a_{i,i} \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces despejando  $x_i$  de la  $i$ -ésima ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Conocido  $x^{(k-1)}$ , se calcula la aproximación  $x^{(k)}$ , mediante la fórmula:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{i,i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

que es llamada fórmula escalar de iteración del método de Jacobi.

## Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es el vector

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

y tomando como vector inicial  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

## Ejemplo:

Procedamos a realizar la descomposición de la matriz del sistema:

$$M = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$N = L + U$$

Para comprobar si estamos convergiendo a la solución tomaremos el valor de la norma del residuo  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ .

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(0)}\|_{\infty} = 4$$



## Ejemplo:

El primero paso del esquema vendría dado por:

$$Dx^{(1)} = Nx^{(0)} + b = (L + U)x^{(0)} + b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al resolver el sistema diagonal:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.75 \\ 3 \\ -0.75 \end{pmatrix}$$

Con vector residual

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|r^{(1)}\|_{\infty} = 1$$

## Ejemplo:

Por tanto, el residuo ha disminuido. Si seguimos iterando:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.125 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \|r^{(2)}\|_{\infty} = 0.5$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.5312 \\ 3.0000 \\ -0.50312 \end{pmatrix} \quad \|r^{(3)}\|_{\infty} = 0.125$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.0156 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \|r^{(4)}\|_{\infty} = 0.0625$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} -1.5039 \\ 3.0000 \\ -0.5039 \end{pmatrix} \quad \|r^{(5)}\|_{\infty} = 1.5625e - 02$$