Unidad IV: Diferenciación e Integración Numérica

Prof. José Luis Ramírez

March 8, 2025

Unidad IV: Diferenciación e Integración Numérica

Prof. José Luis Ramírez

March 8, 2025

Contenido

Motivación

El flujo de calor en la interfaz suelo-aire puede calcularse con la ley de Faraday

$$q = -k\rho C \frac{dT}{dz}$$

Donde $q =$ flujo de calor, $k =$ coeficiente de difusividad térmica, $\rho =$ la densidad del suelo, $C =$ calor específico del suelo.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
  1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
  1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.
  2. Método de Newton-Raphson.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
    1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.
    2. Método de Newton-Raphson.
    3. Ecuaciones Diferenciales.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.
- Un fórmula para el integrando puede ser conocido, pero puede ser difícil o imposible de encontrar su antiderivada. Un ejemplo de tal integrando es $f(x) = e^{-x^2}$, cuya antiderivada no se puede escribir en forma elemental.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.
- Un fórmula para el integrando puede ser conocido, pero puede ser difícil o imposible de encontrar su antiderivada. Un ejemplo de tal integrando es $f(x) = e^{-x^2}$, cuya antiderivada no se puede escribir en forma elemental.
- Puede ser posible encontrar una antiderivada simbólicamente, pero puede ser más fácil computar una aproximación numérica que computar la antiderivada. Ése puede ser el caso si la antiderivada se da como una serie o producto infinita, o si su evaluación requiere una función especial la cuál no está disponible.

Diferenciación Numérica

- La diferenciación numérica puede calcularse usando la definición de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diferenciación Numérica

- La diferenciación numérica puede calcularse usando la definición de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Tomando una h pequeña. Si $h > 0$ se llama fórmula de diferencia progresiva, si $h < 0$ se llama fórmula de diferencia regresiva.

Diferenciación Numérica

- Para calcular la aproximación numérica de la derivada en un punto, se puede generar una sucesión $\{h_k\}$, tal que $h_k \to 0$ y se calcula el cociente

$$D_k = \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \frac{f_k - f_0}{h_k}$$

- Si se toma un valor muy grande de h_k la aproximación no es aceptable y si h_k es muy pequeño la diferencia $f(x + h_k) - f(x) \approx 0$ ocurre una pérdida de dígitos significativos

Diferenciación Numérica

- Para calcular la aproximación numérica de la derivada en un punto, se puede generar una sucesión $\{h_k\}$, tal que $h_k \to 0$ y se calcula el cociente

$$D_k = \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \frac{f_k - f_0}{h_k}$$

- Generando entonces una sucesión $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ y tomando a D_n como la aproximación deseada, el problema está en conocer cual valor de h_k garantiza una buena aproximación
- Si se toma un valor muy grande de h_k la aproximación no es aceptable y si h_k es muy pequeño la diferencia $f(x + h_k) - f(x) \approx 0$ ocurre una pérdida de dígitos significativos

Diferenciación Numérica

- La siguiente tabla muestra los cocientes D_k para aproximar la derivada de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 2$ cuyo valor con nueve cifras significativas es $f'(2) = -0.416146837$.

h_k	f_k	$f_k - f$	$\frac{f_k - f}{h_k}$
10^{-1}	0.8632093666	-0.0460880602	-0.4608806018
10^{-2}	0.9050905633	-0.0042068635	-0.4206863500
10^{-3}	0.9088808254	-0.0004166014	-0.4166014159
10^{-4}	0.9092558076	-0.0000416192	-0.4161923007
10^{-5}	0.9092932653	-0.0000041615	-0.4161513830
10^{-6}	0.9092970107	-0.0000004161	-0.4161472913
10^{-7}	0.9092973852	-0.0000000416	-0.4161468814
10^{-8}	0.9092974227	-0.0000000042	-0.4161468392
10^{-9}	0.9092974264	-0.0000000004	-0.4161468947
10^{-10}	0.9092974268	-0.0000000000	-0.4161471168

Table: Aproximación del $(\sin(2))' = cos(2)$.

Diferenciación Numérica

- ¿Cuán buena es esta aproximación de la derivada? Por el Teorema de Taylor se sabe que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_h)h^2}{2}$$

  donde ξ_h está entre x_0 y $x_0 + h$.

- Despejando ahora a $f'(x_0)$ en esta fórmula se tiene que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{hf''(\xi_h)}{2}$$

- Esta fórmula nos dice que se aproxima a $f'(x_0)$ con un error proporcional a h, es decir, $f'(x_0) \approx O(h)$.

Tema 2

- Contenido del tema 2
- Explicación a