Universidad de Carabobo.
Facultad de Ciencias y Tecnología.
Departamento de Matemática.
Métodos Numéricos I.

Asignación 2

1. Aplique el método de bisección, encuentre una raíz de:

$$f(x) = x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320$$

en el intervalo $[5.5; 6.5]$. Cambie -36 por -36,001 y repita el ejercicio y comente los resultados.

2. Reescriba el algoritmo de bisección si se modifica así: Se secciona en tres el intervalo de estudio en cada iteración (donde se encuentra la raíz), se elige de los tres subintervalos el que contiene la raíz y se asigna como aproximación el punto medio de este. Aplique su algoritmo al problema anterior y compare los resultados obtenidos, comente acerca de ello.

3. Demuestre que al usar el Método de Newton-Raphson, para aproximar el reciproco de un número S, $S > 0$ se obtiene la fórmula iterativa $x_{k+1} = x_k(2 - S \cdot x_k); k = 0; 1; \ldots$. Calcular $1/17$ usando el algoritmo.

4. La suma de dos números a y b es 21.2. Si a cada número se le añade la raíz cuadrada de sí mismo (es decir, $a + \sqrt{a}$), el producto de las dos sumas es 170.73. Usando el Método de Newton o el de la Secante, determine los dos números dentro de una tolerancia de 10^{-4}. Considere $x_0 = 0$ y/o $x_1 = 1$ como valores iniciales. Ayuda: Conforme un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y redúzcalo a una ecuación con una incógnita.

5. (a) Use el Método de Newton para hallar el mínimo de la siguiente función polinómica

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

Asigne el resultado a la variable x_N. Determine las funciones necesarias a mano.

(b) Use el Método de la Secante para aproximar las raíces de $f(x)$ sobre los intervalos $[-2, x_N]$ y $[x_N, 2]$ (use los extremos de estos intervalos como aproximaciones iniciales). Indique la utilidad de hallar el mínimo de la función para dividir el intérvalo.

6. Estudiemos la aplicación de la iteración de punto fijo al cálculo de las raíces de la función

$$f(x) = -x^2 + x + \sin(x + 0.15)$$

Para ello:

(a) Dibuje la gráfica de f y localice la raíz de menor valor absoluto.Aplique la iteración de punto fijo a $g(x) = x - f(x)$ para aproximar esa raíz con tolerancia=10^{-15}. Dibuje la gráfica de los valores $x^{(k)}$. ¿Hay convergencia después de 100 iteraciones?

(b) Aplique el siguiente esquema de iteración para diversos valores de $\alpha \in (-1, 1)$

$$g(x) = x - \alpha f(x)$$

para mejorar las propiedades de convergencia. Vuelva a aplicar la iteración de punto fijo y compare los resultados.

(c) Estudie si la misma iteración de punto fijo permite hallar la menor raíz en módulo de f.

(d) Aplique el algoritmo Δ^2 de Aitken para acelerar la convergencia de la sucesión de aproximaciones obtenida. Compare la velocidad de convergencia en cada caso.

7. Considere la ecuación:

$$2x^3 = 3x + 4 \tag{1}$$

(a) Demostrar que la función $f(x) = 2x^3 - 3x - 4$ tiene una única raíz real α en $(1, 2)$.

(b) ¿Se puede usar bisección para hallar una aproximación a α?

(c) Convertir el problema de calcular la raíz α de la ecuación (1) en un problema de P.F. en el intervalo $[1, 2]$. Ensayar por lo menos cuatro funciones de iteración en $[1, 2]$.

(d) Demostrar que la función $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3x+4}{2}}$ es una función de iteración para el problema. Demuestre que:

i. $1 < \sqrt[3]{\dfrac{7}{2}} \leq g(x) \leq \sqrt[3]{5} < 2 \quad \forall x \in [1, 2]$

ii. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}} \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{98}} \quad \forall x \in [1, 2]$

iii. $g(x)$ cumple las hipótesis del T.P.F. en $[1, 2]$. Concluir. Calcular 3 iteraciones de P.F.