UNIVERSIDAD DE CARABOBO.
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
Materia: Métodos Numéricos II
Prof. José Luis Ramírez B.

Guía de Ejercicios I

1. "Resuelva" los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando Eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás con una aritmética redondeo correcto a dos dígitos. No reordene las ecuaciones.(La solución exacta para cada sistema es $x_1 = 1 \quad, x_2 = -1, \quad x_3 = 3$).

$$a) \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 11 \end{array} \right. \qquad c) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 11, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -9 \end{array} \right. \qquad d) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -9, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9 \end{array} \right.$$

2. Use el algoritmo de Eliminación Gaussiana y, si es posible, aritmética de precisión simple en una computadora, para resolver los siguientes sistemas lineales:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_2 = 8. \end{array} \right. \qquad c) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 & = & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 & = & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 & = & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 & = & \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{rcl} 3{,}333x_1 + 15920x_2 - 10{,}333x_3 & = & 15913 \\ 2{,}222x_1 + 16{,}71x_2 + 9{,}612x_3 & = & 28{,}544 \\ 1{,}5611x_1 + 5{,}1791x_2 + 1{,}6852x_3 & = & 8{,}4254 \end{array} \right.$$

3. Dado el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + \alpha x_3 & = & -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 & = & 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

a) Obtenga el (los) valor(es) de α para el(los) cual(es) el sistema no tiene solución.

b) Encuentre el (los) valor(es) de α para el(los) cual(es) el sistema tiene un infinito número de soluciones.

c) Considerando que existe una solución única para un valor dado α, encuentre la solución.

4. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU usando el Algoritmo de Factorización con $l_{ii} = 1$ para toda i:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1{,}5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4{,}5 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1{,}012 & -2{,}132 & 3{,}104 \\ -2{,}132 & 4{,}096 & -7{,}013 \\ 3{,}104 & -7{,}013 & 0{,}014 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Sean $\{1, -2, 3\}, \{1, -1\}, \{-1\}$ los multiplicadores de la Eliminación Gaussiana para obtener el sistema triangular

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & -2 \\ x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_4 & = & 7 \end{array} \right.$$

Calcule el sistema original.

6. Calcule los números de productos y sumas para factorizar una matriz y para resolver el sistema triangular.

7. Resuelva el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & 5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

8. Considere el sistema de orden n definido por la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Muestre que el vector $x = \frac{1}{n+1}(1, 2, \ldots, n)$ es la única solución del sistema anterior.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hallar una factorización $A = QR$. Una vez hallada, explicar qué relación hay (en este ejemplo) entre los factores QR y los de una factorización LU con pivoteo.
- Probar que el producto $B = RQ$ tiene siempre los mismos autovalores que $A = QR$. (Naturalmente, si Q es ortogonal).

10. Triangularizar la matriz de Hilbert de orden 4. Usando operaciones con fracciones en forma exacta en (a) y usando aritmética de punto decimal flotante con tres dígitos con redondeo en (b):

a)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

b)

$$H = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}500 & 0{,}333 & 0{,}250 \\ 0{,}500 & 0{,}333 & 0{,}250 & 0{,}200 \\ 0{,}333 & 0{,}250 & 0{,}200 & 0{,}167 \\ 0{,}250 & 0{,}200 & 0{,}167 & 0{,}143 \end{pmatrix}$$

11. Calcular la inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de las dos maneras siguientes:

a) Resolviendo el sistema matricial $AX = I$ por pivoteo parcial.

b) Calculando la factorización LU de A y aplicando la identidad $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

12. Determine los valores de α para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

admite factorización de Cholesky y calcúlela en su caso.

13. Sea A una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n\times n}$ escrita en forma de bloques

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde A_{11} es una matriz de tamaño $m \times m$ y A_{22} es de tamaño $(n-m) \times (n-m)$.

a) Verificar la fórmula

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

para la eliminación del bloque A_{21} (la matriz $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ es conocida como complemento de Schur de A_{11} en A).

b) Si A_{21} se elimina fila a fila en m pasos de eliminación Gaussiana, mostrar que el bloque $(2,2)$ de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

14. Calcular la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 \\ 10 & 10 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal de L son uno. Use la factorización para hallar la solución del sistema $Ax = b$ donde $b^t = (-2, 0, 2, 1)$.

15. Calcular la factorización de Cholesky de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 5 & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Deducir de la factorización el valor de λ que hace a la matriz singular.

16. Analizar que sucede cuando se aplica Eliminación Gaussiana con Pivoteo Parcial a la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Método de Gauss-Jordan: Este método se puede describir como sigue. Use la i-ésima ecuación para eliminar no solo los x_i en las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$, como se hizo en el método de eliminación de Gauss, sino también de $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. Reduciendo $[A, b]$ a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right)$$

la solución se obtiene tomando $x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{i,i}^{(}(i))}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Este procedimiento evita la necesidad de la sustitución hacia atrás en la Eliminación Gaussiana. Construya un algoritmo para el procedimiento de Gauss-Jordan siguiendo el patrón del algoritmo de Eliminación de Gauss sin pivoteo.

18. Realice el conteo de operaciones del método de Gauss-Jordan.

19. Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver los ejercicios (1), (2) y (7).

20. Si A es simétrica y definida positiva:

    a) Escribir el algoritmo de la factorización LDL^T.

    b) Hacer el conteo de operaciones de (a).

21. *a*) Demuestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores $n \times n$, es una matriz triangular inferior.

    b) Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores $n \times n$, es una matriz triangular superior.

    c) Demuestre que la inversa de una matriz triangular inferior no singular $n \times n$ es triangular inferior.

22. Suponga que m sistemas lineales $Ax = b$, $p = 1, \ldots, m$, han de resolverse, cada uno con la matriz de coeficientes A de $n \times n$.

    a) Hallar el número de operaciones que requiere la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás aplicada a la matriz ampliada $[A : b^1 b^2 \ldots b^m]$.

    b) Hallar el número de operaciones que requiere el método de Gauss-Jordan aplicado a la matriz ampliada $[A : b^1 b^2 \ldots b^m]$.

23. Una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denomina ortogonal si $QQ^t = Q^tQ = I$, es decir, $Q^{-1} = Q^t$. Considere el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, y $b \in \mathbb{R}^n$. Suponga que A se puede factorizar como QR, es decir, $A = QR$, donde Q es una matriz ortogonal y R es una matriz triangular superior.

    a) Explique como se puede usar la factorización QR de A, para resolver el Sistemas de Ecuaciones Normales (SEN) asociado al sistema general $Ax = b$.

    b) Considere el sistema $Ax = b$

    $$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$$

    c) Use la factorización QR de A, para hallar la solución del problema dado. Escriba las matrices, el sistema y la solución.

24. La torre de Pisa se inclina más a medida que pasa el tiempo. He aquí las mediciones de la inclinación de la torre entre los años 75 y 87. La inclinación se da como la distancia entre el punto donde estaría la torre en posición vertical y el punto en el que realmente se encuentra. Las distancias se dan en décimas de milímetros por encima de 2.9m.

Año	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
Inclinación	642	644	656	667	673	688	696	698	713	717	725	742	757

a) Muestre la matriz A y el vector b que resulta de ajustar los datos mediante una recta.

b) Determine el rango de la matriz A y el rango de la matriz aumentasda $(A|b)$. Tiene solución el sistema?

c) Calcule el número de condición de A y A^tA. Que relación observa entre estos valores?

d) Construya los elementos del sistema de ecuaciones normales para la matriz A dada y el vector b.

e) Resuelva el sistema anterior utilizando factorización QR y factorización de Cholesky.

25. Usando primero el método de Householder, y luego el método de Givens, encuentre la factorización QR de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -1 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

26. Dado el siguiente sistema, muestre que la matriz asociada es positiva definida. Resuelva por medio de la factorización de Cholesky y muestre la factorización $\tilde{L}D\tilde{L}^t$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & -5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

27. Resolver, usando el método de eliminación gaussiana clásica y sin pivoteo parcial, el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0001 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

compare los resultados obtenidos.

28. Resolver, usando el método de eliminación gaussiana con pivoteo total y con factorización QR (Gram-Schmidt, Householder, Givens) el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

29. Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\varepsilon > 0$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$.

30. Repetir el ejercicio anterior con la norma $\|\cdot\|_1$.

31. Dado el sistema lineal

$$P = \begin{cases} 0{,}1x + y & = & b_1 \\ 0{,}1x + 1{,}5y & = & b_2 \end{cases}$$

   a) Calcule el número de condición en norma infinito.

   b) Sustituya x por x/α y calcule el número de condición de la nueva matriz. ¿Qué relación tiene con la original? ¿Cuál α minimiza el número de condición?

32. Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   con $\varepsilon > 0$, pequeño pero no nulo para el computador, ¿qué resultado numérico se obtiene en el computador si se aplica el método de Gauss sin pivoteo?, ¿dicho resultado es la solución correcta del sistema lineal? Razone su respuesta.

33. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} d & a \\ a & d \end{pmatrix}$, donde $0 < a < d$.

   a) Encuentre el factor L de Cholesky.

   b) Consiga el vector x tal que $Ax = b$ cuando $b = (3, 2)^t$, $d = 9$ y $a = 6$.

34. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, elementos $a_{i,1} = \alpha_i, i = 2, \ldots, n$ y ceros en el resto de las posiciones. Por ejemplo, si $n = 4$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule el número de condición en la norma infinito de A, $\kappa_\infty(A)$ para cualquier n.

   b) Sean $b^t = (1, 1, \ldots, 1)$ y $b^t = (1{,}00005, 1, \ldots, 1)$. Suponga que $Ax = b$ y $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Use $\kappa_\infty(A)$ para obtener una cota del error relativo en $\tilde{x}$, como aproximación de x, cuando $\max|\alpha_i| = 0,01$ y cuando $\max|\alpha_i| = 100$.

35. Considere las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los productos PA, AP , DA y AD. ¿Qué efecto produce premultiplicar y postmultiplicar una matriz A por una matriz de permutación?, ¿Y por una matriz diagonal?

36. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz Hessenberg superior, diga qué hace el siguiente seudocódigo y calcule la cantidad total de operaciones de punto flotante (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) que éste efectúa.

    input: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

    for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    - $\alpha \leftarrow \dfrac{a_{k+1,k}}{a_{k,k}}$
    - **for** $j \leftarrow k$ **to** n **do**
      - $a_{k+1,j} \leftarrow a_{k+1,j} - \alpha * a_{k,j}$
    - **end**

    end

37. Si se tiene una descomposición LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior y $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior, proponga un seudocódigo para resolver el sistema lineal $x^tA = b^t$.

38. Sea $A = \begin{pmatrix} 90 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 90 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 90 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 90 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 90 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

    Resuelva los sistemas $Ax = b$, $y^tA = c$ y $Ax = d$ usando una sola factorización LU.