

## Unidad III: Aproximación de funciones.

José Luis Ramírez B.

January 14, 2025

## 1 Introducción

## 2 Interpolación

- Taylor

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuenta, se pueden tomar muestras experimentales.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuenta, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.

# Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuenta, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.
- Se desea extraer información de esos datos.

# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).



# Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).
- o bien “intentando recrear/reconstruir el fenómeno en su totalidad” (en un dominio continuo de espacio, tiempo o cualquier otra magnitud), con la función que represente “lo mejor posible” esos datos.

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan (“interpolan” es el término matemático) exactamente por los puntos dados.

# Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan (“interpolan” es el término matemático) exactamente por los puntos dados.
- Curvas de ajuste: cálculo de funciones aproximadas a los datos que tenemos (en algún sentido, para cierta distancia)

# Resultados Fundamentales

Polinomio de grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

# Resultados Fundamentales

Polinomio de grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Teorema:

Si  $p_n$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces  $p_n(x) = 0$  tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

# Resultados Fundamentales

## Teorema:

Sea  $p_n$  un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces existen constantes  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , posiblemente complejas, y enteros positivos  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , tales que  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

# Resultados Fundamentales

## Teorema:

Sea  $p_n$  un polinomio de grado  $n \geq 1$ , entonces existen constantes  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , posiblemente complejas, y enteros positivos  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , tales que  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

## Teorema:

Sean  $p_n$  y  $q_n$  dos polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Si existen  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , con  $k > n$ , números distintos tales que  $p_n(x_i) = q_n(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , entonces  $p_n(x) = q_n(x)$  para todo  $x$ .



# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar  $p_n(x_0)$

# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots (a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)) \cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar  $p_n(x_0)$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

entonces:  $p_n(x_0) = b_{-1}$

# Evaluación de polinomios

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto  $x_0$  si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots (a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)) \cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar  $p_n(x_0)$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

entonces:  $p_n(x_0) = b_{-1}$

Además, si se llama

$$q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

se tiene que:

$$p_n(x) = (x - x_0) q_{n-1}(x) + b_{-1}$$

y por lo tanto

$$p'_n(x_0) = q_{n-1}(x_0)$$

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.

# Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de  $x_0$  y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.
- División Sintética: Está relacionado con el método de división sintética para polinomios, lo que lo hace muy útil en el campo del álgebra y el análisis numérico.



# Evaluación de polinomios

## En Resumen:

- El algoritmo de Horner es una herramienta poderosa para evaluar polinomios y también para obtener información sobre su derivada.
- Es un método eficiente, estable y muy utilizado en diversos campos de las matemáticas y la informática.

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Tenemos el polinomio:

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Y queremos evaluarlo en  $x_0 = 2$  y también calcular  $p'_3(2)$ .

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3)$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3)$$

- Iteración:

$$b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \text{ (coeficiente de } x^2)$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ (coeficiente de } x^1)$$

$$b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11 \text{ (término independiente)}$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$

Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, \dots, 1, 0, -1$$

$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:

$$b_2 = a_3 = 2 \text{ (coeficiente de } x^3)$$

- Iteración:

$$b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \text{ (coeficiente de } x^2)$$

$$b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ (coeficiente de } x^1)$$

$$b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11 \text{ (término independiente)}$$

- Resultado:

$$p_3(2) = b_{-1} = 11$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$

Con los valores de  $b$  que obtuvimos (excepto  $b_{-1}$ ), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$

Con los valores de  $b$  que obtuvimos (excepto  $b_{-1}$ ), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

### 3. Relación entre $p_3(x)$ , $q_2(x)$ y $b_{-1}$

El polinomio  $p_3(x)$  se puede expresar como:

$$p_3(x) = (x - x_0) \cdot q_2(x) + b_{-1}$$

$$p_3(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + x + 6) + 11$$



## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$

Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$

Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$

Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$

Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$

Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$

Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

- Iteración:

$$c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a  $q_2(x)$  para obtener  $q_2(2) = p'_3(2)$

Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio  $q_2(x)$  en  $x_0 = 2$ . Los coeficientes de  $q_2(x)$  son:  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 6$

Llamemos a los nuevos coeficientes  $c_i$ :

- Inicialización:

$$c_1 = b_2 = 2$$

- Iteración:

$$c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

- Resultado:

$$q_2(2) = c_{-1} = 16$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$



## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### 5. Derivada $p'_3(2)$

Se tiene que

$$p'_3(2) = q_2(2) = 16$$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$
- $p'_3(2) = q_2(2) = 16$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio  $p_3(x)$  y evaluándolo en  $x = 2$ .

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$p'_3(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

## Ejemplo: Polinomio de Grado 3

### Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio  $p_3(x)$  y evaluándolo en  $x = 2$ .

$$\begin{aligned}p_3(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \\p'_3(x) &= 6x^2 - 6x + 4\end{aligned}$$

Evaluando en  $x = 2$ :

$$p'_3(2) = 6(2^2) - 6(2) + 4 = 6(4) - 12 + 4 = 24 - 12 + 4 = 16$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero  $n$  no negativo, un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  y los valores  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  de una función y sus  $n$  primeras derivadas en  $x_0$ , encontrar un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero  $n$  no negativo, un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  y los valores  $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  de una función y sus  $n$  primeras derivadas en  $x_0$ , encontrar un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

## Teorema:

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única, que se denomina polinomio de Taylor de grado  $\leq n$  de la función  $f$  en el punto  $x_0$ :

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

# Problema de interpolación de Taylor

## Teorema:

Para  $n > 1$  sea  $f(x)$  una función  $n$  veces derivable en  $x_0$ . El polinomio de Taylor  $P(x)$  verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

con la notación  $o$  pequeña de Landau

$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$  para  $x \rightarrow x_0$ . Además,  $P(x)$  es el único polinomio de grado  $\leq n$  con esta propiedad.

# Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

# Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

## Teorema:

Sean  $x$  y  $x_0$  dos números reales distintos y  $f(x)$  una función con  $n$  derivadas continuas en un intervalo conteniendo a  $x$  y  $x_0$ , en el que también existe  $f^{(n+1)}$ . Entonces existe un punto  $\xi$  entre  $x$  y  $x_0$  tal que:

$$f(x) - P(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$



# Problema de interpolación de Taylor

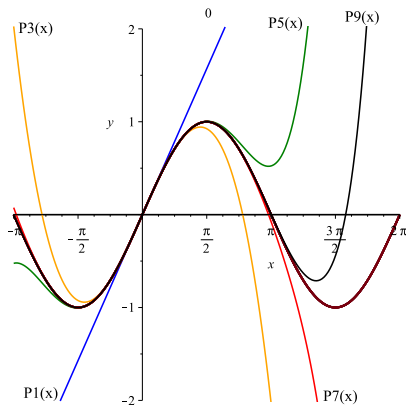
## Colorario:

Además de las hipótesis del teorema supongase que para cada  $t$  entre  $x$  y  $x_0$  se verifica que  $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1}$  constante, entonces:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{(n+1)} K_{n+1}}{(n + 1)!}$$

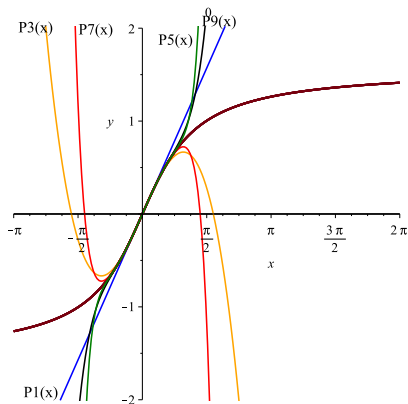
## Ejemplo:

A continuación se muestran las gráficas de la función  $f(x) = \sin(x)$  y de su polinomio de Taylor de orden 1 al 9 en el cero. Se puede comprobar que la aproximación es más exacta a medida que se aumenta el orden.



## Ejemplo:

El hecho de que la función seno y su polinomio de Taylor se parezcan tanto como se quiera, con sólo aumentar el grado del polinomio lo suficiente, no es algo que le ocurra a todas las funciones. Para la función arctan la situación no es tan buena:



## Ejemplo:

- Se desea aproximar la función  $f(x) = e^x$  mediante el polinomio de Taylor centrado en  $x_0 = 0$  de orden 5 y hallar el error obtenido en la estimación para  $x = 1.5$
- El polinomio de Taylor de grado 5 viene dada por la siguiente expresión

$$P_5(x) = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 + \frac{1}{5!}(x - 0)^5$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

## Ejemplo:

Con la expresión del residuo se calcula el error de Truncamiento:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0)^6 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = \frac{e^\xi}{6!}x^6$$

$$R_5(x) = \frac{e^\xi}{6!}x^6$$