Unidad II: Solución Numérica de Ecuaciones No Lineales.

José Luis Ramírez B.

December 1, 2024

Motivación.

- La determinación de las raíces de una ecuación o de un sistema de ecuaciones, es uno de los problemas más antiguos de aproximación numérica que se presenta con frecuencia en la solución de una gran variedad de problemas en la matemática aplicada.
- En un problema más general, si f es una función cualquiera, la ecuación $f(x) = 0$ no puede resolverse analíticamente. De hecho, ni siquiera se sabe a priori cuántos ceros tiene f: ¿varios, uno, ninguno?

Motivación.

La ecuación de Peng-Robinson es una ecuación de estado que proporciona la presión P de un gas mediante:

$$P = \frac{R * T}{V - b} - \frac{a}{V * (V + b) + b * (V - b)} \tag{1}$$

donde a y b son constantes, T es la temperatura absoluta a la que se encuentra el gas, V es el volumen específico y R es la constante de los gases perfectos $(8.31441J/(mol.^{\circ}K))$. Para el CO_2 las constantes a y b toman los valores $a = 364.61m^6.kPa/(kg.mol)^2$ y $b = 0.02664m^3/kg.mol$. Supongamos que se desea encontrar la densidad $(1/V)$ del CO_2 a una presión de 10^4kPa y a una temperatura de $340^{\circ}K$ usando la ecuación de Peng- Robinson.

Dos casos importantes:

Dos casos importantes:

1. Solución de una ecuación no lineal con una incógnita, donde:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

La solución es un escalar x para el cual $f(x) = 0$

Dos casos importantes:

1. Solución de una ecuación no lineal con una incógnita, donde:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
La solución es un escalar x para el cual $f(x) = 0$
2. Solución a un sistema acoplado de n ecuaciones no lineales en las n incógnitas, donde:
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
La solución es un vector x para el cual todas las componentes de f son cero simultáneamente, $f(x) = 0$

Ejemplos:

Ejemplos:

1. Ecuación no lineal en una dimensión

$$x^2 - 4\sin(x) = 0$$

para la cual $x = 1.9$ es una solución aproximada.

Ejemplos:

1. Ecuación no lineal en una dimensión

$$x^2 - 4\sin(x) = 0$$

para la cual $x = 1.9$ es una solución aproximada.

2. Sistema de ecuaciones no lineales en dos dimensiones

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + 0.25 & = & 0 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 & = & 0 \end{cases}$$

para el cual el vector solución es $x = [0.5, 0.5]^t$

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.

Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ posee tres soluciones.

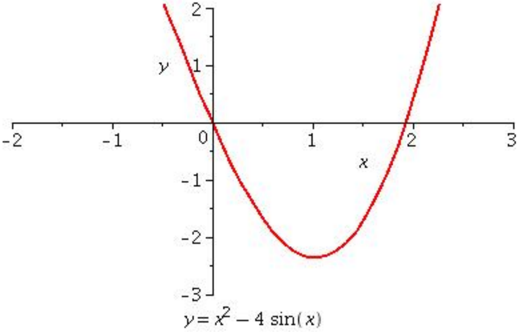
Ejemplo: Una dimensión

Ecuaciones no lineales pueden tener cualquier número de soluciones

- $e^x + 1 = 0$ no posee solución.
- $e^{-x} - x = 0$ tiene una solución.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ posee dos soluciones.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ posee tres soluciones.
- $\sin(x) = 0$ posee infinitas soluciones.

El Método Gráfico

El método gráfico es un método muy simple, consiste en calcular valores de la variable dependiente para distintos valores de la variable independiente, para luego observar el punto de intersección de la función con el eje de las abscisas. Este punto proporciona una primera aproximación a la raíz de la ecuación.



Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.
- Separación: Aislar raíces en caso de la existencia de varias.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Se llama raíz o cero de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ a todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Se podrían precisar tres etapas en el cálculo de un cero:

- Localización: Existencia de las raíces.
- Separación: Aislar raíces en caso de la existencia de varias.
- Aproximación Numérica: Generación de una sucesión convergente a la raíz α.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad $p \in \mathbb{Z}$, si

$$f(x) = (x - \alpha)^p q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$.

Solución de Ecuaciones No Lineales

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un cero de f de multiplicidad $p \in \mathbb{Z}$, si

$$f(x) = (x - \alpha)^p q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$.

Si $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ pero $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$, entonces la raíz α posee multiplicidad m

Ratas de Convergencia

Suponiendo que un método iterativo produce una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a partir de un punto inicial x_0. Se quiere conocer si converge a la solución α y cual es la rapidez con que lo hace.

Definición

La sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$$

Sea $e_n = x_n - \alpha$. Si existen dos constantes $\lambda > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = \lambda$$

se dice que $\{x_n\}$ converge hacia α, con orden de convergencia r y λ se denomina la constante asintótica del error..

Ratas de Convergencia

Algunos casos de interés

Ratas de Convergencia

Algunos casos de interés

- $r = 1$: lineal ($\lambda < 1$)

Ratas de Convergencia

Algunos casos de interés

- $r = 1$: lineal ($\lambda < 1$)
- $r > 1$: superlineal

Ratas de Convergencia

Algunos casos de interés

- $r = 1$: lineal $(\lambda < 1)$
- $r > 1$: superlineal
- $r = 2$: cuadrático

Ratas de Convergencia

Algunos casos de interés

- $r = 1$: lineal $(\lambda < 1)$
- $r > 1$: superlineal
- $r = 2$: cuadrático

Rata de Convergencia	Dígitos ganados por iteración
lineal	constante
superlineal	incrementándose
cuadrática	doble

Método de Bisección

Teorema del valor intermedio de Bolzano.

Supongamos que $f \in C[a, b]$ y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Método de Bisección

- Supongamos que f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un $p \in (a, b)$, tal que $f(p) = 0$.

Método de Bisección

- Supongamos que f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, y $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces, por el Teorema de Bolzano, existe al menos un $p \in (a, b)$, tal que $f(p) = 0$.
- Una primera aproximación de este punto $p*$ puede ser el punto medio:

$$p_1 = \frac{a + b}{2}$$

Método de Bisección

- Dado que la función es continua, si $f(a) \cdot f(p_1) < 0$ en el intervalo $[a, p_1]$ habrá al menos una solución de la ecuación.

Método de Bisección

- Dado que la función es continua, si $f(a) \cdot f(p_1) < 0$ en el intervalo $[a, p_1]$ habrá al menos una solución de la ecuación.
- Y si $f(a) \cdot f(p_1) > 0$ en el intervalo $[p_1, b]$ existirá al menos una raíz.

Método de Bisección

- Dado que la función es continua, si $f(a) \cdot f(p_1) < 0$ en el intervalo $[a, p_1]$ habrá al menos una solución de la ecuación.
- Y si $f(a) \cdot f(p_1) > 0$ en el intervalo $[p_1, b]$ existirá al menos una raíz.
- Por tanto se habrá definido un nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ en el que existirá una solución. Al que puede aplicársele nuevamente el proceso anterior.

Método de Bisección

En general, partiendo de un intervalo $[a_j, b_j]$ en el que $f(a_j) \cdot f(b_j) < 0$ se denotará por p_{j+1} al punto medio del intervalo:

$$p_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}$$

procediendo de la forma siguiente:

- Si $f(p_{j+1}) = 0$ se habrá obtenido una solución de la ecuación: el punto p_{j+1}.

Método de Bisección

En general, partiendo de un intervalo $[a_j, b_j]$ en el que $f(a_j) \cdot f(b_j) < 0$ se denotará por p_{j+1} al punto medio del intervalo:

$$p_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}$$

procediendo de la forma siguiente:

- Si $f(p_{j+1}) = 0$ se habrá obtenido una solución de la ecuación: el punto p_{j+1}.
- Si $f(a_j) \cdot f(p_{j+1}) < 0$ se denotará por: $a_{j+1} = a_j$ y por $b_{j+1} = p_{j+1}$.

Método de Bisección

En general, partiendo de un intervalo $[a_j, b_j]$ en el que $f(a_j) \cdot f(b_j) < 0$ se denotará por p_{j+1} al punto medio del intervalo:

$$p_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}$$

procediendo de la forma siguiente:

- Si $f(p_{j+1}) = 0$ se habrá obtenido una solución de la ecuación: el punto p_{j+1}.
- Si $f(a_j) \cdot f(p_{j+1}) < 0$ se denotará por: $a_{j+1} = a_j$ y por $b_{j+1} = p_{j+1}$.
- Si $f(a_j) \cdot f(p_{j+1}) > 0$ se denotará por: $a_{j+1} = p_{j+1}$ y por $b_{j+1} = b_j$.

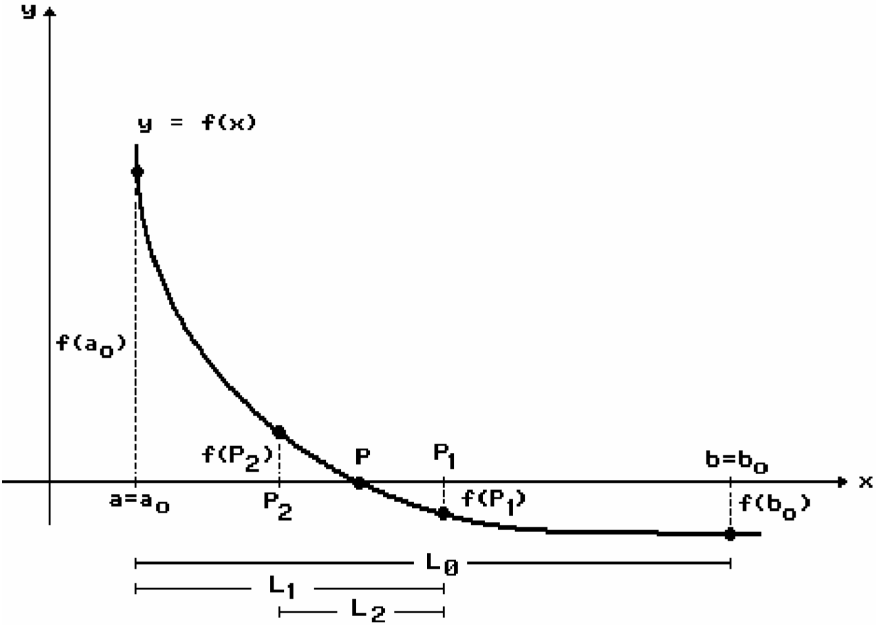
Método de Bisección

En general, partiendo de un intervalo $[a_j, b_j]$ en el que $f(a_j) \cdot f(b_j) < 0$ se denotará por p_{j+1} al punto medio del intervalo:

$$p_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}$$

procediendo de la forma siguiente:

- Si $f(p_{j+1}) = 0$ se habrá obtenido una solución de la ecuación: el punto p_{j+1}.
- Si $f(a_j) \cdot f(p_{j+1}) < 0$ se denotará por: $a_{j+1} = a_j$ y por $b_{j+1} = p_{j+1}$.
- Si $f(a_j) \cdot f(p_{j+1}) > 0$ se denotará por: $a_{j+1} = p_{j+1}$ y por $b_{j+1} = b_j$.
- Al nuevo intervalo $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ se le vuelve a aplicar el mismo proceso.


y
y = f(x)
f(a0)
f(P2)
P
P1
b=b0
x
a=a0
P2
f(P1)
f(b0)
L0
L1
L2

Método de Bisección

Teorema

Sea f continua en $[a, b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$. Si $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$, denota los intervalos obtenidos por el método de bisección entonces existen

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n$$

son iguales y convergen a un cero de f . Más aún, definiendo $c_n = \frac{b_n + a_n}{2}$, $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$, con $f(\alpha) = 0$ y se verifica

$$|\alpha - c_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Método de Bisección

Demostración

- Por definición se tiene que $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b$ luego a_n es una sucesión creciente y acotada superiormente por lo tanto es convergente. De manera análoga resulta convergente la sucesión b_n por ser decreciente y acotada inferiormente.

Método de Bisección

Demostración

- Por definición se tiene que $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b$ luego a_n es una sucesión creciente y acotada superiormente por lo tanto es convergente. De manera análoga resulta convergente la sucesión b_n por ser decreciente y acotada inferiormente.
- Sean $a^* = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b^* = \lim_{n\to\infty} b_n$. Se quiere probar que $a^* = b^*$ o lo que es equivalente que $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Se observa que

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Método de Bisección

Demostración

- Definiendo $\alpha = a^* = b^*$, falta probar que $f(\alpha) = 0$. Se sabe que $f(a_n)f(b_n) \leq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$, luego como $f \in C([a,b])$ se tiene que

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{f(\alpha)} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{f(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$$
$$\Rightarrow f^2(\alpha) \leq 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

Además

$$|\alpha - c_n| \leq \left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n}$$

como se quería probar.

Método de Bisección

Proposición

- Si la función $f(x)$ es continua y estríctamente monótona en el intervalo $[a,b]$ y además es tal que $f(a)\cdot f(b)<0$, dado un valor real positivo δ y denotando por N al menor número natural tal que:

$$N > \frac{\ln\left(\frac{|b-a|}{\delta}\right)}{\ln(2)}$$

se verifica que N iteraciones del proceso de bisección conducen a un valor x_{N+1} que dista de la solución de la ecuación $f(x)=0$ una magnitud inferior a δ.

Método de Bisección

input : $a, b \in \mathbb{R}$, Máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.
output: Solución aproximada p tal que $f(p) \approx 0$.

$i \leftarrow 1$
while $i \leq N$ **do**
  $p \leftarrow a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2}$
  $i \leftarrow i + 1$
  if $|f(p)| < TOL \vee \dfrac{b-a}{2} < TOL$ **then**
    Salida(p); EXIT
  end
  if $f(a)f(p) > 0$ **then**
    $a \leftarrow p$
  else
    $b \leftarrow p$
  end
end

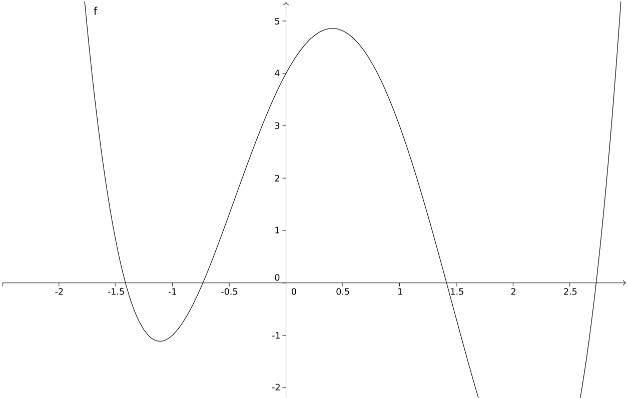
Algorithm 1: Algoritmo de Bisección.

Ejemplo

- Aplicar el método de bisección para encontrar un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, en el intervalo $[-2, -1]$

Ejemplo

- Aplicar el método de bisección para encontrar un cero de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, en el intervalo $[-2, -1]$
- Como se observa en la gráfica, se satisfacen las hipótesis del teorema de Bolzano, por lo tanto se asegura la existencia de una valor $\alpha \in [-2, -1]$ tal que $f(\alpha) = 0$.



Ejemplo

k	a	p	b	$f(p)$	$\frac{b-a}{2}$
1	-2.00000000	-1.50000000	-1.00000000	0.81250000	1.00000000
2	-1.50000000	-1.25000000	-1.00000000	-0.90234375	0.50000000
3	-1.50000000	-1.37500000	-1.25000000	-0.28881836	0.25000000
4	-1.50000000	-1.43750000	-1.37500000	0.19532776	0.12500000
5	-1.43750000	-1.40625000	-1.37500000	-0.06266689	0.06250000
6	-1.43750000	-1.42187500	-1.40625000	0.06226259	0.03125000
7	-1.42187500	-1.41406250	-1.40625000	-0.00120812	0.01562500
8	-1.42187500	-1.41796875	-1.41406250	0.03027437	0.00781250
9	-1.41796875	-1.41601562	-1.41406250	0.01447008	0.00390625
10	-1.41601562	-1.41503906	-1.41406250	0.00661524	0.00195312
11	-1.41503906	-1.41455078	-1.41406250	0.00269963	0.00097656
12	-1.41455078	-1.41430664	-1.41406250	0.00074477	0.00048828
13	-1.41430664	-1.41418457	-1.41406250	-0.00023192	0.00024414
14	-1.41430664	-1.41424561	-1.41418457	0.00025636	0.00012207
15	-1.41424561	-1.41421509	-1.41418457	0.00001220	0.00006104
16	-1.41421509	-1.41419983	-1.41418457	-0.00010986	0.00003052
17	-1.41421509	-1.41420746	-1.41419983	-0.00004883	0.00001526

Table: Resultados Bisección.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- El método de la falsa posición o Regula Falsi, es otra alternativa usada para resolver el problema de encontrar el cero de una función y difiere del método de bisección en la forma como se consiguen los valores de c_n.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

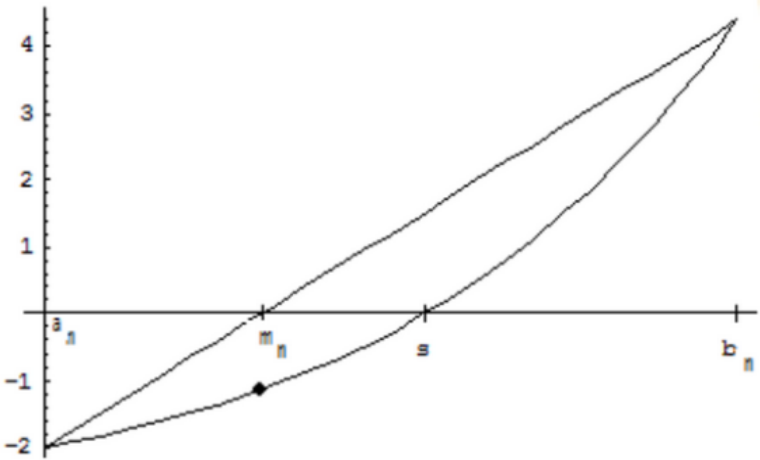
- El método de la falsa posición o Regula Falsi, es otra alternativa usada para resolver el problema de encontrar el cero de una función y difiere del método de bisección en la forma como se consiguen los valores de c_n.
- Sea $f(a)f(b) < 0$ y sea la recta que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ cuya pendiente es $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- El método de la falsa posición o Regula Falsi, es otra alternativa usada para resolver el problema de encontrar el cero de una función y difiere del método de bisección en la forma como se consiguen los valores de c_n.
- Sea $f(a)f(b) < 0$ y sea la recta que une los puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$ cuya pendiente es $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
- pero si $(c, 0)$ es el punto de intersección de la recta con el eje x, entonces también $m = \frac{0-f(b)}{c-b}$, obteniendo

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.



Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$
  iii) $f(c)f(b) < 0.$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$
  iii) $f(c)f(b) < 0$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$
  iii) $f(c)f(b) < 0$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f.
- Si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay un cero de f en $[a; c]$.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$
  iii) $f(c)f(b) < 0$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f.
- Si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay un cero de f en $[a; c]$.
- Si $f(c)f(b) < 0$, entonces hay un cero de f en $[c; b]$.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:
  i) $f(c) = 0$
  ii) $f(a)f(c) < 0$
  iii) $f(c)f(b) < 0$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero de f.
- Si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay un cero de f en $[a; c]$.
- Si $f(c)f(b) < 0$, entonces hay un cero de f en $[c; b]$.
- Lo anterior sugiere un proceso iterativo que se concreta tomando

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

Teorema

Sea f dos veces continuamente diferenciable en $[a, b]$ con α una única raíz en $[a, b]$. Supongamos $f(a)f(b) < 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, y f'' no cambia de signo en $[a, b]$. Si $M = \left|\frac{\omega-\alpha}{2}\right| \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right| < 1$ con $\omega = a$ o $\omega = b$ según sea el caso, entonces el método de Regula Falsi converge. Esta convergencia es lineal.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

Demostración

- Suponiendo $f''(x) > 0$ en $[a, b]$, es decir, f convexa. Entonces el segmento de recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está por encima de la gráfica de f, $\forall a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. (Si $f'' < 0$, cambiar f por $-f$ y hacer el mismo razonamiento).

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

Demostración

- Suponiendo $f''(x) > 0$ en $[a, b]$, es decir, f convexa. Entonces el segmento de recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ está por encima de la gráfica de f, $\forall a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. (Si $f'' < 0$, cambiar f por $-f$ y hacer el mismo razonamiento).
- **Caso 1:** $f'(\alpha) > 0$. Aquí resulta que c siempre verifica que $a < c < \alpha$. En este caso $b - \alpha = constante$. Sea $a_n = n$-ésimo valor de a en el procedimiento y dado que

$$c = b - f(b)\left[\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right]$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- se tiene que

$$
\begin{aligned}
c-\alpha &= b-\alpha-f(b)\left[\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right]=\frac{(b-\alpha)(f(b)-f(a))-bf(b)+af(b)}{f(b)-f(a)}\\
&= \frac{-\alpha f(b)+\alpha f(a)-bf(a)+af(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{(a-\alpha)f(b)-(b-\alpha)f(a)}{f(b)-f(a)}\\
&= (a-\alpha)(b-\alpha)\frac{1}{f(b)-f(a)}\left[\frac{f(b)}{b-\alpha}-\frac{f(a)}{a-\alpha}\right]\\
&= (a-\alpha)(b-\alpha)\frac{1}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\frac{\left[\frac{f(b)}{b-\alpha}-\frac{f(a)}{a-\alpha}\right]}{b-a}\\
c-\alpha &= \frac{1}{2}(a-\alpha)(b-\alpha)\frac{f''(\eta)}{f'(\xi)},\quad \eta,\xi\in(a,b)
\end{aligned}
$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Por lo tanto resulta que:

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)(b - \alpha)\frac{f''(\eta_n)}{f'(\xi_n)}, \quad \eta_n, \xi_n \in (a_n, b)$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Por lo tanto resulta que:

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)(b - \alpha)\frac{f''(\eta_n)}{f'(\xi_n)}, \qquad \eta_n, \xi_n \in (a_n, b)$$

- Se tiene así que

$$|\xi_{n+1}| \leq M|\xi_n| \text{ con } M = \frac{b - \alpha}{2} \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- Por lo tanto resulta que:

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)(b - \alpha)\frac{f''(\eta_n)}{f'(\xi_n)}, \quad \eta_n, \xi_n \in (a_n, b)$$

- Se tiene así que

$$|\xi_{n+1}| \leq M|\xi_n| \text{ con } M = \frac{b-\alpha}{2} \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$$

- Por lo tanto $|\xi_{n+1}| \leq M^n |\xi_0|$ y si $M < 1$ se puede asegurar que $\lim \xi_n = 0$ y que la convergencia es lineal.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

- **Caso 2:** En este caso c siempre satisface

  $$\alpha < c < b$$

  y $\alpha - a = constante$. Se obtienen las mismas conclusiones que en el caso 1, pero con

  $$M = \left|\frac{a-\alpha}{2}\right| \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$$

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

input : $a, b \in \mathbb{R}$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.
output: Solución aproximada p tal que $f(p) \approx 0$.

$i \leftarrow 1$
while $i \leq N$ **do**
  $p \leftarrow b - f(b)\left(\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}\right)$
  $i \leftarrow i + 1$
  if $|f(p)| < TOL$ **then**
    Salida(p); EXIT
  end
  if $f(a)f(p) > 0$ **then**
    $a \leftarrow p$
  else
    $b \leftarrow p$
  end
end

Algorithm 2: Algoritmo de Regula Falsi.

Método de Falsa Posición o Regula Falsi.

Los resultados obtenidos al aplicar el método de falsa posición al ejemplo presentado anteriormente son:

k	a	p	b	$f(p)$
1	-2.00000000	-1.07692308	-1.00000000	-1.10374287
2	-2.00000000	-1.15467487	-1.07692308	-1.09517990
3	-2.00000000	-1.22537135	-1.15467487	-0.97314218
4	-2.00000000	-1.28347785	-1.22537135	-0.78093935
5	-2.00000000	-1.32725869	-1.28347785	-0.57596833
6	-2.00000000	-1.35806966	-1.32725869	-0.39853249
7	-2.00000000	-1.37870356	-1.35806966	-0.26363401
8	-2.00000000	-1.39205970	-1.37870356	-0.16922303
9	-2.00000000	-1.40051361	-1.39205970	-0.10652517
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	-2.00000000	-1.41420522	-1.41419988	-0.00006671
25	-2.00000000	-1.41420848	-1.41420522	-0.00004066
26	-2.00000000	-1.41421046	-1.41420848	-0.00002478
27	-2.00000000	-1.41421167	-1.41421046	-0.00001510
28	-2.00000000	-1.41421241	-1.41421167	-0.00000921

Table: Resultados Regula Falsi.

Método de Illinois

- La intención del método es solucionar el problema de los extremos fijos que puede ocurrir en Regula Falsi.

Método de Illinois

- La intención del método es solucionar el problema de los extremos fijos que puede ocurrir en Regula Falsi.
- Este nuevo método sigue el mismo procedimiento de la Regula Falsi.

Método de Illinois

- La intención del método es solucionar el problema de los extremos fijos que puede ocurrir en Regula Falsi.
- Este nuevo método sigue el mismo procedimiento de la Regula Falsi.
- El nuevo punto x_{i+1} se forma obteniendo la raíz buscada $x^* \in (x_i; x_{i+1})$.

Método de Illinois

- La intención del método es solucionar el problema de los extremos fijos que puede ocurrir en Regula Falsi.
- Este nuevo método sigue el mismo procedimiento de la Regula Falsi.
- El nuevo punto x_{i+1} se forma obteniendo la raíz buscada $x^* \in (x_i; x_{i+1})$.
- En primer lugar se emplea Regula Falsi, es decir,

$$x_{i+1} = \frac{x_i f_{i-1} - x_{i-1} f_i}{f_{i-1} - f_i}$$

donde se ha usado la notación

$$f_i = f(x_i); \quad \forall i;$$

Método de Illinois

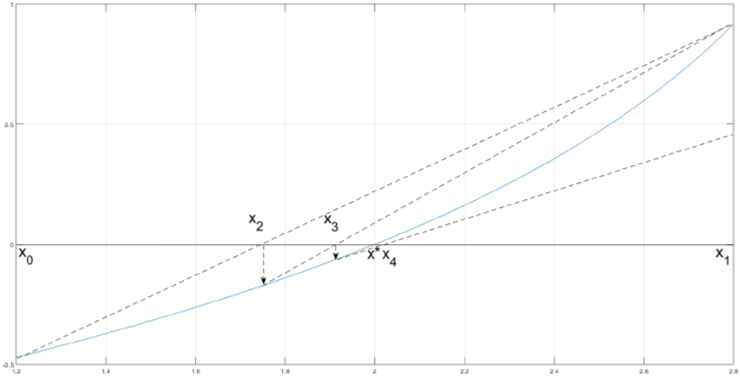
- A continuación
  i) si $f_i \cdot f_{i+1} < 0$ entonces $(x_{i-1}; f_{i-1})$ se reemplaza por $(x_i; f_i)$ y $x^* \in (x_i; x_{i+1})$.
  ii) si $f_i \cdot f_{i+1} > 0$ entonces $(x_{i-1}; f_{i-1})$ se reemplaza por $(x_{i-1}; f_{i-1}/2)$ y $x^* \in (x_{i-1}; x_{i+1})$.

Método de Illinois

- A continuación
  i) si $f_i \cdot f_{i+1} < 0$ entonces $(x_{i-1}; f_{i-1})$ se reemplaza por $(x_i; f_i)$ y $x^* \in (x_i; x_{i+1})$.
  ii) si $f_i \cdot f_{i+1} > 0$ entonces $(x_{i-1}; f_{i-1})$ se reemplaza por $(x_{i-1}; f_{i-1}/2)$ y $x^* \in (x_{i-1}; x_{i+1})$.
- De esta manera cuando se está en la situación ii), se calcula el siguiente punto de manera similar pero atendiendo a una fórmula ligeramente modificada

$$x_{i+2} = \frac{x_{i+1}\frac{f_{i-1}}{2} - x_{i-1}f_{i+1}}{\frac{f_{i-1}}{2} - f_{i+1}}$$

Método de Illinois



Algoritmo del Método de Illinois

Data: Un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$
Result: Una aproximación x a la raíz de $f(x)$

$i \leftarrow 1$; $x_{i-1} \leftarrow a$;
$f_{i-1} \leftarrow f(a)$; $x_i \leftarrow b$;
$f_i \leftarrow f(b)$;
while $|f_i| > \epsilon$ **do**
  $x_{i+1} \leftarrow \frac{x_i f_{i-1} - x_{i-1} f_i}{f_{i-1} - f_i}$; $f_{i+1} \leftarrow f(x_{i+1})$;
  if $f_{i+1} \cdot f_i < 0$ **then**
    $(x_{i-1}; f_{i-1}) \leftarrow (x_i; f_i)$;
  end
  else
    $(x_{i-1}; f_{i-1}) \leftarrow (x_{i-1}; f_{i-1}/2)$;
  end
  $i \leftarrow i + 1$;
end
return x_i

Método de Illinois.

Los resultados obtenidos al aplicar el método de Illinois al ejemplo presentado anteriormente son:

k	a	p	b	$\|f(p)\|$
1	-2.00000000	-1.07692307	-1.07692307	1.10374286e+00
2	-2.00000000	-1.22034600	-1.22034600	9.85725880e-01
3	-2.00000000	-1.41316536	-1.41316536	8.36748888e-03
4	-1.41316536	-1.41642075	-1.41642075	1.77379628e-02
5	-1.41642075	-1.41420880	-1.41420880	3.80691452e-05
6	-1.41642075	-1.41421354	-1.41421354	1.72544154-07

Table: Resultados Illinois.

Métodos de Punto Fijo

- El método de aproximaciones sucesivas (o de punto fijo) para determinar una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ se basa en el teorema del punto fijo.

Métodos de Punto Fijo

- El método de aproximaciones sucesivas (o de punto fijo) para determinar una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ se basa en el teorema del punto fijo.
- Para ello el primer paso que se realiza en este método consiste en reescribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.

Métodos de Punto Fijo

- El método de aproximaciones sucesivas (o de punto fijo) para determinar una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$ se basa en el teorema del punto fijo.
- Para ello el primer paso que se realiza en este método consiste en reescribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$.
- Una vez hecho esto, se escoge algún x_0 como aproximación inicial al punto fijo x^*, y se genera una sucesión de aproximaciones mediante las iteraciones:

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde se espera que la sucesión $\{x_n\}$ converja al punto fijo x^*.

Métodos de Punto Fijo

Proposición

Si f es una función continua y x_n converge, entonces su límite x^* es un punto fijo de f.

Métodos de Punto Fijo

Proposición

Si f es una función continua y x_n converge, entonces su límite x^* es un punto fijo de f.

La prueba de la proposición es la siguiente cadena de igualdades

$$f(x^*) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = x^*$$

Métodos de Punto Fijo

- Existen múltiples posibilidades para transformar la ecuación $f(x) = 0$ en otra del tipo $x = g(x)$.

Métodos de Punto Fijo

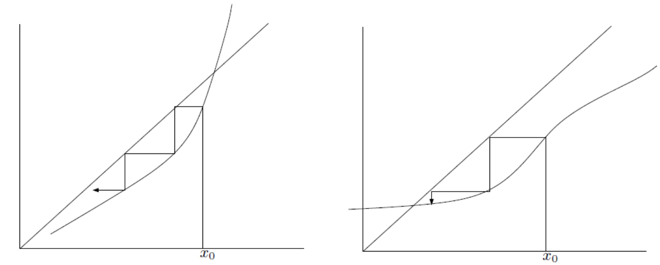
- Existen múltiples posibilidades para transformar la ecuación $f(x) = 0$ en otra del tipo $x = g(x)$.
- Por ejemplo podría despejarse (de la forma que sea) x de la expresión de la ecuación $f(x) = 0$.

Métodos de Punto Fijo

- Existen múltiples posibilidades para transformar la ecuación $f(x) = 0$ en otra del tipo $x = g(x)$.
- Por ejemplo podría despejarse (de la forma que sea) x de la expresión de la ecuación $f(x) = 0$.
- O podría sumarse la variable x en ambos lados de la ecuación y designar por $g(x)$ a $(f(x) + x)$:

$$0 = f(x) \Leftrightarrow x = f(x) + x = g(x)$$

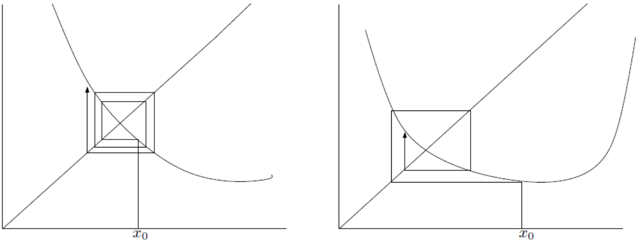
Métodos de Punto Fijo



(a) Proceso divergente (Escalera). (b) Proceso convergente (Escalera).

Figure: Proceso de Punto Fijo.

Métodos de Punto Fijo



(a) Proceso divergente (Oscilante). (b) Proceso convergente (Oscilante).

Figure: Proceso de Punto Fijo.

Métodos de Punto Fijo

- Hallar numéricamente una de las raíces de $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Sus raíces exactas son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$. Hallando únicamente en el cálculo de la raíz $x^* = 2$ tomando como punto de partida $x_0 = 2.1$ y definiendo g como.
  - $g_1(x) = x^2 - 2$
  - $g_2(x) = \sqrt{x+2}$
  - $g_3(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$
  - $g_4(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x - 1}$

Métodos de Punto Fijo

k	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
1	2.41000000e+00	2.02484567	1.95238095	2.00312500
2	3.80810000e+00	2.00620180	2.02439024	2.00003248
3	1.25016256e+01	2.00154985	1.98795180	2.00000000
4	1.54290642e+02	2.00038742	2.00606060	
5	2.38036024e+04	2.00009685	1.99697885	
6	5.66611489e+08	2.00002421	2.00151285	
7	3.21048579e+17	2.00000605	1.99924414	
8	1.03072190e+35	2.00000151	2.00037807	
9	1.06238764e+70		1.99981099	
10	1.12866751e+140		2.00009450	
11	1.27389035e+280		1.99995274	
12			2.00002362	
13			1.99998818	
14			2.00000590	
15			1.99999704	

Métodos de Punto Fijo

Definición:

Una aplicación $T : X \to X$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina contracción sobre X si existe un número real K, con $0 < K < 1$, tal que para todo $x, y \in X$

$$\|Tx - Ty\| \leq K\|x - y\|$$

en alguna norma vectorial $\|\cdot\|$.

Métodos de Punto Fijo

- Geométricamente esto significa que dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ tienen imágenes más cercanas que ellos mismos.

Métodos de Punto Fijo

- Geométricamente esto significa que dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ tienen imágenes más cercanas que ellos mismos.
- De ahí el nombre de contracción para la aplicación T.

Métodos de Punto Fijo

- Geométricamente esto significa que dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ tienen imágenes más cercanas que ellos mismos.
- De ahí el nombre de contracción para la aplicación T.
- **Ejemplo:** La función $g : [1, 3] \to [1, 3]$ definida por $g(x) = \sqrt{x + 2}$ es una contracción en $X = [1, 3]$.

Métodos de Punto Fijo

- Geométricamente esto significa que dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ tienen imágenes más cercanas que ellos mismos.
- De ahí el nombre de contracción para la aplicación T.
- **Ejemplo:** La función $g : [1, 3] \to [1, 3]$ definida por $g(x) = \sqrt{x + 2}$ es una contracción en $X = [1, 3]$.
- Primero verificando que $g(x) \in [1, 3]$ si $x \in [1, 3]$:

$$x \in [1, 3] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x+2 \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{x + 2} \leq \sqrt{5}$$

Por lo tanto, $g(x) = \sqrt{x + 2} \in [1, 3]$.

Métodos de Punto Fijo

- Por otro lado, por el teorema del valor medio

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\eta)||x - y| \quad \text{con } \eta \text{ entre } x \text{ y } y$$

y debido a que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow \max_{x\in[1,3]} |g'(x)| = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Métodos de Punto Fijo

- Por otro lado, por el teorema del valor medio

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\eta)||x - y| \quad \text{con } \eta \text{ entre } x \text{ y } y$$

y debido a que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow \max_{x \in [1,3]} |g'(x)| = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

- Por lo tanto

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} |x - y|$$

Se concluye que g es una contracción con $K = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$.

Métodos de Punto Fijo

Teorema de punto fijo de Banach

Si X es un conjunto cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ y T es una contracción sobre X, entonces T tiene un único punto fijo en X, y dado cualquier punto de comienzo $x_0 \in X$, la sucesión generada por iteración de punto fijo

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

convergerá al punto fijo x^* de T.

Métodos de Punto Fijo

Demostración:

Sea $x_0 \in X$, y sea $\{x_n\}$ la sucesión generada. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_{m+1} - x_m = Tx_m - Tx_{m-1}$, y por ser T una contracción:

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|Tx_m - Tx_{m-1}\| \leq K\|x_m - x_{m-1}\|$$

con $0 < K < 1$. Procediendo recursivamente, se obtiene

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leq K^m\|x_1 - x_0\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Métodos de Punto Fijo

Demostración:

Utilizando este resultado para toda $n > m$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \cdots + x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq (K^{n-1} + K^{n-2} + \cdots + K^m)\|x_1 - x_0\| \\
&\leq K^m(1 + K + K^2 + \cdots + K^{n-m-1})\|x_1 - x_0\| \\
&\leq K^m \frac{1 - K^{n-m}}{1 - K}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}
$$

y como $0 < K^{n-m} < 1$, entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq K^m \frac{1}{1 - K}\|x_1 - x_0\|$$

Métodos de Punto Fijo

Demostración:

Por lo tanto

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| \leq \lim_{m\to\infty} K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\| = 0$$

lo cual implica que la sucesión $\{x_n\}$ generada es una sucesión de Cauchy. Como T está definida sobre el conjunto cerrado X la sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tiene un límite $x^* \in X$:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Métodos de Punto Fijo

Demostración:

Este límite $x^* \in X$ es un punto fijo de T pues

$$\begin{aligned} \|x^* - Tx^*\| &= \|x^* - x_n + x_n - Tx^*\| \\ &\leq \|x^* - x_n\| + \|x_n - Tx^*\| \\ &= \|x^* - x_n\| + \|Tx_{n-1} - Tx^*\| \end{aligned}$$

implica que

$$\|x^* - Tx^*\| \leq \|x^* - x_n\| + K\|x_{n-1} - x^*\| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Métodos de Punto Fijo

Demostración:

Por lo tanto, $x^* = Tx^*$. Además este es el único punto fijo de T en X, pues si hubiese otro, digamos η, entonces

$$\|x^* - \eta\| = \|Tx^* - T\eta\| \leq K\|x^* - \eta\| < \|x^* - \eta\|,$$

lo cual no es posible. Por tanto, x^* es el único punto fijo de T en X.

Métodos de Punto Fijo

- En resumen, para que una aplicación sea una buena función de iteración y produzca una sucesión convergente al punto fijo basta con que ella sea una contracción en un conjunto cerrado X que contenga al punto fijo.

Métodos de Punto Fijo

- En resumen, para que una aplicación sea una buena función de iteración y produzca una sucesión convergente al punto fijo basta con que ella sea una contracción en un conjunto cerrado X que contenga al punto fijo.
- Si g es una función suave (tiene derivada continua en X), y si además

$$\|g'(x)\| \leq K, \forall x \in X \text{ con } 0 < K < 1,$$

entonces g es una contracción en X con $K = \max_{x \in X} \|g'(x)\| < 1$. En efecto, para $x, y, \in X$, por el teorema del valor medio, se tiene

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g'(\eta)\| \|x - y\| \text{ con } \eta \text{ entre los puntos } x, y.$$

Métodos de Punto Fijo

- En resumen, para que una aplicación sea una buena función de iteración y produzca una sucesión convergente al punto fijo basta con que ella sea una contracción en un conjunto cerrado X que contenga al punto fijo.
- Si g es una función suave (tiene derivada continua en X), y si además

$$\|g'(x)\| \leq K, \forall x \in X \text{ con } 0 < K < 1,$$

entonces g es una contracción en X con $K = \max_{x \in X} \|g'(x)\| < 1$. En efecto, para $x, y, \in X$, por el teorema del valor medio, se tiene

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g'(\eta)\| \|x - y\| \text{ con } \eta \text{ entre los puntos } x, y.$$

- Por lo tanto

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K \|x - y\| \text{ con } K = \max_{x \in X} \|g'(x)\| < 1.$$

Cota del error para el Método de Punto Fijo

- La desigualdad

$$\|x_n - x_m\| \leq K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\|$$

es válida para toda $n > m$.

Cota del error para el Método de Punto Fijo

- La desigualdad

$$\|x_n - x_m\| \leq K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\|$$

  es válida para toda $n > m$.

- Cuando $n \to \infty$, $x_n \to x^*$, y por tanto

$$\|x_m - x^*\| \leq K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Cota del error para el Método de Punto Fijo

- La desigualdad

$$\|x_n - x_m\| \leq K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\|$$

  es válida para toda $n > m$.

- Cuando $n \to \infty$, $x_n \to x^*$, y por tanto

$$\|x_m - x^*\| \leq K^m \frac{1}{1-K} \|x_1 - x_0\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Esta desigualdad, sirve para estimar el número de iteraciones necesarias para alcanzar una precisión determinada en el cálculo del punto fijo x^*:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\|x_n - x^*\|}{\|x_1 - x_0\|}(1-K)\right)}{\ln(K)}$$

Orden de Convergencia

Teorema

Sea $f(x) = 0$ una ecuación no lineal y $x = g(x)$ su correspondiente ecuación de punto fijo. Bajo las siguientes condiciones:

1. g es una contracción sobre X.
2. $g \in \mathcal{C}^1(X)$ (g y g' son continuas en X).
3. g es estrictamente monótona sobre X ($g'(x) \neq 0, \forall x \in X$).

se tiene que

$$\text{Si } x_0 \neq x^*, \text{ entonces } x_n \neq x^*, \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, el proceso iterativo no puede terminar en un número finito de pasos.

Orden de Convergencia

Demostración:

Una demostración de este hecho se obtiene suponiendo lo contrario, es decir que $g(x_n) = x_n$ para algún n. Si n es el primer índice para el cual esto ocurre, entonces

$$x_n = g(x_{n-1}) \text{ y } x_n = g(x_n) \text{ con } x_{n-1} \neq x_n.$$

Luego, por el teorema del valor medio

$$0 = g(x_n) - g(x_{n-1}) = g'(\eta)(x_n - x_{n-1}) \text{ con } \eta \text{ entre } x_{n-1} \text{ y } x_n,$$

y debe tenerse $g'(\eta) = 0$ con $\eta \in X$, lo cual contradice la hipótesis de que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$.

Comportamiento asintótico del error

- Se puede analizar como se comporta el error en el método iterativo de punto fijo al ir aumentando n:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*) = g'(\eta_n)(x_n - x^*) = g'(\eta_n)e_n.$$

Comportamiento asintótico del error

- Se puede analizar como se comporta el error en el método iterativo de punto fijo al ir aumentando n:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*) = g'(\eta_n)(x_n - x^*) = g'(\eta_n)e_n.$$

- Es decir:

$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n \text{ con } \eta_n \text{ entre } x_n \text{ y } x^*.$$

Comportamiento asintótico del error

- Se puede analizar como se comporta el error en el método iterativo de punto fijo al ir aumentando n:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*) = g'(\eta_n)(x_n - x^*) = g'(\eta_n)e_n.$$

- Es decir:

$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n \text{ con } \eta_n \text{ entre } x_n \text{ y } x^*.$$

- Como η_n está entre x_n y x^* para cada n, y x^* es el límite de x_n, necesariamente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = x^*$$

Comportamiento asintótico del error

- Además $\lim_{n\to\infty} g'(\eta_n) = g'(x^*)$ por ser $g'(x)$ continua. Así que

$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n = (g'(x^*) + \varepsilon_n)e_n$$

donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Comportamiento asintótico del error

- Además $\lim_{n\to\infty} g'(\eta_n) = g'(x^*)$ por ser $g'(x)$ continua. Así que
$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n = (g'(x^*) + \varepsilon_n)e_n$$
donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- Luego
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(x^*) + \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = g'(x^*)$$

Comportamiento asintótico del error

- Además $\lim_{n\to\infty} g'(\eta_n) = g'(x^*)$ por ser $g'(x)$ continua. Así que
$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n = (g'(x^*) + \varepsilon_n)e_n$$
donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- Luego
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(x^*) + \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = g'(x^*)$$
- Para valores suficientemente grandes de n se tendrá que
$$e_{n+1} \approx g'(x^*)e_n$$

Comportamiento asintótico del error

- Además $\lim_{n\to\infty} g'(\eta_n) = g'(x^*)$ por ser $g'(x)$ continua. Así que
$$e_{n+1} = g'(\eta_n)e_n = (g'(x^*) + \varepsilon_n)e_n$$
donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- Luego
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(x^*) + \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = g'(x^*)$$
- Para valores suficientemente grandes de n se tendrá que
$$e_{n+1} \approx g'(x^*)e_n$$
- El error en la iteración $n+1$ depende linealmente del error en la iteración n. Se puede decir que la sucesión $\{x_n\}$ converge linealmente a x^*, y que el método de punto fijo es un método con orden de convergencia lineal o de orden uno.

Algoritmo de Punto Fijo

input : $x_0 \in \mathbb{R}$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.
output: Solución aproximada p tal que $g(p) = p$ satistace $f(p) \approx 0$.

$i \leftarrow 1$
while $i \leq N$ **do**
  $p \leftarrow g(x_0)$
  $i \leftarrow i + 1$
  if $|p - x_0| < TOL$ **then**
    Salida(p), EXIT
  end
  $x_0 \leftarrow p$
end

Algorithm 3: Algoritmo de Punto Fijo.

Método de Newton-Raphson

- Sea $f \in C^2([a,b])$ con α raíz de f en $[a,b]$ y x_0 un punto próximo a α. Usando el desarrollo de Taylor de orden 1 de la función f en torno a x_0, se tiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\mu)(x - x_0)^2$$

donde μ está entre x y x_0.

Método de Newton-Raphson

- Sea $f \in C^2([a,b])$ con α raíz de f en $[a,b]$ y x_0 un punto próximo a α. Usando el desarrollo de Taylor de orden 1 de la función f en torno a x_0, se tiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\mu)(x - x_0)^2$$

donde μ está entre x y x_0.

- Si x_0 está cerca de α y $|f''(x_0)|$ no es demasiado grande, entonces la función

$$\bar{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es una aproximación de $f(x)$ en una vecindad de α. $\bar{f}(x)$ es una linealización de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Método de Newton-Raphson

- Si en esta expresión se despeja x obtenemos una aproximación de α más exacta de lo que era la estimación inicial x_0 . Así tenemos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ si } f(\alpha) = 0$$

Método de Newton-Raphson

- Si en esta expresión se despeja x obtenemos una aproximación de α más exacta de lo que era la estimación inicial x_0 . Así tenemos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ si } f(\alpha) = 0$$

- Esto permite generar una sucesión de aproximaciones de α a partir de la iteración de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Método de Newton-Raphson

- Si en esta expresión se despeja x obtenemos una aproximación de α más exacta de lo que era la estimación inicial x_0 . Así tenemos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ si } f(\alpha) = 0$$

- Esto permite generar una sucesión de aproximaciones de α a partir de la iteración de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- En general se define la iteración de Newton-Raphson como

Interpretación Geométrica

- El método de Newton tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Dada la ecuación $f(x) = 0$ en una variable, suponiendo conocido la aproximación x_n a la raíz x^*, x_{n+1} se calcula como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Interpretación Geométrica

- El método de Newton tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Dada la ecuación $f(x) = 0$ en una variable, suponiendo conocido la aproximación x_n a la raíz x^*, x_{n+1} se calcula como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- es decir

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = 0$$

Interpretación Geométrica

- Si se reemplaza x_{n+1} por la variable x, se obtiene la función $y = f(x_n) + f(x_n)(x - x_n)$, la cual tiene como gráfica a la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$.

Interpretación Geométrica

- Si se reemplaza x_{n+1} por la variable x, se obtiene la función $y = f(x_n) + f(x_n)(x - x_n)$, la cual tiene como gráfica a la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$.
- Así que x_{n+1} es la intersección de esta recta con el eje x, como se ilustra en la figura.

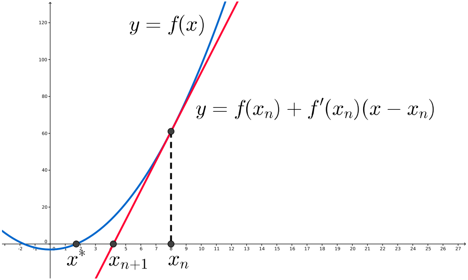


Figure: Interpretación geométrica del método de Newton.

Ejemplo

- Se quiere aproximar uno de los ceros de la función $f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$. Estableciendo una tolerancia de 10^{-8} y un número máximo de 30 iteraciones, se obtiene:

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	8.000000000e+00	-2.158647684e+02	————
1	7.872381323e+00	-2.313725081e+01	1.276186774e-01
2	7.855060668e+00	-3.912804745e-01	1.732065443e-02
3	7.854757530e+00	-1.184721667e-04	3.031380765e-04
4	7.854757438e+00	-1.039879294e-11	9.183996408e-08

Table: Resultados de resolver $\cos(x)\cosh(x) + 1 = 0$ mediante el método de Newton.

Posibles Problemas del Método de NR

- El método de Newton es uno de los métodos más usados para calcular numericamente raices de ecuaciones no lineales, pues si se escoge adecuadamente la aproximación inicial x_0, la sucesión obtenida por iteración converge razonablemente rápido a la solución.

Posibles Problemas del Método de NR

- El método de Newton es uno de los métodos más usados para calcular numericamente raices de ecuaciones no lineales, pues si se escoge adecuadamente la aproximación inicial x_0, la sucesión obtenida por iteración converge razonablemente rápido a la solución.
- Sin embargo, este es un método denominado local, pues si x_0 no es lo suficientemente cercano a x^* y la función $f(x)$ no tiene “buenas propiedades”, se pueden presentar algunos problemas. El siguiente ejemplo muestra algunas de las situaciones indeseables en el método de Newton.

Posibles Problemas del Método de NR

- Considere el problema $f(x) = \sin(x) = 0$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Posibles Problemas del Método de NR

- Considere el problema $f(x) = \sin(x) = 0$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
- El método de Newton es: dado $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, generar $\{x_n\}$ por medio de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n - \tan(x_n)$$

Posibles Problemas del Método de NR

- Si se escoge $x_0 = \pi/2$, entonces $x_1 = -\infty$. De hecho, si escogemos x_0 cerca de $\pi/2$ ó $-\pi/2$, la linea tangente intersecta al eje x fuera del intervalo y muy lejos del mismo.

Posibles Problemas del Método de NR

- Si se escoge $x_0 = \pi/2$, entonces $x_1 = -\infty$. De hecho, si escogemos x_0 cerca de $\pi/2$ ó $-\pi/2$, la linea tangente intersecta al eje x fuera del intervalo y muy lejos del mismo.
- Por ejemplo, tomando $x_0 = 1.4$ se obtiene $x_1 = -4.3979$.

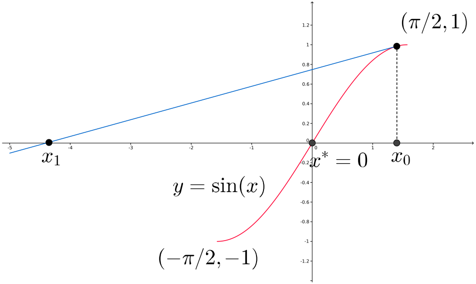


Figure: Situación indeseable en el método de Newton: x_1 cae muy lejos de x^*.

Posibles Problemas del Método de NR

- Otro aspecto indeseable es que si escogemos $x_0 = x'$ tal que

$$\tan(x') = 2x' \quad (x' \approx 1.1655\ldots),$$

Posibles Problemas del Método de NR

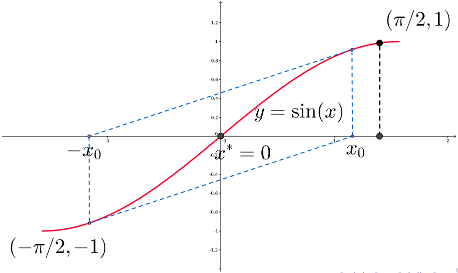
- Otro aspecto indeseable es que si escogemos $x_0 = x'$ tal que

$$\tan(x') = 2x' \quad (x' \approx 1.1655\ldots),$$

- entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \tan(x_0) = x_0 - 2x_0 = -x_0 \\ x_2 &= x_1 - \tan(x_1) = -x_0 - \tan(-x_0) = x_0 \end{aligned}$$

generando un ciclo obteniendo $x_0, -x_0, x_0, \ldots$.



Convergencia del Método de Newton-Raphson

- El método de Newton-Raphson es un método de punto fijo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n)$$

Convergencia del Método de Newton-Raphson

- El método de Newton-Raphson es un método de punto fijo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n)$$

- El punto fijo para este método es

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

es decir, una raíz de $f(x)$.

Convergencia del Método de Newton-Raphson

- El método de Newton-Raphson es un método de punto fijo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \equiv g(x_n)$$

- El punto fijo para este método es

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

  es decir, una raíz de $f(x)$.
- En un entorno suficientemente pequeño de α, se cumple que el método converge, ya que

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

  implica que $g'(\alpha) = 0$, por lo que $|g'(x)| \ll 1$ en dicho entorno.

Convergencia del Método de Newton-Raphson

- Además, el método de Newton tiene convergencia cuadrática, ya que

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n) \\
&= \underbrace{\alpha - g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha)}_{=0} - \frac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 - O((x_n - \alpha)^3) \\
&= -\frac{g''(\xi)}{2} e_n^2 = C e_n^2 \\
\Rightarrow & \quad \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = C
\end{aligned}
$$

Convergencia del Método de Newton-Raphson

- Además, el método de Newton tiene convergencia cuadrática, ya que

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n) \\
&= \underbrace{\alpha - g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha)}_{=0} - \frac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 - O((x_n - \alpha)^3) \\
&= -\frac{g''(\xi)}{2} e_n^2 = C e_n^2 \\
\Rightarrow & \quad \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = C
\end{aligned}
$$

- donde $x_n \leq \xi \leq \alpha$ y lo que indica que el método converge cuadráticamente con C como constante asintótica de error (es decir, su orden de convergencia es dos).

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

input : $x_0 \in \mathbb{R}$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL, funciones f y f'.
output: Solución aproximada p tal que $f(p) \approx 0$.

$i \leftarrow 1$
while $i \leq N$ **do**
  $p \leftarrow x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  $i \leftarrow i + 1$
  if $|p - x_0| < TOL$ **then**
    Salida(p), EXIT
  end
  $x_0 \leftarrow p$
end

Algorithm 4: Algoritmo de Newton-Raphson.

Método de la Secante

- Una de las desventajas del método de Newton es que en cada iteración hay que evaluar tanto a $f(x)$ como a $f'(x)$, para atenuar esa desventaja se propone el método de la secante.

Método de la Secante

- Una de las desventajas del método de Newton es que en cada iteración hay que evaluar tanto a $f(x)$ como a $f'(x)$, para atenuar esa desventaja se propone el método de la secante.
- En el método de la secante se parte de dos puntos $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$, por esos dos puntos pasa una secante que los une y cuya pendiente es

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}$$

Método de la Secante

- Dado que esta recta secante corta al eje x en el punto $(p_2, 0)$, entonces también se tiene que

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

Método de la Secante

- Dado que esta recta secante corta al eje x en el punto $(p_2, 0)$, entonces también se tiene que

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

- luego entonces

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

por lo tanto

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

Método de la Secante

- Dado que esta recta secante corta al eje x en el punto $(p_2, 0)$, entonces también se tiene que

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

- luego entonces

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

  por lo tanto

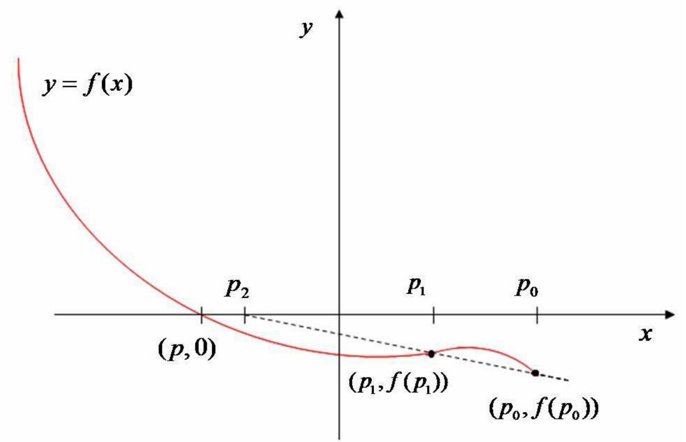
$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

- Este proceso genera la fórmula de iteración:

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

Método de la Secante

- La siguiente imagen muestra un ejemplo de aplicación del método de la secante para encontrar una raíz de una función.



Convergencia del Método de la Secante

Teorema

Sea x^* un cero de $f(x)$ y supongamos que $f''(x^*) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Convergencia del Método de la Secante

Teorema

Sea x^* un cero de $f(x)$ y supongamos que $f''(x^*) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Demostración:

Sea $e_k = p_k - x^*$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ como

$$p_{k+1} = \frac{p_{k-1} f(p_k) - p_k f(p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

Convergencia del Método de la Secante

Teorema

Sea x^* un cero de $f(x)$ y supongamos que $f''(x^*) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Demostración:

Sea $e_k = p_k - x^*$, $k = 0, 1, 2, \dots$ como

$$p_{k+1} = \frac{p_{k-1} f(p_k) - p_k f(p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

$$\begin{aligned} p_{n+1} - x^* &= \frac{p_{n-1} f(p_n) - p_n f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})} - \frac{x^* f(p_n) - x^* f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})} \\ &= \frac{(p_{n-1} - x^*) f(p_n) - (p_n - x^*) f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})} \end{aligned}$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

De este modo:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} f(x^* + e_n) - e_n f(e_{n-1} + x^*)}{f(x^* + e_n) - f(e_{n-1} + x^*)}$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

De este modo:

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} f(x^* + e_n) - e_n f(e_{n-1} + x^*)}{f(x^* + e_n) - f(e_{n-1} + x^*)}$$

pero por el desarrollo de Taylor de $f(x^* + e_n)$ y $f(x^* + e_{n-1})$ alrededor de x^* se tiene que

$$f(x^* + e_n) = f(x^*) + f'(x^*)e_n + \frac{1}{2}f''(x^*)e_n^2 + \cdots$$

$$f(x^* + e_{n-1}) = f(x^*) + f'(x^*)e_{n-1} + \frac{1}{2}f''(x^*)e_{n-1}^2 + \cdots$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

pero como $f(x^*) = 0$ entonces,

$$e_{n-1}f(x^* + e_n) = f'(x^*)e_n e_{n-1} + \frac{1}{2}f''(x^*)e_n^2 e_{n-1} + \cdots$$

$$e_n f(x^* + e_{n-1}) = f'(x^*)e_{n-1}e_n + \frac{1}{2}f''(x^*)e_{n-1}^2 e_n + \cdots$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

pero como $f(x^*) = 0$ entonces,

$$e_{n-1} f(x^* + e_n) = f'(x^*) e_n e_{n-1} + \frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 e_{n-1} + \cdots$$

$$e_n f(x^* + e_{n-1}) = f'(x^*) e_{n-1} e_n + \frac{1}{2} f''(x^*) e_{n-1}^2 e_n + \cdots$$

además

$$f(x^* + e_n) - f(x^* + e_{n-1}) = f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(x^*)(e_n^2 - e_{n-1}^2) + \cdots$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

de modo que

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2} f''(x^*) e_n e_{n-1} (e_n - e_{n-1}) + \cdots}{f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \cdots}$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

de modo que

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)e_n e_{n-1}(e_n - e_{n-1}) + \cdots}{f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \cdots}$$

para $|e_{n-1}|$ y $|e_n|$ suficientemente pequeños se tiene que

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(x^*)e_n e_{n-1}}{2f'(x^*)}$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

de modo que

$$e_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)e_n e_{n-1}(e_n - e_{n-1}) + \cdots}{f'(x^*)(e_n - e_{n-1}) + \cdots}$$

para $|e_{n-1}|$ y $|e_n|$ suficientemente pequeños se tiene que

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(x^*)e_n e_{n-1}}{2f'(x^*)}$$

así que

$$|e_{n+1}| \approx M|e_n e_{n-1}| = M|e_n||e_{n-1}|$$

siendo $M = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

Pero se quiere obtener el valor de p, para el cual

$$|x^* - x_n| = \alpha |x^* - x_{n-1}|^p \Rightarrow |e_n| = \alpha |e_{n-1}|^p$$

con $\alpha \geq 0$, $p \geq 1$, pero también

$$|e_{n+1}| = \alpha |e_n|^p = \alpha \left(\alpha |e_{n-1}|^p\right)^p$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

Pero se quiere obtener el valor de p, para el cual

$$|x^* - x_n| = \alpha |x^* - x_{n-1}|^p \Rightarrow |e_n| = \alpha |e_{n-1}|^p$$

con $\alpha \geq 0$, $p \geq 1$, pero también

$$|e_{n+1}| = \alpha |e_n|^p = \alpha \left(\alpha |e_{n-1}|^p\right)^p$$

Así que:

$$\alpha^{p+1} |e_{n-1}|^{p^2} = M(\alpha |e_{n-1}|^p)|e_{n-1}| = \alpha M \left(|e_{n-1}|^{p+1}\right)$$

Convergencia del Método de la Secante

Demostración:

Pero se quiere obtener el valor de p, para el cual

$$|x^* - x_n| = \alpha|x^* - x_{n-1}|^p \Rightarrow |e_n| = \alpha|e_{n-1}|^p$$

con $\alpha \geq 0$, $p \geq 1$, pero también

$$|e_{n+1}| = \alpha|e_n|^p = \alpha\left(\alpha|e_{n-1}|^p\right)^p$$

Así que:

$$\alpha^{p+1}|e_{n-1}|^{p^2} = M(\alpha|e_{n-1}|^p)|e_{n-1}| = \alpha M\left(|e_{n-1}|^{p+1}\right)$$

la cual es válida si $\alpha^p = M$ y $p^2 = p + 1$, de modo que

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$