Unidad III: Aproximación de funciones.

José Luis Ramírez B.

January 14, 2025

1. Introducción

2. Interpolación
   - Taylor

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.

Motivación.

- En este tema se da una posible respuesta a una situación bastante natural en el ámbito científico.
- Se Investiga un fenómeno que se está desarrollando, se desea estudiarlo, y junto con los modelos previos con que se cuente, se pueden tomar muestras experimentales.
- Se tiene una serie de datos a partir de mediciones sobre el mismo.
- Se desea extraer información de esos datos.

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).

Motivación.

Esencialmente podemos tratarlo con:

- Técnicas estadísticas (que continuarán observando el fenómeno de un modo discreto, es decir, sobre ese conjunto finito de mediciones).
- o bien "intentando recrear/reconstruir el fenómeno en su totalidad" (en un dominio continuo de espacio, tiempo o cualquier otra magnitud), con la función que represente "lo mejor posible" esos datos.

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan (“interpolan” es el término matemático) exactamente por los puntos dados.

Motivación.

Las técnicas que utilizan funciones continuas y se consideran en este curso son de dos tipos:

- Interpolación: cálculo de funciones que pasan ("interpolan" es el término matemático) exactamente por los puntos dados.
- Curvas de ajuste: cálculo de funciones aproximadas a los datos que tenemos (en algún sentido, para cierta distancia)

Resultados Fundamentales

Polinomio de grado n:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

Resultados Fundamentales

Polinomio de grado n:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

Teorema:

Si p_n es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $p_n(x) = 0$ tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

Resultados Fundamentales

Teorema:

Sea p_n un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen constantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, posiblemente complejas, y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

Resultados Fundamentales

Teorema:

Sea p_n un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen constantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, posiblemente complejas, y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ verificando:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

Teorema:

Sean p_n y q_n dos polinomios de grado menor o igual que n. Si existen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, con $k > n$, números distintos tales que $p_n(x_i) = q_n(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, entonces $p_n(x) = q_n(x)$ para todo x.

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_k &= a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \ldots, 1, 0, -1 \end{aligned}$$

entonces: $p_n(x_0) = b_{-1}$

Evaluación de polinomios

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Se necesitan menos operaciones para evaluarlo en un punto x_0 si se escribe:

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\cdots(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\cdots))$$

Algoritmo de Horner para evaluar $p_n(x_0)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_k &= a_{k+1} + x_0 b_{k+1} \quad k = n-2, \ldots, 1, 0, -1 \end{aligned}$$

entonces: $p_n(x_0) = b_{-1}$

Además, si se llama

$$q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

se tiene que:

$$p_n(x) = (x - x_0) q_{n-1}(x) + b_{-1}$$

y por lo tanto

$$p_n'(x_0) = q_{n-1}(x_0)$$

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.

Evaluación de polinomios

¿Por qué es Importante el Algoritmo de Horner?

- Eficiencia: Es más eficiente que calcular las potencias de x_0 y multiplicar por los coeficientes de forma individual (se usa menos memoria y tiempo de cómputo).
- Estabilidad: Reduce errores de redondeo en cálculos numéricos.
- Derivadas: Permite obtener información sobre la derivada del polinomio en el mismo punto.
- División Sintética: Está relacionado con el método de división sintética para polinomios, lo que lo hace muy útil en el campo del álgebra y el análisis numérico.

Evaluación de polinomios

En Resumen:

- El algoritmo de Horner es una herramienta poderosa para evaluar polinomios y también para obtener información sobre su derivada.
- Es un método eficiente, estable y muy utilizado en diversos campos de las matemáticas y la informática.

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Tenemos el polinomio:

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

Y queremos evaluarlo en $x_0 = 2$ y también calcular $p_3'(2)$.

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)
- Iteración:
  $b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$ (coeficiente de x^2)
  $b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$ (coeficiente de x^1)
  $b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11$ (término independiente)

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

1. Aplicación del Algoritmo de Horner para $p_3(2)$
   Recordemos que el algoritmo es:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_k = a_{k+1} + x_0 \cdot b_{k+1} \text{ para } k = n-2, ..., 1, 0, -1$$
$$p_n(x_0) = b_{-1}$$

- Inicialización:
  $b_2 = a_3 = 2$ (coeficiente de x^3)
- Iteración:
  $b_1 = a_2 + x_0 \cdot b_2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$ (coeficiente de x^2)
  $b_0 = a_1 + x_0 \cdot b_1 = 4 + 2 \cdot 1 = 6$ (coeficiente de x^1)
  $b_{-1} = a_0 + x_0 \cdot b_0 = -1 + 2 \cdot 6 = 11$ (término independiente)
- Resultado:
  $p_3(2) = b_{-1} = 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$
   Con los valores de b que obtuvimos (excepto b_{-1}), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

2. Obtención del Polinomio Cociente $q_2(x)$
   Con los valores de b que obtuvimos (excepto b_{-1}), podemos formar el polinomio cociente de grado 2:

$$q_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 2x^2 + 1x + 6$$

3. Relación entre $p_3(x)$, $q_2(x)$ y b_{-1}
   El polinomio $p_3(x)$ se puede expresar como:
   $p_3(x) = (x - x_0) \cdot q_2(x) + b_{-1}$
   $p_3(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + x + 6) + 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$
   - Iteración:
     $c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
     $c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

4. Aplicación del Algoritmo de Horner a $q_2(x)$ para obtener $q_2(2) = p_3'(2)$
   Aplicando el algoritmo de Horner para evaluar el polinomio $q_2(x)$ en $x_0 = 2$. Los coeficientes de $q_2(x)$ son: $b_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_0 = 6$
   Llamemos a los nuevos coeficientes c_i:
   - Inicialización:
     $c_1 = b_2 = 2$
   - Iteración:
     $c_0 = b_1 + x_0 \cdot c_1 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
     $c_{-1} = b_0 + x_0 \cdot c_0 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$
   - Resultado:
     $q_2(2) = c_{-1} = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x-2) * (2x^2 + x + 6) + 11$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

5. Derivada $p_3'(2)$
   Se tiene que
   $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

En resumen:

- $p_3(2) = 11$
- $q_2(x) = 2x^2 + x + 6$
- $p_3(x) = (x - 2) * (2x^2 + x + 6) + 11$
- $p_3'(2) = q_2(2) = 16$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Comprobación de la Derivada

Derivando el polinomio $p_3(x)$ y evaluándolo en $x = 2$.

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$p_3'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Ejemplo: Polinomio de Grado 3

Comprobación de la Derivada
Derivando el polinomio $p_3(x)$ y evaluándolo en $x = 2$.

$$p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$p_3'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Evaluando en x = 2:

$$p_3'(2) = 6(2^2) - 6(2) + 4 = 6(4) - 12 + 4 = 24 - 12 + 4 = 16$$

Problema de interpolación de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero n no negativo, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y los valores $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ de una función y sus n primeras derivadas en x_0, encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Problema de interpolación de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

Dados un entero n no negativo, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y los valores $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ de una función y sus n primeras derivadas en x_0, encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Teorema:

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única, que se denomina polinomio de Taylor de grado $\leq n$ de la función f en el punto x_0:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Problema de interpolación de Taylor

Teorema:

Para $n > 1$ sea $f(x)$ una función n veces derivable en x_0. El polinomio de Taylor $P(x)$ verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

con la notación o pequeña de Landau
$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$ para $x \to x_0$. Además, $P(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ con esta propiedad.

Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

Problema de interpolación de Taylor

- Error del polinomio interpolador de Taylor

Teorema:

Sean x y x_0 dos números reales distintos y $f(x)$ una función con n derivadas continuas en un intervalo conteniendo a x y x_0, en el que también existe $f^{(n+1)}$. Entonces existe un punto ξ entre x y x_0 tal que:

$$f(x) - P(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Problema de interpolación de Taylor

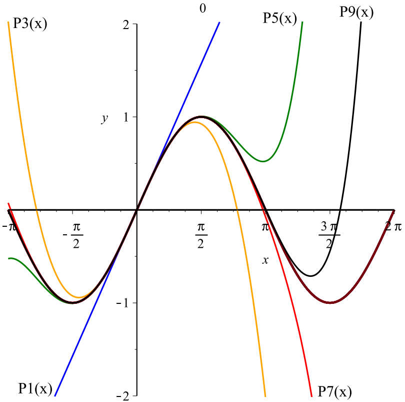
Colorario:

Además de las hipótesis del teorema supongase que para cada t entre x y x_0 se verifica que $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1}$ constante, entonces:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{(n+1)} K_{n+1}}{(n+1)!}$$

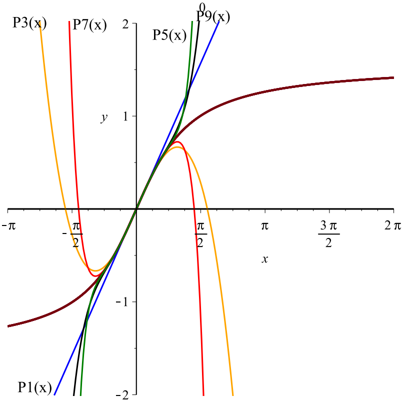
Ejemplo:

A continuación se muestran las gráficas de la función $f(x) = \sin(x)$ y de su polinomio de Taylor de orden 1 al 9 en el cero. Se puede comprobar que la aproximación es más exacta a medida que se aumenta el orden.



Ejemplo:

El hecho de que la función seno y su polinomio de Taylor se parezcan tanto como se quiera, con sólo aumentar el grado del polinomio lo suficiente, no es algo que le ocurra a todas las funciones. Para la función arctan la situación no es tan buena:



Ejemplo:

- Se desea aproximar la función $f(x) = e^x$ mediante el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ de orden 5 y hallar el error obtenido en la estimación para $x = 1.5$
- El polinomio de Taylor de grado 5 viene dada por la siguiente expresión

$$P_5(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

Ejemplo:

Con la expresión del residuo se calcula el error de Truncamiento:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0)^6 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = \frac{e^{\xi}}{6!}x^6$$

$$R_5(x) = \frac{e^{\xi}}{6!}x^6$$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \dfrac{(1.5)^2}{2} + \dfrac{(1.5)^3}{6} + \dfrac{(1.5)^4}{24} + \dfrac{(1.5)^5}{120}$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $$P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$$
- Obtenemos:
  $P_5(1.5) \approx 4.462$

Ejemplo:

- Ahora, vamos a aproximar $f(1.5) = e^{1.5}$ usando $P_5(1.5)$:
  $P_5(1.5) = 1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2} + \frac{(1.5)^3}{6} + \frac{(1.5)^4}{24} + \frac{(1.5)^5}{120}$
- Obtenemos:
  $P_5(1.5) \approx 4.462$
- Cálculo del error en $x = 1.5$
  El error en la aproximación de Taylor está dado por el término del resto. La forma del resto para el polinomio de Taylor de orden n es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Ejemplo:

- En nuestro caso, $n = 5$, $x = 1.5$, $x_0 = 0$, y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de e^x es e^x.
  Por lo tanto:

$$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$

$$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot 1.5^6}{720}$$

  Donde ξ es un número entre 0 y 1.5.

Ejemplo:

- En nuestro caso, $n = 5$, $x = 1.5$, $x_0 = 0$, y la derivada de orden 6 (o cualquiera) de e^x es e^x.
  Por lo tanto:
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot (1.5 - 0)^6}{6!}$$
  $$R_5(1.5) = \frac{e^{\xi} \cdot 1.5^6}{720}$$
  Donde ξ es un número entre 0 y 1.5.
- Para maximizar el error, tomamos el mayor valor posible de e^{ξ} en el intervalo $[0, 1.5]$. Este valor es cuando $c = 1.5$.
  Por lo tanto
  $$R_5(1.5) = e^{1.5} \cdot \frac{(1.5)^6}{720} \approx 0.0708$$

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de $e^{1.5}$ es aproximadamente 4.481689.

Ejemplo:

- Cálculo del Valor Real y el Error Exacto
- El valor real de $e^{1.5}$ es aproximadamente 4.481689.
- El error exacto es:

$$\text{Error} = |e^{1.5} - P_5(1.5)|$$

$$\text{Error} = |4.481689 - 4.462|$$

$$\text{Error} = 0.019689$$