Autovalores y Autovectores.

José Luis Ramírez B.

March 10, 2025

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos
    - Análisis de sistemas eléctricos:
        - Sincronismo del sistema productor
        - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
        - Planificación nuevo equipo

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos
  - Mercados financieros.

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos
  - Mercados financieros.
- Es también muy importante para analizar el comportamiento de métodos numéricos.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.
- Para que exista una solución distinta de la trivial, $x = 0$, el valor propio λ deberá ser raíz del polinomio de grado n, polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

- El radio espectral de una matriz es el radio del menor círculo del plano complejo centrado en el origen que contiene a todos los valores propios de la matriz.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall\lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.
- $tr(A) = \sum \lambda_i$, $\det(A) = \prod \lambda_i$

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.
- Los valores propios de una matriz se localizan en el plano complejo, dentro del círculo centrado en el origen de radio $\|A\|$.

Localización de valores propios.

Teorema: Círculos de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y definiendo los círculos de Gershgorin como los conjuntos

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

entonces el espectro de A es subconjunto de la unión de los círculos, esto es:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i = S_R$$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$
- Dado que B es singular, por lo tanto existe un vector no nulo x tal que $B_\lambda x = 0$, por lo tanto $((D - \lambda I) + P)x = 0$, luego $x = -(D - \lambda I)^{-1} P x$ aplicando $\|\cdot\|_\infty$ a ambos de la igualdad

$$\|x\|_\infty \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty \|x\|_\infty$$

$$1 \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|p_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|}$$

es decir λ satisface la condición de pertenencia al círculo R_k. Por lo tanto si se unen todos los círculos con seguridad los autovalores estarán dentro del conjunto resultante.

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \rightarrow \lambda \in S_R \cap S_C$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$

- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4 \\
R_2 &= \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16 \\
R_3 &= \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.

- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.
- Se Puede mejorar este estimado con el Teorema de Gershgorin.
- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Gershgorin Circles

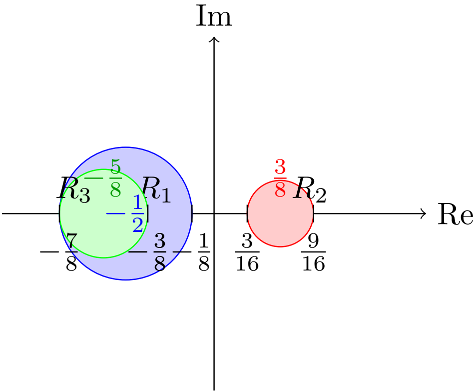


Figure: Círculos de Gerschgorin para la matriz A.

Ejemplo:

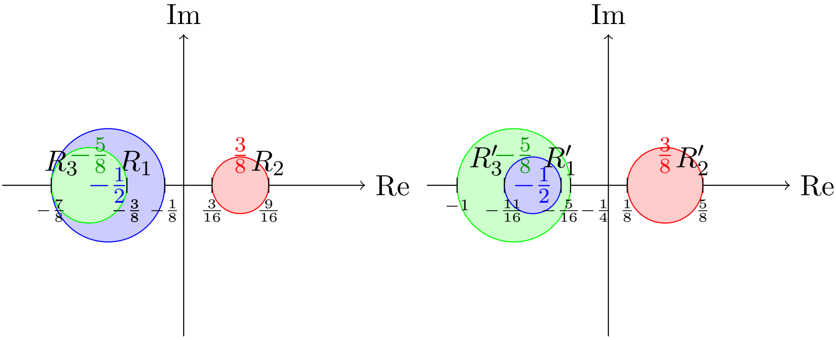
- La matriz A es no singular ya que el cero esta fuera de los círculos.
- Hay un autovalor en R_2 y los otros dos están en $R_1 \cup R_3$.
- Se puede hacer el mismo análisis para la matriz A^t y obtener otra familia de círculos R_1', R_2', R_3'.

$$A^t = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

- Se tiene que $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, $r_3' = r_3$. Los discos son:

$$R_1' = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1/2| \leq 3/16\}, \Rightarrow -11/16 \leq z \leq -5/16$$
$$R_2' = \{z \in \mathbb{C} / |z - 3/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow 1/8 \leq z \leq 5/8$$
$$R_3' = \{z \in \mathbb{C} / |z + 5/8| \leq 3/8\}, \Rightarrow -1 \leq z \leq -1/4$$

Círculos de Gershgorin - A y A^t



(a) Círculos de Gershgorin para A (b) Círculos de Gershgorin para A^t

Figure: Círculos de Gershgorin para A y A^t

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R'_1 \bigcup R'_2 \bigcup R'_3)$ nos da un refinamiento.

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R'_1 \bigcup R'_2 \bigcup R'_3)$ nos da un refinamiento.
- Unión de círculos de A:
    - $R_1 : [-7/8, -1/4]$
    - $R_2 : [3/16, 9/16]$
    - $R_3 : [-7/8, -3/8]$

  Union: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R_1' \bigcup R_2' \bigcup R_3')$ nos da un refinamiento.
- Unión de círculos de A:
  - $R_1 : [-7/8, -1/4]$
  - $R_2 : [3/16, 9/16]$
  - $R_3 : [-7/8, -3/8]$

  Union: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$
- Unión de círculos de A^t:
  - $R_1' : [3/16, 9/16]$
  - $R_2' : [1/8, 5/8]$
  - $R_3' : [3/16, 9/16]$

  Union: $[-1, -1/4] \cup [1/8, 5/8]$

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.
- Todos los autovalores son reales, debido a que los discos están contenidos en la recta real.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.
- Todos los autovalores son reales, debido a que los discos están contenidos en la recta real.
- La matriz es invertible, ya que 0 no está en ningún disco de Gerschgorin.

Método de las Potencias

- El objetivo de este método es hallar λ_1 autovalor de A y un autovector x asociado a λ_1.

Método de las Potencias

- El objetivo de este método es hallar λ_1 autovalor de A y un autovector x asociado a λ_1.
- Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ posee n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y n autovectores asociados $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$, tales que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

  entonces, $|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n$ y $\{v^{(j)}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \dots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \ldots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \ldots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = A(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \dots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = A(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v^{(j)}$$

$$A^k x = A^{(k-1)}(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

- Esta sucesión converge a cero si $|\lambda_1| < 1$ y diverge si $|\lambda_1| > 1$ siempre que $\alpha_1 \neq 0$.

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

- Esta sucesión converge a cero si $|\lambda_1| < 1$ y diverge si $|\lambda_1| > 1$ siempre que $\alpha_1 \neq 0$.
- De esta última expresión se obtiene la manera de escalar las potencias de $A^k x$ para que el límite sea finito y distinto de cero.

Método de las Potencias

- Para escalar las potencias se inicia eligiendo un vector $x^{(0)}$ tal que $x^{(0)}_{p_0} = 1 = \|x^{(0)}\|_\infty$.

Método de las Potencias

- Para escalar las potencias se inicia eligiendo un vector $x^{(0)}$ tal que $x^{(0)}_{p_0} = 1 = \|x^{(0)}\|_\infty$.
- Sea $y^{(1)} = Ax^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$ y sea $\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0}$, eventualmente $\mu^{(k)} \to \lambda_1$

$$\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}} \right)$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y^{(1)}_{p_1}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y^{(1)}_{p_1}} = \frac{Ax^{(0)}}{y^{(1)}_{p_1}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x^{(1)}_{p_1}|$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x_{p_1}^{(1)}|$$

- Se define a continación

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{A^2x^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}}$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x_{p_1}^{(1)}|$$

- Se define a continación

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{A^2x^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}}$$

- Sea

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\lambda_1^2 \left(\dfrac{\alpha_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^2 v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}} \right)}{\lambda_1 \left(\dfrac{\alpha_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}} \right)}$$

Método de las Potencias

- Así sucesivamente. Los sucesivos vectores $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ y los escalares $\mu^{(k)}$ siendo

$$y^{(k)} = Ax^{(k-1)}$$

$$\mu^{(k)} = y^{(k)}_{p_{k-1}} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^k v^{(j)}_{p_{k-1}}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^{k-1} v^{(j)}_{p_{k-1}}} \right)$$

y

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y^{(k)}_k} = \frac{A^k x^{(0)}}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2} \cdots y^{(k)}_{p_k}}$$

donde p_k es el entero más pequeño para el cual $|y^{(k)}_{p_k}| = \|y^{(k)}\|_\infty$.

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

- Suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$ entonces del método de la potencia se obtiene $\mu^{(k)} \to \lambda_1$ y $x^{(k)} \to x$ autovector asociado a λ_1.

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k \to \infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

- Suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$ entonces del método de la potencia se obtiene $\mu^{(k)} \to \lambda_1$ y $x^{(k)} \to x$ autovector asociado a λ_1.
- La velocidad de convergencia del método depende de la magnitud del cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Cuanto más cercano a 1 sea el cociente más lenta será la convergencia.

Método de las Potencias

Algorithm 1: Algoritmo de Potencia.

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.

output: autovalor aproximado μ y autovector asociado x con $\|x\|_\infty = 1$.

Hallar p con $1 \le p \le n$ tal que $|x_p| = \|x\|_\infty$

$x = \dfrac{x}{x_p}$

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**

  $y \leftarrow Ax$; $\mu \leftarrow y_p$

  Hallar p con $1 \le p \le n$ tal que $|y_p| = \|y\|_\infty$

  if $y_p = 0$ **then**

    Salida $(autovalor, autovector) = (0, x)$; Seleccionar nuevo x y reiniciar; EXIT

  $err \leftarrow \|x - y/y_p\|_\infty$; $x = \dfrac{y}{y_p}$

  if $err < TOL$ **then**

    Salida (μ,x) EXIT

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se obtienen los siguientes resultados:

k	0	1	2	3	$\cdots$	14
$x^{(k)}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.70 \\ 0.70 \end{pmatrix}$	$\cdots$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.9998 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$
$\mu^{(k)}$	–	4	4.5	5.0	$\cdots$	5.9993

Parece que el valor propio dominante va a ser $\lambda = 6$ y su vector propio asociado $(1, -1, 1)$.

Método de la Potencia Inversa

Teorema:

Si λ es un autovalor de la matriz A entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

Método de la Potencia Inversa

Teorema:

Si λ es un autovalor de la matriz A entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

Demostración:
Por ser λ un autovalor de A y sea x el autovector asociado, se cumple que

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x = A^{-1}\lambda x \Rightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x$$

por lo tanto λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

- Por el teorema anterior se puede verificar que también se cumplirá:

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_2^{-1}| \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

- Por el teorema anterior se puede verificar que también se cumplirá:

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_2^{-1}| \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

- Por lo que si aplicamos el método de la potencia a A^{-1}, obtendremos el valor $\frac{1}{|\lambda_n|}$; y así obtener el valor de λ_n, el menor valor propio de A.

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:
- La iteración del método de la potencia aplicado a la matriz A^{-1} tiene la forma:

$$y^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)}$$

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:
- La iteración del método de la potencia aplicado a la matriz A^{-1} tiene la forma:

$$y^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)}$$

- Lo cual es equivalente a resolver el sistema lineal

$$Ay^{(k)} = x^{(k-1)}$$