Autovalores y Autovectores.

José Luis Ramírez B.

March 17, 2025

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos
    - Análisis de sistemas eléctricos:
        - Sincronismo del sistema productor

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos
    - Análisis de sistemas eléctricos:
        - Sincronismo del sistema productor
        - Estabilidad del sistema ante perturbaciones

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
  - Análisis de estructuras
  - Diseño de sistemas electrónicos
  - Análisis de sistemas eléctricos:
    - Sincronismo del sistema productor
    - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
    - Planificación nuevo equipo
    - Otros muchos
  - Mercados financieros.

Introducción.

- El estudio de los autovalores de sistemas surge por doquier en muchas áreas de la ciencia, ingeniería, economía ...
    - Análisis de estructuras
    - Diseño de sistemas electrónicos
    - Análisis de sistemas eléctricos:
        - Sincronismo del sistema productor
        - Estabilidad del sistema ante perturbaciones
        - Planificación nuevo equipo
        - Otros muchos
    - Mercados financieros.
- Es también muy importante para analizar el comportamiento de métodos numéricos.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.

Formulación del Problema.

Definición:

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, calcular un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector x no nulo tales que

$$Ax = \lambda x$$

- A λ se le denomina autovalor o valor propio y a x su correspondiente vector propio o autovector.
- Para que exista una solución distinta de la trivial, $x = 0$, el valor propio λ deberá ser raíz del polinomio de grado n, polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

Definición:

Se denomina espectro de la matriz A , $\sigma(A)$, al conjunto de los valores propios de A. Es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Definición:

Se denomina radio espectral, $\rho(A)$, de una matriz A de orden n, al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$$

- El radio espectral de una matriz es el radio del menor círculo del plano complejo centrado en el origen que contiene a todos los valores propios de la matriz.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.

Propiedades.

- A y A^t poseen los mismos autovalores.
- $A = A^t$ implica que todos sus autovalores son reales.
- A es inversible si y sólo si $\lambda \neq 0, \forall \lambda$ autovalor de A.
- A inversible y λ autovalor de A entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.
- $tr(A) = \sum \lambda_i$, $\det(A) = \prod \lambda_i$

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.

Localización de valores propios.

- Si no se necesita calcular exactamente los valores propios, sino saber, en cierta medida, dónde se encuentran en el plano complejo, existen varias formas de hacerlo.
- La más simple surge de la relación

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

  para cualquier norma matricial inducida por una norma vectorial.
- Los valores propios de una matriz se localizan en el plano complejo, dentro del círculo centrado en el origen de radio $\|A\|$.

Localización de valores propios.

Teorema: Círculos de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y definiendo los círculos de Gershgorin como los conjuntos

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

entonces el espectro de A es subconjunto de la unión de los círculos, esto es:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i = S_R$$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$

- Escribiendo $A = D + P$, donde D es diagonal y están los elementos de la diagonal de A, por lo tanto $p_{ii} = 0 \forall i$.
- Considerando $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq a_{ii}$ y definiendo la matriz $B_\lambda = A - \lambda I = (D - \lambda I) + P$
- Dado que B es singular, por lo tanto existe un vector no nulo x tal que $B_\lambda x = 0$, por lo tanto $((D - \lambda I) + P)x = 0$, luego $x = -(D - \lambda I)^{-1} P x$ aplicando $\| \cdot \|_\infty$ a ambos de la igualdad

$$\|x\|_\infty \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty \|x\|_\infty$$

$$1 \leq \|(D - \lambda I)^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|p_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk} - \lambda|}$$

es decir λ satisface la condición de pertenencia al círculo R_k. Por lo tanto si se unen todos los círculos con seguridad los autovalores estarán dentro del conjunto resultante.

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

A y A^t tienen el mismo espectro (a los circulos de A^t los denotaremos por C_i luego $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S_C$).

Teorema:

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \rightarrow \lambda \in S_R \cap S_C$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$

- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \in \mathbb{C} / |z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4 \\ R_2 &= \{z \in \mathbb{C} / |z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16 \\ R_3 &= \{z \in \mathbb{C} / |z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8 \end{aligned}$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.

- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Ejemplo:

- Dada la matriz $A = \dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$
- Note que $\|A\| = (1/16)\max 14, 9, 14 = 7/8$ de modo que los valores propios de A cumplen con $|\lambda| \leq 7/8$.
- Se Puede mejorar este estimado con el Teorema de Gershgorin.
- Tenemos que $r_1 = 3/8$, $r_2 = 3/16$, $r_3 = 1/4$. Los discos son:

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/8\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -1/4$$
$$R_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 3/16\}, \Rightarrow 3/16 \leq z \leq 9/16$$
$$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow -7/8 \leq z \leq -3/8$$

Gershgorin Circles

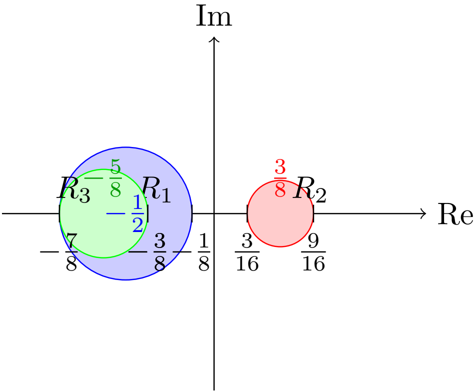


Figure: Círculos de Gerschgorin para la matriz A.

Ejemplo:

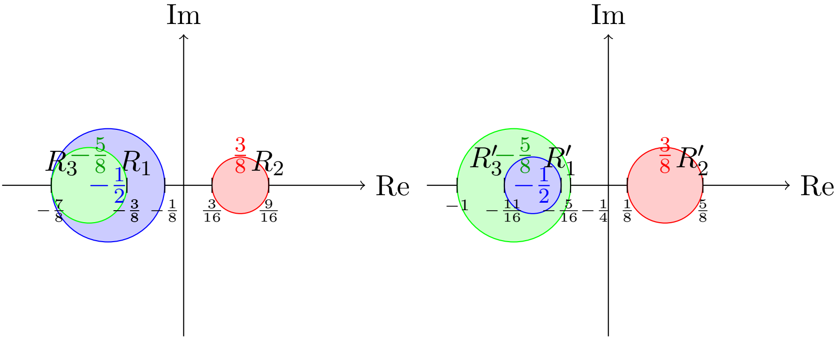
- La matriz A es no singular ya que el cero esta fuera de los círculos.
- Hay un autovalor en R_2 y los otros dos están en $R_1 \cup R_3$.
- Se puede hacer el mismo análisis para la matriz A^t y obtener otra familia de círculos R'_1, R'_2, R'_3.

$$A^t = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

- Se tiene que $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$. Los discos son:

$$R'_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 1/2| \leq 3/16\}, \Rightarrow -11/16 \leq z \leq -5/16$$
$$R'_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z - 3/8| \leq 1/4\}, \Rightarrow 1/8 \leq z \leq 5/8$$
$$R'_3 = \{z \in \mathbb{C}/|z + 5/8| \leq 3/8\}, \Rightarrow -1 \leq z \leq -1/4$$

Círculos de Gershgorin - A y A^t



(a) Círculos de Gershgorin para A (b) Círculos de Gershgorin para A^t

Figure: Círculos de Gershgorin para A y A^t

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R_1' \bigcup R_2' \bigcup R_3')$ nos da un refinamiento.

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R_1' \bigcup R_2' \bigcup R_3')$ nos da un refinamiento.
- Unión de círculos de A:
  - $R_1 : [-7/8, -1/4]$
  - $R_2 : [3/16, 9/16]$
  - $R_3 : [-7/8, -3/8]$

  Union: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$

Ejemplo:

- Se sabe que los autovalores de A y A^t coinciden, por tanto la intersección de $(R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3) \bigcap (R'_1 \bigcup R'_2 \bigcup R'_3)$ nos da un refinamiento.
- Unión de círculos de A:
  - $R_1 : [-7/8, -1/4]$
  - $R_2 : [3/16, 9/16]$
  - $R_3 : [-7/8, -3/8]$

  Union: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$
- Unión de círculos de A^t:
  - $R'_1 : [3/16, 9/16]$
  - $R'_2 : [1/8, 5/8]$
  - $R'_3 : [3/16, 9/16]$

  Union: $[-1, -1/4] \cup [1/8, 5/8]$

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.
- Todos los autovalores son reales, debido a que los discos están contenidos en la recta real.

Ejemplo:

- Intersección de las uniones: $[-7/8, -1/4] \cup [3/16, 9/16]$.
- Esto significa que todos los autovalores de A y A^t deben estar contenidos en los intervalos $[-7/8, -1/4]$ (negativos) y $[3/16, 9/16]$ (positivos).
- No hay autovalores en los intervalos $[-1, -7/8)$ ni $(9/16, 5/8]$.
- La matriz A no es simétrica , ya que los radios de los discos de A y A^t son diferentes.
- Todos los autovalores son reales, debido a que los discos están contenidos en la recta real.
- La matriz es invertible, ya que 0 no está en ningún disco de Gerschgorin.

Método de las Potencias

- El objetivo de este método es hallar λ_1 autovalor de A y un autovector x asociado a λ_1.

Método de las Potencias

- El objetivo de este método es hallar λ_1 autovalor de A y un autovector x asociado a λ_1.
- Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ posee n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y n autovectores asociados $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$, tales que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

entonces, $|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n$ y $\{v^{(j)}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\} \forall j = 1, \ldots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\} \forall j = 1, \ldots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \ldots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = A(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Si x es un vector cualquiera en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que $\{v^{(j)}\}\forall j = 1, \dots, n$ sea linealmente independiente, implica que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = A(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v^{(j)}$$

$$A^k x = A^{(k-1)}(Ax) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)}$$

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

- Esta sucesión converge a cero si $|\lambda_1| < 1$ y diverge si $|\lambda_1| > 1$ siempre que $\alpha_1 \neq 0$.

Método de las Potencias

- Dado que

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \forall j = 2, \ldots, n \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k \xrightarrow{\forall j=2,\ldots,n} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^k v^{(j)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)}$$

- Esta sucesión converge a cero si $|\lambda_1| < 1$ y diverge si $|\lambda_1| > 1$ siempre que $\alpha_1 \neq 0$.
- De esta última expresión se obtiene la manera de escalar las potencias de $A^k x$ para que el límite sea finito y distinto de cero.

Método de las Potencias

- Para escalar las potencias se inicia eligiendo un vector $x^{(0)}$ tal que $x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|x^{(0)}\|_\infty$.

Método de las Potencias

- Para escalar las potencias se inicia eligiendo un vector $x^{(0)}$ tal que $x^{(0)}_{p_0} = 1 = \|x^{(0)}\|_\infty$.
- Sea $y^{(1)} = Ax^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$ y sea $\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0}$, eventualmente $\mu^{(k)} \to \lambda_1$

$$\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| v^{(j)}_{p_0}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_0} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_j v^{(j)}_{p_0}} \right)$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x_{p_1}^{(1)}|$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x_{p_1}^{(1)}|$$

- Se define a continación

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{A^2x^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}}$$

Método de las Potencias

- Sea p_1 el entero más pequeño tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ y sea

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}} \Rightarrow \|x^{(1)}\|_\infty = 1 = |x_{p_1}^{(1)}|$$

- Se define a continación

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{A^2x^{(0)}}{y_{p_1}^{(1)}}$$

- Sea

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\lambda_1^2 \left(\dfrac{\alpha_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^2 v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}} \right)}{\lambda_1 \left(\dfrac{\alpha_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| v_{p_1}^{(j)}}{y_{p_1}^{(1)}} \right)}$$

Método de las Potencias

- Así sucesivamente. Los sucesivos vectores $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ y los escalares $\mu^{(k)}$ siendo

$$y^{(k)} = Ax^{(k-1)}$$

$$\mu^{(k)} = y^{(k)}_{p_{k-1}} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^k v^{(j)}_{p_{k-1}}}{\alpha_1 v^{(1)}_{p_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^{k-1} v^{(j)}_{p_{k-1}}} \right)$$

y

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y^{(k)}_k} = \frac{A^k x^{(0)}}{y^{(1)}_{p_1} y^{(2)}_{p_2} \cdots y^{(k)}_{p_k}}$$

donde p_k es el entero más pequeño para el cual $|y^{(k)}_{p_k}| = \|y^{(k)}\|_\infty$.

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

- Suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$ entonces del método de la potencia se obtiene $\mu^{(k)} \to \lambda_1$ y $x^{(k)} \to x$ autovector asociado a λ_1.

Método de las Potencias

- De esta manera, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lambda_1$$

$$x^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_n v^{(n)}$$

- Suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$ entonces del método de la potencia se obtiene $\mu^{(k)} \to \lambda_1$ y $x^{(k)} \to x$ autovector asociado a λ_1.
- La velocidad de convergencia del método depende de la magnitud del cociente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Cuanto más cercano a 1 sea el cociente más lenta será la convergencia.

Método de las Potencias

Algorithm 1: Algoritmo de Potencia.

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, Número máximo de iteraciones N, tolerancia TOL.

output: autovalor aproximado μ y autovector asociado x con $\|x\|_\infty = 1$.

Hallar p con $1 \leq p \leq n$ tal que $|x_p| = \|x\|_\infty$

$x = \dfrac{x}{x_p}$

for $k \leftarrow 1$ **to** N **do**

- $y \leftarrow Ax$; $\mu \leftarrow y_p$
- Hallar p con $1 \leq p \leq n$ tal que $|y_p| = \|y\|_\infty$
- **if** $y_p = 0$ **then**
  - Salida $(autovalor, autovector) = (0, x)$; Seleccionar nuevo x y reiniciar; EXIT
- $err \leftarrow \|x - y/y_p\|_\infty$; $x = \dfrac{y}{y_p}$
- **if** $err < TOL$ **then**
  - Salida (μ,x) EXIT

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se obtienen los siguientes resultados:

k	0	1	2	3	$\cdots$	14
$x^{(k)}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.70 \\ 0.70 \end{pmatrix}$	$\cdots$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.9998 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$
$\mu^{(k)}$	–	4	4.5	5.0	$\cdots$	5.9993

Parece que el valor propio dominante va a ser $\lambda = 6$ y su vector propio asociado $(1, -1, 1)$.

Método de la Potencia Inversa

Teorema:

Si λ es un autovalor de la matriz A entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

Método de la Potencia Inversa

Teorema:

Si λ es un autovalor de la matriz A entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

Demostración:

Por ser λ un autovalor de A y sea x el autovector asociado, se cumple que

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x = A^{-1}\lambda x \Rightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x$$

por lo tanto λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

- Por el teorema anterior se puede verificar que también se cumplirá:

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_2^{-1}| \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

Método de la Potencia Inversa

- Consideraremos que los autovalores de A (A matriz invertible) pueden ser ordenados de manera que se cumpla:

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

- Por el teorema anterior se puede verificar que también se cumplirá:

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_2^{-1}| \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

- Por lo que si aplicamos el método de la potencia a A^{-1}, obtendremos el valor $\frac{1}{|\lambda_n|}$; y así obtener el valor de λ_n, el menor valor propio de A.

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:
- La iteración del método de la potencia aplicado a la matriz A^{-1} tiene la forma:

$$y^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)}$$

Consideraciones

- Calcular la inversa de A es muy costoso, por lo tanto en su lugar se resolverá un sistema lineal de la siguiente manera:
- La iteración del método de la potencia aplicado a la matriz A^{-1} tiene la forma:

$$y^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)}$$

- Lo cual es equivalente a resolver el sistema lineal

$$Ay^{(k)} = x^{(k-1)}$$

Método de la Potencia Inversa

- Por lo tanto la iteración del método de la potencia inversa es como sigue:

Método de la Potencia Inversa

- Por lo tanto la iteración del método de la potencia inversa es como sigue:
- Dado $x^{(0)}$ vector inicial tal que $\|x^{(0)}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{Se resuelve } Az^{(k)} &= x^{(k-1)} \\ x^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|} \\ \lambda^{(k)} &= (x^{(k)})^t A x^{(k)} \end{aligned}$$

Método de la Potencia Inversa

- Por lo tanto la iteración del método de la potencia inversa es como sigue:
- Dado $x^{(0)}$ vector inicial tal que $\|x^{(0)}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{Se resuelve } Az^{(k)} &= x^{(k-1)} \\ x^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|} \\ \lambda^{(k)} &= (x^{(k)})^t A x^{(k)} \end{aligned}$$

- Así $\lambda^{(k)}$ es el autovalor dominante de A^{-1} y por lo tanto $\dfrac{1}{\lambda^{(k)}}$ es el menor autovalor en módulo de A.

Ejemplo

-

Método de la Potencia Trasladada

- Un método para acelerar la convergencia es el método de la potencia trasladada que consiste en aplicar el método de la potencia a la matriz $(A - \alpha I)$ en lugar de a la matriz A.

Método de la Potencia Trasladada

- Un método para acelerar la convergencia es el método de la potencia trasladada que consiste en aplicar el método de la potencia a la matriz $(A - \alpha I)$ en lugar de a la matriz A.

Teorema:

Si λ es autovalor de una matriz A asociado a un autovector v y α una constante cualquiera se verifica que $\lambda - \alpha$ es un autovalor de $A - \alpha I$ asociado al mismo autovector v.

Método de la Potencia Trasladada

- Un método para acelerar la convergencia es el método de la potencia trasladada que consiste en aplicar el método de la potencia a la matriz $(A - \alpha I)$ en lugar de a la matriz A.

Teorema:

Si λ es autovalor de una matriz A asociado a un autovector v y α una constante cualquiera se verifica que $\lambda - \alpha$ es un autovalor de $A - \alpha I$ asociado al mismo autovector v.

Demostración:

Se sabe por hipótesis que $Av = \lambda v$, por lo tanto

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \quad &\Rightarrow \quad Av - \alpha v = \lambda v - \alpha v \\ &\Rightarrow \quad (A - \alpha I)v = (\lambda - \alpha)v \end{aligned}$$

Método de la Potencia Trasladada

- Mediante un desplazamiento α, es posible hacer que

$$\left|\frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 - \alpha}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

y que, por lo tanto, la convergencia se acelere

Método de la Potencia Trasladada

- Mediante un desplazamiento α, es posible hacer que

$$\left|\frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 - \alpha}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

  y que, por lo tanto, la convergencia se acelere
- Una vez obtenido el autovalor μ de $A - \alpha I$, el autovalor de A se obtiene de la siguiente manera

$$\lambda = \mu + \alpha$$

Método de la Potencia Trasladada

- Mediante un desplazamiento α, es posible hacer que

$$\left|\frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 - \alpha}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

  y que, por lo tanto, la convergencia se acelere
- Una vez obtenido el autovalor μ de $A - \alpha I$, el autovalor de A se obtiene de la siguiente manera

$$\lambda = \mu + \alpha$$

- Esta técnica puede ser aplicada bien sea con el método de las potencias o el método de potencia inversa. En este último caso se obtiene un valor aproximado de $\mu = (\lambda_k - \alpha)^{-1}$ y se puede recuperar λ_k mediante la expresión $\lambda_k = \mu^{-1} + \alpha$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $-4.88959806, 4.81228115, 6.07731691$
Tomando $x^0 = (1,1,1)^t$. Para diferentes valores de α, se obtiene lo siguiente para una tolerancia de 10^{-8} y un máximo de 200 iteraciones.

α	Iters	Valor obtenido	Valor final	$\|Av - \lambda v\|$
-6	109	12.07731699	6.07731699	1.18171325e-07
4	14	-8.88959806	-4.88959806	2.43544003e-08
7	11	-11.88959806	-4.88959806	2.36718243e-09
5.5	8	-10.38959806	-4.88959806	1.46884304e-09

Potencia Trasladada

- Los resultados anteriores se pueden resumir en la siguiente tabla

Método	**Ecuación**	**Valor computado**
Potencia	$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$	máximo valor propio λ_1
Potencia inversa	$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$	mínimo valor propio λ_n
Potencia con desplazamiento	$x^{(k+1)} = (A - \alpha I)x^{(k)}$	valor propio más alejado de α
Potencia inversa con desplazamiento	$(A - \alpha I)x^{(k+1)} = x^{(k)}$	valor propio más cercano a α

Table: Resumen Métodos de Potencias.

Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz A cuadrada es tal que:

$$A = QR$$

Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz A cuadrada es tal que:

$$A = QR$$

- Q es una matriz ortogonal ($Q^tQ = I$)

Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz A cuadrada es tal que:

$$A = QR$$

- Q es una matriz ortogonal ($Q^t Q = I$)
- R es una matriz triangular superior.

Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz A cuadrada es tal que:

$$A = QR$$

- Q es una matriz ortogonal ($Q^t Q = I$)
- R es una matriz triangular superior.
- Si A es no singular, entonces esta factorización es única.

Definición:

Se dice que dos matrices A y B de tamaño $n \times n$ son similares, si existe una matriz no singular S de tamaño $n \times n$ tal que $A = S^{-1}BS$. Se dice entonces que A es similar a B y por lo tanto B es similar a A; mientras que S es una transformación de similitud. A es unitariamente similar a B si S es unitaria.

Proposición:

Supóngase que A y B son matrices similares, es decir $A = S^{-1}BS$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen

Proposición:

Supóngase que A y B son matrices similares, es decir $A = S^{-1}BS$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen

- A y B poseen los mismos autovalores. De hecho $P_A(\lambda) \equiv P_B(\lambda)$.

Proposición:

Supóngase que A y B son matrices similares, es decir $A = S^{-1}BS$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen

- A y B poseen los mismos autovalores. De hecho $P_A(\lambda) \equiv P_B(\lambda)$.
- $Ax = \lambda x \Rightarrow B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x)$.

Proposición:

Supóngase que A y B son matrices similares, es decir $A = S^{-1}BS$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen

- A y B poseen los mismos autovalores. De hecho $P_A(\lambda) \equiv P_B(\lambda)$.
- $Ax = \lambda x \Rightarrow B(P^{-1}x) = \lambda(P^{-1}x)$.
- $Bw = \lambda w \rightarrow B(Pw) = \lambda(Pw)$.

Teorema:

Supongamos que A y B son matrices similares y que λ es autovalor de A con autovector x asociado. Etonces λ es tambien autovector de B, y si $A = S^{-1}BS$ entonces Sx es autovector asociado a λ para la matriz B.

Demostración:

Dado que A es similar a B, entonces:

$$S^{-1}BS = A$$

Demostración:

Dado que A es similar a B, entonces:

$$S^{-1}BS = A$$

Supongamos $x \neq 0$, entonces

$$S^{-1}BSx = Ax = \lambda x$$

Demostración:

Dado que A es similar a B, entonces:

$$S^{-1}BS = A$$

Supongamos $x \neq 0$, entonces

$$S^{-1}BSx = Ax = \lambda x$$

Al multiplicar en la izquierda por la matriz S, obtenemos:

$$BSx = \lambda Sx$$

Puesto que $x \neq 0$ y S es no singular $Sx \neq 0$.Por tanto, Sx es un autovector de B asociado al autovalor λ.

Algoritmo QR

Dada una matriz cuadrada A, se puede hallar su factorización QR, donde Q es ortogonal y R triangular superior.
Algoritmo para hallar los autovalores:

Algoritmo QR

Dada una matriz cuadrada A, se puede hallar su factorización QR, donde Q es ortogonal y R triangular superior.
Algoritmo para hallar los autovalores:

Inicio: $A^0 = A = QR$ (nótese que $R = Q^t A$)
$A^1 = RQ = Q^t AQ$ (A y A^1 son similares)

Algoritmo QR

Dada una matriz cuadrada A, se puede hallar su factorización QR, donde Q es ortogonal y R triangular superior.
Algoritmo para hallar los autovalores:

Inicio: $A^0 = A = QR$ (nótese que $R = Q^t A$)
$A^1 = RQ = Q^t AQ$ (A y A^1 son similares)

Factorizar: $A^1 = Q^1 R^1$
$A^2 = R^1 Q^1 = Q^{1t} Q^t AQQ^1$ (similar a A^1 y A)

Algoritmo QR

Dada una matriz cuadrada A, se puede hallar su factorización QR, donde Q es ortogonal y R triangular superior.
Algoritmo para hallar los autovalores:

Inicio: $A^0 = A = QR$ (nótese que $R = Q^t A$)
$A^1 = RQ = Q^t AQ$ (A y A^1 son similares)

Factorizar: $A^1 = Q^1 R^1$
$A^2 = R^1 Q^1 = Q^{1t} Q^t AQQ^1$ (similar a A^1 y A)

General: Dado A^m
Factorizar: $A^m = Q^m R^m$
$A^{m+1} = R^m Q^m($ (similar a $A^m, \ldots, A^1, A$)

Algoritmo QR

Nota: Si los autovalores de A satisfacen que:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

Entonces, las iteraciones A^m convergen a una matriz triangular superior que posee sobre la diagonal los autovalores de A

$$A^m \to \begin{bmatrix} \lambda_1 & u & \cdots & u \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & u \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

- Notese que $A^m = Q^{(m-1)t} \dots Q^{(1)t} Q^t A Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

- Notese que $A^m = Q^{(m-1)t} \cdots Q^{(1)t} Q^t A Q Q^{(1)} \cdots Q^{(m-1)}$
- Sea $Q^* = Q Q^{(1)} \cdots Q^{(m-1)}$

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

- Notese que $A^m = Q^{(m-1)t} \dots Q^{(1)t} Q^t A Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Sea $Q^* = Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Entonces $A^m = Q^{*t} A Q^*$

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

- Notese que $A^m = Q^{(m-1)t} \dots Q^{(1)t} Q^t A Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Sea $Q^* = Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Entonces $A^m = Q^{*t} A Q^*$

Si A^m llegará a ser diagonal, los autovectores de A^m son e_1, e_2, …, e_n. Dado que A^m y A son matrices similares, los autovectores de A son $(Q^{*t})^{-1} e_i = Q^*$, es decir **los autovectores de A son las columnas de Q^*.**

Algoritmo QR

¿Cómo se calculan los autovectores?

- Notese que $A^m = Q^{(m-1)t} \dots Q^{(1)t} Q^t A Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Sea $Q^* = Q Q^{(1)} \dots Q^{(m-1)}$
- Entonces $A^m = Q^{*t} A Q^*$

Si A^m llegará a ser diagonal, los autovectores de A^m son e_1, e_2, ..., e_n. Dado que A^m y A son matrices similares, los autovectores de A son $(Q^{*t})^{-1} e_i = Q^*$, es decir **los autovectores de A son las columnas de Q^*.**

> Si A es una matriz simétrica $(A = A^t)$,entonces los autovectores de A son las columnas de Q^*.

Tridiagonalización

- Para que el algoritmo QR sea eficaz, la matriz simétrica debe poseer una forma tridiagonal.

Tridiagonalización

- Para que el algoritmo QR sea eficaz, la matriz simétrica debe poseer una forma tridiagonal.
- Por ello, este algoritmo es un proceso de dos fases.

Tridiagonalización

- Para que el algoritmo QR sea eficaz, la matriz simétrica debe poseer una forma tridiagonal.
- Por ello, este algoritmo es un proceso de dos fases.
- A la matriz A se le apli a una fase 1 que consiste en la tridiagonalización de la matriz.

Tridiagonalización

- Para que el algoritmo QR sea eficaz, la matriz simétrica debe poseer una forma tridiagonal.
- Por ello, este algoritmo es un proceso de dos fases.
- A la matriz A se le apli a una fase 1 que consiste en la tridiagonalización de la matriz.
- Luego se aplica una fase 2 que es diagonalizar la matriz obtenida en la fase 1.

Tridiagonalización

$$\underset{A = A^t}{\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{Fase 1}} \underset{T}{\begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & x & x & x & \\ & & x & x & x \\ & & & x & x \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{Fase 2}} \underset{D}{\begin{bmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{bmatrix}}$$

Tridiagonalización

- Dado que la matriz T es también simétrica, lo cual se asegura debido a las transformaciones de similitud realizadas, entonces aplicar el método QR es más económico.

Tridiagonalización

- Dado que la matriz T es también simétrica, lo cual se asegura debido a las transformaciones de similitud realizadas, entonces aplicar el método QR es más económico.
- Solo se almacena la diagonal principal y la subdiagonal.

Tridiagonalización

- Dado que la matriz T es también simétrica, lo cual se asegura debido a las transformaciones de similitud realizadas, entonces aplicar el método QR es más económico.
- Solo se almacena la diagonal principal y la subdiagonal.
- Y diagonalizar la matriz, consiste entonces en anular los $n-1$ elementos de la subdiagonal, es decir, la factorización QR de una matriz tridiagonal consiste en $n-1$ transformaciones de Givens.

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Para que la diagonalización de la matriz tridiagonal obtenida se realice de una forma más acelerada, se emplean técnicas conocidas como desplazamiento de la matriz de coeficientes.

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Para que la diagonalización de la matriz tridiagonal obtenida se realice de una forma más acelerada, se emplean técnicas conocidas como desplazamiento de la matriz de coeficientes.
- La idea consiste en aplicar la factorización QR a la matriz $T - \sigma I$, en vez de aplicarla solo a la matriz T, siendo σ un valor que cambia el espectro entero de la matriz a $\lambda_i - \sigma$.

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Para que la diagonalización de la matriz tridiagonal obtenida se realice de una forma más acelerada, se emplean técnicas conocidas como desplazamiento de la matriz de coeficientes.
- La idea consiste en aplicar la factorización QR a la matriz $T - \sigma I$, en vez de aplicarla solo a la matriz T, siendo σ un valor que cambia el espectro entero de la matriz a $\lambda_i - \sigma$.
- Si A es la matriz original y A_i es la matriz actual en la iteración i, se selecciona un es alar σ, para hallar la factorización QR de $A_i - \sigma I$, y luego devolver el desplazamiento realizado para definir la matriz A_{i+1}.

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Para que la diagonalización de la matriz tridiagonal obtenida se realice de una forma más acelerada, se emplean técnicas conocidas como desplazamiento de la matriz de coeficientes.
- La idea consiste en aplicar la factorización QR a la matriz $T - \sigma I$, en vez de aplicarla solo a la matriz T, siendo σ un valor que cambia el espectro entero de la matriz a $\lambda_i - \sigma$.
- Si A es la matriz original y A_i es la matriz actual en la iteración i, se selecciona un es alar σ, para hallar la factorización QR de $A_i - \sigma I$, y luego devolver el desplazamiento realizado para definir la matriz A_{i+1}.
- Si el escalar σ es seleccionado de modo tal que es muy cercano a un autovalor de A, esta técnica acelerará la rapidez de convergencia del método.

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Se calcula la factorización QR de la matriz $A_i - \sigma I$

$$(A_i - \sigma I) = Q_i R_i$$

Aceleración de la convergencia del Método QR

- Se calcula la factorización QR de la matriz $A_i - \sigma I$

$$(A_i - \sigma I) = Q_i R_i$$

- Luego se reversa el desplazamiento realizado, y se tiene que:

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \sigma I$$

- Comprobando que el desplazamiento realizado preserva la similitud, multiplicando la última ecuación por Q se tiene:

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \sigma I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = Q_i R_i Q_i + \sigma Q_i I$$

- Comprobando que el desplazamiento realizado preserva la similitud, multiplicando la última ecuación por Q se tiene:

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \sigma I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = Q_i R_i Q_i + \sigma Q_i I$$

- Se tiene que $Q_i R_i = A_i - \sigma I$, incorporando esta ecuación queda que:

$$Q_i A_{i+1} = (A_i - \sigma I) Q_i + \sigma Q_i I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = A_i Q_i - \sigma Q_i + \sigma Q_i$$

- Comprobando que el desplazamiento realizado preserva la similitud, multiplicando la última ecuación por Q se tiene:

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \sigma I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = Q_i R_i Q_i + \sigma Q_i I$$

- Se tiene que $Q_i R_i = A_i - \sigma I$, incorporando esta ecuación queda que:

$$Q_i A_{i+1} = (A_i - \sigma I) Q_i + \sigma Q_i I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = A_i Q_i - \sigma Q_i + \sigma Q_i$$

- Multiplicando por Q^t por el lado derecho llegamos a que:

$$Q_i A_{i+1} Q_i^t = A_i Q_i Q_i^t - \sigma Q_i Q_i^t + \sigma Q_i Q_i^t$$

- Comprobando que el desplazamiento realizado preserva la similitud, multiplicando la última ecuación por Q se tiene:

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \sigma I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = Q_i R_i Q_i + \sigma Q_i I$$

- Se tiene que $Q_i R_i = A_i - \sigma I$, incorporando esta ecuación queda que:

$$Q_i A_{i+1} = (A_i - \sigma I) Q_i + \sigma Q_i I \Rightarrow Q_i A_{i+1} = A_i Q_i - \sigma Q_i + \sigma Q_i$$

- Multiplicando por Q^t por el lado derecho llegamos a que:

$$Q_i A_{i+1} Q_i^t = A_i Q_i Q_i^t - \sigma Q_i Q_i^t + \sigma Q_i Q_i^t$$

- Cancelando los dos términos similares de la derecha, y dado que $Q^t Q = Q Q^t = I$ se llega a que:

$$Q_i A_{i+1} Q_i^t = A_i$$

Aceleración de la convergencia del Método QR

Existen diversas estrategias de desplazamientos, entre las cuales tenemos la de desplazamiento simple y desplazamiento implícito, que pueden ser aplicados al método QR.

Aceleración de la convergencia del Método QR

Existen diversas estrategias de desplazamientos, entre las cuales tenemos la de desplazamiento simple y desplazamiento implícito, que pueden ser aplicados al método QR.

- **Desplazamiento Simple**: esta técnica está basada en el hecho de que un desplazamiento causado por un autovalor provoca una deflación, por lo tanto es sugerido seleccionar el desplazamiento σ_k como un autovalor aproximado. Se puede seleccionar el elemento (k, k) de la matriz $A^{(k)}$ como valor de desplazamiento.

Aceleración de la convergencia del Método QR

Existen diversas estrategias de desplazamientos, entre las cuales tenemos la de desplazamiento simple y desplazamiento implícito, que pueden ser aplicados al método QR.

- **Desplazamiento Simple**: esta técnica está basada en el hecho de que un desplazamiento causado por un autovalor provoca una deflación, por lo tanto es sugerido seleccionar el desplazamiento σ_k como un autovalor aproximado. Se puede seleccionar el elemento (k, k) de la matriz $A^{(k)}$ como valor de desplazamiento.
- **Desplazamiento Implícito**: se busca el autovalor de la matriz 2×2 más cercano al elemento de la diagonal, la diferencia radica en llevar a cabo la transformación QR sin substraer el desplazamiento de los elementos de la diagonal, como es llevado a cabo en los desplazamientos anteriores.

Criterio de Parada

- El algoritmo QR presenta un proceso iterativo para hallar los autovalores de una matriz A, pero en el proceso se debe indicar cual es el criterio a seguir, para indicar que se ha hallado un autovalor.

Criterio de Parada

- El algoritmo QR presenta un proceso iterativo para hallar los autovalores de una matriz A, pero en el proceso se debe indicar cual es el criterio a seguir, para indicar que se ha hallado un autovalor.
- Un criterio que se emplea en muchas de las implementaciones del algoritmo QR, es el propuesto por Wilkinson, en el que se compara el elemento de la subdiagonal con los elementos vecinos de la diagonal. De esta manera, en la iteración k, el elemento $a_{i,i-1}^{(k)}$ es colocado en cero si se cumple que

$$a_{i,i-1}^{(k)} \leq u \left(|a_{i-1,i-1}^{(k)}| + |a_{i,i}^{(k)}| \right)$$

Criterio de Parada

- El algoritmo QR presenta un proceso iterativo para hallar los autovalores de una matriz A, pero en el proceso se debe indicar cual es el criterio a seguir, para indicar que se ha hallado un autovalor.
- Un criterio que se emplea en muchas de las implementaciones del algoritmo QR, es el propuesto por Wilkinson, en el que se compara el elemento de la subdiagonal con los elementos vecinos de la diagonal. De esta manera, en la iteración k, el elemento $a_{i,i-1}^{(k)}$ es colocado en cero si se cumple que

$$a_{i,i-1}^{(k)} \leq u \left(|a_{i-1,i-1}^{(k)}| + |a_{i,i}^{(k)}| \right)$$

- El criterio dado es escencialmente una prueba heurística, ya que a pesar de ser utilizada y cuyo comportamiento ha sido el correcto, no hay una teoría matemática que la sostenga.