Unidad IV: Diferenciación e Integración Numérica

Prof. José Luis Ramírez

March 23, 2025

Unidad IV: Diferenciación e Integración Numérica

Prof. José Luis Ramírez

March 23, 2025

Contenido

Motivación

El flujo de calor en la interfaz suelo-aire puede calcularse con la ley de Faraday

$$q = -k\rho C \frac{dT}{dz}$$

Donde $q =$ flujo de calor, $k =$ coeficiente de difusividad térmica, $\rho =$ la densidad del suelo, $C =$ calor específico del suelo.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
    1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
  1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.
  2. Método de Newton-Raphson.

Motivación

- Las situaciones en las cuales se requiere el uso de la diferenciación numérica, ocurren cuando el conjunto de datos está dado en la forma discreta y cuando la función que se va a derivar es complicada, por lo que la derivación analítica es difícil, cuando no imposible.
- Entonces, las soluciones numéricas son preferibles a las analíticas, siempre que la función sea fácil de evaluar.
- Problemas que han sido estudiados, involucran en cierto modo el cálculo de la derivada de una función evaluada en un punto, como por ejemplo:
    1. Interpolación Cúbica de Trazador Sujeto.
    2. Método de Newton-Raphson.
    3. Ecuaciones Diferenciales.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.
- Un fórmula para el integrando puede ser conocido, pero puede ser difícil o imposible de encontrar su antiderivada. Un ejemplo de tal integrando es $f(x) = e^{-x^2}$, cuya antiderivada no se puede escribir en forma elemental.

Motivación

Hay distintas razones por la que la integración numérica se realiza.

- El integrando $f(x)$ puede ser conocido solamente en ciertos puntos, tales como: obtenidos por muestreo. Algunos sistemas encajados y otras aplicaciones informáticas pueden necesitar la integración numérica por esta razón.
- Un fórmula para el integrando puede ser conocido, pero puede ser difícil o imposible de encontrar su antiderivada. Un ejemplo de tal integrando es $f(x) = e^{-x^2}$, cuya antiderivada no se puede escribir en forma elemental.
- Puede ser posible encontrar una antiderivada simbólicamente, pero puede ser más fácil computar una aproximación numérica que computar la antiderivada. Ése puede ser el caso si la antiderivada se da como una serie o producto infinita, o si su evaluación requiere una función especial la cuál no está disponible.

Diferenciación Numérica

- La diferenciación numérica puede calcularse usando la definición de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diferenciación Numérica

- La diferenciación numérica puede calcularse usando la definición de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Tomando una h pequeña. Si $h > 0$ se llama fórmula de diferencia progresiva, si $h < 0$ se llama fórmula de diferencia regresiva.

Diferenciación Numérica

- Para calcular la aproximación numérica de la derivada en un punto, se puede generar una sucesión $\{h_k\}$, tal que $h_k \to 0$ y se calcula el cociente

$$D_k = \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \frac{f_k - f_0}{h_k}$$

- Si se toma un valor muy grande de h_k la aproximación no es aceptable y si h_k es muy pequeño la diferencia $f(x + h_k) - f(x) \approx 0$ ocurre una pérdida de dígitos significativos

Diferenciación Numérica

- Para calcular la aproximación numérica de la derivada en un punto, se puede generar una sucesión $\{h_k\}$, tal que $h_k \to 0$ y se calcula el cociente

$$D_k = \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \frac{f_k - f_0}{h_k}$$

- Generando entonces una sucesión $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ y tomando a D_n como la aproximación deseada, el problema está en conocer cual valor de h_k garantiza una buena aproximación
- Si se toma un valor muy grande de h_k la aproximación no es aceptable y si h_k es muy pequeño la diferencia $f(x + h_k) - f(x) \approx 0$ ocurre una pérdida de dígitos significativos

Diferenciación Numérica

- La siguiente tabla muestra los cocientes D_k para aproximar la derivada de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 2$ cuyo valor con nueve cifras significativas es $f'(2) = -0.416146837$.

h_k	f_k	$f_k - f$	$\frac{f_k - f}{h_k}$
10^{-1}	0.8632093666	-0.0460880602	-0.4608806018
10^{-2}	0.9050905633	-0.0042068635	-0.4206863500
10^{-3}	0.9088808254	-0.0004166014	-0.4166014159
10^{-4}	0.9092558076	-0.0000416192	-0.4161923007
10^{-5}	0.9092932653	-0.0000041615	-0.4161513830
10^{-6}	0.9092970107	-0.0000004161	-0.4161472913
10^{-7}	0.9092973852	-0.0000000416	-0.4161468814
10^{-8}	0.9092974227	-0.0000000042	-0.4161468392
10^{-9}	0.9092974264	-0.0000000004	-0.4161468947
10^{-10}	0.9092974268	-0.0000000000	-0.4161471168

Table: Aproximación del $(\sin(2))' = cos(2)$.

Diferenciación Numérica

- ¿Cuán buena es esta aproximación de la derivada? Por el Teorema de Taylor se sabe que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_h)h^2}{2}$$

  donde ξ_h está entre x_0 y $x_0 + h$.
- Despejando ahora a $f'(x_0)$ en esta fórmula se tiene que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{hf''(\xi_h)}{2}$$

- Esta fórmula nos dice que se aproxima a $f'(x_0)$ con un error proporcional a h, es decir, $f'(x_0) \approx O(h)$.

Diferenciación Numérica

Ejemplo:

Tomando $f(x) = x^9$ se desea aproximar $f'(1)$ cuyo valor exacto es nueve. En la siguiente figura se ilustran los errores absolutos como función de h en escala logarítmica.

Diferenciación Numérica

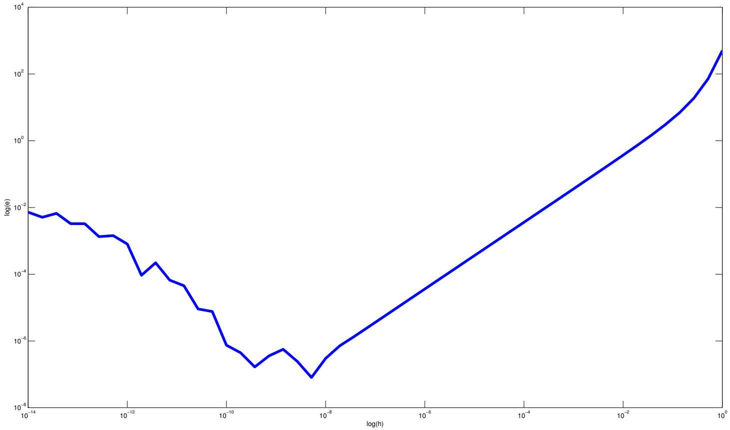


Figure: Aproximación de $f'(1)$ para $f(x) = x^9$.

Diferenciación Numérica

Se puede ver que los errores disminuyen hasta un cierto valor crítico h_{min} luego del cual los errores aumentan según la h disminuye. ¿Contradice esto el resultado de arriba de $O(h)$ del error?

Diferenciación Numérica

Se puede ver que los errores disminuyen hasta un cierto valor crítico h_{min} luego del cual los errores aumentan según la h disminuye. ¿Contradice esto el resultado de arriba de $O(h)$ del error?

- El resultado anterior es sobre la convergencia si la aritmética es exacta y se dice que es un resultado asintótico.

Diferenciación Numérica

Se puede ver que los errores disminuyen hasta un cierto valor crítico h_{min} luego del cual los errores aumentan según la h disminuye. ¿Contradice esto el resultado de arriba de $O(h)$ del error?

- El resultado anterior es sobre la convergencia si la aritmética es exacta y se dice que es un resultado asintótico.
- La figura ilustra los efectos de redondeo debido a la aritmética finita, los cuales se hacen significativos para h pequeño y pueden afectar cualquier fórmula numérica para aproximar la derivada.

Diferenciación Numérica

Definición:

El error de truncamiento se define como:

$$E = |Du(x) - u'(x)|$$

donde $u'(x)$ es la derivada y $Du(x)$ es su aproximación. Además, si $E \leq Ch^p$, se dice que el esquema $Du(x)$ tiene un orden de precisión p, $O(h^p)$, siempre que C sea una constante, la cual usualmente depende de la regularidad de $u(x)$.

Diferenciación Numérica

- Una fórmula con un grado de aproximación digamos $O(h^2)$ es preferible a una de $O(h)$

Diferenciación Numérica

- Una fórmula con un grado de aproximación digamos $O(h^2)$ es preferible a una de $O(h)$
- ya que los errores (teóricos) tienden a cero más rápido y así la h no se tiene que hacerse tan pequeña reduciendo así los efectos de los errores por la aritmética finita.

Diferenciación Numérica

- Una fórmula con un grado de aproximación digamos $O(h^2)$ es preferible a una de $O(h)$
- ya que los errores (teóricos) tienden a cero más rápido y así la h no se tiene que hacerse tan pequeña reduciendo así los efectos de los errores por la aritmética finita.
- Es posible, mejorar la precisión de la siguiente manera: Sean los polinomios de Taylor de las funciones $f(x_0+h)$ y $f(x_0-h)$, suponiendo que la función es al menos tres veces derivable:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

Diferenciación Numérica

- Restando ambas ecuaciones y resolviendo para $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

Diferenciación Numérica

- Restando ambas ecuaciones y resolviendo para $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

- Como $f \in \mathcal{C}^3[x_0-h, x_0+h]$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $\xi \in [x_0-h, x_0+h]$ tal que,

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

Diferenciación Numérica

- Por lo anterior queda entonces que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

Diferenciación Numérica

- Por lo anterior queda entonces que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

- A esta expresión se le llama fórmula de diferencia centrada, el orden de precisión es 2, mientras que el error de truncamiento es $O(h^2)$.

Diferenciación Numérica

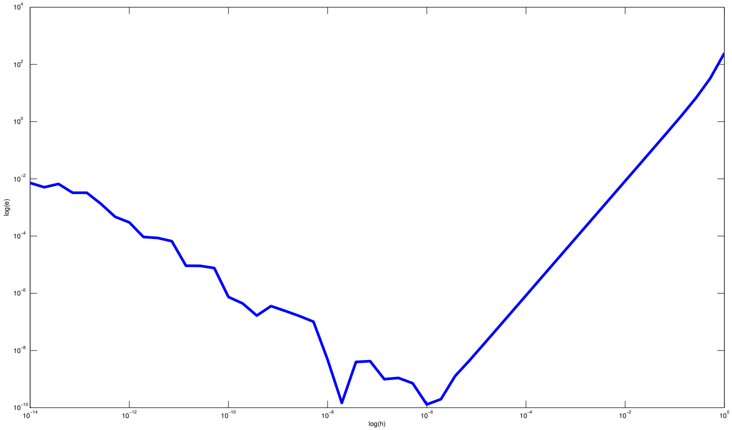


Figure: Aproximación de $f'(1)$ para $f(x) = x^9$.

Fórmula de los n puntos.

El siguiente teorema utiliza el polinomio interpolador de una función f para obtener fórmulas de aproximación a la derivada de una función f.

Fórmula de los n puntos.

El siguiente teorema utiliza el polinomio interpolador de una función f para obtener fórmulas de aproximación a la derivada de una función f.

Teorema 1 (fórmula de n puntos)

Sea f una función de clase $C^{n+1}[a,b]$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ n puntos distintos de dicho intervalo. Si llamamos $L_i(x)$ a los correspondientes polinomios elementales de Lagrange de grado $n-1$, entonces existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f'(x_k) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i'(x_k) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$$

Fórmula de los n puntos.

- El polinomio de segundo grado que interpola a f en los puntos x_0, x_1, x_2, tiene por polinomios elementales:

Fórmula de los n puntos.

- El polinomio de segundo grado que interpola a f en los puntos x_0, x_1, x_2, tiene por polinomios elementales:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \Rightarrow L_0'(x) = \frac{(x - x_2) + (x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Fórmula de los n puntos.

- El polinomio de segundo grado que interpola a f en los puntos x_0, x_1, x_2, tiene por polinomios elementales:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow L_0'(x) = \frac{(x-x_2)+(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow L_1'(x) = \frac{(x-x_2)+(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

Fórmula de los n puntos.

- El polinomio de segundo grado que interpola a f en los puntos x_0, x_1, x_2, tiene por polinomios elementales:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow L_0'(x) = \frac{(x-x_2)+(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow L_1'(x) = \frac{(x-x_2)+(x-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow L_2'(x) = \frac{(x-x_1)+(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Fórmula de los n puntos

- De esta manera, siguiendo el teorema anterior, se tendría que:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_0)[(x_k - x_2) + (x_k - x_1)]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)[(x_k - x_2) + (x_k - x_0)]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$+ \frac{f(x_2)[(x_k - x_1) + (x_k - x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq k}^{2} (x_k - x_i)$$
$$\forall k = 0, 1, 2$$

Fórmula centrada de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_1 - h$, $x_1 = x_1$ y $x_2 = x_1 + h$ para aproximar $f'(x_1)$, nos queda que:

$$\begin{aligned} f'(x_1) =& \frac{f(x_0)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)[(x_1 - x_2) + (x_1 - x_0)]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ & + \frac{f(x_2)(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} (x_1 - x_i) \end{aligned}$$

Fórmula centrada de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_1 - h$, $x_1 = x_1$ y $x_2 = x_1 + h$ para aproximar $f'(x_1)$, nos queda que:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)[(x_1 - x_2) + (x_1 - x_0)]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} (x_1 - x_i)$$

Sustituyendo x_0 y x_2, y simplificando la expresión se obtiene:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6} h^2$$

Fórmula progresiva de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ para aproximar $f'(x_0)$ con $h > 0$, queda que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)[(x_0 - x_2) + (x_0 - x_1)]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_2)(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 0}^{2} (x_0 - x_i)$$

Fórmula progresiva de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ para aproximar $f'(x_0)$ con $h > 0$, queda que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)[(x_0 - x_2) + (x_0 - x_1)]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$+ \frac{f(x_2)(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 0}^{2} (x_0 - x_i)$$

Sustituyendo x_1 y x_2, y simplificando la expresión se obtiene:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \frac{f'''(\xi)}{3} h^2$$

Fórmula regresiva de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_2 - 2h$, $x_1 = x_2 - h$ y $x_2 = x_2$ para aproximar $f'(x_2)$ con $h > 0$, queda que:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)[(x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 2}^{2} (x_2 - x_i)$$

Fórmula regresiva de tres puntos.

Si tomamos $x_0 = x_2 - 2h$, $x_1 = x_2 - h$ y $x_2 = x_2$ para aproximar $f'(x_2)$ con $h > 0$, queda que:

$$
\begin{aligned}
f'(x_2) &= \frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&\quad + \frac{f(x_2)[(x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0, i\neq 2}^{2} (x_2 - x_i)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo x_0 y x_1, y simplificando la expresión se obtiene:

$$
f'(x_2) = \frac{f(x_2 - 2h) - 4f(x_2 - h) + 3f(x_2)}{2h} + \frac{f'''(\xi)}{3} h^2
$$

Derivadas de Orden Superior

- A partir del desarrollo de Taylor de la función evaluada en $x_0 + h$ y $x_0 - h$, se puede obtener la fórmula para la que aproxima a la segunda derivada de la función f.

Derivadas de Orden Superior

- A partir del desarrollo de Taylor de la función evaluada en $x_0 + h$ y $x_0 - h$, se puede obtener la fórmula para la que aproxima a la segunda derivada de la función f.
- Sea $0 < |h| < \delta$ por Taylor, suponiendo que $f^{(4)}$ existe y es continua en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ξ_1 entre x_0 y $x_0 + h$, ξ_2 entre x_0 y $x_0 - h$.

Derivadas de Orden Superior

- A partir del desarrollo de Taylor de la función evaluada en $x_0 + h$ y $x_0 - h$, se puede obtener la fórmula para la que aproxima a la segunda derivada de la función f.
- Sea $0 < |h| < \delta$ por Taylor, suponiendo que $f^{(4)}$ existe y es continua en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ξ_1 entre x_0 y $x_0 + h$, ξ_2 entre x_0 y $x_0 - h$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}h^4$$
$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}h^4$$

Derivadas de Orden Superior

- Sumandos ambas ecuaciones:

$$f(x_0+h)+f(x_0-h) = 2f(x_0)+2\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right)$$

- y despejando $f''(x_0)$ de esta expresión se obtiene:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}+\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2$$

con $\xi \in (x_0-h, x_0+h)$

Extrapolación de Richardson

- El proceso de obtener una estimación mejorada para el valor de Integrales, Derivadas, Ecuaciones Diferenciales, etc., con base en dos o más aplicaciones de una fórmula, empleando diferentes longitudes de intervalo, se denomina Extrapolación.

Extrapolación de Richardson

- El proceso de obtener una estimación mejorada para el valor de Integrales, Derivadas, Ecuaciones Diferenciales, etc., con base en dos o más aplicaciones de una fórmula, empleando diferentes longitudes de intervalo, se denomina Extrapolación.
- Uno de los mós conocidos es el de Extrapolación de Richardson o Aproximación diferida al límite.

Extrapolación de Richardson

- El proceso de obtener una estimación mejorada para el valor de Integrales, Derivadas, Ecuaciones Diferenciales, etc., con base en dos o más aplicaciones de una fórmula, empleando diferentes longitudes de intervalo, se denomina Extrapolación.
- Uno de los mós conocidos es el de Extrapolación de Richardson o Aproximación diferida al límite.
- Supongase que $G(h)$ es una expresión que aproxima a una cantidad G

Extrapolación de Richardson

- El proceso de obtener una estimación mejorada para el valor de Integrales, Derivadas, Ecuaciones Diferenciales, etc., con base en dos o más aplicaciones de una fórmula, empleando diferentes longitudes de intervalo, se denomina Extrapolación.
- Uno de los mós conocidos es el de Extrapolación de Richardson o Aproximación diferida al límite.
- Supongase que $G(h)$ es una expresión que aproxima a una cantidad G
- entonces se tiene que $G - G(h) = E_T$, donde E_T es el error de truncamiento que se comete al aproximar a G por $G(h)$.

Extrapolación de Richardson

- Suponiendo:

$$E_T = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \cdots \, ,$$

luego

$$G = G(h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \cdots \qquad h > 0$$

Extrapolación de Richardson

- Suponiendo:

$$E_T = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \cdots\ ,$$

luego

$$G = G(h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \cdots \qquad h > 0$$

- Tomando $h = \dfrac{h}{2}$, entonces

$$G = G\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 \frac{h}{2} + c_2 \frac{h^2}{4} + c_3 \frac{h^3}{8} + c_4 \frac{h^4}{16} + \cdots \qquad h > 0$$

Extrapolación de Richardson

- Si se multiplica por 2 a la última ecuacióny se le resta G, entonces

$$2G - G = 2G\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 h + c_2\frac{h^2}{2} + c_3\frac{h^3}{4} + \cdots - G(h) - c_1 h - c_2 h^2 - c_3 h^3 - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Si se multiplica por 2 a la última ecuacióny se le resta G, entonces

$$2G - G = 2G\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 h + c_2\frac{h^2}{2} + c_3\frac{h^3}{4} + \cdots - G(h) - c_1 h - c_2 h^2 - c_3 h^3 - \cdots$$

- o sea que:

$$G = 2G\left(\frac{h}{2}\right) - G(h) - c_2\frac{h^2}{2} - c_3\frac{3h^3}{4} - c_4\frac{7h^4}{8} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Si se multiplica por 2 a la última ecuacióny se le resta G, entonces

$$2G-G=2G\left(\frac{h}{2}\right)+c_1h+c_2\frac{h^2}{2}+c_3\frac{h^3}{4}+\cdots-G(h)-c_1h-c_2h^2-c_3h^3-\cdots$$

- o sea que:

$$G=2G\left(\frac{h}{2}\right)-G(h)-c_2\frac{h^2}{2}-c_3\frac{3h^3}{4}-c_4\frac{7h^4}{8}-\cdots$$

- luego

$$G=\left[G\left(\frac{h}{2}\right)+\left(G\left(\frac{h}{2}\right)-G(h)\right)\right]-c_2\frac{h^2}{2}-c_3\frac{3h^3}{4}-c_4\frac{7h^4}{8}-\cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Para simplificar los cálculos denotese $G(h) \equiv G_1(h)$, la expresión para $O(h^2)$, es entonces

$$G = G_2(h) - c_2 \frac{h^2}{2} - c_3 \frac{3h^3}{4} - c_4 \frac{7h^4}{8} - \cdots$$

donde $G_2(h) = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h)\right)$

Extrapolación de Richardson

- Al igual que antes reemplazamos h por $\dfrac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_2\left(\frac{h}{2}\right) - c_2\frac{h^2}{8} - c_3\frac{3h^3}{32} - c_4\frac{7h^4}{128} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Al igual que antes reemplazamos h por $\frac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_2\left(\frac{h}{2}\right) - c_2\frac{h^2}{8} - c_3\frac{3h^3}{32} - c_4\frac{7h^4}{128} - \cdots$$

- Restando cuatro veces esta ecuación a la original se obtiene:

$$4G - G = 4G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) - c_2\frac{h^2}{2} - c_3\frac{3h^3}{8} - \cdots + c_2\frac{h^2}{2} + c_3\frac{3h^3}{4} + \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Al igual que antes reemplazamos h por $\dfrac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_2\left(\frac{h}{2}\right) - c_2\frac{h^2}{8} - c_3\frac{3h^3}{32} - c_4\frac{7h^4}{128} - \cdots$$

- Restando cuatro veces esta ecuación a la original se obtiene:

$$4G - G = 4G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) - c_2\frac{h^2}{2} - c_3\frac{3h^3}{8} - \cdots + c_2\frac{h^2}{2} + c_3\frac{3h^3}{4} + \cdots$$

- o sea que

$$3G = 4G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h) + c_3\frac{3h^3}{8} + c_4\frac{21h^4}{32} + \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- luego

$$G = \left[G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{3} \right] + c_3\frac{h^3}{8} + c_4\frac{7h^4}{32} + \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- luego

$$G = \left[G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{3} \right] + c_3\frac{h^3}{8} + c_4\frac{7h^4}{32} + \cdots$$

- Denotando

$$G_3(h) = G_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G_2(h)}{3}$$

se tiene la expresión para $O(h^3)$ dada por

$$G = G_3(h) + c_3\frac{h^3}{8} + c_4\frac{7h^4}{32} + \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- reemplazando h por $\dfrac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{64}c_3 + \frac{7h^4}{512}c_4 + \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- reemplazando h por $\frac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{64}c_3 + \frac{7h^4}{512}c_4 + \cdots$$

- Restando ocho veces esta ecuación a la ecuación original se tiene que

$$7G = 8G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h) - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- reemplazando h por $\frac{h}{2}$, se tiene que

$$G = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{64}c_3 + \frac{7h^4}{512}c_4 + \cdots$$

- Restando ocho veces esta ecuación a la ecuación original se tiene que

$$7G = 8G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h) - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

- o sea que

$$7G = 7G_3\left(\frac{h}{2}\right) + G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h) - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Por lo tanto

$$G = \left[G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h)}{7} \right] - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Por lo tanto

$$G = \left[G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h)}{7} \right] - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

- Así que

$$G_4(h) = G_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_3\left(\frac{h}{2}\right) - G_3(h)}{7}$$

genera una aproximación $O(h^4)$ dada por

$$G = G_4(h) - c_4\frac{7h^4}{64} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson

- Continuando con este proceso, la aproximación $O(h^n)$ es

$$G = \left[G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{n-1}(h)}{2^{n-1}-1} \right] + \sum_{j=1}^{n-1} c_j h^j + O(h^n)$$

Extrapolación de Richardson

- Continuando con este proceso, la aproximación $O(h^n)$ es

$$G = \left[G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{n-1}(h)}{2^{n-1} - 1} \right] + \sum_{j=1}^{n-1} c_j h^j + O(h^n)$$

- donde

$$G = G_n(h) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j h^j + O(h^n)$$

siendo

$$G_n(h) = \left[G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{n-1}(h)}{2^{n-1} - 1} \right]$$

Extrapolación de Richardson

- La siguiente tabla muestra el uso de la Extrapolación de Richardson obtener una aproximación de orden 5, empleando 5 aproximaciones de orden 1

$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^5)$
$G_1(h)$				
$G_1(h/2)$	$G_2(h)$			
$G_1(h/4)$	$G_2(h/2)$	$G_3(h)$		
$G_1(h/8)$	$G_2(h/4)$	$G_3(h/2)$	$G_4(h)$	
$G_1(h/16)$	$G_2(h/8)$	$G_3(h/4)$	$G_4(h/2)$	$G_5(h)$
$\uparrow$ Medidas	$\uparrow$	Extrapolaciones		$\uparrow$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Con este procedimiento se busca mejorar las ecuaciones obtenidas anteriormente para conseguir más precisión en la estimación de la derivada de f en un punto x.

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Con este procedimiento se busca mejorar las ecuaciones obtenidas anteriormente para conseguir más precisión en la estimación de la derivada de f en un punto x.
- Supongase que $f(x)$ es de clase C^n en $[x, x+h]$. En tal caso, su desarrollo en serie de Taylor alrededor de x para los puntos $x+h$ y $x-h$ será de la forma

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \\ f(x-h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^k}{k!} f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Restando ambas ecuaciones, todos los términos de orden par se cancelan, resultando

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2}{3!}h^3 f'''(x) + \frac{2}{5!}h^5 f^{(5)}(x) + \cdots$$

de donde, despejando $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \left[\frac{1}{3!}h^2 f^{(3)}(x) + \frac{1}{5!}h^4 f^{(5)}(x) + \cdots\right]$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Lo que se puede escribir como:

$$G = G_1(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \cdots$$

en la que $G = f'(x)$, la función $G_1(h)$ se define como $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ y $a_k = \frac{-1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x)$.

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Lo que se puede escribir como:

$$G = G_1(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \cdots$$

en la que $G = f'(x)$, la función $G_1(h)$ se define como $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ y $a_k = \frac{-1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x)$.

- Dado que $G_1(h)$ es el valor para la derivada, el error depende de términos en potencias de h, siendo el término dominante el correspondiente a h^2.

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Usando el método de Richardson para conseguir que el término dominante del error sea aún más pequeño. Escribiendo la ecuación evaluándola en $h/2$, lo que da:

$$G = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\frac{h^2}{4} + a_4\frac{h^4}{16} + a_6\frac{h^6}{64} + \cdots$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Usando el método de Richardson para conseguir que el término dominante del error sea aún más pequeño. Escribiendo la ecuación evaluándola en $h/2$, lo que da:

$$G = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\frac{h^2}{4} + a_4\frac{h^4}{16} + a_6\frac{h^6}{64} + \cdots$$

- Restando esta ecuación multiplicada por 4 a la ecuación original, queda:

$$3G = 4G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h) - 3a_4\frac{h^4}{4} - 15a_6\frac{h^6}{16} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Usando el método de Richardson para conseguir que el término dominante del error sea aún más pequeño. Escribiendo la ecuación evaluándola en $h/2$, lo que da:

$$G = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\frac{h^2}{4} + a_4\frac{h^4}{16} + a_6\frac{h^6}{64} + \cdots$$

- Restando esta ecuación multiplicada por 4 a la ecuación original, queda:

$$3G = 4G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h) - 3a_4\frac{h^4}{4} - 15a_6\frac{h^6}{16} - \cdots$$

- despejando la derivada G queda como:

$$G = \frac{4G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h)}{3} - a_4\frac{h^4}{4} - 5a_6\frac{h^6}{16} - \cdots$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Usando una simple combinación de $G_1(h)$ y $G_1(h/2)$, se obtiene una precisión del orden de h^4, frente al orden h^2 que presenta $G_1(h)$.

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Usando una simple combinación de $G_1(h)$ y $G_1(h/2)$, se obtiene una precisión del orden de h^4, frente al orden h^2 que presenta $G_1(h)$.
- Análogamente se puede repetir el proceso tantas veces como se quiera; el siguente paso definir $G_2(h) = \frac{4G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h)}{3}$ con lo que la ecuación evaluada en h y en $h/2$ queda

$$\begin{aligned} G &= G_2(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \cdots \\ G &= G_2\left(\frac{h}{2}\right) + b_4 \frac{h^4}{16} + b_6 \frac{h^6}{64} + \cdots \end{aligned}$$

Extrapolación de Richardson. Fórmula de tres puntos

- Se puede despejar G, multiplicando la segunda ecuación por 16 y restándole la primera:

$$L = \frac{16G_2\left(\frac{h}{2}\right) - G(h)}{15} - b_6\frac{h^6}{20} - \cdots$$

que es una estimación de $f'(x)$ con precisión de orden h^6.

Generalización

- Si denotamos $G_k(h)$ una aproximación de orden $O(h^{2k})$ a $f'(x)$ entonces se tendría:

$$f'(x) = G_k(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Generalización

- Si denotamos $G_k(h)$ una aproximación de orden $O(h^{2k})$ a $f'(x)$ entonces se tendría:

$$f'(x) = G_k(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Considerando ahora $h/2$ en lugar de h se tiene:

$$f'(x) = G_k\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{c_1}{4^k} h^{2k} + \frac{c_2}{4^{k+1}} h^{2k+2} + \cdots$$

Generalización

- Si denotamos $G_k(h)$ una aproximación de orden $O(h^{2k})$ a $f'(x)$ entonces se tendría:

$$f'(x) = G_k(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots , \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Considerando ahora $h/2$ en lugar de h se tiene:

$$f'(x) = G_k\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{c_1}{4^k} h^{2k} + \frac{c_2}{4^{k+1}} h^{2k+2} + \cdots$$

- Multiplicando esta última ecuación por 4^k y restando la ecuación inicial resulta:

$$f'(x) = \frac{4^k G_k(h/2) - G_k(h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2})$$

Generalización

- Por tanto, si denotamos

$$G_{k+1} = \frac{4^k G_k(h/2) - G_k(h)}{4^k - 1}$$

Generalización

- Por tanto, si denotamos

$$G_{k+1} = \frac{4^k G_k(h/2) - G_k(h)}{4^k - 1}$$

- entonces se tiene que se cumple:

$$f'(x) = D_{k+1}(h) + O(h^{2k+2})$$

Ejemplo

- La fórmula en diferencias centrada para aproximar $f'(x_0)$ viene dada por:

$$f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{G_1(h)} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(\xi) + O(h^4)}_{\text{termino del error}}$$

Ejemplo

- La fórmula en diferencias centrada para aproximar $f'(x_0)$ viene dada por:

$$f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{G_1(h)} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(\xi) + O(h^4)}_{\text{termino del error}}$$

- Con el objetivo de generar una fórmula que elimine el término cuadrático

$$G_2(h) = G_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{G_1\left(\frac{h}{2}\right) - G_1(h)}{3}$$

$$\begin{aligned} G_2(2h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h}}{3} \\ &= \frac{8f(x+h) - 8f(x-h)}{12h} + \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{12h} \\ &= \frac{1}{12h}\left[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right] \end{aligned}$$

Integración Numérica

- Dada una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, se desea calcular

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Integración Numérica

- Dada una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, se desea calcular
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$
- La cuadratura o integración numérica consiste en obtener fórmulas aproximadas para calcular la integral $I(f)$ de f.

Integración Numérica

- Dada una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, se desea calcular
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$
- La cuadratura o integración numérica consiste en obtener fórmulas aproximadas para calcular la integral $I(f)$ de f.
- Estos métodos son de gran utilidad cuando la integral no se puede calcular por métodos analíticos.

Integración vía Interpolación Polinomial

- Una estrategia útil para calcular el valor numérico de la integral dada consiste en reemplazar f por otra función g, fácil de integrar, que aproxima a f de forma adecuada.

Integración vía Interpolación Polinomial

- Una estrategia útil para calcular el valor numérico de la integral dada consiste en reemplazar f por otra función g, fácil de integrar, que aproxima a f de forma adecuada.
- Si $f \approx g$, se deduce que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

Integración vía Interpolación Polinomial

- Una estrategia útil para calcular el valor numérico de la integral dada consiste en reemplazar f por otra función g, fácil de integrar, que aproxima a f de forma adecuada.
- Si $f \approx g$, se deduce que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

- Los polinomios son buenos candidatos para el papel de g. De hecho, g puede ser un polinomio que interpola a f en cierto conjunto de nodos.

Integración vía Interpolación Polinomial

- Supóngase que se desea calcular la integral $I(f)$. Dado una serie de nodos, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$ se inicia un proceso de interpolación de Lagrange.

Integración vía Interpolación Polinomial

- Supóngase que se desea calcular la integral $I(f)$. Dado una serie de nodos, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$ se inicia un proceso de interpolación de Lagrange.
- El polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en los nodos es:
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Integración vía Interpolación Polinomial

- Supóngase que se desea calcular la integral $I(f)$. Dado una serie de nodos, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$ se inicia un proceso de interpolación de Lagrange.
- El polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en los nodos es:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

- La integral se puede escribir entonces como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L_i(x)dx$$

Integración vía Interpolación Polinomial

- Es decir, tenemos una fórmula general que se puede emplear para cualquier f y que tiene la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

en donde

$$A_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

Regla del Trapecio

- Empleando un polinomio de grado $n = 1$ y tomamos como nodos $x_0 = a$ y $x_1 = b$, se tiene el caso más sencillo posible, en donde los polinomios de interpolación son:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{b-x}{b-a} \\
L_1(x) &= \frac{x-a}{b-a}
\end{aligned}
$$

Regla del Trapecio

- Empleando un polinomio de grado $n = 1$ y tomamos como nodos $x_0 = a$ y $x_1 = b$, se tiene el caso más sencillo posible, en donde los polinomios de interpolación son:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{b-x}{b-a} \\
L_1(x) &= \frac{x-a}{b-a}
\end{aligned}
$$

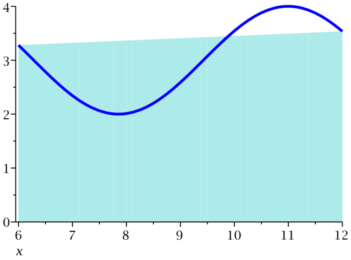
- por lo que:

$$A_0 = \int_a^b L_0(x)dx = \frac{b-a}{2} = \int_a^b L_1(x)dx = A_1$$

Regla del Trapecio

- La fórmula de cuadratura correspondiente, tomando $h = b - a$, es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$



Regla del Trapecio

- Se tiene entonces que:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + E$$

donde el error de la integración numérica E será:

$$\begin{aligned} E = \int_a^b \epsilon(x)dx &= \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)dx \end{aligned}$$

Regla del Trapecio

Teorema del Valor Medio Ponderado para Integrales

Sea $f \in C[a,b]$, g integrable en $[a,b]$ y g no cambia de signo en $[a,b]$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Regla del Trapecio

- $f''(\xi_x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y $g(x) = (x-a)(x-b)$ es integrable en $[a,b]$ y no cambia de signo en $[a,b]$.

Regla del Trapecio

- $f''(\xi_x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $g(x) = (x - a)(x - b)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo en $[a, b]$.
- Por tanto se puede aplicar TVMP, quedando:

$$E = \int_a^b \epsilon(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

Regla del Trapecio

- $f''(\xi_x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $g(x) = (x-a)(x-b)$ es integrable en $[a, b]$ y no cambia de signo en $[a, b]$.
- Por tanto se puede aplicar TVMP, quedando:

$$E = \int_a^b \epsilon(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

- Integrando la expresión anterior, se concluye que:

$$E = -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \Rightarrow |E| \leq \left|\frac{h^3}{12}M_2\right|$$

siendo M_2 el valor máximo que alcance la derivada segunda de la función en el intervalo dado $[a, b]$.

Regla del Trapecio

- $f''(\xi_x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y $g(x)=(x-a)(x-b)$ es integrable en $[a,b]$ y no cambia de signo en $[a,b]$.
- Por tanto se puede aplicar TVMP, quedando:

$$E=\int_a^b \epsilon(x)dx=\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)=\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

- Integrando la expresión anterior, se concluye que:

$$E=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)\Rightarrow |E|\leq\left|\frac{h^3}{12}M_2\right|$$

siendo M_2 el valor máximo que alcance la derivada segunda de la función en el intervalo dado $[a,b]$.

- Por tanto, se trata de una fórmula exacta para polinomios de orden uno.

Regla de Simpson

- Otra forma de obtener una estimación más exacta de un integral es con el uso de polinomios de orden superior.

Regla de Simpson

- Otra forma de obtener una estimación más exacta de un integral es con el uso de polinomios de orden superior.
- Aplicando Taylor en los punto $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$, y denotando h al espaciado entre los extremos y el punto medio.

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x - x_1)^4$$

Regla de Simpson

- Otra forma de obtener una estimación más exacta de un integral es con el uso de polinomios de orden superior.
- Aplicando Taylor en los punto $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$, y denotando h al espaciado entre los extremos y el punto medio.

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x-x_1)^4$$

- Integrando $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ queda:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + f''(x_1)\frac{h^3}{3} + \underbrace{\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx}_{E}$$

Regla de Simpson

- Por el teorema del valor medio ponderado existe $\xi \in [a, b]$, tal que

$$\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x-x_1)^4 dx$$

Regla de Simpson

- Por el teorema del valor medio ponderado existe $\xi \in [a, b]$, tal que

$$\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x - x_1)^4 dx$$

- así

$$\int_a^b (x - x_1)^4 dx = \left.\frac{(x - x_1)^5}{5}\right|_a^b$$

Regla de Simpson

- Por el teorema del valor medio ponderado existe $\xi \in [a, b]$, tal que

$$\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b (x-x_1)^4 dx$$

- así

$$\int_a^b (x-x_1)^4 dx = \left.\frac{(x-x_1)^5}{5}\right|_a^b$$

- ahora si $x_1 - a = h$, $b - x_1 = h$, entonces

$$\int_a^b (x-x_1)^4 dx = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{60}$$

Regla de Simpson

- Entonces la integral queda:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + h^3\frac{f''(x_1)}{3} + \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{60}$$

Regla de Simpson

- Entonces la integral queda:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + h^3\frac{f''(x_1)}{3} + \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{60}$$

- conocida la aproximación de $f''(x_1)$ mediante el método de Taylor expandida alrededor de x_1

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1+h) - 2f(x_1) + f(x_1-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_1)$$

sustituyendo dicha fórmula en $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Regla de Simpson

- se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = 2f(x_1)h + \frac{(f(a) - 2f(x_1) + f(b))h}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi_1)h^5}{36} + \frac{f^{(4)}(\xi)h^5}{60}$$

Regla de Simpson

- se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = 2f(x_1)h + \frac{(f(a) - 2f(x_1) + f(b))h}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi_1)h^5}{36} + \frac{f^{(4)}(\xi)h^5}{60}$$

- de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h}{3}\left[f(a) - 2f(x_1) + f(b)\right] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi)}{5}\right]$$

Regla de Simpson

- se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = 2f(x_1)h + \frac{(f(a) - 2f(x_1) + f(b))h}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi_1)h^5}{36} + \frac{f^{(4)}(\xi)h^5}{60}$$

- de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h}{3}\left[f(a) - 2f(x_1) + f(b)\right] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{3} - \frac{f^{(4)}(\xi)}{5}\right]$$

- Se puede tomar $\xi_1 = \xi$ porque ambas fórmulas provienen del mismo desarrollo de Taylor alrededor de x_1. Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$$

Regla de Simpson 3/8

- Otra regla para aproximar numéricamente la integral es, la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson.

Regla de Simpson 3/8

- Otra regla para aproximar numéricamente la integral es, la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson.
- sea

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx & f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
& + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

Regla de Simpson 3/8

- Integrando en el intervalo $[x_0, x_3]$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx & \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)dx \\ & + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)dx \\ & + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx\end{aligned}$$

Regla de Simpson 3/8

- Tomando la sustitución $x = x_0 + uh$ y como $x_i = x_0 + ih$, $i = 1; 2; 3$, entonces $x_3 = x_0 + 3h$, luego si $x = x_0$, se tiene que $u = 0$ y si $x = x_3$, entonces $x_3 = x_0 + uh$, o sea que $x_0 + 3h = x_0 + uh$, de modo que $u = 3$, además $dx = hdu$,

$$x - x_1 = x - x_0 - h = uh - h, h = h(u - 1),$$
$$x - x_2 = x - x_0 - 2h = uh - 2h = h(u - 2),$$
$$x - x_3 = x - x0 - 3h = uh - 3h = h(u - 3) \text{ y}$$
$$x_k - x_j = (k - j)h$$

Regla de Simpson 3/8

- De este modo

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx & \frac{f(x_0)}{(-h)(-2h)(-3h)} \int_0^3 h(u-1)h(u-2)h(u-3)hdu \\
& + \frac{f(x_1)}{(h)(-h)(-2h)} \int_0^3 uhh(u-2)h(u-3)hdu \\
& + \frac{f(x_2)}{(2h)(h)(-h)} \int_0^3 uhh(u-1)(u-3)hdu \\
& + \frac{f(x_3)}{(3h)(2h)(h)} \int_0^3 uhh(u-1)h(u-2)hdu
\end{aligned}
$$

Regla de Simpson 3/8

- De este modo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{f(x_0)}{(-h)(-2h)(-3h)} \int_0^3 h(u-1)h(u-2)h(u-3)hdu$$
$$+ \frac{f(x_1)}{(h)(-h)(-2h)} \int_0^3 uhh(u-2)h(u-3)hdu$$
$$+ \frac{f(x_2)}{(2h)(h)(-h)} \int_0^3 uhh(u-1)(u-3)hdu$$
$$+ \frac{f(x_3)}{(3h)(2h)(h)} \int_0^3 uhh(u-1)h(u-2)hdu$$

- luego

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) \approx \frac{-h^4 f(x_0)}{6h^3} \int_0^3 (u^3-6u^2+11u-6)du + \frac{h^4 f(x_1)}{2h^3} \int_0^3 (u^3-5u^2+6u)d$$
$$+ \frac{-h^4 f(x_2)}{2h^3} \int_0^3 (u^3-4u^2+3u)du + \frac{h^4 f(x_3)}{6h^3} \int_0^3 (u^3-3u^2+2u)du$$

Regla de Simpson 3/8

- De este modo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx -\frac{hf(x_0)}{6}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_1)}{2}\frac{9}{4} - \frac{hf(x_2)}{2}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_3)}{6}\frac{9}{4}$$

Regla de Simpson 3/8

- De este modo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx -\frac{hf(x_0)}{6}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_1)}{2}\frac{9}{4} - \frac{hf(x_2)}{2}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_3)}{6}\frac{9}{4}$$

- luego

$$\int_{x_0}^{x_3} \approx \frac{3hf(x_0)}{8} + \frac{9hf(x_1)}{8} + \frac{9hf(x_2)}{8} + \frac{3hf(x_3)}{8}$$

Regla de Simpson 3/8

- De este modo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx -\frac{hf(x_0)}{6}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_1)}{2}\frac{9}{4} - \frac{hf(x_2)}{2}\frac{-9}{4} + \frac{hf(x_3)}{6}\frac{9}{4}$$

- luego

$$\int_{x_0}^{x_3} \approx \frac{3hf(x_0)}{8} + \frac{9hf(x_1)}{8} + \frac{9hf(x_2)}{8} + \frac{3hf(x_3)}{8}$$

- así que

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

es la llamada regla de los $\frac{3}{8}$ de Simpson.

Regla de Simpson 3/8

- El análisis del error viene dado en este caso:

$$E \leq \left| \frac{-3}{80} h^5 M_4 \right| = \left| \frac{b-a}{80} h^4 M_4 \right|$$

Regla de Simpson 3/8

- El análisis del error viene dado en este caso:

$$E \leq \left| \frac{-3}{80} h^5 M_4 \right| = \left| \frac{b-a}{80} h^4 M_4 \right|$$

- por lo que, salvo constantes, el orden de precisión (h^4) es el mismo que en el Método de Simpson $\frac{1}{3}$.

Regla de Simpson 3/8

- El análisis del error viene dado en este caso:

$$E \leq \left| \frac{-3}{80} h^5 M_4 \right| = \left| \frac{b-a}{80} h^4 M_4 \right|$$

- por lo que, salvo constantes, el orden de precisión (h^4) es el mismo que en el Método de Simpson $\frac{1}{3}$.
- La principal novedad que aporta este método es que se puede aplicar en caso de tener un número de subintervalos igual a 3 (o en general a cualquier múltiplo de tres).

Fórmulas de Newton-Côtes

- 4