Resolución Numérica de Sistemas de Ecuacionesl Lineales.

José Luis Ramírez B.

December 8, 2024

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.
- La búsqueda de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un tema de gran importancia en la ciencia.

Motivación.

- En el planteamiento matemático de muchos problemas realistas, los sistemas de ecuaciones algebraicas, y de una manera especial los lineales, aparecen de manera natural.
- La búsqueda de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un tema de gran importancia en la ciencia.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.

Motivación.

- La formulación de problemas de ingeniería a menudo conduce a sistemas lineales de ecuaciones. Estos sistemas pueden llegar a tener cientos o miles de grados de libertad.
- El objetivo de este tema es desarrollar estrategias numéricas que permitan resolver sistemas de ecuaciones relativamente grandes de una manera eficiente.
- Además, se analizarán con detalle algunos métodos directos.

Motivación.

Si bien existen métodos exactos como el método de Cramer, estos son muy costosos de aplicar en situaciones donde los sistemas a resolver tienen muchas ecuaciones.
El número total de operaciones para resolver un sistema de dimensión n con este método es

$$T_C = (n+1)^2 n! - 1$$

n	T_C
5	4319
10	4×10^8
100	10^{158}

Table: Operaciones elementales del método de Cramer segun el tamaño de la matriz(n).

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)
- Necesidades de almacenamiento (memoria)

Motivación.

Desde el punto de vista numérico se buscan algoritmos eficientes en diferentes aspectos:

- Número de operaciones necesarias (tiempo CPU)
- Necesidades de almacenamiento (memoria)
- Rango de aplicabilidad (sobre que tipo de matrices se pueden aplicar)

Introducción.

Un sistema de n-ecuaciones (con coeficientes reales) en las n-incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de n ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n - b_i$$

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

A los números a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema y a los b_i términos independientes.

con $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ y b_i constantes reales, el sistema se dice lineal (con coeficientes reales); en cualquier otro caso el sistema se dice no-lineal.

A los números a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema y a los b_i términos independientes.

Si $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces se dice que C es una solución real del sistema planteado.

Si se introducen las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

el sistema se puede representar de forma más compacta por

$$Ax = b$$

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a:

1. Su tamaño
    1. Pequeños: $n \leq 300$ donde n representa el número de ecuaciones.
    2. Grandes: $n > 300$

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo a:

1. Su tamaño
    1. Pequeños: $n \leq 300$ donde n representa el número de ecuaciones.
    2. Grandes: $n > 300$
2. Su estructura
    1. Si la matriz posee pocos elementos nulos diremos que se trata de un sistema lleno.
    2. Si, por el contrario, la matriz contiene muchos elementos nulos, diremos que la matriz, y por lo tanto, el sistema lineal es disperso o *sparce*.

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Superiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

1. Matrices de este tipo son las denominadas
   - Tridiagonales

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Superiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

   - Triangulares Inferiores

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m \times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m\times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Teorema

Si x_0 es una solución de $Ax = b$, el conjunto de soluciones de la ecuación está dado por $x_0 + ker(A)$.

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema: Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales

La ecuación $Ax = b$ admite solución si y sólo si

$$rango(A|b) = rango(A)$$

Corolario

Si $A^{m\times n}$ tiene rango m, $Ax = b$ siempre tiene solución

Teorema

Si x_0 es una solución de $Ax = b$, el conjunto de soluciones de la ecuación está dado por $x_0 + ker(A)$.

Corolario

Una solución de $Ax = b$ es única si y sólo si $ker(A) = \emptyset$.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.
- Existe una matriz cuadrada A^{-1} (matriz inversa) tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Existencia y unicidad de soluciones

Considérese una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ tiene solución.
- Si $Ax = b$ tiene solución, ésta es única.
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Las columnas (filas) de la matriz A son linealmente independientes.
- Existe una matriz cuadrada A^{-1} (matriz inversa) tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- La matriz A tiene determinante no nulo

$$|A| = \det(A) \neq 0$$

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

- No es eficiente (demasiadas operaciones).

La primera opción que se plantea es

$$x = A^{-1}b$$

- No es eficiente (demasiadas operaciones).
- Si el determinante de A es próximo a cero, el error de redondeo puede ser muy grande, y esto es dificil de estimar numéricamente

$$\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$$

Se requieren métodos numéricos alternativos

Se requieren métodos numéricos alternativos

- métodos directos, son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes. Suelen ser algoritmos “complicados de implementar”

Se requieren métodos numéricos alternativos

- métodos directos, son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes. Suelen ser algoritmos “complicados de implementar”
- métodos indirectos o iterativos, tienen asociado un error de truncamiento y se usan preferiblemente para matrices grandes ($n >> 1000$) cuando los coeficientes de A son la mayoría nulos (matrices sparse). Algoritmos sencillos de implementar que requiere aproximación inicial y que en general no tiene porqué converger (requieren análisis de convergencia previo).

Métodos Directos

- **CASO 1**: La matriz A de coeficientes del sistema $Ax = b$ es triangular (superior o inferior) con todas sus componentes sobre la diagonal principal no nulas.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,i}x_i + \cdots + a_{1.n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,i}x_i + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,i}x_i + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Como $a_{n,n} \neq 0$, se puede despejar x_n de la última ecuación, y se obtiene:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

conocido el valor de x_n, se puede emplear la penúltima ecuación para conocer x_{n-1}

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

conocidos x_n y x_{n-1}, se obtiene de la antepenúltima ecuación

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - (a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n)}{a_{n-2,n-2}}$$

En general, conocidos $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$, se obtiene:

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} x_k}{a_{i,i}} \qquad \forall i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$$

El método anterior para determinar la solución del sistema se denomina sustitución regresiva o hacia atrás.

Si la matriz de coeficientes del sistema es triangular inferior, para resolver el sistema podemos proceder de manera similar al caso anterior, pero empezando por despejar x_1 de la primera ecuación. El procedimiento en este caso se denomina sustitución progresiva o hacia adelante.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,i-1}x_{i-1} + a_{n,i}x_i + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

- **CASO 2**: La matriz A de coeficientes, del sistema lineal $Ax = b$, es tal que no se requieren intercambios de filas para culminar con éxito la eliminación Gaussiana. Digamos que el sistema $Ax = b$ tiene la forma

$$\left\{\begin{array}{lccc} E_1 : & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ E_2 : & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \\ E_j : & a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,j}x_j + \cdots + a_{j,n}x_n & = & b_j \\ & \vdots & & \\ E_i : & a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ & \vdots & & \\ E_n : & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

1. Se elimina el coeficiente de x_1 en cada una de las ecuaciones $E_2, E_3, \ldots, E_n$ para obtener un sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\right) E_1\right) \to E_i^{(1)}, \quad \forall \ i = 2, 3, \ldots, n$$

El proceso de eliminación Gaussiana sin Pivoteo consiste en lo siguiente:

1. Se elimina el coeficiente de x_1 en cada una de las ecuaciones $E_2, E_3, \ldots, E_n$ para obtener un sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\right) E_1\right) \rightarrow E_i^{(1)}, \quad \forall\ i = 2, 3, \ldots, n$$

2. Se elimina el coeficiente de x_2 en cada una de las ecuaciones $E_3^{(1)}, E_4^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)}$, para obtener un sistema equivalente $A^{(2)}x = b^{(2)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i^{(1)} - \left(\frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}\right) E_2^{(1)}\right) \rightarrow E_i^{(2)}, \quad \forall\ i = 3, 4, \ldots, n$$

1. En general, eliminados los coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$, se elimina el coeficiente de x_j en cada una de las ecuaciones, para obtener un sistema equivalente $A^{(j)}x = b^{(j)}$, realizando las operaciones elementales

$$\left(E_i^{(j-1)} - \left(\frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}}\right) E_j^{(j-1)}\right) \rightarrow E_i^{(j)}, \quad \forall\ i = j+1, \ldots, n$$

debe ocurrir que $a_{j,j} \neq 0$.

Los números

$$m_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}} \quad \forall \; j = 1, \ldots, n-1, \; i = j+1, \ldots, n$$

se llaman multiplicadores.
El sistema resultante tendrá entonces la forma triangular superior con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto, se puede resolver mediante sustitución regresiva.

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$
output: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que A es triangular superior.

for $k \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**
  for $i \leftarrow k + 1$ **to** n **do**
    $factor \leftarrow \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$
    $a_{i,k} \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow k + 1$ **to** n **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - factor * a_{k,j}$
    end
    $b_i \leftarrow b_i - factor * b_k$
  end
end

Algorithm 1: Algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo.

Utilice la eliminación Gaussiana sin pivoteo para resolver el sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Pivoteo Parcial

Ejemplo de la necesidad de pivoteo parcial, en una aritmética de 4 dígitos con redondeo correcto

$$\begin{cases} 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 10,00$ y $x_2 = 1,000$.

Pivoteo Parcial

- Si se realizan los pasos de eliminación Gaussiana se obtiene el siguiente resultado $\tilde{x}_1 = -10,00$ y $\tilde{x}_2 = 1,001$, el cual difiere bastante de la solución real, en el valor x_1.

Pivoteo Parcial

- Si se realizan los pasos de eliminación Gaussiana se obtiene el siguiente resultado $\tilde{x}_1 = -10,00$ y $\tilde{x}_2 = 1,001$, el cual difiere bastante de la solución real, en el valor x_1.
- El error tan grande de la solución numérica de x_1, resulta del error pequeño de $0,001$ al resolver para x_2.

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.
- Pivote $=\max(|0.003|;|5.291|) = 5.291$, por tanto se realiza un intercambio de filas quedando el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{cases}$$

Pivoteo Parcial

- Ahora, si se elige como pivote el máximo entre $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$.
- Pivote =max(|0.003|; |5.291|) = 5.291, por tanto se realiza un intercambio de filas quedando el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{cases}$$

- cuya solución aproximada es $\tilde{x}_2 = 1 = x_2$ y $\tilde{x}_1 = 10 = x_1$.

Pivoteo Parcial

- Por tanto para cada paso de eliminación gaussiana tenemos que:

EGPP

$$\text{Paso } k \left\{ \begin{array}{l} \text{Elegir } p \text{ como el primero tal que} \\ |a_{p,k}^{(k-1)}| = \max |a_{i,k}^{(k-1)}| \;\; k \leq i \leq n \end{array} \right.$$

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

- Solución exacta con 4 decimales correctos $x_1 = x_2 = 0.9999$.

Pivoteo Parcial

- Sea el Sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$

- Solución exacta con 4 decimales correctos $x_1 = x_2 = 0.9999$.
- No hay pivoteo, ya que $|a_{1,1}| = |a_{2,1}|$. Se obtiene $\tilde{x}_2 = 1$ y $\tilde{x}_1 = 0$.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$S_1 = \max(|1|, |10^4|) = 10^4$$
$$S_2 = \max(|1|, |10^{-4}|) = 1$$

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$S_1 = \max(|1|, |10^4|) = 10^4$$
$$S_2 = \max(|1|, |10^{-4}|) = 1$$

- se obtiene el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteo Escalado

- Si se realiza pivoteo escalado de la siguiente manera.
- se busca el máximo por fila y luego se divide cada fila por dicho factor de escalamiento para luego aplicar pivoteo parcial.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \max(|1|, |10^4|) = 10^4 \\
S_2 &= \max(|1|, |10^{-4}|) = 1
\end{aligned}
$$

- se obtiene el siguiente sistema:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)
$$

- y a este nuevo sistema lineal, equivalente al sistema original, se aplica la estrategia de pivoteo parcial.

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.
- $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 10^4 x_2 & = & 10^4 \\ x_1 + 10^{-4} x_2 & = & 1 \end{array} \right. \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array} \right)$$

Pivoteo Completo

- Es otra estrategia de pivoteo en el cual se intercambian filas y columnas en busca del máximo de la matriz y colocarlo como pivote.
- $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + 10^4 x_2 & = & 10^4 \\ x_1 + 10^{-4} x_2 & = & 1 \end{array}\right. \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 10^4 & 10^4 \\ 1 & 10^{-4} & 1 \end{array}\right)$$
- $$\max(|1|, |10^4|, |1|, |10^{-4}|) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^4 & 1 & 10^4 \\ 10^{-4} & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteo Completo

- Entonces la estrategia de pivoteo completo consiste en
  1. $$\text{Paso } k \left\{ \begin{array}{l} \text{elegir } p \text{ y } q \text{ como los menores tales que} \\ \left| a_{p,q}^{(k-1)} \right| = \max \left| a_{i,j}^{(k-1)} \right| \quad k \leq i, j \leq n \end{array} \right.$$
  2. Intercambiar filas k y p.
  3. Intercambiar columnas k y q.

Práctica

- Resuelva el siguiente sistema lineal con truncamiento a 5 dígitos
$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 45 \\ -3x_1 - 2.249x_2 + 7x_3 = 1.751 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$
- Usando Eliminación Gaussiana sin Pivoteo y luego con las diferentes estrategias de pivoteo compare los resultados obtenidos.

Conteo de Operaciones

$$\sum_{i=1}^{m} cf(i) = c\sum_{i=1}^{m} f(i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f(i) + g(i) = \sum_{i=1}^{m} f(i) + \sum_{i=1}^{m} g(i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = m$$

$$\sum_{i=k}^{m} 1 = \sum_{i=k-k+1}^{m-k+1} 1 = \sum_{i=1}^{m-k+1} 1 = m - k + 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} i = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = 1 + 4 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Conteo de Operaciones

Dadas estas definiciones, se puede hacer el conteo de operaciones para el algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo.

$$\text{Total de Operaciones} = (+/-) + (\times/\div)$$

Algoritmo de Eliminación Gaussiana sin Pivoteo.

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n}$

output: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que A es triangular superior.

for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**
    $factor \leftarrow \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$
    $a_{i,k} \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**
      $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - factor * a_{k,j}$
    end
    $b_i \leftarrow b_i - factor * b_k$
  end
end

Práctica

- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de multiplicación de dos matrices triangulares superiores.
- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de solución de una sistema tridiagonal de ecuaciones lineales.
- Calcular el número de operaciones en el algoritmo de Gauss-Jordan (cuando la matriz del sistema se reduce a la matriz identidad).

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$
- El sistema lineal anterior tiene como solución un vector de componentes unitarias.

Condicionamiento de Sistemas.

- Sea el sistema lineal $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior tiene como solución un vector de componentes unitarias.
- El sistema lineal resultante en realidad no será ese, sino que será un sistema lineal perturbado tanto en la matriz del sistema como en el término independiente. El sistema lineal perturbado podría tener el siguiente aspecto.

Condicionamiento de Sistemas.

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}$$

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 23.02 \\ 33.03 \\ 31.04 \end{pmatrix}$$

y por tanto ΔA y Δb, las perturbaciones, tendrían los siguientes valores:

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

- Cómo varía la solución del sistema lineal cuando se perturba la matriz del sistema y cuando se perturba sólo el término independiente?.

Condicionamiento de Sistemas.

- Cómo varía la solución del sistema lineal cuando se perturba la matriz del sistema y cuando se perturba sólo el término independiente?.
- Resolviendo primero el sistema lineal:

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.36 \\ 1.35 \\ 0.79 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta x = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -1.36 \\ 0.35 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

Condicionamiento de Sistemas.

Se ha perturbado el término independiente

$$\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 3.03 \times 10^{-4}$$

y esta perturbación induce una variación en la solución

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.36$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{ccc} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

Usando la propiedad para normas matriciales:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

El sistema está bien condicionado si cuando Δb es pequeña, Δx también lo es. Observese que:

$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + A(\Delta x) & = & b + \Delta b \\ Ax & = & b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A(\Delta x) & = & \delta b \\ \Delta x & = & A^{-1}(\Delta b) \end{array}\right.$$

Usando la propiedad para normas matriciales:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

De la solución exacta, $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$, lo que implica que:

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

De las dos relaciones anteriores se llega a que:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ representa el error relativo en los resultados, y $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ el error relativo en los datos.

De las dos relaciones anteriores se llega a que:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

donde $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ representa el error relativo en los resultados, y $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ el error relativo en los datos.
De la relación, parece deducirse que el número $\|A\| \|A^{-1}\|$ es el factor determinante de la relación, ya que si es pequeño se tendrá el efecto deseado, y si no, ocurre lo contrario.

Definición

Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada y A una matriz invertible. Se denomina número de condición de la matriz A respecto de la norma $\|\cdot\|$ a la expresión:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que
$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$
- El concepto de número de condición de una matriz se generaliza a cualquier matriz A (no necesariamente cuadrada) de rango completo mediante la expresión
$$\kappa(A) = \|A\|\|A^\dagger\|$$
donde $A^\dagger$ es la matriz pseudoinversa de la matriz A.

- Si los datos de un sistema $Ax = b$ son exactos con la precisión de la máquina, el error relativo de la solución cumple que
$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\epsilon$$
- El concepto de número de condición de una matriz se generaliza a cualquier matriz A (no necesariamente cuadrada) de rango completo mediante la expresión
$$\kappa(A) = \|A\|\|A^\dagger\|$$
donde $A^\dagger$ es la matriz pseudoinversa de la matriz A.
- El número de condición de una matriz A es un indicador del error de amplificación que produce en un vector x el someterlo a la transformación que define dicha matriz A.

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.
- Comparando la solución de

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

- Estudiando la sensibilidad de un sistema de ecuaciones a pequeñas perturbaciones en los coeficientes de la matriz.
- Comparando la solución de

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

- De la segunda igualdad, como $Ax = b$, haciendo $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$, despreciando el producto $\Delta A \cdot \Delta x$, resulta que

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\|$$

- Expresión que también se puede escribir como

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- Expresión que también se puede escribir como

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- Así pues, el error relativo que resulta de perturbar ligeramente los coeficientes de la matriz del sistema $Ax = b$ está también acotado en términos del número de condición de la matriz A.

Condicionamiento de una Matriz.

Por su definición está claro que el condicionamiento de una matriz depende de la norma elegida. Una propiedad interesante es que el condicionamiento tiene como cota inferior a la unidad. Esto es consecuencia de que la norma inducida de la matriz identidad es siempre 1.

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

Para cualquier norma subordinada se verifican las siguientes propiedades del condicionamiento de una matriz:

1. $cond(I) = 1$.
2. $cond(A) \geq 1$.
3. $cond(A) = cond(A^{-1})$.
4. $cond(kA) = cond(A) \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Para cualquier norma subordinada se verifican las siguientes propiedades del condicionamiento de una matriz:

1. $cond(I) = 1$.
2. $cond(A) \geq 1$.
3. $cond(A) = cond(A^{-1})$.
4. $cond(kA) = cond(A) \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Otra propiedad muy interesante es la que relaciona el condicionamiento con el radio espectral de la matriz del sistema caso de que esta sea simétrica. Si la matriz es simétrica su norma 2, es su radio espectral. Por tanto:

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

Práctica.

- Considere los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

  y

$$Bx = c \rightarrow \begin{bmatrix} 0.66 & 3.34 \\ 1.99 & 10.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

  La solución de ambos es el vector $[1, 1]^T$
- Si se introduce una perturbación $[-0.04; -0.06]^T$ en el término independiente, calcule el error que se genera en la solución.
- Halle el condicionamiento de cada sistema en norma 2.

Práctica.

- Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\varepsilon > 0$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$
- La matriz de Hilbert

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n-1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(n-1) & 1/n & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

es un ejemplo clásico de una matriz mal condicionada. En MATLAB se puede construir fácilmente usando el comando `hilb(n)`. Escriba un script de MATLAB para calcular los valores de $\kappa_2(H_n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$. Dibuje los resultados en escala logarítmica (comando `semilogy`).

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.
- Sea $L^{-1} = N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$, entonces $L^{-1}A = U \Rightarrow A = LU$, ya que el determinante de una transformación fila es ± 1.

Descomposición de Matrices

- Al aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ se realizan transformaciones elementales para conseguir triangularizar la matriz del sistema.
- La matriz triangular superior U obtenida viene determinada por el producto de un número finito de transformaciones filas $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$ aplicadas a la matriz A.
- Sea $L^{-1} = N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_2N_1$, entonces $L^{-1}A = U \Rightarrow A = LU$, ya que el determinante de una transformación fila es ± 1.
- Además L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.
- El hecho de que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$ dice que $L^{-1}L' = I$.

Descomposición de Matrices

- La factorización es única ya que de existir otra tal que $A = L'U' = LU$ con $L' \neq L$ y $U' \neq U$, se tendría que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$.
- Por ser L triangular inferior con unos en la diagonal, el producto $L^{-1}L'$ también es una matriz del mismo tipo.
- Análogamente, el producto UU'^{-1} resulta triangular superior.
- El hecho de que $L^{-1}L' = UU'^{-1}$ dice que $L^{-1}L' = I$.
- Por lo tanto $L^{-1}L' = I$ por lo que $L = L'$ y por tanto $U = U'$, es decir, la factorización es única.

Práctica.

- Halle la descomposición LU de la siguiente matriz:

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:
- $Lz = b \Rightarrow$ sustitución hacia delante

Descomposición de Matrices

Entonces para resolver el sistema $Ax = b$, sabiendo que A posee descomposición LU, debemos hacer lo siguiente:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b$, llamando z al producto Ux tenemos que:
- $Lz = b \Rightarrow$ sustitución hacia delante
- $Ux = z \Rightarrow$ sustitución hacia atrás.

Definición

Se dice que una matriz A es diagonalmente dominante si

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Definición

Se dice que una matriz A es diagonalmente dominante si

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \;\; \forall i = 1, \ldots, n$$

Teorema

Si A es estrictamente diagonal dominante entonces A admite una descomposición LU que se obtiene mediante el proceso de eliminación Gaussiana.

Descomposición de Matrices

- $a_{i,j} = \sum_{p=1}^{r} l_{i,p} u_{p,j} \;\; r = \min(i,j)$
- $a_{k,j} = \sum_{p=1}^{k} l_{k,p} u_{p,j} \;\; j \geq k$
- $a_{i,k} = \sum_{p=1}^{k} l_{i,p} u_{p,k} \;\; i > k$

Descomposición de Matrices

- $$\text{Diagonal } k = j = 1 \Rightarrow a_{1,1} = l_{1,1}u_{1,1}$$

  $$a_{k,j} = l_{k,1}u_{1,j} + l_{k,2}u_{2,j} + \cdots + l_{k,k}u_{k,j}$$

  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - l_{k,1}u_{1,j} - l_{k,2}u_{2,j} - \cdots - l_{k,k-1}u_{k-1,j}$$

  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j} \text{ como } k = j$$

  $$\Rightarrow l_{k,k}u_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,k}$$

Descomposición de Matrices

- $$\begin{aligned}
&j > k \\
&a_{k,j} = l_{k,1}u_{1,j} + l_{k,2}u_{2,j} + \cdots + l_{k,k}u_{k,j} \\
&\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - l_{k,1}u_{1,j} - l_{k,2}u_{2,j} - \cdots - l_{k,k-1}u_{k-1,j} \\
&\Rightarrow l_{k,k}u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j} \\
&\Rightarrow u_{k,j} = \frac{a_{k,j} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j}}{l_{k,k}}
\end{aligned}$$

Descomposición de Matrices

- $$i > k$$
  $$a_{i,k} = l_{i,1}u_{1,k} + l_{i,2}u_{2,k} + \cdots + l_{i,k}u_{k,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k}u_{k,k} = a_{i,k} - l_{i,1}u_{1,k} - l_{i,2}u_{2,k} - \cdots - l_{i,k-1}u_{k-1,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k}u_{k,k} = a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}$$
  $$\Rightarrow l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}}{u_{k,k}}$$

Dadas estas definiciones podemos escribir el algoritmo de factorización LU

input : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
output: Matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que L es TI y Matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que U es TS.
for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
  /*Especificar un valor distinto de cero para $l_{k,k}$ ó $u_{k,k}$ y calcular el otro a partir de él:*/

$$l_{k,k}u_{k,k} \leftarrow a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,k}$$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$u_{k,j} \leftarrow \frac{a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}u_{p,j}}{l_{k,k}}$$

  end
  for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$l_{i,k} \leftarrow \frac{a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}u_{p,k}}{u_{k,k}}$$

  end
end

Algorithm 2: Algoritmo de factorización LU.

Descomposición de Matrices

- Si se hace $l_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Doolittle, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.

Descomposición de Matrices

- Si se hace $l_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Doolittle, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.
- Si se hace $u_{k,k} = 1$, se da paso al algoritmo de Crout, haciendo mínimas modificaciones al algoritmo LU.

Factorización LU con Pivoteo

- La forma práctica en la que se implementa el método de eliminación Gaussiana suele incorporar los pivoteos, al menos el pivoteo parcial para no producir resultados incorrectos. ¿Cómo se altera la factorización LU si se quiere tener en cuenta el pivoteo?

Factorización LU con Pivoteo

- La forma práctica en la que se implementa el método de eliminación Gaussiana suele incorporar los pivoteos, al menos el pivoteo parcial para no producir resultados incorrectos. ¿Cómo se altera la factorización LU si se quiere tener en cuenta el pivoteo?
- Cada una de las transformaciones elementales que se obtienen en la factorización LU son de la forma:

$$N_i = I - \alpha_i \otimes e_i^t$$

donde

Factorización LU con Pivoteo

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i+1,i}^{(i)}/a_{i,i}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{n,i}^{(i)}/a_{i,i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

y e_i es el elemento i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

- Estas matrices de permutación P_i actúan siempre permutando dos filas i, j con $j > i$.

Factorización LU con Pivoteo

- Al utilizar eliminación Gaussiana con pivoteo en cada paso se introduce una matriz de permutación (que puede ser la identidad) de modo que:

$$N_{n-1}P_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1P_1A = U$$

- Estas matrices de permutación P_i actúan siempre permutando dos filas i, j con $j > i$.
- Veamos que definiendo $P = P_{n-1}\cdots P_1$ la eliminación Gaussiana con pivoteo proporciona la factorización LU de PA.

Factorización LU con Pivoteo

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}$ regular, entonces existe una matriz de permutación P y dos matrices L y U triangular inferior y superior respectivamente que satisfacen

$$PA = LU$$

La matriz L tiene todos los elementos de su diagonal iguales a unos (matriz triangular inferior unitaria).

Factorización LU con Pivoteo

Demostración

Del proceso de eliminación Gaussiana se tiene $N_{n-1}N_{n-2}\cdots N_1 A = U$, así:

$$A = P_1 N_1^{-1} P_2 N_2^{-1} \cdots P_{n-2} N_{n-2}^{-1} P_{n-1} N_{n-1}^{-1} U$$

Premultiplicando por $P = P = P_{n-1}\cdots P_1$ se obtiene

$$PA = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_2 P_1 P_1 N_1^{-1} P_2 N_2^{-1} \cdots P_{n-2} N_{n-2}^{-1} P_{n-1} N_{n-1}^{-1} U$$

como $P_1 P_1 = I$ y $P_2 N_1^{-1} P_2$ es triangular inferior y $P_{n-1}\cdots P_2 N_1^{-1} P_2 N_2^{-1} \cdots P_{n-1} N_{n-1}^{-1}$ también lo es, se concluye que PA posee descomposición LU como se quería demostrar.

Factorización LU con Pivoteo

Lema

La matriz A admite una factorización LU si y sólo si se cumple que $\det(A_k) \neq 0, k = 1, \ldots, n.$

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$
- $Lz = Pb$, hallando z por sustitución progresiva.

Factorización LU con Pivoteo

Por lo tanto para resolver el sistema $Ax = b$ premultiplicando por P, queda $PAx = Pb$, y dado que $PA = LU$, entonces:

- $LUx = Pb$, haciendo $z = Ux$
- $Lz = Pb$, hallando z por sustitución progresiva.
- $Ux = z$, hallando x por sustitución regresiva.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.
- Es conocido que toda matriz simétrica y definida positiva tiene sus autovalores reales y positivos, además, en la factorización LU todos los pivotes son reales y positivos.

Factorización de Cholesky

- Una vez visto el método de Gauss basado en la factorización LU vamos a estudiar otro métodos que se basan en otros tipos de descomposiciones de la matriz del sistema.
- Es conocido que toda matriz simétrica y definida positiva tiene sus autovalores reales y positivos, además, en la factorización LU todos los pivotes son reales y positivos.

Proposición (Criterio de Sylvester de matriz definida positiva)

Sea A una matriz real simétrica $n \times n$. Dicha matriz es definida positiva si y sólo si todos sus menores principales son positivos.

Factorización de Cholesky

Teorema

Si A es una matriz real, simétrica y positiva definida, entonces tiene una factorización única $A = LL^t$ en donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Factorización de Cholesky

Teorema

Si A es una matriz real, simétrica y positiva definida, entonces tiene una factorización única $A = LL^t$ en donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Demostración

Partiendo de que $A = LU$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
LU = A = A^T = (LU)^T = U^T L^T &\Rightarrow LU = U^T L^T \Rightarrow \\
LU(L^T)^{-1} = U^T L^T (L^T)^{-1} &\Rightarrow LU(L^T)^{-1} = U^T \\
L^{-1} LU(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T &\Rightarrow U(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T \\
U(L^T)^{-1} = D \Rightarrow U(L^T)^{-1} L^T = DL^T &\Rightarrow U = DL^T \Rightarrow A = LDL^T
\end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

Sabemos que A es positiva definida por tanto LDL^t es también positiva definida

Definición

Una matriz $A_{n\times n}$ es positiva definida si:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } x \neq 0 / x^t A x > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$
- Definiendo un vector $y = L^T x$. Como L es no singular (porque A es definida positiva, y la factorización LDL^T existe), la transformación de x a y es biyectiva. Esto significa que para cada x no nulo existe un y no nulo, y viceversa.

Factorización de Cholesky

- Dado que $A = LDL^T$ entonces $x^T(LDL^T)x > 0$
- Utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices:
$$(x^T L)D(L^T x) > 0$$
- Definiendo un vector $y = L^T x$. Como L es no singular (porque A es definida positiva, y la factorización LDL^T existe), la transformación de x a y es biyectiva. Esto significa que para cada x no nulo existe un y no nulo, y viceversa.
- La desigualdad se convierte en:

$$y^T Dy > 0$$

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$

donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$
donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.
- La suma de términos de la forma $d_{ii}y_i^2$ (donde y_i^2 siempre es no negativo) es estrictamente mayor que cero para cualquier vector y no nulo.

Factorización de Cholesky

- Dado que D es una matriz diagonal, $y^T Dy$ se puede expresar como:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 d_{ii} > 0$$
donde d_{ii} son los elementos de la diagonal de D e y_i son las componentes del vector y.
- La suma de términos de la forma $d_{ii}y_i^2$ (donde y_i^2 siempre es no negativo) es estrictamente mayor que cero para cualquier vector y no nulo.
- Esto solo es posible si todos los d_{ii} son positivos. Si hubiera un $d_{ii} \leq 0$, se podría elegir un vector y donde y_i sea la única componente no nula y la desigualdad no se cumpliría.

Factorización de Cholesky

- Por lo anterior todos los elementos de la diagonal de D son positivos, entonces podemos escribir $D = D^{1/2}D^{1/2}$, entonces tenemos que los elementos de $D^{1/2} = \sqrt{d_{i,i}}$, quedando de esta manera:

$$A = LDL^t = LD^{1/2}D^{1/2}L^t = \tilde{L}\tilde{L}^t \text{ con } \tilde{L} = LD^{1/2}$$

- El proceso señalado anteriormente es conocido como factorización de Cholesky.

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$a_{k,k} = \qquad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i}$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_{k,k} = &\quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\ a_{k,k} = &\quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2 \end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
a_{k,k} = & \quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\
a_{k,k} = & \quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2 \\
\Rightarrow l_{k,k}^2 = & \quad a_{k,k} - l_{k,1}^2 - \cdots - l_{k,k-1}^2
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

Del producto matricial se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
a_{k,k} = & \quad l_{k,1}l_{1,k} + l_{k,2}l_{2,k} + \cdots + l_{k,k}l_{k,k} \text{ como } l_{i,j} = l_{j,i} \\
a_{k,k} = & \quad l_{k,1}^2 + l_{k,2}^2 + \cdots + l_{k,k}^2 \\
\Rightarrow l_{k,k}^2 = & \quad a_{k,k} - l_{k,1}^2 - \cdots - l_{k,k-1}^2 \\
\Rightarrow l_{k,k} = & \quad \sqrt{a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}^2}
\end{aligned}$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
&i > k \\
&a_{i,k} = \qquad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = \quad & l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = \quad & l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
l_{i,k}l_{k,k} = \quad & a_{i,k} - l_{i,1}l_{k,1} - l_{i,2}l_{k,2} - \cdots - l_{i,k-1}l_{k,k-1}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

$$
\begin{aligned}
& i > k \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{1,k} + l_{i,2}l_{2,k} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
a_{i,k} = & \quad l_{i,1}l_{k,1} + l_{i,2}l_{k,2} + \cdots + l_{i,k}l_{k,k} \\
l_{i,k}l_{k,k} = & \quad a_{i,k} - l_{i,1}l_{k,1} - l_{i,2}l_{k,2} - \cdots - l_{i,k-1}l_{k,k-1} \\
\Rightarrow l_{i,k} = & \quad \frac{a_{i,k} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p}l_{k,p}}{l_{k,k}}
\end{aligned}
$$

Factorización de Cholesky

input : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y Positiva Definida.
output: Matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que L es triangular inferior de modo que $A = LL^t$.

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

$$l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p}^2}$$

for $i \leftarrow k+1$ **to** n **do**

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p} l_{k,p}}{l_{k,k}}$$

end

end

Algorithm 3: Algoritmo de factorización de Cholesky.

Factorización QR

- Al resolver un sistema $Ax = b$ mediante la factorización LU (o la de Cholesky), se transforma el sistema en $Ax = LUx = b$ para hacer $Ux = L^{-1}b$ que es un sistema triangular que se resuelve por sustitución regresiva.

Factorización QR

- Al resolver un sistema $Ax = b$ mediante la factorización LU (o la de Cholesky), se transforma el sistema en $Ax = LUx = b$ para hacer $Ux = L^{-1}b$ que es un sistema triangular que se resuelve por sustitución regresiva.
- Sin embargo, la matriz del nuevo sistema es $U = L^{-1}A$ y dado que L^{-1} no es una matriz unitaria (ortogonal en el caso real) el número de condición de la matriz del sistema ha cambiado pudiendo estar peor condicionada que la matriz A del sistema original.

Factorización QR

- Se presenta otro tipo de factorización $A = QR$ donde R es, al igual que U, una matriz triangular superior, pero donde Q va a ser una matriz unitaria.

Factorización QR

- Se presenta otro tipo de factorización $A = QR$ donde R es, al igual que U, una matriz triangular superior, pero donde Q va a ser una matriz unitaria.
- Por lo que el sistema $Ax = b$ lo transformaremos en $Rx = Q^{-1}b = Q^t b$ y, a diferencia del método LU, el número de condición de la matriz del sistema no cambia.

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

- Por lo tanto

$$cond(A) = cond(QR) = cond(R)$$

Factorización QR

- Dado que $cond(A) \geq 1$ para cualquier matriz en general, se puede observar que las transformaciones ortogonales son más estables.
- En particular, si A es regular, entonces:

$$\|A\| = \|Q\|\|R\| \text{ y } \|A^{-1}\| = \|R^{-1}\|\|Q^T\|$$

- Por lo tanto

$$cond(A) = cond(QR) = cond(R)$$

- La Factorización QR desacopla el problema $Ax = b$ en dos subproblemas, uno de ellos ($Qy = b$) no posee amplificación del error, mientras que el otro ($Rx = y$) posee la mínima amplificación del error permitida por el problema original.

Solución: Factorización QR

Teorema:

Sea A una matriz $m \times n$, de rango $n \leq m$. Entonces existe una matriz ortogonal Q de $m \times m$ $(Q^{-1} = Q^T)$ y una matriz triangular superior R de $m \times n$, cuyas $m - n$ últimas filas son nulas, tales que

$$A = QR$$

$$A_{4\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}}_{[Q\tilde{Q}]} \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}} = QR$$

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde a_i representa a su columna i-ésima.

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  donde a_i representa a su columna i-ésima.

- Aplicando Gram-Schmidt existe un sistema ortonormal $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ tal que $\mathcal{L}\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, por lo que $y_{k+1} \in \mathcal{L}^{\perp}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.

Factorización QR

- Considérese la matriz regular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  donde a_i representa a su columna i-ésima.

- Aplicando Gram-Schmidt existe un sistema ortonormal $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ tal que $\mathcal{L}\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} = \mathcal{L}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, por lo que $y_{k+1} \in \mathcal{L}^{\perp}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.
- Sea Q la matriz cuyas columnas son los vectores y_i, $Q = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Factorización QR

- Entonces,

$$Q^t A = \begin{pmatrix} y_1^t \\ y_2^t \\ \vdots \\ y_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\iff Q^t A = \begin{pmatrix} \langle a_1, y_1 \rangle & \langle a_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, y_1 \rangle \\ \langle a_1, y_2 \rangle & \langle a_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, y_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, y_n \rangle & \langle a_2, y_n \rangle & \cdots & \langle a_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$

Factorización QR

- Entonces,

$$Q^tA = \begin{pmatrix} y_1^t \\ y_2^t \\ \vdots \\ y_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\iff Q^tA = \begin{pmatrix} \langle a_1, y_1\rangle & \langle a_2, y_1\rangle & \cdots & \langle a_n, y_1\rangle \\ \langle a_1, y_2\rangle & \langle a_2, y_2\rangle & \cdots & \langle a_n, y_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, y_n\rangle & \langle a_2, y_n\rangle & \cdots & \langle a_n, y_n\rangle \end{pmatrix}$$

- Como $y_{k+1} \in \mathcal{L}^{\perp}\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, se tiene que $\langle a_i, y_j\rangle = 0$ si, y sólo si, $i < j$, por lo que la matriz Q^tA es una triangular superior.

Factorización QR

$$Q^t A = R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

Factorización QR

$$Q^t A = R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

Como las columnas de Q constituyen un sistema ortonormal de vectores, Q es unitaria, es decir $Q^t Q = I$, por lo que $A = QR$.

Factorización QR

Teorema

Sea A una matriz $m \times n$ com $m \geq n$. Suponiendo que A es de rango completo en sus columnas. Entonces existe una única matriz ortogonal Q $m \times n$ $(Q^t Q = I_n)$ y una única matriz triangular superior R $n \times n$ con entradas en la diagonal positivas $r_{i,i} > 0$ tal que $A = QR$.

$$A_{4\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}}_{[Q\tilde{Q}]} \underbrace{\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}} = QR$$

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
  - Gram-Schmidt Modificado

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
  - Gram-Schmidt Modificado
  - Reflexiones de Householder

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
    - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
    - Gram-Schmidt Modificado
    - Reflexiones de Householder
    - Rotaciones de Givens

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
  - Gram-Schmidt Modificado
  - Reflexiones de Householder
  - Rotaciones de Givens
- Conteo de operaciones: $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
  - Gram-Schmidt Modificado
  - Reflexiones de Householder
  - Rotaciones de Givens
- Conteo de operaciones: $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$
- Almacenamiento requerido: $mn + \frac{n(n+1)}{2}$

Factorización QR

- Algoritmos para el cálculo de la factorización QR
  - Gram-Schmidt (Numéricamente inestable)
  - Gram-Schmidt Modificado
  - Reflexiones de Householder
  - Rotaciones de Givens
- Conteo de operaciones: $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$
- Almacenamiento requerido: $mn + \frac{n(n+1)}{2}$
- Puede requerir pivoteo en el caso de rango deficiente

Proceso de Gram-Schmidt

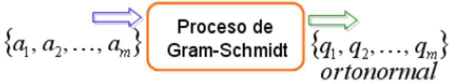
- En líneas generales el proceso de Gram-Schmidt consiste en, dado un conjunto de vectores linealmente independientes, construir un conjunto de vectores ortonormales.

Proceso de Gram-Schmidt

- En líneas generales el proceso de Gram-Schmidt consiste en, dado un conjunto de vectores linealmente independientes, construir un conjunto de vectores ortonormales.
- Denotando por: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con $a_i \in \mathbb{R}^m$ al conjunto li de entrada y por $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ con $q_i \in \mathbb{R}^m$ al conjunto de salida.

Proceso de Gram-Schmidt

- En líneas generales el proceso de Gram-Schmidt consiste en, dado un conjunto de vectores linealmente independientes, construir un conjunto de vectores ortonormales.
- Denotando por: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con $a_i \in \mathbb{R}^m$ al conjunto li de entrada y por $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ con $q_i \in \mathbb{R}^m$ al conjunto de salida.



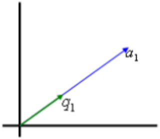
Proceso de Gram-Schmidt

- Paso 1: Tomando $\hat{q}_1 = a_1$, se tiene que

Proceso de Gram-Schmidt

- Paso 1: Tomando $\hat{q}_1 = a_1$, se tiene que

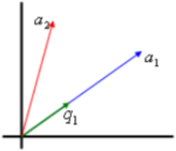
$$q_1 = \frac{\hat{q}_1}{\|\hat{q}_1\|}$$



Se tiene así que el conjunto $\{q_1\}$ es ortonormal.

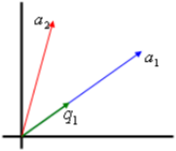
Proceso de Gram-Schmidt

- Paso 2: El objetivo es hallar q_2 tal que sea ortogonal a q_1, y además q_2 debe ser de tamaño 1. Es claro que el ángulo entre a_1 y a_2 no necesariamente es de 90.

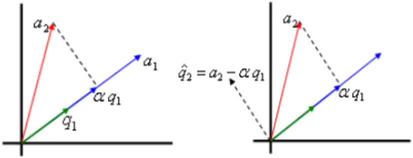


Proceso de Gram-Schmidt

- Paso 2: El objetivo es hallar q_2 tal que sea ortogonal a q_1, y además q_2 debe ser de tamaño 1. Es claro que el ángulo entre a_1 y a_2 no necesariamente es de 90.



- Considerando la proyección ortogonal de a_2 sobre q_1. Observese que el vector $\hat{q}_2 = a_2 - \alpha q_1$ es ortogonal a q_1



Proceso de Gram-Schmidt

- Por lo tanto, α se debe elegir tal que $\hat{q}_2$ sea ortogonal a q_1, es decir, debe ser tal que $\langle q_1, \hat{q}_2 \rangle$ sea igual a cero:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q_1, \hat{q}_2 \rangle = \langle q_1, a_2 - \alpha q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \langle q_1, \alpha q_1 \rangle = \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \langle q_1, q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \end{aligned}$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Por lo tanto, α se debe elegir tal que $\hat{q}_2$ sea ortogonal a q_1, es decir, debe ser tal que $\langle q_1, \hat{q}_2 \rangle$ sea igual a cero:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q_1, \hat{q}_2 \rangle = \langle q_1, a_2 - \alpha q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \langle q_1, \alpha q_1 \rangle = \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \langle q_1, q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \end{aligned}$$

- De donde se obtiene que $\alpha = \langle q_1, a_2 \rangle$. Así que

$$\hat{q}_2 = a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Por lo tanto, α se debe elegir tal que $\hat{q}_2$ sea ortogonal a q_1, es decir, debe ser tal que $\langle q_1, \hat{q}_2 \rangle$ sea igual a cero:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q_1, \hat{q}_2 \rangle = \langle q_1, a_2 - \alpha q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \langle q_1, \alpha q_1 \rangle = \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \langle q_1, q_1 \rangle \\ &= \langle q_1, a_2 \rangle - \alpha \end{aligned}$$

- De donde se obtiene que $\alpha = \langle q_1, a_2 \rangle$. Así que

$$\hat{q}_2 = a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1$$

- El vector q_2 será la normalización de $\hat{q}_2$, es decir,

$$q_2 = \frac{\hat{q}_2}{\|\hat{q}_2\|}$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Paso j: Tomando a_j con $3 \leq j \leq n$ del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El objetivo es hallar q_j de tamaño 1 tal que $\{q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}, q_j\}$ también sea un conjunto ortonormal. Del paso anterior se tiene construido al conjunto ortonormal $\{q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_j &= a_j - \underbrace{\langle q_1, a_j \rangle}_{r_{1j}} q_1 - \underbrace{\langle q_2, a_j \rangle}_{r_{2j}} q_2 - \cdots - \underbrace{\langle q_{j-1}, a_j \rangle}_{r_{j-1,j}} q_{j-1} \\
q_j &= \frac{\hat{q}_j}{\|\hat{q}_j\|} = \frac{\hat{q}_j}{r_{jj}}
\end{aligned}
$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Se puede observar de las relaciones anteriores que

$$\hat{q}_j = r_{jj} q_j$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Se puede observar de las relaciones anteriores que

$$\hat{q}_j = r_{jj} q_j$$

- Mientras que por otro lado

$$a_j = \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i + r_{jj} q_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} q_i$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Si se consideran los vectores del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ son las columnas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y que además $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ son las columnas de la matriz $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces esta última expresión es de mucha utilidad para obtener la factorización QR de A. Para identificar la matriz triangular R bastan unas pocas observaciones.

Proceso de Gram-Schmidt

- Si se consideran los vectores del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ son las columnas de la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y que además $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ son las columnas de la matriz $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ entonces esta última expresión es de mucha utilidad para obtener la factorización QR de A. Para identificar la matriz triangular R bastan unas pocas observaciones.
- Para $j = 1$

$$a_1 = r_{11}q_1 = r_{11}q_1 + 0q_2 + \cdots + 0q_n = Q \begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Qr_1$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Para $j = 2$

$$a_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2 + 0q_3 + \cdots + 0q_n = Q \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Qr_2$$

- Para $j = k$

$$a_k = r_{1k}q_1 + \cdots + r_{kk}q_k = r_{1k}q_1 + \cdots + r_{kk}q_k + 0q_{k+1} + \cdots + 0q_n = Q \begin{bmatrix} r_{1k} \\ \vdots \\ r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Qr_k$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Para $j = n$

$$a_n = r_{1n}q_1 + \cdots + r_{nn}q_n = Q \begin{bmatrix} r_{1n} \\ \vdots \\ r_{nn} \end{bmatrix} = Qr_n$$

Proceso de Gram-Schmidt

- Para $j = n$

$$a_n = r_{1n}q_1 + \cdots + r_{nn}q_n = Q \begin{bmatrix} r_{1n} \\ \vdots \\ r_{nn} \end{bmatrix} = Qr_n$$

- Finalmente, si se escriben todas estas expresiones de forma matricial se obtiene que

$$A = [a_1 a_2 \cdots a_n] = [Qr_1 Qr_2 \cdots Qr_n] = Q[r_1 r_2 \cdots r_n] = QR$$

Algoritmo

Código 1

```
function [Q,R]=my_gram_schmidt(A)
m=size(A,1); n=size(A,2); Q=zeros(m,n); R=zeros(n);
for j=1:n
   v=A(:,j);
   for i=1:j-1
    R(i,j) = Q(:,i)'*A(:,j);
    v = v - R(i,j)*Q(:,i);
   end
   R(j,j) = norm(v);
   Q(:,j) = v/R(j,j);
end
```

Gram Schmidt Modificado

- En la práctica, la pérdida de ortogonalidad de los vectores q_i que se van calculando en el proceso de Gram Schmidt es más que evidente, debido a errores de redondeo y de cancelación si, por ejemplo, alguno de los vectores columna a_j está próximo al subespacio generado por los vectores anteriores $q_1, \ldots q_{j-1}$.

Gram Schmidt Modificado

- En la práctica, la pérdida de ortogonalidad de los vectores q_i que se van calculando en el proceso de Gram Schmidt es más que evidente, debido a errores de redondeo y de cancelación si, por ejemplo, alguno de los vectores columna a_j está próximo al subespacio generado por los vectores anteriores $q_1, \ldots q_{j-1}$.
- En ese caso, los sumandos de la expresión $a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle q_i, a_j \rangle q_i$ pueden llegar a ser muy pequeños o muy distantes unos de otros, si bien el resultado final puede ser muy pequeño, por lo que el error numérico que se va produciendo es relativamente grande. Al dividir el resultado por su norma (también muy pequeña) los errores se amplificarán aún más.

Gram Schmidt Modificado

- En 1966 Rice modificó el método haciendo que en una etapa k, en vez de sustraer del vector a_k sus coeficientes sobre todos los $k-1$ vectores q_i ya calculados, q_k se hace igual a a_k al principio y luego se le van sustrayendo su proyección en q_1, pasando a ser el nuevo q_k el resultado, el cual se proyecta luego en q_2, y así sucesivamente en cada uno de los $k-1$ q_i anteriores.

Gram Schmidt Modificado

- En 1966 Rice modificó el método haciendo que en una etapa k, en vez de sustraer del vector a_k sus coeficientes sobre todos los $k-1$ vectores q_i ya calculados, q_k se hace igual a a_k al principio y luego se le van sustrayendo su proyección en q_1, pasando a ser el nuevo q_k el resultado, el cual se proyecta luego en q_2, y así sucesivamente en cada uno de los $k-1$ q_i anteriores.
- El resultado con esta simple nueva disposición de los cálculos es indiscutiblemente mejor numéricamente.

Algoritmo

Código 2

```
function [Q,R]=my_gram_schmidt_mod(A)
m=size(A,1); n=size(A,2); Q=zeros(m,n); R=zeros(n);
for j=1:n
   v=A(:,j);
   for i=1:j-1
    R(i,j) = Q(:,i)'*v;
    v = v - R(i,j)*Q(:,i);
   end
   R(j,j) = norm(v);
   Q(:,j) = v/R(j,j);
end
```

Ejemplo

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con vectores $a_1 = (1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 0, 1)^T$ y $a_3 = (0, 1, 1)^T$

Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt se obtienen los siguientes resultados:

Ejemplo

$$\hat{q}_1 = a_1 = (1,1,0)^T$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_1 &= a_1 = (1,1,0)^T \\
q_1 &= \frac{\hat{q}_1}{\|\hat{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_1 &= a_1 = (1,1,0)^T \\
q_1 &= \frac{\hat{q}_1}{\|\hat{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\
\hat{q}_2 &= a_2 - \langle a_2, q_1 \rangle q_1 = (1,0,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\
&= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_1 &= a_1 = (1,1,0)^T \\
q_1 &= \frac{\hat{q}_1}{\|\hat{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\
\hat{q}_2 &= a_2 - \langle a_2, q_1\rangle q_1 = (1,0,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\
&= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T \\
q_2 &= \frac{\hat{q}_2}{\|\hat{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\hat{q}_3 &= a_3 - \langle a_3, q_1\rangle q_1 - \langle a_3, q_2\rangle q_2 = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\hat{q}_3 &= a_3 - \langle a_3, q_1\rangle q_1 - \langle a_3, q_2\rangle q_2 = (0,1,1)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T \\
q_3 &= \frac{\hat{q}_3}{\|\hat{q}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T
\end{aligned}$$

Ejemplo

Entonces la matriz Q obtenida es

$$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz R obtenida es

$$R = \begin{pmatrix} \langle a_1, q_1 \rangle & \langle a_2, q_1 \rangle & \langle a_3, q_1 \rangle \\ 0 & \langle a_2, q_2 \rangle & \langle a_3, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle a_3, q_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio

1. Implemente la factorización QR via Gram Schmidt.
2. Ejecute ambos códigos con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Escriba en la ventana de comandos

```
>> Q*R
>> Q'*Q - eye(3)
```

4. Realice las mismas comprobaciones para la siquiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \qquad \epsilon = 10^{-9}$$

Reflexión de Householder

- Considerese un espacio vectorial de dimensiones n definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y se denotará por $\mathbb{K}^n$ (En general $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$).

Reflexión de Householder

- Considerese un espacio vectorial de dimensiones n definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y se denotará por $\mathbb{K}^n$ (En general $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$).
- Dado un vector $u \in \mathbb{K}^n$, se define la transformación H de Householder asociada al vector u a la que viene definida por la matriz:

$$H = \begin{cases} I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u} & \text{si } u \neq 0 \\ I \in \mathbb{K}^{n \times n} & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Reflexión de Householder

Proposición

La transformación de Householder H asociada al vector $u \in \mathbb{K}^n$ posee las siguientes propiedades:

Reflexión de Householder

Proposición

La transformación de Householder H asociada al vector $u \in \mathbb{K}^n$ posee las siguientes propiedades:

1. H es hermítica ($H^* = H$).

Reflexión de Householder

Proposición

La transformación de Householder H asociada al vector $u \in \mathbb{K}^n$ posee las siguientes propiedades:

1. H es hermítica $(H^* = H)$.
2. H es unitaria $(H^*H = HH^* = I)$.

Reflexión de Householder

Proposición

La transformación de Householder H asociada al vector $u \in \mathbb{K}^n$ posee las siguientes propiedades:

1. H es hermítica $(H^* = H)$.
2. H es unitaria $(H^*H = HH^* = I)$.
3. $H^2 = I$ o lo que es igual, $H^{-1} = H$.

Reflexión de Householder

Demostración:

Reflexión de Householder

Demostración:

1. $H^* = \left(I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u}\right)^* = \left(I - 2\dfrac{u^*u}{u^*u}\right) = I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u} = I - 2\dfrac{(uu^*)^*}{u^*u} = I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u} = H.$

Reflexión de Householder

Demostración:

1. $H^* = \left(I - 2\frac{uu^*}{u^*u}\right)^* = \left(I - 2\frac{u^*u}{u^*u}\right) = I - 2\frac{uu^*}{u^*u} =$
$I - 2\frac{(uu^*)^*}{u^*u} = I - 2\frac{uu^*}{u^*u} = H.$
2. $HH^* = HH = \left(I - 2\frac{uu^*}{u^*u}\right)\left(I - 2\frac{uu^*}{u^*u}\right) = I - 4\frac{uu^*}{u^*u} +$
$4\frac{uu^*uu^*}{(u^*u)^2} = I - 4\frac{uu^*}{u^*u} + 4\frac{u(u^*u)u^*}{(u^*u)^2} = I - 4\frac{uu^*}{u^*u} + 4\frac{uu^*}{u^*u} = I$

Reflexión de Householder

Demostración:

1. $H^* = \left(I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u}\right)^* = \left(I - 2\dfrac{u^*u}{u^*u}\right) = I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u} =$
$I - 2\dfrac{(uu^*)^*}{u^*u} = I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u} = H.$
2. $HH^* = HH = \left(I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u}\right)\left(I - 2\dfrac{uu^*}{u^*u}\right) = I - 4\dfrac{uu^*}{u^*u} +$
$4\dfrac{uu^*uu^*}{(u^*u)^2} = I - 4\dfrac{uu^*}{u^*u} + 4\dfrac{u(u^*u)u^*}{(u^*u)^2} = I - 4\dfrac{uu^*}{u^*u} + 4\dfrac{uu^*}{u^*u} = I$
3. De los dos puntos anteriores se deduce que
$H^2 = HH = HH^* = I.$

Reflexión de Householder

Interpretación Geométrica en $\mathbb{R}^n$

- Sean $u \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|u\|_2 = 1$ y H la transformación de Householder asociado a él:

$$H = I - 2uu^t$$

Reflexión de Householder

Interpretación Geométrica en $\mathbb{R}^n$

- Sean $u \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|u\|_2 = 1$ y H la transformación de Householder asociado a él:

$$H = I - 2uu^t$$

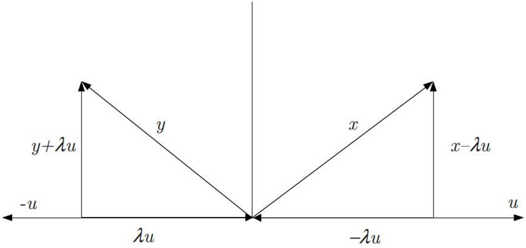
- Si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} Hx &= (I - 2uu^t)x = x - 2uu^t x = x - 2u\langle x, u\rangle = \\ &= x - 2u(\|x\|\|u\| \cos(\alpha)) = x - 2u(\|x\| \cos(\alpha)) = \\ &= x - 2\lambda u \qquad \text{con} \qquad \lambda = \|x\| \cos(\alpha) \end{aligned}$$

donde α representa el ángulo que forman los vectores x y u.

Reflexión de Householder

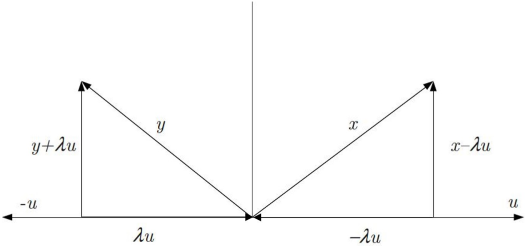
- Sea y el vector simétrico de x respecto del hiperplano perpendicular a u.



Un vector x y su transformado $y = Hx$.

Reflexión de Householder

- Sea y el vector simétrico de x respecto del hiperplano perpendicular a u.



Un vector x y su transformado $y = Hx$.

- Se puede observar que

$$y + \lambda u = x - \lambda u \Longleftrightarrow y = x - 2\lambda u = Hx$$

Reflexión de Householder

- Dado un vector $x \neq 0$, es sencillo hallar la reflexión de Householder $H = I - 2uu^t$ que anula las entradas de x con excepción de la primera entrada, es decir:

$$Hx = x - 2(u^t x)u = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}^t = ce_1$$

Reflexión de Householder

- Dado un vector $x \neq 0$, es sencillo hallar la reflexión de Householder $H = I - 2uu^t$ que anula las entradas de x con excepción de la primera entrada, es decir:

$$Hx = x - 2(u^t x)u = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}^t = ce_1$$

- Dado que H es ortogonal, $|c| = \|Hx\| = \|x\|$, se puede escribir:

$$u = \frac{1}{2u^t x}(x - ce_1)$$

es decir, u debe ser paralelo al vector $\tilde{u} = x \pm \|x\|e_1$, por lo tanto

$$u = \frac{x \pm \|x\|e_1}{\|x \pm \|x\|e_1\|}$$

Reflexión de Householder

- Independientemente de la elección del signo se mantiene que u satisface $Hx = ce_1$ siempre que $\tilde{u} \neq 0$.

Reflexión de Householder

- Independientemente de la elección del signo se mantiene que u satisface $Hx = ce_1$ siempre que $\tilde{u} \neq 0$.
- empleando la siguiente expresión $\tilde{u} = x + sign(x_1)\|x\|e_1$ para evitar la cancelación en la primera componente de $\tilde{u}$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 + sign(x_1)\|x\| \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ con } u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$$

Reflexión de Householder

- Independientemente de la elección del signo se mantiene que u satisface $Hx = ce_1$ siempre que $\tilde{u} \neq 0$.
- empleando la siguiente expresión $\tilde{u} = x + sign(x_1)\|x\|e_1$ para evitar la cancelación en la primera componente de $\tilde{u}$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 + sign(x_1)\|x\| \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ con } u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$$

- El correspondiente vector de Householder es

$$H(x) = I - 2uu^t = I - \frac{2\tilde{u}\tilde{u}^t}{\|\tilde{u}\|^2}$$

Reflexión de Householder

- Dada una matriz $A_{m\times n}$, se puede obtener una matriz triangular superior multiplicando por la izquierda de manera apropiada por matrices de Householder. Asumiendo que ninguna de las columnas de A es completamente cero.

Reflexión de Householder

- Dada una matriz $A_{m\times n}$, se puede obtener una matriz triangular superior multiplicando por la izquierda de manera apropiada por matrices de Householder. Asumiendo que ninguna de las columnas de A es completamente cero.
- Esto puede llevarse a cabo con una matriz de Householder, la cual denotamos por $H(a_1)$. De esta manera:

$$A_1 = H(a_1)A = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \underline{*} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \underline{*} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Denotemos $H_1 = H(a_1)$ por simplicidad.

Reflexión de Householder

- Tomando la segunda columna de $A_1 = H(a_1)A$ y obviando la primera primera entrada, para ello consideraremos el vector $\tilde{a}_2$ de tamaño $n-1$.

Reflexión de Householder

- Tomando la segunda columna de $A_1 = H(a_1)A$ y obviando la primera primera entrada, para ello consideraremos el vector $\tilde{a}_2$ de tamaño $n-1$.
- Si $\tilde{a}_2$ posee elementos no nulos por debajo de la entrada superior, entonces la reflexión de Householder $H_2 = H(\tilde{a}_2)$ viene dada por la siguiente matriz.

$$H_2 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & H(\tilde{a}_2) & & \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

Reflexión de Householder

Y al realizar el producto se obtiene el siguiente resultado

$$A_2 = H_2 A_1 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \underline{*} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \underline{*} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \underline{*} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Reflexión de Householder

- Considerando la siguiente columna de A_2 la cual contiene elementos no nulos debajo de la tercera fila. Obviando las dos entradas superiores y considerando al vector $\tilde{a}_3$ de tamaño $n-2$

Reflexión de Householder

- Considerando la siguiente columna de A_2 la cual contiene elementos no nulos debajo de la tercera fila. Obviando las dos entradas superiores y considerando al vector $\tilde{a}_3$ de tamaño $n-2$
- Se puede obtener el reflector de Householder $H(\tilde{a}_3) \in \mathbb{R}^{n-2}$, y multiplicando a A_2 por la izquierda con

$$H_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & H(\tilde{a}_3) & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

obteniendo como resultado la mattriz $A_3 = H_3 A_2$ triangular superior en sus primeras tres columnas.

Reflexión de Householder

- A lo sumo en $(n-1)$ pasos se obtiene una matriz triangular superior R, producto de la aplicación de matrices de reflexión de Householder, se tiene entonces que:

$$H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2H_1A = R$$

Reflexión de Householder

- A lo sumo en $(n-1)$ pasos se obtiene una matriz triangular superior R, producto de la aplicación de matrices de reflexión de Householder, se tiene entonces que:

$$H_{n-1}H_{n-2}\cdots H_2H_1A = R$$

- Las matrices H_i son matrices ortogonales, por lo tanto:

$$A = QR$$

con

$$Q = H_1H_2\cdots H_{n-2}H_{n-1}$$

Ejemplo:

Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante reflexiones de Householder.

Ejemplo:

Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante reflexiones de Householder.

La primera columna de A es $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo:

Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante reflexiones de Householder.

La primera columna de A es $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Por lo que el correspondiente vector de Householder es

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con norma cuadrada $\|\tilde{u}\|^2 = 10 + 2\sqrt{5}$

Ejemplo:

Por lo tanto:

$$H_1 = H(a_1) = I - \frac{2\tilde{u}\tilde{u}^t}{10 + 2\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Por lo tanto:

$$H_1 = H(a_1) = I - \frac{2\tilde{u}\tilde{u}^t}{10 + 2\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

El próximo vector columna es

$$\tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cuya norma es $\|\tilde{a}_2\| = \sqrt{\dfrac{61}{5}}$

Ejemplo:

El próximo vector columna es

$$\tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cuya norma es $\|\tilde{a}_2\| = \sqrt{\dfrac{61}{5}}$ y el correspondiente vector de Householder es

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{\dfrac{61}{5}} \\ -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.492 \\ -1.788 \end{pmatrix}$$

cuya norma cuadrada es $\|\tilde{u}\|^2 = 45.346$.

Ejemplo:

Por lo tanto:

$$H_2 = H(\tilde{a}_2) = I - \frac{2\tilde{u}\tilde{u}^t}{45.346} = \begin{pmatrix} -0.8589 & 0.5121 \\ 0.5121 & 0.8589 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz de Householder 3×3 es

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8589 & 0.5122 \\ 0 & 0.5122 & 0.8589 \end{pmatrix}$$

cuya aplicación a A_1 es

$$A_2 = H_2 A_1 = \begin{pmatrix} -2.2361 & -0.8944 & -2.2361 \\ 0 & -3.4928 & -2.8630 \\ 0 & 0 & -0.8962 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Esta es la matriz R de la factorización QR. Para obtener Q se computa

$$Q = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} -0.4472 & -0.4581 & -0.7682 \\ 0 & -0.8589 & 0.5122 \\ -0.8944 & 0.2290 & 0.3841 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la factorización QR de A es

$$A = QR = \begin{pmatrix} -0.4472 & -0.4581 & -0.7682 \\ 0 & -0.8589 & 0.5122 \\ -0.8944 & 0.2290 & 0.3841 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.2361 & -0.8944 & -2.2361 \\ 0 & -3.4928 & -2.8630 \\ 0 & 0 & -0.8962 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Código

```
function [Q,R]=my_householder_QR(A)
m=size(A,1); n=size(A,2); Q=eye(m); R=A; I=eye(m);
for j=1:n
   x = R(j:m,j);
   v = -sign(x(1))*norm(x)*eye(m-j+1,1)-x;
   if norm(v)>0
    v = v/norm(v);
    P = I;
    P(j:m,j:m) = P(j:m,j:m)-2*v*v';
    R = P*R;
    Q = Q*P;
   end
end
```

Rotaciones de Givens

- La descomposición QR también puede ser calculada mediante una serie de rotaciones de Givens.

Rotaciones de Givens

- La descomposición QR también puede ser calculada mediante una serie de rotaciones de Givens.
- Cada rotación anula un elemento por debajo de la diagonal de la matriz, para formar la matriz R.

Rotaciones de Givens

- La descomposición QR también puede ser calculada mediante una serie de rotaciones de Givens.
- Cada rotación anula un elemento por debajo de la diagonal de la matriz, para formar la matriz R.
- La concatenación de todas las matrices de rotación de Givens conforman la matriz ortogonal Q.

Rotaciones de Givens

- La descomposición QR también puede ser calculada mediante una serie de rotaciones de Givens.
- Cada rotación anula un elemento por debajo de la diagonal de la matriz, para formar la matriz R.
- La concatenación de todas las matrices de rotación de Givens conforman la matriz ortogonal Q.
- Al igual que en Householder, la idea es calcular matrices ortogonales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ usando rotaciones de Givens tales que: $A^{(1)} = Q_1 A$ tiene ceros debajo de la entrada $(1, 1)$ en la primera columna.

Rotaciones de Givens

- La descomposición QR también puede ser calculada mediante una serie de rotaciones de Givens.
- Cada rotación anula un elemento por debajo de la diagonal de la matriz, para formar la matriz R.
- La concatenación de todas las matrices de rotación de Givens conforman la matriz ortogonal Q.
- Al igual que en Householder, la idea es calcular matrices ortogonales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ usando rotaciones de Givens tales que: $A^{(1)} = Q_1 A$ tiene ceros debajo de la entrada $(1,1)$ en la primera columna.
- Luego construir Q_2 tal que $A^{(2)} = Q_2 A^{(1)}$ tenga ceros debajo de la posición $(2,2)$ en la segunda columna y así sucesivamente hasta $A^{(s)} = Q_s A^{(s-1)}$.

Descomposición QR

Una matriz de la forma

$$J(i,j,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & & i & j & & \\ & & & & \downarrow & \downarrow & & \end{array} & \text{columnas} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow i \\ filas \\ \leftarrow j \end{array} \end{array}$$

donde $c^2 + s^2 = 1$ es denominada matriz de Givens, para un cierto θ.

Rotaciones de Givens

Interpretación Geométrica.

Rotaciones de Givens

Interpretación Geométrica.

- La matriz $J(i, j, \theta)$ rota un par de ejes coordenados en ángulo θ en el plano (i, j).

Rotaciones de Givens

Interpretación Geométrica.

- La matriz $J(i,j,\theta)$ rota un par de ejes coordenados en ángulo θ en el plano (i,j).
- La matriz $J(i,j,\theta)$ es comunmente conocida como una rotación de Givens o rotación en el plano (i,j).

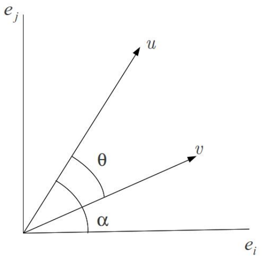


Figure: Un vector u y su transformado v por rotación.

Rotaciones de Givens

- De la gráfica se puede observar que $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ y $v = (\cos(\alpha - \theta), \sin(\alpha - \theta))$.

Rotaciones de Givens

- De la gráfica se puede observar que $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ y $v = (\cos(\alpha - \theta), \sin(\alpha - \theta))$.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \theta) &= \cos(\alpha)\cos(-\theta) - \sin(\alpha)\sin(-\theta) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)(-\sin(\theta)) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Rotaciones de Givens

- De la gráfica se puede observar que $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ y $v = (\cos(\alpha - \theta), \sin(\alpha - \theta))$.

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha - \theta) &= \cos(\alpha)\cos(-\theta) - \sin(\alpha)\sin(-\theta) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)(-\sin(\theta)) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha - \theta) &= \sin(\alpha)\cos(-\theta) + \cos(\alpha)\sin(-\theta) \\
&= \sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)(-\sin(\theta)) \\
&= \sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Rotaciones de Givens

- Por lo tanto

$$v = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \theta) \\ \sin(\alpha - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotaciones de Givens

- Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
v &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) \\ \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta)+\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \sin(\alpha)\cos(\theta)-\cos(\alpha)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

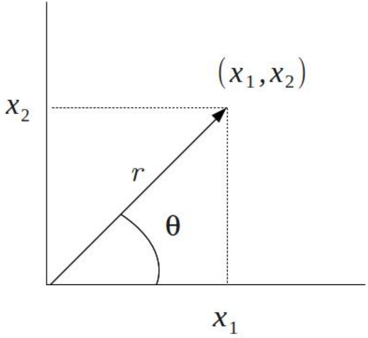
Rotaciones de Givens

- Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
v &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) \\ \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta)+\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \sin(\alpha)\cos(\theta)-\cos(\alpha)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow v &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} u
\end{aligned}
$$

Rotaciones de Givens

- Para la construcción de la matriz $J(i, j, \theta)$, sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Construcción de la Matriz $J(i, j, \theta)$.

Rotaciones de Givens

De la figura se pude observar que:

$$\cos(\theta) = \frac{x_1}{r} \qquad \sin(\theta) = \frac{x_2}{r}$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 = 1$$

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Rotaciones de Givens

- Por lo tanto:

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

Rotaciones de Givens

- Por lo tanto:

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

- La matriz $J(1,2,\theta)$ es tal que:

$$J(1,2,\theta)x = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es múltiplo de } e_1 \text{ en } \mathbb{R}^2$$

Rotaciones de Givens

- Rotaciones de Givens pueden ser aplicadas de manera sistemática a un par de filas de la matriz A y así anular elementos hasta obtener una matriz triangular superior R.

Rotaciones de Givens

- Rotaciones de Givens pueden ser aplicadas de manera sistemática a un par de filas de la matriz A y así anular elementos hasta obtener una matriz triangular superior R.
- Elementos por debajo de la subdiagonal pueden ser anulados bajo distinto orden, pero se deben preservar los ceros realizados.

Rotaciones de Givens

- Rotaciones de Givens pueden ser aplicadas de manera sistemática a un par de filas de la matriz A y así anular elementos hasta obtener una matriz triangular superior R.
- Elementos por debajo de la subdiagonal pueden ser anulados bajo distinto orden, pero se deben preservar los ceros realizados.
- Cada rotación debe ser aplicada a todos los elementos de las filas seleccionadas, no solo a las entradas que determinan c y s

Rotaciones de Givens

- Rotaciones de Givens pueden ser aplicadas de manera sistemática a un par de filas de la matriz A y así anular elementos hasta obtener una matriz triangular superior R.
- Elementos por debajo de la subdiagonal pueden ser anulados bajo distinto orden, pero se deben preservar los ceros realizados.
- Cada rotación debe ser aplicada a todos los elementos de las filas seleccionadas, no solo a las entradas que determinan c y s
- Una vez obtenida la triangular superior, el producto de las matrices de rotación determina la matriz ortogonal Q de modo que $QR = A$

Rotaciones de Givens

El cálculo de los valores de c y s puede causar overflow o underflow, y para su cálculo se comparan los valores x_1 y x_2 seleccionados de la siguiente manera

Rotaciones de Givens

El cálculo de los valores de c y s puede causar overflow o underflow, y para su cálculo se comparan los valores x_1 y x_2 seleccionados de la siguiente manera

1. Si $|x_2| \geq |x_1|$, entonces

$$t = \frac{x_1}{x_2}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad c = st$$

Rotaciones de Givens

El cálculo de los valores de c y s puede causar overflow o underflow, y para su cálculo se comparan los valores x_1 y x_2 seleccionados de la siguiente manera

1. Si $|x_2| \geq |x_1|$, entonces

$$t = \frac{x_1}{x_2}, \qquad s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad c = st$$

2. Si $|x_2| < |x_1|$, entonces

$$t = \frac{x_2}{x_1}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad s = ct$$

Rotaciones de Givens

- Ejemplo: Sea $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Rotaciones de Givens

- Ejemplo: Sea $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- En este caso $|x_1| = 1 > |x_2| = 1/2$ entonces:

$$t = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1/2}{1} = 1/2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad s = ct = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Rotaciones de Givens

- Ejemplo: Sea $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- En este caso $|x_1| = 1 > |x_2| = 1/2$ entonces:

$$t = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1/2}{1} = 1/2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad s = ct = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Así

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rotaciones de Givens

- Ejemplo: Sea $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- En este caso $|x_1| = 1 > |x_2| = 1/2$ entonces:

$$t = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1/2}{1} = 1/2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad s = ct = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Así

$$J(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Efectivamente

$$J(1,2,\theta)x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Código

```
function [c,s]=givcero(x)
if abs(x(2))>abs(x(1))
   t = x(1)/x(2);
   s = 1/sqrt(1+t*t);
   c = s*t;
else
   t = x(2)/x(1);
   c = 1/sqrt(1+t*t);
   s = c*t;
end
```

Ejercicio

Halle las constantes c y s de la matriz de Givens que al premultiplicarla por el vector

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

produce un cero en la segunda componente del vector x.

Premultiplicación de una matriz por una de Givens

- Cuando una matriz A se premultiplica por una matriz de Givens $G(i, j, \theta)$ el único efecto es en las filas i y j de la matriz A. Las nuevas filas son una combinación lineal de las anteriores.

Premultiplicación de una matriz por una de Givens

- Cuando una matriz A se premultiplica por una matriz de Givens $G(i, j, \theta)$ el único efecto es en las filas i y j de la matriz A. Las nuevas filas son una combinación lineal de las anteriores.
- La fila i es c veces la fila i más s veces la fila j

Premultiplicación de una matriz por una de Givens

- Cuando una matriz A se premultiplica por una matriz de Givens $G(i, j, \theta)$ el único efecto es en las filas i y j de la matriz A. Las nuevas filas son una combinación lineal de las anteriores.
- La fila i es c veces la fila i más s veces la fila j
- La fila j es $-s$ veces la fila i más c veces la fila j

Algoritmo

Dada una matriz A de orden $m \times n$, las constantes c y s y los índices i y j tal que $1 \leq i < j \leq m$, entonces el siguiente algoritmo superpone A con $G(i, j, \theta)A$

Código

```
function [A]=givmult(A,i,j,c,s)
a1 = A(i,:);
a2 = A(j,:);
A(i,:)  = c*a1 + s*a2;
A(j,:)  = -s*a1 + c*a2;
```

Descomposición QR basada en Givens

Sea A una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se aplica una rotación a las filas m y $m-1$ para hacer cero al elemento $(m,1)$

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix} \to G^1_{m-1,m}A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \to \\ \to \end{array} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Descomposición QR basada en Givens

Se continúa con las filas $m-1$ y $m-2$ para hacer cero al elemento $(m-1,1)$

$$G^1_{m-1,m}A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix} \rightarrow G^1_{m-2,m}A = \begin{matrix} \\ \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Descomposición QR basada en Givens

Se continúa con las filas $m-1$ y $m-2$ para hacer cero al elemento $(m-1,1)$

$$G^1_{m-1,m}A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix} \to G^1_{m-2,m}A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \to \\ \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Se continúa el proceso sobre la columna 1 hasta llegar a las filas 1 y 2

$$G^1_{1,2}\cdots G^1_{m-2,m-1}G^1_{m-1,m}A = \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Descomposición QR basada en Givens

Se sigue con la columna 2, empezando desde abajo hasta la diagonal

$$
G^1_{1,2}\cdots G^1_{m-1,m}A=\begin{pmatrix} x & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \cdots \Rightarrow G^2_{2,3}\cdots G^1_{m-1,m}A \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x\\ 0 & x & x & x & x\\ 0 & 0 & x & x & x\\ 0 & 0 & x & x & x\\ 0 & 0 & x & x & x\\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix}
$$

Descomposición QR basada en Givens

El proceso se repite para cada una de las columnas hasta la última

$$G^n_{m-1,m}\cdots G^1_{m-1,m}A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así $R = Q^T A$, donde Q^T es el producto de todas las matrices de rotación.

Descomposición QR basada en Givens

Código

```
function [Q,R]=qr_Giv(A)
m=size(A,1); n=size(A,2); Q=eye(m);
for j=1:n
   for i=m:-1:j+1
     [c,s] = givcero([A(i-1,j),A(i,j)]);
     A = givmult(A,i-1,i,c,s);
     Q = givmult(Q,i-1,i,c,s);
   end
end
Q = Q'; R = A;
```

Ejemplo

- Ejemplo: Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante rotaciones de Givens.

Ejemplo

- Ejemplo: Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante rotaciones de Givens.
- Se define matriz $J(1,3,\theta)$ que aplicado a A anula la entrada $(3,1)$

$$J(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Ejemplo: Hallar la factorización QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante rotaciones de Givens.
- Se define matriz $J(1,3,\theta)$ que aplicado a A anula la entrada $(3,1)$

$$J(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

- donde, dado que $|A(3,1)| > |A(1,1)| \Rightarrow t = \frac{A(1,1)}{A(3,1)} = \frac{1}{2}$.

$$s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$c = st = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejemplo

- Así

$$J(1,3,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Así

$$J(1,3,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$A_1=J(1,3,\theta)A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Así

$$J(1,3,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = J(1,3,\theta)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.2361 & 0.8944 & 2.2361 \\ 0 & 3.0000 & 2.0000 \\ 0 & -1.7889 & -2.2361 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- En este caso $Q_1 = J(1,3,\theta)$, luego dado que $|A_1(3,2)| < |A_1(2,2)| \Rightarrow t = \frac{A_1(3,2)}{A_1(2,2)} = \frac{-1.7889}{3} = -0.5963$

Ejemplo

- En este caso $Q_1 = J(1,3,\theta)$, luego dado que $|A_1(3,2)| < |A_1(2,2)| \Rightarrow t = \frac{A_1(3,2)}{A_1(2,2)} = \frac{-1.7889}{3} = -0.5963$
- Por lo tanto

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0.5963)^2}} = 0.8589$$
$$s = ct = 0.8589 \cdot (-0.5963) = -0.5121$$

Ejemplo

- En este caso $Q_1 = J(1,3,\theta)$, luego dado que $|A_1(3,2)| < |A_1(2,2)| \Rightarrow t = \frac{A_1(3,2)}{A_1(2,2)} = \frac{-1.7889}{3} = -0.5963$
- Por lo tanto

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0.5963)^2}} = 0.8589$$
$$s = ct = 0.8589 \cdot (-0.5963) = -0.5121$$

- Así

$$J(2,3,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8589 & -0.5121 \\ 0 & -0.5121 & 0.8589 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
A_2 &= J(2,3,\theta)A_1 = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8589 & -0.5121 \\ 0 & -0.5121 & 0.8589 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.2361 & 0.8944 & 2.2361 \\ 0 & 3.0000 & 2.0000 \\ 0 & -1.7889 & -2.2361 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2.2361 & 0.8944 & 2.2361 \\ 0 & 3.4928 & 2.8630 \\ 0 & 0.0000 & -0.8963 \end{pmatrix} = R
\end{aligned}
$$

En este caso $Q_2 = J(2,3,\theta)$.

Ejemplo

La matriz Q viene dada por $Q = Q_1^T Q_2^T$

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} 0.4472 & 0 & -0.8944 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.8944 & 0 & 0.4472 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8589 & 0.5121 \\ 0 & -0.5121 & 0.8589 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.4472 & 0.4581 & -0.7682 \\ 0 & 0.8589 & 0.5121 \\ 0.8944 & -0.2290 & 0.3841 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Problemas Sobredeterminados

- Dada una matriz A real de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, si $m > n$ se dice que el sistema $Ax = b$ es sobredeterminado.

Problemas Sobredeterminados

- Dada una matriz A real de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, si $m > n$ se dice que el sistema $Ax = b$ es sobredeterminado.
- Se dice que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ si se verifica que:

Problemas Sobredeterminados

- Dada una matriz A real de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, si $m > n$ se dice que el sistema $Ax = b$ es sobredeterminado.
- Se dice que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ si se verifica que:

$$\|b - A\tilde{x}\| \leq \|b - Ax\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Problemas Sobredeterminados

- Dada una matriz A real de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, si $m > n$ se dice que el sistema $Ax = b$ es sobredeterminado.
- Se dice que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ si se verifica que:

$$\|b - A\tilde{x}\| \leq \|b - Ax\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

lo que equivale a que $\tilde{x}$ es un mínimo de la función real de n variables:

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - (Ax)_j)^2$$

Sistemas Sobredeterminados

Geométricamente, se busca la mejor aproximación en norma euclídea del vector b al subespacio vectorial $col(A)$. El teorema de la mejor aproximación establece que la solución de mínimos cuadrados siempre existe y es la proyección ortogonal de b sobre $col(A)$. Así:

Sistemas Sobredeterminados

Geométricamente, se busca la mejor aproximación en norma euclídea del vector b al subespacio vectorial $col(A)$. El teorema de la mejor aproximación establece que la solución de mínimos cuadrados siempre existe y es la proyección ortogonal de b sobre $col(A)$. Así:

$$b - A\tilde{x} \perp col(A) \Leftrightarrow A^T(b - A\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow A^T A\tilde{x} = A^T b$$

Este último resultado se puede obtener sin necesidad de argumentos geométricos. De por sí, la solución de mínimos cuadrados $\tilde{x}$ es un mínimo de f y por lo tanto el gradiente de esta función debe anularse en $\tilde{x}$

Este último resultado se puede obtener sin necesidad de argumentos geométricos. De por sí, la solución de mínimos cuadrados $\tilde{x}$ es un mínimo de f y por lo tanto el gradiente de esta función debe anularse en $\tilde{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \|b - Ax\|_2^2 = (b - Ax)^T(b - Ax) \\ &= x^T A^T A x - 2x^T A^T b + b^T b \Rightarrow \nabla f(x) = 2(A^T A x - A^T b) \end{aligned}$$

Teorema: Ecuaciones normales de Gauss

Sea A una matriz real $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Teorema: Ecuaciones normales de Gauss

Sea A una matriz real $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\tilde{x}$ es una solución en el sentido de los mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$

Teorema: Ecuaciones normales de Gauss

Sea A una matriz real $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\tilde{x}$ es una solución en el sentido de los mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$
- $\tilde{x}$ es solución del sistema $A^T Ax = A^T b$ (ecuaciones normales de Gauss)

Teorema: Ecuaciones normales de Gauss

Sea A una matriz real $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\tilde{x}$ es una solución en el sentido de los mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$
- $\tilde{x}$ es solución del sistema $A^T Ax = A^T b$ (ecuaciones normales de Gauss)
- $b - A\tilde{x}$ es ortogonal a $col(A)$

- Las ecuaciones normales tienen solución única sí y sólo si todas las columnas de A son $l.i.$; es decir, si $rango(A) = n$.

- Las ecuaciones normales tienen solución única sí y sólo si todas las columnas de A son $l.i.$; es decir, si $rango(A) = n$.
- En este caso, además, la matriz $A^T A$ es simétrica y definida positiva, de donde, las ecuaciones normales tienen solución única y se pueden utilizar los métodos estudiados para estas matrices, en particular, el método de Cholesky.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz $A^T A$ y el vector $A^T b$.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz $A^T A$ y el vector $A^T b$.
2. Obtener la matriz L de la factorización de Cholesky: $A^T A = LL^T$.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz $A^T A$ y el vector $A^T b$.
2. Obtener la matriz L de la factorización de Cholesky: $A^T A = LL^T$.
3. Resolver el sistema triangular inferior $Ly = A^T b$.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz $A^T A$ y el vector $A^T b$.
2. Obtener la matriz L de la factorización de Cholesky: $A^T A = LL^T$.
3. Resolver el sistema triangular inferior $Ly = A^T b$.
4. Resolver el sistema triangular superior $L^T x = y$.

Ejercicio:

La solubilidad del NO_3K respecto de la temperatura medida se representa en la tabla

T	40	60	80	100	120
s	27	39	50	60	69

- Encontrar una relación parabólica entre s y T usando el procedimiento anterior.
- Realice una pequeña variación de $+0.1$ en s_5 y observe los nuevos resultados.

- Desde el punto de vista computacional, resolver el problema de mínimos cuadrados con las ecuaciones normales es eficiente: para formar $A^T A$ y $A^T b$ se necesitan aproximadamente $mn^2/2$ operaciones y resolver los dos sistemas triangulares implica aproximadamente n^2 operaciones.

- Desde el punto de vista computacional, resolver el problema de mínimos cuadrados con las ecuaciones normales es eficiente: para formar $A^T A$ y $A^T b$ se necesitan aproximadamente $mn^2/2$ operaciones y resolver los dos sistemas triangulares implica aproximadamente n^2 operaciones.
- Desafortunadamente, el uso de las ecuaciones normales presenta el problema de estabilidad numérica, dado que el número de condición de la matriz $A^T A$ es el cuadrado del número de condición de A. Consecuentemente, la matriz de la ecuación normal está seriamente mal condicionada si la matriz A misma está ligeramente mal condicionada.

- Desde el punto de vista computacional, resolver el problema de mínimos cuadrados con las ecuaciones normales es eficiente: para formar $A^T A$ y $A^T b$ se necesitan aproximadamente $mn^2/2$ operaciones y resolver los dos sistemas triangulares implica aproximadamente n^2 operaciones.
- Desafortunadamente, el uso de las ecuaciones normales presenta el problema de estabilidad numérica, dado que el número de condición de la matriz $A^T A$ es el cuadrado del número de condición de A. Consecuentemente, la matriz de la ecuación normal está seriamente mal condicionada si la matriz A misma está ligeramente mal condicionada.
- El mal condicionamiento de la matriz de la ecuación normal asociada puede conducir no solo a una aproximación no precisa de la solución calculada de las ecuaciones normales, sino también a una perdida de información cuando el rango numérico de A es marginal.

- Una solución óptima de las ecuaciones normales se obtiene de la siguiente manera:

- Una solución óptima de las ecuaciones normales se obtiene de la siguiente manera:
- Se desea resolver el siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$A^t A x = A^t b$$

- Una solución óptima de las ecuaciones normales se obtiene de la siguiente manera:
- Se desea resolver el siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$A^t A x = A^t b$$

- Si las columnas de A son independientes, la solución de las ecuaciones normales es única, como se puede ver aplicando la factorización QR a A.

$$\begin{aligned} (QR)^t (QR) x &= (QR)^t b \\ R^t Q^t Q R x &= R^t Q^t b \\ R x &= Q^t b \end{aligned}$$

Ejercicio

Sea el conjunto de datos dado en la siguiente tabla

t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.000	0.112	0.223	0.329	0.428	0.520	0.604	0.678	0.742	0.797	0.843

1. Encuentre y grafique la mejor recta, la mejor parábola y la mejor cúbica que ajuste a los datos dados, y encuentre el máximo error cometido en cada caso.
2. Encuentre un ajuste usando la ecuación

$$y(t) = c_1 + e^{-t^2}(c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3)$$

donde $z = \frac{1}{1+t}$. ¿Cuál es el máximo error cometido?. Compárela gráficamente con la cúbica obtenida en el paso anterior.