# Práctica IV. Cálculo III

1. Calcular el polinomio característico de cada una de las siguientes matrices:

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcular los autovalores y los autovectores de cada una de las siguientes matrices y los subespacios asociados a cada uno de ellos.

   (a) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcular el espectro de $A$.
   (b) Estudiar si $A$ es diagonalizable.

4. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$
   (a) Probar que $v = (1, -1, 0)$ es un autovector de $A$ asociado al autovalor $\lambda = 2$.
   (b) Calcular el valor de $\alpha$ para el que 2 es el único autovalor de $A$.
   (c) Para el valor de $\alpha$ calculado en el apartado b), calcular la multiplicidad geométrica de 2. ¿Es $A$ diagonalizable?

5. Construye una matriz $M \in \mathcal{M}_2$ tal que $v_1 = (2, 3)$ sea autovector con autovalor 2 y $v_2 = (1, 2)$ sea autovector con autovalor $-1$.

6. Se considera la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
   (a) Estudiar si $B$ es diagonalizable.
   (b) Hallar una diagonalización ortogonal de $M = B^t B$.
   (c) Calcular una raíz cuadrada de $M = B^t B$.

7. Se considera la matriz
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que $C$ tiene rango 1 y razonar que $\sigma(C) = \{6, 0, 0\}$.

(b) Encontrar un vector unitario $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $C = 6uu^t$.

8. En cada uno de los siguientes ítems decidir si la matriz $A$ es diagonalizable y en caso afirmativo hallar matrices $P$ y $D$ tales que $A = PDP^{-1}$ y $D$ es diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

9. Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $A^{14}$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular $A^{10}$

11. (a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Probar que existe una única transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con autovectores $(3, 1)$ de autovalor $-2$ y $(-2; -2)$ de autovalor 3. Dar el polinomio característico de $A$ y hallar la matriz de $A$ asociada a la base canónica.