UNIVERSIDAD JOSE ANTONIO PAEZ.
FACULTAD DE INGENIERIA.
ESCUELA DE COMPUTACION.
Materia: Cálculo Numérico.
Prof. José Luis Ramírez B.

Guía de Ejercicios IV

1. Sea $w(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$. Demostrar que el polinomio de Interpolación de Lagrange en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puede escribirse como $p_n(x) = w(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x - x_k)w'(x_k)}$.

2. Use los métodos de Neville y Aitken para aproximar $f(0{,}78)$ para la función $f(x) = x^2 e^x \cos(x)$ usando $x_0 = -1$, $x_1 = -0{,}9$, $x_2 = -0{,}8$, $x_3 = -0{,}7$ y $x_4 = -0{,}6$. Compare sus aproximaciones con el valor exacto $f(0{,}78) = (0{,}78)^2 e^{0{,}78}\cos(0{,}78)$. Compare ambos métodos.

3. Use interpolación iterada inversa para encontrar una aproximación a la solución de $x - e^{-x} = 0$, usando los siguientes datos:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

4. Dada la siguiente tabla:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1.0	0.5403023
1	1.1	0.4535961
2	1.2	0.3623577
3	1.3	0.2674988
4	1.4	0.1699671
5	1.5	0.0707372
6	1.6	-0.0291995
7	1.7	-0.1288444
8	1.8	-0.22720212
9	1.9	-0.3232895
10	2.0	-0.4161468

   a) Evaluar $P_{10}(1{,}95)$, computacionalmente, usando:

1) Algoritmo de Neville

2) Fórmula de diferencias Divididas Progresiva y Regresiva de Newton.

3) Fórmula de diferencias Progresiva y Regresiva de Newton.

b) Compare los valores aproximados con el exacto $-0{,}3707808$

Imprimir la tabla con los resultados parciales.

5. Emplee interpolación iterada inversa para hallar el valor de x que corresponda a $f(x) = 0{,}3$, para los siguientes datos tabulados

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1.0	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

6. Para la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, $-5 \leq x \leq 5$, genere el polinomio interpolante $P_n(x)$ usando $n+1$ nodos igualmente espaciados en el intervalo $[-5, 5]$. Calcule $P_n(x)$ para distintos valores de n y grafíquelos junto con la función f. ¿Es cierto que $\max |f(x) - P_n(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$?

7. Un vehículo que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos de las observaciones se dan en la siguiente tabla donde el tiempo está dado en segundos y la distancia en metros

Tiempo	0	3	5	8
Distancia	0	225	383	623

Encuentre el polinomio que interpola estos datos y úselos para aproximar la distancia, la velocidad y la aceleración del vehículo a los seis segundos.

8. Calcule el polinomio interpolante de Lagrange de grado dos para $f(x) = e^x$ en los nodos $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}5$ y $x_2 = 1{,}0$. Compare este polinomio de segundo grado con el polinomio de mínimos cuadrados $P(x) = 1{,}0052 + 0{,}8641x + 0{,}8437x^2$ el cual ajusta con x en 0,0, 0,25, 0,5, 0,75 y 1 ¿Cuál aproxima mejor a $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$?

9. Calcule el polinomio de mínimos cuadrados de grado uno para los datos siguientes:

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
y_i	1.0	1.284	1.6487	2.117	2.7183

Calcule $E = \sum_{i=0}^{4} (y_i - p(x_i))^2$

10. Encuentre los polinomios de mínimos cuadrados de grado 1,2,3 y 4 para los datos que se muestran en la siguiente tabla:

i	x_i	y_i
0	0.0	1.0
1	0.15	1.004
2	0.31	1.031
3	0.5	1.117
4	0.6	1.223
5	0.75	1.422

11. Se propone encontrar un polinomio interpolante de la función $f(x) = (1+25x^2)^{-1}$ en el intervalo $[-1;1]$ de las siguientes formas:

    a) Utilizando los puntos $x_{jn} = -1 + 2j/n; j = 0, 1, \ldots, n$; para $n = 5, 10, 25$:

    b) Utilizando los puntos $x_{jn} = \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$

    Haga gráficas de las funciones de error $f(x) - p(x)$ en todos los casos. Comente sus resultados

12. Para la tabla

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-39	1	1	3	25	181	801

se construyó su tabla de diferencias divididas

-2	-39	40	-20	7	-1	1	0
-1	1	0	1	3	4	1	
0	1	2	10	19	9		
1	3	22	67	55			
2	25	156	232				
3	181	620					
4	801						

Utilice esta tabla para construir el polinomio interpolante de $f(x)$ en cada uno de los siguientes conjuntos de nodos: $\{-1;0;1\}$; $\{-1;0;1;2\}$; $\{-1;0;1;2;3\}$; $\{0;1\}$ y $\{0;1;2;3;4\}$.

13. Considere la función

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 6x - 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ -x^3 + 6x^2 + 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

¿Es $S(x)$ un Spline Cúbico en $[0,2]$? Si así es, ¿es un Spline Natural?.

14. Dada una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y los nodos $x_0 = a - h_1$, $x_1 = a$, $x_2 = a + h_2$ con $h_i > 0, i = 1,2$ y $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Construir el polinomio de interpolación $p(x)$ de $f(x)$ con los nodos dados.

b) Utilizando $p(x)$ obtener la fórmula

$$f''(a) \approx \frac{2}{h_1 + h_2}\left(\frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a-h_1)}{h_1}\right)$$

c) Calcular la expresión de error de la fórmula anterior.

15. Sean

$$\begin{aligned} P(x) &= 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-1{,}5) - 2(x-1)(x-1{,}5)x \\ Q(x) &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)x - 2(x-2)x(x-1{,}5) \end{aligned}$$

polinomios de interpolación de $f(x)$ en los nodos señalados.

a) Obtener las tablas de diferencias divididas que dan origen a $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente.

b) Estimar $f(1{,}75)$ usando $P(x)$ y $Q(x)$.

16. Un polinomio $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, con $p_3(0) = 1$, $p_3(2) = 3$ y $\int_0^2 p_3(x)dx = 4$. Averiguar $p_3(1)$.

17. Un fabricante de refrigeradores desea saber la densidad del agua, dada cierta temperatura. Sin embargo, solo tiene datos sobre temperaturas distintas a las de interés, como la siguiente tabla:

$T[°C]$	Densidad$[Kg/m^3]$
18	998.5
20	998.2
22	997.7

Le pide su ayuda, porque no sabe que hacer y necesita calcular la densidad cuando T=20.256°C

a) Calcule el polinomio de interpolación por el método de diferencias divididas.

b) Calcule el polinomio de interpolación por el método matricial.

c) Calcule el polinomio de interpolación por el método de Lagrange.

d) Calcule la densidad para T=20.256°C.

18. Calcular la expresión del error de interpolación al aproximar la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ interpolando en los puntos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. y acotarlo superiormente.

19. Calcular el polinomio interpolador de Lagrange $P_3(x)$ de la función $f(x) = 2^x$ en los puntos $0, 1, 3, 4$ utilizando las diferencias divididas de Newton. Expresar el polinomio tomando en primer lugar $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$ y $x_3 = 4$, y en segundo lugar $x_0 = 4, x_1 = 3, x_2 = 1$, y $x_3 = 0$.

20. En la siguiente tabla, R es la resistencia de una bobina en *ohms* y T la temperatura de la bobina en grados centígrados. Por mínimos cuadrados determinar el mejor polinomio lineal que represente la función dada.

T	10.50	29.49	42.70	60.01	75.51	91.05
R	10.421	10.939	11.321	11.794	12.242	12.668

21. El polinomio $p(x) = 2 - (x+1) + x(x+1) - 2x(x+1)(x-1)$ interpola los primeros cuatro puntos de la siguiente tabla

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	2	-7	10

   a) ¿Que interpolante permite hallar el polinomio que interpola toda la tabla haciendo uso sólo de $p(x)$?. Encuentrelo.

   b) Calcular el número de operaciones elementales en la construcción de este polinomio.

22. Sea $P(x)$ el único polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a $f(x) = \sin(x)$ en los puntos $(-1, f(-1))$,$(0, f(0))$ y $(1, f(1))$. Dé una cota del error absoluto cometido al aproximar $f(x)$ mediante $P(x)$ para cualquier $x \in [-1, 1]$.

23. Determine si la siguiente función f es un spline cúbico, para una determinada función dada, donde

$$f(x) = \begin{cases} 13 - 31x + 23x^2 - 5x^3 & \text{si } x \in [1,2] \\ -35 + 51x - 22x^2 + 3x^3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

24. Dada la función

$$S(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 3 + 5x + 3x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   determine si la misma es un spline cúbico en [-1,2]. ¿Es natural? Justifique sus respuesta.

25. Determine todos los valores de a, b, c, d y e para los cuales la siguiente función es un Trazador cúbico

$$T(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2 & \text{si } x \in [1,3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & \text{si } x \in [3, \infty) \end{cases}$$

   Además, determine los valores de los parámetros de modo que el trazador interpole la siguiente tabla

x	0	1	4
y	26.0	7.0	25.0

26. Determine todos los valores de a, b y c tales que

$$T(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3, & \text{si } x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

es un Trazador cúbico con nodos 0, 1, 2. Ahora, determine el valor de d tal que

$$\int_0^2 \left(T''(x)\right)^2 dx$$

sea mínima. Finalmente, encuentre el valor de d que haga de T un Trazador cúbico natural en $[0,2]$, y explique por qué este valor es distinto del obtenido previamente.