Universidad José Antonio Páez.
Facultad de Ingeniería.
Escuela de Computación.
Materia: Cálculo Numérico
Prof. José Luis Ramírez B.

Guía de Ejercicios I

1. Convertir los siguientes números binarios a la forma decimal (equivalente decimal):

   a) $(0{,}1100011)_2$
   b) $(0{,}1111111)_2$
   c) $(1010)_2$
   d) $(101{,}01)_2$

2. Hallar las expresiones binarias de los decimales 0,4 y 0,8.

3. Convertir los siguientes números decimales a binarios:

   a) 267
   b) 3,125
   c) $\frac{1}{6}$
   d) $\frac{1}{7}$

4. Para los siguientes valores exactos y sus aproximaciones, determine el error absoluto, error relativo y cifras significativas

x	$\tilde{x}$
900.12	900.132
367.999	368.001
0.000481	0.0005
10^{-9}	0
1/3	0.333
100/3	33.33

5. En 1862 el físico Foucault, utilizando un espejo giratorio, calculó en $298000 km/s$ la velocidad de la luz. Aceptando como exacta la velocidad de $299776 km/s$, calcular el error absoluto y el error relativo cometido por Foucault. Por otra parte, la determinación de la constante universal h realizada por Planck en 1913 dio el valor de $6{,}41 \times 10^{-27} erg\, seg$. Adoptando el valor de $6{,}623 \times 10^{-27} erg\, seg$, calcular el error absoluto y relativo cometido por Planck. ¿Qué medida tiene menor error absoluto? ¿Cuál es más precisa?

6. Efectúe los siguientes cálculos usando: Precisión infinita, Aritmética de truncamiento a tres dígitos, Aritmética de redondeo a tres dígitos

$$a = \left(\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{11}\right)\right) - \frac{3}{20} \qquad \text{y} \qquad b = \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{e}{\pi}$$

7. Calcular $(\sqrt{2})^5$ tomando $\sqrt{2} = 1{,}414$ (que tiene todas sus cifras exactas) y estimar el error cometido. Determinar la precisión con la que hay que tomar $\sqrt{2}$ para calcular $(\sqrt{2})^5$ con tres cifras decimales exactas.

8. Se quiere calcular el valor de $(\sqrt{2}-1)^6$ utilizando el valor aproximado 1,4 para $\sqrt{2}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es mejor numéricamente? Justifique la repuesta.

$$a)(3 - 2\sqrt{2})^3 \qquad \text{y} \qquad b)\frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$$

9. Un transcriptor de datos incorpora el valor de $ab.c \times 10^{-7}$ y transcribe $a.bc \times 10^{-7}$. Calcule el error absoluto y relativo de los datos transcritos.

10. Resolver la ecuación $x^2 - 26x + 1 = 0$ usando la fórmula cuadrática. Utilizando una aritmética de redondeo correcto a 5 dígitos para encontrar los valores numéricos de las raíces de esta ecuación. ¿Se produce alguna pérdida de significación del error?. Aplique luego truncamiento y diga cual se aproxima más a los valores reales.

11. Señale la causa que justifica la pérdida de cifras significativas, al usar una aritmética de redondeo a tres dígitos, cuando se evalúa el polinomio $x^3 - 6x^2 + 3x + 0{,}149$ en $x = 4{,}71$. Proponga un mecanismo que permita mejorar el resultado. Realice los cálculos y compare.

12. El valor de la intersección, de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con el eje x se puede encontrar mediante las expresiones

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \qquad \text{y} \qquad x = x_0 - y_0 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

Muestre que ambas fórmulas son algebraicamente correctas. Usando los puntos $(x_0, y_0) = (1{,}31; 3{,}24)$ y $(x_1, y_1) = (1{,}93; 4{,}76)$ y una aritmética de redondeo a tres dígitos, calcule la intersección de la recta con el eje x con ambas expresiones. Compare los resultados.

13. Considere el conjunto de números de punto flotante $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$.

    a) Determinar $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{máx}}$, ϵ_M y el número de elementos de $\mathbb{F}$.

    b) Determinar los números de punto flotante positivos del conjunto $\mathbb{F}$.

    c) Graficar sobre la recta real los números de puntos flotantes determinados en el punto anterior.

14. Utilizando aritmética de siete dígitos decimales efectuar los siguientes cálculos.

    a) Con $a = 1234{,}567$, $b = 45{,}67844$, $c = 0{,}0004$,

    $$(a+b)+c, \qquad a+(b+c)$$

    b) Con $a = 1234{,}567$, $b = 1{,}234567$, $c = 3{,}333333$,

    $$(a+b)\cdot c, \qquad a\cdot c + b\cdot c$$

    Al comparar los resultados, ¿qué puede concluirse?

15. Demostrar que al representar el número real 0,1 como

    $$0{,}1 = 2^e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

    el número de elementos no nulos a_n es infinito.

16. Representar el número 0,0703125 como

    $$0{,}0703125 = 2^e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

17. Dada una aritmética de precisión finita cualquiera, calcular la distancia que hay entre el número 1 y su inmediato superior (es decir el número que va después de 1), y la distancia entre el número 1, y su inmediato inferior.

18. Obtenga expresiones equivalentes para evitar la pérdida de cifras significativas en los siguientes casos:

    $$\begin{array}{ll} \log(x+1) - \log(x) & x \gg 1 \\ \sin(x) - \sin(y) & x \cong y \\ \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} & x \cong 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & x \cong 0 \\ \sqrt{1+x^2} - 1 & x \cong 0 \end{array}$$

19. La sucesión de números $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ puede generarse con las siguientes fórmulas recursivas múltiples

    $$P_n = \frac{5}{6}P_{n-1} - \frac{1}{6}P_{n-2} \quad n = 2, \ldots \quad P_0 = 1; P_1 = \frac{1}{3}$$
    $$T_n = \frac{13}{3}T_{n-1} - \frac{4}{3}T_{n-2} \quad n = 2, \ldots \quad T_0 = 1; T_1 = \frac{1}{3}$$

a) Halle P_n y T_n para $n = 2, \ldots, 8$ usando aritmética de redondeo a cinco dígitos y compare cada uno de ellos con el valor exacto.

b) Critique la estabilidad de los algoritmos.

20. Considere las ecuaciones:

$$31{,}69x + 14{,}31y = 45{,}00 \tag{1}$$

$$13{,}11x + 5{,}89y = 19{,}00 \tag{2}$$

La solución única a este sistema de ecuaciones es $x = 7{,}2$ e $y = -12{,}8$. Un método que se presenta generalmente en cursos elementales de álgebra para resolver problemas de este tipo es multiplicar la ecuación (1) por el coeficiente de x de la ecuación (2), multiplicar la ecuación (2) por el coeficiente de x en la ecuación (1), y después restar las ecuaciones resultantes. Para este problema, obtendríamos:

$$[(13{,}11)(14{,}31) - (31{,}69)(5{,}89)]\, y = (13{,}11)(45{,}00) - (31{,}69)(19{,}00)$$

Efectúe estas operaciones usando aritmética cortando en cuatro dígitos, y use el resultado para encontrar valores de cuatro dígitos para x e y. Explique por qué las respuestas obtenidas difieren de los valores reales de x e y.

21. Sumar manualmente los 20 primeros términos de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

primero de menor a mayor y luego de mayor a menor, utilizando redondeo correcto a tres dígitos.

22. Demostrar que si un número $\tilde{x}$ aproxima a x con $|\tilde{x} - x| < \varepsilon$, entonces $\frac{1}{\tilde{x}}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|error\ relativo| < \frac{\varepsilon}{|\tilde{x}|}$$

23. Comenzando con $x_0 = \pi$, $x_1 = \pi$, defina $x_{n+2} = 4x_n - 3x_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$. Haga un programa que produzca los 30 primeros términos de esta serie. ¿Se observa alguna anomalía?

24. Considere la ecuación en diferencias

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

a) Verifique que la sucesión

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

es solución de la ecuación en diferencias (3), y satisface las condiciones iniciales

$$x_0 = 1 \text{ y } x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Utilice aritmética finita para calcular x_n, $n = 0, 1, \ldots, 20$ usando la fórmula (3) con las condiciones iniciales anteriores, y también usando la fórmula (4). Explique los resultados y concluya acerca de la estabilidad numérica de la fórmula (3).

b) Verifique que la sucesión

$$x_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

es solución de la ecuación en diferencias (3), y satisface las condiciones iniciales

$$x_0 = 1 \text{ y } x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Utilice aritmética finita para calcular x_n, $n = 0, 1, \ldots, 20$ usando la fórmula (3) con las condiciones iniciales anteriores, y también usando la fórmula (5). Explique los resultados y concluya acerca de la estabilidad numérica de la fórmula (3).