UNIVERSIDAD JOSÉ ANTONIO PÁEZ.
FACULTAD DE INGENIERÍA.
ESCUELA DE COMPUTACIÓN.
Materia: Cálculo Numérico
Prof. José Luis Ramírez B.

Guía de Ejercicios III

1. Para resolver $f(x) = 0$ se emplea el método de bisección en un intervalo inicial $[50; 63]$. ¿A lo sumo cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error no mayor a 10^{-4}.

2. Encuentre una raíz perteneciente al intervalo indicado utilizando el método de bisección:

   a) $x^3 + x - 1$ en $[0; 1]$

   b) $x^{-1} - \tan(x)$ en $[0; \pi/2]$

   c) $x^{-1} - 2^x$ en $[0; 1]$

   d) $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x - 5}{2x^3 - 9x^2 + 18x - 2}$ en $[0; 4]$

3. Aplique el método de bisección para encontrar las soluciones exactas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo:

   a) $[0; 1]$

   b) $[1; 3{,}2]$

   c) $[3{,}2; 4]$

4. Aplique el método de bisección para encontrar soluciones exactas en 10^{-5} para los siguientes problemas:

   a) $x^{-2} - x = 0$ para $0 < x \leq 1{,}5$

   b) $e^x x^2 + 3x - 2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$

   c) $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ para $-3 \leq x \leq -2$ y para $-1 \leq x \leq 0$

   d) $x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $0{,}2 \leq x \leq 0{,}3$ y para $1{,}2 \leq x \leq 1{,}3$

5. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)$. ¿En cuál cero de f converge el método de bisección para los siguientes intervalos?

   a) $[-1{,}5; 2{,}5]$

   b) $[-0{,}5; 2{,}4]$

c) $[-0{,}5; 3]$

d) $[-3; -0{,}5]$

6. Encuentre una aproximación de $\sqrt{3}$ correcta en 10^{-4} por medio del algoritmo de bisección. Sugerencia: considere $f(x) = x^2 - 3$.

7. Sean $f(x) = x^2 - 6$, $x_0 = 3$, $x_1 = 2$. Aplicar primero el método de la secante y, luego, el de la regula falsi (posición falsa) para encontrar x_3.

8. Encuentre una aproximación de $\sqrt[3]{25}$ correcta en 10^{-4} por medio del algoritmo de bisección.

9. Use el manejo algebraico para demostrar que las siguientes funciones tienen un punto fijo en p exactamente cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

   a) $g(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$

   b) $g(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

   c) $g(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$

   d) $g(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

10. Efectúe cuatro iteraciones, si es posible hacerlo, en las funciones g definidas en el ejercicio anterior. Sea $p_0 = 1$ y $p_{n+1} = g(p_n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

11. Aplique el método de iteración de punto fijo para determinar una solución con una exactitud de 10^{-2} para $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1; 2]$, use $p_0 = 1$.

12. Use el método de iteración de punto fijo para localizar la raíz de $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x}) - x$. Use un valor inicial de $x_0 = 0{,}5$ e iteración hasta que $E_a \leq 0{,}01$

13. Aplique el método de Newton y el método de la secante para obtener soluciones con una exactitud de 10^{-4} para los siguientes problemas:

    a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0 \quad [1; 4]$

    b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \quad [-3; -2]$

    c) $x - \cos(x) = 0$ en $[0; \pi/2]$

    d) $x - 0{,}8 - 0{,}2\sin(x) = 0$ en $[0; \pi/2]$

14. El polinomio de cuarto grado $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$, tiene dos ceros reales, uno en $[-1; 0]$ y el otro en $[0; 1]$. Trate de aproximar estos ceros con una exactitud de 10^{-6}, por medio del método de Newton y de la secante.

15. ¿Cúal es el valor de la siguiente expresión?

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

Note que esta expresión puede ser interpretada como $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, donde $x_0 = \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2 + x_0}$, y así sucesivamente. Use el método de punto fijo con una función g apropiada.

16. Para la siguiente ecuación:

$$f(x) = \sinh(x) - e^x \sin(2x)$$

Encuentre la solución más próxima a $-0{,}5$ con una precisión de 4 decimales por iteración de punto fijo.

17. El método de Halley para resolver la ecuación $f(x) = 0$ hace uso de la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n f_n'}{(f_n')^2 - \frac{f_n f_n''}{2}}$$

donde $f_n = f(x_n)$ y así sucesivamente. Demuestre que esta fórmula es el resultado de aplicar la iteración de Newton a la función $\frac{f}{(f')^{1/2}}$

18. Suponga que el método de Newton es aplicado para hallar la raíz cuadrada de un número $R > 0$. Suponiendo x_0 distinto de 0 muestre que:

   a) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{R}{x_n}\right)$

   b) $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2x_n}$

19. Considere la ecuación $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Esta tiene una raíz $\alpha = 1$

   a) Use el método de Newton para determinar dicha raíz α, partiendo desde $x_0 = 0{,}8$ y realizando 5 iteraciones.

   b) Use el siguiente método iterativo

   $$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   para determinar en forma aproximada la raíz α, comenzando con $x_0 = 0{,}8$.

   c) Utilizando los resultados de las iteraciones en *a*) y en *b*), compare la rapidez de convergencia de ambos métodos, estimando el error relativo de la aproximación x_5, correspondiente.

20. La velocidad de descenso de un paracaídas viene dada por

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{\frac{-ct}{m}}\right)$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($9{,}81 m/s^2$), m la masa soportada, t el tiempo y c el coeficiente de arrastre, viniendo dados todos los valores en $S.I.$

a) Representar, de forma aproximada, la velocidad como función del coeficiente de arrastre.

b) Seleccionar un método de intervalo para determinar el valor de c para que un paracaídas que soporta $50Kg$ alcance una velocidad de $30m/s$ en 5 minutos. Realizar 4 iteraciones de Regula Falsi Modificada ¿Presenta alguna ventaja?. (Nota: utilizar decenas para determinar el intervalo).

c) ¿Se puede asegurar la convergencia del método de Newton en el intervalo $[10, 20]$?.

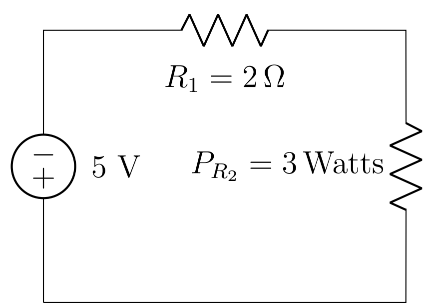
21. Una empresa tiene producción igual a $P = 2t+3$, en donde t es el tiempo en meses. La demanda obedece a la siguiente función

$$D = t^2 + 6t + \cos(t) - 50$$

Aplique el método de la secante pára hallar el tiempo en el cual la producción iguala a la demanda.

22. Para la siguiente red determine por bisección en valor de la resistencia R_2 con un error de 10^{-3} si la potencia disipada en esa resistencia está dada por la fórmula:

$$P = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} V_{dc}^2$$



Nota: El valor de R_2 está comprendido entre 1 y 2 Ohm. Genere una tabla con la siguiente información:

n	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$