



Guía de Ejercicios V

1. Considere la tabla de datos:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.9080348	0.6386093	0.3843735

- a) Use todas las fórmulas apropiadas para aproximar $f'(0,4)$ y $f''(0,4)$
 - b) Use todas las fórmulas apropiadas para aproximar $f'(0,6)$ y $f''(0,6)$
2. Sea $f(x) = 3xe^x - \cos(x)$. Aproxime $f''(1,3)$ con $h = 0,1$ y $h = 0,01$. Compare los resultados con el valor exacto de $f''(1,3)$.
3. Expandiendo la función f en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de x_0 y evaluándolo en $x_0 \pm h$ y $x_0 \pm 2h$, derive un método para aproximar $f''(x_0)$, cuyo término de error sea de orden h^2 .
4. Derive las siguientes fórmulas de cinco puntos

- $$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$
- $$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$$

5. Aproxime las siguientes integrales usando todas las fórmulas conocidas de integración numérica. Compare las precisiones de las aproximaciones con las respectivas fórmulas de error:

- a) $\int_0^{0,1} \sqrt{1+x} dx$
- b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$
- c) $\int_{1,1}^{1,5} e^x dx$
- d) $\int_0^4 e^x dx$
- e) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$
- f) $\int_1^{5,5} \frac{dx}{x} + \int_{5,5}^{10} \frac{dx}{x}$
6. Encuentre aproximaciones de $\int_0^1 (1+x^2)^{-1} dx$ utilizando regla de Simpson con $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2$. Calcule el error que comete en cada caso. Compare con las cotas de error que da la teoría.
7. Se quiere estimar $\int_0^\pi \sin(x) dx$ por regla trapezoidal con n subdivisiones del intervalo y se desea tener un error menor que 10^{-12} . ¿Qué tan grande debe ser n de acuerdo con la teoría?

8. Dados 3 puntos distintos x_l, x_i, x_r , demostrar que la fórmula

$$f'(x_i) \approx \frac{(x_i - x_l) \frac{f(x_r) - f(x_i)}{x_r - x_i} + (x_r - x_i) \frac{f(x_i) - f(x_l)}{x_i - x_l}}{x_r - x_l}$$

aproxima la derivada $f'(x_i)$ con un orden de aproximación de 2.

9. Calcular una aproximación de la derivada tercera $f'''(x_i)$ de una función $f(x)$ en un punto x_i , utilizando $f(x_i), f(x_i + h), f(x_i - h), f(x_i - 2h)$.

10. Determine un cota de error al aproximar $\int_a^b f(x)dx$, con las reglas del trapecio y de Simpson. Utilice los valores:

a) $f(x) = \ln(-x)$, $a = -2$ y $b = -1$	c) $f(x) = \cos(-2x)$, $a = 0$ y $b = 2$
b) $f(x) = 2^x$, $a = -3$ y $b = 3$	d) $f(x) = \sin(x)$, $a = 1$ y $b = 2$

11. Considere la función f definida por $f(x) = e^{?x^2}$ y el intervalo $[0, 4]$. Dado que f es integrable en $[0, 4]$, utilice la regla compuesta del trapecio para aproximar $\int_0^4 f(x)dx$, para:

a) $m = 3$ subintervalos.	c) $m = 7$ subintervalos.
b) $m = 4$ subintervalos.	d) $m = 10$ subintervalos.

12. Dada $f \in \mathcal{C}^6[a, b]$, pruebe que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

donde $h = \frac{1}{4}(b - a)$ y $x_k = a + h_k$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Además, pruebe que

$$E_4(f) = \frac{8h^7}{945} |f^{(6)}(\xi)|$$

para algún $\xi \in (a, b)$. Esta regla de integración se conoce como la regla de Boole.

13. Calcule el error en la aproximación de las integrales

$$\int_0^1 x^4 dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^5 dx$$

utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson. Encuentre el valor de la constante C , para la cual la regla del trapecio da un resultado correcto para el cálculo de

$$\int_0^1 (x^5 - Cx^4)dx$$

y muestre que la regla del trapecio da una mejor aproximación que la regla de Simpson cuando $\frac{15}{14} < C < \frac{85}{74}$

14. Use las fórmulas adecuadas de tres puntos para determinar $f'(0,6)$ basado en la siguiente tabla. Use la fórmula de diferencias central para determinar $f''(0,6)$

x	$f(x)$
0.5	1.9
0.6	2.3
0.7	1.5

15. De una función f se conocen los siguientes datos

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	-2	-1	0

Calcular un valor aproximado de $\int_0^3 f(x)dx$ a partir de:

- a) Un polinomio de interpolación, a lo sumo de grado tres, $p(x)$ obtenido de dichos datos.
- b) La recta $y(x)$ que mejor se ajusta a estos datos en el sentido de los mínimos cuadrados.
- c) La regla del trapecio compuesta.