



## Guía de Ejercicios V

1. Considere la tabla de datos:

$x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.9080348	0.6386093	0.3843735

- Use todas las fórmulas apropiadas para aproximar  $f'(0,4)$  y  $f''(0,4)$
  - Use todas las fórmulas apropiadas para aproximar  $f'(0,6)$  y  $f''(0,6)$
2. Sea  $f(x) = 3xe^x - \cos(x)$ . Aproxime  $f''(1,3)$  con  $h = 0,1$  y  $h = 0,01$ . Compare los resultados con el valor exacto de  $f''(1,3)$ .
3. Expandiendo la función  $f$  en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de  $x_0$  y evaluándolo en  $x_0 \pm h$  y  $x_0 \pm 2h$ , derive un método para aproximar  $f''(x_0)$ , cuyo término de error sea de orden  $h^2$ .
4. Derive las siguientes fórmulas de cinco puntos
- $f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$
  - $f''(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$
5. Aproxime las siguientes integrales usando todas las fórmulas conocidas de integración numérica. Compare las precisiones de las aproximaciones con las respectivas fórmulas de error:
- $\int_0^{0,1} \sqrt{1+x} dx$
  - $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$
  - $\int_{1,1}^{1,5} e^x dx$
  - $\int_0^4 e^x dx$
  - $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$
  - $\int_1^{5,5} \frac{dx}{x} + \int_{5,5}^{10} \frac{dx}{x}$
6. Encuentre aproximaciones de  $\int_0^1 (1+x^2)^{-1} dx$  utilizando regla de Simpson con  $h = 2^{-k}$ ,  $k = 1, 2$ . Calcule el error que comete en cada caso. Compare con las cotas de error que da la teoría.
7. Se quiere estimar  $\int_0^\pi \sin(x) dx$  por regla trapezoidal con  $n$  subdivisiones del intervalo y se desea tener un error menor que  $10^{-12}$ . ¿Qué tan grande debe ser  $n$  de acuerdo con la teoría?

8. Dados 3 puntos distintos  $x_l, x_i, x_r$ , demostrar que la fórmula

$$f'(x_i) \approx \frac{(x_i - x_l) \frac{f(x_r) - f(x_i)}{x_r - x_i} + (x_r - x_i) \frac{f(x_i) - f(x_l)}{x_i - x_l}}{x_r - x_l}$$

aproxima la derivada  $f'(x_i)$  con un orden de aproximación de 2.

9. Calcular una aproximación de la derivada tercera  $f'''(x_i)$  de una función  $f(x)$  en un punto  $x_i$ , utilizando  $f(x_i)$ ,  $f(x_i + h)$ ,  $f(x_i - h)$ ,  $f(x_i - 2h)$ .
10. Determine una cota de error al aproximar  $\int_a^b f(x)dx$ , con las reglas del trapecio y de Simpson. Utilice los valores:

a)  $f(x) = \ln(-x)$ ,  $a = -2$  y  $b = -1$

c)  $f(x) = \cos(-2x)$ ,  $a = 0$  y  $b = 2$

b)  $f(x) = 2^x$ ,  $a = -3$  y  $b = 3$

d)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $a = 1$  y  $b = 2$

11. Considere la función  $f$  definida por  $f(x) = e^{x^2}$  y el intervalo  $[0, 4]$ . Dado que  $f$  es integrable en  $[0, 4]$ , utilice la regla compuesta del trapecio para aproximar  $\int_0^4 f(x)dx$ , para:

a)  $m = 3$  subintervalos.

c)  $m = 7$  subintervalos.

b)  $m = 4$  subintervalos.

d)  $m = 10$  subintervalos.

12. Dada  $f \in C^6[a, b]$ , pruebe que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

donde  $h = \frac{1}{4}(b - a)$  y  $x_k = a + h_k$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Además, pruebe que

$$E_4(f) = \frac{8h^7}{945} |f^{(6)}(\xi)|$$

para algún  $\xi \in (a, b)$ . Esta regla de integración se conoce como la regla de Boole.

13. Calcule el error en la aproximación de las integrales

$$\int_0^1 x^4 dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 x^5 dx$$

utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson. Encuentre el valor de la constante  $C$ , para la cual la regla del trapecio da un resultado correcto para el cálculo de

$$\int_0^1 (x^5 - Cx^4)dx$$

y muestre que la regla del trapecio da una mejor aproximación que la regla de Simpson cuando  $\frac{15}{14} < C < \frac{85}{74}$

14. Use las fórmulas adecuadas de tres puntos para determinar  $f'(0,6)$  basado en la siguiente tabla. Use la fórmula de diferencias central para determinar  $f''(0,6)$

$x$	$f(x)$
0.5	1.9
0.6	2.3
0.7	1.5

15. De una función  $f$  se conocen los siguientes datos

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	2	-2	-1	0

Calcular un valor aproximado de  $\int_0^3 f(x)dx$  a partir de:

- a) Un polinomio de interpolación, a lo sumo de grado tres,  $p(x)$  obtenido de dichos datos.
- b) La recta  $y(x)$  que mejor se ajusta a estos datos en el sentido de los mínimos cuadrados.
- c) La regla del trapecio compuesta.