Universidad José Antonio Páez.
Facultad de Ingeniería.
Escuela de Computación.
Materia: Cálculo Numérico.
Prof. José Luis Ramírez B.

Guía de Ejercicios II

1. "Resuelva" los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando Eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás con una aritmética redondeo correcto a dos dígitos. No reordene las ecuaciones.(La solución exacta para cada sistema es $x_1 = 1 \quad, x_2 = -1, \quad x_3 = 3$).

   a) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 11 \end{array}\right.$

   b) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -9 \end{array}\right.$

   c) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 11, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

   d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -9, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$

2. Use el algoritmo de Eliminación Gaussiana y, si es posible, aritmética de precisión simple en una computadora, para resolver los siguientes sistemas lineales:

   a) $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_2 = 8. \end{array}\right.$

   b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3{,}333x_1 + 15920x_2 - 10{,}333x_3 & = & 15913 \\ 2{,}222x_1 + 16{,}71x_2 + 9{,}612x_3 & = & 28{,}544 \\ 1{,}5611x_1 + 5{,}1791x_2 + 1{,}6852x_3 & = & 8{,}4254 \end{array}\right.$

   c) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 & = & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 & = & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 & = & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 & = & \frac{1}{9} \end{array}\right.$

3. Dado el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + \alpha x_3 & = & -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 & = & 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

   a) Obtenga el (los) valor(es) de α para el(los) cual(es) el sistema no tiene solución.

b) Encuentre el (los) valor(es) de α para el(los) cual(es) el sistema tiene un infinito número de soluciones.

c) Considerando que existe una solución única para un valor dado α, encuentre la solución.

4. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU usando el Algoritmo de Factorización con $l_{ii} = 1$ para toda i:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1{,}5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4{,}5 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1{,}012 & -2{,}132 & 3{,}104 \\ -2{,}132 & 4{,}096 & -7{,}013 \\ 3{,}104 & -7{,}013 & 0{,}014 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Sean $\{1, -2, 3\}, \{1, -1\}, \{-1\}$ los multiplicadores de la Eliminación Gaussiana para obtener el sistema triangular

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Calcule el sistema original.

6. Calcule los números de productos y sumas para factorizar una matriz y para resolver el sistema triangular.

7. Resuelva el sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & 5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

8. Considere el sistema de orden n definido por la igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Muestre que el vector $x = \frac{1}{n+1}(1, 2, \ldots, n)$ es la única solución del sistema anterior.

9. Triangularizar la matriz de Hilbert de orden 4. Usando operaciones con fracciones en forma exacta en (a) y usando aritmética de punto decimal flotante con tres dígitos con redondeo en (b):

a)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

b)

$$H = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}500 & 0{,}333 & 0{,}250 \\ 0{,}500 & 0{,}333 & 0{,}250 & 0{,}200 \\ 0{,}333 & 0{,}250 & 0{,}200 & 0{,}167 \\ 0{,}250 & 0{,}200 & 0{,}167 & 0{,}143 \end{pmatrix}$$

10. Calcular la inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de las dos maneras siguientes:

a) Resolviendo el sistema matricial $AX = I$ por pivoteo parcial.

b) Calculando la factorización LU de A y aplicando la identidad $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

11. Determine los valores de α para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

admite factorización de Cholesky y calcúlela en su caso.

12. Calcular la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 \\ 10 & 10 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal de L son uno. Use la factorización para hallar la solución del sistema $Ax = b$ donde $b^t = (-2, 0, 2, 1)$.

13. Calcular la factorización de Cholesky de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 5 & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Deducir de la factorización el valor de λ que hace a la matriz singular.

14. Método de Gauss-Jordan: Este método se puede describir como sigue. Use la i-ésima ecuación para eliminar no solo los x_i en las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$, como se hizo en el método de eliminación de Gauss, sino también de $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. Reduciendo $[A, b]$ a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right)$$

la solución se obtiene tomando $x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{i,i}^{(}(i))}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Este procedimiento evita la necesidad de la sustitución hacia atrás en la Eliminación Gaussiana. Construya un algoritmo para el procedimiento de Gauss-Jordan siguiendo el patrón del algoritmo de Eliminación de Gauss sin pivoteo.

15. Realice el conteo de operaciones del método de Gauss-Jordan.

16. Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver los ejercicios (1), (2) y (7).

17. Si A es simétrica y definida positiva:

    a) Escribir el algoritmo de la factorización LDL^T.

    b) Hacer el conteo de operaciones de (a).

18. Suponga que m sistemas lineales $Ax = b$, $p = 1, \ldots, m$, han de resolverse, cada uno con la matriz de coeficientes A de $n \times n$.

    a) Hallar el número de operaciones que requiere la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás aplicada a la matriz ampliada $[A : b^1 b^2 \ldots b^m]$.

    b) Hallar el número de operaciones que requiere el método de Gauss-Jordan aplicado a la matriz ampliada $[A : b^1 b^2 \ldots b^m]$.

19. Dado el siguiente sistema, muestre que la matriz asociada es positiva definida. Resuelva por medio de la factorización de Cholesky y muestre la factorización $\tilde{L}D\tilde{L}^t$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & -5 \\ 8 & -4 & 17 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 15 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

20. Resolver, usando el método de eliminación gaussiana clásica y sin pivoteo parcial, el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0001 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

compare los resultados obtenidos.

21. Resolver, usando el método de eliminación gaussiana con pivoteo total el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

22. Estudiar el condicionamiento del sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\varepsilon > 0$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$.

23. Repetir el ejercicio anterior con la norma $\|\cdot\|_2$.

24. Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\varepsilon > 0$, pequeño pero no nulo para el computador, ¿qué resultado numérico se obtiene en el computador si se aplica el método de Gauss sin pivoteo?, ¿dicho resultado es la solución correcta del sistema lineal? Razone su respuesta.

25. Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} d & a \\ a & d \end{pmatrix}$, donde $0 < a < d$.

   a) Encuentre el factor L de Cholesky.

   b) Consiga el vector x tal que $Ax = b$ cuando $b = (3, 2)^t$, $d = 9$ y $a = 6$.

26. Considere las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los productos PA, AP , DA y AD. ¿Qué efecto produce premultiplicar y postmultiplicar una matriz A por una matriz de permutación?, ¿Y por una matriz diagonal?

27. Si se tiene una descomposición LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior y $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior, proponga un seudocódigo para resolver el sistema lineal $x^t A = b^t$.

28. Sea $A = \begin{pmatrix} 90 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 90 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 90 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 90 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 90 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Resuelva los sistemas $Ax = b$, $y^t A = c$ y $Ax = d$ usando una sola factorización LU.

29. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando Eliminación Gaussiana. Estime $\kappa(A)$.

a) $$\begin{aligned} 3{,}9x_1 + 1{,}6x_2 &= 5{,}5 \\ 6{,}8x_1 + 2{,}9x_2 &= 9{,}7 \end{aligned}$$
Use una aritmética de redondeo a 2 dígitos.

b) $$\begin{aligned} 4{,}56x_1 + 2{,}18x_2 &= 6{,}74 \\ 2{,}79x_1 + 1{,}38x_2 &= 4{,}13 \end{aligned}$$
Use una aritmética de redondeo a 3 dígitos.

c) $$\begin{aligned} 0{,}20000x_1 + 0{,}16667x_2 + 0{,}14286x_3 &= 0{,}50953 \\ 0{,}16667x_1 + 0{,}14286x_2 + 0{,}12500x_3 &= 0{,}43453 \\ 0{,}14286x_1 + 0{,}12500x_2 + 0{,}11111x_3 &= 0{,}37897 \end{aligned}$$
Use una aritmética de redondeo a 5 dígitos.

30. Aplique los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con $w = 1{,}25$ al sistema lineal

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ 0x_1 - x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

Use $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ y $M = 5$. La solución exacta del sistema es $x = (3,4,-5)^t$.

31. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para A y B.

32. Considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -14 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -19 \end{cases}$$

a) Para el sistema dado, obtener la matriz de iteración del método de Jacobi. Concluir si el proceso iterativo converge o no. Justificar.

b) Para el sistema dado, obtener la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel. Concluir si el proceso iterativo converge o no. Justificar.

33. Usar un procedimiento iterativo para aproximar soluciones a sistemas lineales y en el caso del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+5y+z & = & 18 \\ 3x+y-z & = & -2 \\ x+y-4z & = & -6 \end{array}\right.$$

calcular cinco iteraciones, tomando $x^{(0)} = (0,0,0)^t$. Examinar la convergencia o divergencia del método escogido. Si cree que es conveniente reorganizar el sistema antes de efectuar los cálculos, hágalo.

34. Una matriz de Hilbert $n \times n$ es una matriz $H = (h_{ij})$ con $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Su inversa $H^{-1} = (k_{ij})$ está dada por

$$k_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)((i-1)!(j-1)!)^2(n-i)!(n-j)!}$$

Calcular $\|H\|$, $\|H^{-1}\|$ y $\kappa(H)$, según las normas l_1, l_2 y l_∞ para $n = 3, 4, 5$.

35. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_2+4x_3 & = & 0 \\ x_1-x_2-x_3 & = & 0{,}375 \\ x_1-x_2+2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_1-x_2 & = & 0 \\ -x_1+2x_2-x_3 & = & 1 \\ -x_2+1{,}1x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   a) Si se aplicara el método iterativo de Jacobi para resolver cada uno de los sistemas anteriores, podría asegurarse la convergencia?

   b) Idem *a*) para el método de Gauss-Seidel.

   c) Idem *a*) para el método de SOR con $w = 1{,}2$

   d) Resolver los sistemas anteriores con una tolerancia de 10^{-2} y un número de iteraciones $N \leq 25$ a partir de $x^{(0)} = 0$ y $w = 1{,}2$.

36. Encontrar la forma explícita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema $Ax = b$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

37. Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10x_1-x_2 & = & 9 \\ -x_1+10x_2-2x_3 & = & 7 \\ -2x_2+10x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación w escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa w tomando como valores iniciales $x = 0$. Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

38. Emplear el Método de Jacobi, el Método de Gauss-Seidel, el Método de SOR con $w = 1{,}3$ para hallar la solución al sistema lineal $Ax = b$ dentro de 10^{-5} en norma l_∞

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{cuando} \quad j = i \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 16, \\ -1 & \text{cuando} \quad \begin{cases} j = i+1 & \text{y} \quad i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, \\ j = i-1 & \text{y} \quad i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, \\ j = i+4 & \text{y} \quad i = 1, 2, \ldots, 12, \\ j = i-4 & \text{y} \quad i = 5, 6, \ldots, 16, \end{cases} \\ 0 & \text{cuando} \quad \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

39. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resuelva el sistema $Ax = b$ por el método de Jacobi. Haga lo mismo con el método de Gauss-Seidel y deduzca cuál de ellos converge más rápidamente.

40. Hallar un valor aproximado de la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 9x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y - z &= 1 \\ -y + z &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

trabajando con cuatro cifras decimales únicamente,tomando $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$ y aplicando tres veces:

a) El método de Jacobi.

b) El método de Gauss-Seidel.

c) El método de relajación con $\omega = 1{,}2$

41. Sea un sistema $Ax = b$,con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los radios espectrales de las matrices de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Qué se observa de los resultados obtenidos?.

42. Para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 = b_1 \\ -ax_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

se va a aplicar el método de relajación con parámetro ω comprendido entre 0 y 2.

a) Sea $a = 1/2$. Hallar el radio espectral de la matriz del método para $\omega = 0{,}1; 1/2; 1; 3/2$ y 2.

b) De (a) deducir cuál es el mejor valor entre todos los de ω respecto a rapidez de convergencia y cuál es el mejor entre los que verifican $0 < \omega < 2$.

43. En la resolución del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hacer un estudio completo de la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.