




# *Geometría Global de Curvas y Superficies*

## *Apuntes*

Juan Luis Suárez Díaz  
Universidad de Granada





# Agradecimientos

*Andrés Herrera*, proveedor de la plantilla de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sobre la que se han escrito estos apuntes.

*Sebastián Montiel*, profesor de la asignatura.



# Índice general

<b>1. Teoría global de curvas planas</b>	<b>7</b>
1.1. Asimetría de las definiciones de curva y superficie . . . . .	7
1.1.1. Curvas simples . . . . .	7
1.1.2. Ejercicios . . . . .	8
1.1.3. Clasificación topológica de curvas simples . . . . .	10
1.2. Teorema de la Curva de Jordan . . . . .	12
1.2.1. El teorema de la Curva de Jordan . . . . .	13
1.2.2. Orientabilidad de las curvas de Jordan . . . . .	18
1.2.3. Ejercicios . . . . .	21
1.3. Índice de rotación de curvas planas cerradas . . . . .	24
1.3.1. Ejercicios . . . . .	33
1.4. El teorema de la divergencia y sus consecuencias . . . . .	36
1.4.1. Teorema de la divergencia . . . . .	36
1.4.2. Ejemplos y consecuencias . . . . .	37
1.4.3. La desigualdad isoperimétrica . . . . .	43
1.4.4. Ejercicios . . . . .	45
<b>2. Teoría global de superficies</b>	<b>47</b>
2.1. Teorema de Jordan. Teorema de Brower-Samelson. Entornos tubulares. . . . .	47





# Capítulo 1

## Teoría global de curvas planas

### 1.1. Asimetría de las definiciones de curva y superficie

Recordamos las definiciones de curva y superficie:

**Definición 1.1.1.** Una *curva (parametrizada)* es una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciable, donde  $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Al conjunto  $\alpha(I)$  se le llama *traza* de la curva  $\alpha$ .

Diremos que una curva  $\alpha$  es *plana* si su traza está contenida dentro de un plano afín. En tal caso, la curva se puede identificar como una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Diremos que una curva  $\alpha$  es *regular* si  $\alpha'$  no se anula. Además, diremos que está *parametrizada por el arco (p.p.a)* si  $|\alpha'(t)| = 1 \ \forall t \in I$ .

**Definición 1.1.2.** Una *superficie* es un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  tal que para todo punto  $p \in S$  existen un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , un entorno  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  verificando:

- i)  $X$  es diferenciable en  $U$ .
- ii)  $(dX)_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva, para todo  $p \in U$ .
- iii)  $X(U) = W \cap S$  y  $X : U \rightarrow W \cap S$  es un homeomorfismo.

**Comentario 1.1.1.** Recordemos que la propiedad ii) que define a las superficies es equivalente a que las derivadas parciales  $X_u$  y  $X_v$  sean linealmente independientes, o equivalentemente, que  $X_u \times X_v \neq 0$ .

Vemos que las definiciones de ambas estructuras son muy distintas, a pesar de que podría esperarse que las definiciones de curvas y superficies fueran análogas salvo la dimensión, puesto que se tratan de objetos matemáticos muy similares. Sin embargo, las curvas se definen como una aplicación de intervalos al plano o al espacio (aunque lo que nos interesa estudiar en esta asignatura es la traza de estas) mientras que las superficies se definen como subconjuntos del espacio. También, las propiedades que definen las curvas son a primera vista más simples que las que definen a las superficies.

#### 1.1.1. Curvas simples

A continuación nos planteamos la siguiente pregunta: ¿qué pasaría si definiésemos una superficie adaptando la definición de curva? En tal caso, la superficie vendría dada por la imagen de una aplicación

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , diferenciable. Para adaptar la condición de regularidad, tenemos que exigir a  $X$  que las derivadas parciales no se anulen. Usando esta definición ganaríamos algunas propiedades adicionales en las superficies, como la posibilidad de tener autointersecciones. Sin embargo, perderíamos infinidad de topologías, impidiendo que conjuntos compactos como las esferas o los toros fueran superficies ( $\dot{!}$ ?).

Nos planteamos ahora la pregunta recíproca. ¿Qué pasa si definimos las curvas adaptando la definición de superficie. En este caso, obtenemos el concepto de curva entendido como una variedad topológica de dimensión 1 diferenciable, y la llamaremos curva simple.

**Definición 1.1.3.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^2$ ). Diremos que  $C$  es una *curva simple* (resp. *curva simple plana*) si para todo  $p \in C$  existen un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$ , un entorno abierto  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^2$ ) y una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^2$ ) verificando:

i)  $\alpha$  es diferenciable en  $I$  y  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$ .

ii)  $\alpha(I) = W \cap C$

iii)  $\alpha : I \rightarrow W \cap C$  es un homeomorfismo.

**Comentario 1.1.2.** La condición i) del enunciado anterior es equivalente a decir que la aplicación  $\alpha$  es una curva parametrizada regular, que incluso podemos suponer que es p.p.a. Por tanto, una curva simple es un subconjunto del plano o el espacio que localmente es la traza de una curva parametrizada por el arco y embebida.

También es claro que toda curva simple contenida en un plano se puede identificar con una curva simple plana.

## 1.1.2. Ejercicios

Veamos algunos ejemplos.

### Ejercicio 1

Probar que las rectas y circunferencias de  $\mathbb{R}^3$  son curvas simples.

Solución
----------

Podemos definir cualquier recta en el espacio por un punto de origen y un vector unitario de dirección. Sea  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  y  $v \in \mathbb{S}^2$ , y consideramos la recta  $R = \{p \in \mathbb{R}^3 | p = p_0 + tv, t \in \mathbb{R}\}$ . Dado  $p \in R$ , tomamos  $I = \mathbb{R}$ ,  $W = \mathbb{R}^3$  y  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = p_0 + tv$  (vemos que en este caso la parametrización es independiente de  $p$ ). Entonces es claro que  $\alpha$  es una curva p.p.a, que  $\alpha(I) = R = R \cap W$  y que  $\alpha : I \rightarrow R$  es un homeomorfismo (es continua y biyectiva con inversa continua dada por  $p \mapsto \langle p - p_0, v \rangle$ ).

Dados un centro  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  y un radio  $r > 0$ , la circunferencia  $C$  con centro  $p_0$  y radio  $r$  viene dada por  $C = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p - p_0| = r\}$ . Dado  $p \in C$ , es fácil comprobar que  $\exists \theta \in [0, 2\pi[$  tal que  $p = p_0 + r(\cos \theta, \sin \theta)$ . Consideramos  $I = ]\theta - \pi, \theta + \pi[$ ,  $W = \mathbb{R}^2 - \{p_0 - r(\cos \theta, \sin \theta)\}$  (es decir, excluimos la antípoda del punto  $p$ ), y la aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = p_0 + r(\cos t, \sin t)$ . Las dos primeras propiedades son claras, se cumple que  $W \cap C = C - \{p_0 - r(\cos \theta, \sin \theta)\}$ , y  $\alpha$  es continua, biyectiva y lleva los intervalos abiertos de  $I$  en abiertos de  $W \cap C$ , luego es un homeomorfismo.



Para cualquier circunferencia en el espacio contenida en un plano  $P$  podemos repetir este razonamiento sobre el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  y componer  $\alpha$  con isometrías transformen dicho plano en  $P$ , moviendo los centros adecuadamente.

## Ejercicio 2

Probar que las trazas de las siguientes curvas no son curvas simples.

- i) *Rosa de cuatro pétalos*:  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\sin 2t \cos t, \sin 2t \sin t)$

En general, las curvas con autointersecciones no son curvas simples.

- ii) *Folium de Descartes*:  $\alpha : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$ . Ver que, además, es inyectiva.

Por tanto, hay curvas sin autointersecciones que tampoco son simples.

### Solución

- i) Llamamos  $R = \alpha(\mathbb{R})$ . Tenemos que  $0 = \alpha(0) \in R$ . Es claro que  $\alpha$  es  $2\pi$ -periódica, luego podemos limitarnos a estudiar lo que ocurre en  $[0, 2\pi]$ . Veamos que el origen no tiene entornos homeomorfos a intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$ .

Las imágenes  $\alpha(]0, \pi/2[)$ ,  $\alpha(]\pi/2, \pi[)$ ,  $\alpha(]\pi, 3\pi/2[)$  y  $\alpha(]3\pi/2, 2\pi[)$  se aplican sobre los cuadrantes primero, cuarto, tercero y segundo, respectivamente, y  $0$  es la imagen en las fronteras de los cuatro intervalos. Por la periodicidad,  $R - \{0\}$  tiene cuatro componentes conexas, cada una en un cuadrante, mientras que un intervalo sin un punto solo puede tener dos componentes, luego  $R$  no puede ser una curva simple.

- ii) Pongamos  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Veamos que es inyectiva. Supongamos  $s \neq t$ . Si se verifica  $\frac{3t}{1+t^3} \neq \frac{3s}{1+s^3}$ , entonces  $x$  es inyectiva, y por tanto también lo es  $\alpha$ . Si por el contrario,  $\frac{3t}{1+t^3} = \frac{3s}{1+s^3}$ , multiplicando por  $t$  y  $s$  respectivamente, se tiene que  $\frac{3t^2}{1+t^3} \neq \frac{3s^2}{1+s^3}$ , luego  $y$  es inyectiva y por tanto también lo es  $\alpha$ .

Llamamos  $I = ]-1, +\infty[$  y  $F = \alpha(I)$ . Veamos que en  $(0, 0) = \alpha(0)$  no hay entornos homeomorfos a  $\mathbb{R}$ . Tomamos una bola abierta  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  centrada en el origen y que no contenga a  $\alpha(1) \neq (0, 0)$ . Como  $(0, 0) = \alpha(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \in B$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $r > 0$  tales que  $U = \alpha(]-\varepsilon, \varepsilon[)$  y  $V = \alpha(]r, +\infty[) \subset B$ .  $U$  y  $V$  son conexos (imagen continua de intervalos) y disjuntos ( $\alpha$  es inyectiva y  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  y  $]r, +\infty[$  son disjuntos, pues en caso contrario su unión sería  $]-\varepsilon, +\infty[$  y  $\alpha(1) \in B$ ). Sin embargo, su unión es homeomorfa a una estrella de tres puntas con origen  $\{(0, 0)\}$ , que no puede ser homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Por la arbitrariedad de  $B$  se deduce que  $F$  no puede ser una curva simple.

## Ejercicio 3

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva regular, que además es un homeomorfismo sobre su imagen  $\alpha(I)$ , demostrar que  $\alpha(I)$  es una curva simple.

## Solución

Basta tomar, en la definición de curva simple, para cada  $p \in \alpha(I)$  como intervalo el propio  $I$ , como entorno abierto de  $p$  el espacio  $\mathbb{R}^3$  y como aplicación la propia  $\alpha$ . Es claro que se verifican las tres propiedades.

Para el próximo ejercicio trabajaremos con curvas periódicas. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular que sea periódica como aplicación, es decir, existe  $a \in \mathbb{R}^+$  con  $\alpha(t+a) = \alpha(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Si existiera una sucesión  $\{a_n\}$  de números positivos tales que  $\alpha(t+a_n) = \alpha(t)$  y  $\{a_n\} \rightarrow 0$  para cierto  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t+a_n) - \alpha(t)}{a_n} = 0$ , que no es posible por ser  $\alpha$  regular. Así, existe  $A \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\alpha(t+A) = \alpha(t) \forall t \in \mathbb{R}$  y no hay ningún positivo menor estricto que  $A$  verificando esta condición. En esta situación diremos que  $A$  es el *período* de  $\alpha$  y que  $\alpha$  es una curva  $A$ -periódica.

## Ejercicio 4

Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular  $L$ -periódica con  $L > 0$  y tal que  $\alpha$  es inyectiva en  $[0, L[$ . Probar que la traza de  $\alpha$  es una curva simple homeomorfa a una circunferencia.

## Solución

Sea  $C := \alpha(\mathbb{R})$ . Por la periodicidad, se tiene  $C = \alpha([0, L[) = \alpha([0, L])$  (en particular, compacta por ser la imagen continua de un compacto). Por otra parte, la restricción  $\alpha : [0, L] \rightarrow C$  es continua, sobreyectiva y cerrada (es continua de un compacto a un T2). Por tanto, es una identificación.

Sea  $R_\alpha$  la relación inducida por  $\alpha$ , es decir,  $s_1 R_\alpha s_2 \iff \alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ . Sabemos que la aplicación  $\bar{\alpha} : [0, L]/R_\alpha \rightarrow C$  dada por  $\bar{\alpha}([s]) = \alpha(s)$  es un homeomorfismo. Pero la relación de equivalencia sobre  $[0, L]$  no es otra que

$$s_1 R_\alpha s_2 \iff \begin{cases} s_1 = s_2 \\ s_1 = 0, s_2 = L \\ s_1 = L, s_2 = 0 \end{cases}$$

por la inyectividad y periodicidad de  $\alpha$ . Luego el cociente es un intervalo compacto con sus extremos identificados, es decir, una circunferencia, y por tanto  $C$  es homeomorfa a una circunferencia.

Finalmente, restringiendo  $\alpha$  a intervalos de la forma  $]\theta, \theta + L[$  tenemos curvas parametrizadas que recubren localmente los puntos de  $C$  y son homeomorfismos sobre su imagen, dando a  $C$  la estructura de curva simple.

## 1.1.3. Clasificación topológica de curvas simples

En estos ejercicios hemos visto que las rectas y circunferencias son curvas simples, algunos ejemplos de curvas no simples, con y sin autointersecciones, y varios métodos para obtener curvas simples a partir de curvas parametrizadas, en un caso homeomorfas a rectas, y en el otro homeomorfas a circunferencias. A continuación vamos a ver que, de hecho, topológicamente estas son todas las curvas simples que hay.

**Teorema 1.1.3** (Clasificación topológica de las curvas simples). *Si una curva simple es conexa, entonces o bien es homeomorfa a  $\mathbb{R}$ , en cuyo caso puede cubrirse por una sola parametrización, o bien es homeomorfa a una circunferencia, en cuyo caso es la traza de una curva parametrizada regular periódica.*

*Demostración.* Llamemos  $C$  a la curva simple conexa. Sean  $\alpha : I \rightarrow C$  y  $\beta : J \rightarrow C$  dos parametrizaciones por el arco de  $C$ , con  $I$  y  $J$  intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$  y sean  $U$  y  $V$  sus dos abiertos imágenes ( $\alpha$  y  $\beta$  son homeomorfismos sobre estos abiertos). Supongamos que  $U \cap V \neq \emptyset$  y que ninguno está contenido en el otro.

Se tiene que  $U \cap V$  es un abierto no vacío de  $U$  y de  $V$ , luego  $\alpha^{-1}(U \cap V)$  es un abierto no vacío de  $I$  y  $\beta^{-1}(U \cap V)$  es un abierto no vacío de  $J$ . La aplicación de cambio de parámetros  $f = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(U \cap V) \rightarrow \beta^{-1}(U \cap V)$  es un difeomorfismo, y verifica  $\alpha = \beta \circ f$  en  $\alpha^{-1}(U \cap V)$ . Por la regla de la cadena,  $\alpha'(s) = f'(s)\beta'(f(s)) \forall s \in \alpha^{-1}(U \cap V)$ . Como  $\alpha$  y  $\beta$  están p.p.a, se deduce que  $|f'(s)| = 1$ , es decir,  $f$  es la identidad o su opuesta, más una constante, en cada una de las componentes conexas de  $\alpha^{-1}(U \cap V)$ .

Consideramos el subconjunto  $X$  del rectángulo  $I \times J$  de  $\mathbb{R}^2$  definido por  $X = \{(s_1, s_2) \in I \times J \mid \alpha(s_1) = \beta(s_2)\} = \{(s_1, s_2) \in I \times J \mid f(s_1) = s_2\}$ .

Este conjunto es un cerrado de  $I \times J$ , por ser  $\alpha$  y  $\beta$  continuas. Además,  $X$  es el grafo sobre  $I$  de  $f$ , y a su vez el grafo sobre  $J$  de  $f^{-1}$  (en ambos casos siempre que esté definida), lo que nos da la siguiente propiedad:

**A)**  *$X$  es un grafo sobre una unión de intervalos abiertos de  $I$  y también un grafo sobre una unión de intervalos de  $J$  que está formado por segmentos de pendiente 1 o de pendiente -1.*

Sea  $\sigma$  uno de dichos segmentos. Como  $X$  es cerrado, si algún extremo de  $\sigma$  no está en los lados del rectángulo  $I \times J$ , ese extremo estará en  $\sigma$  y por tanto la proyección del segmento sobre  $I$  no sería un intervalo abierto. Esto nos muestra lo siguiente:

**B)** *Todos los segmentos que componen  $X$  tienen sus extremos en los lados del rectángulo  $I \times J$ .*

Además, si los dos extremos de  $\sigma$  estuvieran sobre lados paralelos del rectángulo, la proyección de  $\sigma$  sobre uno de los dos intervalos  $I$  o  $J$  sería sobreyectiva, de forma que uno de los intervalos  $U$  o  $V$  estaría contenido en el otro, contradiciendo lo supuesto. Por tanto:

**C)** *Todos los segmentos que componen  $X$  tienen sus extremos sobre lados no paralelos de  $I \times J$ .*

De las propiedades A), B) y C) se deduce que  $X$  está formado por a lo sumo dos segmentos y, en ese caso, segmentos de la misma pendiente (en caso contrario habría más de un segmento ocupando la misma altitud o longitud, contradiciendo la definición de  $X$ ).

Para el caso en el que tenemos dos segmentos, se tiene que  $\alpha^{-1}(U \cap V)$  tiene dos componentes conexas,  $I_1$  e  $I_2$ , y  $\beta^{-1}(U \cap V)$  otras dos,  $J_1$  y  $J_2$ , de forma que  $f : I_1 \cup I_2 \rightarrow J_1 \cup J_2$  coincide restringida, por ejemplo, a  $I_2$ , con una traslación  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $T(I_2) = J_1$  y restringida a  $I_1$  con una traslación  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $R(I_1) = J_2$ .

Entonces  $K = I \cup T^{-1}(J)$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  que contiene estrictamente al intervalo  $I$  y sobre el que se puede definir una curva sobreyectiva  $\gamma : K \rightarrow U \cup V \subset C$ , dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(s) & , s \in I \\ (\beta \circ T)(s) & , s \in T^{-1}(J) \end{cases}$$

que está bien definida porque  $\alpha = \beta \circ f = \beta \circ T$  en  $I \cap T^{-1}(J) = I_2$ , y así, es diferenciable y está p.p.a. Además el intervalo  $K$  contiene dos subintervalos  $I_1 \subset I \subset K$  y  $T^{-1}(J_2) \subset T^{-1}(J) \subset K$  abiertos y disjuntos tales que  $\gamma|_{I_1} = (\gamma \circ S)|_{I_1}$  y  $S(I_1) = T^{-1}(J_2)$ , para la traslación  $S = T^{-1} \circ R$ . De otra forma,  $\gamma : K \rightarrow U \cup V \subset C$  se extiende de manera única a una curva periódica cuya imagen es  $C$ . En este caso, tenemos que  $C$  es homeomorfa a una circunferencia.

Si hacemos un razonamiento análogo para el caso en que tenemos un solo segmento, llegaríamos a que existe un intervalo  $K$  de  $\mathbb{R}$  que contiene propiamente a  $I$  y una parametrización por el arco  $\gamma : K \rightarrow C$  cuya imagen es  $U \cup V$ .

Supongamos que  $C$  no es una curva de Jordan y sea  $\alpha : I \rightarrow C$  una parametrización por el arco de  $C$ . Supongamos además que  $\alpha$  es maximal, y que  $\alpha(I)$  es un abierto propio de  $C$ . [...]

□

**Corolario 1.1.4.** *Toda curva simple conexa es la imagen de una curva parametrizada.*

## 1.2. Teorema de la Curva de Jordan

En esta sección nos planteamos la separación del plano a partir de curvas simples compactas.

**Definición 1.2.1.** Una *curva de Jordan* es un subconjunto homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Las curvas simples compactas y conexas o, equivalentemente, las trazas de curvas periódicas y sin autointersecciones son curvas de Jordan.

En adelante, si no se especifica lo contrario, solo consideraremos curvas de Jordan que sean curvas simples compactas y conexas, sobre las que podremos trabajar con herramientas del análisis diferencial.

Cuando la curva es  $\mathbb{S}^1$ , parece claro que divide al plano en dos componentes conexas, y además con una de ellas acotada y la otra no acotada. En efecto,  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| < 1\} \cup \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| > 1\}$ . La unión es disjunta. El primer subconjunto es conexo, puesto que es convexo, y el segundo también lo es. Esto se puede probar uniendo conjuntos conexas con puntos en común de forma reiterada, comenzando por una circunferencia de radio 2, y añadiendo semirrectas abiertas con origen en los puntos de  $\mathbb{S}^1$  y perpendiculares a esta. Además, por la continuidad de la aplicación módulo es claro que ambos conjuntos son abiertos. Por tanto, tenemos una partición por abiertos conexas no vacíos de  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$ , luego esta es la familia de componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$ , y además es claro que una es acotada y la otra no.

En general, con una curva de Jordan cualquiera es complicado seguir este mismo argumento. Para ello, seguimos la siguiente idea. Partimos de un punto del plano que no esté en la curva y queremos distinguir entre los conceptos "dentro" y "fuera". Para ello, empezamos a movernos en línea recta, atravesando a la curva cuantas veces sea necesario, intentando evitar acercarnos tangencialmente a la curva. Cada vez que la atravesemos estaríamos pasando, por tanto, de "dentro" a "fuera" o de "fuera" a "dentro". Como la curva está acotada, a partir de cierto momento estaríamos "fuera" siempre. Una vez llegados a esta situación, si habíamos partido de "dentro" deberíamos haber intersecado a la curva un número impar de veces, mientras que si partíamos de "fuera" debíamos haberlo hecho un número par

de veces. Partiendo de esta idea demostraremos el teorema de la curva de Jordan. Primero recordamos algunas definiciones y teoremas del análisis, y sus consecuencias.

**Definición 1.2.2.** Sea  $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Un punto  $x \in \mathbb{R}^m$  se dice *valor singular* de  $f$  si es la imagen de un punto crítico de la función, es decir,  $\exists p \in O$  con  $\nabla f(p) = 0$  y  $f(p) = x$ .

Se dice que  $x$  es un *valor regular* de  $f$  si no es un valor singular de  $f$ .

**Teorema 1.2.1** (Teorema de Sard). *Sea  $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Entonces, el conjunto de valores singulares de  $f$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^m$ .*

**Corolario 1.2.2.** *Sea  $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Entonces, el conjunto de valores regulares de  $f$  es denso en  $\mathbb{R}^m$ .*

**Corolario 1.2.3.** *Sea  $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable, con  $f(O) \subset \mathbb{S}^1$ . Entonces, el conjunto de valores regulares de  $f$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .*

*Demostración.*  $p_1 \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $p_1$  es la proyección canónica sobre la primera variable, está en la hipótesis del teorema de Sard, luego sus valores regulares son densos en  $\mathbb{R}$ . [COMPLETAR]  $\square$

### 1.2.1. El teorema de la Curva de Jordan

Finalmente demostramos el teorema, cuando la curva es simple, y por tanto, imagen de una regular. El resultado es cierto en general para cualquier curva de Jordan. Para ello se utiliza que toda curva de Jordan es aproximable por curvas regulares.

**Teorema 1.2.4** (Teorema de la Curva -diferenciable- de Jordan). *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva simple compacta y conexa. Entonces  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene exactamente dos componentes conexas, cuya frontera común es  $C$ . Además, una de ellas es acotada (dominio interior) y la otra es no acotada (dominio exterior).*

*Demostración.* Podemos suponer  $C = \alpha(I)$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo abierto, y  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva p.p.a. Dados  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $v \in \mathbb{S}^1$ , notamos por  $S_{p,v}$  (resp.  $R_{p,v}$ ) a la semirrecta (resp. recta) con origen en  $p$  (resp. pasa por  $p$ ) y dirección y sentido  $v$  (resp. dirección  $v$ ). Vamos a demostrar primero algunos resultados previos.

**Lema 1.2.5.** *Sea  $C$  una curva simple en  $\mathbb{R}^2$ . Dados  $p \in \mathbb{R}^2 - C$  y  $v \in \mathbb{S}^1$ , existe  $w \in \mathbb{S}^1$  arbitrariamente próximo a  $\ell$  y tal que  $S_{p,w}$  y  $C$  se cortan transversalmente.*

*Demostración.* Sea  $p \in \mathbb{R}^2 - C$ . Definimos  $f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $f_p(s) = \frac{\alpha(s)-p}{|\alpha(s)-p|}$ . Es claro que  $f_p(I) \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

Sea  $v \in \mathbb{S}^1$ . Queremos estudiar  $f_p^{-1}(\{v\})$ . Se verifica

$$\begin{aligned} s \in f_p^{-1}(\{v\}) &\iff f_p(s) = v \iff \frac{\alpha(s)-p}{|\alpha(s)-p|} = v \iff \alpha(s) = p + |\alpha(s)-p|v \\ &\iff \alpha(s) = p + \lambda v, \lambda > 0 \iff \alpha(s) \in S_{p,v} \end{aligned}$$

$f_p$  es derivable, y su derivada es

$$f'_p(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha(s) - p|} - \frac{\langle \alpha(s) - p, \alpha'(s) \rangle}{|\alpha(s) - p|^3} (\alpha(s) - p) \quad \forall s \in I.$$

Igualando la derivada a 0 obtenemos que  $s$  es un punto crítico de  $f_p \iff \alpha'(s) = \eta(\alpha(s) - p)$ , donde  $\eta = \frac{\langle \alpha(s) - p, \alpha'(s) \rangle}{|\alpha(s) - p|^2}$ . Y por lo visto anteriormente, si además  $s \in f_p^{-1}(\{v\})$ , entonces  $\alpha(s) = p + \lambda v$ , y sustituyendo queda que  $\alpha'(s) = \eta \lambda v = \mu v$ , con  $\mu = \eta \lambda$ , es decir,  $\alpha'(s) \parallel v$ . En conclusión,  $s$  es un punto crítico de  $f_p \iff C$  y  $S_{p,v}$  son tangentes en  $\alpha(s)$ .

Por tanto,  $v \in \mathbb{S}^1$  es un valor regular de  $f_p \iff S_{p,v}$  y  $C$  se cortan transversalmente. Aplicando el teorema de Sard a la función  $f_p$ , dado  $v \in \mathbb{S}^1$  existe  $w \in \mathbb{S}^1$  arbitrariamente próximo a él de forma que  $S_{p,w}$  y  $C$  se cortan transversalmente. Con esto probamos que siempre podemos encontrar vectores cuya semirrecta asociada corte transversalmente a la curva.  $\square$

**Lema 1.2.6.** Sea  $C$  una curva simple cerrada en  $\mathbb{R}^2$ . Dados  $p \in \mathbb{R}^2 - C$  y  $v \in \mathbb{S}^1$  tales que  $C$  y  $S_{p,v}$  se cortan transversalmente, y dado  $\alpha(s_0) \in C \cap S_{p,v}$ , entonces existe  $\delta > 0$  y un entorno abierto  $W$  de  $\alpha(s_0)$  en  $C$  tales que  $B(p, \delta) \cap C = \emptyset$  y  $\forall q \in B(p, \delta)$ ,  $W$  y  $S_{q,v}$  se cortan transversalmente y  $\#(W \cap S_{q,v}) = 1$ .

*Demostración.* Sea  $v \in \mathbb{S}^1$ . Por el lema 1.2.5, podemos suponer que  $S_{p,v}$  y  $C$  se cortan transversalmente. Consideramos un punto en la intersección,  $\alpha(s_0) \in S_{p,v} \cap C$ . Por la transversalidad,  $v \nparallel \alpha'(s_0)$  (en particular,  $v \neq \pm \alpha'(s_0)$ ).

Definimos la función distancia con signo a la recta  $R_{p,v} := p + L\{v\}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(s) = \langle \alpha(s) - p, J(v) \rangle$ , donde  $J$  es el giro de  $90^\circ$  en el sentido antihorario. Es fácil ver que  $g(s_0) = 0$ , y  $g$  es derivable con  $g'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), J(v) \rangle \neq 0$  ( $v \nparallel \alpha'(s_0)$ ).

Usamos ahora la hipótesis de que  $C$  es cerrada, luego  $\mathbb{R}^2 - C$  es abierto, y por tanto podemos tomar  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap C = \emptyset$ . También, por la conservación del signo, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $g'(s) \neq 0 \quad \forall s \in ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$ .  $g$  restringida a este último intervalo es diferenciable y su derivada no se anula, luego es estrictamente monótona, y en consecuencia un homeomorfismo sobre su imagen. Como  $0 = g(s_0) \in g[ ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$ , podemos asumir que dicha imagen es de la forma  $] - a, b[$ , con  $a, b > 0$ .

Tomamos  $\delta = \min\{r, a, b\} > 0$ , y dado  $q \in B(p, \delta)$ , definimos  $h_q : ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h_q(s) = \langle \alpha(s) - q, J(v) \rangle$ . Es decir, la distancia con signo a rectas paralelas a  $R_{p,v}$  que se quedan dentro de la bola de radio  $\delta$ . Se cumple que

$$h_q(s) = \langle \alpha(s) - p + p - q, Jv \rangle = \langle \alpha(s) - p, Jv \rangle + \langle p - q, Jv \rangle = g(s) + \langle p - q, Jv \rangle.$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz, se verifica  $|\langle p - q, Jv \rangle| \leq |p - q| |Jv| = |p - q| < \delta$ . Llamemos  $x = \langle p - q, Jv \rangle$ . Entonces  $x, -x \in ] - \delta, \delta[ \subset ] - a, b[$ . Como  $] - a, b[$  es homeomorfo a  $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$ , y en particular biyectivo,  $\exists^1 s_1 \in ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$  tal que  $g(s_1) = -x$ , luego  $h(s_1) = g(s_1) + x = 0$ . Pero esto es equivalente a que  $\alpha(s_1) \in C \cap S_{q,v}$ . Además,  $h'(s_1) = g'(s_1) \neq 0$  ( $s_1 \in ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$ ), luego por la interpretación de  $g'$ ,  $C$  y  $S_{q,v}$  se cortan transversalmente.

Por tanto en  $W = \alpha[ ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$  y para el  $\delta$  escogido se verifica que  $B(p, \delta) \cap C = \emptyset$  y  $\forall q \in B(p, \delta)$  y  $W$  y  $S_{q,v}$  se cortan transversalmente y su intersección es un único punto.  $\square$

Finalmente demostramos el teorema. Consideramos los conjuntos

$$\Omega_0 = \{p \in \mathbb{R}^2 - C \mid \exists v \in \mathbb{S}^1 \text{ tal que } \#(S_{p,v} \cap C) \text{ es par y el corte es transversal.}\}$$

$$\Omega_1 = \{p \in \mathbb{R}^2 - C \mid \exists v \in \mathbb{S}^1 \text{ tal que } \#(S_{p,v} \cap C) \text{ es impar y el corte es transversal.}\}$$

- $\mathbb{R}^2 - C = \Omega_0 \cup \Omega_1$

Sea  $p \in \mathbb{R}^2$ . Por el lema 1.2.5  $\exists w \in \mathbb{S}^1$  con  $S_{p,w}$  y  $C$  cortándose transversalmente. Tomamos  $\alpha(s) \in S_{p,w} \cap C$ . Por el lema 1.2.6 aplicado sobre el punto  $p$  se tiene que existe un entorno  $W$  donde  $W$  y  $S_{p,w}$  se cortan transversalmente y la intersección es un único punto, luego necesariamente  $S_{p,w} \cap W = \{\alpha(s)\}$ . Pero esto es justo la definición de punto aislado, es decir, los puntos de  $S_{p,w} \cap C$  son aislados, y en consecuencia su topología inducida es la discreta.

Por otra parte,  $C \cap S_{p,w}$  es un cerrado de un compacto ( $C$ ), luego es compacto. Pero un conjunto con la topología discreta es compacto si y solo si es finito. Por tanto,  $C \cap S_{p,w}$  es finito, y en particular es de cardinal par o impar, esto es,  $p \in \Omega_0 \cup \Omega_1$ . Luego  $\mathbb{R}^2 - C \subset \Omega_0 \cup \Omega_1$  y la otra inclusión es clara, así que se da la igualdad.

- $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$

Supongamos que  $\exists p \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 - C$ . Entonces existen  $v, w \in \mathbb{S}^1$ , y necesariamente  $v \neq w$  tales que  $S_{p,v}$  y  $S_{p,w}$  cortan transversalmente a  $C$ , siendo  $\#(S_{p,v} \cap C)$  par y  $\#(S_{p,w} \cap C)$  impar.

Sea  $\alpha(s_0) \in C$ . Como  $C$  es compacta, podemos suponer además que  $\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^2 - (S_{p,v} \cup S_{p,w})$ . Como  $C$  es la traza de una curva periódica e inyectiva en el periodo, podemos suponer  $[s_0, s_0 + L]$  y estudiar la curva en este intervalo.

El conjunto  $\mathbb{R}^2 - (S_{p,v} \cup S_{p,w})$  tiene dos componentes conexas, dadas por  $A = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \angle(u - p, v - p) < \angle(v - p, w - p)\}$  y  $B = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(u - p, v - p) \notin ]0, \angle(v - p, w - p)[, \text{ o algo así. Por la transversalidad, por cada intersección de la curva con las semirrectas hay un cambio de componente conexa (si no, la función distancia con signo tendría derivada nula y eso hemos visto que no ocurre). Por tanto, entre los instante } s_0 \text{ y } s_0 + L \text{ se han tenido que dar un número par de intersecciones.}$

Con esto hemos visto que  $\#(C \cap (S_{p,v} \cup S_{p,w}))$  es par. Como las semirrectas tienen como único punto común  $p$ , que no está en  $C$ ,  $C \cap (S_{p,v} \cup S_{p,w})$  es unión disjunta de  $C \cap S_{p,v}$  y  $C \cap S_{p,w}$ , luego  $\#(C \cap (S_{p,v} \cup S_{p,w})) = \#(C \cap S_{p,v}) + \#(C \cap S_{p,w})$ , y por tanto  $\#(C \cap S_{p,v}) \equiv \#(C \cap S_{p,w}) \pmod{2}$ , contradiciendo que uno de los cardinales pueda ser par y el otro impar. Por tanto, no puede haber puntos en la intersección.

- $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  son abiertos en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^2 - C$ .

Basta verlo para  $\Omega_0$ . El razonamiento para  $\Omega_1$  es análogo. Sea  $p \in \Omega_0$ . Entonces  $\exists v \in \mathbb{S}^1$  tal que  $S_{p,v}$  y  $C$  se cortan transversalmente y  $\#(S_{p,v} \cap C) = \{p_1, \dots, p_{2k}\}$ .

Por el lema 1.2.6 aplicado a cada punto  $p_i$ , existen  $\delta_1, \dots, \delta_{2k} > 0$  y existen  $W_1, \dots, W_{2k}$  entornos abiertos de  $p_1, \dots, p_{2k}$  respectivamente en  $C$ , tales que  $B(p, \delta_i) = \emptyset$  y para cada  $q_i \in B(p, \delta_i)$  se tiene que  $S_{q_i,v}$  y  $W_i$  se cortan transversalmente y  $\#(S_{q_i,v} \cap W_i) = 1$ , para cada  $i \in \{1, \dots, 2k\}$ .

Tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{2k}\} > 0$ . Entonces, se verifica que  $B(p, \delta) \cap C = \emptyset$  y  $S_{q,v}$  corta transversalmente a todos los entornos  $W_i$ , con  $\#(S_q \cap W_i) = 1$  para todo  $q \in B(p, \delta)$ .

Consideramos ahora el conjunto  $K = C - (W_1 \cup \dots \cup W_{2k})$ , que es un compacto (cerrado de un compacto). Como  $K$  es compacto y  $S_{p,v}$  es cerrada, la distancia entre ambos conjuntos alcanza un mínimo, que llamaremos  $\varepsilon$ . Además,  $\varepsilon > 0$ , puesto que  $S_{p,v}$  no corta a  $K$  (hemos eliminado entornos de esas intersecciones). De esta forma tenemos una banda paralela de radio  $\varepsilon$  que no corta a  $K$ .

Tomamos  $r = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$  y  $q \in B(p, r)$ . Puesto que  $S_{p,v}$  corta a  $C$  tangencialmente, los puntos de intersección son aislados, y por tanto podemos suponer los entornos  $W_i$  disjuntos. Veamos que  $q \in \Omega_0$ .

Se tiene que  $S_{q,v} \cap C = (S_{q,v} \cap K) \cup (S_{q,v} \cap W_1) \cup \dots \cup (S_{q,v} \cap W_{2k})$ . La intersección  $S_{q,v} \cap K$  es vacía, por ser  $r \leq \varepsilon$ . Y por ser  $r \leq \delta$ , el resto de intersecciones son transversas, luego se concluye que  $C$  y  $S_{q,v}$  se cortan transversalmente. Finalmente, por ser los  $W_i$  disjuntos, se tiene que

$$\#(S_{q,v} \cap C) = \sum_{i=1}^{2k} \#(S_{q,v} \cap W_i) = \sum_{i=1}^{2k} 1 = 2k,$$

es decir,  $q \in \Omega_0$ . Por tanto, hemos probado que dado  $p \in \Omega_0$ ,  $\exists r > 0$  con  $B(p, r) \subset \Omega_0$ , luego  $\Omega_0$  es abierto.

Hasta ahora tenemos que  $\{\Omega_0, \Omega_1\}$  es una partición por abiertos de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Veamos que es no trivial.

- $\Omega_0 \neq \emptyset \neq \Omega_1$ . Además,  $\Omega_0$  es no acotado y  $\Omega_1$  sí lo es.

$C$  es compacto, luego acotado, es decir,  $\exists R > 0$  con  $C \subset B(0, R)$ . Sea  $q \notin B(0, R)$  (en particular,  $q \notin C$  y  $q \neq 0$ ), y tomamos  $v = \frac{q}{|q|}$ . Como  $S_{q,v} \cap C \subset S_{q,v} \cap B(0, R) = \emptyset$ , se tiene que  $\#(S_{q,v} \cap C) = 0$  (par) y en consecuencia el corte es transversal, luego  $q \in \Omega_0$ . Por tanto,  $\Omega_0 \neq \emptyset$  y además  $\mathbb{R}^2 - B(0, R) \subset \Omega_0$ , luego no está acotado. Por ser disjuntos, se verifica entonces que  $\Omega_1$  sí está acotado, pues  $\Omega_1 \subset B(0, R)$ .

Ahora, partiendo del  $q$  anterior, tomamos  $p_0 = \alpha(s_0) \in C$  donde la función distancia a  $q$  sea mínima (dicho punto existe pues la función distancia es continua y  $C$  es compacto). Es fácil ver, derivando la distancia en  $p_0$ , que  $p_0 - q \perp \alpha'(s_0)$ . Por tanto, para  $v = \frac{p_0 - q}{|p_0 - q|}$  se verifica que  $p_0 \in S_{q,v} \cap C$  y el corte es transversal.

Al ser el corte transversal la intersección es un punto aislado, luego existe un punto  $p$  de la forma  $p = p_0 + \epsilon v$  verificando que  $[p_0, p] \cap C = \{p_0\}$ . Consideramos ahora la semirrecta  $S_{p,-v}$ , que pasa por  $p, p_0$  y  $q$ . Se cumple que

$$S_{p,-v} \cap C = ([p, q] \cup S_{q,-v}) \cap C = ([p, q] \cap C) \cup (S_{q,-v} \cap C) = \{p_0\} \cup \emptyset = \{p_0\}$$

Hay que probar que  $S_{q,-v} \cap C = \emptyset$ .

Con todo esto hemos probado que  $\mathbb{R}^2 - C$  es no conexo y tiene al menos 2 componente conexas. Veamos ahora usando argumentos topológicos que a lo sumo puede tener dos, y que además su frontera común es  $C$ . Necesariamente dichas componentes habrán de ser las  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  anteriores.

$C$  es un cerrado de  $\mathbb{R}^2$ , luego  $\mathbb{R}^2 - C$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , y por tanto hereda sus propiedades locales. En particular, es localmente conexo, luego sus componentes conexas son abiertas, en  $\mathbb{R}^2 - C$  y también en  $\mathbb{R}^2$ .

Llamamos  $\Omega$  a una de las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - C$  arbitraria, y  $\Omega'$  a la unión de todas las demás.

- $Fr(\Omega) \subset C$  y es cerrada en  $C$ .



Se verifica

$$\mathbb{R}^2 - C = \Omega \dot{\cup} \Omega' \implies \mathbb{R}^2 = C \dot{\cup} \Omega \dot{\cup} \Omega' \implies \mathbb{R}^2 - \Omega' = C \dot{\cup} \Omega$$

La última igualdad muestra que  $C \cup \Omega$  es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . Como  $\Omega \subset C \cup \Omega$ , al tomar adherencias se tiene que  $\overline{\Omega} \subset C \cup \Omega$ . Por tanto,

$$Fr(\Omega) = \overline{\Omega} - \overset{\circ}{\Omega} = \overline{\Omega} - \Omega \subset (C \dot{\cup} \Omega) - \Omega = C$$

Por tanto,  $Fr(\Omega) \subset C$ . Como  $C$  es cerrada, entonces se tiene que  $Fr(\Omega)$  es cerrada en  $C$  (cerrado contenido en cerrado). Si vemos que es abierta en  $C$  y no vacía, entonces será igual a  $C$ .

- $Fr(\Omega) \neq \emptyset$

Supongamos que la frontera fuera vacía. Entonces  $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} = \overline{\Omega}$  (en  $\mathbb{R}^2$ ) y por tanto  $\Omega$  sería un abierto y cerrado de  $\mathbb{R}^2$ , que es conexo, es decir,  $\Omega \in \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ .  $\Omega$  no puede ser vacío, por ser componente conexa, y tampoco puede ser  $\mathbb{R}^2$ , puesto que de  $\mathbb{R}^2 = C \dot{\cup} \Omega \dot{\cup} \Omega'$  se obtendría que  $C = \emptyset$ , lo que es imposible, pues sabemos que  $C$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , que no es vacío. Llegamos por tanto a una contradicción en ambos casos, luego la frontera no puede ser vacía.

- $Fr(\Omega)$  es abierto en  $C$ .

Veamos que cada punto de  $Fr(\Omega)$  es interior en  $C$ . Sea  $p \in Fr(\Omega) \subset C$ . Como  $C$  es simple, podemos tomar  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap C$  es conexo y  $B(p, r) - C$  tiene exactamente dos componentes conexas cuya frontera común es  $B(p, r) \cap C$ , en  $B(p, r)$  (por admitir la curva un entorno homeomorfo a un intervalo). Llamamos a dichas componentes  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Una de las dos componentes debe estar contenida en  $\Omega$ , ya que de no ser así, por ser componentes conexas, se tendría que  $\omega_1 \cap \Omega = \emptyset = \omega_2 \cap \Omega$ . Como  $(B(p, r) \cap C) \cap \Omega = \emptyset$  (por  $C \cap \Omega = \emptyset$ ), se tiene que  $B(p, r) \cap \Omega = \emptyset \implies p \notin \overline{\Omega} \supset Fr(\Omega)$ , llegando a una contradicción.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\omega_1 \subset \Omega$ . Entonces,  $B(p, r) \cap C \subset Fr(\omega_1) \subset \overline{\omega_1} \subset \overline{\Omega}$ , es decir,  $B(p, r) \cap C \subset \overline{\Omega}$  y como  $(B(p, r) \cap C) \cap \Omega = \emptyset$  se tiene que  $B(p, r) \cap C \subset \overline{\Omega} - \Omega = Fr(\Omega)$ , obteniendo que  $p$  es interior a  $Fr(\Omega)$  en  $C$ .

- $Fr(\Omega) = C$ .

Como  $C$  es conexa y  $Fr(\Omega)$  es abierta, cerrada y no vacía en  $C$  se tiene la igualdad buscada. Concluimos el teorema, como ya se ha mencionado previamente, que  $\mathbb{R}^2 - C$  no puede tener más de dos componentes conexas.

- $\mathbb{R}^2 - C$  tiene a lo sumo 2 componentes conexas.

Supongamos que  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  son componentes conexas distintas de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Sea  $p_0 \in C$ . Razonando como previamente, existe  $r > 0$  tal que  $B(p_0, r) \cap C$  es conexo y  $B(p_0, r) - C = \omega_1 \cup \omega_2$ , siendo estas componentes conexas de  $B(p_0, r) - C$ .

Como vimos anteriormente, se verifica que o bien  $\omega_1 \subset \Omega_i$  o bien  $\omega_2 \subset \Omega_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Por tanto, alguna de las componentes conexas  $\omega_i$  está contenida necesariamente en dos componentes conexas  $\Omega_j \neq \Omega_k$ , lo cual es imposible, puesto que  $\emptyset \neq \omega_i \subset \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ .

Esto prueba que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas, que junto a todo lo anterior nos permite concluir que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene exactamente dos componentes conexas con frontera común  $C$ , una acotada y otra no, finalizando la demostración. □

**Comentario 1.2.7.** *La demostración, además de indicarnos las componentes conexas en las que la curva de Jordan divide al plano, nos proporciona un método para construirlos.*

*Introducimos la siguiente notación. Dada una curva de Jordan  $C$ ,  $\mathbb{R}^2 - C = \Omega_{int} \cup \Omega_{ext}$  es su descomposición en componentes conexas, donde:*

- $\Omega_{int}$  es el dominio interior determinado por la curva, que corresponde a la componente conexa acotada, o equivalentemente, la componente conexa desde la que se pueden trazar rectas que cortan transversalmente a la curva en un número impar de puntos.
- $\Omega_{ext}$  es el dominio exterior, que corresponde a la componente conexa no acotada, o equivalentemente, la componente conexa desde la que se pueden trazar rectas que cortan transversalmente a la curva en un número par de puntos.

*Cuando hablemos del dominio determinado por la curva, sin especificar nada más, nos referiremos al dominio interior, y también lo notaremos  $\Omega = \Omega_{int}$ .*

*Finalmente, diremos que un punto está dentro (resp. fuera) de la curva  $C$  si está en el dominio interior (resp. dominio exterior) determinado por  $C$ .*

### 1.2.2. Orientabilidad de las curvas de Jordan

Consideramos una curva de Jordan  $C$  en el plano y una parametrización suya  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow C$ , p.p.a,  $L$ -periódica e inyectiva en su periodo (sabemos que existen). Ya hemos visto que la curva divide el plano en un dominio exterior y otro interior. Queremos ver ahora si es posible dar una orientación a la curva, es decir, un sentido para recorrerla. A priori se intuye que hay dos posibles sentidos (el horario y el antihorario). El sentido del recorrido dependerá del vector normal escogido, que como veremos, apuntará siempre hacia el dominio interior o hacia el exterior. De esta forma tendremos definidas las dos orientaciones posibles. Veamos que efectivamente los vectores normales cumplen esta propiedad.

Queremos controlar todas las rectas normales a  $C$  en cada uno de los puntos de la curva. Para ello definimos la aplicación  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(s, t) = \alpha(s) + tN(s)$  (nos referiremos a  $T$  y  $N$  como los vectores tangente y normal del diedro de Frenet de la curva). Nos interesa buscar un tamaño para el cual las rectas normales en cada punto no cambien de componente conexa salvo en el propio punto. Para ello vamos a estudiar, fijado  $\varepsilon > 0$ , la imagen  $F(\mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon]) \subset \mathbb{R}^2$ .

Tomamos  $p \in F(\mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon])$ . Entonces,  $p = \alpha(s) + tN(s)$ , con  $s \in \mathbb{R}$  y  $|t| < \varepsilon$ . La distancia de  $p$  a la curva es menor o igual que la distancia a cualquier punto de la curva, luego

$$d(p, C) \leq |p - \alpha(s)| = |tN(s)| = |t| < \varepsilon$$

Se tiene por tanto que  $F(\mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon]) \subset V_\varepsilon(C)$ . Esto último es el *entorno métrico* de radio  $\varepsilon$  de  $C$ , y se define como los puntos del plano que distan de  $C$  menos de  $\varepsilon$ .

Tomamos ahora  $p \in V_\varepsilon(C)$ . Por tanto,  $d(p, C) < \varepsilon$ . Llamamos  $t_0 = d(p, C)$ , y consideramos la función  $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(s) = |\alpha(s) - p|^2$ . Por ser continua en un compacto alcanza un mínimo en un punto que llamaremos  $s_0 \in [0, L]$ . Por tanto,  $f(s_0) = d(p, C) = t_0$ , y como  $s_0$  es punto crítico,

$$0 = f'(s_0) = 2\langle T(s_0), \alpha(s_0) - p \rangle \implies \alpha(s_0) - p \perp T(s_0) \implies \alpha(s_0) - p \parallel N(s_0).$$

Como  $N$  no se anula, se ha de verificar que  $\alpha(s_0) - p = \lambda N(s_0)$ . Tomando módulos, se deduce que  $\lambda = \pm t_0$ . Finalmente, despejando  $p$ , se tiene que

$$p = \alpha(s_0) \mp t_0 N(s_0) \text{ y } |t_0| < \varepsilon,$$

es decir,  $p \in F(\mathbb{R} \times) - \varepsilon, \varepsilon[$ , luego se tiene la igualdad

$$F(\mathbb{R} \times) - \varepsilon, \varepsilon[ = V_\varepsilon(C) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Vamos a estudiar ahora la inyectividad de  $F$ . Para ello, estudiamos el diferencial. Derivamos parcialmente.

$$F_s(s, t) = T(s) + tN'(s) = (1 - tk)T(s)$$

$$F_t(s, t) = N(s)$$

Como  $(dF)_{(s,t)}$  es regular si y solo si  $F_s$  y  $F_t$  son linealmente independientes, se verifica que  $(dF)_{(s,0)}$  es regular para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

En los puntos de la forma  $(s, 0)$  podemos aplicar por tanto el teorema de la función inversa, por el cual, existen entornos de  $(s, 0)$ , que podemos suponer rectangulares, de la forma  $R_s = ]s - \delta_s, s + \delta_s[ \times ]-\varepsilon_s, \varepsilon_s[$ , con  $\delta_s, \varepsilon_s > 0$ , para los cuales  $F|_{R_s}$  es un difeomorfismo sobre su imagen (que es abierta).

Se verifica además que  $[0, L] \subset \bigcup_{s \in [0, L]} ]s - \delta_s, s + \delta_s[$ , luego tenemos un recubrimiento por abiertos del compacto  $[0, L]$ , que debe admitir un subrecubrimiento finito. Por tanto, existen  $s_1, \dots, s_k \in [0, L]$  tal que  $[0, L] \subset \bigcup_{i=1}^k ]s_i - \delta_{s_i}, s_i + \delta_{s_i}[$ .

Tomamos  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_k}\}$ . Para tal  $\varepsilon$  se cumple que  $F|_{]s_i - \delta_{s_i}, s_i + \delta_{s_i}[ \times ]-\varepsilon, \varepsilon[}$  es un difeomorfismo sobre su imagen, luego  $F|_{\mathbb{R} \times] - \varepsilon, \varepsilon[}$  es un difeomorfismo local sobre su imagen, que es  $V_\varepsilon(C) \subset \mathbb{R}^2$ .

Usando esto vamos a ver que existe  $0 < \rho < \varepsilon$  para el cual  $F|_{[0, L] \times ]-\rho, \rho[}$  es inyectiva. En caso contrario,  $F|_{[0, L] \times ]-1/n, 1/n[}$  no sería inyectiva para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que existirían  $(s_n, t_n) \neq (s'_n, t'_n) \in [0, L] \times ]-1/n, 1/n[$  con  $F(s_n, t_n) = F(s'_n, t'_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $s_n, s'_n \in [0, L[ [0, L]$ , que es compacto, tomando parciales si fuera necesario podemos suponer que  $s_n \rightarrow a \in [0, L]$  y  $s'_n \rightarrow b \in [0, L]$ . Además, como  $t_n, t'_n \in ]-1/n, 1/n[$  es claro que ambos convergen a 0.

Como  $F$  es continua, podemos tomar límites en  $F(s_n, t_n) = F(s'_n, t'_n)$ , obteniendo que  $F(a, 0) = F(b, 0)$ , y en consecuencia que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Como  $a, b \in [0, L]$ , las únicas posibilidades son  $a = b$ , o bien una de las dos vale 0 y la otra  $L$ .

Si  $a = b$ , entonces  $s_n, s'_n \rightarrow a \in [0, L]$  y  $(s_n, t_n), (s'_n, t'_n) \rightarrow (a, 0)$ . Esto quiere decir que para  $n$  suficientemente grande,  $(s_n, t_n), (s'_n, t'_n) \in R_a$  y  $F|_{R_a}$  es inyectiva, pero teníamos que  $F(s_n, t_n) = F(s'_n, t'_n)$ , llegando a una contradicción.

Si  $a = 0$  y  $b = L$ , se verifica que  $(s_n, t_n), (s'_n - L, t'_n) \rightarrow (0, 0)$  y repetimos el argumento anterior, teniendo en cuenta que  $F$  es  $L$ -periódica en  $s$ . Mismo argumento para  $a = L$  y  $b = 0$ .

Renombrando  $\varepsilon = \rho$  y de nuevo teniendo en cuenta la  $L$ -periodicidad de  $F$ , lo que hemos obtenido es que existe un  $\varepsilon > 0$  para el cual  $F|_{[\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, \varepsilon[}$  es un difeomorfismo local sobre  $V_\varepsilon(C) \in \mathbb{R}^2$ , y  $F|_{[s, s+L[ \times ] - \varepsilon, \varepsilon[}$  es inyectiva.

Con lo que acabamos de ver podemos enunciar el resultado clave que nos permitirá orientar las parametrizaciones de las curvas de Jordan.

**Teorema 1.2.8** (Existencia de entornos tubulares para las curvas de Jordan). *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva simple, compacta y conexa y sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización por el arco  $L$ -periódica de  $C$ . Definimos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $F(s, t) = \alpha(s) + tN(s)$ , que llamaremos aplicación exponencial normal. Entonces:*

- i)  $F(\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, \varepsilon[) = V_\varepsilon(C)$  para cada  $\varepsilon > 0$ , donde  $V_\varepsilon(C)$  es el entorno métrico abierto de centro  $C$  y radio  $\varepsilon$ .
- ii) Existe  $\rho > 0$  tal que si  $0 < \varepsilon < \rho$ , entonces:
  - a)  $F|_{[\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, \varepsilon[} : \mathbb{R} \times ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow V_\varepsilon(C)$  es un difeomorfismo local.
  - b)  $F$  es inyectiva en  $I \times ] - \varepsilon, \varepsilon[$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es cualquier intervalo abierto de longitud menor o igual que  $L$ .

Por tanto, si  $0 < \varepsilon < \rho$ ,  $V_\varepsilon(C) - ]\alpha(s) - \varepsilon N(s), \alpha(s) + \varepsilon N(s)[$  es difeomorfo a  $]s, s + L[ \times ] - \varepsilon, \varepsilon[ \cong \mathbb{R}^2$ , y  $V_\varepsilon(C)$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1 \times ] - \varepsilon, \varepsilon[ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . A estos entornos  $V_\varepsilon(C)$  se les llama entornos tubulares de radio  $\varepsilon$  de la curva  $C$ .

*Demostración.* Las afirmaciones se deducen de lo razonado previamente al teorema. En el último caso, el homeomorfismo se tiene al tomar  $F$  sobre  $]s, s + L[ \times ] - \varepsilon, \varepsilon[$ , que tiene como imagen  $V_\varepsilon(C)$  y sobre esta es continua, sobreyectiva y abierta (por ser homeomorfismo local). Por tanto es una identificación y al tomar cocientes (se identifican  $s$  y  $s + L$ ) se obtiene el homeomorfismo buscado.  $\square$

**Corolario 1.2.9.**  $V_\varepsilon(C) - C$  tiene dos componentes conexas, una contenida en el dominio interior  $C$  y la otra en el exterior. Además, las componentes conexas vienen dadas por

$$V_\varepsilon^+(C) = F(\mathbb{R} \times ]0, \varepsilon[)$$

$$V_\varepsilon^-(C) = F(\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, 0[)$$

*Demostración.*  $V_\varepsilon(C) - C = F(\mathbb{R} \times (] - \varepsilon, \varepsilon[ - \{0\})) = F(\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, 0[) \dot{\cup} F(\mathbb{R} \times ]0, \varepsilon[) = V_\varepsilon^-(C) \dot{\cup} V_\varepsilon^+(C)$ . Por ser  $F$  abierta en  $\mathbb{R} \times ] - \varepsilon, \varepsilon[$  (es difeomorfismo local) y continua, ambos conjuntos son abiertos y conexos, además no vacíos. Tenemos por tanto una partición por abiertos conexos no vacíos de  $V_\varepsilon(C) - C$ , luego  $V_\varepsilon^-(C)$  y  $V_\varepsilon^+(C)$  son las dos componentes conexas de  $V_\varepsilon(C) - C$ . Finalmente, como

$V_\varepsilon(C) - C \subset \mathbb{R}^2 - C$ , se deduce que cada una de las componentes conexas del primero debe estar contenido en una única de las componentes conexas del segundo.  $\square$

Lo que nos dice este último resultado es que dentro de un entorno tubular, las semirrectas que tracemos normales a los puntos de la curva se quedan siempre dentro o siempre fuera de la curva en dicho entorno. De esta forma definiremos la orientación de la curva, según si al avanzar hacia adelante en el parámetro de la curva las semirrectas que llevan la dirección del vector normal apunta hacia dentro o hacia afuera.

**Definición 1.2.3.** Sea  $C$  una curva de Jordan y  $\alpha$  una parametrización suya por el arco y  $L$ -periódica. Diremos que  $\alpha$  es una *orientación positiva* de  $C$  (resp. *negativa*) si  $V_\varepsilon^+(C) \subset \Omega$  (resp.  $V_\varepsilon^+(C) \subset \Omega_{ext}$ ).

**Comentario 1.2.10.** Siempre que tengamos una orientación negativa  $\alpha$  podemos tomar la orientación  $\beta(s) = \alpha(-s)$ , que es positiva.

### 1.2.3. Ejercicios

#### Ejercicio 5

Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan y  $\alpha$  una parametrización por el arco  $L$ -periódica. Sea  $F$  su aplicación exponencial normal asociada. Definimos, para cada  $\varepsilon > 0$  para el que  $V_\varepsilon(C)$  es un entorno tubular, las aplicaciones

$$r : V_\varepsilon(C) - ]\alpha(0) - \varepsilon N(0), \alpha(0) + \varepsilon N(0)[ \rightarrow \mathbb{R}, r = p_2 \circ F^{-1} \text{ (distancia orientada)}$$

$$\pi : V_\varepsilon(C) - ]\alpha(0) - \varepsilon N(0), \alpha(0) + \varepsilon N(0)[ \rightarrow C \subset \mathbb{R}^2, \pi = \alpha \circ p_1 \circ F^{-1} \text{ (proyección sobre la curva),}$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son las proyecciones de  $\mathbb{R}^2$  sobre la primera y segunda variable, respectivamente.

- Extender ambas aplicaciones a todo el entorno tubular, demostrar que son diferenciables y calcular sus diferenciales.
- Demostrar que  $\phi : V_\varepsilon(C) \rightarrow C \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , dada por  $\phi(q) = (\pi(q), r(q))$  es un homeomorfismo.

Solución
----------

En primer lugar extendemos las funciones a todo el entorno tubular, de la forma esperada. Sea  $x \in ]\alpha(0) - \varepsilon N(0), \alpha(0) + \varepsilon N(0)[$ . Podemos escribir  $x = \alpha(0) + \lambda N(0)$ , con  $\lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Definimos  $r(x) = \lambda$  y  $\pi(x) = \alpha(0)$ . Veamos que la extensión es apropiada.

Consideramos  $V = V_\varepsilon(C) - ]\alpha(L/2) - \varepsilon N(L/2), \alpha(L/2) + \varepsilon N(L/2)[$  y  $U = ]-L/2, L/2[ \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Es claro que  $x \in V$  y sabemos que  $F|_U$  es un difeomorfismo sobre su imagen, que es  $V$ . Por tanto,  $x$  tiene un único inverso en  $U$ , que es fácil observar que es  $(0, \lambda)$ . Entonces, se verifica

$$\begin{aligned} (p_2 \circ (F|_U)^{-1})(x) &= p_2(0, \lambda) = \lambda \\ (\alpha \circ p_1 \circ (F|_U)^{-1})(x) &= \alpha(p_1(0, \lambda)) = \alpha(0) \end{aligned}$$

Usando el carácter local de la diferenciabilidad sobre la extensión realizada, obtenemos que tanto  $r$  como  $\pi$  son diferenciables (podemos tomar el entorno  $U$  para los puntos de la extensión y para el resto el entorno  $]0, L[\times] - \varepsilon, \varepsilon[$ ), las funciones son diferenciables en dichos entornos por ser  $F$  difeomorfismo y por la diferenciabilidad de las proyecciones).

Calculamos ahora los diferenciales. Sea  $p \in V_\varepsilon(C)$ . Podemos suponer  $p = \alpha(s) + tN(s)$ , con  $s \in \mathbb{R}$  y  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Vamos a calcular primero el diferencial de la exponencial normal. Es un isomorfismo en  $\mathbb{R}^2$ , por ser  $F$  un difeomorfismo local en  $(s, t)$ , y si  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  es una curva definida en un entorno de 0 con  $\phi(0) = (s, t)$  y  $\phi'(0) = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , se tiene

$$\begin{aligned} (dF)_{(s,t)}(v_1, v_2) &= \frac{d}{du} \Big|_{u=0} F(\phi(u)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} [\alpha(\phi_1(u)) + \phi_2(u)N(\phi_1(u))] = \\ &= \phi'_1(0)T(\phi(0)) + \phi'_2(0)N(\phi_1(0)) - \phi_2(0)\phi'_1(0)k(\phi_1(0))T(\phi_1(0)) = (1 - tk(s))v_1T(s) + v_2N(s) \end{aligned}$$

En particular, por ser isomorfismo,  $0 \neq (dF)_{(s,t)}(1, 0) = (1 - tk(s))T(s)$ , luego por tanto  $1 - tk(s) \neq 0$ . La arbitrariedad y la conexión, teniendo en cuenta que en  $t = 0$  la expresión es positiva, nos dice que  $1 - tk(s) > 0$  en  $\mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Volvemos al punto  $p$  anterior (dejamos por tanto  $s$  y  $t$  fijos) y vamos a considerar la base ortonormal  $\{T(s), N(s)\}$ .

Definimos en un entorno de 0 la curva  $\beta(u) = \alpha(u + s) + tN(u + s) = F(u + s, t)$ . Se verifica que  $\beta(0) = \alpha(s) + tN(s) = p$ , y  $\beta'(0) = (1 - tk(s))T(s) > 0$ . Se cumple que

$$\begin{aligned} \pi(\beta(u)) &= \pi(F(u + s, t)) = \alpha(p_1(F^{-1}(F(u + s, t)))) = \alpha(u + s) \\ r(\beta(u)) &= r(F(u + s, t)) = p_2(F^{-1}(F(u + s, t))) = t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (d\pi)_{\alpha(s)+tN(s)}((1 - tk(s))T(s)) &= \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \pi(\beta(u)) = \alpha'(u + s) \Big|_{u=0} = T(s) \\ \implies (d\pi)_{\alpha(s)+tN(s)}(T(s)) &= \frac{1}{1 - tk(s)}T(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dr)_{\alpha(s)+tN(s)}((1 - tk(s))T(s)) &= \frac{d}{du} \Big|_{u=0} r(\beta(u)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} t = 0 \\ \implies (dr)_{\alpha(s)+tN(s)}(T(s)) &= 0 \end{aligned}$$

Definimos ahora en un entorno de 0 la curva  $\gamma(u) = \alpha(s) + (t + u)N(s) = F(s, t + u)$ . Se verifica que  $\gamma(0) = \alpha(s) + tN(s)$  y  $\gamma'(0) = N(s)$ . Se cumple que

$$\begin{aligned} \pi(\gamma(u)) &= \alpha(p_1(F^{-1}(F(s, t + u)))) = \alpha(s) \\ r(\gamma(u)) &= p_2(F^{-1}(F(s, t + u))) = t + u \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(d\pi)_{\alpha(s)+tN(s)}(N(s)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \pi(\gamma(u)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \alpha(s) = 0$$

$$(dr)_{\alpha(s)+tN(s)}(N(s)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} r(\gamma(u)) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} t + u = 1$$

Finalmente, dado  $v \in \mathbb{R}^2$ , podemos expresarlo en coordenadas respecto de la base  $\{T(s), N(s)\}$  como  $v = \langle v, T(s) \rangle T(s) + \langle v, N(s) \rangle N(s)$ , y los diferenciales  $(d\pi)_{\alpha(s)+tN(s)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $(dr)_{\alpha(s)+tN(s)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  quedan definidos por

$$(d\pi)_{\alpha(s)+tN(s)}(v) = \frac{\langle v, T(s) \rangle}{1 - tk(s)} T(s)$$

$$(dr)_{\alpha(s)+tN(s)}(v) = \langle v, N(s) \rangle$$

En particular, evaluando en la base usual, se tiene que, si  $T = (T_1, T_2)$  y  $N = (N_1, N_2)$ ,

$$\text{Jac } \pi(\alpha(s) + tN(s)) = \frac{1}{1 - tk(s)} \begin{pmatrix} T_1^2(s) & T_1 T_2(s) \\ T_1 T_2(s) & T_2^2(s) \end{pmatrix}$$

$$\nabla r(\alpha(s) + tN(s)) = (N_1(s), N_2(s)) = N(s)$$

---

## Ejercicio 6

Con la notación del ejercicio anterior, sea  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  y definimos  $C_t = F(\mathbb{R} \times \{t\})$ . Demostrar que  $C_t$  es una curva de Jordan. Encontrar una buena parametrización de  $C_t$  a partir de  $\alpha$ , calcular la curvatura de  $C_t$  y observar su dependencia de  $t$ .

Solución

Definimos las parametrizaciones  $\alpha_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\alpha_t(s) = \alpha(s) + tN(s)$ . Es claro que  $\alpha_t$  es  $L$ -periódica. Para ver que es regular, derivamos  $\alpha_t$ , y como  $\alpha$  está p.p.a, se tiene que  $\alpha'_t(s) = T_\alpha(s)(1 - tk_\alpha(s))$ . Como consecuencia de que el diferencial de  $F$  es un isomorfismo (ver ejercicio anterior), se tiene que la expresión no puede anularse y por tanto la curva es regular. Veamos finalmente que es inyectiva en el período. Sean  $s, s' \in [r, r + L[$  tales que  $\alpha_t(s) = \alpha_t(s')$ . Entonces,  $\alpha(s) + tN(s) = \alpha(s') + tN(s')$ , pero esto es justo la exponencial normal evaluada en  $(s, t)$  y  $(s', t)$ , que es inyectiva para  $|t| < \varepsilon$  y  $s, s' \in [r, r + L[$ . Por tanto,  $s = s'$ , luego  $\alpha_t$  es inyectiva, y así  $\alpha_t$  tiene como traza una curva de Jordan. Finalmente,  $F(\mathbb{R} \times \{t\}) = \alpha(\mathbb{R}) + tN(\mathbb{R}) = \alpha_t(\mathbb{R})$ , luego  $C_t$  es una curva de Jordan y  $\alpha_t$  una parametrización que depende de  $\alpha$ .

Calculamos la curvatura de  $\alpha_t$ . En primer lugar calculamos el diedro de Frenet. Recordemos que, también como consecuencia de que el diferencial de  $F$  sea isomorfismo, se tiene que  $1 - tk_\alpha(s) > 0$ . Se tiene

$$\alpha'_t(s) = T_\alpha(s)(1 - tk_\alpha(s))$$

$$|\alpha'_t(s)| = |1 - tk_\alpha(s)| = 1 - tk_\alpha(s)$$

$$T_t(s) = \frac{\alpha'_t(s)}{|\alpha'_t(s)|} = T_\alpha(s)$$

$$N_t(s) = JT_t(s) = JT_\alpha(s) = N_\alpha(s)$$

Es decir, los vectores tangente y normal coinciden en cada instante, como era de esperar, pues ambas curvas llevan las mismas direcciones. Lo que varía es la velocidad a la que se mueven, que se va a observar en su curvatura:

$$k_t(s) = \frac{\langle T_t(s), N_t(s) \rangle}{|\alpha'_t(s)|} = \frac{\langle T_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle}{1 - tk_\alpha(s)} = \frac{k_\alpha(s)}{1 - tk_\alpha(s)}$$

Vemos que está bien definida para todas las curvas paralelas a una distancia menor que la determinada por el entorno tubular. Supongamos que las curvas están orientadas positivamente. Entonces, si la curvatura es positiva vemos que la curvatura aumenta conforme la curva paralela está más en el dominio interior, y disminuye en las curvas paralelas del dominio exterior. En los puntos con curvatura negativa ocurre lo contrario.

### 1.3. Índice de rotación de curvas planas cerradas

Consideramos una curva (parametrizada)  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A$ -periódica con  $A > 0$ , diferenciable y regular. Las llamaremos *curvas cerradas*. Sabemos que el vector tangente  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$  es diferenciable. Además, como el vector tangente es unitario, la imagen de  $T$  está contenida en  $\mathbb{S}^1$ .

Si nos restringimos al intervalo  $[0, A]$ , tenemos la aplicación  $T \equiv T|_{[0, A]}: [0, A] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que verifica  $T(0) = T(A)$ . Por tanto, podemos ver  $T$  como un lazo en  $\mathbb{S}^1$ . Recordemos que en  $\mathbb{S}^1$  las clases de equivalencia de los lazos bajo la relación de homotopía, junto al producto de lazos, formaban un grupo (el grupo fundamental) isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , y por tanto, cada lazo en  $\mathbb{S}^1$  queda determinado, salvo homotopías, por un único entero. A tal número se llamaba el grado del lazo, y se nota por  $\deg$ . Usaremos este concepto para definir el índice de rotación de  $\alpha$ .

**Definición 1.3.1.** Sea  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva  $A$ -periódica con  $A > 0$ , diferenciable y regular. Definimos el *índice de rotación* de  $\alpha$  como

$$i(\alpha) = \deg T = \deg \frac{\alpha'}{|\alpha'|}$$

Vamos a recordar cómo se calcula el grado de un lazo. La recta real es un recubrimiento de la circunferencia con aplicación recubridora  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $p(t) = (\cos t, \sin t)$ . Vamos a considerar una aplicación genérica  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua. Un *levantamiento* de  $\phi$  para el recubridor  $p$  es cualquier aplicación  $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $p \circ \tilde{\phi} = \phi$ . Se puede probar que fijado  $t_0 \in p^{-1}(\phi(a))$  existe un único levantamiento  $\tilde{\phi}$  de  $\phi$  por  $p$  con  $\tilde{\phi}(a) = t_0$ . Además, si  $\phi$  es lazo (es decir,  $\phi(b) = \phi(a)$ ), dado cualquier levantamiento  $\tilde{\phi}$  se verifica que  $\tilde{\phi}(b) = \tilde{\phi}(a) + 2\pi n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y tal  $n$  no depende del levantamiento escogido. A tal  $n$  se le llama el grado de  $\phi$ , es decir,

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(a)).$$



En general, encontrar un levantamiento para una aplicación no es fácil. Sin embargo, cuando el lazo es diferenciable, podemos encontrar una expresión explícita del levantamiento. Supongamos que el lazo  $\phi$  anterior es diferenciable, y definimos  $Jac\phi = \langle J\phi, \phi' \rangle = \det(\phi, \phi')$ .  $Jac\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación diferenciable. Definimos  $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\tilde{\phi}(t) = c + \int_a^t Jac\phi(x)dx$ , con  $c \in p^{-1}(\phi(a))$ , es decir,  $p(c) = \phi(a)$  (siempre hay, pues el recubridor es sobreyectivo). Llamamos  $\psi = p \circ \tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Estudiemos la distancia entre  $\phi$  y  $\psi$ . Se verifica que

$$(|\phi - \psi|^2)' = (2 - 2\langle \phi, \psi \rangle)' = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle \phi, \psi' \rangle).$$

Desarrollamos  $\psi'$ :

$$\psi' = (p \circ \tilde{\phi})' = (\cos \tilde{\phi}, \sin \tilde{\phi})' = \tilde{\phi}'(-\sin \tilde{\phi}, \cos \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}' J\psi = (Jac\phi)J\psi$$

Volviendo a la distancia anterior, nos queda

$$(|\phi - \psi|^2)' = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle \phi, \psi' \rangle) = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle \phi, (Jac\phi)J\psi \rangle) = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle (Jac\phi)\phi, J\psi \rangle).$$

Ahora notemos lo siguiente. Se verifica que  $J((Jac\phi)\phi) = \langle J\phi, \phi' \rangle J\phi = \langle \phi', J\phi \rangle J\phi$ . Por otra parte, como  $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ , al derivar se obtiene que  $\langle \phi', \phi \rangle = 0$ . Tenemos por tanto a  $\phi'$  desarrollado en coeficientes de una base ortonormal,  $\phi' = \langle \phi', J\phi \rangle J\phi + 0 = J((Jac\phi)\phi) = (Jac\phi)J\phi$ . Aplicando  $J$ , se tiene que  $(Jac\phi)\phi = -J\phi'$ . Sustituyendo en la distancia se obtiene

$$(|\phi - \psi|^2)' = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle (Jac\phi)\phi, J\psi \rangle) = -2(\langle \phi', \psi \rangle + \langle -J\phi', J\psi \rangle) = -2(\langle \phi', \psi \rangle - \langle \phi', \psi \rangle) = 0.$$

Por tanto,  $|\phi - \psi|^2$  es constante. Como  $|\phi(a) - \psi(a)|^2 = |\phi(a) - p(c)|^2 = |\phi(a) - \phi(a)|^2 = 0$ , se tiene que  $\phi = \psi = p \circ \tilde{\phi}$ , luego  $\tilde{\phi}$  es un levantamiento de  $\phi$ .

Con lo que acabamos de ver, podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.1.** *Si  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un lazo diferenciable, entonces  $\tilde{\phi}(t) = c + \int_a^t (Jac\phi)(x)dx$  para  $t \in [a, b]$  es un levantamiento de  $\phi$  para  $c \in p^{-1}(\phi(a))$ .*

**Corolario 1.3.2.** *Si  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un lazo diferenciable, entonces*

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi} \int_a^b (Jac\phi)(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \langle J\phi, \phi' \rangle(t)dt$$

Volvemos ahora a nuestro caso particular, es decir, tomamos  $\phi = T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}$ . Sustituimos en la expresión anterior.

$$i(\alpha) = \deg \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^A (Jac \frac{\alpha'}{|\alpha'|})(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \frac{1}{|\alpha'|^2} \langle J\alpha', \alpha'' \rangle(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^A k_\alpha(t) |\alpha'(t)| dt$$

Por tanto,  $i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A k_\alpha(t) |\alpha'(t)| dt$ . Como además la curva es regular, es reparametrizable por el arco, por lo que podemos concluir el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.3.** Si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva  $A$ -periódica, con  $A > 0$ , diferenciable y regular, y  $L = L_0^A(\alpha)$ , se verifica

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A k_\alpha(t) |\alpha'(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds$$

A la expresión  $2\pi i(\alpha) = \int_0^L k(s) ds$  se le llama *curvatura total* de la curva  $\alpha$ . De la expresión que acabamos de encontrar en función de la curvatura total podemos obtener propiedades muy interesantes sobre el índice de rotación, que resumimos a continuación. Antes introducimos un concepto que veremos que está muy relacionado con el índice de rotación.

**Definición 1.3.2.** Dadas dos curvas planas, regulares y cerradas de período  $A$ ,  $\alpha$  y  $\alpha'$ , diremos que son *regularmente homotópicas* si existe una aplicación  $F: [0, A] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, verificando que  $F(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $F(s, 1) = \alpha'(s)$  y las curvas  $\alpha_t(s) = F(s, t)$  son regulares y  $A$ -periódicas, para cada  $t \in [0, 1]$ .

EJEMPLO 1.3.4: Las curvas obtenidas mediante giros, traslaciones u homotecias de una curva plana cerrada y regular son regularmente homotópicas a la original.  $\triangle$

**Corolario 1.3.5.** Sea  $\alpha$  una curva plana cerrada y regular de período  $A$  y longitud  $L$  sobre su período.

- i) (Cuantización de la curvatura total).  $\int_0^L k(s) ds \in 2\pi\mathbb{Z}$ .
- ii) Si  $\alpha'$  regularmente homotópica a  $\alpha$ , entonces el índice de rotación de ambas curvas coincide.
- iii) El índice de rotación de  $\alpha$  es invariante por reparametrizaciones salvo el signo.
- iv) El índice de rotación de  $\alpha$  es invariante por traslaciones y giros y cambia de signo por simetrías.

*Demostración.* i) Es consecuencia de que el índice de rotación se define como el grado de un lazo en  $\mathbb{S}^1$ , el cual es siempre entero.

ii) La función  $t \mapsto i(\alpha_t) = \int_0^L k_{\alpha_t}(s) ds$ , donde  $\alpha_t(s) = F(s, t)$  y  $F$  es una homotopía regular entre  $\alpha$  y  $\alpha'$ , define una integral dependiente de un parámetro, la dependencia es continua, y  $F$  está dominada en la variable  $s$ , pues alcanza un máximo en  $t$ , luego la función también es continua. Además, por el apartado anterior sabemos que dicha función toma valores en un conjunto discreto, luego es necesariamente constante. Evaluando en  $t \in \{0, 1\}$  se tiene la igualdad buscada.

iii) Consecuencia de la invarianza de la curvatura (salvo signo) por reparametrizaciones.

iv) Consecuencia de la invarianza de la curvatura (salvo signo) por movimientos rígidos.

□

**Comentario 1.3.6.** Las transformaciones anteriores, aunque son las más importantes, no son las únicas destacables que conservan (salvo quizás el signo) el índice de rotación. Un ejemplo son las homotecias de razón positiva.

**Comentario 1.3.7.** En la práctica, el cálculo del índice de rotación de una curva plana cerrada  $\alpha$  puede calcularse de forma relativamente sencilla a partir de otra de las expresiones vista en los cálculos previos a la proposición 1.3.3. En dichos cálculos se muestra que  $i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \frac{1}{|\alpha'|^2} \langle J\alpha', \alpha'' \rangle(t) dt$ . Por las propiedades del producto escalar, el producto anterior se puede expresar como un determinante, quedando la siguiente expresión.

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A \frac{1}{|\alpha'|^2} \det(\alpha', \alpha'')(t) dt$$

Veamos a continuación algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.3.8: Vamos a calcular el índice de rotación de una vuelta de circunferencia en sentido antihorario. Consideramos la curva definida en  $\mathbb{R}$   $\alpha(s) = (c_1, c_2) + r(\cos s, \sin s)$ . Es  $2\pi$ -periódica y vamos a calcular el índice de rotación sobre este periodo. Intuitivamente se puede apreciar que el vector tangente debe dar una vuelta completa. Hacemos las cuentas.

$$\alpha'(s) = r(-\sin s, \cos s)$$

$$|\alpha'(s)| = r$$

$$\alpha''(s) = r(-\cos s, \sin s)$$

$$\det(\alpha', \alpha'')(s) = \begin{vmatrix} -r \sin s & r \cos s \\ r \cos s & -r \sin s \end{vmatrix} = r^2$$

Finalmente, obtenemos que

$$i(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Efectivamente, el índice de rotación de una circunferencia es 1 (dando una vuelta en el sentido antihorario).  $\triangle$

EJEMPLO 1.3.9: Consideramos ahora la curva  $\beta(t) = (\cos t, \sin 2t)$  definida en  $\mathbb{R}$ . Es  $2\pi$ -periódica y vamos a calcular el índice de rotación en dicho periodo. Su traza se puede ver en la figura 1.1.

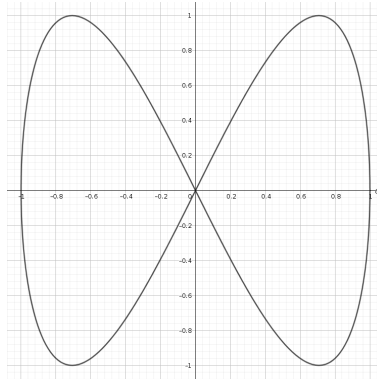


Figura 1.1: Curva  $\beta(t) = (\cos t, \sin 2t)$

$$\beta'(t) = (-\sin t, 2 \cos 2t)$$

$$|\beta'|^2(t) = \sin^2 t + 4 \cos^2 2t$$

$$\beta''(t) = (-\cos t, -4 \sin 2t)$$

$$\det(\beta', \beta'') = \begin{vmatrix} -\sin t & 2 \cos 2t \\ -\cos t & -4 \sin 2t \end{vmatrix} = 4 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t$$

Por tanto,

$$i(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t}{\sin^2 t + 4 \cos^2 2t} dt$$

Llamamos  $h(t) = \frac{4 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t}{\sin^2 t + 4 \cos^2 2t}$ . Es fácil comprobar que  $h(t + \pi) = -h(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} i(\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} h(t) dt + \frac{\pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} h(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} h(t + \pi) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [h(t) - h(t)] dt = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el índice de rotación de la curva  $\beta$  es 0.

△

EJEMPLO 1.3.10: Consideramos la curva  $\gamma(t) = ((1 - 2 \sin t) \cos t, (1 - 2 \sin t) \sin t + 1/2)$  definida en  $\mathbb{R}$ . Es  $2\pi$ -periódica. Su traza se muestra en la figura 1.2. Vamos a calcular el índice de rotación sobre su período. Por la invarianza del índice frente a traslaciones podemos simplificar los cálculos eliminando el término independiente de la segunda variable, de forma que podemos suponer  $\gamma(t) = ((1 - 2 \sin t) \cos t, (1 - 2 \sin t) \sin t) = (1 - 2 \sin t)(\cos t, \sin t)$ . Hacemos los cálculos.

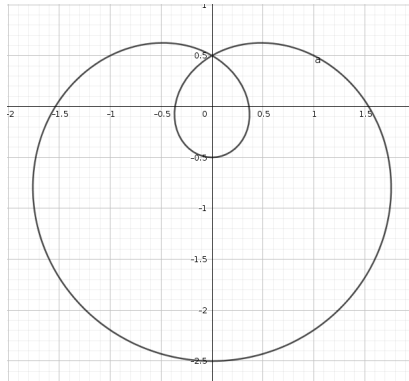


Figura 1.2: Curva  $\gamma(t) = ((1 - 2 \sin t) \cos t, (1 - 2 \sin t) \sin t + 1/2)$

$$\gamma'(t) = -2 \cos t (\cos t, \sin t) + (1 - 2 \sin t) (-\sin t, \cos t)$$

$$|\gamma'(t)|^2 = 4\cos^2 t + (1 - 2\sin t)^2$$

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= 2\sin t(\cos t, \sin t) - 2\cos t(-\sin t, \cos t) - 2\cos t(-\sin t, \cos t) - (1 - 2\sin t)(\cos t, \sin t) = \\ &= (-1 + 4\sin t)(\cos t, \sin t) - 4\cos t(-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$

$$\det(\gamma', \gamma'')(t) = 8\cos^2(t) + (1 - 2\sin t)(1 - 4\sin t)$$

Por tanto,

$$i(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{8\cos^2(t) + (1 - 2\sin t)(1 - 4\sin t)}{4\cos^2 t + (1 - 2\sin t)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{9 - 6\sin t}{5 - 4\sin t} dt = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3 - 2\sin t}{5 - 4\sin t} dt$$

Llamamos  $g(t)$  al integrando, es decir,  $g(t) = \frac{3-2\sin t}{5-4\sin t}$ . Vamos a intentar acotarlo. Para ello, observemos (mediante una sencilla derivación) que la función  $x \mapsto \frac{3-2x}{5-4x}$  es estrictamente creciente entre -1 y 1, que es donde toma valores la función seno entre 0 y  $2\pi$ . Por ello, podemos acotar  $g$  por encima y por debajo con la evaluación de la función anterior sobre 1 y -1, respectivamente, obteniendo que  $5/9 \leq g(t) \leq 1$ , y en consecuencia,  $5/3 \leq i(\gamma) \leq 3$ . Como el índice de rotación es entero, necesariamente ha de ser 2 o 3. Pero no puede ser 3 porque en tal caso  $g$  debería ser constantemente 1, pues una función continua y acotada por 1 no puede tener como integral  $2\pi$  en  $[0, 2\pi]$  en ningún otro caso. Por tanto,  $i(\gamma) = 2$ .

△

En los ejemplos anteriores podemos observar que hay curvas con cualquier índice de rotación. Cualquier índice entero positivo  $n$  lo podemos obtener de una circunferencia que da  $n$  vueltas en sentido antihorario, y cambiando el sentido de dichas parametrizaciones obtenemos todos los índices enteros negativos. Finalmente, el índice 0 lo podemos obtener de la curva del ejemplo 1.3.9.

Para concluir, vamos a establecer las condiciones que nos permiten caracterizar a curvas con el mismo índice de rotación.

**Teorema 1.3.11** (Whitney-Grauert). *Dos curvas planas, regulares, cerradas tienen el mismo índice de rotación si y solo si, salvo una reparametrización creciente, son regularmente homotópicas.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Visto en el corolario 1.3.5.

$\Rightarrow$ ) Sean  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  dos curvas, planas, regulares y cerradas de períodos  $A_0, A_1 > 0$  respectivamente, con  $i(\alpha_0) = i(\alpha_1)$ . Mediante la reparametrización creciente  $\beta(s) = \alpha_1(\frac{A_1}{A_0}s)$  podemos suponer sin perder generalidad en las hipótesis que  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  tienen el mismo período  $A > 0$  y  $i(\alpha_0) = i(\alpha_1)$  (de nuevo por el corolario 1.3.5). También podemos suponer que ambas curvas tienen la misma longitud  $L$ , sin más que aplicar una homotecia, que hemos visto que es una homotopía regular que conserva los índices de rotación. También, reparametrizando por el arco (sabemos que existe una reparametrización creciente) podemos suponer que ambas curvas son p.p.a., con el mismo índice de rotación. Finalmente, como los vectores tangentes  $\alpha'_0(0), \alpha'_1(0)$  están en la circunferencia, podemos suponer que son iguales, tras aplicar una rotación, que de nuevo es una homotopía regular.

Por tanto, podemos suponer que  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son dos curvas cerradas, regulares, p.p.a.,  $L$ -periódicas, con  $\alpha'_0(0) = \alpha'_1(0)$  y  $i(\alpha_0) = i(\alpha_1)$ . De esto último se deduce que  $\deg \alpha'_0 = \deg \alpha'_1$ . Tomamos  $\widetilde{\alpha'_0}$  y  $\widetilde{\alpha'_1}$  dos levantamientos de  $\alpha'_0$  y  $\alpha'_1$  respectivamente, de forma que  $\widetilde{\alpha'_0}(0) = \widetilde{\alpha'_1}(0)$ . Esta elección es posible debido a que  $\alpha'_0(0) = \alpha'_1(0)$ . Entonces se verifica

$$\deg \alpha'_0 = \deg \alpha'_1 \iff \frac{1}{2\pi} [\widetilde{\alpha'_0}(L) - \widetilde{\alpha'_0}(0)] = \frac{1}{2\pi} [\widetilde{\alpha'_1}(L) - \widetilde{\alpha'_1}(0)] \iff \widetilde{\alpha'_0}(L) = \widetilde{\alpha'_1}(L),$$

obteniendo que los levantamientos coinciden en ambos extremos. Definimos ahora la aplicación  $G: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(s, t) = (1-t)\widetilde{\alpha'_0}(s) + t\widetilde{\alpha'_1}(s)$ .  $G$  es continua y verifica las condiciones  $G(s, 0) = \widetilde{\alpha'_0}(s)$ ,  $G(s, 1) = \widetilde{\alpha'_1}(s)$ ,  $G(L, t) = \widetilde{\alpha'_0}(L) = \widetilde{\alpha'_1}(L)$  y  $G(0, t) = \widetilde{\alpha'_0}(0) = \widetilde{\alpha'_1}(0)$ .

Definimos ahora la aplicación  $F: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  como  $F = p \circ G$ .  $F$  es continua y verifica las condiciones  $F(s, 0) = \alpha'_0(s)$ ,  $F(s, 1) = \alpha'_1(s)$ ,  $F(L, t) = \alpha'_0(L) = \alpha'_1(L)$  y  $F(0, t) = \alpha'_0(0) = \alpha'_1(0)$ . En particular,  $F(0, t) = F(L, t)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Veamos que de hecho,  $F$  es  $L$ -periódica en la variable  $s$ . En efecto, si llamamos  $n = i(\alpha_0) = i(\alpha_1)$ , se tiene

$$\begin{aligned} F(s+L, t) &= p(G(s+L, t)) = p((1-t)\widetilde{\alpha'_0}(s+L) + t\widetilde{\alpha'_1}(s+L)) = p((1-t)\widetilde{\alpha'_0}(s) + t\widetilde{\alpha'_1}(s) + 2\pi n) = \\ &= p((1-t)\widetilde{\alpha'_0}(s) + t\widetilde{\alpha'_1}(s)) = p(G(s, t)) = F(s, t), \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $\widetilde{\alpha'_i}(s+L) = \widetilde{\alpha'_i}(s) + 2\pi n$ , para  $i = 0, 1$ , como consecuencia de la fórmula del grado.

Definimos finalmente la aplicación  $H: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$H(s, t) = \int_0^s F(x, t) dx - \frac{s}{L} \int_0^L F(x, t) dx$$

Se tiene que:

- $H$  es continua, por ser una integral dependiente de un parámetro con integrando continuo y dominado (por alcanzar un máximo en  $t$ ).
- $H(s, 0) = \int_0^s F(x, 0) dx - \frac{s}{L} \int_0^L F(x, 0) dx = \int_0^s \alpha'_0(x) dx - \frac{s}{L} \int_0^L \alpha'_0(x) dx = \alpha_0(s) - \alpha_0(0) \quad \forall s \in \mathbb{R}$ .
- $H(s, 1) = \int_0^s F(x, 1) dx - \frac{s}{L} \int_0^L F(x, 1) dx = \int_0^s \alpha'_1(x) dx - \frac{s}{L} \int_0^L \alpha'_1(x) dx = \alpha_1(s) - \alpha_1(0) \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Salvo traslaciones, que son homotopías regulares, podemos suponer que  $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = 0$ , y por tanto, tenemos que  $H(s, 0) = \alpha_0(s)$  y  $H(s, 1) = \alpha_1(s)$  para cada  $s \in \mathbb{R}$ .

Finalmente nos queda comprobar que  $H$  es regular, es decir, que las curvas intermedias que genera son regulares. Se tiene que

$$\frac{dH}{ds}(s, t) = F(s, t) - \frac{1}{L} \int_0^L F(x, t) dx$$

Supongamos que existen  $s_0 \in \mathbb{R}$  y  $t_0 \in [0, 1]$  para los que la expresión anterior se anula, es decir, se cumple que  $F(s_0, t_0) = \frac{1}{L} \int_0^L F(x, t_0) dx$ . Tomando normas,

$$1 = \frac{1}{L} \left| \int_0^L F(x, t_0) dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_0^L |F(x, t_0)| dx = 1$$

Al darse la igualdad en la desigualdad de Schwarz se obtiene que  $s \mapsto F(s, t_0)$  es constante. Como  $F(s, 0) = \alpha'_0(s)$  y  $F(s, 1) = \alpha'_1(s)$ , entonces  $\widetilde{\alpha'_0}$  y  $\widetilde{\alpha'_1}$  son homotópicas a un lazo constante, y por tanto  $\deg \alpha'_0 = \deg \alpha'_1 = 0$ , lo que implica que  $\widetilde{\alpha'_0}$  y  $\widetilde{\alpha'_1}$  son  $L$ -periódicas, luego alcanzan máximos, y salvo una nueva reparametrización creciente (una traslación del intervalo) podemos suponer que lo hacen en el mismo  $s_m \in [0, 1]$ . Por tanto se tiene

$$G(s, t) = (1-t)\widetilde{\alpha'_0(s)} + t\widetilde{\alpha'_1(s)} \leq (1-t)\widetilde{\alpha'_0(s_m)} + t\widetilde{\alpha'_1(s_m)} = G(s_m, t)$$

Entonces,  $G(s, t_0) \leq G(s_m, t_0)$ , pero  $G(s, t_0)$  es constante, por serlo  $f$  y  $p = (\sin, \cos)$ . En consecuencia, se tiene que los levantamientos son constantes, y en consecuencia también lo son los vectores tangentes de  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , concluyendo que son rectas, lo que contradice la periodicidad. Esto prueba que la homotopía es regular, concluyendo la prueba. □

Teniendo en cuenta los comentarios previos al teorema, podemos ver que tiene una interpretación interesante, y es que toda curva cerrada puede obtenerse a partir de una deformación continua de circunferencias dando un número determinado de vueltas en un determinado sentido, con la única excepción de las curvas con índice de rotación 0, las cuales pueden obtenerse a partir de deformaciones de la "curva con forma de 8" del ejemplo 1.3.9.

A continuación nos planteamos cómo será el índice de rotación para las curvas regulares cerradas cuya traza es simple, es decir, sin autointersecciones. Consideramos una curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  p.p.a.,  $L$ -periódica y tal que  $\alpha$  es inyectiva en  $[0, L[$ . Para  $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$  y  $(s_1, s_2) \neq (0, L)$  vamos a considerar el vector

$$\xi = \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)|} \in \mathbb{S}^1$$

Este vector está bien definido en el triángulo  $T = \{(s_1, s_2) \in [0, L] \times [0, L] : s_1 \leq s_2\}$  salvo en la diagonal (donde  $s_1 = s_2$ ) y el punto  $(0, L)$ . Veamos que se puede extender a dichos puntos. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned} \alpha(s_2) - \alpha(s_1) &= \alpha(s_1 + 1(s_2 - s_1)) - \alpha(s_1 + 0(s_2 - s_1)) = \int_0^1 \left( \frac{d}{dr} \alpha(s_1 + r(s_2 - s_1)) \right) dr = \\ &= (s_2 - s_1) \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} \xi = \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} \frac{s_2 - s_1}{|s_2 - s_1|} \frac{\int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr}{\left| \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr \right|}$$

Como la expresión resultante es continua y  $s_2 - s_1 > 0$ , se tiene

$$\lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} \xi = \frac{\int_0^1 \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr}{\left| \int_0^1 \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (s, s)} \alpha'(s_1 + r(s_2 - s_1)) dr \right|} = \frac{\int_0^1 \alpha'(s) dr}{\left| \int_0^1 \alpha'(s) dr \right|} = \alpha'(s)$$

Por otra parte, en el vértice del triángulo se tiene, usando que  $\alpha$  es  $L$ -periódica, y razonando a continuación como en lo que acabamos de ver,

$$\begin{aligned} \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (0, L)} \xi &= \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (0, L)} \frac{\alpha(s_2 - L) - \alpha(s_2)}{|\alpha(s_2 - L) - \alpha(s_2)|} = \\ &= \lim_{(s_1, s_2) \rightarrow (0, L)} \frac{(s_2 - L - s_1)}{|s_2 - L - s_1|} \frac{\int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - L - s_1)) dr}{\left| \int_0^1 \alpha'(s_1 + r(s_2 - L - s_1)) dr \right|} = \\ &= - \frac{\int_0^1 \alpha'(0) dr}{\left| \int_0^1 \alpha'(0) dr \right|} = -\alpha'(0) \end{aligned}$$

Esto nos permite definir en  $T$  la aplicación continua  $F: T \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)|} & , s_1 < s_2, (s_1, s_2) \neq (0, L) \\ \alpha'(s) & , s_1 = s_2 = s \\ -\alpha'(0) & , (s_1, s_2) = (0, L) \end{cases}$$

Ahora consideramos una aplicación continua entre el rectángulo  $[0, L] \times [0, 1]$  y el triángulo  $T$ ,  $h: [0, L] \times [0, 1] \rightarrow T$ , que verifique

$$h(s, 0) = (s, s), s \in [0, L]$$

$$h(s, 1) = \begin{cases} (0, 2s) & , s \in [0, L/2] \\ (2s - L, L) & , s \in [L/2, L] \end{cases}$$

Y que  $h(0, t) = (0, 0)$  y  $h(L, t) = (L, L)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Esta aplicación va doblando continuamente las rectas horizontales del rectángulo a través de la altura sobre la hipotenusa. Con todo esto, podemos construir la aplicación  $H = F \circ h: [0, L] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que es una homotopía entre las aplicaciones  $H(s, 0)$  y  $H(s, 1)$ . Podemos suponer, salvo una traslación, que no afecta al índice de rotación de  $\alpha$ , que  $\alpha(0) = 0$ , y por tanto esta homotopía verifica

$$H(s, 0) = F(h(s, 0)) = F(s, s) = \alpha'(s) \quad \forall s \in [0, L]$$



$$H(s, 1) = F(h(s, 1)) = \begin{cases} F(0, 2s) & , 0 \leq s \leq L/2 \\ F(2s - L, L) & , L/2 \leq s \leq L \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(0) & , s = 0 \\ \frac{\alpha(2s)}{|\alpha(2s)|} & , 0 < s < L/2 \\ -\alpha'(0) & , s = L/2 \\ -\frac{\alpha(2s)}{|\alpha(2s)|} & , L/2 < s < L \\ \alpha'(0) & , s = L \end{cases}$$

Además,  $H(0, t) = F(h(0, t)) = F(0, 0) = \alpha'(0) \forall t \in [0, 1]$  y  $H(L, t) = F(h(L, t)) = F(L, L) = \alpha'(L) = \alpha'(0) \forall t \in [0, 1]$ . Por tanto,  $H$  es una homotopía de lazos en  $\mathbb{S}^1$  entre  $\alpha'$  y el lazo  $\gamma = H(\cdot, 1)$ . En consecuencia se verifica

$$i(\alpha) = \deg \alpha' = \deg \alpha'_{|[0, L]} = \deg \gamma$$

Salvo un giro, que no afecta al índice de rotación, podemos suponer que  $\alpha'(0) = (1, 0)$  y salvo una reparametrización, que tampoco modifica el índice, podemos suponer que  $\alpha$  está contenida en el semiplano cerrado superior (basta considerar un difeomorfismo de la forma  $s \mapsto \pm s + c$  para tomar  $\alpha(0)$  como el punto de la curva de menor ordenada, y el signo podría cambiar puesto que el vector tangente se ha fijado en el instante inicial). Tal y como hemos transformado la curva, tenemos que  $\alpha$  queda orientada positivamente, puesto que  $N(0) = (1, 0)$  apunta claramente al dominio interior de la curva.

Tomamos  $\tilde{\gamma}$  un levantamiento de  $\gamma$  con  $\tilde{\gamma}(0) = 0$ . Se cumple que  $0 \leq \tilde{\gamma}(s) \leq \pi$  para  $0 < s < L/2$ , puesto que en este intervalo  $p(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s) = \frac{\alpha(s)}{|\alpha(s)|}$ , cuya segunda componente ( $\sin \circ \tilde{\gamma}$ ) es siempre no negativa por las suposiciones realizadas. Además, como  $\gamma(L/2) = -\alpha'(0) = (-1, 0)$ , se tiene que  $\tilde{\gamma}(L/2) = \pi$ . Razonando de forma análoga en el intervalo  $]L/2, L[$  y teniendo en cuenta que  $\gamma$  toma exactamente los valores opuestos en dicho intervalo, se obtiene que  $\tilde{\gamma}(L) = 2\pi$ . De esta forma, se tiene que

$$i(\alpha) = \deg \gamma = \frac{1}{2\pi} (\tilde{\gamma}(L) - \tilde{\gamma}(0)) = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) = 1$$

Entonces el índice de rotación de la curva es exactamente 1. Como en todas las suposiciones realizadas hay a lo sumo una reparametrización que podría ser decreciente, y por tanto cambiar el signo, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.12** (Umlaufsatz, teorema de la tangente). *Sea  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva p.p.a,  $L$ -periódica con  $L > 0$  e inyectiva en  $[0, L[$ , es decir, cuya traza es una curva simple. Entonces, el índice de rotación de  $\alpha$  es o bien 1 o bien  $-1$ . En consecuencia*

$$\int_0^L k(s) ds = 2\pi$$

si  $k$  es la curvatura de  $\alpha$  y  $\alpha$  está orientada positivamente.

### 1.3.1. Ejercicios

#### Ejercicio 7

En las hipótesis de Umlaufsatz, probar que, si  $\alpha$  está orientada positivamente,

$$\int_0^L |k(s)| ds \geq 2\pi$$

y se da la igualdad si y solo si  $k(s) \geq 0 \forall s \in \mathbb{R}$ .

Solución
----------

Podemos suponer que  $\alpha(s)$  está orientada positivamente. En caso contrario, la reparametrización de cambio de signo nos proporciona una curva orientada positivamente con la misma traza y que no modifica el valor absoluto de la curvatura. Como  $|k(s)| \geq k(s)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , de Umlaufsatz y la monotonía de la integral se sigue que

$$\int_0^L |k(s)| ds \geq \int_0^L k(s) = 2\pi$$

Además, si se da la igualdad, entonces

$$\int_0^L |k(s)| ds = 2\pi = \int_0^L k(s)$$

Como  $k$  es continua esto implica que  $k(s) = |k(s)|$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , y en particular,  $k(s) \geq 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

## Ejercicio 8

En las condiciones de Umlaufsatz, demostrar que  $k \geq 0$  si y solo si  $\alpha(\mathbb{R})$  es convexa, esto es, para cada  $s \in \mathbb{R}$  la curva entera queda a un lado de  $T_\alpha(s)$ .

Solución
----------

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $C = \alpha(\mathbb{R})$  es convexa, y que  $\alpha$  está orientada positivamente. Entonces, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $C$  está contenida en el semiplano determinado por la recta afín tangente en  $s$  que apunta en la dirección de  $N(s)$ . Fijamos  $s_0 \in \mathbb{R}$  y definimos la aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle$ , que es la distancia con signo a la recta afín tangente en  $s_0$ . La hipótesis se traduce en que  $f(s) \geq 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Es fácil comprobar además que  $f(s_0) = f'(s_0) = 0$  y  $f''(s_0) = k(s_0)$ .

Supongamos que  $f''(s_0) = k(s_0) < 0$ . Entonces existe un  $\delta > 0$  tal que  $f''(s) < 0$  para todo  $s \in ]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$ . Por tanto,  $f'$  es estrictamente decreciente en  $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$ , y como  $f'(s_0) = 0$ , entonces  $f' > 0$  en  $]s_0 - \delta, s_0[$  y  $f' < 0$  en  $]s_0, s_0 + \delta[$ . Luego  $f$  es estrictamente creciente en  $]s_0 - \delta, s_0[$  y estrictamente decreciente en  $]s_0, s_0 + \delta[$ , alcanzando un máximo relativo estricto en  $s_0$ , pero entonces  $f(s) < f(s_0) = 0$  para todo  $s \in ]s_0 - \delta, s_0 + \delta[ - \{s_0\}$ , contradiciendo que la curva se quede en el semiplano determinado por la recta afín tangente en  $s_0$  en la dirección de  $N(s_0)$ . Por tanto,  $k(s_0)$  ha de ser no negativo, y la arbitrariedad de  $s_0$  nos permite concluir que  $k \geq 0$ .

$\Rightarrow$ )

--

## 1.4. El teorema de la divergencia y sus consecuencias

### 1.4.1. Teorema de la divergencia

En esta sección vamos a obtener conclusiones geométricas a partir del teorema de la divergencia, un teorema de gran importancia en campos como la física, el análisis y, como veremos, en la geometría. Existen numerosas versiones de este teorema. Las versiones que enunciaremos será para dominios determinados por curvas simples compactas. Las vemos a continuación.

**Definición 1.4.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  medible. Se define el *área* de  $\Omega$  como la medida de Lebesgue de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,

$$A(\Omega) = \lambda(\Omega) = \int_{\Omega} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega} d\lambda$$

**Definición 1.4.2.** Sea  $E$  un subconjunto del plano, no necesariamente abierto. Un *campo* de  $E$  en  $\mathbb{R}^2$  es una aplicación  $X: E \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciable, en el sentido de que  $X$  es la restricción de una aplicación diferenciable en un abierto que contiene a  $E$ .

**Definición 1.4.3.** Sea  $X: E \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo. Se llama *divergencia* del campo  $X$  a la aplicación  $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(dX)$ . Si  $X = (X_1, X_2)$ , entonces se verifica  $\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y}$ .

**Teorema 1.4.1** (Teorema de la divergencia). *Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva simple, compacta y conexa, y sea  $\Omega$  el dominio determinado por  $C$ . Sea  $X: \Omega$  un campo. Entonces,*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_0^L \langle X(\alpha(s)), N(s) \rangle ds,$$

donde  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización positiva por el arco y  $L$ -periódica de  $C$  con  $\alpha$  inyectiva en  $[0, L]$ , y  $N(s)$  es el normal unitario interior a  $\Omega$ . Al producto  $\langle X(\alpha(s)), N(s) \rangle$  se le llama *circulación*.

**Comentario 1.4.2.** Si  $\alpha$  no está parametrizada por el arco, también es posible calcular la divergencia de un campo a partir de  $\alpha$ . En este caso, si  $A$  es el periodo de  $\alpha$ , se tiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_0^A \langle X(\alpha(t)), J\alpha'(t) \rangle dt$$

El teorema de la divergencia puede verse como una versión bidimensional del Teorema Fundamental del Cálculo. A continuación vamos a enunciar una versión más general de este teorema, que nos será de utilidad en algunos ejemplos que veremos más adelante.

**Definición 1.4.4.** Llamamos *dominio regular* de  $\mathbb{R}^2$  a cualquier abierto conexo y acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cuya frontera es unión finita de curvas simples compactas, conexas y disjuntas.

**Teorema 1.4.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio regular y  $X: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo. Entonces,*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_0^{L_1} \langle X(\alpha_1(s)), N_1(s) \rangle ds - \cdots - \int_0^{L_k} \langle X(\alpha_k(s)), N_k(s) \rangle ds,$$

donde, si  $\operatorname{Fr}\Omega = C_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} C_k$  es la descomposición en curvas simples compactas y conexas de la frontera de  $\Omega$ ,  $\alpha_i$  es una parametrización por el arco  $L_i$ -periódica e inyectiva en el período de  $C_i$ , de forma que el normal  $N_i$  apunta hacia  $\Omega$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Vamos a realizar una disgresión heurística sobre el significado del teorema de la divergencia. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos  $\phi_t: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $\phi_t(p) = p + tX(p)$ , es decir, trasladamos cada punto en la dirección dada por el campo una cantidad  $t$ .  $\phi_0$  es la identidad. Vamos a suponer que para  $|t| < \varepsilon$ ,  $\phi_t$  es un difeomorfismo sobre la imagen y llamamos  $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ . También llamamos  $A(t) = A(\Omega_t)$ . Se tiene que  $A(0) = A(\Omega)$  y

$$A(t) = A(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} d\lambda = \int_{\Omega} (1 \circ \phi_t) |\det Jac(\phi_t)| = \int_{\Omega} |\det Jac(\phi_t)|,$$

donde se ha usado el teorema del cambio de variable. Es fácil comprobar que, supuesto  $X = (X_1, X_2)$ ,

$$\det Jac(\phi_t) = 1 + t \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \right) + t^2 \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \frac{\partial X_2}{\partial x} \right)$$

Como  $A(0)$  es positivo, por ser  $\Omega$  abierto no vacío, para  $t$  pequeño podemos eliminar el valor absoluto, luego

$$A(t) = \int_{\Omega} 1 + t \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \right) + t^2 \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \frac{\partial X_2}{\partial x} \right)$$

Y derivando respecto de  $t$  y evaluando en 0,

$$A'(0) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} \operatorname{div} X$$

Es decir, integrar la divergencia en un campo se puede entender como estudiar cómo varía el área cuando se aplica el campo sobre cada punto del conjunto.

### 1.4.2. Ejemplos y consecuencias

A continuación vamos a ver ejemplos de divergencias sobre distintos campos, y las consecuencias que se derivan gracias al teorema de la divergencia.

**EJEMPLO 1.4.4:** Fijado  $a \in \mathbb{R}^2$  definimos el campo  $X(p) = a \forall p \in \mathbb{R}^2$ . Como  $X$  es constante, su diferencial en todo punto es la aplicación nula, y por tanto la divergencia es 0. El teorema de la divergencia nos proporciona el siguiente resultado.

**Corolario 1.4.5.** *Para una curva  $\alpha$  en las condiciones del teorema de la divergencia, se tiene*

$$\int_0^L \langle N(s), a \rangle ds = 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}^2$$

*En consecuencia, se tiene*

$$\int_0^L N(s) ds = 0$$

△

EJEMPLO 1.4.6: Definimos el campo  $X(p) = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}^2$ . Su diferencial en cada punto es la aplicación identidad en  $\mathbb{R}^2$ , y por tanto la divergencia es 2. Aplicando el teorema de la divergencia se tiene que  $2A(\Omega) = -\int_0^L \langle N(s), \alpha(s) \rangle ds$ , lo que nos proporciona la siguiente fórmula del área.

**Corolario 1.4.7.** *Para una curva  $\alpha$  y un dominio  $\Omega$  en las condiciones del teorema de la divergencia, se tiene*

$$A(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_0^L \langle N(s), \alpha(s) \rangle ds$$

Al producto  $\langle \alpha(s), N(s) \rangle$  se le denomina función soporte.

Veamos un ejemplo concreto. Tomamos una parametrización positiva por el arco de una circunferencia de centro  $c$  y radio  $r$ ,  $\alpha(s) = c + (\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$ , que además es  $2\pi r$ -periódica. Vamos a calcular el área del círculo  $B(c, r)$ . Para ello,

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \left( -\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \\ N(s) &= \left( -\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) \\ \langle \alpha(s), N(s) \rangle &= \langle c, N(s) \rangle - r\end{aligned}$$

$$A(B(c, r)) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \langle c, N(s) \rangle ds + \frac{r}{2} \int_0^{2\pi r} ds = 0 + \pi r^2 = \pi r^2$$

Por tanto, el área del círculo es  $\pi r^2$ , como se podía esperar.

△

EJEMPLO 1.4.8: En este ejemplo vamos a ver cómo se comporta la divergencia frente a distintas operaciones algebraicas. La linealidad de la traza y el diferencial se va a traducir en la linealidad de la divergencia. Para el producto de campos por funciones escalares obtendremos una regla similar a la de la derivación de productos. Concretamente, si  $X_1, X_2: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  son dos campos,  $f, g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones reales y  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  escalares, se verifica,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= \lambda_1 \operatorname{div} X_1 + \lambda_2 \operatorname{div} X_2 \\ \operatorname{div}(fX) &= f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle\end{aligned}$$

Es interesante destacar el comportamiento de los gradientes. El gradiente de una función escalar es un campo, que a cada punto del dominio lo aplica en la dirección de máximo crecimiento. Como el dominio está determinado por una curva de Jordan, al girar el campo 90 grados se puede intuir que los vectores del campo pueden compensarse entre sí, lo que daría a lugar a que se anule la divergencia. En efecto, teniendo en cuenta el lema de Schwarz, se tiene

$$\operatorname{div}(J\nabla f) = \operatorname{div} J(f_x, f_y) = \operatorname{div}(-f_y, f_x) = -f_{yx} + f_{xy} = 0$$

Esto no se puede afirmar para un gradiente general, lo que se verifica en tal caso es lo siguiente.

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(f_x, f_y) = f_{xx} + f_{yy}$$

A la expresión anterior se le suele llamar laplaciano de  $f$ , y los gradientes de funciones con laplaciano nulo son de gran interés en la física.

**Definición 1.4.5.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Se define el *laplaciano* de  $f$  como

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = f_{xx} + f_{yy}$$

$\Delta$  es un operador entre funciones diferenciables de  $\overline{\Omega}$  en  $\mathbb{R}$ .

Se dice que  $f$  es una *función armónica* si  $\Delta f \equiv 0$ .

**Proposición 1.4.9** (Propiedades algebraicas de la divergencia). Sean  $X_1, X_2: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dos campos,  $f, g: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones reales y  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  escalares. Se verifica

$$i) \operatorname{div}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 \operatorname{div} X_1 + \lambda_2 \operatorname{div} X_2$$

$$ii) \operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$$

$$iii) \operatorname{div}(J\nabla f) = 0$$

△

**EJEMPLO 1.4.10:** Consideramos las funciones  $f, g: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  y el campo  $X = gJ\nabla f$ . Aplicando las propiedades vistas en el ejemplo anterior se tiene

$$\operatorname{div} X = \operatorname{div} gJ\nabla f = g \operatorname{div} J\nabla f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle = 0 + \det(\nabla f, \nabla g) = \det(\nabla f, \nabla g)$$

(Recordemos que  $\langle a, Jb \rangle = \det(a, b) \forall a, b \in \mathbb{R}^2$ ). Consideramos ahora otro campo  $\phi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Supongamos  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ . Elegimos  $f = \phi_1, g = \phi_2$ . Entonces,  $\operatorname{div}(\phi_2 J\nabla \phi_1) = \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2) = \det \operatorname{Jac} \phi$ . Aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \det \operatorname{Jac} \phi &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi_2 J\nabla \phi_1 = - \int_0^L \langle \phi_2(\alpha(s)) J\nabla \phi_1(\alpha(s)), N(s) \rangle ds = \\ &= - \int_0^L \phi_2(\alpha(s)) \langle J\nabla \phi_1(\alpha(s)), N(s) \rangle ds = - \int_0^L \phi_2(\alpha(s)) \langle \nabla \phi_1(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle ds = \\ &= - \int_0^L \phi_2(\alpha(s)) (d\phi_1)_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) ds = - \int_0^L \phi_2(\alpha(s)) (\phi_1 \circ \alpha)'(s) ds \end{aligned}$$

Esta última igualdad solo depende de los puntos de  $C$ , lo que nos permite afirmar el siguiente resultado

**Lema 1.4.11.** Sean  $\phi, \psi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dos aplicaciones diferenciables tales que  $\phi|_C = \psi|_C$ . Entonces,

$$\int_{\Omega} \det \operatorname{Jac} \phi = \int_{\Omega} \det \operatorname{Jac} \psi$$

En particular, cuando  $\phi|_C = I$ , entonces se tiene que  $\int_{\Omega} \det \operatorname{Jac} \phi = A(\Omega)$ . Supongamos que además  $\phi(\Omega) \subset C$ . Tomamos  $q \in \Omega$ ,  $v \in \mathbb{R}^2$  y  $t \in \mathbb{R}$  de forma que  $q + tv \in \Omega$ . Entonces  $\phi(q + tv) = \alpha(f(t))$  para

alguna función  $f$ , que es diferenciable por ser  $f(t) = \alpha^{-1}(\phi(q + tv))$ . Derivando respecto de  $t$  en el instante 0 se tiene

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi(q + tv) = (d\phi)_q(v) = f'(0)\alpha'(f(0)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Esto implica que  $(d\phi)_q(v) \in T(f(0))$  para cualquier vector, luego su imagen tiene dimensión a lo sumo 1, y por tanto  $rg(d\phi)_q \leq 1$ . Esto nos indica que  $\det(d\phi)_q = \det \text{Jac } \phi(q) = 0$  para todo  $q \in \Omega$ , pero por el lema anterior esto implica que  $A(\Omega) = 0$ , contradiciendo que  $\Omega$  sea abierto no vacío (su área es mayor o igual que la de cualquier bola que la contenga).

Esta contradicción nos conduce al siguiente teorema.

**Teorema 1.4.12** (Retracciones diferenciables de un dominio en su borde). *Sea  $C$  una curva simple, compacta y conexa en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\Omega$  el dominio interior determinado por  $C$ . Entonces no existen retracciones diferenciables de  $\bar{\Omega}$  en  $C$ , es decir, aplicaciones  $r: \bar{\Omega} \rightarrow C$ , con  $r|_C = I$ .*

De este teorema (y por tanto, como consecuencia del teorema de la divergencia) podemos deducir un teorema de punto fijo.

**Corolario 1.4.13** (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Toda aplicación continua  $F: \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$  admite un punto fijo.*

*Demostración.* Veamos la demostración para cuando  $F$  es diferenciable. El caso continuo se obtiene fácilmente aproximando por sucesiones de funciones diferenciables.

Elegimos la curva de Jordan  $\mathbb{S}^1$  y por tanto  $\Omega = B(0, 1)$ . Supongamos que existe  $F: \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1)$  diferenciable y sin puntos fijos. Entonces  $F(x) \neq x$  para todo  $x \in \bar{B}(0, 1)$ . Podemos considerar por tanto la semirrecta  $S_{F(x), x-F(x)}$ , que sale de  $F(x)$  y pasa por  $x$ . Llamamos  $r(x)$  al único punto de  $\mathbb{S}^1 \cap S_{F(x), x-F(x)}$  distinto de  $F(x)$ . Es claro que  $r|_{\mathbb{S}^1}$  es la identidad, luego basta ver que la aplicación  $r: \bar{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es diferenciable para contradecir el teorema anterior, lo que negaría la suposición de que  $F$  no tiene puntos fijos.

Para ver que  $r$  es diferenciable, basta darse cuenta que, para cada  $x \in \bar{B}(0, 1)$ ,  $r(x) = F(x) + \lambda(x)(x - F(x))$ , donde  $\lambda(x)$  es la única solución positiva de la ecuación  $|F(x) + \lambda(x - F(x))| = 1$ , y se puede calcular explícitamente resolviendo la ecuación de segundo grado asociada, obteniendo

$$\lambda(x) = \frac{|F(x)|^2 + \sqrt{|F(x)|^2 + (1 - |F(x)|^2)(|x|^2 + |F(x)|^2)}}{|x|^2 + |F(x)|^2}$$

Como  $x$  y  $F(x)$  no pueden anularse simultáneamente, la función  $r$  está bien definida y es derivable en todos sus puntos. △

△

**EJEMPLO 1.4.14:** Fijado  $a \in \mathbb{R}^2$ , consideramos el campo  $X$  en  $\mathbb{R}^2 - \{a\}$  definido por  $X(p) = \frac{p-a}{|p-a|^2}$  para cada  $p \in \mathbb{R}^2 - \{a\}$ . Esta aplicación se conoce como la aplicación *inversión*. Vamos a calcular su diferencial en cada punto. Es una aplicación lineal  $(dX)_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y, si  $\alpha$  es una curva definida en un entorno de 0 con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ , el diferencial viene dado por



$$\begin{aligned}
(dX)_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\alpha(t) - a}{|\alpha(t) - a|^2} = - \left( \frac{v}{|p - a|^2} - \frac{p - a}{|p - a|^4} 2\langle p - a, v \rangle \right) = \\
&= - \frac{v}{|p - a|^2} + \frac{2\langle p - a, v \rangle}{|p - a|^4} (p - a) \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 - \{a\} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la divergencia. Para ello tenemos en cuenta que la traza de un endomorfismo puede obtenerse sumando los productos de las imágenes de elementos de una base ortonormal con ellos mismos. Por tanto, si  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal, se tiene

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)(p) &= \operatorname{tr}(dX)_p = \sum_{i=1}^2 \langle (dx)_p(e_i), e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^2 \left\langle -\frac{e_i}{|p - a|^2} + \frac{2\langle p - a, e_i \rangle}{|p - a|^4} (p - a), e_i \right\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\langle e_i, e_i \rangle}{|p - a|^2} + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle p - a, e_i \rangle^2}{|p - a|^4} = -\frac{2}{|p - a|^2} + \frac{2}{|p - a|^4} |p - a|^2 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, si  $C$  es una curva simple, compacta y conexa y  $\Omega$  el dominio interior determinado por  $C$ , si  $a \notin \overline{\Omega}$ , aplicando el teorema de la divergencia se tiene

$$\int_{\Omega} \frac{\langle \alpha(s) - a, N(s) \rangle}{|\alpha(s) - a|^2} ds = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$$

Supongamos ahora que  $a \in \Omega$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B}(a, \varepsilon) \subset \Omega$ . Llamamos  $\Omega_\varepsilon = \Omega - \overline{B}(a, \varepsilon)$ , que es un dominio regular con  $\operatorname{Fr}\Omega_\varepsilon = C \cup \mathbb{S}^1(a, \varepsilon)$ . Parametrizamos  $\mathbb{S}^1(a, \varepsilon)$  mediante la aplicación  $\beta(s) = a + \varepsilon(\sin(s/\varepsilon), \cos(s/\varepsilon))$ , que es una parametrización por el arco y  $2\pi\varepsilon$ -periódica, cuyo normal es  $N_\beta(s) = (1/\varepsilon)(\beta(s) - a)$ , que apunta hacia el interior de  $\Omega_\varepsilon$ . El campo  $X$  está bien definido en  $\overline{\Omega_\varepsilon}$  y, por lo visto anteriormente, tiene divergencia nula en todo punto. Aplicando el teorema 1.4.3, que generaliza el teorema de la divergencia, obtenemos

$$0 = \int_0^L \frac{\langle \alpha(s) - a, N(s) \rangle}{|\alpha(s) - a|^2} ds + \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{\langle \beta(s) - a, N_\beta(s) \rangle}{|\beta(s) - a|^2} ds$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\langle \alpha(s) - a, N(s) \rangle}{|\alpha(s) - a|^2} ds &= - \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{\langle \beta(s) - a, N_\beta(s) \rangle}{|\beta(s) - a|^2} ds = - \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{\langle \beta(s) - a, (1/\varepsilon)(\beta(s) - a) \rangle}{|\beta(s) - a|^2} ds = \\
&= - \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} ds = -2\pi
\end{aligned}$$

En conclusión, hemos probado que

$$\int_0^L \frac{\langle \alpha(s) - a, N(s) \rangle}{|\alpha(s) - a|^2} ds = \begin{cases} 0 & , a \notin \overline{\Omega} \\ -2\pi & , a \in \Omega \end{cases}$$

Hemos obtenido una nueva caracterización para los puntos en los dominios interior y exterior determinados por una curva de Jordan. Además, observamos otro fenómeno de discretización. Esta fórmula además es la versión bidimensional del *Teorema de Gauss del electromagnetismo*, y permite deducir teoremas importantes de la variable compleja, como el teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

También es posible probar que la integral anterior toma el valor  $-\pi$  cuando  $a \in C$ , haciendo un razonamiento similar a los anteriores, añadiendo en este caso entornos tubulares y tomando límites.

$\triangle$

### 1.4.3. La desigualdad isoperimétrica

Para concluir, vamos a demostrar una conocida desigualdad que relaciona los perímetros y áreas de las curvas de Jordan. Partimos del ejemplo anterior. Para  $a \in \Omega$ , se tiene la igualdad

$$2\pi = \int_0^L \frac{\langle a - \alpha(s), N(s) \rangle}{|a - \alpha(s)|^2} ds$$

La parte derecha es una integral dependiente del parámetro  $a \in \Omega$ . Queremos integrar la expresión anterior en  $\Omega$ . Para ello, en primer lugar consideramos las curvas  $C_t$  paralelas a  $C$ , a distancia orientada  $t$ , con  $0 < t < \varepsilon$  (estamos tomando el normal interior), de forma que  $V_\varepsilon(C)$  es un entorno tubular. Llamamos  $\Omega_t$  al dominio determinado por  $C_t$ , y parametrizamos  $C_t$  mediante  $\alpha_t(s) = \alpha(s) + tN(s)$ . Es claro que  $\Omega_t \subset \Omega$  y que el integrando anterior está acotado en  $\Omega_t$  para todo  $0 < t < \varepsilon$ . Integramos en  $\Omega_t$  y aplicamos el teorema de Fubini.

$$2\pi A(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \left( \int_0^L \frac{\langle a - \alpha(s), N(s) \rangle}{|a - \alpha(s)|^2} ds \right) da = \int_0^L \left( \int_{\Omega_t} \frac{\langle a - \alpha(s), N(s) \rangle}{|a - \alpha(s)|^2} da \right) ds \quad (1.1)$$

Se puede comprobar que la función  $a \mapsto \frac{\langle a - a_0, b \rangle}{|a - a_0|^2}$  es divergencia del campo  $Y(a) = \langle a - a_0, b \rangle X(a)$ . Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia (en este caso  $\alpha$  no está p.p.a),

$$\int_{\Omega_t} \frac{\langle a - a_0, b \rangle}{|a - a_0|^2} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} Y = - \int_0^L \langle Y(\alpha_t(s)), J\alpha'_t(s) \rangle ds = - \int_0^L \langle \alpha_t(s) - a_0, b \rangle \left\langle \frac{\alpha_t(s) - a_0}{|\alpha_t(s) - a_0|^2}, J\alpha'_t(s) \right\rangle ds$$

Aplicando esto a la ecuación 1.1 obtenemos

$$2\pi A(\Omega_t) = \int_0^L \left( \int_{\Omega_t} \frac{\langle a - \alpha(s), N(s) \rangle}{|a - \alpha(s)|^2} da \right) ds = - \int_0^L \int_0^L \frac{\langle \alpha_t(s) - \alpha(u), N(u) \rangle \langle \alpha_t(s) - \alpha(u), J\alpha'_t(s) \rangle}{|\alpha_t(s) - \alpha(u)|^2} ds du, \quad (1.2)$$

igualdad válida para todo  $0 < t < \varepsilon$ .

Ahora notemos lo siguiente. Por un lado,  $A(\Omega_t) = \int_{\Omega} \chi_{\Omega_t}$ , y esta función está dominada en  $\Omega$  por la función constantemente 1, y además converge a ella cuando  $t \rightarrow 0$ . Por tanto, tomando límites cuando  $t \rightarrow 0$ , el teorema de la convergencia dominada nos dice que  $A(\Omega_t) \rightarrow A(\Omega)$ . Por otra parte, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al integrando de la derecha en 1.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\langle \alpha_t(s) - \alpha(u), N(u) \rangle \langle \alpha_t(s) - \alpha(u), J\alpha'_t(s) \rangle}{|\alpha_t(s) - \alpha(u)|^2} \right| &\leq \frac{|\alpha_t(s) - \alpha(u)| |\alpha_t(s) - \alpha(u)| |\alpha'_t(s)|}{|\alpha_t(s) - \alpha(u)|^2} = |\alpha'_t(s)| \leq \\ &\leq |\alpha'(s) - tk(s)\alpha'(s)| \leq |1 + tk(s)| |\alpha'(s)| \leq 1 + \varepsilon \max |k| \end{aligned}$$

Por tanto, dicho integrando también está dominado, y puesto que  $\alpha_t(s) \rightarrow \alpha(s)$  y  $J\alpha'_t(s) \rightarrow J\alpha'(s) = N(s)$  cuando  $t \rightarrow 0$ , el teorema de la convergencia dominada aplicado a la ecuación 1.2 nos dice que

$$2\pi A(\Omega) = - \int_0^L \int_0^L \frac{\langle \alpha(s) - \alpha(u), N(u) \rangle \langle \alpha(s) - \alpha(u), N(s) \rangle}{|\alpha(s) - \alpha(u)|^2} ds du \quad (1.3)$$

Hemos obtenido una nueva fórmula para el cálculo del área, que tiene en cuenta, para cada dos puntos de la curva, el triángulo determinado por las tangentes en ambos puntos y la cuerda que los une. Nuestro objetivo ahora es encontrar una cota para esta integral. Para ello utilizamos el siguiente resultado.

**Lema 1.4.15.** *Dados  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ , se verifica*

$$-\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle \leq \frac{1}{4} \langle v_1, v_2 - v_3 \rangle^2,$$

y se da la igualdad si y solo si  $v_1 \perp v_2 + v_3$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} -\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle &\leq -\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle + \frac{1}{4} \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle^2 = \\ &= -\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle + \frac{1}{4} \langle v_1, v_2 \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle v_1, v_3 \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle v_1, v_2 \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle v_1, v_3 \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_1, v_3 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} (\langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, v_3 \rangle)^2 = \frac{1}{4} \langle v_1, v_2 - v_3 \rangle^2 \end{aligned}$$

Y la igualdad se da si y solo si  $\frac{1}{4} \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle^2 = 0$ , si y solo si  $\langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = 0$ , si y solo si  $v_1 \perp v_2 + v_3$ .  $\square$

Aplicamos la desigualdad que acabamos de probar a la ecuación 1.3, junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obteniendo

$$\begin{aligned} 2\pi A(\Omega) &\leq \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L \frac{\langle \alpha(s) - \alpha(u), N(s) - N(u) \rangle^2}{|\alpha(s) - \alpha(u)|^2} ds du \leq \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L \frac{|\alpha(s) - \alpha(u)|^2 |N(s) - N(u)|^2}{|\alpha(s) - \alpha(u)|^2} = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L |N(s) - N(u)|^2 ds du = \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L (|N(s)|^2 + |N(u)|^2 - 2\langle N(s), N(u) \rangle) ds du = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L (1 - \langle N(s), N(u) \rangle) ds du = \frac{1}{2} L^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \int_0^L \langle N(s), N(u) \rangle ds \right) du = \frac{1}{2} L^2 \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha tenido en cuenta la propiedad ya vista de que el normal multiplicado por una constante tiene integral nula en su periodo. Despejando obtenemos la desigualdad  $4\pi A(\Omega) \leq L^2$ .

Veamos ahora cuándo se da la igualdad. Si  $4\pi A(\Omega) = L^2$ , se tiene que en particular, por lema 1.4.15 se cumple que  $\langle \alpha(s) - \alpha(u), N(s) + N(u) \rangle = 0$ , para todos  $u, s \in \mathbb{R}$ . Derivando respecto de  $s$ , obtenemos

$$\langle T(s), N(s) + N(u) \rangle - k(s) \langle \alpha(s) - \alpha(u), T(s) \rangle = 0 \quad \forall s, u \in \mathbb{R}$$

Volvemos a derivar, esta vez respecto de  $u$ . Obtenemos que

$$-k(u)\langle T(s), T(u) \rangle + k(s)\langle T(u), T(s) \rangle = (k(s) - k(u))\langle T(s), T(u) \rangle = 0 \quad \forall s, u \in \mathbb{R}$$

De nuevo derivamos respecto de  $s$ , obteniendo finalmente

$$k'(s)\langle T(s), T(u) \rangle + (k(s) - k(u))k(s)\langle N(s), T(u) \rangle = 0 \quad \forall s, u \in \mathbb{R}$$

En particular, para  $u = s$ , se tiene que  $k'(s) = 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $k$  es constante, y como  $C$  es compacta y conexa es necesariamente una circunferencia.

El recíproco también es cierto, puesto que si  $C = \mathbb{S}^1(p, r)$  se tiene que

$$4\pi A(B(p, r)) = 4\pi\pi r^2 = 4\pi^2 r^2 = (2\pi r)^2 = L(\mathbb{S}^1(p, r))^2$$

Acabamos de demostrar el siguiente teorema

**Teorema 1.4.16** (Desigualdad isoperimétrica). *Sea  $C$  una curva simple, compacta y conexa de longitud  $L$  y  $\Omega$  el dominio determinado por  $C$ . Entonces,*

$$4\pi A(\Omega) \leq L^2$$

*Además, se da la igualdad si y solo si  $C$  es una circunferencia.*

Acabamos de probar, como consecuencia del teorema de la divergencia, uno de los resultados más destacados de la geometría clásica, y es que, de todas las curvas conexas y compactas con una longitud prefijada, la que determina el dominio interior de mayor área es siempre la circunferencia.

#### 1.4.4. Ejercicios

Veamos algunos ejercicios. En lo que sigue, consideramos una curva simple compacta y conexa  $C$ ,  $\Omega$  el dominio determinado por  $C$  y  $\alpha$  una parametrización de  $C$  en las condiciones del teorema de la divergencia.

#### Ejercicio 9

Sea  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica, tal que  $f|_C \equiv 0$ . Demostrar que  $f \equiv 0$ .

Solución
----------

**Ejercicio 10**

Supongamos que  $C \subset B(a, r)$ , con  $r > 0$ . Probar que entonces  $2A(\Omega) \leq Lr$ . ¿Cuándo se da la igualdad?

Solución
----------

--

**Ejercicio 11**

Supongamos que  $B(a, r) \subset \Omega$ . Encontrar una desigualdad entre  $A(\Omega)$  y  $L$  en función de  $r$ . ¿Cuándo se da la igualdad?

Solución
----------

--

## Capítulo 2

# Teoría global de superficies

En este capítulo nos centraremos en el estudio de las propiedades globales de las superficies en el espacio. Algunos de los resultados serán análogos a los vistos para curvas en el capítulo anterior. Otros nos proporcionarán resultados novedosos exclusivos para superficies. Cuando estudiábamos curvas, trabajábamos simultáneamente con dos conceptos, la curva parametrizada (la aplicación) y las trazas de dichas curvas, centrándonos especialmente en las llamadas curvas simples, y más en concreto en las compactas. En el caso de superficies, el concepto de superficie que manejaremos será el definido al principio del capítulo anterior. El concepto unidimensional equivalente, las curvas simples, vimos que topológicamente son solo rectas y circunferencias, siendo estas últimas las únicas compactas. En el caso de superficies, el abanico de posibilidades es mucho mayor, teniendo una cantidad infinita numerable de topologías distintas.

### 2.1. Teorema de Jordan. Teorema de Brower-Samelson. Entornos tubulares.

Comenzamos el capítulo de la misma forma que comenzamos a trabajar con curvas, viendo que las superficies compactas también separan el espacio en dos componentes conexas. En el contexto de las superficies en el espacio, el teorema análogo al de la curva de Jordan sigue siendo cierto y se conoce como teorema de Jordan.

**Teorema 2.1.1** (Teorema de Jordan). *Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie compacta y conexa, entonces  $\mathbb{R}^3 - S$  tiene exactamente dos componentes conexas, una acotada (dominio interior) y otra no acotada (dominio exterior), cuya frontera común es  $S$ .*

*Demostración.* Adaptar el teorema de la curva de Jordan a superficies. □

**Comentario 2.1.2.** *El teorema sigue siendo válido si  $S$  es cerrada y conexa, salvo la acotación de los dominios.*

**Comentario 2.1.3.** *Al igual que en la versión para curvas, la demostración es constructiva y permite caracterizar los dominios interior y exterior determinados por  $S$  a través de la paridad del número de*

*intersecciones transversas a la superficie.*

En el capítulo anterior vimos que en curvas simples compactas y conexas el vector normal siempre apunta hacia dentro o hacia fuera. Esta idea se puede trasladar a las superficies compactas para concluir que siempre son orientables. Recordamos el concepto de orientabilidad de superficies.

**Definición 2.1.1.** Sea  $S$  una superficie. Diremos que  $S$  es *orientable* si existe una aplicación (*aplicación de Gauss*)  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  diferenciable y tal que  $N(p) \perp T_p S$  para todo  $p \in S$ . A tal aplicación se le llama una *orientación* de  $S$ .

**Teorema 2.1.4** (Brower-Samelson). *Toda superficie compacta de  $\mathbb{R}^3$  es orientable.*

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie compacta. Podemos suponer que  $S$  es conexa, pues en caso contrario, por la compacidad, el número de componentes conexas sería finito y tendríamos definido en cada componente la correspondiente orientación como superficie compacta y conexa.

Dado  $p \in S$ , llamamos  $N(p)$  al único vector de  $\mathbb{R}^3$  unitario y perpendicular a  $T_p S$  que apunta al interior  $\Omega$  de  $S$ . Veamos que  $N$  define una aplicación diferenciable.

En primer lugar, veamos que está bien definida. Dado  $v \notin T_p S$ , y  $p \in S$ , diremos que  $v$  *apunta al interior* (resp. *exterior*) de  $S$  en  $p$  cuando existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $0 < t < \varepsilon$  entonces  $p + tv \in \Omega$  (resp.  $p + tv \in \Omega_{ext}$ ). Vamos a ver que, dado  $v \notin T_p S$ , o bien  $v$  apunta al interior de  $S$  en  $p$ , o bien  $v$  apunta al exterior de  $S$  en  $p$ , y solo apunta a uno de los dos dominios.

Consideramos la recta  $R_{p,v}$  con origen  $p$  y dirección  $v$ .  $p \in R_{p,v} \cap S$  y además  $R_{p,v}$  y  $S$  son transversas en  $p$ , esto es, el tangente a  $R_{p,v}$  en  $p$  ( $v$ ) no pertenece a  $T_p S$ . Se puede probar de forma análoga al lema de curvas 1.2.6 que existe un entorno  $B(p, r)$ ,  $r > 0$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $R_{p,v} \cap S \cap B(p, r) = \{p\}$ . Equivalentemente existe un entorno  $V = S \cap B(p, r) = \{p\}$   $\square$



# Bibliografía

- [1] Sebastian Montiel, Antonio Ros, *Curvas y Superficies*, Proyecto Sur de Ediciones, S.L. 2<sup>a</sup> Edición.