Análisis de Fourier
Apuntes de clase

Andrés Herrera Poyatos
Juan Luis Suárez Díaz
Universidad de Granada
andreshp9@gmail.com
jlsuarezd@gmail.com

Índice general

Capítulo 1

Introducción histórica

Este curso se centra en el estudio de la series de Fourier y sus aplicaciones en el análisis en varias variables. Las series de Fourier son sin duda uno de los conceptos más importantes de las matemáticas. A continuación mostraremos, a modo de introducción, algunas aplicaciones que tienen estas series.

1.1. Ecuaciones clásicas de la Física Matemática

de las ecuaciones clásicas de la física, para las cuales veremos a lo largo del curso la utilidad del análisis de Fourier sobre ellas.

Definición 1.1.1 (Laplaciano)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio no vacío. Se denomina *operador laplaciano* a la aplicación $\Delta : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ dada por

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \ \forall u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$$

El operador laplaciano, mientras no se especifique nada, se reserva a las variables espaciales, es decir, si consideramos funciones definidas en el producto cartesiano de un dominio (espacio) por un intervalo (tiempo), el laplaciano se considera solo sobre las variables del dominio.

Ejemplo 1.1.1 (Ecuación del potencial o de Laplace): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio no vacío, y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. La ecuación de Laplace viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \text{ en } \Omega.$$

En términos del laplaciano, podemos reescribirla como

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega.$$

A las soluciones de esta ecuación se les denomina *funciones armónicas*. Su estudio es la teoría del potencial. El caso $n = 1$ es trivial y el caso $n = 2$ es uno de los temas de estudio en el campo de la variable compleja. △

Ejemplo 1.1.2 (Ecuación de ondas): Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio no vacío, $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \times I)$. La ecuación de ondas viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ en } \Omega \times I.$$

En términos del laplaciano, podemos reescribirla como

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ en } \Omega \times I.$$

△

Ejemplo 1.1.3 (Ecuación del calor): Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio no vacío, $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \times I)$. La ecuación de ondas viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ en } \Omega \times I.$$

En términos del laplaciano, podemos reescribirla como

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } \Omega \times I.$$

△

1.2. El problema de la cuerda vibrante

Una de las formas de ver el problema de la cuerda vibrante consiste en tratar de modelar la posición a lo largo del tiempo de una cuerda tensa y sujeta en sus extremos. Supongamos que tenemos tal cuerda, situada sobre el intervalo $[0, \pi]$, en la que para cada instante t y cada posición x del intervalo la posición de la cuerda viene dada por el punto $(x, u(x, t))$. En el instante inicial aplicamos a la fuerza una deformación que viene dada por la gráfica de una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = f(\pi) = 0$. Se trata de encontrar la función u.

Formalmente, el problema es el siguiente: dada $f \in \mathcal{C}[0, \pi]$ con $f(0) = f(\pi) = 0$, encontrar $u \in \mathcal{C}([0, \pi] \times \mathbb{R}_0^+) \cap \mathcal{C}^2(]0, \pi[\times \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ \forall x \in]0, \pi[, \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{E}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{B}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) = 0 \ \forall x \in [0, \pi] \tag{I1}$$

$$u(x, 0) = f(x) \ \forall x \in [0, \pi] \tag{I2}$$

(B) expresa la condición de contorno que sujeta los extremos de la cuerda, $(I1)$ expresa una condición inicial de velocidad (la cuerda está parada al inicio) e $(I2)$ representa la condición inicial de espacio (la posición de la cuerda).

D'Alembert (1747) y Euler (1749) afirmaron que la solución de este problema venía dada por $u(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+t) - F(x-t))$, donde F es una "conveniente extensión" de f. En términos actuales, su resultado puede enunciarse de la siguiente forma

Teorema 1.2.1. *Si $f \in \mathcal{C}^2[0,\pi]$ verifica que $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$, el problema de la cuerda vibrante tiene una solución única, dada por $u(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+t) - F(x-t))$, donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la única extensión impar y 2π-periódica de f, es decir, $F(x) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi]$, $F(-x) = -F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ y $F(x+2\pi) = F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Una forma de encontrar la función solución u expresada en los términos anteriores es utilizando los cambios $\xi = x + t$ y $\eta = x - t$.

Más adelante, Bernouilli (1753) propuso otra solución para el problema. Para ello, consideró las funciones $u_n(x,t) = \cos(nt)\sin(nx)\ \forall x,t \in \mathbb{R}$. Estas funciones son $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ y verifican las condiciones (E), (B) e $(I1)$. Bernouilli afirmó que la solución al problema tiene que venir dada por una suma ponderada de estas funciones, y esta ponderación depende de la función f. Es decir, la solución es de la forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty b_n u_n(x,t)\ \forall x \in [0,\pi],\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, con $\{b_n\}$ verificando que $f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx)\ \forall x \in [0,\pi]$. Sin embargo, Bernouilli no dio un argumento formal para este hecho ni pudo encontrar una expresión para los coeficientes. De esto último se encargaría Fourier más adelante. En términos actuales, el resultado de Bernouilli puede enunciarse de la siguiente forma

Teorema 1.2.2. *Si $f \in \mathcal{C}^3[0,\pi]$ verifica $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$, el problema tiene solución única, dada por $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \cos(nt)\sin(nx)\ \forall x \in [0,\pi],\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, donde $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\xi)\sin(n\xi)d\xi\ \forall n \in \mathbb{N}$. En particular, $f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx)\ \forall x \in [0,\pi]$*

Podemos observar que en este caso la solución de D'Alembert requiere hipótesis más débiles que la de Bernouilli, pero esta última solución nos muestra las utilidades que puede tener el análisis de Fourier. Las funciones u_n se pueden deducir mediante el método de separación de variables, que veremos con más detalle en la siguiente sección.

1.3. Fourier y la ecuación del calor

La ecuación del calor fue establecida por Fourier en el siglo XIX. Formalmente, el problema asociado a esta ecuación es: dada $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$, con $f(0) = f(\pi) = 0$, encontrar $u \in \mathcal{C}([0,\pi] \times \mathbb{R}_0^+) \cap \mathcal{C}^2(]0,\pi[\times]\mathbb{R}^+)$ que verifique:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\ \forall x \in]0,\pi[,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{E}$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{B}$$
$$u(x,0) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi] \tag{I}$$

Vamos a encontrar una solución particular que verifique (E) y (B) por el método de separación de variables. Para ello suponemos que nuestra solución u va a ser de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Es claro que la función nula es solución, pero buscamos, igual que con la ecuación de ondas, funciones no nulas simples para que más adelante pueda tener sentido sumarlas. Por ello, suponemos $u \neq 0$, luego en particular $\exists x_0 \in]0, \pi[$ con $X(x_0) \neq 0$.

La ecuación (E), tras considerar las variables separadas, queda de la forma

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \ \forall x \in]0, \pi[, \ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.1}$$

En particular, en x_0 podemos dividir, y se tiene

$$\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t) = T'(t) \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Llamando $\lambda = -\frac{X''(x_0)}{X(x_0)}$ obtenemos la ecuación lineal $T' + \lambda T = 0$. De la misma forma, sustiuyendo en (1.1), obtenemos la ecuación $X'' + \lambda X = 0$. Vamos a buscar soluciones no nulas de esta última ecuación.

Es fácil ver que, al imponer las condiciones de contorno (B), para el caso $\lambda < 0$ no hay soluciones no triviales, y lo mismo ocurre para $\lambda = 0$. Para $\lambda > 0$ sabemos que las soluciones son de la forma $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Al imponer las condiciones de contorno, se tiene, por un lado, que $X(0) = 0$, luego $A = 0$. Por otro lado, se tiene $X(\pi) = 0$, lo que nos lleva a $B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Para que la solución no sea trivial se debe verificar que

$$B \neq 0 \iff \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \iff \sqrt{\lambda}\pi \in \pi\mathbb{Z} \iff \sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z} \iff \lambda \in \mathbb{Z}^2,$$

que junto con la suposición $\lambda > 0$ nos lleva a que los valores que buscamos para λ son de la forma $\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$, y las soluciones para la variable espacial son de la forma $X_n(x) = B_n \sin(nx)$. Finalmente nos queda resolver la ecuación $T' + n^2 T = 0$, que nos lleva a soluciones de la forma $T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$. Agrupando finalmente las variables temporal y espacial, llegamos a las soluciones $u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$.

Fourier, continuando la idea de Bernouilli, afirmó que la solución al problema viene dada por $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$, donde $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi \ \forall n \in \mathbb{N}$, y que además la serie de senos con coeficientes $\{b_n\}$ representa a la función f ($f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$). En términos actuales se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.1. *Si $f \in \mathcal{C}^1[0,\pi]$, con $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces el problema tiene solución única dada por $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx) \ \forall x \in [0,\pi] \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, donde $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

En particular se tiene $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$.

1.4. Series trigonométricas. Series de Fourier

En este apartado haremos una introducción informal a las series trigonométricas y series de Fourier, y observaremos algunos de los problemas que tendremos que abordar a lo largo de la asignatura.

1.4.1. Series trigonométricas

Una serie trigonométrica (en forma real) se expresará como $\sum_{n\geq 0}\phi_n$, donde $\phi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vienen dadas por

$$\phi_0(t)=\frac{a_0}{2},\ \phi_n(t)=a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\ \forall t\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N},$$

con $a_0\in\mathbb{C}$ y $a_n,b_n\in\mathbb{C}\ \forall n\in\mathbb{N}$.

La sucesión de sumas parciales de la serie trigonométrica se define como

$$S_0(t)=\frac{a_0}{2},\ S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\ \forall t\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Vamos a buscar otra representación para las series trigonométricas. Para ello, usamos las expresiones complejas del seno y el coseno. Se tiene

$$a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)=a_n\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}+b_n\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-int},$$

luego

$$S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikt}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikt}=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt},$$

donde $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2},c_0=\frac{a_0}{2}$.

Los coeficientes a_k y b_k también se pueden recuperar: $a_k=c_k+c_{-k}$, $b_k=i(c_k-c_{-k})$ y $a_0=2c_0$.

De esta forma, una serie trigonométrica en forma compleja se expresará como $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{int}$, con $c_n\in\mathbb{C}\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

La sucesión de sumas parciales vendrá dada por $S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}\ \forall t\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. La serie será real cuando $c_{-n}=\overline{c_n}\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

1.4.2. Coeficientes de Fourier y serie de Fourier de una función

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathcal{C}$, 2π-periódica y que suponemos integrable. Los coeficientes de Fourier de f se definirán como

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

y la serie de Fourier de f será la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{int}.$$

Se define la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f como

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \ \forall t \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Alternativamente, podemos notar los coeficientes de forma análoga a los de la serie trigonométrica.

$$c_n(f) = \hat{f}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos de forma intuitiva el porqué de estos coeficientes. Supongamos que todo está permitido, en el sentido de que se cumplen hipótesis para que todas las operaciones que realicemos a continuación sean válidas. Y supongamos que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$. Entonces, multiplicando por e^{-ikt},

$$f(t)e^{-ikt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n-k)t} \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dividiendo por 2π e integrando a ambos lados de la igualdad, junto a la definición de los coeficientes de Fourier que acabamos de ver, nos queda

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}dt = c_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

La última igualdad se debe a que la integral anula todos los términos de la suma salvo el k-ésimo. De esta forma llegamos a que f se puede "representar" por una serie trigonométrica de coeficientes c_n si y solo si $c_n = \hat{f}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente concluimos esta introducción planteando algunas preguntas sobre las series que acabamos de ver. Algunas de ellas las trataremos de resolver a lo largo de este curso.

- ¿Dónde y cómo converge una serie trigonométrica?
- ¿Propiedades de la suma de una serie trigonométrica?
- Definición precia de serie de Fourier.
- ¿Qué series trigonométricas son de Fourier?
- Unicidad de la función dada una serie de Fourier.
- Reconstrucción de una función a partir de su serie de Fourier.
- Convergencia de la serie de Fourier.
- Derivación e integración usando series de Fourier.
- Aplicaciones de las series de Fourier.

Capítulo 2

Espacios de funciones

En este tema vamos a recordar algunos conceptos y herramientas del análisis matemático que nos serán de gran utilidad en el estudio del análisis de Fourier. En primer lugar introduciremos la integral de Lebesgue. El cálculo de primitivas está íntimamente relacionado con las series de Fourier, donde las funciones pueden no ser continuas en un sentido clásico.

2.1. Medida de Lebesgue

Definición 2.1.1. Diremos que $I \subseteq \mathbb{R}^N$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ si $I = \prod_{k=1}^N I^{(k)}$, donde $I^{(1)}, \ldots, I^{(k)}$ son intervalos acotados de $\mathbb{R}$.

Llamamos S al conjunto de los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$. Dado $I \in S$ definimos su *medida clásica* como

$$\rho(I) = \prod_{k=1}^{N} (\sup I^{(k)} - \text{ínf}\, I^{(k)})$$

si I es no vacío. En caso contrario, definimos $\rho(\emptyset) = 0$.

La *medida exterior de Lebesgue* es la aplicación $\lambda^* \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(W) = \text{ínf} \left\{ \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \rho(I_n) : I_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}, W \subseteq \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice que es *medible* si para cualquier $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se cumple la igualdad

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \backslash E).$$

Al conjunto de los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ se le denomina $\mathcal{M}$. Nótese que esta definición está motivada por el Teorema de Carathéodory, que se estudia en cualquier curso de teoría de la medida.

Se define la *medida de Lebesgue* como la aplicación $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por $\lambda(E) = \lambda^*(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, es decir, λ es la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$.

A continuación recordamos múltiples propiedades de la medida de Lebesgue, comenzando por las conjuntistas. Entre ellas, debemos destacar que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, y que la medida de Lebesgue es, en efecto, una medida, que, además, extiende a la medida clásica sobre los intervalos acotados.

Proposición 2.1.1 (Propiedades conjuntistas de la medida de Lebesgue)**.**

a) *La aplicacion* λ^* *es subaditiva, esto es, si* $W \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ *para ciertos* $W_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$*, entonces*

$$\lambda^*(W) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(W_n).$$

b) *Si* $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *y* $\lambda^*(E) = 0$*, entonces* E *es medible. En tal caso se dice que* E *es de medida nula.*

c) *El conjunto* $\mathcal{M}$ *es una* σ*-álgebra, es decir, verifica las siguientes propiedades:*

- $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$;
- $E \in \mathcal{M} \implies \mathcal{R}^N \backslash E \in \mathcal{M}$;
- $E_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

d) *La aplicación* λ *es una medida, es decir, verifica las siguientes propiedades:*

- *está definida en una* σ*-álgebra;*
- $\lambda(\emptyset) = 0$;
- *es* σ*-aditiva, es decir, si* $\{E_n\}$ *es una sucesión de conjuntos medibles tales que* $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ *(*$\sum$ *denota la unión disjunta), entonces* $\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$*.*

e) *La aplicación* λ *extiende a* ρ*, esto es,* $S \subseteq \mathcal{M}$ *y* $\lambda(I) = \rho(I)$ *para cualquier* $I \in S$*.*

f) *Los conjuntos* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ *y* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\backslash\mathcal{M}$ *son equipotentes.*

A continuación recordamos las propiedades topológicas, destacando que la medida de Lebesgue de un conjunto es aproximable por las medidas de abiertos y compactos.

Proposición 2.1.2 (Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue)**.** *Para cualquier subconjunto* W *de* $\mathbb{R}^N$ *se verifica la igualdad*

$$\lambda^*(W) = \text{ínf}\{\lambda(G) : W \subseteq G = \mathring{G} \subseteq \mathbb{R}^N\}.$$

Para $E \subseteq \mathbb{R}^N$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $E \in \mathcal{M}$;

b) *para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un abierto* $G \subseteq \mathbb{R}^N$ *tal que* $E \subset G$ *y* $\lambda^*(G\backslash E) < \varepsilon$*;*

c) *para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un cerrado* $F \subseteq \mathbb{R}^N$ *tal que* $F \subseteq E$ *y* $\lambda^*(E\backslash F) < \varepsilon$*;*

d) *existe una sucesión de abiertos* $\{G_n\}$ *de* $\mathbb{R}^N$ *que contienen a* E *tal que* $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \backslash E) = 0$*;*

e) *existe una sucesión de cerrados* $\{F_n\}$ *de* $\mathbb{R}^N$ *contenidos en* E *tales que* $\lambda(E \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$*.*

En consecuencia se tiene

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ es compacto y } K \subseteq E\}\ \forall E \in \mathcal{M}$$

Andres: he revisado hasta aquí.

Finalmente recordamos las propiedades geométricas, entre las que destacamos que λ es la única medida invariante por traslaciones que mide 1 sobre el intervalo unidad de $\mathbb{R}^N$.

Proposición 2.1.3 (Propiedades geométricas de la medida de Lebesgue)**.**

a) *La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones, es decir,* $\lambda^*(W+x) = \lambda^*(W)$ $\forall W \subseteq \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

b) *La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, es decir, si* $E \in \mathcal{M}$*, entonces* $E + x \in \mathcal{M}$ *y* $\lambda(E+x) = \lambda(E)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

c) λ *es la única medida definida en* $\mathcal{M}$ *e invariante por traslaciones, que verifica* $\lambda([0,1]^N) = 1$.

d) *La medida de Lebesgue es invariante por isometrías (para la distancia euclídea).*

Vamos a trabajar el concepto de medibilidad con algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.4 (Conjunto de Vitali): Vamos a ver un ejemplo de un conjunto que no es medible. $\mathbb{R}$ es un grupo aditivo abeliano y $\mathbb{Q}$ un subgrupo suyo normal. Consideramos el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Haciendo uso del axioma de elección, podemos tomar un conjunto formado un representante en $[0,1]$ de cada clase de equivalencia de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Es decir, $\exists V \subseteq [0,1]$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \exists v \in V$ con $x - v \in \mathbb{Q}$. Además, al tomar un solo elemento de cada clase, se cumple que si $v_1, v_2 \in V$ con $v_1 \neq v_2$, entonces $v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}$.

Consideramos ahora el conjunto $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$, que es numerable, y por tanto podemos escribirlo como $[-1,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_n | n \in \mathbb{N}\}$, con $q_n \neq q_m$ para $n \neq m$. Definimos ahora el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(V + q_n)$. Veamos que la unión es disjunta.

Supongamos que $x \in (V + q_n) \cap (V + q_m)$. Entonces, $x = v_1 + q_n = v_2 + q_m$, con $v_1, v_2 \in V$. Restando se tiene $v_1 - v_2 = q_m - q_n \in \mathbb{Q} \implies v_1 = v_2 \implies q_n = q_m \implies n = m$, luego efectivamente la unión es disjunta.

Se verifica además que $[0,1] \subseteq A \subseteq [-1,2]$. La segunda inclusión es clara, pues A es el subconjunto $V \subseteq [0,1]$ al que se aplican traslaciones en el intervalo $[-1,1]$. Para la primera inclusión notemos que $x \in [0,1] \implies \exists v \in V \mid x - v \in \mathbb{Q}$ y además $x - v \in [-1,1]$, luego $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x - v = q_n$, y por tanto $x \in V + q_n$.

Supongamos finalmente que V es medible. Entonces A es medible (unión numerable de medibles), y usando la σ-aditividad junto a la invarianza por traslaciones, se tiene

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(V + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(V),$$

pero también se verifica que $1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda(A) \leq \lambda([-1,2]) = 3$. Por tanto:

- Si $\lambda(V) > 0$, entonces $\lambda(A) = \infty$, contradiciendo que $\lambda(A) \leq 3$.
- Si $\lambda(V) = 0$, entonces $\lambda(A) = 0$, contradiciendo que $\lambda(A) \geq 1$.

Hemos llegado por tanto a una contradicción, al suponer que V es medible. $\triangle$

Comentario 2.1.5. *En general, si* $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *con* $\lambda(E) > 0$*, es posible encontrar subconjuntos de* E *no medible. Para ello se puede considerar un subconjunto* $D \subseteq E$ *infinito numerable, un subgrupo* H *engendrado por* D *y razonar de forma similar al ejemplo anterior.*

Ejemplo 2.1.6 (Conjunto de Cantor): $\triangle$

Andres: me queda por revisar hasta aquí.

2.2. Integral de Lebesgue

Ya hemos recordado el concepto de conjunto medible. A continuación introduciremos las funciones que respetan la estructura de conjunto medible, junto con algunos resultados fundamentales que finalmente nos permitirán definir la integral de Lebesgue.

Definición 2.2.1. Sea $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$. Diremos que f es *medible positiva*, y lo notamos por $f \in \mathcal{L}^+$, si se verifica que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < \alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Por ser $\mathcal{M}$ una σ-álgebra, el conjunto de las funciones medibles sería el mismo si hubiésemos considerado cualquier otra desigualdad $(\leq, >, \geq)$ en lugar de $<$ en la definición.

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$. Diremos que s es *simple positiva* si $s \in \mathcal{L}^+$ y $s(\mathbb{R}^N)$ es finito. Denotamos por Σ^+ al conjunto de las funciones simples positivas de $\mathbb{R}^N$. Podemos expresar cualquier función simple como combinación lineal de funciones indicadoras. En efecto, supongamos que s es simple positiva. Denotamos $s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1 < \cdots < \alpha_n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ consideramos el conjunto $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N \mid s(x) = \alpha_k\}$. Estos conjuntos forman una partición de $\mathbb{R}^N$ y se verifica que $s = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}$. A esta descomposición de s se denomina la *descomposición canónica* de s. Esta propiedad caracteriza a las funciones simples positivas. En efecto, nótese que si $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$, con $m \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}_0^+$ y $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{M}$, entonces t es simple positiva.

Al igual que con los conjuntos medibles, no es común encontrarse con funciones no medibles, teniendo que hacer uso del axioma de elección para ello. Por tanto, la medibilidad se intuye como una propiedad bastante poco restrictiva como para definir una integral lo suficientemente general. La idea clave de Lebesgue consiste en ver que toda función medible puede aproximarse por funciones simples.

Teorema 2.2.1 (Teorema de aproximación de Lebesgue)**.** *Toda función medible positiva es límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas. Si, además, la función está acotada superiormente, entonces el límite es uniforme.*

Demostración. **Andrés: No he revisado esta prueba.**
Sea $f \in \mathcal{L}^+$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq n\right\} \in \mathcal{M}$$

y, para $k = 1, \ldots, n2^n$, definimos

$$E_{nk} = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{M}.$$

Es fácil ver que estos conjuntos forman una partición de $\mathbb{R}^N$. Definimos ahora en $\mathbb{R}^N$ las funciones

$$s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n\chi_{E_n}.$$

Es claro que las funciones s_n son simples. Notemos que a cada x le asignan el valor del extremo inferior del intervalo sobre el que se aplica $f(x)$. Dichos intervalos dependen de n.

- $\underline{s_n(x) \leq s_{n+1}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^N}$

Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in F_n$, se verifica

$$s_n(x) = n = \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq f(x),$$

esto es, $x \in \bigcup_{k=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}} E_{nk} \cup F_{n+1}$. En cualquier caso, se cumple que $s_{n+1}(x) \geq n = s_n(x)$.

Por otra parte, si $x \in E_{nk}$, se cumple que

$$\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[= \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right[,$$

entonces o bien $x \in E_{n+1,2k-1}$ o bien $x \in E_{n+1,2k}$. Distinguimos casos:

- $x \in E_{n+1,2k-1} \implies s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$
- $x \in E_{n+1,2k} \implies s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$.

Por tanto, la sucesión es creciente.

- $\underline{\{s_n(x)\} \to f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^N}$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$. Si $f(x) = \infty$, entonces $\{s_n(x)\} = \{n\} \to \infty$. Si $f(x) < \infty$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $f(x) < n$. Entonces se verifica que

$$s_n(x) \leq f(x) < s_n(x) + \frac{1}{2^n} \iff 0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \to 0,$$

para n suficientemente grande. Esto prueba la convergencia.

Finalmente, si f está mayorada, existe un $n \in \mathbb{N}$ para el cual $f(x) < n\ \forall x \in \mathbb{R}^N$, es decir, tal n no depende de x, y siguiendo el razonamiento anterior obtenemos la convergencia uniforme. □

Recordemos ahora algunas propiedades de estabilidad de las funciones medibles positivas.

Proposición 2.2.2 (Estabilidad analítica de las funciones medibles positivas). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles positivas. Entonces, las siguientes funciones también son medibles positivas:*

- $g_1 = \sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $g_2 = \text{ínf}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $g_3 = \text{lím sup}\{f_n\}$,
- $g_4 = \text{lím inf}\{f_n\}$.

Por tanto, si $\{f_n\}$ converge a f, entonces $f \in \mathcal{L}^+$.

La proposición anterior y el teorema de aproximación de Lebesque permiten caracterizar las funciones medibles como el límite de funciones simples. Obtenemos como consecuencia el siguiente corolario.

Corolario 2.2.3 (Estabilidad algebraica de las funciones medibles positivas).
Si $f, g \in \mathcal{L}^+$, entonces $f + g, fg \in \mathcal{L}^+$.

En este curso definiremos el concepto de integral de una función medible a partir de la integral de funciones simples. Este proceso se puede generalizar a un espacio de medida arbitrario y, por tanto, es el que se suele estudiar en un curso de teoría de la medida. Como cabe de esperar, la integral de una función simple no negativa se define como sigue.

Definición 2.2.2. Sea $s \in \Sigma^+$ y sea $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ su descomposición canónica. Para cualquier $E \in \mathcal{M}$ se define *la integral de s en E* como la suma

$$\int_E s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda(A_k \cap E).$$

Nótese que bajo nuestra definición la integral de s está bien definida sin necesidad de ninguna comprobación. Si usásemos en la definición una descomposición arbitraria de s en lugar de la canónica, entonces tendríamos que demostrar que la definición no depende de la descomposición escogida. Como este no es el caso, podemos continuar desarrollando la teoría sin más dilación. Las siguientes propiedades se obtienen directamente de la definición anterior.

Proposición 2.2.4 (Propiedades de la integral de funciones simples)**.** *Sean $s, t \in \Sigma^+$.*

a) *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene que $\int_E \alpha s = \alpha \int_E s$.*

b) *La aplicación $\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $\varphi(E) = \int_E s$ es una medida.*

c) *Si $s \leq f$ en $E \in \mathcal{M}$, entonces $\int_E s \leq \int_E f$.*

Definición 2.2.3. Sea $f \in \mathcal{L}^+$. Para cualquier $E \in \mathcal{M}$ se define *la integral de f en E* como

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s : s \in \Sigma^+, s \leq f \right\}.$$

Denotaremos por $\int f$ a la integral de f en $\mathbb{R}^N$. Nótese que $\int_E f = \int f \chi_E$, razón por la cual enunciaremos la mayoría de propiedades solamente para $E = \mathbb{R}^N$. Nótese que la integral de una función medible positiva puede no ser finita.

A partir de la definición anterior se puede demostrar el siguiente teorema, que es el resultado principal de la teoría de integración.

Teorema 2.2.5 (Teorema de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas y sea f su límite puntual. Entonces*

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Aunque el teorema previo se llame "de la convergencia monótona", no es válido para sucesiones decrecientes de funciones medibles, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.6: La sucesión $\{\chi_{[n,+\infty[}\}$ converge puntualmente a 0 pero la sucesión de integrales es constantemente $+\infty$. △

A continuación enunciamos múltiples propiedades de la integral. Previamente cabe mencionar que si una propiedad relativa a una función medible se verifica salvo en un subconjunto de medida nula del dominio, entonces decimos que la propiedad se verifica casi por doquier (abreviado c.p.pd.).

Proposición 2.2.7. *Sean $f, g \in \mathcal{L}^+$. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *Si $f \leq g$, entonces $\int f \leq \int g$.*

b) *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene $\int \alpha f = \alpha \int f$.*

c) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles positivas. Entonces $\int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n$.*

d) *La aplicación $\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $\varphi(E) = \int_E f$ es una medida.*

e) *Sea* $E \in \mathcal{M}$*. Se verifica* $\int_E f = 0$ *si, y solo si, el conjunto* $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ *es de medida nula, esto es,* $f = 0$ *c.p.d.*

f) *Sea* $E \in \mathcal{M}$*. Si* $\int_E f < +\infty$*, entonces* $f < +\infty$ *c.p.d.*

El siguiente resultado es equivalente al teorema de la convergencia monótona. Demostrarlo a partir de éste es sencillo.

Teorema 2.2.8 (Lema de Fatau)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles positivas. Entonces*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Las siguientes desigualdades son necesarias para definir múltiples espacios de funciones, tema que se tratará en la siguiente sección.

Lema 2.2.9 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea* $1 < p < +\infty$ *y sea* $q > 1$ *tal que* $1/p + 1/q = 1$*. Si* $f, g \in \mathcal{L}^+$*, entonces*

$$\int fg = \left(\int f^p\right)^{1/p} \left(\int f^q\right)^{1/q}.$$

Lema 2.2.10 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y sea* $q \geq 1$ *tal que* $1/p + 1/q = 1$*. Si* $f, g \in \mathcal{L}^+$*, entonces*

$$\left(\int (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}.$$

2.3. Espacios de funciones

En este apartado presentamos múltiples espacios de funciones cuya definición se deriva del concepto de funciones medibles y la integral de Lebesgue. Es por ello que en primer lugar desarrollamos el concepto geneneral de función medible. Los espacios definidos a posteriori serán de vital relevancia a la hora de realizar análisis de Fourier ya que los resultados obtenidos en ese contexto dependerán del espacio en el que se consideren las funciones.

2.3.1. Noción general de funciones medibles

Definición 2.3.1. Sea X un espacio topológico. Una aplicación $f : \mathbb{R}^N \to X$ es *medible* si $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ para cualquier V abierto de X.

Utilizando nociones básicas de topología se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *Sean* $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*.*

a) *Si* f *es medible y* g *es continua, entonces* $g \circ f$ *es medible.*

b) *Las funciones* f *y* g *son medibles si, y solo si,* $(f, g) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2$ *es medible.*

En este curso trabajaremos con subespacios de los siguientes espacios de funciones medibles

$$\mathcal{L}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : f \text{ es medible}\},$$

$$\mathcal{L} = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} : f \text{ es medible}\}.$$

Dada $f \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ definimos las funciones

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

La proposición previa es necesaria para probar parte de las siguientes propiedades.

Proposición 2.3.2. a) *$\mathcal{L}$ es un espacio vectorial complejo y $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial real.*

b) *$f \in \mathcal{L}$ si, y solo si,* $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R}^+$.

c) *Si $f \in \mathcal{L}$, entonces $|f| \in \mathcal{L}^+$.*

d) *Si $f \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$, entonces $f^+, f^- \in \mathcal{L}^+$.*

e) *Si $f \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$, entonces $fg \in \mathcal{L}$.*

f) *Si $f, g \in \mathcal{L}$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, entonces $f/g \in \mathcal{L}$.*

2.3.2. Clases de equivalencia de funciones medibles

Consideremos el conjunto $\mathcal{N} = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} : f = 0 \text{ c.p.d.}\}$. Nótese que $\mathcal{N}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}$. Podemos considerar pues el espacio vectorial cociente $L = \mathcal{L}/\mathcal{N}$. Nótese que $f - g \in \mathcal{N}$ si, y solo si, $f = g$ c.p.d. A partir de este punto trabajaremos principalmente con elementos del espacio L, evitando la notación de clase de equivalencia en todo momento. De hecho, uno puede ver a los elementos de L como las verdaderas funciones puesto que si modificamos una función en un conjunto de medida nula no podemos apreciar cambio alguno al dibujar su gráfica. Ésta será la perspectiva que se toma en este curso.

Análogamente podemos definir los espacios $L^{\mathbb{R}}$ y L^+. Nótese que

- $f \in L^{\mathbb{R}}$ si, y solo si $f \in L$ y $f \in \mathbb{R}$ c.p.d.;
- $f \in L^+$ si, y solo si $f \in L$ y $f \in \mathbb{R}_0^+$ c.p.d..

Aunque trabajemos con clases de equivalencia, estas clases siguen siendo cerradas algebraicamente, como podemos ver en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.3. a) *L es un espacio vectorial complejo y $L^{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial real.*

b) $f \in L \iff Re(f), Im(f) \in \mathbb{R}^+$

c) $f \in L \implies |f| \in L^+$

d) $f \in L^{\mathbb{R}} \implies f^+, f^- \in L^+$

e) $f \in L^{\mathbb{R}} \implies fg \in L$

f) $f, g \in L, g \neq 0 \ c.p.d \implies f/g \in L$

En el último apartado de la proposición podemos observar que ahora, respecto al resultado equivalente en $\mathcal{L}$, la hipótesis requerida es menos restrictiva, pues la función g puede anularse en un conjunto de medida nula.

Nótese que en L no tiene sentido la convergencia puntual pero si la convergencia c.p.d, que es estable como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.3.4. *Si $f_n \in L$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_n\} \to f$ c.p.d., entonces $f \in L$.*

2.3.3. Espacios $L_p(\mathbb{R}^N)$

A continuación recordaremos los espacios de funciones integrables y algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición 2.3.2. Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos el conjunto

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L \colon \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p < \infty \right\}$$

Es fácil observar que con la suma de funciones y el producto por complejos, este conjunto tiene estructura de espacio vectorial complejo. Sobre él definimos la aplicación $\| \cdot \|_p \colon L_p(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \right)^{1/p} \quad \text{para todo } f \in L_p(\mathbb{R}^N)$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $f, g \in L_p(\mathbb{R}^N) \implies f + g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ y $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski.
- $f \in L_p(\mathbb{R}^N), \lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ y $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$.
- $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ y $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$, como consecuencia de las propiedades de la integral y de las clases de equivalencia definidas.

Por tanto, $(L_p(\mathbb{R}^N), \| \cdot \|)$ es un espacio normado complejo, denominado el *espacio de funciones p-integrables*. Lo notaremos por $L_p(\mathbb{R}^N)$.

Comentario 2.3.5. *Podemos trasladar la desigualdad de Hölder a estos espacios de funciones, lo que nos permite expresarla de la siguiente forma:*

Sean p, p^* $1 < p < \infty$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, *y* $f \in L_p(\mathbb{R}^N), g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. *Entonces,* $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *y* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$

Los espacios $L_p(\mathbb{R}^N)$ *no son cerrados respecto al producto de funciones, por lo que esta desigualdad nos puede resultar útil a la hora de controlar dichos productos.*

Una de las propiedades fundamentales de los espacios de funciones integrables es que son completos, es decir son espacios de Banach, como vamos a ver a continuación.

Teorema 2.3.6 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** *Para* $1 \leq p < \infty$, $L_p(\mathbb{R}^N)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(\mathbb{R}^N)$. Esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $q, r \geq m$, entonces $\left(\int |f_q - f_r|^p \right)^{1/p} = \|f_q - f_r\|_p < \varepsilon$.

Podemos construir una sucesión parcial $f_{\sigma(n)}$ de forma que $\|f_{\sigma(n+1)} - f_{\sigma(n)}\| < \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, tomamos $\sigma(1)$ como el primer natural m que verifique $\|f_q - f_r\|_p < 1/2$ $\forall q, r \geq m$. Suponiendo la sucesión definida hasta $\sigma(n)$ de forma que $\|f_q - f_r\|_p < \frac{1}{2^j}$ para todo $q, r \geq \sigma(j)$ y para cada $j = 1, \ldots, n$, tomamos $\sigma(n+1) = \min\{m \in \mathbb{N}$ y $\|f_q - f_r\|_p < \frac{1}{2^{n+1}}$ $\forall p, q \geq m\}$. Este conjunto es no vacío por ser $\{f_n\}$ de Cauchy y tiene mínimo por ser un subconjunto no vacío de naturales, luego la sucesión así construida está bien definida y verifica la propiedad buscada.

Consideramos ahora la serie $\sum_{n \geq 1} F_n$, donde $F_1 = f_{\sigma(1)}$ y $F_{n+1} = f_{\sigma(n+1)} - f_{\sigma(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sus sumas parciales verifican $\sum_{k=1}^{n} F_k = f_{\sigma(n)}$. De la misma forma, consideramos la sucesión creciente de funciones medibles positivas $G_n = \sum_{k=1}^{n} |F_k|$ y su suma $G = \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|$. Tomando normas y aplicando la desigualdad de Minkowski, se tiene que

$$\|G_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$$

Por tanto, $G_n \in L_p(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando ahora el teorema de convergencia monótona a G_n^p, que es una sucesión de funciones medibles positivas con límite G^p se tiene

$$\int G^p = \lim \int G_n^p = \lim \|G_n\|_p^p \leq 1$$

Por tanto, $G \in L^p$. En particular, G es finita c.p.d. En consecuencia, la serie $\sum_{n \geq 1} F_n$ converge y tiene suma finita c.p.d. Si llamamos f a su suma, entonces, se tiene que, para casi todo punto,

$$f = \lim_n \sum_{k=1}^{n} F_k = \lim_n f_{\sigma(n)},$$

es decir, $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d. Veamos que además f es el límite de f_n en $L_p(\mathbb{R}^N)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser $\{f_n\}$ de Cauchy existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $q, r \geq m$, entonces $\left(\int |f_q - f_r|^p\right)^{1/p} = \|f_q - f_r\|_p < \varepsilon$. Fijado $r > m$, aplicando el lema de Fatou a $|f_{\sigma(n)} - f_r|$ se tiene

$$\int |f - f_r|^p = \int \lim_n |f_{\sigma(n)} - f_r|^p \leq \liminf_n \int |f_{\sigma(n)} - f_r|^p \leq \varepsilon^p$$

Por tanto, por una parte obtenemos que $f - f_r \in L^p(\mathbb{R}^N)$, y en consecuencia $f = (f - f_r) + f_r \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Por otra parte, hemos encontrado un $m \in \mathbb{N}$ para el cual si $r > m$, entonces $\|f - f_r\|_p < \varepsilon$, concluyendo así que $\{f_n\}$ tiene límite en $L_p(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

Finalmente introducimos el espacio de funciones $L_p(\mathbb{R}^N)$ cuando $p = \infty$, que se conoce como el espacio de funciones esencialmente acotadas.

Definición 2.3.3. Consideramos la aplicación $\|\cdot\|_\infty \colon L \to [0, \infty]$ dada por

$$\|f\|_\infty = \min\{K \in [0, \infty] \colon |f(x)| \leq K \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Definimos el conjunto

$$L_\infty(\mathbb{R}^N) = \{f \in L \colon \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Nótese que $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es un espacio vectorial complejo y $\|\cdot\| \colon L_\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}_0^+$ es una norma sobre él. A este espacio normado se le denomina el *espacio de funciones esencialmente acotadas*, y lo notaremos por $L_\infty(\mathbb{R}^N)$.

Comentario 2.3.7. *$L_\infty(\mathbb{R}^N)$ es también un espacio de Banach. En este caso, si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$ se deduce que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para n y m suficientemente grandes, para cada $\varepsilon > 0$ y p.c.t $x \in \mathbb{R}^N$. Pero esto es la condición de Cauchy c.p.d, lo que nos da la converencia uniforme c.p.d., que es fácil comprobar que es la convergencia bajo $\|\cdot\|_\infty$.*

También es posible extender la desigualdad de Hölder al espacio de funciones esencialmente acotadas. De hecho, si $1 \leq p \leq \infty$ *y* $f \in L_p(\mathbb{R}^N), g \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$*, entonces* $fg \in L_p(\mathbb{R}^N)$ *y* $\|fg\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p$*. En efecto,*

$$\int |fg|^p = \int |f|^p |g|^p \leq \|g\|_\infty^p \int |f|^p = \|f\|_p^p \|g\|_\infty^p < \infty,$$

y elevando a $1/p$ *se tiene la desigualdad buscada.*

2.3.4. Integrabilidad

Hasta ahora hemos definido un concepto de integral para funciones positivas y espacios de funciones integrables para cierta potencia. Vamos a extender el concepto de integral a cualquier función medible compleja para la que pueda tener sentido.

Definición 2.3.4. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. Diremos que f es *integrable* si $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, es decir, si la integral de su módulo es finita. En tal caso, se define su integral como

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (Re(f))^+ - \int_{\mathbb{R}^N} (Re(f))^- \right) + i \left(\int_{\mathbb{R}^N} (Im(f))^+ - \int_{\mathbb{R}^N} (Im(f))^- \right).$$

Definimos la integral de f en $E \in \mathcal{M}$ como $\int_E f = \int f \chi_E$.

Proposición 2.3.8. *El operador* $\mathrm{I}\colon L^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ *dado por* $\mathrm{I}(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f$ *es un funcional lineal, y continuo, con* $|\mathrm{I}(f)| \leq \|f\|_1$*. Además, es positivo, esto es, si* $f \in L_1 \cap L^+$*, entonces* $\mathrm{I}(f) \geq 0$*.*

Como consecuencia del teorema de la convergencia monótona obtenemos uno de los resultados más importantes de la teoría de integración.

Teorema 2.3.9 (Teorema de la convergencia dominada)**.** *Sea* $\{f_n\} \subset L$ *una sucesión convergente c.p.d. a* f*. Si existe* $g \in L_1 \cap L^+$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *c.p.d. para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\{f_n\}$ *converge a* f *en* L_1 *y, en particular,* $\lim \int f_n = \int f$*.*

Definición 2.3.5 (Espacios $L_p(E)$)**.** Sea $E \in \mathcal{M}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Se define el conjunto

$$L_p(E) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^N) : f = \chi_E f\}.$$

Nótese que $L_p(E)$ es un espacio cerrado de L_p, luego es un espacio de Banach.

Como consecuencia de la σ-aditividad de la integral de funciones positivas obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.10 (σ-aditividad de la integral)**.** *Si* $E = \sum_{n=1}^\infty E_n$ *con* $E_n \in \mathcal{M}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f$$

para cualquier $f \in L_1(E)$*.*

2.3.5. Otros espacios de funciones

Definición 2.3.6. Definimos S_∞ y S como los espacios vectoriales generados por $\{\chi_A : A \in \mathcal{M}\}$ y $\{\chi_A : A \in \mathcal{M}, \lambda(A) < \infty\}$ respectivamente. Nótese que $S \subseteq S_\infty \subseteq L_\infty$ y $S \subseteq L_p$ para todo $p \geq 1$.

Como consecuencia del teorema de aproximación de Lebesgue y el teorema de la convergencia monótona obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.11.

a) *El espacio* S *es denso en* L_p *para todo* $1 \leq p < \infty$.

b) *El espacio* S_∞ *es denso en* L_∞.

Definición 2.3.7. Sea $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{Q}$. Definimos el *soporte de* f como el conjunto

$$\text{sop} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Definimos el *espacio de funciones continuas de soporte compacto* como el conjunto

$$C_{00} = C_{00}(\mathbb{R}^N) = \{f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \text{ continua tal que sop} f \text{ es compacto}\}.$$

Nótese que $C_{00} \subseteq L_p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Dado $\Omega \in \mathcal{M}$, definimos $C_{00}(\Omega) = \{f \in C_{00} : \text{sop} f \subseteq \Omega\}$, que es un subconjunto de $L_p(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Proposición 2.3.12. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. *El espacio* $C_{00}(\Omega)$ *es denso en* $L_p(\Omega)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Basta ver que $\chi_A \in \overline{C_{00}(\Omega)}$ para todo $A \subseteq \Omega$ medible.Esto es consecuencia del lema de Uryshon. □

El resultado anterior no es cierto en el caso $p = \infty$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.8. Se define el *espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito* como el cierre de $C_{00}(\mathbb{R}^N)$ en $L_\infty(\mathbb{R}^N)$ y lo denotamos $C_0(\mathbb{R}^N)$. Nótese que

$$C_0(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \text{ continua con } \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \right\}.$$

2.3.6. Espacios de funciones periódicas

Definición 2.3.9. Definimos los siguientes espacioes de funciones periódicas:

$$\begin{aligned}
C(\mathbb{T}) &= \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y } 2\pi\text{-periódica}\}, \\
L_\infty(\mathbb{T}) &= \{f \in L_\infty(\mathbb{R}) : f \text{ es } 2\pi\text{-periódica}\}, \\
L_p(\mathbb{T}) &= \left\{ f \in L(\mathbb{R}) : f \text{ es } 2\pi\text{-periódica}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Cuando decimos que f es 2π-periódica nos referimos a que un representante de su clase de equivalencia lo es. Esto es equivalente a que f sea 2π-periódica c.p.d.

Comentario 2.3.13. *Nótese que todo elemento* f *de alguno de estos espacios se puede escribir como* $f(t) = f^*(e^{it})$ *para una única función* f^*. *La función* f *es continua si, y solo si, lo es* f^*.

El espacio $L_\infty(\mathbb{T})$ es un subespacio cerrado de L_∞ mientras que el espacio $C(\mathbb{T})$ es un espacio cerrado de $L_\infty(\mathbb{T})$. Consecuentemente, ambos son espacios de Banach.

Por otro lado, tenemos una biyección lineal canónica entre $L_p(\mathbb{T})$ y $L_p([-\pi, \pi])$, que lleva f a $f\chi_{[-\pi,\pi]}$. Esta aplicación resulta ser un isomomorfismo de espacios de Banach cuando en $L_p(\mathbb{T})$ consideramos la norma

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p}.$$

Uno puede preguntarse qué sentido tiene considerar la norma anterior en lugar de la norma de $L_p([-\pi,\pi])$. La razón es que esta norma nos permitirá obtener una seres de desigualdades de especial relevancia. En primer lugar, aplicamos la desigualdad de Hölder a estos espacios.

Lema 2.3.14 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $q > 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in L_p(\mathbb{T})$ y $g \in L_q(\mathbb{T})$, entonces $fq \in L_1(\mathbb{T})$ y $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$.*

Proposición 2.3.15. *Sea $1 \leq p < q \leq \infty$. Si $f \in L_q(\mathbb{T})$, entonces $f \in L_p(\mathbb{T})$ y $||f||_p \leq ||f||_q$.*

Demostración. Es una consecuencia de la desigualdad de Hölder aplicada al producto $|f|^p \cdot 1$ para $r = q/p > 1$. □

Como consecuencia, tenemos la siguiente cadena de desigualdades, todas ellas estrictas:

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T}).$$

De hecho, como muestra el siguiente ejemplo, fijado $1 \leq p < \infty$, existe $f \in L_p(\mathbb{T})$ tal que $f \notin L_q(\mathbb{T})$ para todo $q > p$.

Ejemplo 2.3.16: Consideramos la función

$$f(t) = \left(\frac{1}{t(\log t)^2}\right)^{1/p}$$

para todo $t \in [0,\pi]$. La extendemos mediante simetría $[-\pi,\pi]$. Nótese que $f \in L_p(\mathbb{T})$ pero $f \notin L_q(\mathbb{T})$ para todo $q > p$.

Capítulo 3

El producto de convolución

3.1. Motivación

Pereza

3.2. Teorema de Fubini y resultados previos

A continuación recordaremos el teorema de Fubini, uno de los teoremas fundamentales para la integración en varias variables, e introduciremos algunos resultados previos para poder definir formalmente el producto de convolución.

En primer lugar introducimos notación. Dada $F\colon \mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{C}$, fijados $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^M$, notaremos a las secciones de F por las variables x e y como las aplicaciones $F_x\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{C}$ y $F^y\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ dadas por $F_x(v) = F(x,v)$ para cada $v \in \mathbb{R}^M$ y $F^y(u) = F(u,y)$ para cada $u \in \mathbb{R}^N$, respectivamente.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Fubini para funciones medibles positivas)**.** *Sea $F \in L^+(\mathbb{R}^{N+M})$. Entonces se tiene*

a) $F_x \in L^+(\mathbb{R}^M)$ *p.c.t* $x \in \mathbb{R}^N$ *y* $F^y \in L^+(\mathbb{R}^N)$ *p.c.t* $y \in \mathbb{R}^M$.

b) $\phi \in L^+(\mathbb{R}^M)$ *y* $\psi \in L^+(\mathbb{R}^N)$, *donde* ϕ *y* ψ *vienen dadas por* $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^M} F_x$ *p.c.t* $x \in \mathbb{R}^N$ *y* $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^N} F^y$ *p.c.t* $y \in \mathbb{R}^M$.

c) *Se verifica que* $\int_{\mathbb{R}^{N+M}} F = \int_{\mathbb{R}^N} \phi = \int_{\mathbb{R}^M} \psi$ *o, equivalentemente,*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} F(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} F(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dx \right) dy$$

El teorema de Fubini tiene una interpretación interesante para el caso de funciones características. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ podemos definir sus secciones verticales y horizontales como $E_x = \{y \in \mathbb{R}^M \colon (x,y) \in E\}$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ y $E^y = \{x \in \mathbb{R}^N \colon (x,y) \in E\}$, para cada $y \in \mathbb{R}^M$, respectivamente. Es claro que $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ y $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$. Cuando E es medible, el teorema de Fubini aplicado a estas funciones nos dice que

$$\lambda_{N+M}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_M(E_x)dx = \int_{\mathbb{R}^M} \lambda_N(E^y)dy$$

Esta expresión nos confirma una de las ideas intuitivas para el cálculo del área de un conjunto. Dicho área puede verse como una "suma infinitesimal" de las longitudes de las secciones de dicho conjunto.

Otra interpretación interesante que nos ofrece el teorema se basa en el cálculo de áreas de recintos. El concepto de integral históricamente ha pretendido modelar el área encerrada bajo la gráfica de una función. El teorema de Fubini nos lo confirma. Si $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ es medible y consideramos su recinto $S_f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \colon 0 < t < f(x)\}$, también medible, aplicando el teorema de Fubini a χ_{S_f} y teniendo en cuenta que $(S_f)_x =]0, f(x)[$, se cumple que

$$\lambda_{N+1}(S_f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx,$$

esto es, la integral de una función es la medida de su recinto.

Las tesis del teorema de Fubini son maximales, en el sentido de que no podemos garantizar que todas las secciones de una función sean medibles.

Ejemplo 3.2.2: Sea $W \subset \mathbb{R}, W \notin \mathcal{M}$. El conjunto $W \times \{0\}$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^2$ por ser de medida nula, y W es una sección de $W \times \{0\}$. Tomando las respectivas funciones indicadoras, obtenemos una función medible con una sección no medible. △

A continuación vemos la versión del teorema de Fubini para funciones integrables, análoga a la anterior.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Fubini para funciones integrables)**.** *Sea $F \in L_1(\mathbb{R}^{N+M})$. Entonces se tiene*

a) *$F_x \in L_1(\mathbb{R}^M)$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^N$ y $F^y \in L_1(\mathbb{R}^N)$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^M$.*

b) *$\phi \in L_1(\mathbb{R}^M)$ y $\psi \in L_1(\mathbb{R}^N)$, donde ϕ y ψ vienen dadas por $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^M} F_x$ p.c.t $x \in \mathbb{R}^N$ y $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^N} F^y$ p.c.t $y \in \mathbb{R}^M$.*

c) *Se verifica que $\int_{\mathbb{R}^{N+M}} F = \int_{\mathbb{R}^N} \phi = \int_{\mathbb{R}^M} \psi$ o, equivalentemente,*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} F(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} F(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dx \right) dy$$

El teorema se puede aplicar para ver que una función no es integrable viendo que sus secciones, o bien alguna no es integrable, o bien sus integrales no coinciden.

Ejemplo 3.2.4: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Para concluir esta sección introducimos algunos resultados que nos resultarán útiles para construir el producto de convolución.

Proposición 3.2.5 (Invarianza por isometrías de la integral de Lebesgue)**.** *Sea $T \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una isometría para la distancia euclidea. Si $f \in L^+(\mathbb{R}^N)$, entonces $f \circ T \in L^+(\mathbb{R}^N$, y si $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, entonces $f \circ T \in L_1(\mathbb{R}^N$. Además, en ambos casos se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(T(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$$

Lema 3.2.6 (Cuestiones de medibilidad)**.** *Para $f, g \in L(\mathbb{R}^N)$ se define $H(x,y) = f(x-y)g(y)$ p.c.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.*

Se verifica que $H \in L(\mathbb{R}^{2N}$. Además, $H_x \in L(\mathbb{R}^N)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Lema 3.2.7 (Continuidad de las traslaciones)**.** *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Para $y \in \mathbb{R}^N$ definimos $f_{[y]} \in L_p(\mathbb{R}^N)$ por $f_{[y]}(x) = f(x-y)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^N$.*

Se verifica que la aplicación $y \mapsto f_{[y]}$, de $\mathbb{R}^N$ en $L_p(\mathbb{R}^N)$ es uniformemente continua, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y, z \in \mathbb{R}^N$ con $\|y - z\| < \delta$, entonces $\|f_{[y]} - f_{[z]}\|_p < \varepsilon$.

Demostración. Veamos primero el resultado para $g \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}^N)$, visto como un subespacio de $L_p(\mathbb{R}^N)$. Consideramos el compacto $K = \text{sop}g + \overline{B}(0,1)$. Es claro que $\lambda(K) \in \mathbb{R}^+$. Sea $\varepsilon > 0$.

Por ser g de soporte compacto es uniformemente continua, luego existe un $\delta > 0$ para el cual si $u, v \in \mathbb{R}^N$ con $\|u - v\| < \delta$, entonces $|g(u) - g(v)| < \varepsilon/M$.

Podemos tomar $\delta < 1$ sin pérdida de generalidad. Si $\|y - z\| < \delta$, entonces $|g_{[y]}(x) - g_{[z]}(x)| = |g(x-y) - g(x-z)| < \varepsilon/M$ (puesto que $\|(x-y) - (x-z)\| = \|y - z\| < \delta$. Tomando integrales, y teniendo en cuenta que el soporte es compacto y que y, z distan menos de 1, luego la integración se reduce a K, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_{[y]}(x) - g_{[z]}(x)|^p = \int_K |g_{[y]}(x) - g_{[z]}(x)|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{M}\lambda(K) = \varepsilon^p.$$

Elevando a $1/p$, se tiene la desigualdad buscada, que prueba la continuidad uniforme de $y \mapsto g_{[y]}$.

Ahora, si f es cualquier función en $L_p(\mathbb{R}^N)$, por la densidad de $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}^N)$ en $L_p(\mathbb{R}^N)$, se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}^N)$ con $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Por lo visto anteriormente, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|y - z\| < \delta$, entonces $\|g_{[y]} - g_{[z]}\|_p < \varepsilon/3$. Por tanto, para tales y, z se cumple

$$\|f_{[y]} - f_{[z]}\|_p \leq \|f_{[y]} - g_{[y]}\|_p + \|g_{[y]} - g[z]\|_p + \|g_{[z]} - f_{[z]}\|_p < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

□

3.3. El producto de convolución en varias variables

Vamos a definir el producto de convolución. Introducimos previamente la siguiente notación. En adelante, dado $p \in [1, \infty]$, notaremos $p^* \in [1, \infty]$ como aquel número que verifique $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, si $1 < p < \infty$, $p^* = \infty$ si $p = 1$ y $p^* = 1$ si $p = \infty$.

Definición 3.3.1. Sean $f, g \in L(\mathbb{R}^N)$, y sea $H \in L(\mathbb{R}^{2N})$ dada por $H(x,y) = f(x-y)g(y)$, p.c.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^N$ diremos que la *convolución* de f y g está definida en x, y escribimos $\exists (f * g)$, cuando $H_x \in L_1(\mathbb{R}^N)$, en cuyo caso, se define su convolución por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

En tal caso, es fácil comprobar (mediante la invarianza de la integral por isometrías) que $\exists (g * f)(x)$ y $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

Diremos que existe la convolución de f y g y escribimos $\exists (f * g)$, cuando $\exists (f * g)(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^N$, en cuyo caso, $f * g \in L(\mathbb{R}^N)$ y viene dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^N$$

Veamos algunos resultados sobre la existencia del producto de convolución de dos funciones.

Proposición 3.3.1 (Existencia en todo punto). *Si $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L_{p^*}(\mathbb{R}^N)$, entonces*

a) $\exists (f * g)(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$.

b) $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$.

c) $f * g \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *es uniformemente continua.*

Demostración. a) Si $1 < p < \infty$, se tiene, por la desigualdad de Hölder,

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \left(\int |f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^{p^*} \right)^{1/p^*} < \infty,$$

y la desigualdad se verifica para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para $p = 1$, acotamos con la norma infinito.

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \int |f(x-y)|dy < \infty$$

Para $p = \infty$ es análogo al caso anterior.

b) $\||(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy$, y por el apartado anterior se tiene la desigualdad buscada.

c) Se verifica, aplicando de nuevo la desigualdad de Hölder

$$|(f * g)(u) - (f * g)(v)| = \left| \int (f(u-y) - f(v-y))g(y)dy \right| \leq \int |f(u-y) - f(v-y)||g(y)|dy \leq$$

$$\leq \left(\int |f(u-y) - f(v-y)|^p dy \right)^{1/p} \|g\|_{p^*} = \|f_{[u]} - f_{[v]}\|_p \|g\|_{p^*}$$

Si $\|g\|_{p^*} = 0$, la continuidad uniforme es clara. En caso contrario, dado $\varepsilon > 0$, por el lema 3.2.7 existe un $\delta > 0$ tal que si $\|u - v\| < \delta$, entonces $\|f_{[u]} - f_{[v]}\|_p < \varepsilon / \|g\|_{p^*}$. Aplicado a lo que acabamos de calcular, obtenemos

$$|(f * g)(u) - (f * g)(v)| < \frac{\varepsilon}{\|g\|_{p^*}} \|g\|_{p^*} = \varepsilon$$

□

Proposición 3.3.2 (Existencia c.p.d.). *Sea $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, con $1 \leq p \leq \varepsilon/\|g\|_{p^*} \varepsilon/\|g\|_{p^*} \infty$ y $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

a) $\exists f * g$.

b) $f * g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ *y* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

[...]

3.4. Convolución de funciones periódicas

Para funciones periódicas podemos definir también un producto de convolución de forma análoga al definido sobre funciones en $\mathbb{R}^N$.

Definición 3.4.1. Sean $f, g \in L(\mathbb{T}) \subset L(\mathbb{R})$ y sea $H \in L(\mathbb{R}^2)$ dada por $H(t,s) = f(t-s)g(s)$ p.c.t $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ (se tiene en particular que $H \in L(\mathbb{T}^2)$).

Dado $t \in \mathbb{R}$, decimos que la convolución de f y g está definida en t, y escribimos $\exists (f * g)(t)$, cuando $H_t \in L_1(\mathbb{T})$, en cuyo caso,

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds$$

En tal caso, además $\exists (g * f)(t)$ y se tiene $(g * f)(t) = (f * g)(t)$.

Diremos que la existe la convolución de f y g, y escribimos $\exists f * g$, cuando $\exists (f * g)(t)$ p.c.t $t \in \mathbb{R}$, en cuyo caso $f * g \in L(\mathbb{T})$ y viene dada por

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds \text{ p.c.t } t \in \mathbb{R}$$

Los resultados sobre la existencia de convolución de funciones en $\mathbb{R}^N$ se trasladan de forma análoga a funciones periódicas.

Proposición 3.4.1 (Existencia en todo punto)**.** *Sean* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L_{p^*}(\mathbb{T})$. *Entonces,*

a) $\exists (f * g)(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

b) $(f * g) \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

c) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$.

Proposición 3.4.2 (Existencia c.p.d.)**.** *Sean* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *y* $g \in L_1(\mathbb{T})$. *Entonces,*

a) $\exists f * g$.

b) $f * g \in L_p(\mathbb{T})$ *y* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Finalmente, la convolución de funciones periódicas presenta unas propiedades algebraicas más ricas que las de la convolución en $\mathbb{R}^N$. En este caso, $L_1(\mathbb{T})$ es de nuevo un álgebra de Banach conmutativa con el producto de convolución, pero además, por las relaciones de inclusión presentes en los espacios de funciones integrables periódicas se verifica que $L_p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ son ideales de $L_1(\mathbb{T})$. No entramos en más detalles sobre la convolución de funciones periódicas, puesto que en este caso veremos que las series de Fourier nos proporcionarán resultados suficientemente generales.

Capítulo 4

Series trigonométricas. Series de Fourier.

En los siguientes capítulos comenzaremos el estudio formal de las series de Fourier. Comenzamos con definiendo los conceptos de series trigonométricas y de Fourier, junto con algunos resultados y criterios de convergencia de series.

4.1. Series trigonométricas

Recordamos la definición de serie trigonométrica vista en el capítulo 1.

Definición 4.1.1. Una serie trigonométrica, en forma real, es una serie de la forma $a_0/2+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$, donde $a_0, a_n.b_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se dice que es real si todos sus coeficientes son reales.

Su sucesión de sumas parciales se define como $S_0(t) = a_0/2$ y $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Una serie trigonométrica, en forma compleja, es una serie de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$, donde $c_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Su sucesión de sumas parciales se define como $S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Ambas formas son equivalentes, puesto que dada una serie en forma real podemos obtener su forma compleja mediante los coeficientes $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ y $c_0 = \frac{a_0}{2}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De la misma forma, dada una serie en forma compleja, podemos recuperar sus coeficientes en forma real como $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$ y $a_0 = 2c_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De esta equivalencia se puede concluir también que una serie trigonométrica en forma compleja es real cuando $c_{-n} = \overline{c_n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.2. Convergencia de series trigonométricas

Nos planteamos el siguiente problema. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ no vacío, y consideramos dos sucesiones de funciones, $f_n, g_n \colon E \to \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Llamamos $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Queremos estudiar la convergencia uniforme (en E) de la serie $\sum f_n g_n$.

En consecuencia, podríamos estudiar la convergencia uniforme de cualquier serie de funciones complejas, y en particular, la convergencia puntual de cualquier serie de funciones complejas y la convergencia de cualquier serie de números complejos.

Buscaremos distintas hipótesis para probar la condición de Cauchy uniforme para la serie de funciones a estudiar, esto es, dado $\varepsilon > 0$, encontrar $m \in \mathbb{N}$ para el cual si $p, q \geq m$, entonces, $\left| \sum\limits_{k=p+1}^{q} f_k(x) g_k(x) \right| < \varepsilon$, para todo $x \in E$.

Vamos a probar los criterios abelianos para series. Para ello, vamos a demostrar primero el siguiente lema.

Lema 4.2.1 (Fórmula de sumación de Abel)**.** *Para $p, q \in \mathbb{Z}$, con $-1 \leq p < q$, se tiene*

$$\sum_{k=p+1}^{q} f_k g_k = \sum_{k=p+1}^{q} F_k(g_k - g_{k+1}) + F_q g_{q+1} - F_p g_{p+1} = \sum_{k=p+1}^{q} (F_k - F)(g_k - g_{k+1}) + (F_q - F) g_{q+1} - (F_p - F) g_{p+1}$$

donde F es una función arbitraria.

Demostración.

$$\sum_{k=p+1}^{q} f_k g_k = \sum_{k=p+1}^{q} (F_k - F_{k-1}) g_k = \sum_{k=p+1}^{q} F_k(g_k - g_{k+1}) + \sum_{k=p+1}^{q} F_k g_{k+1} - \sum_{k=p+1}^{q} F_{k-1} g_k =$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q} F_k(g_k - g_{k+1}) + \sum_{k=p+1}^{q} F_k g_{k+1} - \sum_{k=p}^{q-1} F_k g_{k+1} = \sum_{k=p+1}^{q} F_k(g_k - g_{k+1}) + F_q g_{q+1} - F_p g_{p+1}$$

La segunda igualdad se tiene sin más que notar que $\sum_{p+1}^{q} F(g_k - g_{k+1}) + F g_{q+1} + F g_{p+1} = 0$. ☐

A continuación presentamos los dos criterios abelianos.

Proposición 4.2.2 (Criterio de Dirichlet)**.** *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

a) *La serie $\sum f_n = \{F_n\}$ está uniformemente acotada.*

b) *La serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ converge uniformemente.*

c) *La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a 0.*

Entonces, la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente.

Demostración. Por la condición *a*) se tiene que existe $M \in \mathbb{R}^+$ con $|F_n(x)| \leq M$ para todos $x \in E, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la condición *b*), existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq m_1$ entonces $\sum_{k=p+1}^{q} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ para todo $x \in E$. Por la condición *c*), existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq m_2$ entonces $|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ para todo $x \in E$.

Por tanto, para $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ y $p, q \geq m$, se tiene, aplicando el lema 4.2.1,

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)g_k(x)\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |F_k(x)||g_k(x)-g_{k+1}(x)| + |F_q(x)||g_{q+1}(x)| + |F_p(x)||g_{p+1}(x)| \leq$$
$$\leq M\left(\sum_{k=p+1}^{q} |g_k(x)-g_{k+1}(x)| + |g_{q+1}(x)| + |g_{p+1}(x)|\right) <$$
$$< M\left(\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

□

Proposición 4.2.3 (Criterio de Abel)**.** *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

a) *La serie $\sum f_n$ converge uniformemente.*

b) *La serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ está uniformemente acotada.*

c) *La sucesión $\{g_n\}$ está uniformemente acotada.*

Entonces la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente.

Demostración. Por la condición $b)$ existe $M_1 > 0$ tal que $\sum |g_n(x) - g_{n+1}(x)| < M_1$ para todos $x \in E, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Por la condición $c)$ existe $M_2 < 0$ tal que $|g_n(x)| \leq M_2$ para todos $x \in E, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Tomamos $M = \max\{M_1, M_2\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la condición $a)$, si llamamos F a la función límite, se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $|F_n(x) - F| < \frac{\varepsilon}{3M}$.

Por tanto, si $p, q \geq m$, aplicando el lema 4.2.1, se tiene

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)g_k(x)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=p+1}^{q} |F_k(x)-F(x)||g_k(x)-g_{k+1}(x)| + |F_q(x)-F(x)||g_{q+1}(x)| + |F_p(x)-F(x)||g_{p+1}(x)| \leq$$
$$\leq M\left(\max_{k=p+1}^{q} |F_k(x)-F(x)| + |F_q(x)-F(x)| + |F_p(x)-F(x)|\right) <$$
$$< M\left(\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

□

En la práctica, la segunda condición es difícil de comprobar. Por ello, se suele usar una versión de estos criterios con unas hipótesis más sencillas, los cuales se conocen como los criterios particulares abelianos.

Corolario 4.2.4 (Criterio particular de Dirichlet)**.** *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

a) *La serie $\sum F_n$ está uniformemente acotada.*

b) *$\{g_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones reales no negativas: $g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \in \mathbb{R}_0^+$ $\forall x \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.*

c) *La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a 0.*

Entonces la serie $\sum f_n g_n$ *converge uniformemente.*

Corolario 4.2.5 (Criterio particular de Abel)**.** *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

a) *La serie* $\sum F_n$ *converge uniformemete.*

b) $\{g_n\}$ *es una sucesión decreciente de funciones reales no negativas.*

c) *La función* g_0 *está acotada.*

Entonces la serie $\sum f_n g_n$ *converge uniformemente.*

Estos criterios pueden aplicarse a distintos tipos de series de gran interés. Uno de estos tipos de series son las series de potencias. Recordemos que cuando el radio de una serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{C}$ es $0 < R < \infty$, entonces tenemos garantizada la convergencia absoluta dentro de $D(a, R)$ y la convergencia uniforme en cualquier compacto contenido en dicho disco, mientras que en $\mathbb{C} - \overline{D}(a, R)$ la serie no converge. Sin embargo, nada podemos asegurar sobre la frontera. El siguiente resultado, consecuencia del criterio de Dirichlet, nos resuelve este problema en determinadas situaciones.

Proposición 4.2.6. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente de números reales con* $\{a_n\} \to 0$*. Entonces, para cada* $\delta \in]0, 1[$*, la serie de potencia* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge uniformemente en* $S_\delta = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1, |z - 1| \geq \delta\}$*. En particular, la serie converge puntualmente* $D(0, 1) - \{1\}$*.*

Demostración. Al ser $\{a_n\}$ decreciente, el radio de convergencia es mayor o igual que 1. Si el radio es mayor que 1 el resultado es claro. Si el radio es 1, definimos en S_δ las funciones $g_n(z) = a_n$ y $f_n(z) = z^n$, para cada $z \in S_\delta, n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\{g_n\}$ es decreciente y convergente a 0, y en S_δ se verifica

$$|F_n(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^n\right| = \frac{|z^{n+1} - 1|}{|z - 1|} \leq \frac{2}{\delta},\ \forall z \in S_\delta,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, por el criterio de dirichlet, la serie converge uniformemente en S_δ. Finalmente, dado $w \in D(0, 1) - \{1\}$, podemos tomar $\delta = \frac{|w-1|}{2} \in]0, 1[$, de forma que $w \in S_\delta$, y por tanto la serie converge puntualmente en w. □

También podemos aplicar los criterios abelianos para obtener resultados de convergencia en algunas series trigonométricas.

Proposición 4.2.7. *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión de números reales decreciente y convergente a 0, entonces las series trigonométricas* $\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt)$ *y* $\sum_{n\geq 1} a_n \sin(nt)$ *convergen uniformemente en cada compacto* $K \subset [-\pi, \pi] - \{0\}$*, mientras que las series* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n \cos(nt)$ *y* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n \sin(nt)$ *convergen uniformemente en cada compacto* $K \subset] - \pi, \pi[$*.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior sobre series de potencias para los casos $z = e^{it}$ y $z = -e^{it}$, teniendo en cuenta, por la fórmula de De Moivre, que $e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt)$, para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$. □