Aprendizaje Automático - Cuestionario 3

Juan Luis Su?rez D?az

26 de mayo de 2017

Cuesti?n 1

Soluci?n

Cuesti?n 2

Soluci?n

Cuesti?n 3

Solución

Cuestión 4

Considerar un modelo SVM y los siguientes datos de entrenamiento: Clase-1: $\{(1,1),(2,2),(2,0)\}$, *Clase-2:* $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$

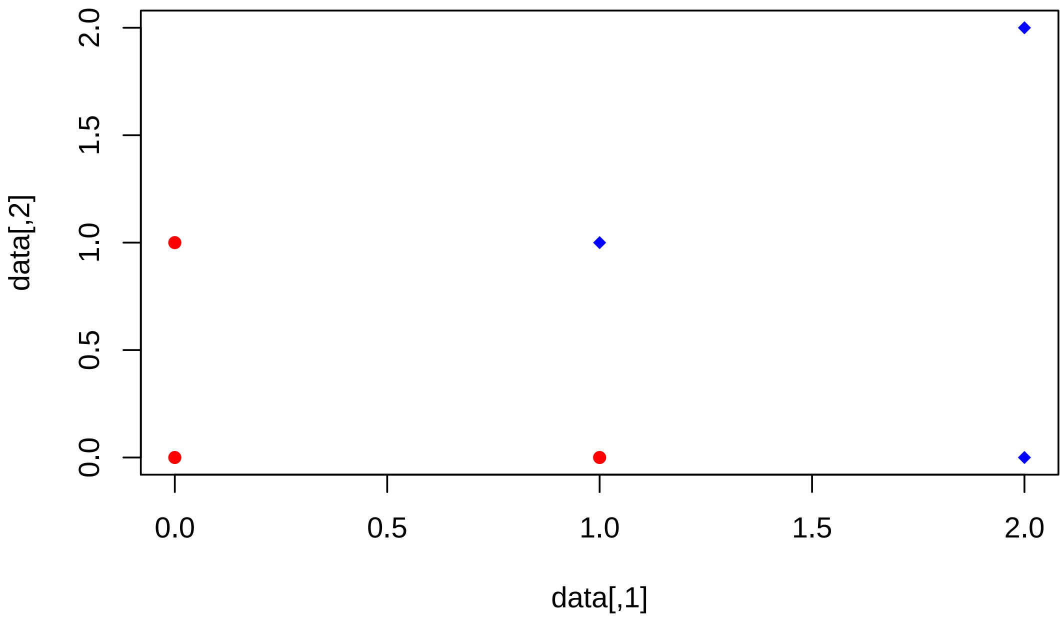
a) *Dibujar los puntos y construir por inspección el vector de pesos para el hiperplano óptimo y el margen óptimo.*

b) *¿Cuáles son los vectores soporte?*

c) *Construir la solución en el espacio dual. Comparar la solución con la del apartado (a)*

Solución

Asignamos la etiqueta 1 a los datos de la clase 1 y la etiqueta -1 a los datos de la clase 2. Los puntos se distribuyen de la siguiente forma:



Buscamos el hiperplano óptimo que separa los datos, y para ello buscamos un vector de pesos (bw_1w_2), con $w = (w_1w_2)$ que minimice la función $\frac{1}{2}w^Tw = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2)$ sujeta a las restricciones $y_n(w^Tx_n + b) \geq 1$, donde cada x_n representa a un dato y cada y_n su etiqueta asociada.

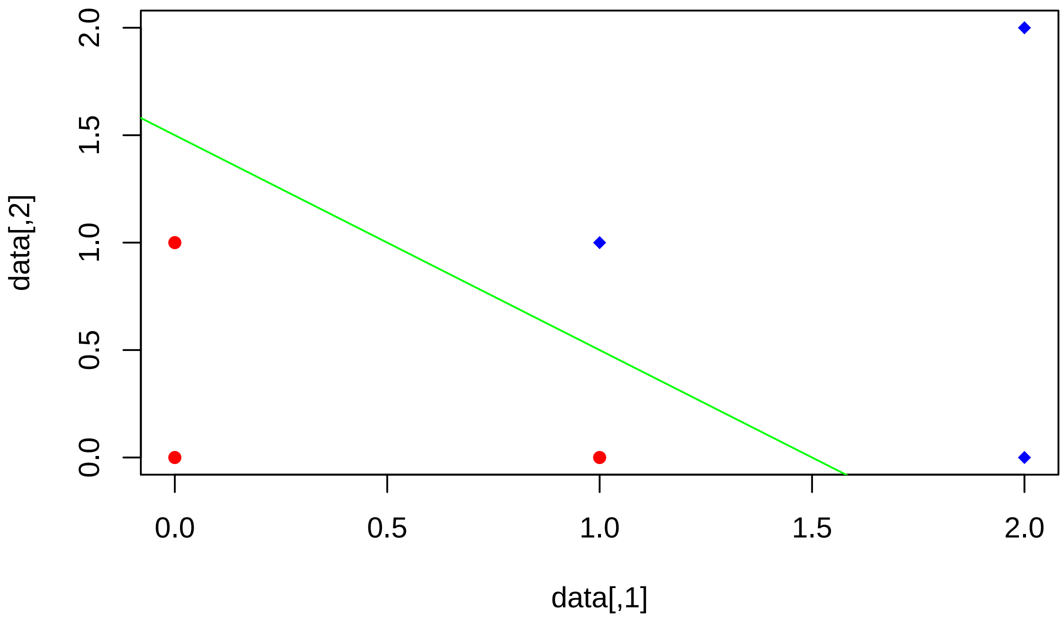
Las restricciones que obtenemos para los puntos dados son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
(1,1) &\quad \rightarrow \quad w_1 + w_2 + b \geq 1 && (1)\\
(2,2) &\quad \rightarrow \quad 2w_1 + 2w_2 + b \geq 1 && (2)\\
(2,0) &\quad \rightarrow \quad 2w_1 + b \geq 1 && (3)\\
(0,0) &\quad \rightarrow \quad -b \geq 1 && (4)\\
(1,0) &\quad \rightarrow \quad -w_1 - b \geq 1 && (5)\\
(0,1) &\quad \rightarrow \quad -w_2 - b \geq 1 && (6)
\end{aligned}
$$

Sumando las inecuaciones (1) y (5), obtenemos que $w_2 \geq 2$, y sumando las inecuaciones (1) y (6) $w_1 \geq 2$. Además se verifica que $\frac{1}{2}w^Tw$ sujeta a que $w_1, w_2 \geq 2$ alcanza su mínimo cuando $w_1 = w_2 = 2$. Tomando estos valores para w las desigualdades anteriores quedan:

$$
\begin{aligned}
(1,1) &\quad \rightarrow \quad 4 + b \geq 1 && (7)\\
(2,2) &\quad \rightarrow \quad 8 + b \geq 1 && (8)\\
(2,0) &\quad \rightarrow \quad 4 + b \geq 1 && (9)\\
(0,0) &\quad \rightarrow \quad b \leq -1 && (10)\\
(1,0) &\quad \rightarrow \quad b \leq -3 && (11)\\
(0,1) &\quad \rightarrow \quad b \leq -3 && (12)
\end{aligned}
$$

Por tanto, observamos que tomando $b = -3$ se satisfacen todas las restricciones, y además se minimiza $\frac{1}{2}w^Tw$ sobre estas restricciones. Por tanto, el vector de pesos asociados al hiperplano es $(bw_1w_2) = (-322)$ y por tanto el hiperplano óptimo que separa los datos viene dado por la ecuación $2u + 2v = 3$. En la siguiente gráfica se muestra la recta obtenida:



Finalmente, el margen óptimo viene dado por la fórmula $M = \frac{1}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

b)

Los vectores soporte son aquellos para los que la distancia al hiperplano coincide con el margen, o equivalentemente, aquellos para los que se da la igualdad en la restricción asociada. Para ello, para cada dato y con el vector de pesos obtenido $(bw_1w_2) = (-322)$, calculamos $y_n(w^T x_n + b)$ y vemos si es igual a 1.

$$(1,1) \quad \rightarrow \quad w_1 + w_2 + b = 1 \tag{13}$$
$$(2,2) \quad \rightarrow \quad 2w_1 + 2w_2 + b = 5 \tag{14}$$
$$(2,0) \quad \rightarrow \quad 2w_1 + b = 1 \tag{15}$$
$$(0,0) \quad \rightarrow \quad -b = 3 \tag{16}$$
$$(1,0) \quad \rightarrow \quad -w_1 - b = 1 \tag{17}$$
$$(0,1) \quad \rightarrow \quad -w_2 - b = 1 \tag{18}$$

Por tanto, obtenemos que los vectores soporte son $(1,1), (2,0), (1,0)$ y $(0,1)$. En la gráfica anterior se comprueba que son los más cercanos al hiperplano.

Cuesti?n 5

Soluci?n

Cuesti?n 6

Soluci?n

Cuesti?n 7

Soluci?n