Geometría Simpléctica

José Luis Tábara

jltabara@gmail.com

Índice

1. Geometría simpléctica lineal

Supondremos siempre que el cuerpo k sobre el que trabajamos es de característica distinta de 2. Todos los k-espacios vectoriales que aparezcan se supondrán de dimensión finita.

1.1. Formas bilineales

Comenzaremos con un breve repaso de las formas bilineales. A su vez esto nos servirá para ir fijando notaciones.

Definición 1.1 *Dado un espacio vectorial E sobre k se dice que una aplicación*

$$B : E \times E \to k$$

es bilineal *si para cualesquiera vectores y escalares cumple:*

- $B(e + e', f) = B(e, f) + B(e', f)$.
- $B(e, f + f') = B(e, f) + B(e, f')$.
- $B(\lambda e, f) = \lambda B(e, f)$.
- $B(e, \lambda f) = \lambda B(e, f)$.

El conjunto de todas las formas bilineales es un espacio vectorial que denotamos $\mathrm{Bil}(E)$.

Fijada una base $\{e_i\}$ del espacio vectorial, a cada forma bilineal B le podemos hacer corresponder una matriz cuadrada $\overline{B}$, cuyo orden coincide con la dimensión del espacio vectorial. Las entradas de dicha matriz son

$$\overline{B}_{ij} = B(e_i, e_j)$$

Esta aplicación establece una isomorfismo entre el espacio de formas bilineales y el de matrices cuadradas. La biyección depende de la base tomada en el espacio vectorial.

Para recuperar la aplicación bilineal a partir de la matriz se procede del siguiente modo: fijada una base, a cada vector e le podemos hacer corresponder sus coordenadas en dicha base, dando lugar a un vector columna, que seguimos denotando por e. Con este abuso de notación, dada una matriz M construimos la aplicación

$$\overline{M}(e, f) = e^t \cdot M \cdot f$$

donde el punto indica el producto matricial. Es inmediato comprobar que la aplicación es bilineal y nos permite reconstruir el isomorfismo del espacio vectorial de las matrices con el de aplicaciones bilineales.

Definición 1.2 *Una forma bilineal B es* simétrica *si para todo par de vectores cumple*

$$B(e, f) = B(f, e)$$

Una forma bilineal B es antisimétrica *si para todo par de vectores cumple*

$$B(e, f) = -B(f, e)$$

La forma bilineal es simétrica si y solo si la matriz asociada en una base es una matriz simétrica. Un resultado similar se tiene para las formas antisimétricas.

Definición 1.3 *Sea $\varphi : E \to F$ una aplicación lineal. Llamamos* imagen inversa *o* pullback *a la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & \mathrm{Bil}(F) & \to & \mathrm{Bil}(E) \\ & B & \to & \varphi^*(B) \end{array}$$

donde la imagen está definida por

$$\varphi^*(B)(e, f) = B(\varphi(e), \varphi(f))$$

Es sencillo comprobar que en efecto la imagen inversa de una forma bilineal es asimismo bilineal y que la aplicación φ^* es lineal. Si B es simétrica lo mismo le ocurre a su imagen inversa y resultado análogo con la antisimetría.

Notación. Las aplicaciones bilineales antisimétricas se denominan también 2-formas. A veces simplemente las denominaremos formas. $\square$

Dado un espacio vectorial E y dos aplicaciones lineales, $\omega : E \to k$ y $\alpha : E \to k$, podemos construir varias formas bilineales. La primera la denotamos $\omega \otimes \alpha$ y está definida por

$$\omega \otimes \alpha\,(e, f) = \omega(e) \cdot \alpha(f)$$

Decimos que es el producto tensorial de ω y α (obsérvese que en general el producto tensorial no es conmutativo). Las otras dos formas se construyen a partir de esta: el producto exterior

$$\omega \wedge \alpha = \omega \otimes \alpha - \alpha \otimes \omega$$

y el producto simétrico

$$\omega \cdot \alpha = \omega \otimes \alpha + \alpha \otimes \omega$$

1.2. Geometrías

Definición 1.4 *Una k-*geometría simpléctica *es un par (E, Ω) formado por un k-espacio vectorial E y una aplicación bilineal antisimétrica Ω sobre E. La aplicación bilineal Ω también se llama* producto escalar *o* métrica.

Propiedades elementales.

- Como Ω es antisimétrico tenemos que $\Omega(e, f) = -\Omega(f, e)$. En particular, como la característica no es 2, se deduce que $\Omega(e, e) = 0$. El recíproco también es cierto: si $\Omega(e, e) = 0$ para todo vector e, entonces la aplicación es antisimétrica.

- Dada una base $\{e_i\}$ del espacio vectorial E podemos asociar a cada geometría una matriz cuadrada antisimétrica cuyo orden coincide con la dimensión de la geometría. Sus elementos se definen como

$$\omega_{ij} = \Omega(e_i, e_j)$$

Si denotamos por $\{\alpha_i\}$ a la base dual de $\{e_i\}$ tenemos que

$$\Omega = w_{ij}\, \alpha_i \wedge \alpha_j \text{ (convenio de sumación)}$$

puesto que ambas expresiones coinciden sobre elementos de la base y por lo tanto sobre cualquier par de vectores.

Observación. En general, en todos los libros, se denomina geometría simpléctica a lo que nosotros llamaremos geometría simpléctica no singular. Nosotros también haremos esto cuando introduzcamos el concepto de geometría no singular (ver sección 1.5). $\square$

Ejemplos.

- Consideramos en k^2 la base canónica y denotamos por ω_x y ω_y la base dual. Entonces $\Omega = \omega_x \wedge \omega_y$ dota a k^2 de una estructura simpléctica. La matriz de esta forma en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sea k^{2n} dotado de la base canónica y $\{\omega_i\}$ la base dual. Si tomamos $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{n+i}$ tenemos una estructura simpléctica. La matriz de esta aplicación en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

  Obsérvese que en cierto sentido esta es la matriz antisimétrica más "sencilla".

- Sea E un espacio vectorial arbitrario. Sobre el espacio $E \oplus E^*$ tenemos la aplicación canónica definida como

$$\Omega(e \oplus \omega, e' \oplus \omega') = \omega'(e) - \omega(e')$$

Es sencillo comprobar que es bilineal y que es antisimétrica.

- Sea E un espacio vectorial real dotado de una métrica euclídea. El producto escalar de dos vectores lo denotaremos $g(x, y)$. En el espacio vectorial $E \times E$ existe una estructura simpléctica asociada a este producto escalar

  $$\Omega(e_1 \oplus e_2, e_1' \oplus e_2') = g(e_2', e_1) - g(e_1', e_2)$$

  Este ejemplo lo podemos considerar como un caso particular del anterior, donde hemos utilizado la geometría euclídea para identificar al espacio con su dual.

- Sea E un espacio vectorial complejo dotado de una métrica hermítica. Consideraremos también la estructura natural de espacio vectorial real. Si denotamos por $\langle\, e, f\,\rangle$ al producto hermítico de dos vectores, tenemos que la aplicación es lineal en la primera componente, antilineal en la segunda y además se cumple que $\langle\, e, f\,\rangle = \overline{\langle\, f, e\,\rangle}$. La parte imaginaria de la métrica hermítica, $\mathrm{Im}(\langle\, e, f\,\rangle)$, es una métrica simpléctica sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial E: por una parte

  $$\langle\, e, f\,\rangle = \mathrm{Re}(\langle\, e, f\,\rangle) + \sqrt{-1} \cdot \mathrm{Img}(\langle\, e, f\,\rangle)$$

  y por otra

  $$\langle\, f, e\,\rangle = \mathrm{Re}(\langle\, f, e\,\rangle) + \sqrt{-1} \cdot \mathrm{Img}(\langle\, f, e\,\rangle)$$

  Como ambos números son conjugados, sus partes imaginarias tienen signos opuestos, de donde se deduce que

  $$\mathrm{Img}(\langle\, e, f\,\rangle) = -\mathrm{Img}(\langle\, f, e\,\rangle)$$

1.3. Morfismos

Definición 1.5 *Sean* $(E, \Omega), (E', \Omega')$ *dos geometrías simplécticas. Un* morfismo simpléctico*, o* morfismo métrico*, es una aplicación lineal* $\varphi : E \to E'$ *que verifica*

$$\Omega(e, f) = \Omega'(\varphi(e), \varphi(f)) \text{ para todo } e, f \in E$$

La composición de dos morfismos simplécticos es otro morfismo simpléctico. Asimismo, si φ es un isomorfismo simpléctico, φ^{-1} es también simpléctico. Los isomorfismo simplécticos se denominan simplectomorfismos.

Propiedades elementales.

- $\varphi : E \to E'$ es un morfismo métrico si y solo si $\varphi^*(\Omega') = \Omega$, donde φ^* denota la imagen inversa.
- Dos geometrías son isométricas si existe alguna isometría entre ellas. Esto nos da una relación de equivalencia en el conjunto de geometrías sobre el cuerpo k. Para nosotros dos geometrías isométricas serán consideradas la misma geometría.
- Si E, E' son isométricas, existen bases en E y E' tales que Ω y Ω' tienen la misma matriz asociada. Si φ es la isometría y tomamos una base $\{e_i\}$ en el primer espacio, tenemos que $\{\varphi(e_i)\}$ es una base del segundo espacio y las matrices respecto de dichas bases son iguales. El recíproco también es cierto.

El problema que pretendemos estudiar en este capítulo es la clasificación de las geometrías de acuerdo a la relación de equivalencia dada por la isometría. Ello exige dar condiciones necesarias y suficientes para que dos geometrías sean isométricas y también encontrar los representantes más sencillos de cada clase de equivalencia (expresando la métrica en una base).

Dos geometrías isométricas son necesariamente de la misma dimensión. Por lo tanto la dimensión es un invariante en el problema de clasificación de geometrías. El resultado final que obtendremos es que basta este invariante para clasificar las geometrías (no singulares). Dicho de otro modo, demostraremos, bajo la condición de no degeneración, que dos geometrías son isométricas si y solo si tienen la misma dimensión.

1.4. Ortogonalidad

Definición 1.6 *Dos vectores $e, f \in E$ son* ortogonales *si $\Omega(e, f) = 0$.*

Todo vector es ortogonal a si mismo por ser Ω antisimétrica. Por eso se dice que los vectores son isótropos en geometría simpléctica.

Definición 1.7 *Sea $V \subset E$ un subespacio. Llamamos* ortogonal *de V y denotamos $V^\perp$ al subespacio*

$$V^\perp = \{e \in E \text{ tales que } \Omega(e, f) = 0 \text{ para todo } f \in V\}$$

El ortogonal de un subespacio es asimismo un subespacio. A pesar de utilizar la misma notación que en la geometría euclídea, esta construcción no posee las mismas propiedades. Por ejemplo, es falso en general que V y $V^\perp$ sean suplementarios. Es más, incluso es falso que la suma de sus dimensiones coincida con la dimensión del espacio total. Sin embargo son ciertas las siguientes propiedades, cuya demostración es inmediata.

Propiedades elementales.

- $V \subset V^{\perp\perp}$ y la inclusión puede ser estricta.
- Si $V \subset V'$ entonces $V'^\perp \subset V^\perp$.
- $(V + V')^\perp = V^\perp \cap V'^\perp$.

Dado un producto de espacios vectoriales, denotaremos por π_i a las proyecciones canónicas en cada factor

Definición 1.8 *Sean (E, Ω) y (E', Ω') dos geometrías. La* suma ortogonal *es el espacio vectorial $E \oplus E'$ dotado de la métrica*

$$\overline{\Omega} = \pi_1^*(\Omega) + \pi_2^*(\Omega')$$

La suma ortogonal se denota $E \perp E'$.

Observación. Todo vector de E, tras inyectarlo en $E \perp E'$, es ortogonal a todo vector de E'. Aplicando la bilinealidad deducimos que la forma simpléctica es simplemente

$$\overline{\Omega}(e \oplus e', f \oplus f') = \Omega(e, f) + \Omega'(e', f')$$

En general denotamos a la métrica del producto por $\Omega + \Omega'$, o también $\Omega \perp \Omega'$, cometiendo un abuso de notación fácilmente entendible.

1.5. Polaridad

En una geometría euclídea tenemos una aplicación canónica del espacio en su dual, que en el caso de dimensión finita permite establecer la biyección entre ambos espacios. En geometría simpléctica el análogo de dicha construcción es la polaridad.

Definición 1.9 *La* polaridad *asociada a* Ω *es la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \Omega^\flat : & E & \to & E^* \\ & e & \to & e^\flat \end{array}$$

donde $e^\flat$ *es la forma lineal definida por*

$$e^\flat(f) = \Omega(e, f)$$

La aplicación $e^\flat$ es una forma lineal debido a linealidad de la forma simpléctica en la segunda componente. La linealidad de la aplicación $\Omega^\flat$ es consecuencia de la linealidad de Ω en la primera componente.

Notación. En algunos libros se define la polaridad con el signo cambiado. Este cambio de signo no tiene consecuencias en nuestro estudio. También es costumbre denotar por $\Omega^\sharp$ al isomorfismo inverso de la polaridad y llamarlos isomorfismos musicales. $\square$

Definición 1.10 *El* radical *de la geometría* (E, Ω) *es el núcleo de la polaridad. Se denota* $\mathrm{rad}(E)$ *o* $\mathrm{rad}(\Omega)$. *También es habitual la notación* $\mathrm{Ker}(\Omega)$.

Otra forma de definir el radical es decir que sus elementos son los vectores ortogonales a cualquier otro vector. Se tiene por tanto que $\mathrm{rad}(E) = E^{\perp}$. Esto nos permite definir el radical sin introducir en la discusión la polaridad asociada. Sin embargo el estudio de la polaridad tiene grandes ventajas, como iremos comprobando a lo largo de estas notas.

Definición 1.11 *Una métrica es* no singular *si su radical es nulo. En este caso la polaridad es un isomorfismo, puesto que estamos suponiendo que el espacio vectorial es de dimensión finita.*

Dada una métrica no singular, si $\Omega(e, f) = 0$ para todo elemento $e \in E$, necesariamente $f = 0$. Si la métrica es degenerada (o singular) existe al menos un vector no nulo f que cumplen $\Omega(e, f) = 0$ para cualquier vector e.

Definición 1.12 *El* rango *de* (E, Ω) *es la dimensión de la imagen de la polaridad. Aplicando una fórmula bien conocida tenemos que*

$$\mathrm{rang}(E) = \dim(E) - \dim(\mathrm{rad}(E))$$

que es una forma alternativa de definir el rango, sin hablar de la polaridad.

Todas las construcciones de esta sección tienen una interpretación matricial muy clara. Se basan en el siguiente resultado, cuya demostración consiste en una simple comprobación.

Proposición 1.1 *La matriz de aplicación* $\Omega^{\flat} : E \to E^*$ *respecto a una base y su dual, coincide con la matriz de la forma simpléctica respecto a dicha base.*

Corolario 1.2 *Fijada una base, y entendiendo los vectores como vectores columna, tenemos que*

$$\mathrm{rad}(E) = \{e \in E \textit{ tales que } M \cdot e = 0\}$$

siendo M la matriz de la forma bilineal en dicha base. El rango de E coincide con el rango de la matriz M.

En el caso general, la imagen de un subespacio V por la polaridad es un subespacio del dual que incluso puede ser nulo. En el caso no singular podemos describir perfectamente este subespacio, permitiendonos realizar ciertos razonamientos "duales" en geometría simpléctica.

Proposición 1.3 *Si Ω es no degenerada, entonces $\Omega^\flat(V^\perp) = V^0$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $\alpha \in \Omega^\flat(V^\perp)$. Entonces $\alpha = e^\flat$, siendo e un vector del ortogonal. Hagamos actuar esta forma lineal sobre elementos $f \in V$

$$\alpha(f) = e^\flat(f) = \Omega(e, f) = 0$$

Hemos demostrado que $e^\flat \in V^0$.

$\Leftarrow$) Sea $\alpha \in V^0$. Como la polaridad es epiyectiva, necesariamente $\alpha = e^\flat$. El mismo razonamiento demuestra ahora que $e \in V^\perp$, dando lugar a la inclusión opuesta. Obsérvese como hemos utilizado la no degeneración de Ω en un paso crucial de la demostración. $\square$

De álgebra lineal sabemos que las dimensiones de un subespacio V y de su subespacio incidente V^0 son suplementarias. Bajo los isomorfismos de rigor, también tenemos la igualdad $V^{00} = V$. Estos y otros resultados "duales" se enuncian en los siguientes corolarios.

Corolario 1.4 *Si la métrica es no degenerada entonces*

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$$

Corolario 1.5 *Si la métrica es no degenerada $V^{\perp\perp} = V$.*

Demostración.

Una inclusión se da en todos los casos. Como tienen que tener la misma dimensión, tenemos la igualdad. $\square$

Corolario 1.6 *Si la métrica es no degenerada entonces*

- $V_1 \subset V_2$ *si y solo si* $V_2^{\perp} \subset V_1^{\perp}$.
- $(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.
- $(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$.

1.6. Restricción de métricas

Sea $V \subset E$ un subespacio, Ω una métrica en E e $i : V \to E$ la inyección canónica. Sobre V consideramos la métrica $i^*\Omega$. Si hacemos actuar esta métrica sobre los vectores de V vemos que sus valores coinciden con los obtenidos al restringir la métrica Ω al subespacio. Por ello también denotaremos a dicha métrica mediante $\Omega_{|V}$.

Definición 1.13 *El par* $(V, \Omega_{|V})$ *es una geometría, denominada* restricción *de* Ω *a* V. *Para no complicar la notación, denotaremos por* Ω *a la métrica restringida a un subespacio.*

Observación. La inyección canónica es un morfismo métrico. La restricción de Ω a V es la única estructura que hace que la inyección canónica sea un morfismo métrico. □

Definición 1.14 *Llamamos* radical de un subespacio *al radical de la métrica restringida. Llamamos* rango de un subespacio V *al rango de la geometría restringida.*

Proposición 1.7 *Se verifica la fórmula*

$$\mathrm{rad}(V) = V \cap V^{\perp}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $e \in \mathrm{rad}(V)$ necesariamente $e \in V$ y además $\Omega(e, f) = 0$ para todo $f \in V$. Entonces $e \in V^{\perp}$.

$\Leftarrow$) Si $e \in V \cap V^{\perp}$ entonces $\Omega(e, f) = 0$ para todo $f \in E$, entonces $e \in \mathrm{rad}(V)$. $\square$

Corolario 1.8 *La geometría inducida en V es no singular si $V \cap V^{\perp} = 0$. En estas condiciones $V^{\perp}$ también es no singular (utilizar que $V^{\perp\perp} = V$) y el espacio descompone en suma directa*

$$E = V \oplus V^{\perp}$$

Naturalmente esta suma directa es también ortogonal.

1.7. Proyección de métricas

En una geometría singular siempre existe radical. Con ayuda de la proyección podemos "eliminar" una parte o bien todo el radical, obteniendo de esta forma una métrica no degenerada.

Definición 1.15 *Sea $\pi : E \to E'$ una aplicación lineal epiyectiva. Decimos que la geometría (E, Ω) es* proyectable *por el epimorfismo π, si existe sobre E' una métrica Ω', que hace que π sea un morfismo métrico.*

Por el teorema de factorización canónica tenemos que $E' = E/\mathrm{Ker}(\pi)$. La única definición posible para Ω' es la que cumple

$$\Omega'(\pi(e), \pi(f)) = \Omega(e, f)$$

Esto será correcto siempre y cuando la definición no dependa de los representantes elegidos. Ello se soluciona en el siguiente teorema.

Teorema 1.9 *La geometría (E, Ω) es proyectable por un epimorfismo π si y solo si $\mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{rad}(E)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Otro representante de $\pi(e)$ es de la forma $e + u$, con $u \in \mathrm{Ker}(\pi)$

$$\Omega(e + u, f + u') = \Omega(e, f) + \Omega(u, f) + \Omega(e, u') + \Omega(u, u')$$

pero los tres últimos sumandos son nulos puesto que $\operatorname{Ker}(\pi) \subset \operatorname{rad}(E)$ y concluimos que la definición es independiente de los representantes.

$\Leftarrow$) $e \in \operatorname{Ker}(\pi) \Rightarrow \Omega(e, f) = \Omega'(\pi(e), \pi(f)) = \Omega'(0, \pi(f)) = 0$. Por lo tanto $e \in \operatorname{rad}(E)$. $\square$

Tenemos que dada una métrica arbitraria Ω, se proyecta en una métrica mediante la proyección canónica $\pi : E \to E/\operatorname{rad}(E)$. La métrica inducida en el cociente es no singular. Supongamos que $\pi(e)$ pertenece al radical de la métrica proyectada. Entonces para todo $\pi(f)$

$$0 = \Omega'(\pi(e), \pi(f)) = \Omega(e, f) \quad \Rightarrow \quad e \in \operatorname{rad}(E) \Rightarrow \pi(e) = 0$$

La métrica no singular sobre la que se proyecta es única salvo isometrías. Esto nos permite dar una interpretación geométrica del rango. El rango de una geometría es la dimensión del espacio donde se proyecta de modo irreducible.

1.8. Clasificación de geometrías

Vamos a pasar ya al teorema de clasificación y a la construcción de las formas normales.

Lema 1.10 *Si $\varphi : E \to E'$ es una isometría, $\varphi(\operatorname{rad}(E)) = \operatorname{rad}(E')$. El rango de una métrica es invariante por isometrías.*

Lema 1.11 *Si $\varphi : E \to E'$ es una isometría, el morfismo inducido*

$$\varphi' : E/\operatorname{rad}(E) \to E'/\operatorname{rad}(E')$$

es una isometría.

Proposición 1.12 *Sean $(E, \Omega), (E', \Omega')$ dos geometrías de la misma dimensión. E y E' son isométricas si y solo si lo son $E/\operatorname{rad}(E)$ y $E'/\operatorname{rad}(E')$.*

Demostración.

Sea W un suplementario de $\mathrm{rad}(E)$. Entonces la proyección canónica $\pi : E \to E/\,\mathrm{rad}(E)$ induce una isometría de W con $E/\,\mathrm{rad}(E)$. Es claro que la suma directa $\mathrm{rad}(E) \oplus W$ es también ortogonal. Hacemos lo mismo con la geometría E'.

Sea φ_2 es una isometría de W con W' y φ_1 un isomorfismo (y por tanto isometría) de $\mathrm{rad}(E)$ en $\mathrm{rad}(E')$. Entonces $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ es una isometría, donde φ está definido como

$$\varphi(e \oplus f) = \varphi_1(e) \oplus \varphi_2(f) \text{ con } e \in \mathrm{rad}(E), f \in W$$

lo que demuestra que las geometrías E y E' son isométricas si lo son sus partes irreducibles. $\square$

Esta proposición reduce la clasificación de una geometría arbitraria a la clasificación de una geometría no singular. Vamos a clasificar estas últimas.

Definición 1.16 *Llamamos* plano hiperbólico *a una geometría bidimensional no singular. Decimos que un geometría o un espacio es* hiperbólico *si es isométrico a una suma ortogonal de planos hiperbólicos.*

Teorema 1.13 *Si E es no singular, entonces es hiperbólica.*

Demostración.

Veamos primero que toda geometría no singular debe contener a un plano hiperbólico. Dado un vector no nulo $e \in E$, existe otro vector f tal que $\Omega(e, f) \neq 0$. Entonces $\pi =< e, f >$ es un plano hiperbólico (compruébese).

Si π es un plano hiperbólico tenemos que $E = \pi \perp \pi^{\perp}$ y la geometría en $\pi^{\perp}$ es también no singular. Mediante un argumento inductivo y teniendo en cuenta que estamos en el caso de dimensión finita, concluimos que E es un suma ortogonal de planos hiperbólicos. $\square$

Corolario 1.14 *Una métrica simpléctica no degenerada es necesariamente de dimensión par.*

Definición 1.17 *Dos vectores e, f forman una* pareja hiperbólica *si*

$$\Omega(e, f) = 1$$

Un plano es hiperbólico si y solo si posee parejas hiperbólicas (problema 12). De este modo dos planos hiperbólicos siempre son isométricos, pues una isometría se construye mandando una pareja hiperbólica a otra pareja hiperbólica. Del mismo modo, dos espacios hiperbólicos son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión.

Teorema 1.15 (de clasificación) *Dos geometrías simplécticas, E, E' son isométricas si y solo si* $\dim(E) = \dim(E')$ *y* $\operatorname{rang}(E) = \operatorname{rang}(E')$.

Demostración.

Se tiene la descomposición $E = \operatorname{rad}(E) \perp E/\operatorname{rad}(E)$. Las partes isótropas son isométricas si tienen la misma dimensión. Las partes no singulares, como son hiperbólicas, son también isométricas si tienen la misma dimensión. $\square$

1.9. Formas normales

Dada una geometría arbitraria E tenemos la siguiente descomposición

$$E = \operatorname{rad}(E) \perp \pi_1 \perp \cdots \perp \pi_n$$

Tomando una base cualquiera del radical y tomando en cada plano hiperbólico una base formada por una pareja hiperbólica obtenemos una base

$$\{e_1, \ldots, e_p, e_{1a}, e_{1b}, \ldots, e_{na}, e_{nb}\}$$

del espacio total. La matriz de Ω en esta base es de la forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0_p & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \pi & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right)$$

donde 0_p es la matriz nula de dimensión p y π es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Reordenando la base anterior podemos afirmar que dada una geometría simpléctica, existe una base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ tal que Ω se expresa en función de la base dual en la forma

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{n+i}$$

con $n = (\dim(E) - \operatorname{rang}(E))/2$. En esta base la matriz de Ω es

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline 0 & -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

donde Id_n designa la matriz unidad de dimensión n. Esta es la llamada forma normal de Ω.

En toda geometría simpléctica no singular existe una base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ tal que $\Omega = \omega_i \wedge \omega_{n+i}$ (convenio de sumación). Esto equivale a decir que la matriz asociada es

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline -\mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right)$$

Definición 1.18 *Llamamos* base simpléctica *asociada a Ω a toda base cuya matriz asociada sea J. Dicha base no es única.*

Es común emplear la notación $\{q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n\}$ para referirnos a la base simpléctica. En esta base se cumplen las identidades

$$\Omega(p_i, p_j) = 0 = \Omega(q_i, q_j) \qquad \Omega(p_i, q_j) = \delta_{ij}$$

que son las que habitualmente se emplean.

1.10. Subespacios

En geometría euclídea, todo subespacio con la métrica restringida es a su vez un espacio euclídeo. Al restringir la métrica euclídea siempre se obtiene una métrica no degenerada. Sin embargo esto no suele ser lo habitual ni para métricas seudoeuclídeas ni para métricas simplécticas. Esto da lugar a distintos tipos de subespacios. Los tipos más importantes se recogen en la siguiente definición.

Definición 1.19 *Dado un subespacio V de E:*

- *Es* no singular *o* simpléctico *si la métrica restingida a V es no singular.*
- *Es* isótropo *si la métrica restringida al subespacio es nula.*
- *Es* coisótropo *si $V^{\perp}$ es isótropo.*
- *Es* lagrangiano *si es a la vez isótropo y coisótropo.*

Observación. Debemos tener en cuenta que hay subespacios que no son de ninguno de los cuatro tipos enunciados. □

Recordando que $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^{\perp}$ podemos dar otras definiciones, tal vez más operativas, de los conceptos anteriores.

Definición 1.20 *Dado un subespacio V de E tenemos:*

- *V es* simpléctico *si $V \cap V^{\perp} = 0$.*
- *V es* isótropo *si $V \subset V^{\perp}$.*
- *V es* coisótropo *si $V^{\perp} \subset V$.*
- *V es* lagrangiano *si $V = V^{\perp}$.*

Aunque hemos enunciado los conceptos anteriores para cualquier geometría, normalmente siempre se supone que la métrica definida en el espacio total es no singular. Esto es lo que hacemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

- Un subespacio V es simpléctico si y solo si si $V^{\perp}$ es también simpléctico, puesto que $(V^{\perp})^{\perp} = V$. Un subespacio simpléctico da lugar a una descomposición $E = V \perp V^{\perp}$.

- Sea V arbitrario. El subespacio $V \cap V^{\perp}$ siempre es isótropo. Su ortogonal, que coincide con $V + V^{\perp}$, es siempre coisótropo. Todo subespacio de dimensión uno es isótropo. Todo hiperplano es coisótropo.
- Si V es isótropo necesariamente $\dim(V) \leq n$, siendo $2n$ la dimensión del espacio total. Esto es consecuencia de que $V \subset V^{\perp}$ y de que además $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = 2n$. Del mismo modo, si V es coisótropo su dimensión es mayor o igual que n.
- Si L es lagrangiano, es a la vez isótropo y coisótropo. Por el ejemplo anterior su dimensión es necesariamente n.
- Consideremos el espacio $E \times E^*$ con la métrica canónica. Tanto E como E^* son subespacios lagrangianos.

Los subespacios lagrangianos son isótropos y no pueden existir subespacios isótropos que los contengan (por razones de dimensión). La siguiente proposición nos ofrece una definición alternativa de subespacio lagrangiano.

Proposición 1.16 *Un subespacio es lagrangiano si y solo si es un elemento maximal en el conjunto de subespacios isótropos.*

Como los subespacios lagrangianos son maximales entre los subespacios isótropos, parece natural que todo subespacio isótropo se pueda incluir en un subespacio lagrangiano. En la siguiente proposición se hace un esbozo del método que nos permite incluir un isótropo en un lagrangiano.

Proposición 1.17 *Todo subespacio V isótropo se puede incluir en un subespacio L lagrangiano. Este último subespacio no es único.*

Demostración.

Sea V un subespacio isótropo que no sea lagrangiano. Como la inclusión $V \subset V^{\perp}$ es estricta, existe un elemento no nulo $e \in V^{\perp} - V$. Entonces $V \oplus \langle e \rangle$ es un subespacio isótropo de dimensión estrictamente mayor. Si el nuevo subespacio es lagrangiano, se termina. En caso contrario se vuelve a aplicar el método descrito al nuevo subespacio y se termina en un número finito de pasos. $\Box$

Dada una base simpléctica $\{q_i, p_i\}$ el subespacio $\langle q_1, \ldots, q_s\rangle$ con $s < n$ es un subespacio isótropo. Si $s = n$ el subespacio es lagrangiano. Del mismo modo, los subespacios de la forma $\langle q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s\rangle$ son simplécticos. En realidad este es el caso general: siempre existen bases simplécticas adaptadas a los subespacios.

Proposición 1.18 *Sea $V \subset E$ un subespacio simpléctico. Dada una base simpléctica en V se puede completar para obtener una base simpléctica del espacio total.*

Demostración.

Construimos $V^\perp$, lo que da lugar a la descomposición $E = V \perp V^\perp$. Tomamos una base simpléctica del ortogonal. La unión de las bases de V y de $V^\perp$ da una base simpléctica en E. $\Box$

Proposición 1.19 *Dada una base de un subespacio isótropo se puede completar para obtener una base simpléctica.*

Demostración.

Si V es isótropo, lo incluimos en un lagrangiano. Podemos extender la base del isótropo al lagrangiano. Como veremos en la próxima sección, la base de un lagrangiano se puede incluir en una base simpléctica. $\Box$

Otra forma de enunciar los resultados anteriores consiste en estudiar la acción de los simplectomorfismos sobre los subespacios.

Corolario 1.20 *Sea V y V' dos subespacios isótropos de la misma dimensión. Entonces existe una simplectomorfismo $\varphi : E \to E$ (que no es único) que transforma el primer subespacio en el segundo. Un caso particular se produce cuando ambos subespacios son lagrangianos.*

Demostración.

Tomamos una base arbitraria del primer subespacio y otra del segundo. Completamos ambas bases para formar una base simpléctica. El morfismo que transforma la primera base en la segunda cumple lo enunciado. $\square$

Observación. Se tienen resultados análogos para otros tipos de subespacios, como puede comprobar el lector. $\square$

1.11. Subespacios lagrangianos

Ya hemos visto varias definiciones equivalentes del concepto de subespacio lagrangiano. Debido a su importancia, las recogemos e incrementamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.21 *Sea E una geometría no singular. Son equivalentes:*

- *V es un subespacio lagrangiano.*
- *$V = V^{\perp}$.*
- *V es isótropo y $\dim(V) = \frac{1}{2}\dim(E)$.*
- *V es isótropo y maximal.*

Dada una geometría no singular, tomemos una base simpléctica. Los subespacios $V_1 = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ y $V_2 = \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ son ambos lagrangianos y suplementarios. Con estas notaciones

$$\Omega(e \oplus f, e' \oplus f') = \Omega(e, f') - \Omega(e', f)$$

lo que nos recuerda a la estructura simpléctica estandard del espacio $E \times E^*$.

Proposición 1.22 *Sea E una geometría simpléctica y L un subespacio lagrangiano. Existe un isomorfismo simpléctico de E con $L \times L^*$.*

Demostración.

Sea L' un suplementario de L. Entonces $E = L \oplus L'$. Definimos una aplicación de ese suplementario en L^*

$$\varphi : L' \to L^* \text{ donde } \varphi(e')(e) = \Omega(e, e')$$

La aplicación es un isomorfismo, puesto que si $\varphi(e') = 0$ tenemos que $\Omega(e', e) = 0$ para todo elemento de L'. Pero como L es isótropo tenemos que $\Omega(e', e) = 0$ para todo elemento de E. Como las dimensiones coinciden, la aplicación es un isomorfismo.

Puede comprobar el lector que la aplicación $\phi = \mathrm{Id} \oplus \varphi$ es un morfismo simpléctico y por lo tanto E es isomorfo a $L \times L^*$. □

Esta proposición es la versión "abstracta" del siguiente resultado.

Corolario 1.23 *Toda base de un subespacio lagrangiano se puede completar para formar una base simpléctica.*

Demostración.

Sea L el subespacio lagrangiano y $(p_1, \ldots, p_n)$ una base. Tomamos la base dual en L^*. La unión de ambas bases produce una base simpléctica en $L \times L^*$, y se concluye por el resultado anterior. □

Corolario 1.24 *Todo subespacio lagrangiano admite un suplementario lagrangiano.*

Si tenemos dos espacios simplecticos E y E', sobre su producto cartesiano definimos la métrica

$$\Omega \ominus \Omega' = \pi^*(\Omega) - (\pi')^*(\Omega')$$

Esto dota de estructura simpléctica al espacio vectorial $E \times E'$.

Si $\varphi : E \to E'$ es una aplicación lineal (o en general cualquier función) su gráfico es el subconjunto de $E \times E'$

$$\Gamma_\varphi = \{(e, \varphi(e)) \text{ donde } e \in E\}$$

Proposición 1.25 *Un isomorfismo $\varphi : E \to E'$ es simpléctico si y solo si su gráfico Γ_φ es un subespacio lagrangiano de $E \ominus E'$.*

Demostración.

Si el gráfico es lagrangiano tenemos

$$(\Omega \ominus \Omega')((e, \varphi(e)), (f, \varphi(f)) = 0$$

pero esta fórmula se traduce en

$$\Omega(e, f) - \Omega'(\varphi(e), \varphi(f)) = 0$$

que es sinónimo de que φ sea métrico. □

Esto nos permite introducir una generalización del concepto de morfismo simpléctico entre geometrías.

Definición 1.21 *Llamamos* relación canónica lineal *a cualquier subespacio lagrangiano de $E \ominus E'$.*

1.12. El grupo simpléctico

Sea (E, Ω) una geometría no degenerada (lo supondremos en toda la sección). Un automorfismo φ de E es simpléctico si y solo si $\varphi^*(\Omega) = \Omega$. Utilizando la propiedades de la imagen inversa

$$(\varphi\phi)^* = \phi^*\varphi^* \qquad (\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^* \qquad \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$$

se demuestra que la composición de automorfismos simplécticos es de nuevo simpléctico, la identidad también y el inverso de un simplectomorfismo también. En definitiva, el conjunto $\mathrm{Sp}(E)$ de los simplectomorfismos es un grupo, que es de manera natural un subgrupo del grupo lineal.

Definición 1.22 *Dada una geometría no degenerada, llamamos* grupo simpléctico *a* $\mathrm{Sp}(E)$.

Un simplectomorfismo transforma bases simplécticas en bases simplécticas. El recíproco también es cierto.

Proposición 1.26 *Sean Ω y Ω' dos formas simplécticas de la misma dimensión. Existe un isomorfismo φ que cumple $\varphi^*(\Omega) = \Omega'$.*

Demostración.

Construimos una base simpléctica para Ω y otra para Ω'. La aplicación lineal que transforma la primera base en la segunda es un isomorfismo y cumple el enunciado. $\square$

Corolario 1.27 *Todo grupo simpléctico es isomorfo al grupo simpléctico del espacio k^{2n} dotado de su estructura simpléctica estandard.*

Dado un espacio vectorial E, denotaremos por $\Omega(E)$ al conjunto de todas las formas simplécticas que se pueden definir sobre E. Este conjunto está contenido en el conjunto de formas de grado 2 sobre E, que es un espacio vectorial. Dada una base de E, las formas de segundo grado se identifican con el conjunto de matrices antisimétricas. Una matriz o una forma es no degenerada si y solo si su determinante (dada una base) es no nulo. Esta condición nos dice que $\Omega(E)$ es un abierto de un espacio vectorial y tiene una estructura diferenciable canónica.

Proposición 1.28 *Se tiene la igualdad*

$$\Omega(E) = \mathrm{Gl}(E)/\mathrm{Sp}(E)$$

Demostración.

Definimos una acción del grupo lineal en el conjunto $\Omega(E)$ mediante

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(E) \times \Omega(E) & \longrightarrow & \Omega(E) \\ (\varphi, \omega) & \longrightarrow & \varphi^*(\omega) \end{array}$$

Esta acción es transitiva por el corolario anterior. El grupo de isotropía de un elemento ω consiste en los isomorfismo que cumplen $\varphi^*(\omega) = \omega$ que es precisamente el grupo simpléctico asociado a ω. Como los grupos simplécticos asociados a dos formas distintas son isomorfos podemos denotar dicho grupo por $\mathrm{Sp}(E)$. $\square$

Vamos a dar una interpretación matricial del grupo $\mathrm{Sp}(E)$. Denotemos por J a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una endomorfismo $\varphi : E \to E$ designamos su matriz respecto a una base por la matriz A. Si φ es una isometría se cumple

$$\Omega(e, e') = \Omega(\varphi(e), \varphi(e'))$$

que traducido a ecuaciones matriciales nos la fórmula

$$A^t J A = J$$

El grupo simpléctico se puede definir matricialmente como el conjunto de matrices cuadradas de orden $2n$ que cumple la ecuación anterior. Como todos los grupos simplécticos de los espacios de dimensión $2n$ son isomorfos, se acostumbra a denotar el grupo simpléctico como $\mathrm{Sp}(2n)$, donde $2n$ es la dimensión del espacio.

Proposición 1.29 *Si E es un espacio vectorial real o complejo,* $\mathrm{Sp}(E)$ *es un grupo de Lie.*

Demostración.

El grupo simpléctico es un subgrupo del grupo lineal. En la interpretación matricial del grupo simpléctico se observa que el conjunto $\mathrm{Sp}(E)$ se obtiene igualando a constantes funciones diferenciables. Por lo tanto $\mathrm{Sp}(E)$ es un cerrado y además es subgrupo. Aplicando el teorema del subgrupo cerrado de Cartan concluimos que el grupo simpléctico es un grupo de Lie. $\square$

En el problema 17 se calcula el álgebra de Lie de este grupo y en el 19 se dan algunas propiedades grupales.

Si tomamos determinantes en la ecuación matricial, se puede obtener fácilmente que el determinante de A debe ser ± 1. En realidad siempre debe ser positivo.

Corolario 1.30 (Teorema de Liouville) *Todo elemento del grupo simpléctico tiene determinante unidad. El grupo simpléctico es un subgrupo de* $\mathrm{Sl}(E)$.

Demostración.

Sea Ω una forma simpléctica en un espacio de dimensión $2n$. Escribiendo dicha forma en coordenadas simplécticas observamos que la forma exterior Ω^n es no nula y por tanto un elemento de volumen. Como $\varphi^*(\Omega) = \Omega$, necesariamente $\varphi^*(\Omega^n) = \Omega^n$. Como el isomorfismo conserva la forma de volumen, su determinante es la unidad. $\square$

1.13. Estructura compleja

Si E es un espacio vectorial complejo, el endomorfismo que consiste en multiplicar por la unidad imaginaria cumple que su cuadrado es igual al opuesto de la identidad. La generalización de este hecho nos da la

Definición 1.23 *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una* estructura compleja *en E es un endomorfismo $J : E \to E$ que cumple* $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Aplicando el determinante a la expresión $J^2 = -\mathrm{Id}$ obtenemos que

$$\det(J)^2 = (-1)^{\dim(E)}$$

lo que prueba que todo espacio con una estructura compleja tiene dimensión par.

El ejemplo más elemental de estructura compleja lo proporciona el conjunto $\mathbb{C}^n$ entendido como espacio vectorial sobre los reales. En $\mathbb{C}^n$ definimos $J(e) = ie$. Identificando $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ la matriz de J es

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id}_n \\ \operatorname{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Todo espacio vectorial real E con una estructura compleja se puede dotar de una estructura de espacio vectorial complejo. Para ello definimos el siguiente producto por elementos de $\mathbb{C}$

$$(a + ib) \cdot e = a \cdot e + b \cdot J(e)$$

Este espacio vectorial complejo lo denotaremos $E_{\mathbb{C}}$. Como espacio complejo su dimensión es la mitad que como espacio vectorial real. Esto vuelve a demostrar que si un espacio posee una estructura compleja, necesariamente es de dimensión par como espacio vectorial real.

Proposición 1.31 *Sea E un espacio vectorial real de dimensión $2n$ y J una estructura compleja. Existen n vectores $\{e_i\}$ tales que $\{e_i, J(e_i)\}$ forman una base de E.*

Demostración.

Con ayuda del endomorfismo J se puede dotar a E de una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n. Sea $\{e_i\}$ una base del espacio vectorial complejo. Entonces los vectores $\{e_i, J(e_i)\}$ forman una base del espacio vectorial real. $\square$

Consideremos el subespacio real V generado por los vectores $\{e_i\}$ de la proposición anterior. Se tiene la descomposición $E = V \oplus J(V)$.

Definición 1.24 *Sea E un espacio vectorial real con una estructura compleja J. Llamamos* forma real *a todo subespacio V tal que $E = V \oplus J(V)$.*

El resultado anterior afirma ahora que todo espacio con una estructura compleja posee alguna forma real, que en general no será única.

Mediante $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ y $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(E)$ denotamos el conjunto de endomorfismos e isomorfismos de E con su estructura compleja. Todo endomorfismo complejo es a la vez un endomorfismo real. Para que un endomorfismo real sea complejo, basta que "saque" fuera la unidad imaginaria.

Proposición 1.32 *Un endomorfismo φ real es complejo si y solo si φ conmuta con J.*

Demostración.

Si φ es una aplicación lineal compleja, verifica $\varphi(ie) = i\varphi(e)$. Esta condición equivale a $\varphi J = J\varphi$.

Si φ y J conmutan, entonces $\varphi(ie) = i\varphi(e)$ para todo vector $e \in E$. Dado $z = a + bi$ entonces

$$\varphi(ze) = \varphi(ae + ibe) = a\varphi(e) + ib\varphi(e) = z\varphi(e)$$

y φ es aplicación lineal compleja. $\square$

Corolario 1.33 *Se tiene la fórmula*

$$\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(E) = \{\varphi \in \mathrm{Gl}_{\mathbb{R}}(E) \text{ tales que } [J, \varphi] = 0\}$$

Matricialmente podemos suponer que J viene dada por la matriz J_0. Escribiendo en bloques de tamaño $n \times n$ la matriz de φ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

lo que implica que la matriz de φ es de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

A pesar de que sobre un mismo espacio vectorial pueden existir muchas estructuras complejas, todas son equivalentes en el siguiente sentido.

Corolario 1.34 *Sean J_0 y J_1 dos estructuras complejas sobre un mismo espacio vectorial real. Existe un isomorfismo real que transforma J_0 en J_1.*

Demostración.

El endomorfismo J_0 transforma a E en un espacio vectorial complejo de dimensión n, siendo $2n$ la dimensión del espacio real. Lo mismo sucede con J_1. Como dos espacios vectoriales complejos de la misma dimensión son isomorfos, existe un isomorfismo $\varphi : E \to E$ entre ambas estructuras complejas. Este isomorfismo es una aplicación lineal compleja (y por lo tanto real) y verifica la igualdad $\varphi(ie) = i\varphi(e)$. Teniendo en cuenta que una multiplicación por i deriva de J_0 y otra de J_1, se cumple $\varphi(J_0(e)) = J_1\varphi(e)$, lo que implica $\varphi J_0 = J_1\varphi$. El endomorfismo φ transforma una estructura compleja en la otra. $\square$

Esta proposición se puede trasladar a un lenguaje matricial. Si A es la matriz de φ, se cumple $A^{-1}J_0A = J_1$.

Corolario 1.35 *Todo espacio vectorial real E dotado de una estructura compleja es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de su estructura compleja estandard.*

Denotemos por $J(E)$ el conjunto de todas las estructuras complejas de E. Este conjunto adquiere una estructura topológica por ser un subconjunto de $\mathrm{End}(E)$.

Proposición 1.36 *El conjunto de estructuras complejas $J(E)$ se identifica con $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)/\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(E)$.*

Demostración.

Podemos considerar que el espacio vectorial es $\mathbb{R}^{2n}$ y trabajar en la base estandard. Definimos una acción de $\mathrm{Gl}(E)$ en el espacio $J(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2n}) \times J(\mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & J(\mathbb{R}^{2n}) \\ (\varphi, J) & \longrightarrow & \varphi^{-1}J\varphi \end{array}$$

Los resultados anteriores nos dice que la acción es transitiva. Consideramos una estructura compleja, por ejemplo la estandard, y calculamos su grupo de isotropía. Los elementos del grupo de isotropía son exactamente aquellos isomorfismos que conmutan con J y por lo tanto son elementos del grupo $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2n})$. $\square$

1.14. Estructuras complejas compatibles

En un espacio vectorial pueden existir muchas estructuras complejas. A nosotros nos interesan las que estén de algún modo relacionadas con la estructura simpléctica.

Definición 1.25 *Sea (E, Ω) un espacio simpléctico. Una estructura compleja J es* compatible *con la estructura simpléctica, si J es un isomorfismo simpléctico.*

Un espacio vectorial simpléctico puede admitir muchas estructuras complejas compatibles. La unicidad no puede ser demostrada, pero si su existencia.

Proposición 1.37 *Todo espacio simpléctico no singular sobre los reales admite una estructura compleja compatible.*

Demostración.

Sea $\{q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n\}$ una base canónica. Definimos $J : E \to E$ mediante su actuación sobre la base

$$J(q_i) = p_i, \quad J(p_i) = -q_i$$

J es un isomorfismo y cumple $J^2 = -\mathrm{Id}$ pues esta ecuación es válida para todos los elementos de la base. La base $\{J(p_i), J(q_i)\}$ es también simpléctica y J es un isomorfismo simpléctico. Si cambiamos la base, en general cambia el operador J y no se tiene unicidad. $\square$

Veamos ahora que dada una geometría simpléctica y una estructura compleja se puede construir una forma bilineal simétrica.

Proposición 1.38 *Dadas Ω y J, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} g: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (e, f) & \longrightarrow & \Omega(e, J(f)) \end{array}$$

es una forma bilineal simétrica.

La forma simétrica g depende tanto de la estructura simpléctica como de la estructura compleja. Cualquier cambio en alguna de ellas, implica un cambio en g.

Propiedades elementales.

- La aplicación g es no degenerada, debido a que J es un isomorfismo. Con ayuda de g podemos definir un isomorfismo de E en su dual, que llamaremos polaridad asociada a g y la denotaremos por p_g.
- El endomorfismo J es una isometría respecto al producto escalar g.
- En general esta forma tiene signatura, pero todo espacio simpléctico tiene una estructura compleja compatible que hace que g sea un producto euclídeo. En realidad la estructura que hemos construido en la proposición 1.37 da lugar a una estructura euclídea.

Como hemos visto, a partir de Ω y de J podemos construir g. En general conociendo un par de datos de la terna (Ω, J, g) podemos reconstruir la estructura desconocida.

Proposición 1.39 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

- $g(e, f) = \Omega(e, J(f))$.
- $\Omega(e, f) = -g(e, J(f))$.
- $J = -\Omega^\sharp \mathsf{p}_g$.

Demostración.

La primera es justamente la definición de g. Para probar la segunda basta utilizar que J es una isometría

$$\Omega(e,f)=\Omega(J(e),J(f))=g(J(e),f)=g(J^2(e),J(f))=-g(e,J(f))$$

El operador $-\Omega^\sharp \mathsf{p}_g$ cumple

$$\Omega(-\Omega^\sharp \mathsf{p}_g(e),f)=-\Omega^\flat(\Omega^\sharp \mathsf{p}_g(e))(f)=-\mathsf{p}_g(e)(f)=-g(e,f)$$

que también lo verifica el operador J. Como la métrica es no degenerada ambos operadores deben coincidir. $\square$

Hemos visto en la sección 1.2 que todo espacio hermítico tiene asociado una métrica simpléctica. Es la parte imaginaria del producto hermítico. En realidad este ejemplo engloba a todos los casos, pues toda estructura simpléctica es en realidad la parte imaginaria de una estructura hermítica (salvo un signo).

Sea J una estructura compleja de tal forma que g sea un producto euclídeo. El producto escalar hermítico sobre un espacio simpléctico se define como

$$\langle\, e,f\,\rangle=g(e,f)-i\Omega(e,f)$$

Las condiciones que definen un producto hermítico se verifican fácilmente. Además la metrica es definida positiva por ser g euclídeo. Si el producto escalar g tiene signatura, el producto hermítico tiene también la misma signatura.

Problemas

1 Sea E un espacio vectorial de dimensión $2n$ y Ω una 2-forma. Demostrar que Ω es no degenerada si y solo si $\Omega^n=\Omega\wedge \overset{n)}{\ldots}\wedge\Omega$ es no nula. (Indicación: Utilizar coordenadas adaptadas a la forma Ω.)

2 Escribamos una matriz M por bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Encontrar las condiciones que tienen que cumplir las submatrices para que la matriz M sea simpléctica.

3 Sea (E, Ω_2) una geometría y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base. La matriz de Ω_2 en la base dada es la matriz cuadrada que tiene por componentes

$$\omega_{ij} = \Omega_2(e_i, e_j)$$

Esta matriz es antisimétrica.

4 Una matriz antisimétrica en dimensión impar tiene necesariamente determinante nulo.

5 Dada una geometría (E, Ω_2) construimos otra geometría sobre el mismo espacio vectorial. Dicha geometría la denotaremos por Ω_2^t y diremos que es la traspuesta de Ω_2. Se define por la fórmula

$$\Omega_2^t(e, f) = \Omega_2(f, e)$$

Relacionar las matrices de Ω_2 y de Ω_2^t construidas sobre una misma base.

6 Sea (E, J) una estructura compleja. Un subespacio real V que cumpla $J(V) \subset V$ es también un subespacio complejo. Si V es un subespacio complejo, entonces es un subespacio real y cumple que $J(V) \subset V$.

7 Sea $\{e_i\}$ una base de E y sea $\{\alpha_i\}$ la base dual, definida por las relaciones $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$. La matriz de la polaridad entre la base $\{e_i\}$ y su dual coindice con la matriz de Ω_2 en la base $\{e_i\}$.

8 Si el espacio es de dimensión finita, son equivalentes:

- La polaridad es inyectiva.

- La polaridad es un isomorfismo.

- La matriz de Ω_2 en una base es no singular.

9 Sea (E, Ω) una geometría no singular de dimensión $2n$.

- Si denotamos $(\Omega)^n = \Omega \wedge \overset{n)}{\cdots} \wedge \Omega$, probar que Ω^n es un elemento de volumen.

- Encontrar la expresión de $(\Omega)^n$ en función de la base canónica. Esto explica que normalmente se tome como elemento de volumen de una variedad simpléctica

$$\omega_n = \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} \cdot (\omega)^n$$

- Probar que toda isometría conserva el elemento de volumen. Concluir que toda isometría tiene determinante unidad. Esta es una versión reducida del teorema de Lioville de la mecánica clásica.

10 Dada una geometría singular, sea r el mayor número tal que $(\Omega)^r \neq 0$. Ver la relación de dicho número con el rango de la geometría.

11 Si la geometría es no singular, demostrar las afirmaciones:

- $(V^\perp)^\perp = V$.

- $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$.

- $V^\perp \cap V'^\perp = (V + V')^\perp$.

- $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$.

12 Un plano es hiperbólico si y solo si posee un pareja hiperbólica. Todos los planos hiperbólicos son isométricos.

13 Demostrar que todo espacio vectorial sobre un cuerpo k de dimensión par admite una estructura simpléctica no singular.

14 Sean Ω y Ω' dos métricas no singulares sobre un mismo espacio vectorial E. Demostrar que existe un automorfismo $\varphi : E \to E$ que cumple $\varphi^*(\Omega) = \Omega'$. Así, las estructuras simplécticas sobre un espacio vectorial son únicas salvo isomorfismos.

15 Sea $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ una base simpléctica.

- Demostrar que $V =< q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k >$ es un subespacio no singular. Todo subespacio no singular se puede obtener de este modo, eligiendo convenientemente la base simpléctica.

- $V =< p_1, \dots, p_k >$ y $V' =< q_1, \dots, q_k >$ son subespacios isótropos.

- $V =< p_1, \dots, p_n >$ y $V' =< q_1, \dots, q_n >$ son subespacios lagrangianos.

- Demostrar que toda geometría es isomorfa a la suma directa de dos subespacios lagrangianos. Probar que toda geometría simpléctica es isomorfa a $E \times E^*$ donde E es un subespacio lagrangiano.

16 Matricialmente el producto de dos vectores, en una base canónica, se calcula con la fórmula

$$\Omega(e, f) = e^t \cdot J \cdot f$$

17 Sea (E, Ω) una geometría no singular. Un endomorfismo $\varphi : E \to E$ es infinitesimalmente simpléctico si cumple

$$\Omega(\varphi(e), e') = \Omega(e, \varphi(e'))$$

Denotamos por $\mathfrak{sp}(E)$ al conjunto de todos los endomorfismos infinitesimalmente simplécticos de la geometría.

- $\mathfrak{sp}(E)$ es una subálgebra de Lie de $\text{End}(E)$.

- Matricialmente este subálgebra es

$$\mathfrak{sp}(E) = \{u \in \text{End}(E) \text{ tales que } u^t J + J u = 0\}$$

- Un endomorfismo $T \in \mathfrak{sp}(E)$ si y solo si $e^T \in \mathrm{Sp}(E)$.
- $\mathfrak{sp}(E)$ es el álgebra de Lie del grupo simpléctico.
- Si escribimos la matriz en forma de bloques de tamaño n

$$u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

  demostrar que $D = -A^t$ y que C y D son simétricas.
- Encontrar la dimensión del álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n)$.

18 Sea E un k-espacio vectorial dotado de una métrica simétrica y no degenerada. Denotamos por $\langle e, e' \rangle$ a dicho producto escalar. La polaridad asociada a este producto escalar establece un isomorfismo de E con su dual E^*.

- Demostrar que sobre $E \times E$ existe un estructura de espacio simpléctico dada por la fórmula

$$\Omega((e_1, e_2), (f_1, f_2)) = \langle\, f_2, e_1 \,\rangle - \langle\, f_1, e_2 \,\rangle$$

- Relacionar la estructura construida con la estructura canónica que tiene el espacio $E \times E^*$.

19 El grupo simpléctico actua de modo transitivo sobre el conjunto $E - \{0\}$.

- Demostrar que dados dos vectores e, f no nulos, existe un isomorfismo simpléctico φ que cumple

$$\varphi(e) = f$$

- Dados dos subespacios isótropos de la misma dimensión, demostrar que existe un isomorfismo simpléctico que transforma uno en el otro.
- Demostrar lo mismo para otro tipo de subespacios.

20 Son ciertas las afirmaciones:

- V es no singular si y solo si $V \cap V^{\perp} = 0$. Entonces $E = V \oplus V^{\perp}$.
- V es no singular si y solo si $V^{\perp}$ es no singular.
- V es isótropo si y solo si $V \subset V^{\perp}$. Su dimensión siempre es menor o igual que la mitad de la dimensión de la geometría.
- V es lagrangiano si y solo si es isótropo y su dimensión es la mitad de la dimensión de la geometría.

21 Tomando como analogía la composición de isomorfismos simplécticos definir la composición de relaciones canónicas lineales.

2. Variedades simplécticas

2.1. Propiedades topológicas

De ahora en adelante $\mathcal{V}$ será una variedad diferenciable de clase C^∞ y de dimensión $2n$. Las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}$ las denotaremos habitualmente por ∂x_i.

Definición 2.1 *Una* forma simpléctica *sobre $\mathcal{V}$ es una 2-forma ω definida sobre $\mathcal{V}$ y que cumple:*

- *Es cerrada, $d\omega = 0$.*
- *ω_x es no degenerada para todo $x \in \mathcal{V}$.*

Propiedades elementales.

- Si una variedad posee una forma simpléctica, cada espacio tangente tiene una geometría no singular y necesariamente su dimensión es par. La variedad es de dimensión par.
- Como ω es cerrada, es localmente exacta. En un entorno de cada punto existe una forma diferencial de grado uno, θ, que cumple $d\theta = \omega$. Decimos que θ es un potencial simpléctico de ω. Los potenciales simplécticos no son únicos: si a un potencial simpléctico le sumamos una forma cerrada α (por ejemplo una diferencial exacta) tenemos que

$$d(\theta + \alpha) = d(\theta) + d(\alpha) = \omega$$

Definición 2.2 *Una* variedad simpléctica *es un par $(\mathcal{V}, \omega)$ formado por una variedad $\mathcal{V}$ y una forma simpléctica ω.*

Ejemplos.

- Todo espacio vectorial simpléctico sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es una variedad simpléctica. Esta forma diferencial es cerrada pues es constante en las coordenadas lineales del espacio vectorial. Todo abierto de una variedad simpléctica es una variedad simpléctica con la forma restringida.

- En $\mathbb{R}^{2n}$ consideramos las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. La forma simpléctica "canónica" de este espacio es aquella que hace que las derivadas parciales sean una base simpléctica. La expresión de la forma simpléctica en estas coordenadas es

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$$

  Claramente esta forma es cerrada. Es más, esta forma es exacta, pues es la diferencial de $x_1 dy_1 + \cdots + x_n dy_n$.

- En dimensión 2 una forma simpléctica es lo mismo que un elemento de volumen. En efecto, por cuestiones de dimensión, cualquier 2-forma es necesariamente cerrada. Como el elemento de volumen es no nulo en cada punto, de nuevo por cuestiones de dimensión, la métrica inducida debe ser no degenerada. Toda superficie orientable es también una variedad simpléctica. Sin embargo una superficie no orientable no puede admitir una estructura simpléctica.

- Sean $(\mathcal{V}, \omega)$ y $(\mathcal{V}', \omega')$ dos variedades simplécticas. La forma de segundo grado $\pi^*(\omega) - \pi'^*(\omega')$ es una forma simpléctica en el producto de variedades $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$. Normalmente escribiremos la forma simpléctica como $\omega - \omega'$. Si en vez de la resta de las formas consideramos su suma, también tenemos una estructura simpléctica en el producto. Por ello cuando trabajemos con el producto de variedades debemos especificar claramente cual es la estructura simpléctica.

- Sea $\mathcal{V}'$ una subvariedad de $\mathcal{V}$. En general la forma restringida no induce en $\mathcal{V}'$ una estructura simpléctica, pues a pesar de ser cerrada, pueden existir puntos donde la métrica sea degenerada. Por ello decimos que $\mathcal{V}'$ es una **subvariedad simpléctica** si $T_x(\mathcal{V}') \subset T_x(\mathcal{V})$ es un subespacio simpléctico, para todo $x \in \mathcal{V}'$. De manera análoga se definen las subvariedades isótropas, coisótropas y lagrangianas.

La existencia de formas simplécticas sobre una variedad impone una serie de condicionantes de tipo topológico sobre dicha variedad. Asimismo pueden pensarse en dichas propiedades como obstrucciones topológicas a la existencia de estructuras simplécticas sobre una variedad. Lo ideal sería conocer condiciones necesarias y suficientes sobre una variedad para concluir la existencia de una estructura simpléctica sobre ella. De momento este problema no está resuelto.

Proposición 2.1 *Toda variedad simpléctica es orientable y tiene una orientación estandard.*

Demostración.

En cada punto x, la forma de grado $2n$, $(\omega_x)^n$ es no nula. Por lo tanto ω^n es un elemento de volumen. Dicho elemento induce una orientación en la variedad. $\square$

Observación. Consideremos $\mathbb{R}^{2n}$ con la estructura simpléctica estandar. La forma exterior $(\omega)^n$ es considerada por muchos autores como la forma de volumen canónica. Otros sin embargo consideran que la forma de volumen canónica es

$$\tau = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

que es un múltiplo de la anterior. En muchos razonamientos es irrelevante cual de las dos tomemos. $\square$

Proposición 2.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad compacta. Entonces ω^n no puede ser exacta.*

Demostración.

Supongamos que $\omega^n = d\tau$. El volumen de una variedad compacta se obtiene integrando la forma de volumen y siempre es un número finito y no nulo. Aplicando el teorema de Stokes y la hipótesis que hemos realizado

$$\int_{\mathcal{V}} \omega^n = \int_{\partial \mathcal{V}} \tau = \int_{\varnothing} \tau = 0$$

puesto que el borde de una variedad compacta es nulo. $\square$

Corolario 2.3 *Si $\mathcal{V}$ es compacta, la clase de cohomología $[\omega] \in H^2(\mathcal{V})$ no puede ser nula.*

Demostración.

Si la clase es nula, entonces ω es una diferencial exacta. Si $\omega = d\theta$, el elemento de volumen es exacto

$$\omega^n = d(\theta \wedge \omega^{n-1})$$

lo cual es contradictorio. □

Corolario 2.4 *En una variedad simpléctica los grupos de cohomología par no pueden ser nulos.*

Demostración.

Ya hemos visto que $[\omega]$ y que $[\omega]^n$ no son nulos. Las potencias intermedias tampoco pueden ser nulas. □

Como las esferas S^{2n}, con $n \geq 2$, tienen grupos de cohomología de orden par nulos, no pueden admitir estructuras simplécticas.

Corolario 2.5 *La variedad $\mathbb{R}^{2n}$ no tiene subvariedades compactas.*

Demostración.

Las subvariedades de $\mathbb{R}^{2n}$ tienen siempre formas simplécticas exactas, pues es exacta la forma de la variedad total. Esto no es compatible con la compacidad. □

Observación. Recordemos dos resultados de geometría riemanniana:

- Toda variedad diferenciable (se entiende que paracompacta) admite una métrica riemanniana.
- Cualquier variedad riemanniana se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^n$, donde el exponente depende de la variedad. Este es el teorema de inmersión de Nash.

Hemos visto que teoremas análogos no son posibles en la geometría simpléctica. $\square$

2.2. Aplicaciones simplécticas

En el estudio de la variedades simplécticas estamos interesados en las aplicaciones diferenciables que conserven la métrica. De estas aplicaciones las más interesantes son las que además son difeomorfismos.

Definición 2.3 *Dadas dos variedades* $(\mathcal{V}, \omega)$ *y* $(\mathcal{V}', \omega')$*, posiblemente de distinta dimensión, decimos que una aplicación diferenciable* $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ *es* simpléctica *si* $\varphi^*(\omega') = \omega$*.*

El caso más claro de aplicación simpléctica es la inyección canónica de una subvariedad (simpléctica). Esta definición nos lleva a ampliar el concepto de subvariedad simpléctica, tal como se hace en el estudio de las variedades generales.

Definición 2.4 *Llamamos* subvariedad simpléctica *de* $\mathcal{V}$ *a toda aplicación simpléctica inyectiva* $\varphi : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$*.*

Definición 2.5 *Sean* $(\mathcal{V}, \omega)$ *y* $(\mathcal{V}', \omega')$ *dos variedades simplécticas. Un difeomorfismo* $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ *es una* transformación canónica *si*

$$\varphi^*(\omega') = \omega$$

La composición de dos transformaciones canónicas es otra transformación canónica. Si φ es una transformación canónica, la aplicación inversa φ^{-1} es también una transformación canónica.

Definición 2.6 *Llamaremos* grupo simpléctico *de la variedad* $(\mathcal{V}, \omega)$ *al conjunto de todas las transformaciones canónicas de la variedad. Lo denotamos* $\mathrm{Sp}(\mathcal{V})$*.*

Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una aplicación diferenciable, no necesariamente un difeomorfismo, que cumpla $\varphi^*(\omega) = \omega$. Como conserva la forma simpléctica, también conserva el volumen y por lo tanto su determinante en todos los puntos debe ser 1. Haciendo uso del teorema de la función inversa hemos demostrado el

Corolario 2.6 *Toda aplicación diferenciable $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que conserve la forma simpléctica es un difeomorfismo local.*

Las aplicaciones φ que cumplen $\varphi^*(\omega) = \omega$ se llaman transformaciones canónicas locales, puesto que restringidas a un entorno son difeomorfismos. Las transformaciones canónicas locales no son más que las transformaciones canónicas entre abiertos de la variedad.

Proposición 2.7 *Un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es una transformación canónica si y solo su gráfico es una subvariedad lagrangiana de $(\mathcal{V}\times\mathcal{V}, \omega-\omega)$.*

Demostración.

El gráfico de φ

$$\mathrm{Gr}(\varphi) = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}' \text{ tales que } x_2 = \varphi(x_1)\}$$

es una subvariedad isomorfa a $\mathcal{V}$. Sea $x = (x_1, x_2)$ un punto de la variedad. El espacio tangente a esta variedad es precisamente

$$T_x(\mathrm{Gr}(\varphi)) = \{(e, e') \in T_x(\mathcal{V} \times \mathcal{V}') \text{ tales que } e' = \varphi_*(e)\}$$

Si φ es simplectomorfismo, la aplicación tangente en todo punto es un morfismo simpléctico. El espacio tangente a la subvariedad es un subespacio lagrangiano y la subvariedad es lagrangiana.

Recíprocamente, si la subvariedad es lagrangiana, la aplicación tangente en todo punto es un morfismo simpléctico. Como por hipótesis φ es difeomorfismo, esto implica que φ es una transformación canónica. □

Corolario 2.8 *Una aplicación diferenciable es una transformación canónica local si y solo si su gráfica es una subvariedad lagrangiana del producto.*

2.3. Coordenadas canónicas

Definición 2.7 *Dada $(\mathcal{V}, \omega)$ sean $\{x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ coordenadas en un abierto U. Se dice que estas coordenadas son* simplécticas *si*

$$\omega = d\xi_i \wedge dx_i$$

en el abierto en cuestión.

Estas coordenadas son muy cómodas, pues es ellas la forma simpléctica tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema, que no se demostrará ahora, es útil para estudiar localmente las variedades simplécticas.

Teorema 2.9 (de Darboux) *Cada punto $x \in \mathcal{V}$ tiene un entorno U_x donde se pueden introducir unas coordenadas simplécticas.*

Como en el caso lineal, las coordenadas simplécticas no poseen la característica de la unicidad.

La condición $d\omega = 0$ es crucial para que exista este sistema de coordenadas. Podemos considerar esta condición como el análogo a la anulación del tensor de curvatura de una métrica simétrica, ya que una métrica riemanniana se puede reducir en un entorno a su forma normal si y solo si su tensor de curvatura se anula.

Observación. Existe una generalización del teorema de Darboux. Sea α una 2-forma cerrada y degenerada, pero cuyo rango sea constante en todos los puntos de la variedad. Entonces existen, en un entorno de cada punto, unas coordenadas

$$(y_1, \ldots, y_a, x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots \xi_n)$$

tales que $\alpha = d\xi_i \wedge dx_i$. $\square$

2.4. Polaridad

Dada una variedad diferenciable cualquiera $\mathcal{V}$ denotamos por $\mathfrak{X}(\mathcal{V})$ al conjunto de todos los campos diferenciables sobre $\mathcal{V}$ y por $\bigwedge^1(\mathcal{V})$ el conjunto de 1-formas diferenciables sobre la variedad.

Definición 2.8 *Llamamos* polaridad *de la geometría simpléctica* $(\mathcal{V}, \omega)$ *a la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \omega^\flat : & \mathfrak{X}(\mathcal{V}) & \to & \bigwedge^1(\mathcal{V}) \\ & X & \to & X^\flat \end{array}$$

siendo $X^\flat$ *la forma lineal* $X^\flat(Y) = \omega(X, Y)$.

Proposición 2.10 *La polaridad es un isomorfismo de* C^∞*-módulos.*

Demostración.

En cada punto $x \in \mathcal{V}$ la polaridad de la métrica ω_x es un isomorfismo, puesto que la métrica es no degenerada en todo punto. Como punto a punto la aplicación es un isomorfismo, globalmente también lo es. Que conmuta con el producto de funciones es claro. □

Observación. Dado un campo X y una p forma diferencial α, denotamos por $i_X\alpha$ a la forma diferencial de grado $p-1$, que actua del siguiente modo

$$i_X\alpha(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$$

La operación i_X se dice que es la contracción interior con el campo X. Esta operación es una antiderivación de grado -1 en el álgebra de formas diferenciales, lo cual equivale a decir que cumple la propiedad

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\mathrm{grado}(\alpha)}\, \alpha \wedge (i_X\beta)$$

Con estos conceptos tenemos que $X^\flat = i_X\omega$. □

Como los dos espacios son isomorfos, la estructura de álgebra de Lie que poseen los campos se traslada a la formas diferenciales de grado uno, sin mas que definir

$$[X^\flat, Y^\flat] = [X, Y]^\flat$$

Sin embargo, y por razones históricas, la operación entre las formas se denomina paréntesis de Poisson y no paréntesis de Lie. Además se emplea otra notación. Un estudio más detallado del paréntesis de Poisson se realiza en el capítulo 4.

Si tenemos una 1-forma α, el campo que le corresponde mediante la polaridad lo denotamos $\alpha^\sharp$. Dada una función diferenciable $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V})$ su diferencial df es una 1-forma. A esta 1-forma le corresponde mediante la polaridad un campo vectorial que denotamos X_f en vez de $(df)^\sharp$. El campo que hemos construido se llama campo hamiltoniano asociado a f. La función f se llama hamiltoniano del campo. El hamiltoniano de un campo no es único y en las variedades conexas está indeterminado en una constante ($X_f = X_g$ si y solo si $df = dg$). El conjunto de todos los campos hamiltonianos se denota $\mathfrak{X}_h(\mathcal{V})$ y es un subespacio vectorial $\mathfrak{X}(\mathcal{V})$.

Observación. Esta construcción del campo hamiltoniano tiene su análogo en geometría riemanniana en la construcción del gradiente de una función. Recordamos que dada una métrica riemanniana g (o semi-riemanniana) existe una polaridad

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{p}: & \mathfrak{X}(\mathcal{V}) & \to & \bigwedge^1(\mathcal{V}) \\ & X & \to & i_X g \end{array}$$

El gradiente se define entonces como $\operatorname{grad}(f) = \mathsf{p}^{-1}(df)$. $\square$

Proposición 2.11 *Dadas unas coordenadas canónicas, se cumple*

$$\omega^\flat(\partial x_i) = -d\xi_i, \quad \omega^\flat(\partial \xi_i) = dx_i$$

Demostración.

Utilizando que la contracción interior con un campo es una antiderivación obtenemos

$$i_{\partial x_j}(\sum d\xi_i \wedge dx_i) = \sum (i_{\partial x_j} d\xi_i) \wedge dx_i - \sum d\xi_i \wedge (i_{\partial x_j} dx_i) = -d\xi_i$$

donde hemos utilizado que

$$i_{\partial x_j} d\xi_i = d\xi_i(\partial x_j) = 0 \qquad\qquad i_{\partial x_j} dx_i = dx_i(\partial x_j) = \delta_{ij}$$

Análogamente con el otro campo. $\square$

Leyendo esta proposición en el otro sentido tenemos

$$(d\xi_i)^\sharp = -\partial x_i, \quad (dx_i)^\sharp = \partial \xi_i$$

Utilizando que la operación es morfismo de módulos, se demuestra el

Corolario 2.12 *En coordenadas canónicas el campo X_f se expresa como*

$$X_f = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

El sistema dinámico al que da lugar tiene como ecuaciones

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial f}{\partial \xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

que son llamadas ecuaciones de Hamilton*.*

Corolario 2.13 *En coordenadas canónicas, el campo X_f se calcula mediante el producto matricial*

$$X_f = J \cdot df$$

2.5. Campos simplécticos

Entre todos los campos vectoriales que posee una variedad simpléctica, los más interesantes, aparte de los hamiltonianos, son aquellos que conservan la estructura simpléctica.

Definición 2.9 *Decimos que un campo X es* simpléctico *si*

$$X^L \omega = 0$$

El conjunto de todos los campos simplécticos lo denotamos $\mathfrak{X}_s(\mathcal{V})$.

Aplicando la fórmula $[X,Y]^L = [X^L, Y^L]$ demostramos que los campos simplécticos forman una subálgebra de lie del conjunto de todos los campos diferenciables de la variedad. Este álgebra es de dimensión infinita como prueba la

Proposición 2.14 *Todo campo hamiltoniano es simpléctico o lo que es lo mismo* $\mathfrak{X}_h(\mathcal{V}) \subset \mathfrak{X}_s(\mathcal{V})$.

Demostración.

Teniendo en cuenta la fórmula de Cartan para la derivada de Lie

$$X^L = i_X\, d + d\, i_X$$

obtenemos que

$$(X_f)^L(\omega) = i_{X_f} d(\omega) + d(i_{X_f}(\omega)) = 0 + d(df) = 0$$

pues el primer sumando es nulo por ser la forma simpléctica cerrada. □

Corolario 2.15 *Un campo X es simpléctico si y solo si $i_X\omega$ es una forma diferencial cerrada.*

Observación. Hemos visto que un campo X es hamiltoniano si y solo si $i_X\omega$ es exacta y que el campo es simpléctico si y solo $i_X\omega$ es cerrada. Por lo tanto en las variedades donde $H^1(\mathcal{V})$ sea nulo ambos conceptos coinciden. En el caso general debemos diferenciar ambos conceptos. □

Los campos localmente hamiltonianos no tienen que generar grupos uniparamétricos globales, pero en el caso que lo generen (por ejemplo si la variedad es compacta) tiene que ocurrir que cada τ_t sea una transformación canónica. Si solo genera un grupo local, los elementos del grupo serán transformaciones canónicas, pero de tipo local.

Ejemplos.

- Sea f una función de soporte compacto sobre una variedad simpléctica. Tanto df como X_f son también de soporte compacto. El campo hamiltoniano X_f genera un grupo uniparamétrico global.

- Sean X e Y dos campos simplécticos. El campo $[X, Y]$ es hamiltoniano. Para comprobarlo aplicamos la fórmula

$$i_{[X,Y]} = [X^L, i_Y]$$

válida en todo el álgebra exterior.

$$i_{[X,Y]}\omega = X^L(i_Y\omega) - i_Y(X^L\omega) = d(i_X i_Y \omega) = d(\omega(X, Y))$$

donde también hemos empleado la fórmula de Cartan $X^L = i_X d + d i_X$.

Observación. En lenguaje de las álgebras de Lie, hemos demostrado que $\mathfrak{X}_h(\mathcal{V})$ es un ideal de $\mathfrak{X}_s(\mathcal{V})$. El hamiltoniano asociado al campo $[X, Y]$ es la función $\omega(X, Y)$. $\square$

Problemas

22 Toda transformación canónica conserva el elemento de volumen y la orientación. Su jacobiano debe ser 1 en todo punto.

23 Probar la existencia de transformaciones canónicas locales utilizando el teorema de Darboux.

24 Sea ω una 2-forma cerrada sobre una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión $2n$. Entonces ω es simpléctica si y solo si $(\omega)^n$ es un elemento de volumen no nulo.

25 Sea X un campo localmente hamiltoniano. Demostrar que todo punto tiene un entorno donde el campo X es hamiltoniano.

26 Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial simpléctico o un entorno dotado de coordenadas canónicas. Denotamos $z_j = x_j + i\xi_j$. Con esta notación las ecuaciones de Hamilton se escriben

$$\dot{z}_j = -2i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$$

donde hemos denotado

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) /2$$

27 El conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de la forma $(x^2 + y^2 + 1) dx \wedge dy$ es una variedad simpléctica. Calcular el campo hamiltoniano de una función f en las coordenadas standard de $\mathbb{R}^2$.

28 Consideremos el espacio $\mathbb{C}^n$ con coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$.

- La forma
$$\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$$
es una forma simpléctica.
- Si $z_k = x_k + iy_k$, expresar dicha forma en las coordenadas reales.

29 Sea S^2 la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de los vectores de norma unidad. El espacio tangente en un punto $x \in S^2$ está contenido en $\mathbb{R}^3$ y es precisamente el espacio ortogonal a x. A cada punto $x \in S^2$ le asociamos la forma

$$\omega_x(e, f) = g(x, e \times f)$$

donde g denota la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y $\times$ el producto vectorial asociado.

- En todos los puntos ω_x es no degenerada.
- La forma ω es diferenciable.
- La forma ω es cerrada.

30 Dos k-formas diferenciales α y α' son cohomólogas si existe otra forma μ que cumple $\alpha - \alpha' = d\mu$. Sean ω y ω' dos formas simplécticas en una variedad $\mathcal{V}$.

- Todo punto $x \in \mathcal{V}$ posee un entorno donde dichas formas son cohomólogas. Por lo tanto, localmente, es cierta la fórmula

$$\omega - \omega' = d\mu \text{ donde } \mu \text{ es una forma de grado 1}$$

- Si el primer grupo de cohomología de de Rham es nulo, cualquier par de formas simplécticas son cohomólogas.

3. Construcción de variedades simplécticas

3.1. El fibrado cotangente

El siguiente ejemplo de variedad simpléctica es el que motivó el estudio general de estas entidades. Tiene interés en si mismo, pues es el marco donde se describe la mecánica clásica no relativista con un número finito de grados de libertad.

Asociada a toda variedad $\mathcal{V}$ existe otra variedad de dimensión doble que la de partida. En esta variedad, llamada fibrado cotangente, existe una estructura simpléctica natural. Las comprobaciones rutinarias (generalmente comprobación de la diferenciabilidad de ciertos objetos) se dejan a cargo del lector.

Sea $T_x^*(\mathcal{V})$ el espacio tangente a $\mathcal{V}$ en el punto x. Consideremos el conjunto

$$T^*(\mathcal{V}) = \bigcup_{x\in\mathcal{V}} T_x^*(\mathcal{V})$$

En este conjunto existe una aplicación canónica

$$\pi : T^*(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$$

dada por $\pi(\omega_x) = x$. La función π asigna a cada 1-forma "el punto donde está aplicado". Claramente π es epiyectiva. Para definir un elemento de $T^*(\mathcal{V})$ hay que dar:

- El punto donde está aplicado el covector, que consiste en enumerar n coordenadas, siendo n la dimensión de la variedad.
- Las componentes del covector en una base del espacio cotangente. Esto implica otras n coordenadas.

Como para definir un punto de $T^*(\mathcal{V})$ necesitamos $2n$ parámetros, todo parece indicar que en $T^*(\mathcal{V})$ habrá una estructura de variedad de dimensión $2n$. Sin embargo para construir la estructura de variedad debemos dotar al conjunto de una topología. Los haremos utilizando coordenadas, pero la construcción es independiente de las coordenadas que tomemos.

Sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ coordenadas locales en un abierto U, que establecen un difeomorfismo de U con un abierto $\overline{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Vamos a establecer una biyección de $\pi^{-1}(U)$ con un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Sea $\omega_x \in \pi^{-1}(U)$. Entonces $x \in U$. Por lo tanto ω_x puede expresarse como

$$\omega_x = \xi_i(x) dx_i$$

Asociando al elemento $\omega_x \in \pi^{-1}(U)$ las $2n$ coordenadas

$$\{x_1(x), \ldots, x_n(x), \xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$$

tenemos una biyección de $\pi^{-1}(U)$ con $\overline{U} \times \mathbb{R}^n$.

Queremos que esta biyección sea un homeomorfismo. Por lo tanto introducimos en $T^*(\mathcal{V})$ la topología menos fina que hace que todas las biyecciones anteriores (una biyección para cada sistema de coordenadas local) sean continuas.

Dotado de esta topología y tomando como cartas locales las biyecciones antes descritas, $T^*(\mathcal{V})$ es una variedad diferenciable. Las coordenadas en el abierto $\pi^{-1}(U)$ se notan (x, ξ) cometiendo un abuso de notación.

$T^*(\mathcal{V})$ es unión numerable de compactos si $\mathcal{V}$ lo es, pues tomando un atlas con un conjunto numerable de cartas, podemos "'subir" este atlas al espacio de fases. Así $T^*(\mathcal{V})$ es paracompacta si $\mathcal{V}$ lo es. Esto nos asegura la existencia de particiones de la unidad en el espacio de fases.

Dotado de esta estructura diferenciable, la aplicación se describe en coordenadas locales como

$$\pi(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

lo que prueba que es diferenciable en coordenadas y por lo tanto es diferenciable globalmente. Además π es rango constante n.

Se tiene por construcción que $\pi^{-1}(x) = T^*_x(\mathcal{V})$. Este conjunto se llama **fibra** sobre el punto x y debido a la regularidad de π es una subvariedad del espacio de fases.

Del mismo modo que hemos construido $T^*(\mathcal{V})$ podríamos construir el llamado **fibrado tangente**, sin más que sustituir $T_x^*(\mathcal{V})$ por $T_x(\mathcal{V})$ y dx_i por ∂x_i. También se pueden construir fibrados tensoriales, tomando como fibra del punto x un espacio de tensores en ese punto.

3.2. Forma de Liouville

En el fibrado cotangente existe una 1-forma canónica llamada forma de Liouville. Su diferencial exterior es una forma simpléctica. Normalmente dicha forma se construye en coordenadas y posteriormente se comprueba que la construcción es independiente de las coordenadas empleadas. Nosotros construiremos dicha forma sin emplear coordenadas.

Sea ω_x un elemento de $T^*(\mathcal{V})$ y sea Y_{ω_x} un vector tangente en ese punto. Definimos θ mediante la fórmula

$$\theta(Y_{\omega_x}) = \omega_x(\pi_*(Y_{\omega_x}))$$

siendo π_* la aplicación lineal tangente en el punto adecuado. Es evidente que en cada punto θ es una aplicación lineal. Lo que no es claro, en principio, es su diferenciabilidad.

Otra forma, prácticamente similar, de construir esta forma es

$$\theta_p = \pi^*(\omega_x) \text{ siendo } p = (x, \omega_x)$$

siendo ahora π^* la aplicación cotangente (en el punto p).

Para comprobar la diferenciabilidad podemos hacer uso de coordenadas locales, pues el ser diferenciable es una cuestión local. Simples comprobaciones nos dan que

$$\theta = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n$$

lo que implica que en efecto la forma es diferenciable. La 1-forma que acabamos de construir se denomina **forma de Liouville**.

Consideramos ahora la 2 forma $\omega = d\theta$. Esta forma es cerrada por ser exacta y además es no degenerada puesto que en coordenadas locales se expresa como

$$\omega = d\xi_i \wedge dx_i$$

En el fibrado cotangente el teorema de Darboux es inmediato. Tomando coordenadas x_i en la variedad $\mathcal{V}$, podemos "subir" las coordenadas al espacio de fases y nos da unas coordenadas $(x_, \xi_i)$. Sin embargo pueden existir coordenadas canónicas que no se obtengan de este modo.

3.3. Transformaciones canónicas puntuales

Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria, y $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo de la variedad. Esta aplicación la podemos "subir" al espacio de fases:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & T^*(\mathcal{V}) & \to & T^*(\mathcal{V}) \\ & \omega_x & \to & (\varphi_x)^*(\omega_x) \end{array}$$

donde $(\varphi_x)^*$ denota la aplicación cotangente a φ en el punto x.

Definición 3.1 *φ^* se llama* aplicación cotangente *del difeomorfismo φ.*

La notación empleada para la aplicación cotangente y para la imagen inversa con el morfismo φ son iguales. El contexto nos aclarará cual es en cada caso.

- Esta función hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*(\mathcal{V}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*(\mathcal{V}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

- φ^* es biunívoca pues la aplicación cotangente es biunívoca en todo punto, dado que φ es un difeomorfismo.

- Se cumple que $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}_{T^*(\mathcal{V})}$ y que $(\varphi\phi)^* = \phi^*\varphi^*$.

- φ^* es de clase $\mathbb{C}^\infty$ como se comprueba fácilmente usando coordenadas locales. Por tanto φ^* es un difeomorfismo cuyo inverso es justamente $(\varphi^{-1})^*$.

- Si $\varphi^* = \mathrm{Id}$ entonces $\varphi = \mathrm{Id}$ utilizando el diagrama conmutativo anterior.

- φ^* conserva la forma simpléctica y es por lo tanto una transformación canónica (vease problema 37).

Definición 3.2 *Un difeomorfismo de la forma φ^* para cierto $\varphi \in \mathrm{Dif}(\mathcal{V})$ se denomina* transformación canónica puntual.

La aplicación de $\mathrm{Dif}(\mathcal{V})$ en $\mathrm{Dif}(T^*(\mathcal{V}))$ que manda a φ hasta φ^* es un antimorfismo de grupos inyectivo. De esta manera $\varphi \to (\varphi^{-1})^*$ es un morfismo de grupos inyectivo. Su imagen está contenida en el grupo simpléctico del fibrado cotangente.

Si X es un campo en $\mathcal{V}$ que genera un grupo uniparamétrico τ_t, podemos subir este grupo uniparamétrico al fibrado cotangente donde obtenemos el grupo τ^*_{-t}. Este grupo generará un campo en el fibrado cotangente que denotamos X^*. X^* es el campo cotangente asociado a X. Naturalmente X^* es un campo simpléctico.

Veamos que aunque X no genere un grupo global, podemos asociarle a X el campo cotangente. Primero calculamos X^* en coordenadas locales. Si $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces

$$X^* = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

donde las b_i se pueden conocer sin más que tener en cuenta que X^* es un campo simpléctico. Aplicando que $(X^*)^L(\omega) = 0$ obtenemos

$$b_i = -\xi_h \frac{\partial a_h}{\partial x_i}$$

De esta forma podemos subir un campo cualquiera en un dominio coordenado. Se ve que en la intersección de dominios coordenados los campos así construidos coinciden y entonces es lícito afirmar que a cada campo le podemos asociar un campo cotangente aunque no genere un grupo global.

Por ser el paréntesis de Lie una operación de tipo local, podemos comprobar que la asociación $X \to X^*$ es un morfismo de álgebras de Lie inyectivo. Ello quiere decir que $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$. En particular esto demuestra que los campos localmente hamiltonianos cierran un álgebra de Lie de dimensión infinita si la variedad simpléctica es un espacio de fases.

3.4. Estructuras complejas

Además de los espacios de fase, existen en matemáticas otro ejemplo remarcable de variedades simplécticas. Para estudiar esta teoría en profundidad deberíamos conocer el concepto de variedad compleja. Sin embargo nos quedaremos en un escalón ligeramente inferior y estudiaremos las estructuras casi-complejas, que utilizan solamente la teoria de variedades diferenciables reales.

Definición 3.3 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Una* estructura compleja *en $\mathcal{V}$ es un campo de endomorfismos J que cumple $(J_x)^2 = -\operatorname{Id}$ para todo $x \in \mathcal{V}$.*

Llamamos variedad casi-compleja *al par $(\mathcal{V}, J)$.*

Toda variedad casi-compleja es de dimensión par y el espacio tangente en todo punto tiene una estructura compleja.

El ejemplo más claro de variedad casi-compleja es el de variedad compleja que no es otra cosa que un espacio localmente isomorfo a $\mathbb{C}^n$ y donde las funciones de transición son funciones holomorfas.

Sin embargo nosotros nos restringiremos al caso de variedades reales (de ahí el prefijo "casi" que utilizamos).

Definición 3.4 *Sea $(\mathcal{V}, \omega)$ una variedad simpléctica. Una estructura compleja J es* compatible *con la estructura simpléctica si la aplicación*

$$g(X, Y) = \omega(X, J(Y))$$

es una métrica riemanniana en la variedad.

Generalizando el resultado dado para las estructuras complejas sobre espacios lineales tenemos

Proposición 3.1 *Toda variedad simpléctica tiene una estructura casi-compleja compatible.*

Demostración.

La demostración puede hallarse en [**?**]. $\square$

Sabemos que la parte imaginaria de una estructura hermítica es una forma simpléctica. Para no introducir nuevas nociones sobre estructuras hermíticas diferenciables utilizaremos la siguiente definición, que el lector puede comprobar que en el caso lineal coincide con definición estandar (ver sección 1.13).

Definición 3.5 *Una* métrica hermítica *sobre una variedad casi compleja* $(\mathcal{V}, J)$ *es una métrica riemanniana* g *que además cumple*

$$g(X, Y) = g(J(X), J(Y))$$

para cualquier par de campos de la variedad.

Proposición 3.2 *Toda variedad casi-compleja admite una métrica hermítica.*

Demostración.

Sea T_2 una métrica riemanniana arbitraria, que existe por ser ser la variedad paracompacta. Sea entonces

$$g(X, Y) = T_2(X, Y) + T_2(J(X), J(Y))$$

Entonces g es una métrica hermítica. $\square$

Definición 3.6 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con una métrica hermítica g. Denominamos* forma fundamental *a la 2-forma ϕ definida como*

$$\phi(X, Y) = g(X, J(Y))$$

Basandonos en la definición de g se prueba que ϕ es antisimétrica y además es no degenerada pues g es no degenerada y J es un automorfismo en todo punto.

Tenemos entonces una 2-forma sin radical. Puede ocurrir sin embargo que no sea cerrada. En el caso de que si sea cerrada tendremos una variedad simpléctica. Estas variedades tienen un nombre especial. Se llaman variedades casi-Kähler. Si las variedades son complejas se denominan simplemente variedades de Kähler.

Los ejemplos más famosos de variedades Kähler son el espacio proyectivo complejo y sus subvariedades complejas. Pero esto no lo probaremos en estas notas (ver [?]).

3.5. Estructuras homogéneas

El ejemplo típico de estas variedades son los espacios de fases. Además de la estructura simpléctica, los espacios de fase tienen la propiedad de que la forma simpléctica admite una primitiva global. Esta es la conocida forma de Liouville.

Si nos restringimos al complementario de la sección nula, la forma de Liouville es regular (o sea, no nula) en todos los puntos.

La importancia de las variedades homogéneas se debe también a que a cada variedad de contacto se le puede asociar, de modo functorial, una variedad homogénea, reduciendo muchos problemas de las variedades de contacto a las variedades simplécticas. Por eso estas estructuras son muy importantes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Por último, lo que nosotros llamaremos variedad homogénea se denomina en otros libros variedad simpléctica exacta.

Definición 3.7 *Una* forma simpléctica homogénea *o* forma de Liouville *es una*

1-*forma* θ *que cumple:*

- *Es no nula en todo punto.* $(\theta)_x \neq 0$ *para todo* x.
- $d\theta$ *es una forma simpléctica.*

Al par $(\mathcal{V}, \theta)$ *lo denominamos* variedad simpléctica homogénea.

Toda estructura homogénea induce una estructura simpléctica, pero el reciproco solo es cierto localmente, tal como afirma el lema de Poincaré.

De ahora en adelante denotaremos ω a $d\theta$. Debemos darnos cuenta de que varias estructuras homogéneas pueden dar lugar a la misma estructura simpléctica. Como en el caso simpléctico solo son susceptibles de poseer una estructura homogénea las variedades de dimensión par.

Definición 3.8 *Sea* $(\mathcal{V}, \theta)$ *una variedad homogénea. Un sistema de coordenadas* $\{x_i, \xi_i\}$ *en un abierto* U *es un sistema de* coordenadas canónicas homogéneas *si en esas coordenadas se cumple*

$$\theta = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n$$

Todo sistema de coordenadas canónicas homogéneas es también un sistema de coordenadas canónicas para la variedad simpléctica. Sin embargo, en general, el recíproco no es cierto.

Teorema 3.3 (de Darboux) *Todo punto de una variedad homogénea posee un entorno donde se pueden definir coordenas canónicas homogeneas.*

Demostración.

Nos remitimos a [?]. □

Tampoco aquí existe un teorema global de Darboux.

Definición 3.9 *Llamaremos* campo de homogeneidad *o* campo de Liouville *de* $(\mathcal{V}, \theta)$ *al campo* D *que cumple*

$$i_D \omega = \theta$$

Como θ no es nunca nula el campo de homogeneidad tampoco es nunca nulo. Recordando que $p^{-1}(dx_i) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, en coordenadas canónicas

$$D = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

Proposición 3.4 *Con las notaciones anteriores se cumple:*

- $i_D \theta = 0$
- $D^L \theta = \theta$
- $D^L \omega = \omega$
- $i_D \omega = \theta$
- $D(x_i) = 0$
- $D(\xi_i) = \xi_i$

Definición 3.10 *Sean* $(\mathcal{V}, \theta)$ *y* $(\mathcal{V}', \theta')$ *dos estructuras homogéneas. Una* transformación canónica homogénea *es un difeomorfismo*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

que cumple $\varphi^*(\theta') = \theta$.

En el caso en que las dos variedades coincidan hablaremos de automorfismo simpléctico homogéneo. Los automorfismos simplécticos homogéneos forman un grupo respecto a la multiplicación. Es un subgrupo del grupo simpléctico asociado, debido a que la imagen inversa conmuta con la diferencial exterior.

En el caso en que el automorfismo sea entre abiertos de las variedades, nos referiremos a él como transformación canónica homogénea local.

Definición 3.11 *Un campo* X *que cumpla* $X^L \theta = 0$ *es una* transformación homogénea infinitesimal.

Aplicando la fórmula $[X,Y]^L = [X^L, Y^L]$ se comprueba que forman una subálgebra de Lie. Como la derivada y la diferencial exterior conmutan, toda transformación homogénea infinitesimal es un campo localmente hamiltoniano.

Definición 3.12 *Sea D el campo de homogeneidad de la variedad homogénea. Un campo tensorial T se dice que es homogéneo de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si cumple*

$$D^L(T) = mT$$

Ejemplos.

- x_i es homogénea de grado 0. ξ_i es homogénea de grado 1.
- D es un campo homogenéo de grado 0 pues $D^L(D) = 0$.
- ω y θ son homogéneos de grado 1.
- La diferencial exterior conserva el grado. Si α es de grado m, entonces $d\alpha$ tambíen tiene grado m.
- Las transformaciones homogéneas conservan el grado.

Proposición 3.5 *Se cumple*

$$D^L(X_f) = X_{Df-f}$$

$$D\{f,g\} = \{D(f),g\} + \{f,D(g)\} - \{f,g\}$$

Demostración.

Al lector. $\square$

Corolario 3.6 *Si f es homogénea de grado m, entonces X_f es homogéneo de grado $m-1$.*

Si f es homogénea de grado r y g es homogénea de grado s, entonces $\{f,g\}$ es homogénea de grado $r+s-1$.

Problemas

31 Demostrar:

- Todo punto del espacio de fases posee un entorno donde se pueden introducir coordenadas canónicas. Para obtener este resultado no es necesario aplicar el teorema de Darboux.

- Si el espacio de configuración $\mathcal{V}$ admite un sistema de coordenadas global, entonces el espacio de fases $T^*(\mathcal{V})$ también. ¿Será cierto el recíproco?

- El espacio de fases es siempre una variedad orientable. Toda transformación canónica conserva el volumen de este espacio. Este resultado se conoce como teorema de Liouville.

32 El teorema de Darboux nos dice que toda variedad simpléctica es localmente isomorfa a un fibrado cotangente. Considerando variedades compactas, demostrar que existen variedades simplécticas que no son globalmente isomorfas a fibrados cotangentes.

33 Demostrar que el espacio de fases no es nunca una variedad compacta.

34 Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica compacta:

- La forma simpléctica no puede ser exacta. Si esto ocurriera, la forma de volumen también sería exacta y entrañaría una contradicción aplicando el teorema de Stokes.

- Si denotamos por $[\alpha]$ la clase de cohomología de una forma α, demostrar que $[\omega] \in H^2(\mathcal{V})$ no puede ser nulo.

- Como $[(\omega)^n] = [\omega]^n$, la clase de cohomología del elemento de volumen no puede ser nula.

35 Comprobar que en la construcción del atlas sobre el espacio de fases, las funciones de transición son en efecto diferenciables. Comprobar también que la construcción es independiente del atlas que tomemos.

36 Una sección del espacio de fases es una función

$$s : \mathcal{V} \to T^*(\mathcal{V})$$

que cumple $\pi \cdot s = \mathrm{Id}$. De este modo $s(x)$ es una forma diferencial sobre el punto x. Una sección asocia a cada punto x una 1-forma en ese punto. Demostrar, utilizando coordenadas locales, que existe una correspondencia biunívoca entre 1-formas en la variedad y secciones diferenciables del espacio de fases.

Hacer lo mismo con el fibrado tangente.

37 Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo.

- Probar que $\varphi^* : T^*(\mathcal{V}) \to T^*(\mathcal{V})$ conserva la forma de Liouville.

- Probar que conserva la forma simpléctica y que por lo tanto es una transformación canónica en el espacio de fases.

38 Demostrar que los campos X^* y X están relacionados por el morfismo π.

Supongamos que X^* genera un grupo global. ¿Podemos afirmar que X genera también un grupo global?

39 Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria y X un campo vectorial. Asociado a este campo tenemos la función

$$\xi_X : T^*(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$$

definida por $\xi_X(\omega_x) =< X_x, \omega_x >=< X_{\pi(\omega_x)}, \omega_x >$.

- Probar que ξ_X es diferenciable. Calcular su expresión en coordenadas.

- Denotamos por $\bar{X}$ el campo cuyo hamiltoniano es ξ_X. Ver la relación entre este campo y el campo cotangente X^*.

- Realizar esta construcción con el campo $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

40 Sea α una 1-forma sobre la variedad $\mathcal{V}$. Entenderemos dicha forma como una sección $\alpha : \mathcal{V} \to T^*(\mathcal{V})$ del espacio de fases. Si θ es la forma de Liouville tenemos que $\alpha^*(\theta) = \alpha$ donde el asterisco denota la imagen inversa. Además la forma de Liouville es la única forma sobre el espacio de fases que cumple dicha propiedad para toda 1-forma α definida en el espacio de configuración $\mathcal{V}$.

41 Sea $\mathcal{V}$ una variedad riemanniana (o semiriemanniana). La polaridad asociada a esta métrica permite establecer un difeomorfismo entre los fibrados cotangente y tangente de la variedad. De este modo el fibrado tangente de una variedad riemanniana tiene una estructura simpléctica. Debemos notar que la estructura de variedad simpléctica en el fibrado cotangente es "natural", pero la estructura simpléctica en el fibrado tangente depende de la métrica riemanniana que hayamos adoptado.

42 Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial simpléctico E.

- $T^*(\mathcal{V}) = E \times E^*$.
- La estructura simpléctica como espacio de fases, coincide con la estructura simpléctica natural definida en $E \times E^*$.

43 Sea φ una transformación canónica y f un hamiltoniano. Encontrar la relación entre los campos X_f y $X_{f\circ\varphi}$.

44 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ variedades. $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ la variedad producto. Demostrar que se tiene un isomorfismo canónico

$$T^*(\mathcal{V} \times \mathcal{V}') = T^*(\mathcal{V}) \times T^*(\mathcal{V}')$$

Se dice que un problema físico es **separable** si el espacio de configuración es el producto de dos variedades, $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$, y el hamiltoniano h se puede expresar (de modo no único) como $h = h + h'$ donde h es una función sobre $\mathcal{V}$ y h' es una función sobre $\mathcal{V}'$.

Ver las razones por las que el estudio de los problemas separables es más simple que el caso general y deducir que nombre de separable le va como anillo al dedo.

Demostrar que toda función sobre $\mathcal{V}$ conmuta con toda función sobre $\mathcal{V}'$ (una vez subidas al espacio de fases).

45 Es siguiente argumento prueba que una variedad homogénea no puede ser compacta.

Sabemos que una variedad homogénea es orientable pues en particular es simpléctica. Tenemos que $(d\theta)^n = d(\theta \wedge (d\theta)^{n-1})$. La forma de volumen es exacta y aplicando el teorema de Stokes concluimos.

46 Sea φ un automorfismo simpléctico homogéneo.

- Entonces
$$\varphi'(D) = D$$
donde D es el campo de Lioville.

- Si f es homogénea, entonces $f \circ \varphi$ también lo es. Generalizar el resultado a tensores.

- El campo X_f es una transformación canónica homogénea si y solo si df es homogénea de grado 1.

- Si ω es una k-forma homogénea, entonces $d\omega$ y $i_D\omega$ también son formas homogéneas.

47 Sean θ y θ' dos formas homogéneas que definan la misma estructura simpléctica. Probar que en general los grupos simplécticos homogéneos dependen de θ y de θ'.

Subvariedades lagrangianas

Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una subvariedad $L \subset \mathcal{V}$ es lagragiana si el espacio tangente en todo punto a la subvariedad es isótropo y además $\dim(L) = n = \dim(\mathcal{V})/2$.

- La sección nula del fibrado cotangente tiene como imagen una subvariedad del espacio de fases. La forma de Lioville en esa subvariedad es nula. La subvariedad es lagrangiana.

- Si entendemos las 1-formas como secciones del fibrado cotangente $T^*(\mathcal{V})$, la imagen de cualquier 1-forma es una subvariedad de dimensión n del espacio de fases. Dicha subvariedad es difeomorfa al espacio de configuración $\mathcal{V}$ mediante la proyección canónica.

- Dada una 1-forma α sobre una variedad, denotamos por $s_\alpha : \mathcal{V} \to T^*(\mathcal{V})$ la correspondiente sección. Con esta notación se cumple

$$(s_\alpha)^*\theta = \alpha$$

- La imagen de una sección dada por una 1-forma es lagrangiana si y solo si la forma es cerrada.

- Toda función f da lugar a una subvariedad lagrangiana asociada a su diferencial df. Dicha función se llama función generadora de la subvariedad.

- Sea $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ una subvariedad de dimensión r. El espacio tangente en $x \in \mathcal{V}'$ a la subvariedad es un subespacio de $T_x(\mathcal{V})$. Denotamos por $T^0_x(\mathcal{V}')$ el incidente de ese subespacio. El incidente es un subespacio del espacio dual. Llamamos fibrado incidente a $\mathcal{V}'$ al conjunto

$$\begin{aligned} N^*(\mathcal{V}') &= \cup_{x \in V'} T^0_x(\mathcal{V}') \\ &= \{(x, \omega_x) \in T^*(V) \text{ tales que } x \in \mathcal{V}', \omega_x \in T^0_x(\mathcal{V}')\} \end{aligned}$$

- El fibrado incidente de una subvariedad es una subvariedad del espacio de fases. Si tomamos coordenadas $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ en el la variedad de tal forma que $\mathcal{V}'$ sea el conjunto definido por las ecuaciones

$$x_{r+1} = 0, \cdots, x_n = 0$$

entonces el fibrado incidente tiene por ecuaciones

$$x_{r+1} = 0, \cdots, x_n = 0, \xi_1 = 0, \cdots, \xi_r = 0$$

- El fibrado incidente de una subvariedad es una subvariedad lagrangiana.

- Sea $V \ominus V'$ la variedad producto dotada de la forma simpléctica $\omega - \omega'$. Este producto de variedades simplécticas es una variedad simpléctica.

- Dado un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ denotamos por T^*_φ si gráfica, que es el subconjunto de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$

  $$T^*_\varphi = \{(x, \varphi(x)), x \in \mathcal{V}\}$$

  La gráfica de un difeomorfismo es una subvariedad de $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}'$ difeomorfa a $\mathcal{V}$.

- T^*_φ es lagrangiana si y solo si φ es un difeomorfismo simpléctico. Toda subvariedad lagrangiana de $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}'$ se llama relación canónica.

4. Paréntesis de Poisson. Invariantes

4.1. Paréntesis de Poisson de funciones

En una variedad simpléctica existe una identificación entre el conjunto de campos vectoriales y el de 1-formas. Dadas dos formas α y α', este isomorfismo da sentido a la expresión $\{\alpha, \alpha'\}$, que es lo que hemos denominado paréntesis de Poisson. Utilizando campos hamiltonianos, se puede extender este concepto y definir un paréntesis entre funciones.

Definición 4.1 *Sean $f, g \in C^\infty(\mathcal{V})$. Llamamos* paréntesis de Poisson *y denotamos $\{f, g\}$ a la función*

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$$

Propiedades elementales.

- La definición es un tanto extraña debido al signo menos. Ello se debe a que nosotros tomamos como forma simpléctica en el espacio de fases $d\theta$ y no su opuesta, que es lo que se hace en otros libros. De esta forma nuestra definición de paréntesis coincide en signo con la definición clásica adoptada en los libros de Mecánica.

- Existe una definición alternativa del paréntesis

  $$\{f, g\} = X_f(g)$$

  que pasamos a comprobar

  $$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g) = \omega(X_g, X_f) = i_{X_g}\omega(X_f) = dg(X_f) = X_f(g)$$

  donde hemos utilizado que $i_{X_g}\omega$ es igual a dg.

- El paréntesis de Poisson es una operación bilineal (sobre $\mathbb{R}$) y antisimétrica. En particular se cumple

  $$\{f, g\} = -\{g, f\} \qquad \{f, \lambda g + g'\} = \lambda\{f, g\} + \{f, g'\}$$

- Además, utilizando la definición alternativa, se comprueba fácilmente la propiedad
$$\{f, g \cdot g'\} = \{f, g\} \cdot g' + g \cdot \{f, g'\}$$
que nos dice que el paréntesis de Poisson cumple la regla de Leibniz para la derivación de productos.

- Precisamente el cambio de signo que hemos adoptado, nos garantiza que no exista cambio de signo en la siguiente propiedad
$$d\{f, g\} = \{df, dg\}$$

Por construcción, el paréntesis de Poisson es un operación local. Se puede restringir a cualquier abierto o aplicarlo simplemente a gérmenes de funciones. Ello nos permite preguntarnos cual será la expresión del corchete de Poisson en coordenadas locales.

Proposición 4.1 *En coordenadas canónicas tenemos*
$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$

Demostración.

Tenemos que en coordenadas locales
$$X_f(g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) (g)$$
lo que demuestra el enunciado. □

Proposición 4.2 *El paréntesis de Poisson introduce en $C^\infty(\mathcal{V})$ una estructura de álgebra de Lie. La dimensión de ese álgebra es infinita.*

Demostración.

Tenemos que
$$\{f, \{g, h\}\} = X_f(\{g, h\}) = X_f(X_g(h))$$

Análogamente

$$\{g,\{h,f\}\} = X_g(\{h,f\} = -X_g(X_f(h))$$

Si utilizamos que $d\{f,g\} = \{df, dg\}$ obtenemos

$$\{h,\{f,g\}\} = -X_{\{f,g\}}(h) = -[X_f, X_g](h)$$

Sumando las tres expresiones de la derecha y recordando que por la definición de paréntesis de Lie $[X,Y] = XY - YX$ obtenemos

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

que es la identidad de Jacobi. □

La proposición **??** no dice ahora que la diferencial exterior es un morfismo de álgebras de Lie. Su núcleo está formado por las funciones localmente constantes. En particular, si la variedad es conexa, el núcleo es $\mathbb{R}$.

Corolario 4.3 *La correspondencia $f \to X_f$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Esto demuestra la existencia de transformaciones canónicas infinitesimales no triviales en cualquier variedad simpléctica. Si en particular la variedad es compacta, todos estos campos generan grupos uniparamétricos globales, que estarán formados por transformaciones canónicas.

Definición 4.2 *Dos funciones f, están en* involución *si $\{f,g\} = 0$.*

Como $\{f,g\} = X_f(g)$, si dos funciones están en involución, g es integral primera del campo X_f y viceversa.

Proposición 4.4 *Si f está en involución con g y con h, entonces está en involución con $\{g,h\}$*

Demostración.

Utilizando la identidad de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\} = -\{g,\{h,f\}\} - \{h,\{f,g\}\}$$

y la parte de la derecha es nula. □

Aplicando esta proposición, si conocemos dos integrales primeras de un campo hamiltoniano podemos construir otra integral primera. Sin embargo muchas veces las integrales primeras que construimos no nos aportan nada pues "dependen funcionalmente" de las que ya teníamos.

Corolario 4.5 *Las integrales primeras de un campo hamiltoniano X_f forman una subálgebra de Lie.*

Demostración.

g es una integral primera de X_f si y solo si $\{f,g\} = 0$. □

4.2. Formas invariantes

Los campos hamiltonianos son los que describen la evolución de un sistema dinámico en el espacio de fases.

En todos los problemas "físicos" podemos suponer que el campo hamiltoniano que describe el sistema denámico genera un grupo uniparamétrico. Ello es debido a que debemos saber para cualquier instante de tiempo el lugar donde se encuentran todos los puntos del espacio de fases. Caso de no ser así, es posible que el problema no sea "físico" o que se haya elegido mal el espacio de configuración del problema.

Definición 4.3 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria y X un campo de vectores sobre la variedad. Una k-forma α es un* invariante *del campo X si*

$$X^L(\alpha) = 0$$

Las funciones invariantes reciben también el nombre de integrales primeras *o* constantes del movimiento *del campo X. Son las que cumplen*

$$X(f) = 0$$

Ejemplos.

- Una función g es integral primera de un campo hamiltoniano X_f si $\{f, g\} = 0$. Aplicando la identidad de Jacobi, el conjunto de integrales primeras de un campo hamiltoniano es una subálgebra de Lie del conjunto de todas las funciones.

- La forma simpléctica ω también es un invariante de todo campo hamiltoniano, pues ya hemos probado que

$$(X_f)^L(\omega) = 0$$

  En general será invariante por cualquier campo localmente hamiltoniano.

- Del mismo modo el elemento de volumen es un invariante de cualquier campo localmente hamiltoniano.

- Consideremos la variedad simpléctica $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (q, p). Sea X es campo $\frac{\partial}{\partial q}$ y sea f una función que dependa solo de p. Entonces la forma $\alpha = f \cdot dq \wedge dp$ es invariante.

- En general, dado un campo que sea la parcial de una coordenada, toda forma que se construya utilizando solamente funciones que no dependan de esa coordenada, es una forma invariante. Cartan demostró que si el campo no se anula en un punto está es la situación general, tal como demostraremos.

Supongamos que el campo X genera un grupo uniparamétrico global τ_t. Una k-forma es invariante por X si y solo si $\tau_t^*(\alpha) = \alpha$. Una forma es invariante para un campo X si es invariante para su flujo[1].

[1]El flujo de un campo X es la aplicación $\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\tau(t, x) = \tau_t(x)$

Proposición 4.6 (Poincaré-Cartan) *Supongamos que X genera un grupo global. Si α es una p-forma invariante para toda parte compacta K de cualquier subvariedad de dimensión p se tiene*

$$\int_K \tau_t^*(\alpha) = \int_K \alpha = \int_{\tau_t(K)} \alpha \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Esto justifica el nombre histórico de invariantes integrales. Antes de Cartan las formas exteriores, mejor dicho el análogo a las formas exteriores, solo servían para ser integradas. Cartan les dió un significado geométrico propio, sin referirnos para nada al concepto de integral.

El recíproco de esta proposición también es cierto, aunque no lo probaremos aquí. Vease [?]. □

Definición 4.4 *Sea X un campo. Una $(p-1)$-forma α es un* invariante relativo *si $d\alpha$ es una p-forma invariante.*

Aplicando el teorema de Stokes al teorema de Poincaré-Cartan obtenemos

Corolario 4.7 *Sea X un campo que genera un grupo global. Si α es una $(p-1)$-forma invariante relativa, para toda parte compacta K de cualquier subvariedad de dimensión p se tiene*

$$\int_{\partial K} \tau_t^*(\alpha) = \int_{\partial K} \alpha \qquad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Proposición 4.8 *Sea X un campo en una variedad, α y β dos formas invariantes. Entonces*

- *$i_X\alpha$ es un invariante de X.*
- *$d\alpha$ es un invariante de X.*
- *$\alpha \wedge \beta$ es invariante.*

Demostración.

La derivada de Lie conmuta con la contracción interior

$$X^L \cdot i_X = i_X \cdot X^L$$

Luego $X^L(i_X \alpha) = i_X(X^L(\alpha)) = 0$.

Del mismo modo la derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior y $d\alpha$ es un invariante.

La derivada de Lie es una derivación del álgebra exterior. Entonces

$$X^L(\alpha \wedge \beta) = X^L(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge X^L(\beta)$$

que es nulo. $\square$

De este modo el conjunto de formas invariantes de un campo X es una subálgebra del álgebra exterior de la variedad que es estable mediante los operadores d y i_X.

Veamos la interpretación en coordenadas del concepto de forma invariante.

Sea x un punto de la variedad donde el campo X no sea nulo. Se sabe por ecuaciones diferenciales que en un entorno de x se puede elegir unas coordenadas $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de tal forma que localmente

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Si la forma α se escribe en coordenadas

$$\alpha = \alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

tenemos que

$$X^L(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_{i_1, \cdots, i_k}) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Luego todas las funciones $\alpha_{i_1, \cdots, i_k}$ deben tener derivada parcial nula con respecto a x_1. Bajo condiciones bien conocidas esto es equivalente a que ninguna de esas funciones dependa de la coordenada x_1.

4.3. Invariantes integrales absolutos

Si multiplicamos un campo vectorial X por una función f (no nula), las curvas integrales del campo fX son, geométricamente, las mismas que las curvas integrales de X, aunque recorridas con otra velocidad. Decimos en este caso que todas las curvas integrales de fX y las curvas integrales de X tienen el mismo soporte[2].

Si un objeto es invariante por todas las posibles reparametrizaciones de una curva, podemos afirmar que es invariante para el soporte de la curva, que no es otra cosa que la imagen mediante una parametrización cualquiera del conjunto $\mathbb{R}$, que entenderemos como una variable temporal. Bajo condiciones bastante generales el soporte la curva será una subvariedad de dimensión 1.

Definición 4.5 *Una k-forma α es un* invariante integral absoluto *de un campo X si se cumplen las condiciones*

$$X^L(\alpha), \quad i_X\alpha = 0$$

Estas condiciones son equivalentes a que

$$i_X\alpha = 0, \quad i_X d\alpha = 0$$

En particular los invariantes absolutos son formas invariantes.

Proposición 4.9 *Si α es un invariante integral absoluto de un campo X, entonces α es invariante integral absoluto por todo campo de la forma fX.*

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} i_{(fX)}\alpha &= f i_X\alpha = 0 \\ i_{(fX)}d\alpha &= f i_X d\alpha = 0 \end{aligned}$$

[2]En realidad le estamos asociando,de un modo diferenciable, a cada punto de la variedad $\mathcal{V}$ un subespacio vectorial de dimensión 1. Esto no es más que un subfribrado regular de rango 1 del fibrado tangente.

utilizando la segunda definición. □

Si el campo no se anula en un punto podemos suponer que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Observemos que en este caso, todas las demás coordenadas son integrales primeras del campo. Razonando de modo parecido a lo hecho en la sección anterior tenemos que en la expresión local de una forma no puede aparecer la coordenada x_1, ni la diferencial dx_1 de esa coordenada.

Como diría Cartan, los invariantes integrales absolutos de un campo X son los que se pueden construir utilizando únicamente integrales primeras y diferenciales de las integrales primeras.

4.4. Subvariedades invariantes

Pasemos ahora al caso de una variedad simpléctica y de un campo hamiltoniano.

La integral primera más evidente de un campo hamiltoniano X_f es el propio hamiltoniano, pues $\{f, f\} = 0$ por la antisimetría del paréntesis de Poisson. Este resultado, se conoce en física como el teorema de consevación de la energía.

Esto nos dice que las curvas integrales de X_f se mantienen sobre la hipersuperficie $f = cte$. La hipersuperficie puede no ser variedad en algunos puntos.

Definición 4.6 *Sea $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ una subvariedad y X un campo definido en toda la variedad. $\mathcal{V}'$ es una* subvariedad invariante *si para todo punto $x' \in \mathcal{V}$ se tiene que $X_{x'} \in T_{x'}(\mathcal{V}')$. El campo X se puede entender como un campo en la subvariedad.*

Si tenemos un punto de $\mathcal{V}'$, la curva integral del campo X restringido a $\mathcal{V}'$ tiene que ser la misma que la curva integral del campo X en toda la variedad, debido al teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales. Pero el sistema de ecuaciones diferenciales en la subvariedad siempre tendrá menos variables que el sistema equivalente en toda la variedad. De este modo, el encontrar subvariedades invariantes reduce el orden del sistema de ecuaciones diferenciales.

Inversamente, si tomamos un punto arbitrario de una subvariedad, y las curvas integrales de X permanecen en la subvariedad, entonces dicha subvariedad es invariante. En efecto, si calculamos los vectores tangentes a esas curvas tenemos que pertencen al espacio tangente de la subvariedad.

Proposición 4.10 *Sea $g_i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, i = 1 \cdots k$ un conjunto de integrales primeras de un campo hamiltoniano X_f* funcionalmente independientes[3]*. Igualando a cero esas funciones obtenemos una subvariedad $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$. $\mathcal{V}'$ es una subvariedad invariante.*

Demostración.

Que es subvariedad es un resultado elemental de análisis.

Como son integrales primeras, el valor a lo largo de las curvas integrales de X_f es siempre el mismo, en este caso cero. Las curvas integrales del campo se mantienen en la subvariedad, que es entonces invariante. $\square$

Sumando constantes a las funciones, se obtiene un resultado análogo igualando a constantes las integrales primeras.

Recordemos que para que las funciones sean integrales primeras del campo hamiltoniano debe cumplirse $\{g_i, f\} = 0$.

Los sistemas hamiltonianos más sencillos son aquellos que poseen gran cantidad de integrales primeras independientes. Además si las integrales primeras están en involución, el problemas es todavia más sencillo.

Definición 4.7 *Un sistema hamiltoniano X_f de dimensión $2n$ es* integrable *si posee n integrales primeras $f_1 = f, f_2, \ldots, f_n$ que están dos a dos en involución.*

Que esten dos a dos en involución significa que $\{f_i, f_j\} = 0$. De esta forma los grupos uniparamétricos que generan conmutan.

Si tenemos un conjunto de integrales primeras, la subvariedad que se obtiene igualando a constantes dichas integrales es una subvariedad invariante.

[3]Un conjunto de funciones es funcionalmente independiente en un punto si sus diferenciales en ese punto son linealmente independientes.

El teorema fundamental sobre sistemas integrables nos dice que si esa subvariedad es compacta, entonces necesariamente es isomorfa a toro de dimensión n (véase [**?**, **?**]).

Definición 4.8 *Un punto* $x_0 \in \mathcal{V}$ *es un* punto de equilibrio *de un campo* X *si* $X_{x_0} = 0$.

Si x_0 es un punto de equilibrio, la curva integral se reduce a ese único punto, luego el punto permanece estable aunque el tiempo discurra. Si las curvas integrales de puntos próximos a x_0 permanecen en un entorno de x_0, el punto de equilibrio es estable. En otro caso se dice que el punto de equilibrio es inestable.

Proposición 4.11 *Los puntos de equilibrio de un campo hamiltoniano* X_f *son los puntos que anulan la diferencial de* f*, que normalmente son llamados* puntos críticos *de la aplicación* f*.*

Problemas

48 La polaridad es una operación de tipo local. Calcular la 1-forma que le corresponde al campo

$$X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

49 Sea $\mathcal{V}$ una variedad riemaniana. Intentar definir un paréntesis de Poisson en el fibrado tangente.

50 Calcular los paréntesis de Poisson de las funciones coordenadas.

51 El paréntesis de Poisson de dos formas cerradas es una forma exacta. Encontrar una primitiva de dicha forma exacta.

52 Calcular $\{f, x_i\}$ y $\{f, \xi_i\}$.

53 El paréntesis de Lie de dos campos hamiltonianos es de nuevo hamiltoniano. Encontrar el hamiltoniano del paréntesis.

Dos campos hamiltonianos conmutan si y solo si el paréntesis de Poisson de los hamiltonianos es una función localmente constante.

54 Demostrar que las condiciones de la definición 4.5 son equivalentes.

55 Sea X un campo localmente hamiltoniano. Probar la verdad o falsedad de las afirmaciones:

- Una 1-forma α en invariante por el campo X si y solo si $\mathsf{p}(X)$ y α están en involución (su paréntesis de Poisson es nulo).
- El paréntesis de Poisson de dos formas invariantes es invariante.

56 El conjunto de invariantes integrales absolutos de un campo X es una subálgebra estable por el operador d.

5. Simetrías

5.1. Acciones simplécticas

Supongamos que X_f es un campo hamiltoniano que pretendemos integrar. Sea Y un campo invariante de X_f. Esto es lo mismo que decir que los campos conmutan, $[X_f, Y] = 0$. Supongamos que este campo Y genera un grupo uniparamétrico completo $\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Tenemos entonces que $\tau_t^*(X_f) = X_f$. Si el campo Y es también un campo hamiltoniano X_g, las funciones f y g estarán en involución puesto que sus campos conmutan. De este modo, la invariancia del campo X_f por un grupo uniparamétrico da lugar a una integral primera. Esto que acabamos de enunciar es una versión del teorema de E. Noether.

Si en vez de un grupo de Lie unidimensional, el campo fuera invariante por un grupo de Lie r-dimensional, tomando los campos asociados a una base del álgebra de Lie, construiríamos r integrales primeras.

Definición 5.1 *Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica conexa. Decimos que una acción*[4]

$$\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

es simpléctica *si ϕ_g es una transformación canónica para todo $g \in G$.*

Cuando hablemos de acciones, sobreentenderemos que son de tipo simpléctico. La acción también se puede entender como un morfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G & \to & \mathrm{Dif}(\mathcal{V}) \\ & g & \to & \phi_g \end{array}$$

[4]Sobreentendemos que la acción es diferenciable, esto es que la aplicación ϕ es diferenciable. Además todas las acciones serán por la izquierda. Mediante ϕ_g denotamos la aplicación $\phi_g(x) = \phi(g, x)$.

Ejemplos.

- Sea X un campo locamente hamiltoniano que genere un grupo uniparamétrico global. La aplicación

$$\tau : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

es una acción del grupo de Lie $\mathbb{R}$ sobre la variedad $\mathcal{V}$. Como el campo es localmente hamiltoniano la acción es simpléctica.

- Sea S^2 la esfera unidad dotada de las coordenadas[5] cilíndricas (θ, h) donde θ es el ángulo y h (ó z) la altura. Con la forma $d\theta \wedge dh$ la esfera es una variedad simpléctica. La circunferencia unidad S^1 actua sobre la variedad como giros alrededor del eje z.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & S^1 \times S^2 & \to & S^2 \\ & (\alpha, (\theta, h)) & \to & (\alpha + \theta, h) \end{array}$$

Esta acción conserva el área y por lo tanto es simpléctica.

- Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ el toro bidimensional. Dotamos de coordenadas angulares (θ_1, θ_2) es una variedad simpléctica con la 2-forma $\omega = d\theta_1 \wedge \theta_2$. Dicho toro también se puede interpretar como un grupo de Lie G. La acción

$$\begin{array}{ccc} G \times T^2 & \to & T^2 \\ (\lambda_1, \lambda_2), (\theta_1, \theta_2) & \to & (\theta_1 + \lambda_1, \theta_2 + \lambda_2) \end{array}$$

es simpléctica.

- Sea $\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una acción arbitraria en el espacio de configuración. La subida de esta acción al fibrado cotangente

$$\tilde{\phi} : G \times T^*(\mathcal{V}) \to T^*(\mathcal{V})$$

donde $\tilde{\phi}_g = (\phi_g^{-1})^*$, es una acción simpléctica de G en el espacio de fases.

[5]Dichas coordenadas solo son válidas en un abierto, pero esto no afecta para nada a nuestros propositos

Este tipo de acciones se dice que son puntuales, pues todos los difeomorfismo son transformaciones puntuales. Recordemos que las transformaciones puntuales ademas de conservar la estrutura simpléctica, conservan también la forma de Liouville.

5.2. Derivada de una acción

Dada una acción ϕ y un elemento $X \in \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie del grupo, podemos construir un campo en la variedad.

Asociado al elemento X, existe un morfismo de grupos

$$\exp_X : \mathbb{R} \to G$$

La composición de este morfismo con ϕ, da lugar a una acción de $\mathbb{R}$ en la variedad. El campo que le corresponde a esta variedad lo denotaremos por $\tilde{X}$ y diremos que es campo asociado a X. En fórmulas este campo se calcula como

$$\tilde{X}(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} ((\exp tX) \cdot x)$$

De esta manera construimos una aplicación $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ que es lineal y cumple

$$\phi'([X,Y]) = -[\phi'(X), \phi'(Y)]$$

Podemos decir, que salvo el signo que no aporta nada, tenemos un morfismo de álgebras de Lie ϕ'.

Definición 5.2 *Decimos que ϕ' es la derivada de la acción ϕ.*

Si la acción es simpléctica todos los campos que construyamos serán localmente hamiltonianos. De este modo ϕ' valora en la subálgebra de los campos localmente hamiltonianos[6].

[6]Si trabajamos con grupos de Lie de dimensión infinita, el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{Dif}(\mathcal{V})$ es precisamante $\mathfrak{X}(\mathcal{V})$ y el álgebra de Lie del grupo simpléctico está formada por los campos localmente hamiltonianos. En este caso ϕ' se entiende como la derivada de un morfismo de grupos.

5.3. Acciones hamiltonianas

A nosotros nos interesan aquellas acciones que tengan asociados campos hamiltonianos, de tal forma que todo campo $\tilde{X} = \phi(X)$ tenga un hamiltoniano. Además nos interesa que dicho hamiltoniano se pueda elegir de modo que se respete la estructura de álgebra de Lie. Ello nos lleva a considerar la siguiente

Definición 5.3 *Una acción simpléctica de G en $\mathcal{V}$ es* hamiltoniana[7] *si existe un* antimorfismo[8] *de álgebras de Lie*

$$\begin{array}{rccc} \mu^* : & \mathfrak{g} & \to & C^\infty(\mathcal{V}) \\ & X & \to & \mu^X \end{array}$$

que cumpla que μ^X sea un hamiltoniano de $\tilde{X} = \phi'(X)$. La aplicación μ^* se llama comomento.

De este modo $\tilde{X} = X_{\mu^X}$. Además se debe cumplir

$$\mu^{[X,Y]} = -\{\mu^X, \mu^Y\}$$

Como el hamiltoniano de un campo no es único, sino que se le puede sumar una constante, puede existir más de un comomento μ^* que cumpla lo pedido. A nosotros con que exista uno nos llega y nos sobra.

Existen dos problemas por los que una acción simpléctica puede no ser hamiltoniana:

- Debido a que algunos campos localmente hamiltonianos no son hamiltonianos. Esto equivale a que algunas formas pueden ser cerradas pero no exactas. Este es un problema de la cohomología de la variedad.

- A pesar de que todos los campos sean hamiltonianos, puede ser imposible elegir para cada uno de ellos un hamiltoniano de tal forma que se

[7]También se llaman acciones de Poisson

[8]Llamamos antimorfismo de álgebras de Lie a una aplicación lineal ϕ que cumple $\phi([X,Y]) = -[\phi(X), \phi(Y)] = [\phi(Y), \phi(X)]$.

conserve la estructura de álgebra de Lie. Este problema tiene que ver con la cohomología del álgebra de Lie.

Proposición 5.1 *Dada una acción arbitraria $\phi : G \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, la subida de esa acción al fibrado cotangente siempre es hamiltoniana. Un hamiltoniano del campo $\tilde{X}$ se obtiene mediante la fórmula*

$$\mu^X = -d(i_{\tilde{X}}\theta)$$

Demostración.

La demostración se base en que la acción es puntual y por lo tanto conserva la forma de Liouville, $\tilde{X}^L(\theta) = 0$.

$$0 = \tilde{X}^L(\theta) = (di_{\tilde{X}} + i_{\tilde{X}}d)\theta = di_{\tilde{X}}\theta + i_{\tilde{X}}d\theta$$

De esta forma $i_{\tilde{X}}d\theta = \mathsf{p}(\tilde{X}) = -d(i_{\tilde{X}}\theta)$.

Queda comprobar que en efecto $\mu^{[X,Y]} = -\{\mu^X, \mu^Y\}$, lo cual es un cálculo sencillo. $\square$

Veamos otro ejemplo de acción hamiltoniana.

Proposición 5.2 *Sea $\phi : G \to Sp(E)$ una representación*[9] *lineal. La acción inducida por dicha representación es hamiltoniana.*

Demostración.

A cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ le corresponde, por diferenciación, un elemento $\bar{X}$ de $\mathfrak{sp}(E)$ que es un endomorfismo de E. Dicho elemento $\bar{X}$ se puede entender también como un campo diferencible en la variedad y además coincide con $\tilde{X}$ que es el campo asociado a la acción. Tenemos que $i_{\tilde{X}}\omega$ es cerrada y por lo tanto, al estar en un espacio vectorial, por el lema de Poincaré es exacta. De este modo $i_{\tilde{X}}\omega = d\mu^X$. La constante indeterminada de esa función se fija

[9] Un representación lineal es un morfismo de grupos de G en el grupo lineal de un espacio vectorial (de dimensión finita). Si la imagen del morfismo está incluida en el grupo simpléctico, la acción se dice que es simpléctica puesto que ϕ_g es un morfismo métrico, para cualquier elección del elemento $g \in G$.

con la condición $\mu^X(0) = 0$. Es inmediato comprobar que de este modo se obtiene un anti-morfismo de álgebras de Lie. $\square$

La función anterior se puede probar que es

$$\mu^X(x) = \frac{1}{2}\omega(\tilde{X}(x), x)$$

5.4. Momento de una acción

Dada una acción hamiltoniana de un grupo de Lie de dimensión r, si tomamos una base $\{X_i\}$ del álgebra, tenemos r funciones diferenciables μ^{X_i}. Estas funciones se pueden agrupar en una sola función con valores vectoriales.

Definición 5.4 *Dada una acción hamiltoniana ϕ diremos que una aplicación diferenciable*

$$\mu : \mathcal{V} \to \mathfrak{g}^*$$

es un momento de la acción si

$$d(i_X \circ \mu) = i_{\phi'(X)}\omega = \mu^X \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}$$

En diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "i_X \circ \mu"'] & \mathfrak{g}* \arrow[d, "i_X"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Por tanto μ es un momento si $i_X \circ \mu$ es un hamiltoniano de $\phi'(X)$.

El momento no tiene por que ser único, pues no es único el hamiltoniano de un campo.

5.5. Teorema de Noether

Pasemos ya al estudio de como los grupos de simetría nos proporcionan integrales primeras.

Definición 5.5 *Dada una acción simpléctica ϕ, un hamiltoniano $f : \mathcal{V} \to R$ es invariante por la acción si*

$$f(x) = f(\phi_g(x)) \text{ para todo } g \in G, x \in \mathcal{V}$$

Esta definición también se pueden encontrar en la forma $\phi^*(f) = f$, utilizando la imagen inversa.

Teorema 5.3 (de Noether) *Si f es invariante por una acción hamiltoniana ϕ que posee un momento μ, entonces μ es una constante del movimiento. Igualando a constantes las componentes del momento obtenemos subvariedades invariantes.*

Demostración.

Es suficiente demostrar que μ^X es invariante, siendo X un elemento cualquiera del álgebra de Lie.

El subgrupo de $\phi'(X) = \tilde{X}$ es la restricción de la acción ϕ y por lo tanto f es invariante por el flujo de $\phi'(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Trasladado a la noción infinitesimal

$$(\phi'(X))^L(f) = 0$$

lo que implica $\{\mu^X, f\} = 0$, que es lo que pretendiamos demostrar. $\square$

5.6. Variedades riemannianas

Supongamos ahora que $\mathcal{V}$ está dotado de una métrica riemanniana o semiriemanniana g. La polaridad establece un isomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente. Via este isomorfismo podemos considerar en el fibrado tangente una estructura simpléctica.

Si un grupo de Lie G actua por isometrías (cada ϕ_g es una isometría), la subida de esta acción al fibrado tangente conserva la 1-forma de la estructura simpléctica.

En este caso se pueden construir un momento de la acción mediante la fórmula

$$(i_X \circ \mu)(D_x) = g(D_x, \tilde{X}_x)$$

donde $\tilde{X}$ es el campo sobre el espacio de configuración que le corresponde elemento del álgebra de Lie X.

6. Variedades de Poisson

6.1. Definición

Existe una generalización del concepto de variedad simpléctica, que sirve también como marco para el estudio de los sistemas hamiltonianos. Este enfoque hace incapié en las propiedades del paréntesis de Poisson.

Hay muchos ejemplos, sobre todo sacados de la física, donde se puede definir de una manera simple un paréntesis de Poisson, a pesar de no existir ninguna estructura simpléctica.

Definición 6.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria de dimensión finita. Un* paréntesis de Poisson *es una operación*

$$\begin{array}{rccc} \{\cdot,\cdot\}: & \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) \times \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{C}^\infty(\mathcal{V}) \\ & (f,g) & \to & \{f,g\} \end{array}$$

que cumple:

- *Es antisimétrico.* $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- *Es bilineal sobre* $\mathbb{R}$. $\{\lambda f + f', g\} = \lambda\{f,g\} + \{f', g\}$ *donde* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Identidad de Jacobi. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$
- Regla de Leibniz. $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}\cdot h + g\cdot\{f,h\}.$

Una variedad donde se ha introducido un paréntesis de Poisson se denomina variedad de Poisson.

Toda variedad de Poisson tiene una estructura de álgebra de Lie en su anillo de funciones. Este álgebra es de dimensión infinita. Toda la terminología y resultados referentes a álgebras de Lie se traslada de este modo a las variedades de Poisson.

Ejemplos.

- El ejemplo más evidente de variedad de Poisson es el de variedad simpléctica. En toda variedad simpléctica se puede definir, de un modo canónico, un paréntesis de Poisson (ver sección 4.1).

- Si definimos $\{f, g\} = 0$ para todo par de funciones, tenemos una estructura trivial de Poisson. Evidentemente esta estructura no aporta nada.

- En $\mathbb{R}^{2n}$ se puede introducir un paréntesis de Poisson mediante la fórmula
$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$
Este paréntesis es el asociado a la estructura simpléctica estandard de $\mathbb{R}^{2n}$.

- En $\mathbb{R}^{2n+r}$ dotado de las coordenadas $\{x_1, \cdots x_n, \xi_1, \cdots \xi_n, z_1, \cdots z_r\}$ podemos definir un paréntesis con la fórmula del ejemplo anterior. Sin embargo en esta nueva variedad existen funciones no constantes, por ejemplo z_1 que cumplen $\{z_1, f\} = 0$ para toda función. En otras palabras, el centro del álgebra de Lie no se reduce a las constantes.

- El paréntesis de Poisson es una operación de tipo local. El valor de $\{f, g\}$ en un punto, solo depende de los germenes de f y de g. Esto es así pues el paréntesis es una derivación (en cada argumento). Todo abierto de una variedad de Poisson es también de Poisson.

Definición 6.2 *Llamamos* función de Casimir *a toda función f cuyo paréntesis de Poisson con cualquier otra función sea nulo.*

$$\{f, g\} = 0 \textit{ para toda } g \in C^\infty(\mathcal{V})$$

Dos funciones están en involución *si su paréntesis es nulo.*

Las funciones de Casimir son los elementos del centro del álgebra de Lie. En el caso de la geometría simpléctica las únicas funciones de Casimir son las constantes (si la variedad es conexa).

6.2. Campos de Hamilton

Gracias a la regla de Leibniz podremos construir un campo vectorial asociado a una función. De este modo el formalismo hamiltoniano se introduce en las variedades de Poisson.

Definición 6.3 *Sea f una función diferenciable en una variedad de Poisson. Llamamos* campo hamiltoniano *de f y denotamos X_f al que cumple*

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

Gracias a la regla de Leibniz, se prueba que X_f es una derivación del anillo de funciones y por lo tanto un campo diferenciable sobre la variedad.

Si consideramos un álgebra de Lie arbitraria, a cada elemento f del álgebra le corresponde un endomorfismo del álgebra. Este endomorfismo se denota Ad_f y está definido como

$$\mathrm{Ad}_f(g) = [f, g]$$

Por lo tanto, el campo hamiltoniano de f no es más que el endomorfismo Ad_f del álgebra de Lie $C^\infty(\mathcal{V})$.

Proposición 6.1 *La función*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty & \to & \mathfrak{X}(\mathcal{V}) \\ f & \to & X_f \end{array}$$

es un morfismo de álgebras de Lie.

Demostración.

La linealidad es clara. Demostremos que conserva el paréntesis.

Tenemos por una parte

$$X_{\{f,g\}}(h) = \{\{f, g\}, h\} = -\{h, \{f, g\}\}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}[X_f, X_g](h) &= X_f X_g(h) - X_g X_f(h) \\ &= X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) \\ &= \{f, \{g, h\} + \{g, \{h, f\}\}\end{aligned}$$

y concluimos aplicando la identidad de Jacobi en $C^\infty(\mathcal{V})$. $\square$

Corolario 6.2 *El conjunto de campos hamiltonianos forma una subálgebra de Lie.*

6.3. Tensor de Poisson

La estructura de Poisson de una variedad viene inducida por un tensor de orden 2 antisimétrico. Sin embargo, a diferencia de la estructura simpléctica, este tensor no será covariante sino contravariante. Dicho de otra forma, este tensor es un producto tensorial de campos vectoriales y no un producto de formas lineales.

Teorema 6.3 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de Poisson, existe un tensor 2-contravariante ω^2 que verifica que verifica*

$$\omega^2(df, dg) = \{f, g\}$$

El tensor ω^2 recibe el nombre de tensor de Poisson *de la variedad $\mathcal{V}$.*

Demostración.

Veamos primero que el valor de $\{f, g\}$ en el punto x solo depende de los valores de df y dg en ese punto

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f)$$

La parte de dg depende evidentemente solo del valor de dg en el punto x. El campo X_f solo depende de las derivadas parciales de f (trabajando en un abierto coordenado) y por lo tanto solo depende del valor de df. Tomando valor en el punto x se concluye.

Esto prueba su existencia.

Su unicidad es clara, pues en coordenadas, ω^2 debe expresarse

$$\omega^2 = \omega^2(dx_i, dx_j)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \{x_i, x_j\}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

El tensor ω^2 es antisimétrico por serlo el paréntesis. □

- En un dominio coordenado

  $$\{f, g\} = \{x_i, x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

  Conociendo los paréntesis de las coordenadas, podemos conocer el paréntesis de cualquier par de funciones. Esto prueba de nuevo que el valor del paréntesis de dos funciones depende solo de los valores de sus diferenciales.

- Dar un tensor 2-contravariante no equivale a dar una estructura de Poisson, pues en general el producto definido como $\omega^2(df, dg)$ no cumple la identidad de Jacobi[10].

- El tensor ω^2 tiene asociada una polaridad. Como el tensor es contravariante, la polaridad en este caso tiene como dominio el fibrado cotangente y como imagen el fibrado tangente. A cada 1-forma la polaridad le permite asociar un campo. En general, la polaridad asociada a una estructura de Poisson no será ni inyectiva ni epiyectiva.

- A df mediante la polaridad asociada le corresponde el campo X_f.

Definición 6.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson y ω^2 el tensor de Poisson. Llamamos rango de $\mathcal{V}$ en el punto x, al rango del tensor $(\omega^2)_x$. Coincide*

[10]Si introducimos el paréntesis de Schouten, que es una generalización de la derivada de Lie, la condición para que un tensor ω^2 defina una estructura de Poisson es que $[\omega^2, \omega^2] = 0$, donde los corchetes denotan el paréntesis de Schouten. Para más referencias véase [**?**].

con la dimensión de la imagen del espacio cotangente mediante la polaridad asociada.

El rango de una variedad de Poisson es necesariamente un número par por ser el rango de un tensor hemisimétrico, y en principio puede variar de punto a punto.

Definición 6.5 *Llamamos* espacio característico *en el punto x y denotamos C_x, al subconjunto de $T_x(\mathcal{V})$ que es la imagen de $T^*_x(\mathcal{V})$ por la polaridad asociada al tensor de Poisson.*

Por la propia definición, el rango coincide con la dimensión del espacio característico.

Si $\mathcal{V}$ es de dimensión par y de rango máximo en todo punto, entonces la polaridad asociada al tensor de Poisson es un isomorfismo. A traves de este isomorfismo podemos construir sobre $\mathcal{V}$ una 2-forma (cuya polaridad es la inversa de la polaridad de ω^2). Se puede comprobar que esta 2-forma es cerrada. Entonces tenemos una variedad simpléctica. La estructura de Poisson asociada a esta estructura simpléctica coincide con la estructura de partida.

Esto nos permite dar una nueva definición de variedad simpléctica.

Definición 6.6 *Una* variedad simpléctica *es una estructura de Poisson cuyo rango es igual a la dimensión de la variedad en todos los puntos.*

6.4. Morfismo de Poisson

Como toda estructura que se precie, las variedades de Poisson tienen unos morfismos asociados. Recordemos que la definición de imagen inversa en el caso de las funciones cumple

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

Para no recargar la notación notaremos del mismo modo todos los paréntesis de Poisson. El contexto nos inforamará de cual es el que debemos usar en cada caso.

Definición 6.7 *Sea $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos variedades de Poisson. Una función diferenciable*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

es un morfismo de Poisson *si $\varphi^*(\{f,g\}) = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}$. Si φ es un difeomorfismo, lo llamaremos* difeomorfismo de Poisson.

Un campo X es un morfismo de Poisson infinitesimal *si $X^L(\omega^2) = 0$. También lo llamaremos* campo de Poisson.

Si φ es un difeomorfismo de Poisson, entonces φ^{-1} también lo es. El conjunto de todos los difeomorfismos de Poisson de una variedad $\mathcal{V}$ forma un grupo. Lo llamaremos grupo de Poisson de la variedad. Del mismo modo los morfismos infintesimales de Poisson forman un álgebra de Lie.

Si un campo de Poisson genera un grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$, entonces todos los elementos de ese flujo son morfismos de Poisson. Ello se deriva de la fórmula

$$\{f,g\} = \omega^2(df, dg)$$

Proposición 6.4 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson. X es un campo de Poisson si y solo si cumple*

$$X(\{f,g\}) = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\}$$

Demostración.

Tenemos la fórmula

$$X^L(\omega^2(df, dg)) = X^L(\omega^2)(df, dg) + \omega^2(X(df), dg) + \omega^2(df, X(dg))$$

aplicando la regla de derivación de un producto contraido.

En nuestro caso esto da lugar a

$$X(\{f,g\}) = X^L(\omega^2)(df, dg) + \{X(df), dg\} + \{df, X(dg)\}$$

lo que demuestra la proposición. $\square$

Corolario 6.5 *Todo campo hamiltoniano es un campo de Poisson.*

6.5. Teorema de Darboux

Si la variedad de Poisson tiene rango distinto en cada punto, poco podremos saber sobre su estructura local. Sin embargo si tiene rango constante su estructura local esta perfectamente determinada.

Teorema 6.6 (de Darboux) *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de Poisson de rango constante $2n$. Cada punto de la variedad tiene un entorno coordenado, mediante coordenadas locales $\{x_1, \cdots x_n, \xi_1, \cdots \xi_n, z_1, \cdots z_r\}$ de tal forma que en esas coordenadas*

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)$$

6.6. Álgebras de Poisson

Sobre $C^\infty(\mathcal{V})$ existen dos estructuras de álgebra. Una asociativa dada por el producto ordinario y otra de Lie, dada por el paréntesis de Poisson. Estas dos estructuras están relacionadas por la fórmula

$$\{f, g \cdot g'\} = \{f, g\} \cdot g' + g \cdot \{f, g'\}$$

Esto nos conduce a la

Definición 6.8 *Sea k un cuerpo. Un* álgebra de Poisson *es un conjunto dotado de las estructuras*

- *Una estructura de álgebra asociativa, denotada por un punto.*
- *Una estructura de álgebra de Lie, denotada con un paréntesis de Poisson (o también con un paréntesis de Lie).*
- *Además se cumple*

$$\{f, g \cdot g'\} = \{f, g\} \cdot g' + g \cdot \{f, g'\}$$

Se debe tener en cuenta el orden, pues en general el álgebra asociativa no tiene por que ser conmutativa. En el caso de las funciones diferenciables si es conmutativa.

Ejemplos.

- Sea $(A, \cdot)$ un álgebra asociativa. Definimos $\{f, g\} = f \cdot g - g \cdot f$. Tenemos una estructura de Poisson en A. En particular, las matrices cuadradas tienen estructura de álgebra de Poisson.

- Los observables de un sistema cuántico también tienen estructura de álgebra de Poisson (aunque hay ciertos problemas con los dominios).

Problemas

57 Una función f es de Casimir si y solo si su campo hamiltoniano X_f es identicamente nulo.

58 Demostrar dada una matriz antisimétrica de orden n, se puede construir en $\mathbb{R}^n$ una estructura de Poisson.

59 Asociando a cada punto x su subespacio característico C_x obtenemos una distribución cuyo rango es el de la estructura simpléctica. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Frobenius a dicha distrubución.

60 Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un difeomorfismo de Poisson. Dado un campo hamiltoniano X_f, ver si existe alguna relación entre su imagen directa $\varphi_*(X_f)$ y el campo cuyo hamiltoniano es $\varphi^*(f)$.

7. Mecánica lagrangiana

7.1. Introducción

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, consideramos su fibrado tangente $T(\mathcal{V})$. También lo podemos llamar espacio de fases de velocidades. Tomamos una función diferenciable $L \in C^\infty(T(\mathcal{V}))$, definida sobre el fibrado tangente. Dicha función recibe el nombre de lagrangiano, por analogías de la física clásica.

Fijados estos elementos podemos construir una función del fibrado tangente en el fibrado cotangente de la variedad. Es lo que llamaremos transformación de Legrendre asociada al lagrangiano L.

En muchos casos la transformación de Legendre establece un difeomorfismo (local), lo que permite introducir una estructura simpléctica en el fibrado tangente.

El estudio de las ecuaciones del movimiento, entendiendolas como campos de vectores en el fibrado tangente, es lo que denominamos mecánica lagrangiana. Bajo ciertas hipótesis se puede probar que este enfoque y el enfoque hamiltoniano son equivalentes.

7.2. Derivada en las fibras

Sea $L : T(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $x \in \mathcal{V}$ un punto arbitrario. Los vectores tangentes en ese punto los denotamos v_x. Sea L_x la función L restringida a $T_x(\mathcal{V})$. Esto es

$$\begin{array}{rccl} L_x : & T_x(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{R} \\ & v_x & \to & L_x(v_x) = L(x, v_x) \end{array}$$

La función L_x está definida en un espacio vectorial y dado un punto v_x del espacio vectorial tiene sentido calcular su diferencial $D_{v_x} L_x$. Esta aplicación tiene como dominio el mismo espacio y como imagen $\mathbb{R}$. De este modo podemos considerarla como un elemento del espacio dual, $T_x^*(\mathcal{V})$.

Definición 7.1 *Llamamos* transformación de Legendre *(asociada al lagran-*

giano L) a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{L}: & T(\mathcal{V}) & \to & T^*(\mathcal{V}) \\ & v_x & \to & D_{v_x} L_x \end{array}$$

Viendo la aplicación como una derivada tenemos

$$\mathbf{L}(v_x)(v'_x) = \left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} L(v_x + s v'_x)$$

Dicha función transforma vectores tangentes en un punto, en vectores cotangentes en ese mismo punto. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(\mathcal{V}) \arrow[rr, "\mathbf{L}"] \arrow[dr] & & T^{(}\mathcal{V}) \arrow[dl] \\ & \mathcal{V} & \end{tikzcd}$$

7.3. Lagrangianos regulares

Definición 7.2 *Un lagrangiano es* regular *si* $\mathbf{L}$ *difeomorfismo local. Un lagrangiano es* hiperregular *si* $\mathbf{L}$ *es un difeomorfismo.*

Todo lagrangiano hiperregular es también regular. Supondremos a partir de ahora que todo lagrangiano es regular.

Definición 7.3 *La* 1*-forma* $\theta_L = \mathbf{L}^*(\theta)$ *se llama* 1-forma de Lagrange. *La* 2 *forma* $\omega_L = \mathbf{L}^*(\omega)$ *se llama* 2-forma de Lagrange.

Como la diferencial exterior conmuta con la imagen inversa tenemos que $\omega_L = d\theta_L$. En particular, la 2-forma de Lagrange es cerrada.

Esto es válido para todos los lagrangianos. Pero en el caso regular tenemos

Proposición 7.1 *Si el lagrangiano es regular, la forma de Lagrange dota al fibrado tangente de una estructura de variedad simpléctica.*

Demostración.

Ya vimos que la forma era cerrada. Si el lagrangiano es regular, la aplicación tangente en todo punto es un isomorfismo y por lo tanto, punto a punto la forma de Lagrange es no degenerada, debido a que es la imagen por un isomorfismo de una forma no degenerada. $\square$

Si la 2-forma de Lagrange es simpléctica, en cada punto la transformación de Lagrange tiene que tener como diferencial un isomorfismo. De este modo, la transformación de Lagrange será un difeormorsimo local en todo punto.

Esto nos conduce a una definición más clásica de la regularidad de un lagrangiano.

Definición 7.4 *Un lagrangiano es* regular *si la* 2*-forma de Lagrange asociada es una forma simpléctica.*

7.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definición 7.5 *Llamamos* acción *de un lagrangiano a la función*

$$\begin{array}{rccc} A: & T(\mathcal{V}) & \to & \mathbb{R} \\ & v_x & \to & \mathbf{L}(v_x)(v_x) \end{array}$$

La energía *es la función $E = A - L$.*

Como estamos suponiendo que el lagrangiano es regular, la función energia tiene asociado un campo hamiltoniano, X_E, definido en el fibrado tangente. Llamaremos a ese campo, campo lagrangiano.

En los problemas de mecánica dependientes del tiempo, el espacio donde está definido el hamiltoniano es $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$, que es una variedad de dimensión impar. Como tal no puede admitir una estructura simpléctica, pero admite sin embargo una estructura llamada de contacto, que vendrá dada por la 1-forma $dt - \theta$, donde θ es la forma de Liouville. En coordenadas adecuadas esta forma se expresa $dt - \xi_i dx_i$.

Aparte de la importancia que en dinámica tienen las variedades de contacto, también son el marco natural donde se formulan las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en las que aparece explícitamente la función incógnita.

A. Variedades de contacto

A.1. Subespacio característico

Definición A.1 *Sea α una forma de grado uno definida en un abierto U de la variedad. El* espacio característico *de α en el punto $x \in U$ es*

$$\mathcal{C}_x(\alpha) = \{X_x \in T_x(\mathcal{V}) \text{ tales que } i_{X_x}\alpha_x = 0, \quad i_{X_x}d\alpha_x = 0\}$$

La dimensión del espacio $\mathcal{C}_x(\alpha)$ se llama rango *de la forma α en el punto x. La codimensión de este subespacio es la* clase *de α en x.*

Si a cada punto $x \in U$ le asociamos el espacio $\mathcal{C}_x(\alpha)$ tenemos un subfibrado del fibrado tangente. Este subfibrado se denotará $\mathcal{C}(\alpha)$ y lo llamaremos subfibrado característico de α.

Ejemplos.

- El espacio característico de α en el punto x coincide con la intersección

  $$\mathcal{L}_x = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \cap \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

  El núcleo de una forma lineal es siempre un hiperplano. La dimensión del radical de una forma de grado 2 no es conocida a priori, pero siempre debe ser par.

- A cada subespacio $\mathcal{C}_x$ le corresponde por dualidad un subespacio del espacio cotangente. Denotamos por $\mathcal{C}_x^*$ a dicho subespacio, que son las formas lineales que se anulan sobre el espacio característico. La clase de α en x coincide con la dimensión de $\mathcal{C}_x^*$.

- Sea $\mathcal{V}$ un espacio de fases y θ la forma de Liouville. Como la diferencial de la forma de Liouville es una forma simpléctica, carece de radical y no puede existir ningún vector X_x que cumpla $i_{X_x}d\theta = 0$. Por lo tanto el espacio característico de la forma de Liouville es nulo en todos los puntos.

- Sea ahora la variedad $\mathbb{R}\times T^*(\mathcal{V})$ con la forma $\alpha = dt-\theta$. La diferencial de esta forma coincide con $d\theta$. En este caso si existen vectores que cumplen $i_{X_x}d\theta = 0$. Estos vectores son $\frac{\partial}{\partial t}$ y sus proporcionales. Pero estos vectores no cumplen $i_{X_x}\alpha = 0$ por lo que de nuevo el espacio característico de α es nulo en todo punto.
- En $\mathbb{R}^3$ con $\alpha = xdy$, el espacio característico en todo punto está generado por $\frac{\partial}{\partial z}$.

Estamos interesados en las formas cuya clase sea la misma en todos los puntos. En el caso de formas de clase constante el subfibrado característico es un verdadero subfibrado diferenciable.

Definición A.2 *Una forma α es* regular *de clase m si α no se anula en ningún punto y es de clase constante m en todo el abierto donde esté definida.*

A.2. Campos característicos

Definición A.3 *Dada una forma de grado uno α, definida en un abierto U, llamamos campos característicos de α a las secciones del fibrado característico.*

Si X es un campo característico, en cada punto del abierto se cumple $i_{X_x}\alpha = 0$ e $i_{X_x}d\alpha = 0$. Globalizando este resultado, los campos característicos son precisamente aquellos que verifican las condiciones

$$i_X\alpha = 0 \qquad i_X d\alpha = 0$$

Proposición A.1 *Un campo es característico si y solo si cumple*

$$i_X\alpha = 0 \qquad X^L\alpha = 0$$

Demostración.

Recordando la fórmula de Cartan

$$X^L = i_X \circ d + d \circ i_X$$

tenemos que $X^L\alpha = 0$ si X es característico y el recíproco es inmediato. □

Tenemos una fórmula análoga a la de Cartan, que relaciona la contracción interior con el paréntesis de Lie.

$$[X^L, i_Y] = i_{[X,Y]}$$

También es conocida la siguiente relación

$$[X^L, Y^L] = [X, Y]^L$$

que junto con la anterior permite demostrar la

Proposición A.2 *El conjunto de campos característicos de α es un álgebra de Lie.*

Aplicando el teorema de Frobenius, el subfibrado característico de α es integrable

A.3. Estructuras de contacto

De ahora en adelante $\mathcal{V}$ será una variedad de dimensión impar $2n + 1$.

Definición A.4 *Una estructura de contacto* global *en $\mathcal{V}$ es una forma de primer grado α, regular de clase máxima, $2n + 1$, definida en todo $\mathcal{V}$. Al par $(\mathcal{V}, \alpha)$ se le llama* variedad de contacto*, y α es la* forma de contacto*.*

Por el teorema de Darboux siempre es posible encontrar coordenadas locales (t, x_i, ξ_i) que cumplan $\alpha = dt - \xi_i dx_i$. Este tipo de coordenadas se llaman coordenadas canónicas (de contacto). En el caso $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ con $\alpha = dt - \theta$ podemos asegurar la existencia de coordenadas canónicas sin recurrir al teorema de Darboux.

La diferencial de la forma de contacto $d\alpha$ no es una forma simpléctica. Su rango es 2n y su radical es de dimensión 1 en todos los puntos. En cada punto x el subespacio característico es nulo y los subespacios $\mathrm{Ker}(\alpha_x)$ y $\mathrm{Rad}(d\alpha_x)$

tienen intersección nula. Como la suma de sus dimensiones es $2n+1$ se tiene la descomposición en suma directa

$$T_x(\mathcal{V}) = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \oplus \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

Utilizando el teorema de Darboux podemos dar una nueva definición de estructura de contacto.

Definición A.5 *Una* estructura de contacto *global en $\mathcal{V}$ es una forma de grado uno α que cumple*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0 \text{ en todo punto}$$

Demostración.

Utilizando las formas normales, la única posibilidad de que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ es que α sea de clase $2n+1$. □

Una forma de contacto α determina un subfibrado $\mathcal{P}$ de $T^*(\mathcal{V})$ de rango 1, asociando a cada punto x el subespacio vectorial generado por α_x.

$$\mathcal{P}_x = < \alpha_x >$$

Si α' es proporcional a α, $\alpha' = f\alpha$ con f no nula en ningún punto, el fibrado asociado a α' coincide con el fibrado asociado a α.

Las estructuras de contacto generales se definen como subfibrados de rango 1 del fibrado cotangente y que localmente están generados por formas regulares de clase máxima. Se hace de este modo, pues la existencia de una forma de contacto global impone restricciones topológicas a la variedad que se evitan de esta forma. De este modo dos formas de Pfaff proporcionales definen la misma estructura de contacto.

Corolario A.3 *Toda variedad de contacto global es orientable.*

Demostración.

Sabemos que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ en todos los puntos y por lo tanto será una forma de volumen. $\square$

A.4. Distribuciones de hiperplanos

Dualizando el subfibrado $\mathcal{P}$, obtenemos que a cada punto x le podemos hacer corresponder un hiperplano del espacio tangente, precisamente el núcleo de una cualquiera de las formas de $\mathcal{P}_x$. Esta es la interpretación geométrica de una estructura de contacto: una estructura de contacto en $\mathcal{V}$ es una distribución de hiperplanos. Sin embargo el recíproco no tiene por qué ser cierto puesto a una distribución de hiperplanos le corresponde siempre una forma de grado uno, pero no podemos asegurar que esta sea de clase máxima.

Definición A.6 *Una* distribución de hiperplanos *H definida en un abierto U, es una función que asigna a cada punto $x \in U$ un hiperplano tangente en dicho punto*

$$H : x \to H_x \subset T_x(\mathcal{V})$$

Una forma α define localmente *una distribución de hiperplanos si* $\mathrm{Ker}(\alpha_x) = H_x$ *en todos los puntos de un abierto.*

Si α define una distribución de hiperplanos, todas las formas proporcionales también lo definen.

Definición A.7 *Una distribución de hiperplanos H es* diferenciable *si está definida en un entorno de cada punto por una forma de primer grado.*

En principio la forma de Pfaff que define la distribución de hiperplano no está definida globalmente.

Si α define una distribución de hiperplanos, tenemos que $d\alpha$ es una 2-forma definida localmente. Podemos restringir la forma $d\alpha$ al hiperplano H_x y obtenemos de este modo una métrica antisimétrica en cada hiperplano. En el caso de las variedades de contacto está métrica no tiene radical.

Definición A.8 *Una* estructura de contacto *en $\mathcal{V}$ es una distribución diferenciable de hiperplanos que induce una métrica simpléctica en cada hiperplano.*

En principio parece que la definición depende de la forma α particular que hayamos tomado para definir la distribución de hiperplanos. Pero si tomamos otra, tiene que ser proporcional y se cumple

$$d(\alpha') = d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

Restringiendo a cada hiperplano $d\alpha'_x = f(x) d\alpha_x$ puesto que el primer término es nulo y las formas inducidas son proporcionales.

Proposición A.4 *Las dos definiciones de estructuras de contacto coinciden.*

Demostración.

Si α es una forma de clase $2n+1$, podemos ponerla en forma normal. En este caso es claro que en cada punto se tiene

$$T_x(\mathcal{V}) = \mathrm{Ker}(\alpha_x) \oplus \mathrm{Rad}(d\alpha_x)$$

y la métrica restringida al hiperplano es simpléctica.

Recíprocamente, si se tiene una descomposición del espacio tangente en forma de suma directa como la anteriormente indicada, el espacio característico en cada punto es nulo y la clase de la forma es máxima. □

A.5. Variedad de elementos de contacto

Este ejemplo es que motivó el estudio y la notación de las estructuras de contacto. La siguiente discusión asocia a una variedad simpléctica exacta (el espacio de fases), una variedad de contacto, cuya dimensión es una unidad menor.

Definición A.9 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Un* elemento de contacto *es un par (x, H_x) formado por un punto $x \in \mathcal{V}$ y un hiperplano H_x tangente en dicho punto.*

Dado un elemento de contacto (x, H_x), existe una forma, α_x, que cumple que $\text{Ker}(\alpha_x) = H_x$. Esta forma no es única, puesto que cualquier forma proporcional cumple también la condición.

Dado un elemento de contacto (x, H_x), podemos pensar en él como un par (x, H_x^0) donde H_x^0 es el subespacio unidimensional de $T_x^*(\mathcal{V})$ obtenido por dualidad. La unión de todos los elementos de contacto de una variedad $\mathcal{V}$ se denota $\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V}))$. Entonces

$$\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V})) = \{(x, H_x) \text{ tales que } x \in \mathcal{V}\}$$

Este conjunto tiene una estructura fibrada sobre $\mathcal{V}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{P}(T^*(\mathcal{V})) & \to & \mathcal{V} \\ & (x, H_x) & \to & x \end{array}$$

La fibra de cada punto está formada por todos los hiperplanos tangentes en el punto. Por dualidad a cada hiperplano le corresponde un subespacio unidimensional del espacio tangente. Con esta identificación en mente, la fibra de un punto x se identifica con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(T_x^*(\mathcal{V}))$ del espacio dual, de donde proviene la notación.

El conjunto $\mathbb{P}(T^*(\mathcal{V}))$ tiene una estructura de variedad de dimensión $2n-1$ puesto que la fibra tiene dimensión $n-1$.

Sobre la variedad que hemos construido existe un estructura de contacto canónica definida por una distribución de hiperplanos $\mathcal{H}$. Dado un punto $p = (x, H_x)$ llamamos **hiperplano de contacto** $\mathcal{H}_p$ a los vectores tangentes X en p que cumplan $\pi'(X) \in H_x$. Dicho de otro modo. Dado un punto tenemos una aplicación lineal $\pi' : T_p(\mathbb{P}(T^*\mathcal{V})) \to T_x(\mathcal{V})$. La antiimagen del hiperplano H_x será un hiperplano tangente $\mathcal{H}_p$ en el punto p puesto que la aplicación lineal es epiyectiva.

Tomando coordenadas en el espacio proyectivo,de modo que la primera coordenada sea 1, se comprueba que en efecto está distribución de hiperplanos viene definida por una forma de clase máxima y que por lo tanto hemos construido una variedad de contacto.

A.6. Transformaciones de contacto

Definición A.10 *Sea* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{V}'$ *variedades de contacto globales de la misma dimensión. Una* transformación de contacto *es un difeomorfismo*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$$

que cumple $\varphi^*(\alpha') = f\alpha$*, donde* f *es una función diferenciable y no nula en ningún punto.*

Si H y H' son las distribuciones de hiperplanos que definen la estructura de contacto, una transformación de contacto transforma dicha distribuciones

$$\varphi'(H_x) = H'_{\varphi(x)}$$

que es otra posible definición de las transformaciones de contacto, útil cuando no existe globlamente la forma de contacto.

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son los fibrados asociados y φ es una transformación de contacto, φ transforma un fibrado en el otro, en el siguiente sentido

$$\varphi'_x(\mathcal{P}_x) = \mathcal{P}'_{\varphi(x)}$$

o dicho de otro modo, transforma secciones de $\mathcal{P}$ en secciones de $\mathcal{P}'$.

El conjunto de todas las transformaciones de contacto de una misma variedad forma un grupo, que llamaremos grupo de contacto.

Definición A.11 *Una* transformación infinitesimal de contacto *es un campo vectorial que cumple* $X^L\alpha = \rho\alpha$*, donde* ρ *es una función diferenciable que puede tener ceros.*

Si X genera un grupo uniparamétrico, cada elemento es una transformación de contacto y recíprocamente. El conjunto de todas las transformaciones infinitesimales de contacto forma un álgebra de Lie.

Definición A.12 *Las* transformaciones de Pfaff *son los difeomorfismos que conservan la forma de contacto, esto es* $\varphi^*\alpha = \alpha$*. Los campos que cumplen* $X^L\alpha = 0$ *son la versión infinitesimal de las transformaciones de Pfaff.*

A.7. Campo de Reeb

Definiremos ahora un campo asociado a la variedad de contacto, que será la generalización del campo $\frac{\partial}{\partial t}$ en la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$.

Proposición A.5 *En una variedad de contacto existe un único campo R que cumple:*

1.- $i_R\alpha = 1$

2.- $i_R d\alpha = 0$

Demostración.

Consideremos coordenadas canónicas locales.

Si se cumple $i_R d\alpha = 0$, necesarimente $R = f\frac{\partial}{\partial t}$ puesto que radical de la métrica $d\alpha$ es unidimensional.

De la primera condición obtenemos que necesariamente $f = 1$.

Esto prueba su existencia y unicidad en coordenadas locales y por lo tanto también su existencia y unicidad en coordenadas globales. □

Definición A.13 *El campo construido en la proposición anterior se llama* campo de Reeb.

Corolario A.6 *El campo de Reeb conserva la forma de contacto.*

Demostración.

$R^L(\alpha) = di_R\alpha + i_R(d\alpha) = 0.$ □

Corolario A.7 *El campo de Reeb nunca es nulo y además cumple*

$$i_R(\alpha \wedge (d\alpha)^n) = (d\alpha)^n$$

Demostración.

Nunca es nulo pues coincide localmente con $\frac{\partial}{\partial t}$. La fórmula se deriva de las dos propiedades que definen al campo de Reeb. □

Ejemplos.

- En la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ con la forma de contacto $\alpha = dt - \theta$, el campo de Reeb es precisamente $R = \frac{\partial}{\partial t}$, puesto que cumple claramente las dos propiedades.
- En $\mathbb{R}^3$ con la forma $\alpha = xdy + dz$ el campo de Reeb es $\frac{\partial}{\partial z}$.
- Consideremos la esfera S^{2n-1}, de dimensión $2n-1$. La esfera es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$ en el que introducimos coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. La esfera junto con la forma $\alpha = \sum x_i dy_i - y_i dx_i$ es una variedad de contacto. El campo de Reeb es, salvo un factor

$$R = x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

En el caso de la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$, el campo de Reeb es globalmente integrable, cosa que en general no ocurre. A cada punto del espacio de fases se le asocia un curva integral maximal. En la variedad definimos una relación de equivalencia, diciendo que dos puntos son equivalentes si pertenecen a la misma curva integral. El conjunto cociente es entonces $T^*(\mathcal{V})$. Denotando por π la proyección en el espacio cociente, tenemos que la estructura simpléctica ω del espacio de fases cumple que $\pi^*(\omega) = d\alpha$ donde π es la proyeción canónica de la variedad $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{V})$ en el segundo factor.

A.8. Variedad simpléctica asociada

Sea $(\mathcal{V}, \alpha)$ una variedad de contacto de dimensión $2n+1$. $\mathcal{P}$ denotará el subfibrado del espacio de fases de esta variedad. Vamos a asociar a cada estructura de contacto $(\mathcal{V}, \alpha)$ una variedad simpléctica exacta $(\mathcal{V}_S, \alpha_S)$ y a cada transformación de contacto $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ una transformación canónica $\varphi_S : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}'_S$. Tendremos de este modo definido un functor de la categoría de variedades de contacto en la categoría de variedades simplécticas exactas. Muchos problemas de las variedades de contacto se pueden reducir a problemas sobre variedades simplécticas.

Mediante $\mathcal{V}_S$ denotamos el conjunto

$$\mathcal{V}_S = \{(x, \omega_x) \text{ donde } x \in \mathcal{V}, \omega_x \in \mathcal{P}_x, \omega_x \neq 0\}$$

El conjunto $\mathcal{V}_S$ tiene una estructura fibrada sobre $\mathcal{V}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{V}_S & \to & \mathcal{V} \\ & (x, \omega_x) & \to & x \end{array}$$

La fibra típica es $\mathbb{R} - 0$.

Introduzcamos una estructura diferenciable en el conjunto $\mathcal{V}_S$.

Sea $U \subset \mathcal{V}$ un abierto coordenado y (t, x_i, ξ_i) coordenadas canónicas en dicho abierto. Si (x, ω_x) es un punto de $\pi^{-1}(U)$, le asociamos los $2n + 2$ números

$$(t(x), x_i(x), \xi_i(x), \lambda)$$

donde λ es el único número real que cumple $\lambda\alpha_x = \omega_x$.

Admitamos que efectivamente los cambios de coordenadas son de clase $\mathbb{C}^\infty$. Introduciendo en $\mathcal{V}_S$ la topología menos fina que hace que las coordenadas sean continuas, y aplicando argumentos estandar de geometría de variedades, dotamos a $\mathcal{V}_S$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n + 2$. La proyección canónica $\pi : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}$ es una sumersión epiyectiva, que es un fibrado diferenciable.

Como el conjunto $\mathcal{V}_S$ "está" constituido por formas algebraicas de grado uno, podemos construir una forma diferencial

$$(\alpha_S)_{(x,\omega_x)}(X) = \omega_x(\pi'(X))$$

Como vemos la construcción de la forma α_S es análoga a la construcción de la forma de Liouville en el espacio de fases.

Expresando la forma que acabamos de construir en coordenadas tenemos

$$\alpha_S = \lambda dt - \lambda\xi_1 dx_1 - \cdots - \lambda\xi_n dx_n = \lambda\pi^*(\alpha)$$

lo que prueba que α_S es de clase máxima $2n+2$. De este modo tenemos una estructura de variedad simpléctica homogénea en $\mathcal{V}_S$.

Definición A.14 *La variedad* $(\mathcal{V}_S, \alpha_S)$, *es la* variedad simpléctica asociada *a la variedad de contacto* $(\mathcal{V}, \alpha)$.

Sin embargo las coordenadas que hemos introducido no son canónicas, pero esto se soluciona fácilmente definiendo $\bar{\xi}_i = -\lambda \xi_i$. Ahora

$$(\lambda, x_1, \dots, x_n, t, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$$

ya forman un sistema de coordenadas canónicas para la estructura simpléctica. Si además definimos $\lambda = \xi_0$ y $t = x_0$ la estructura de las variables canónicas es mucho más simétrica.

Sea $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ una transformación de contacto. Esta función se extiende de modo natural a una aplicación biunívoca

$$\varphi_S : \mathcal{V}_S \to \mathcal{V}'_S$$

mediante la fórmula $\varphi_S(x, \omega_x) = (\varphi(x), (\varphi^{-1})^*(\omega_x))$. La aplicación así definida es diferenciable (pruébese en coordenadas) y además es una transformación canónica homogénea

$$\varphi_S^*(\alpha'_S) = \alpha_S$$

Esta función que acabamos de construir hace conmutativo el diagrama

FAlta el diagrama

Del mismo modo que "subimos" a la variedad $\mathcal{V}_S$ las transformaciones de contacto, podemos subir las transformaciones infinitesimales de contacto X que generen un grupo global. A pesar de que estas campos no generen grupos uniparamétricos globales, también existen métodos unívocos para subir campos X que sean transformaciones infinitesimales de contacto. La subida del campo X se denota X_S. Naturalmente X_S conserva la forma α_S.

Como en el caso del fibrado cotangente tenemos las propiedades:

- $(\varphi \circ \phi)_S = \varphi_S \circ \phi_S$.
- $(\varphi_S)^{-1} = (\varphi^{-1})_S$.

- $X \to X_S$ es un morfismo de álgebras de Lie inyectivo.

A.9. Geometría de las 2-formas cerradas

Muchas veces, en mecánica, debemos considerar la forma simpléctica sobre una subvariedad. Naturalmente dicha forma, en general, no será simpléctica sobre la subvariedad.

En el estudio de las variedades de contacto, ciertas construcciones dependen solamente de la 2-forma $d\alpha$, que tiene radical.

Ejemplos como los anteriores nos inducen a estudiar la estructura de las 2-formas cerradas, del mismo modo que en la sección A.1 se hizo con las formas de Pfaff.

Definición A.15 *Dada una 2-forma ω, el* espacio característico *de ω en el punto x es*

$$\mathcal{L}_x = \operatorname{rad} \omega_x$$

El subfibrado $\mathcal{L}$ del fibrado tangente que en cada punto coincide con el espacio característico, se denomina subfibrado característico.

Un campo vectorial X es característico *si $X_x \in \mathcal{L}_x$ para todo x. Esto es equivalente a que $i_X\omega = 0$.*

En el caso en que la 2-forma ω tenga rango constante, el subfibrado $\mathcal{L}$ es diferenciable.

El interés de las formas cerradas se debe a la siguiente proposición.

Proposición A.8 *Sea ω una 2-forma cerrada y de rango constante. El subfibrado característico es integrable.*

Demostración.

Según el teorema de integrabilidad de Frobenius, basta con demostrar que el corchete de dos campos característicos es de nuevo un campo característico. Sean X e Y dos campos característicos

$$
\begin{aligned}
i_{[X,Y]}\omega &= X^L i_Y\omega - i_Y X^L\omega \\
&= -i_Y X^L\omega \\
&= i_Y(i_X D\omega + d i_X\omega) = 0
\end{aligned}
$$

por lo que $[X, Y]$ es un campo característico. □

Veamos ahora tipos canónicos de las 2-formas cerradas.

Teorema A.9 (Darboux) *Sea ω una 2-forma cerrada y de rango constante $2n$. En un entorno de cada punto existen coordenadas*

$$(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n, r_1, \ldots, r_k)$$

tales que

$$\omega = dx_i \wedge d\xi_i$$

Demostración.

Como ω es cerrada, es localmente exacta. Existe una forma de Pfaff α tal que $d\alpha = \omega$. Necesariamente α es de clase $2n$ o de clase $2n+1$. En cualquiera de los dos casos las coordenadas que llevan a α a la forma canónica cumplen el teorema. □

Estamos interesados en las formas definidas sobre variedades de dimensión impar $2n + 1$ y cuyo rango sea el máximo posible, que en este caso es $2n$. El espacio característico de estas formas es unidimensional. Basta con dar un campo característico no nulo para conocer todo el espacio característico.

Por analogía con el caso de las variedades de contacto, denotaremos por

$$(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n, t)$$

a las coordenadas que llevan a ω a la forma canónica.

Daremos varios ejemplos donde se produce esta situación.

Ejemplos.

- Sea $\mathcal{V}$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y h un hamiltoniano. Sea λ un valor regular del hamiltoniano. La hipersuperficie $f = \lambda$ la denotamos Σ_λ. La forma simpléctica ω restringida a Σ_λ es de rango máximo. Consideramos ahora el campo hamiltoniano X_h sobre la hipersuperficie. Resulta que este campo es característico y que por lo tanto genera el subfibrado característico, ya que al ser λ un valor regular dicho campo es no nulo en la hipersuperficie.

- Sea ahora la variedad $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ con la forma simpléctica ω de la variedad simpléctica. En la variedad producto dicha forma no es simpléctica sino que posee radical. El campo $\frac{\partial}{\partial t}$ es característico y al ser no nulo genera el subfibrado característico.

- Dada la variedad $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$, consideramos un hamiltoniano dependiente del tiempo, $h \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{V})$. Asociado a este hamiltoniano tenemos la 2-forma
$$\omega_h = \omega + dh \wedge dt$$
que es de rango $2n$ y cerrada.

  Sea $\bar{X}_h = \frac{\partial}{\partial t} + X_h$ un campo definido en la variedad producto. Este campo es carasterístico de ω_h.

Aplicando el teorema de Cartan de reducción de un sistema exterior, sabemos que si α es de clase m, entonces α se puede expresar localmente en función de m coordenadas y de sus diferenciales. El teorema de Darboux afina más esta situación.

Teorema A.10 (Darboux) *Sea α regular de clase m y $x \in \mathcal{V}$ un punto arbitrario.*

1.- Si $m = 2k + 1$, existen $2k + 1$ funciones $(t, x_1, \ldots, x_k, \xi_1, \ldots, \xi_k)$, independientes funcionalmente, que cumplen

$$\alpha = dt - \xi_1 dx_1 - \cdots - \xi_k dx_k$$

en un entorno del punto x.

2.- Si $m = 2k$, existen $2k$ funciones $(x_1, \dots, x_k, \xi_1, \dots, x_k)$, funcionalmente independientes en un entorno de x tales que

$$\alpha = \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_k dx_k$$

Demostración.

Puede hallarse en el libro de Muñoz o en el de Godbillon. □

El teorema anterior clasifica de modo total las formas de Pfaff de clase constante. Hemos encontrado las tipos canónicos locales de las formas de Pfaff.

Corolario A.11 *Si α es clase $2k$ o de clase $2k+1$ entonces $d\alpha$ es una forma de segundo grado cuyo rango es $2k$.*

Demostración.

Utilizando las formas normales tenemos que en los dos casos

$$d\alpha = d\xi_1 \wedge dx_1 + \cdots + d\xi_k \wedge dx_k$$

lo que prueba que la diferencial tiene rango $2k$. □

Definición A.16 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Un* elemento de contacto *es un par (x, H_x) formado por un punto $x \in \mathcal{V}$ y un hiperplano H_x tangente en dicho punto.*

Dado un elemento de contacto (x, H_x), existe una forma de Pfaff, α_x, que cumple que $\mathrm{Ker}(\alpha_x) = H_x$. Esta forma no es única, puesto que cualquier forma proporcional cumple también la condición.

B. Teorema de Darboux

Existen básicamente dos tipos de demostraciones del teorema de Darboux. La más clásica hace uso de la teoría de los sistemas exteriores. Se proponen ciertas ecuaciones diferenciales y a través de sus soluciones se construyen las coordenadas canónicas.

El otro tipo de demostración, cuyos fundamentos se deben a Moser y a Weistein, utiliza otra estrategia. Se basa en introducir en la variedad otra forma simpléctica ω' y junto con ella un conjunto de formas simplécticas ω_t que las unan. Posteriormente se demuestra que todas las formas ω_t son simplectomorfas. Este tipo de razonamiento es útil en otros desarrollos de la geometría simpléctica.

Necesitamos unos conceptos preliminares sobre las ecuaciones diferenciales.

B.1. Líquidos

Consideremos un subconjunto "rígido" $\mathcal{V}$ del espacio euclídeo. Este conjunto estará lleno de un líquido incompresible. Aunque no es necesario, fijemos por convenio un instante en el que consideremos que el tiempo t es cero.

Dado un instante de tiempo t, la partícula que se encontraba en el punto x pasa a estar en el punto x_t. Asignando a cada punto x de $\mathcal{V}$ el punto x_t donde se encuentra la misma partícula al cabo de un tiempo t, tenemos definido una aplicación

$$\rho_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

La aplicación será inyectiva, puesto que si dos partículas ocupaban posiciones distintas x_1 y x_2 en el instante $t = 0$, en el instante t también deben ocupar lugares distintos.

Como el líquido es incompresible, en todo momento el conjunto $\mathcal{V}$ está lleno de líquido. Dado un punto x de $\mathcal{V}$, la partícula que ahora se encuentra en x, debía encontrarse hace un tiempo t en algún lugar de $\mathcal{V}$. Este razonamiento prueba que la aplicación ρ_t debe ser epiyectiva y en consecuencia también debe ser biunívoca. Además $\rho_0 = \mathrm{Id}$ por construcción.

De este modo podemos definir una función

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R} \times \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & (t, x) & \to & x_t = \rho_t(x) \end{array}$$

Si fijamos t, tenemos definida $\rho_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ que debe ser una aplicación biunívoca. Si fijamos x tenemos la función

$$\begin{array}{rccc} \rho_x : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{V} \\ & t & \to & x_t \end{array}$$

que describe la trayectoria de la partícula que en el instante $t = 0$ se encontraba en el punto x.

En cada instante de tiempo, la partícula que circula por el punto $x \in \mathcal{V}$ tiene una cierta velocidad. Como esto ocurre en todos los puntos, para cada tiempo t tenemos definido un campo vectorial X_t construido con las velocidades de las partículas.

Para calcular el vector velocidad en el punto x y en instante t, tomamos la linea que describe la trayectoria de la partícula y calculamos su velocidad

$$X_t(x) = \frac{d\rho_s(q)}{ds} \, |_{s=t} \text{ donde } q = \rho_t^{-1}(x)$$

El punto q es la partícula que en el instante t pasa por el punto x.

Lo normal es que este campo cambie con el tiempo. En el caso en que esto no ocurra, diremos que el líquido es estacionario y en todo momento el campo de velocidades es X. Como bien sabemos, en este caso se tiene $\rho_t \rho_s = \rho_{t+s}$ y estamos en presencia de un grupo uniparamétrico.

B.2. Isotopías y campos dependientes del tiempo

Definición B.1 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad arbitraria. Una* isotopía *es una función*

$$\rho : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \to \mathcal{V}$$

que cumple:

- *La aplicación es diferenciable.*
- *ρ_t es un difeomorfismo de $\mathcal{V}$ para todo t.*
- $\rho_0 = \mathrm{Id}$.

El concepto de isotopía es la formulación matemática del movimiento de un fluido incompresible.

Definición B.2 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Un* campo dependiente del tiempo *es una aplicación diferenciable*

$$X : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \to T(\mathcal{V})$$

que cumple $X(x,t) \in T_x(\mathcal{V})$.

Una curva integral *es una aplicación $c : (a,b) \to \mathcal{V}$ que verifica la ecuación diferencial $c'(t) = X(c(t),t)$.*

Fijada la variable t, tendremos una sección del fibrado tangente que denotaremos X_t. De esta forma un campo dependiente del tiempo se puede entender como una colección de campos "normales" parametrizada por el tiempo.

En coordenadas, un campo dependiente del tiempo es una combinación lineal de los campos coordenados, pero donde las funciones dependen de las coordenadas y del tiempo.

$$X = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Sumandole a esta expresión la derivada parcial respecto al tiempo, tendremos un campo vectorial "normal", pero definido en la variedad $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$. Denotaremos dicho campo mediante $\tilde{X}$.

$$\tilde{X} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Esta defínción se puede hacer de un modo intrínseco. Para ello recordemos que $T(\mathcal{V}\times\mathbb{R}) = T(\mathcal{V})\times T(\mathbb{R}) = T(\mathcal{V})\times\mathbb{R}^2$

Con esta notación, el campo $\tilde{X}$ es la sección

$$\begin{array}{rccc} \tilde{X}: & \mathcal{V}\times\mathbb{R} & \to & T(\mathcal{V})\times\mathbb{R}^2 \\ & (x,t) & \to & (X(t,x),(t,1)) \end{array}$$

El campo $\tilde{X}$ se llama suspensión del campo dependiente del tiempo X_t

A cada isotopía le podemos asignar un campo dependiente del tiempo mediante la fórmula ya conocida

$$X_t(x) = \frac{d\rho_s(q)}{ds}\,|_{s=t} \text{ donde } q = \rho_t^{-1}(x)$$

El problema de encontrar una isotopía que cumpla esto para un campo dependiente del tiempo es un problema de ecuaciones diferenciales y no tiene siempre solución global, del mismo modo que no tiene solución global el problema de integración de un campo vectorial que no dependa del tiempo.

Recordemos que si la variedad es compacta cualquier campo vectorial genera un grupo uniparamétrico global. Aunque no estemos en una variedad compacta, si el soporte del campo es compacto, también genera un grupo global.

En general, dada una variedad arbitraria y un campo vectorial X lo más que se puede conseguir es un grupo uniparamétrico global, que no estará definido ni para todo punto, ni para todo tiempo.

Utilizando la suspensión de un campo e integrando dicho campo podemos afirmar (ver [**?**, **?**] para los detalles):

- Si la variedad es compacta todo campo dependiente del tiempo genera una isotopía global.
- Si todos los campos X_t tienen soporte compacto, se puede encontrar también una isotopía global.
- Si para algún punto se tiene $X_t(x_0) = 0$ para todo t, entonces existe un entorno U de x_0 y una familia de difeomorfismo locales $\rho_t : U \to$

$\mathcal{V}$ definidas para todos los valores de $t \in [0,1]$. Dichas aplicaciones cumplen la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(\rho_t(x)) = X_t(\rho_t(x))$$

y verifican $\rho_t(x_0) = x_0$.

Esto que hemos definido no es otra cosa que una isotopía local.