Las Matemáticas. Su Origen y Desarrollo

D. Struik

Índice

Los orígenes

Nuestras concepciones matemáticas se formaron como resultado de un prolongado proceso social e intelectual, cuyas raíces se esconden en el remoto pasado. Sus orígenes pueden buscarse en el período neolítico, cuando los hombres, en lugar de limitarse a buscar y conservar sus alimentos, se convirtieron en productores de los mismos, sentándose los cimientos de la agricultura, la domesticación de ganado y, eventualmente, el trabajo de los metales. Los vestigios de algunas actividades de la Edad de Piedra —productos de carpintería, tejido, cestería y alfarería— prueban que esas actividades pudieron estimular el desarrollo de concepciones geométricas. Los procedimientos primitivos de contar, reducidos primeramente a la forma «uno, dos, muchos», condujeron gradualmente a una manera más precisa de denotar los números desde uno hasta diez, y posteriormente, hasta números más grandes. Durante la Edad de Piedra hubo un tráfico considerable, que estimuló también el arte de contar. El estudio de los lenguajes africanos o indoamericanos revela sistemas de numeración, a veces en escala decimal o en una escala de cinco, doce o veinte. Aquí y allá aparecen fracciones simples. Esto condujo a la noción abstracta de número y forma. Cuando en Sumeria y Egipto aparecen los primeros documentos escritos, revelan ya algún dominio de las reglas aritméticas simples. Se advierten tales reglas cuando cuatro aparece como dos más dos, diecinueve como veinte menos uno, veinte como dos veces diez. Los lenguajes muestran también estas relaciones en su manera de expresar los números cardinales. Hicieron su aparición los dibujos en vestidos, cestas y alfombras; se tensaron, ligaron y anudaron cuerdas, y surgieron algunas figuras regulares como símbolos protectores en los ritos mágicos.

Este proceso se vio acelerado en el siguiente período de desarrollo cultural, el de las primitivas civilizaciones de Oriente: Egipto, India, Babilonia y China. Aquí, la matemática apareció ya como una ciencia, pero primero y ante todo como una ciencia práctica, y hasta empírica, indispensable para la agricultura, la medición de la tierra, la tributación, la ingeniería y el arte de la guerra.

La veracidad de las proposiciones y teoremas aritméticos y geométricos era comprobada constantemente en los tratos del hombre con la naturaleza y con su propia estructura social.

La etapa empírico-práctica de la matemática fue complementada, casi desde sus comienzos, por una definida tendencia opuesta, una tendencia hacia la abstracción. La creación de los mismos conceptos de número y figura fue un hecho de abstracción tal, que probablemente debe asociarse con un nivel relativamente elevado de la vida neolítica. Pero tan pronto como se crean estos conceptos, adquieren vida propia. La suma, la resta, la multiplicación, empiezan a ser entendidas como operaciones abstractas, ejecutadas primeramente con objetos, pero después también con los símbolos mismos. Se descubrió que mediante la suma el sistema de números puede extenderse indefinidamente y es posible tener un atisbo de la impresión que esto debió ejercer si se advierte el interés que pusieron los pueblos agrícolas primitivos en la manipulación de números muy grandes. Este hecho es importante para comprender cómo pueden crearse las concepciones matemáticas generalizadas en el mismo proceso social, porque la experiencia directa no conduce a una noción definida de cualesquiera números, sino de los pequeños. También los conceptos de línea, plano y círculo empezaron a adquirir vida propia.

La primitiva historia de las matemáticas descubre, pues, lo que Stuart Mill observó hace cien años: que las premisas originales de esta ciencia de las cuales se deducen las verdades permanentes, pese a todas las apariencias en contra, son un resultado de la observación y la experiencia, y se fundan, en suma, en la evidencia de los sentidos.

Ahora sabemos que la concepción de Mill de estas premisas originales pecaba de exceso de simplificación, que los axiomas de la aritmética y la geometría entrañan algo más que lo que él creía. Pero es cierto que las matemáticas, como ciencia, se desarrollaron mediante la elaboración de conceptos abstractos basándose en el material empírico y dejando luego que estos conceptos vivieran su vida propia. Lo general se desarrolló partiendo de lo particular; el método del ejemplo. Este desarrollo de una ciencia abstracta no condujo de hechos objetivos a hechos imaginativos, sino de la verdad empírica directa a una verdad situada en un plano más elevado de generalidad. En lugar de contar series de pequeña extensión, tales como los dedos, pudieron enumerarse rebaños o ejércitos. La suma, la resta y los principios de la multiplicación se extendieron de números pequeños a otros mayores. Con el descubrimiento de que podían escribirse todos los números dentro de la estructura de un sistema (generalmente, el decimal), es decir, en la forma

$$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_{n-1} b + a_n$$

($a_0, \ldots, a_n$ menores que b, b generalmente $= 10$), se encontró ya una importante ley aritmética, aunque, por supuesto, no en esta forma explícita. En este interjuego de inducción y deducción las matemáticas mostraron ya desde su mismo nacimiento algunos de los aspectos de una verdadera ciencia.

E. T. Bell hace notar que los intuicionistas modernos, que aceptan la formación de la secuencia inacabable de los números naturales como «intuición original», puede que cuenten con un punto de partida inatacable para una construcción abstracta de las matemáticas, pero su posición es claramente anti-histórica. No cabe duda que la intuición «es punto menos que universal entre los primitivos, que, presumiblemente, son seres humanos». La concepción de los números naturales fue el resultado de un proceso de generalización aplicado, en milenios de práctica humana, a los datos empíricos, proceso sometido constantemente a prueba a la luz de la nueva experiencia. Esta experiencia se amplió con la llegada de las sociedades orientales que practicaban la irrigación, pero el proceso de abstracción continuó también a ritmo acelerado.

Con el desarrollo de la antigua civilización oriental, advino otro progreso que hizo que las matemáticas se divorciaran considerablemente del mundo de la experiencia directa: la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de escribas, en los templos y edificios administrativos de Menfis, Babilonia y otros centros orientales.

La preparación de nuevos administradores condujo al planteamiento de problemas abstractos con fines de enseñanza, y esto empezó a adquirir ya la forma de un cultivo de las matemáticas por su propio valor. Se llegó así a una nueva manera abstracta de abordar los problemas relativos a número y espacio, en la que surgieron algoritmos, teoremas y teorías. Los babilonios del segundo milenio antes de J. C. conocían las relaciones numéricas entre los lados de un triángulo rectángulo, conocidas ahora como el teorema de Pitágoras, y resolvían ecuaciones cuadráticas y algunas cúbicas y bicuadráticas. Parte de estas actividades, más complicadas, principalmente numéricas y algebraicas, puede explicarse por las exigencias de la astronomía, pero existía claramente un cultivo de las matemáticas por sí mismas. Las relaciones matemáticas, que se descubrieron y estudiaron independientemente de su aplicabilidad directa, fueron el resultado de la lógica intrínseca y del poder creador de las matemáticas mismas. La relación de estas matemáticas orientales con la práctica siguió siendo siempre harto notoria, y la estructura lógica se desarrolló muy poco.

Sin embargo, la comprobación de la solución numérica de una ecuación de grado superior no se encuentra ya en su aplicación a la tributación, a la geodesia e incluso a la astronomía, sino en la estructura matemática de la ecuación misma. Este desarrollo, iniciado así, fructificó plenamente en las matemáticas griegas.

Un ejemplo instructivo de la manera en que los nuevos conceptos matemáticos surgieron de la lógica del simbolismo mismo, aunque siguieron expresando al mismo tiempo relaciones en el mundo objetivo, se encuentra en la introducción del cero. Los babilonios usaban un sistema sexagesimal de numeración (que facilita la computación fraccional) superpuesto a un sistema decimal (que presenta en su base diez el vestigio constante de que el concepto de número cristalizó en la práctica comercial de contar con los dedos). Este sistema sexagesimal se expresó en un sistema de «valor del lugar», que fue a su vez un gran descubrimiento en el formalismo matemático. El uso de un símbolo social para el cero llegó como complemento necesario del mencionado sistema, para señalar la diferencia entre la notación de números tales como $2 \cdot 60^2 + 5$ y $2 \cdot 60 + 5$. Aquí, el desarrollo del simbolismo matemático mismo condujo, no sólo a una extensión del sistema numérico, sino también a la introducción del símbolo cero en el razonamiento matemático.

La historia de este símbolo, especialmente en la matemática india, lo conecta con la concepción del vacío, que desempeña también un papel en la física aristotélica. No sólo el ser, sino también el no ser, se convirtió en tema de la operación matemática, como preliminar de la matemática del devenir, de la matemática del cambio. Hay que insistir en que esta introducción del cero no significaba que la matemática cayera en ociosas especulaciones, sino que no hizo más que simplificar su procedimiento de ocuparse de los objetos, caracterizados por los números naturales así como por las fracciones.

Con la clase de los mercaderes jónicos del siglo VI antes de J. C., dio comienzo el desarrollo de la estructura lógica de las matemáticas. Esto constituyó un aspecto del racionalismo jónico en su conjunto, que se desarrolló en una atmósfera de actividades comerciales a las que el despotismo oriental no puso demasiados obstáculos. Sabemos muy poco acerca del desarrollo de esta nueva manera de enfocar las matemáticas, aunque parece bastante seguro que algunos de sus descubrimientos —lo irracional y las paradojas del infinito— se desarrollaron como parte de las luchas ideológicas entre la aristocracia y democracia en la Edad de Oro de Grecia. Se reveló claramente la estructura nórdica de la matemática, la posibilidad de un fundamento axiomático de esta ciencia. La elaboración posterior de estos fundamentos tuvo lugar, primero en la península griega en la escuela de Platón, y después por conducto principalmente de los sabios profesionales en la corte de los Ptolomeos en Egipto y de algunos otros monarcas helenísticos. La totalidad del período creador de la matemática «griega» duró solamente unos cuantos siglos y tuvo lugar en un escenario social verdaderamente excepcional cuyo estudio requiere todavía un cuidadoso análisis. El período comenzó con la primera aparición de una democracia en la historia —aunque una democracia coexistente con la esclavitud— y presenció el desarrollo de una aristocracia dueña de esclavos, de la que Platón era un representante, que luchaba los restos de democracia, y llegó a su fin en los primeros siglos del helenismo, cuando Grecia y Oriente se reunieron bajo la hegemonía griega. Durante el imperio romano, cuando la esclavitud alcanzó mayor importancia y se convirtió cada vez más en la base de la propiedad, a la vez que Grecia y el Oriente quedaban reducidos a la categoría de colonias, las clases gobernantes volvieron a caer en una cómoda mediocridad en la que no podía sobrevivir la originalidad.

Se abandonó entonces el contacto inmediato con la práctica en la forma típica de la matemática «griega». Los hombres que crearon esta matemática estaban en efecto distanciados del comercio y del trabajo manual: se les había enseñado a despreciarlos. Así pudieron consagrar todo su tiempo al esfuerzo creador de una naturaleza abstracta. En los *Elementos* de Euclides se situaba a la matemática dentro de un riguroso esquema deductivo. Los teoremas se derivaban de un pequeño conjunto de axiomas. No se formulaban preguntas respecto al origen de los axiomas ni se daban respuestas. Aunque la elección de los axiomas y los postulados, así como el lenguaje en el que son expresados, indica aún su relación con el mundo objetivo, los teoremas son demostrados reduciéndolos a los axiomas y postulados. Se echa de menos toda tentativa de probar la verdad de los teoremas con la experiencia, si bien subsiste el hecho significativo de que muchos de los teoremas de Euclides pueden probarse sobre figuras materiales y resultar exactos dentro de los límites de la observación. Sólo hay, por ejemplo, cinco poliedros regulares diferentes, como prueban ampliamente los experimentos con modelos de cartón o yeso y la investigación sobre los cristales. Sin embargo, entre los conceptos materiales de Euclides hay algunos que ya no pueden ser sometidos a experimento, y aquí es donde resulta más evidente el progreso del razonamiento matemático más allá de la experiencia inmediata. La prueba entre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de los segmentos lineales radica en la razón, no en el experimento, y aunque todavía podemos demostrar con la comprobación efectiva que el volumen de la pirámide es el tercio del de un prisma de base y altura iguales, la prueba requiere el método exhaustivo, es decir, la estructuración de la pirámide en tan gran número de pequeños prismas que nos parece preferible encontrar la demostración sólo por el razonamiento. El razonamiento mismo ha creado sus propias leyes. La prueba de la verdad en las matemáticas se ha convertido ahora en la ausencia de contradicciones. Un teorema es verdadero cuando puede reducirse gradualmente, mediante ciertas operaciones lógicas aceptadas, a una serie de axiomas, cuya verdad es simplemente postulada. La matemática moderna ha aceptado sin reservas este criterio de verdad: la prueba de verdad de una teoría matemática es la ausencia de contradicciones lógicas. En los tiempos modernos, las pruebas se han trasladado de la geometría a la aritmética, de la aritmética a la lógica. Las diferentes teorías de nuestro tiempo respecto a la fundamentación de estos campos se ocupan todas de métodos destinados a probar las contradicciones posibles de un sistema matemático, o mejor, las contradicciones y saltos (consecuencia e integridad). Cuando prevalece tal punto de vista, la cuestión de probar la verdad de la matemática como una imagen del mundo objetivo se convierte en algo remoto, y muchos matemáticos «puros» ni siquiera le prestan gran atención.

La matemática «capitalista»

La matemática moderna es el producto de la aparición del capitalismo. Las ciudades comerciales de la Alta Edad Media europea se hallaban gobernadas por una clase de mercaderes, políticamente conscientes, clase que gradualmente se emancipó de los pequeños señores feudales y estableció su propio imperio comercial. La gran diferencia entre estos mercaderes y los jónicos de dos milenios antes, consistía en la ausencia de esclavitud. La esclavitud, a la larga, frustra el perfeccionamiento tecnológico, y con ello, ahoga la originalidad científica. La clase comerciante de la Alta Edad Media no tropezó con ese impedimento. Había artesanos libres y una clase obrera libre incipiente. La posibilidad de obtener grandes beneficios en el nuevo sistema capitalista condujo a los comerciantes, así como a algunos de los príncipes, a cultivar la navegación y la astronomía. En las ciudades florecieron la aritmética, el álgebra y el nuevo arte de la teneduría de libros. La posibilidad de emplear máquinas con fines productivos estimuló la inventiva. El uso creciente de estas máquinas condujo al estudio de la mecánica, y ésta, a su vez, a la investigación de nuevos métodos en la matemática. Donde la *Rechenhaftigkeit* de la primitiva burguesía promovió la aritmética y el álgebra, la inventiva de esta clase llevó eventualmente al cálculo. Las fuentes de la aritmética y del álgebra se encontraron en Oriente, las del cálculo, entre los griegos, especialmente en Arquímedes. Y cuando, en el primer entusiasmo del descubrimiento, se pasó a menudo por alto la estructura lógica de la matemática, la naturaleza misma de esta ciencia exigió eventualmente el retorno a las cuestiones fundamentales. Mientras Kepler y Stevin fueron esencialmente experimentadores en el campo de la matemática, algo así como si fueran una especie de físicos, los grandes matemáticos del siglo XVII se vieron llevados a desarrollar la matemática por su propio valor. Los grandes descubrimientos de este período —el tratamiento algebraico de la geometría y el cálculo— sólo fueron posibles porque los matemáticos no buscaban aplicaciones inmediatas, sino que seguían la lógica dialéctica de la ciencia misma. Dialéctica, porque estableció nuevas relaciones entre campos antes separados, entre el álgebra y la geometría, entre el problema de la tangente y la determinación de volúmenes, entre el finito y el infinito, entre la matemática y la lógica.

El hecho de que se desarrollaran las matemáticas por su propio valor no quiere decir que se perdiera la conexión entre la teoría y la práctica. Las matemáticas, a los ojos de todos los grandes matemáticos, desde Descartes hasta Leibniz, constituían la clave para la mecánica; y la matemática, la clave para el entendimiento de la naturaleza. La matemática no sólo llegó a ser el modelo de toda la ciencia, sino que proporcionó también la clave de los inventos. Característico de todo este período era la convicción, no sólo de que la matemática enseña las propiedades de la materia, sino de que la armonía de la matemática refleja en cierto modo la armonía del mundo. En los primeros tiempos del Renacimiento, Aristóteles fue reemplazado, en muchas escuelas, por Platón, con su creencia pitagórica en la universalidad del número, y este credo en los poderes de la matemática pasó a convertirse nuevamente, en forma modificada, en una característica típica de los grandes racionalistas del siglo XVII.

La misma relación íntima entre la matemática «pura» y la «aplicada» prevaleció en el siglo XVII y duró hasta bien entrado el siguiente, especialmente en Francia. Para los Bernoulli, al igual que para Euler, Lagrange y Laplace, la matemática era ante todo un instrumento para la comprensión del cosmos. Esto se pone de manifiesto en las grandes obras de la época: las dos grandes obras matemáticas en que culminó el siglo XVII fueron el *Horologium oscillatorium* de Huygens y los *Principia* de Newton; las dos grandes obras culminantes del siglo siguiente fueron la *Méchanique analytique* de Lagrange y la *Mechanique celeste* de Laplace. Esta identificación virtual de la matemática y la mecánica no fue esencialmente rota por las notables descubrimientos de Euler y otros en la teoría de los números, ni por Lagrange en el álgebra.

Con la Revolución Francesa se abrió un nuevo período en la historia de la matemática. Es notable que el nuevo ímpetu científico procediera de la gran transformación política, siendo mucho más indirecta al principio la influencia de la Revolución Industrial subyacente sobre el desarrollo de la matemática. Inglaterra, que fue el primer país afectado por la Revolución Industrial, dio muestras de esterilidad durante muchas décadas en el terreno de la matemática. En cambio, la revolución política afectó de manera mucho más directa las opiniones y las perspectivas. Llevó a posiciones de influencia y poder a nuevas clases interesadas en la promoción de la educación técnica, en el ensanchamiento de las bases sociales de la ciencia y en nuevas ideas de libertad intelectual. La École Polytechnique fundada en París en 1795 para la preparación de ingenieros se convirtió en el prototipo de una institución dedicada no sólo a la enseñanza científica, sino también a la investigación fundamental en el terreno de la matemática y de las ciencias naturales. Los principios de la revolución en la ciencia y en la educación se extendieron a otros países, incluso a aquellos en los que el feudalismo conservaba aún su poder sobre el capitalismo naciente. Después de Francia, Alemania surgió como un gran centro matemático, siendo seguida por otros países. Las demandas hechas a la ciencia se multiplicaron.

En este escenario social, el progreso sólo podía realizarse por medio de la especialización. Así, la matemática se desarrolló en todo su esplendor como un campo de investigación dependiente, aunque no sólo la mecánica, sino también la nueva física matemática ejerció poderosa influencia. Estas dos formas de abordar la matemática, la «pura» y la «aplicada», nunca estuvieron realmente separadas, aun cuando los matemáticos mismos se especializaron cada vez más. Eran muchos los casos en que la matemática «pura» influía sobre la rama «aplicada» y viceversa. Esto demuestra que a pesar de la incrementada abstracción, ha seguido presentando un cuadro de relaciones en el mundo objetivo. Las historias de la matemática reconocen este hecho hasta cierto punto, si bien la interacción de la matemática, la física y la ingeniería es mucho más íntima de lo que suele admitirse. La geometría diferencial de las curvas se desarrolló bajo la influencia de las investigaciones de Barré de Saint-Venant en la elasticidad, la de las superficies como resultado del interés de Monge en la ingeniería y del de Gauss en la geodesia. El estudio que hizo Hamilton de los rayos de la luz condujo a su teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Hasta la tendencia al rigor en la matemática moderna recibió un poderoso impulso del estudio de las series trigonométricas, introducido por Fourier en la teoría del calor; la rigurosa definición de la integral de Riemann se derivaba en su trabajo de series trigonométricas. Durante la segunda mitad del siglo XIX, tanto Klein como Poincaré, los principales matemáticos de esa época, recalcaron en su obra la íntima relación que existe entre la matemática y sus aplicaciones, a la vez que revelaron algunos de sus más sutiles pensamientos. Klein subrayó la importancia de la teoría de grupos en la cristalografía y la mecánica y, en la última parte de su vida, vio en la teoría de la relatividad otra aplicación de sus ideas. En cuanto a la obra de Poincaré, probablemente se comprenderá mejor si tomamos como punto de partida su obra sobre la mecánica celeste. Klein fue quien promovió la fundación del Instituto de Matemáticas Aplicadas en Gotinga. Esta actitud se refleja también en las conferencias de Klein sobre la historia de la matemática en el siglo XIX, conferencias que en muchos lugares ofrecen un punto de vista materialista. El reconocimiento de esta estrecha relación entre la teoría y la práctica, entre los símbolos y el mundo que representan, se advierte también en las tentativas de Hilbert por rescatar los resultados de la matemática moderna de la arremetida de los intuicionistas. Sólo podrá llegarse a una comprensión mas profunda de las fuerzas sociales que intervienen en el desarrollo de la matemática cuando los historiadores de la materia empiecen a percatarse del vasto territorio no descubierto aún por los historiadores económicos. Con ello debe combinarse el estudio de la historia de la tecnología, que es un campo relativamente inexplorado todavía.

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII abrigaban pocas dudas en cuanto a la objetividad de los resultados de sus especulaciones. Como no existía una separación entre la matemática pura y la aplicada, la matemática era para ellos, por encima de todo, una manera de resolver ecuaciones, de encontrar áreas y volúmenes, de resolver problemas de mecánica e ingeniería y de descubrir las leyes de un universo mecanicista. Galileo decía que solo puede comprender la naturaleza quien ha aprendido su lenguaje y las señales con las que nos habla: este lenguaje es la matemática y sus señales son las figuras matemáticas. Hasta el propio Leibniz, sin dejar de creer en el carácter «innato» de las verdades necesarias y eternas, las entendía como «los principios mismos de nuestra naturaleza al igual que del universo», y veía en las matemáticas una de esas verdades necesarias que servía como la exposición universal de formas posibles de conexiones en general y de dependencia mutua. La teoría del número, por su carácter abstracto y su evidente «utilidad» pudo ofrecer una oportunidad para la especulación idealista, pero no la encontramos claramente en esos autores.

La reacción idealista no procedió de los matemáticos, sino del obispo Berkeley, cuyo *esse est percipi* fue un ataque directo contra las ciencias naturales, inclusive contra el carácter objetivo de las concepciones matemáticas.

Berkeley se expresó con absoluta claridad:

> Pero es evidente, por lo que ya hemos demostrado, que la extensión, la figura y el movimiento son sólo ideas que existen en el espíritu... Que el número es por completo una criatura del espíritu, aun cuando se permita a las otras cualidades existir sin él, será evidente para todo el que considere que la misma cosa tiene una denominación diferente de número cuando el espíritu la considera con diferentes aspectos. Así, la misma extensión es uno, o tres, o treinta y seis, según que el espíritu la considere con referencia a una yarda, un pie o una pulgada.

La reacción de los matemáticos puede juzgarse por Leibniz, quien desechó despectivamente la sabiduría de Berkeley:

> El hombre de Irlanda que impugna la realidad de los cuerpos parece que ni da razones adecuadas ni se explica suficientemente. Sospecho que pertenece a esa clase de hombres que desean ser conocidos por sus paradojas.

La crítica que Berkeley hizo de los fundamentos del cálculo siguió siendo, sin embargo, durante mucho tiempo un reto para los matemáticos.

Durante la primera parte del siglo XIX, la actitud de la mayoría de los matemáticos no varió gran cosa, aun cuando Kant les causó alguna impresión en lo relativo a su manera de pensar. Gauss no creía en el carácter apriorístico de nuestras nociones de la geometría proclamado por Kant. La euclidicidad del espacio era para Gauss una proposición empírica:

> He llegado cada vez más a la convicción de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada. Hasta que se haga esto, debemos equiparar a la geometría, no con la aritmética, que conserva su carácter puramente apriorístico, sino más bien con la mecánica.

Gauss tomó incluso las mediciones geodésicas de un triángulo (formado por las cumbres de las montañas Brocken, Hohenhagen e Inselsberg) para averiguar si la suma de los ángulos es de 180 grados, y comprobó que, dentro de los límites de la observación, esta suma es efectivamente de 180 grados.

Riemann, la figura central de la matemática del siglo XIX, manifestó claramente:

> ¿Cuándo es verdadero nuestro entendimiento del mundo? Cuando la interconexión de nuestras concepciones corresponde a las interconexiones de las cosas.

Y Weierstrass, en su discurso inaugural de 1857, después de señalar que la matemática griega había establecido las propiedades de las secciones cónicas mucho antes de que se descubriera que eran también las órbitas de los planetas, agregó que abrigaba la esperanza de que habría más funciones con propiedades tales como las que Jacobi atribuye con encomio a su función *tetha*, la cual nos enseña en cuantos cuadrados puede descomponerse todo número, cómo puede rectificarse el arco de la elipse, y la cual es capaz —siendo la única función que puede hacerlo— de representar la verdadera ley de la oscilación del péndulo.

El esclarecimiento de los fundamentos del cálculo

Cuando en el transcurso del siglo XIX la matemática llegó a niveles cada vez más profundos de generalización y abstracción, y estableció una técnica más y más complicada, empezó a presentarse a los ojos de muchas personas como una estructura independiente, como una creación exclusiva de la mente humana. La ciencia solía desarrollarse en el salón académico, separada del proceso social. Se descuidaba así su función social y la matemática participó más que las otras ciencias en este divorcio de la vida. La creciente especialización del matemático individual tendió a reforzar este aislamiento. La reconciliación del materialismo con el idealismo en Kant encontró partidarios entre los matemáticos, y la afirmación de Kant respecto al carácter apriorístico de la geometría euclidiana fue durante muchos años un poderoso obstáculo para la aceptación de la geometría no euclidiana. En la introducción de Hermann Grassmann a su obra *Ausdehnungslehre*, publicada en 1844, encontramos cierto matiz kantiano en su creencia de que la matemática es solamente una cuestión de pensamiento:

> El pensar existe solo en relación con un ser que se alza frente a él y del que es una imagen, pero este ser es para las ciencias reales una entidad independiente que existe por sí misma fuera del pensar, aunque para las ciencias formales es planteado por el pensar mismo, que nuevamente se contrapone como un segundo acto del pensar. Puesto que la verdad en general consiste en la conformidad del pensar con el ser, en las ciencias formales estriba especialmente en la conformidad del segundo acto del pensar con el ser planteado por el primer acto, y por ende, en la conformidad de ambos actos del pensar. Por consiguiente, en las ciencias formales, la prueba no trasciende del pensar mismo a otra esfera, sino que radica puramente en la combinación de los diferentes actos del pensamiento. Las ciencias formales, por lo tanto, no pueden apartarse de los principios, como las ciencias reales, sino que sus fundamentos son formados por las definiciones. Las ciencias formales estudian, sea las leyes generales del pensamiento, sea la entidad especial planteada por el pensar. Las primeras corresponden a la dialéctica (a la lógica) y la segunda a la matemática pura.

A este aislamiento de la matemática con respecto a la vida podemos atribuir también lo que Klein ha llamado el «nuevo humanismo» de Jacobi, que veía el único fin de la ciencia en el «honor del espíritu humano», sin reclamar para ella ninguna función social:

> Cierto es que Monsieur Fourier tenía la opinión de que el principal objetivo de la matemática consistía en la utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería haber sabido que el único objetivo de la ciencia es el honor del espíritu humano, y que, desde este punto de vista, una cuestión relativa a los números vale tanto como una cuestión relativa al sistema del mundo.

En este período comenzó una nueva y minuciosa crítica de los fundamentos del cálculo. Se comprendió la vaguedad que rodeaba a concepciones tales como límite, continuidad, convergencia e infinitesimal, vaguedad que no había sido eliminada ni por la posición «mística» de Newton y Leibniz, ni por la «racional» de D'Alembert, ni por la «algebraica» de Lagrange. Esto condujo realmente a teoremas falsos, los cuales a su vez, podían haber llevado a erróneas aplicaciones en la mecánica y la física. El programa de esclarecimiento de los fundamentos del cálculo fue llevado a cabo con éxito por Cauchy, Abel, Riemann, Weierstrass y otros muchos matemáticos, con el resultado de que a partir de entonces pudiera usarse el cálculo con confianza. Fácil es ver cómo los matemáticos, profundamente consagrados a la realización de este programa de sutil razonamiento, pudieron tener la impresión de que se entregaban libremente a un juego de la mente humana. Fácil es ver también, retrospectivamente, que estaban edificando el cálculo como un instrumento más perfecto para establecer relaciones objetivas, y gracias a su obra el cálculo puede aplicarse ahora con gran confianza a problemas extraordinariamente sutiles de la mecánica celeste, de la física matemática y de la teoría de probabilidades.

Esta labor sobre los fundamentos del cálculo constituyó sólo un aspecto, aunque muy importante, de todo el replanteamiento de los principios de la matemática que se inició en el siglo XIX y ha continuado hasta nuestros días. Ello condujo, en la segunda mitad del siglo XIX, a una verdadera lucha entre diferentes opiniones concernientes a la naturaleza de la matemática. «¿Qué son los números?», preguntaba Dedekind. «¿Qué es un límite?», preguntaba Du Bois-Reymond. «¿Cual es la relación de la matemática con la lógica?», preguntaba Frege. Tales preguntas atrajeron una atención renovada sobre las antiguas dificultades de Zenón y Eudoxio, así como en cuanto a las de Newton y Lagrange con respecto a la naturaleza del cálculo. La introducción de nuevas y sutiles concepciones matemáticas —las cortaduras de Dedekind, la lógica matemática, la teoría de conjuntos— pareció colocar a la matemática a ritmo acelerado como una ciencia de pensamiento puro, relacionada sólo incidentalmente con la naturaleza. La matemática, para muchos de sus investigadores, parecía no ser otra cosa que un esquema formal, y de aquí sólo había un paso a la creencia de que la matemática no era nada más que un juego. Ya en 1882, Du Bois-Reymond lanzó una advertencia contra esta posición:

> Un esqueleto de análisis puramente formalista y literal, al que conduciría la separación del número y los signos analíticos de la cantidad, degradaría esta ciencia —que, en verdad, es una ciencia natural— hasta reducirla a un simple juego de signos, en el que podrían asignarse significados arbitrarios a los signos escritos, como a las figuras del ajedrez o a los naipes de la baraja.

Hacia esta misma época, Benjamín Peirce había definido la matemática como «la ciencia que extrae conclusiones necesarias», recalcando el razonamiento formal a expensas del contenido. Su hijo, C. S. Peirce, que fue uno de los hombres que establecieron la lógica matemática, llegó más lejos. Para él, la matemática era «el estudio de construcciones ideales»:

> Puesto que las observaciones recaen simplemente sobre objetos de la imaginación, los descubrimientos de la matemática son susceptibles de alcanzar total certidumbre.

Esto constituía el reverso directo del antiguo sentimiento materialista de los grandes matemáticos de los pasados siglos, puesto que basaba la verdad de la matemática en su ausencia de correspondencia con la realidad objetiva. Era otra versión de la interpretación de «juego de ajedrez» contra la cual había prevenido Du Bois-Reymond. Bajo tal interpretación, la inmensa aplicabilidad de la matemática a la mecánica y a la física se convirtió solamente en una notable coincidencia. Posteriormente, Bertrand Russell, el jefe de la escuela logística que llevó a cabo el programa de Peirce, definió la «matemática pura» como «la clase de todas las proposiciones de forma *p* implica *q*», reduciendo todas las proposiciones de la matemática a proposiciones de lógica. La escuela formalista, que se concentró en la tarea de demostrar que la estructura matemática puede obtenerse mediante una serie de deducciones hipotéticas tomadas de axiomas no interpretados, no vio a menudo en la matemática nada más que eso, aunque Hilbert, su fundador, vio claramente el contenido real en la forma abstracta. Y el jefe de la escuela intuicionista, Brouwer, interpretó también la matemática como un producto exclusivamente del cerebro:

> La matemática es una creación libre, independiente de la experiencia: emana de una sola intuición original apriorística, que puede llamarse, o constancia en cambio, o unidad en la realidad.

Esta «intuición original» corresponde, como la base de un método abstracto de construcción matemática, a una dialéctica de la realidad, y en la obra de Brouwer condujo a descubrimientos matemáticos. Sin embargo, negó significación matemática a considerables secciones de la matemática, y en realidad, no sólo mutiló su aplicabilidad, sino que las privó también de algunos de sus mejores resultados. Ello suscitó la ira de Hilbert: «Nadie nos arrojará del paraíso que Cantor creó para nosotros». Hilbert fue especialmente quien, en la labor que realizó en busca de un fundamento impecable de la totalidad de la matemática, desarrolló un aparato puramente formal de signos y reglas de operación, pero recalcó siempre la armonía entre forma y contenido, entre teoría y práctica, entre signo humano y mundo objetivo.

La propensión de ciertos matemáticos a sacrificar el contenido a la forma o a considerar su ciencia como separada de la naturaleza, fue —y sigue siendo— parte integrante de un movimiento académico general que encuentra en las concesiones al idealismo, la solución, no sólo de sus inquietudes científicas y filosóficas, sino también de algunas de sus preocupaciones sociales. El hecho de que en ciertos círculos de matemáticos —es decir, aquellos que se interesaban por las cuestiones de fundamentación— existiera una tendencia a cultivar la forma más bien que el contenido y a reducir las matemáticas a un mero esqueleto de proposiciones, fue recibido como una nueva liberación. El propio Russell fundó toda una filosofía en su «atomismo lógico», que con toda modestia le parecía «la misma clase de progreso que el que introdujo en la ciencia Galileo». Esta tentativa de Russell y otros por entender el universo partiendo de un esquema formal de lógica sirvió para que, por conducto de Mach y Avenarius, se recayera eventualmente en el idealismo subjetivo de Berkeley, y llevó a Moritz Schlick a la convicción de que el espacio y el tiempo son subjetivos, a Rudolf Carnap a la creencia de que muchas enunciaciones, tales como «el tiempo es infinito», no son enunciaciones acerca del mundo, sino sólo acerca de la manera en que empleamos el lenguaje, y finalmente a L. Wittgenstein al descubrimiento de que la matemática sólo es una tautología. Esto significa, según las palabras del profesor Mannoury, que es muy sencillo escribir un libro matemático perfecto, como por ejemplo:

$$a = a = a = a^3$$

Vemos todas estas concesiones al formalismo y al idealismo en el último ejemplo como el resultado de la separación de la escuela y la vida, común bajo el capitalismo moderno. Pero tendencias similares existen, no sólo en el terreno filosófico, sino también en el histórico. La matemática es descrita a menudo como una sucesión pura de ideas y desarrollada sin ninguna referencia al escenario social en el que se manifestó. Como resultado, no se hace el menor esfuerzo por dar respuesta a algunas de las más importantes funciones.

¿Por qué se interrumpió el elemento creador en la matemática griega con el crecimiento del imperio romano? ¿Por qué se originó el cálculo en el siglo XVII en Europa, y no en Bagdad bajo los califas? Montucla, en el siglo XVIII, intentó todavía situar la historia de la matemática en un escenario más amplio, mostrando su relación con la mecánica y la astronomía, pero gran parte de esta actitud desapareció en el siglo XIX, aunque dejó algunos rastros en Cantor. Uno de los métodos de las conferencias de Klein sobre la historia de la matemática en el siglo XIX consiste en que rara vez omite señalar las relaciones entre la matemática y las ciencias aplicadas e incluso presta atención a las tendencias filosóficas y sociológicas.

Frente al método idealista de abordar el estudio de la matemática, la concepción materialista recalca:

1. La influencia decisiva de los factores económico-sociales en el moldeamiento del carácter general de la productividad matemática (o de su falta de productividad) en un escenario histórico dado. Ya hemos esbozado cómo puede conducirse ese estudio.

2. La imposibilidad de separar la forma y el contenido, entrelazados en todos los tiempos, ya que el contenido dirige igualmente el progreso de la forma y decide su importancia y supervivencia. Esta relación de forma y contenido impregna la totalidad de la matemática.

Cierto es que el matemático crea sus símbolos y las leyes de operación a los que aquéllos están sujetos. Parece ser un agente libre, un Dios que crea su propio mundo. Sus únicas leyes son las de la consecuencia: su estructura debe estar libre de contradicciones internas y nunca puede conducir a $1 \neq 1$. Muchos matemáticos, como hemos visto, se detienen aquí y sacan la conclusión de que están dedicados a un juego de signos desprovistos de sentido o incluso a un juego de ficciones (como ha pretendido el filósofo Vaihinger).

Otros, llevados por la necesidad inherente a la estructura, pretenden que ésta representa alguna característica de la mente humana o piensan que están consagrados a una tautología. Pero la forma y el contenido son inseparables y están entrelazados incesantemente. Hay una matemática «con sentido», que se diferencia de un juego. Es aplicable a los procesos de la naturaleza, no de una manera, sino de muchas. Conduce de un aspecto general a otro y establece conexiones entre diferentes actitudes o diferentes campos. Puede ocurrir que el lado formal triunfe durante algún tiempo y entonces la construcción libre parece prevalecer, hasta que el contenido se empareja con la forma y dicta a su vez la trayectoria del progreso. La historia de la matemática muestra cómo el contenido triunfa a la larga. Nuestra matemática actual, con todas sus abstracciones y estructuras aparentemente libres, tiene una ramificación y una interconexión internas, y una aplicabilidad a los procesos de la naturaleza como jamás ha tenido. La busca de la consecuencia debe reflejar las leyes del mundo externo.

El criterio final de la verdad debe ser siempre su correspondencia con la realidad. Una teoría es cierta cuando sus teoremas pueden describir o predecir acontecimientos del mundo real. Esto se comprende fácilmente por lo que se refiere a los comienzos de la matemática, pero ¿cuál es la situación tratándose de la matemática moderna, que acepta como criterio de la verdad la ausencia de contradicciones? ¿Existe alguna relación entre el criterio objetivo (el «filosófico») de la verdad y el criterio matemático?

No es este el lugar de examinar las diferentes formulaciones que se han dado a la lógica matemática. Sin embargo, debemos indicar que la lógica no consiste en el libre juego de símbolos, en una serie de convenciones de creación humana, sino que es de por sí fundamental aspecto del mundo real tal como se refleja en la mente humana. Nos encontramos nuevamente con la cuestión de forma y contenido. Tómese, por ejemplo, el concepto de identidad, x equivale a y, con sus leyes de reflexividad $x = x$, de simetría (si $x = y$, entonces $y = x$), y de transitividad ($x = y$ e $y = z$, luego $x = z$). Esto significa sobre el papel la suposición de que podemos reconocer un signo siempre que se presenta. Al mismo tiempo, expresa una cualidad esencial del mundo, a saber, la invariación de un objeto. El mundo fluye eternamente, de modo que dos cosas nunca son iguales y ni siquiera una sola cosa sigue siendo la misma. Con todo, es posible separar aspectos especiales de este mundo y tratarlos como si no cambiaran. El profesor Levy ha llamado a estos aspectos «aisados» y los «aislados» pueden permanecer invariantes y convertirse en objeto de discurso. Una línea recta conserva su identidad para todos nosotros y para todas las generaciones, lo mismo que ocurre con el número 4, la esfera, o una integral. La pelota, que me ha dado la concepción de una esfera, puede moverse, mojarse o pudrirse, pero la esfera misma es una concepción invariante. Las leyes de identidad expresan el hecho de que yo puedo llegar a conclusiones exactas conservando sin modificaciones a través del discurso el elemento «aislado». Es evidente que estas leyes de lógica formal crean la posibilidad del entendimiento y de la actividad humanas, pero no establecen en modo alguno un divorcio entre la matemática y el mundo real. Antes al contrario, hacen posible que la matemática presente una imagen de la realidad.

La lógica formal nos permite establecer relaciones entre objetos («aislados») matemáticos y no matemáticos; pero después de todo se trata de relaciones trilladas (lo que no quiere decir que su estudio sea trivial) y, aun cuando su uso pueda permitir establecer proposiciones cada vez más complicadas, difícilmente harán de la matemática una ciencia creadora. La antigua ciencia oriental, con su estrecha conexión entre la matemática y la realidad, era ya infinitamente más rica. ¿En qué consiste, pues, el secreto de la matemática creadora? En otras palabras, ¿cuál es su contenido? ¿Por qué no es la matemática simplemente una tautología impresionante como ha preguntado y negado Poincaré y como ha preguntado y confirmado Wittgenstein?

La matemática, creación incesante

La matemática, como aspecto del mundo real, participa de su dialéctica. La dialéctica implica creación incesante. Por su misma naturaleza, la matemática es, pues, creadora, trascendiendo constantemente las tautologías que pueden surgir en su estructura. Podemos expresar esto diciendo que la matemática se basa en algo más que la lógica formal. La lógica de la matemática, y especialmente de la matemática en su desarrollo, es una lógica dialéctica. Gran parte de la labor realizada en los últimos 30 años para la fundamentación de la matemática ha sido estimulada por la necesidad de expresar en formulación exacta el significado de este elemento creador de la matemática. Los intuicionistas han recalcado el principio de la inducción completa; los formalistas han introducido los «axiomas trascendentales» y se han opuesto enérgicamente a las tentativas de los logísticos por reducir la matemática a una tautología. La lógica matemática moderna, en comparación con la antigua lógica aristotélica, se ha enriquecido mucho más en el proceso. Sin embargo, es dudoso que pueda encontrarse un sistema de verdades axiomáticas que permita explicar todos los aspectos de la matemática: la realidad tiene más facetas que las que un Horacio axiomaticista sueña en su filosofía. El formalismo de los axiomas se ha sublevado contra las tentativas por reducir la matemática a una tautología, como lo prueban las investigaciones de K. Godel y otros. Aunque todas las escuelas de matemática se han anotado resultados, aún no se han agotado todas las posibilidades de la matemática, la cual se ha negado hasta ahora y probablemente se negará siempre a quedar encerrada dentro de una serie de axiomas y de reglas interdependientes.

Engels hizo notar que los juicios de la lógica dialéctica de Hegel, a pesar de la arbitrariedad de su clasificación, expresan modos universales de obtener nueva información, apareciendo una vez más el desarrollo del pensamiento como el desarrollo de la obtención de información objetiva. Estos juicios pueden considerarse como determinaciones de singularidad, particularidad y universalidad.

Esto puede proporcionarnos, en efecto, un cuadro de la forma en que se han desarrollado las concepciones matemáticas. Por ejemplo, nuestra moderna noción de geometría, nacida, primeramente, de la observación de que las rotaciones conservan las propiedades métricas de una figura (preeuclidiana), lo cual es una determinación de singularidad. En segundo lugar, se descubrió que ciertas propiedades se mantienen invariantes bajo diferentes transformaciones, tales como las proyectivas, afines y rotacionales (principios del siglo XIX), lo cual es una determinación de particularidad, y, en tercer lugar, toda geometría es la teoría de los invariantes de cierto grupo (programa de Erlanger, 1872), lo cual puede considerarse como una determinación de universalidad. Tales consideraciones pueden captarse en lenguaje formal, como lo prueba una secuencia como la siguiente: 1) siete es primo; 2) hay muchos primos; 3) el número de primos es infinito.

El progreso de la matemática se lleva a cabo a lo largo de muchos senderos, todos los cuales pueden considerarse como juicios dialécticos y algunos de los más fértiles pueden describirse así:

1. Pasando de lo específico a lo general v. g., de la teoría de las ecuaciones cuadradas, cúbicas, etc., a la teoría de Galois:

    > El mismo tema de la matemática ya no puede describirse como si se tratara simplemente de forma y número. Estas concepciones constituyen aún el fundamento de toda la matemática, pero temas tales como la geometría proyectiva, la topología, la teoría de grupos, rebasan esta clasificación. Asimismo han desaparecido los límites entre la matemática y la lógica.

2. Pasando de lo discontinuo a lo continuo, de lo finito a lo infinito, v. g., de sumas a integrales, de los números racionales a los reales, o al uso del principio de la inducción matemática:

    > La trascendencia de lo finito a lo infinito ha sido uno de los pasos más creadores que se han dado en el desarrollo, no sólo de

> la matemática, sino del entendimiento en general. «Lo infinito ha removido más profundamente que cualquier otra cuestión la mentalidad humana, ha operado de manera más estimulante que cualquier otra idea sobre el espíritu del hombre, y, sin embargo, necesita ser dilucidado más que cualquier otra concepción», escribió Hilbert. La tentativa de Hilbert por demostrar que lo infinito puede ser eliminado, no sólo de la matemática —tentativa hecha ya por Eudoxio— sino también de las ciencias naturales —«lo infinito no se realiza en ninguna parte»— no parece convincente: lo infinito tiene una manera propia de derribar todos los límites establecidos por el hombre, en un período histórico dado, como base de su entendimiento.

3. Pasando de la cantidad a la cualidad, v. g., de la geometría métrica a la proyectiva, y, por ende, a la topología. Al pasar de los números positivos a los negativos, introducimos en la aritmética la noción de dirección unidimensional, y al pasar de los números reales a los complejos, introducimos un simbolismo para denotar un cambio de dirección bidimensional:

   > La matemática, aunque nacida del estudio del número y de la forma, se ha emancipado de tal manera de sus orígenes, que pocos matemáticos se muestran ya inclinados a definir su ciencia como la del número y la forma. La misma lógica del *quantum* ha conducido a la cualidad de muchas maneras. Leibniz fue quizás el primero que se percató de este aspecto del desarrollo de la matemática. «Creo que necesitamos otro análisis, propiamente geométrico o lineal, que nos exprese directamente el sitio, como el álgebra expresa la magnitud». Sin embargo, se ha manifestado una tendencia a demostrar que la matemática puede construirse solamente sobre los números naturales, curiosa vindicación del punto de vista de Hegel de que el fin y la noción de la matemática es la cantidad, junto con una repudiación de su criterio de que en la matemática no hay desarrollo y relación de ideas.

4. El principio de la permanencia de las leyes formales, v. g., cuando pasa-

mos de la aritmética al álgebra de los números reales, y luego al álgebra de los sistemas de números complejos e hipercomplejos, y del dominio «real» al «ideal».

> Este principio fue formulado por Hermann Hankel en estas palabras: «Cuando dos formas, expresadas en símbolos generales de la *arithmetica universalis*, son iguales entre sí, lo serán también cuando los símbolos dejen de denotar cantidades simples y, por ende, las operaciones reciban también otro contenido.»

5. El principio de la permanencia de las relaciones matemáticas, llamado así por V. Poncelet, quien se inspiró en el descubrimiento de la geometría proyectiva (el «principio de continuidad», por ejemplo, permitió a Poncelet pasar de los teoremas geométricos conocidos a otros nuevos o relacionar entre sí los teoremas conocidos):

> Una aplicación especial de este principio fue la labor realizada en geometría con elementos imaginarios, que condujo a Cayley y Klein al descubrimiento de que la geometría métrica forma parte de la geometría proyectiva, después de que Poncelet había derivado la segunda de la primera.
>
> También podemos situar bajo este principio la concepción fundamental del isomorfismo, que nos permite interpretar de diferentes maneras el mismo sistema de relaciones formales entre elementos abstractos. De ello se tienen ejemplos en la polaridad de la geometría proyectiva y en la prueba aportada por Hilbert sobre el carácter no contradictorio de la geometría euclidiana aplicando ésta a un álgebra lineal por medio de coordenadas. Aquí, la forma de un sistema corresponde a una multiformidad de contenidos, y sólo recibe su vida del contenido.

6. El principio de conservación del lenguaje matemático, v. g., cuando pasamos de tres sistemas paramétricos aplicables al espacio a cuatro sistemas paramétricos, utilizando nuevamente términos tales como «punto» y «línea» para un «espacio» de cuatro dimensiones.

Se ha escrito mucho acerca de la confusión que existe en el uso del lenguaje también en la matemática. La lógica matemática ha introducido símbolos para eliminar palabras tales como «o », «y », «todos »y «hay». Esta tendencia ha oscurecido a veces el carácter creador del uso de las palabras. Atribuyendo concepciones más amplias a palabras tales como «punto», «espacio» y «vector» se ha facilitado considerablemente la investigación en nuevos campos. Un buen ejemplo se encuentra también en el uso de expresiones tales como «espacio funcional», «funciones ortogonales» y «densidad de probabilidad».

> La negativa de los griegos a extender a lo irracional el término «número» tuvo una influencia perjudicial sobre el desarrollo de su matemática. Esto no debe considerarse simplemente como un accidente desafortunado. Más bien fue el resultado de la importancia que los griegos concedieron a la geometría abstracta, resultado, a su vez, de la aparente renuencia de algunos de sus prominentes matemáticos a aceptar la concepción oriental de la aritmética y del álgebra, lo cual sólo puede explicarse por la división social entre griegos y orientales.

Sin embargo, el hecho de que se empleen símbolos y palabras para expresar concepciones matemáticas no debe llevar a una asimilación como la de que «la matemática es el lenguaje del tamaño» la cual sobrestima el aspecto formal de la matemática y trata como incidental su contenido, su aspecto creador como imagen del mundo real.

Podría continuarse esta enumeración de algunos de los principios creadores de la matemática y analizarse aquellos casos en que se superponen. Cuando estos principios creadores se aplican inconscientemente o semiconscientemente, podemos hablar de intuición matemática. El estudio de esta intuición e inventiva matemática ha sido iniciado recientemente por J. Hadamard. El sentimiento de armonía con el universo que experimenta el matemático creador expresa la concordancia de sus pensamientos con el mundo. Aquí, pisa un terreno común al del artista y el místico.

Por consiguiente, el carácter deductivo con el que se presenta ante el público la matemática bien organizada no debe impedirnos ver el carácter esencialmente inductivo en el que se han obtenido sus resultados. Esto equivale, en última instancia, a considerarla como un estudio de la naturaleza —aun cuando sólo se trate de algunas de sus características más abstractas, menos susceptibles de experimentación fuera de los niveles elementales y ajenas a la transformación histórica—, que proporciona la respuesta básica a la cuestión tantas veces citada de Poincaré:

> La posibilidad misma de la ciencia matemática parece una contradicción insoluble. Si esta ciencia solo es deductiva en apariencia, ¿de dónde le viene ese rigor absoluto que a nadie se le ocurre discutir? Si por el contrario todas las proposiciones que establece pueden obtenerse unas de otras mediante las reglas de la lógica formal, ¿por qué no se reduce la matemática a una inmensa tautología?

Sólo añadiremos aquí que el «rigor absoluto» no existe. Los criterios del rigor en la matemática son de carácter histórico: lo que parecía riguroso a Euclides o a Gauss no nos lo parece a nosotros. Y cabe esperar —los axiomáticos modernos parecen confirmarlo— que, aun en el caso de que la matemática pudiera reducirse a una tautología a los ojos de una generación, volvería a evadirse de los confines de su prisión en una fecha ulterior.

La experimentación directa y los descubrimientos matemáticos

La prueba de la verdad en la matemática —su carácter no contradictorio— es la prueba de su aplicabilidad al mundo real. Esta no es una afirmación que puede probarse como un teorema: la prueba entre idealismo y materialismo no puede decidirse sobre el papel o en teoría, sino que tiene que decidirse también en la práctica de la vida. Los hechos de que la matemática es posible, de que es aplicable a la naturaleza y de que tiene una función social están todos ellos entrelazados.

Esto no constituye un punto de vista utilitario, porque la matemática sólo puede desarrollarse cuando puede ser explorada sin perseguir conscientemente aplicaciones inmediatas, ni significa tampoco que la matemática sea una ciencia empírica, como pretendía Mill. En tanto que la matemática sea empírica, no puede atribuírsele la categoría de ciencia.

Esto no excluye el hecho de que los descubrimientos matemáticos han sido obtenidos por medio del experimento directo. En primer lugar, cada generación tiene que aprender por sí misma y sometiéndolos a la prueba directa de la realidad los conceptos fundamentales de la matemática. Nuestra convicción de la validez eterna de los teoremas de Pitágoras o del hecho de que $2 \cdot 2 = 4$, no se basa en alguna concepción a priori ni puede ser quebrantada por cualquier matemático habilidoso que en un gran libro repleto de fórmulas saque la conclusión de que estos teoremas son simples convencionalismos. Nuestra convicción se basa en el hecho de que los teoremas corresponden a propiedades del mundo real ajenas a nuestra conciencia, las cuales pueden ser comprobadas y cuya comprobación es accesible a todas las personas desde su temprana juventud. La demostración de los teoremas de Pitágoras y las tentativas por probar que $2 \cdot 2 = 4$ que han existido desde los días de Leibniz sirven para conectar estas verdades con otras todavía más elementales y todavía más fáciles de probar. La creación de una estructura matemática es necesaria e indispensable para el descubrimiento de otras verdades menos obvias y más difíciles de probar.

En los tiempos modernos se han hecho relativamente pocos descubrimientos matemáticos por medio del experimento y esos descubrimientos se han logrado en gran parte indirectamente al intentar explicar los fenómenos de la física. Un ejemplo lo constituye la superficie ondular de Fresnel, descubierta al estudiar la doble refracción en medios cristalinos. Otros resultados indirectos de la experimentación son las numerosas soluciones de las ecuaciones diferenciales obtenidas en el estudio de los problemas eléctricos o mecánicos. Ciertas propiedades de la factorización de grandes números han sido descubiertas por procedimientos mecánicos y el reciente desarrollo de las máquinas calculadoras puede conducir a más descubrimientos. Algunos teoremas geométricos han sido descubiertos por medio de modelos de yeso y alambre (v. g., el teorema de Henrici, de 1874, sobre la movilidad de las líneas rectas en un hiperboloide). Tales casos, en la matemática moderna, son raros y hasta ahora nunca han sido de importancia fundamental.

El hecho de que relativamente pocos descubrimientos matemáticos modernos son el resultado de la experimentación directa no puede utilizarse para aducir que, cualquiera que haya sido el origen de la matemática antigua, la moderna es en todo caso un producto puro de la mente humana. No significa que la matemática haya llegado a una etapa en que puede desarrollarse en gran medida dentro del marco de su propia estructura sin esperar su comprobación por medio de la experimentación. La situación puede compararse con la de la construcción de nuevos instrumentos (lentes, filtros de ondas, etc.), que pueden diseñarse sobre el papel con la confianza absoluta de que ejecutarán la tarea que de ellos se espera, debido a nuestro exacto conocimiento de las leyes de la física.

Este criterio matemático específico de la verdad nos permite descubrir sobre el papel, con lápiz y pluma, y por medio del razonamiento, relaciones que son una imagen de las relaciones objetivas si el conjunto de axiomas de que partimos es esa imagen. Para el razonamiento matemático no es necesario, como ya sabemos, tomar en consideración en la investigación futura el significado objetivo de los axiomas, aun cuando esto pueda ejercer influencia sobre la selección de los asuntos a investigar. Puede tomarse libremente un punto como «elemento A» y una línea como «elemento B». La elección de los axiomas en casi todos los tipos de matemáticas actualmente estudiados estará de acuerdo con ciertas reacciones objetivas. A este respecto, estamos de acuerdo con A. Tarski, quien es, por su parte, un lógico:

> Así, se oye y hasta se lee de vez en cuando que no puede atribuirse ningún contenido definido a los conceptos matemáticos, que en la matemática no sabemos realmente acerca de qué estamos hablando y que no nos interesa si nuestras afirmaciones son o no verdaderas. Tales juicios deben ser vistos con desconfianza. Si en la construcción de una teoría nos conducimos como si no entendiéramos el significado de los términos de esta disciplina, eso no quiere decir en modo alguno que esos términos carezcan de significación... Es de suponer que a nadie le interesaría un sistema formal respecto del cual no seamos capaces de dar una sola interpretación.

Podemos añadir que hasta la misma subsistencia de los matemáticos como grupo (no necesariamente como individuos) depende del hecho de que la matemática tenga sentido. En caso contrario, en las nóminas de las universidades y escuelas superiores dejaría de haber sitio para ellos. Puede que algunos ricos estuvieran dispuestos a contratar a matemáticos como contratan ahora jugadores de ajedrez o expertos en bridge, y tal vez otros se interesaran por ayudar a los matemáticos como artistas. Sin embargo, sabido es que los artistas encuentran pocos protectores bajo el capitalismo, muchos menos que los hombres de ciencia. El papel social constructivo que la matemática desempeñó en la edificación del capitalismo comercial e industrial fue esencialmente lo que hizo que se fomentara su estudio, aun cuando tuviera que adoptar formas cada vez más abstractas para llegar a planos más profundos de la realidad.

La aplicabilidad universal

Muchos matemáticos del siglo XIX creían en una matemática «pura» cultivada solamente por el «honor del espíritu humano» y en un campo «aplicado» más o menos distinto, que solía considerarse como menos digno de esfuerzo. El cuadro del Tiziano «El amor sagrado y el profano», de la galería Borghese de Roma, parecíales a algunos de ellos que representaba «la matemática pura y la aplicada». Esta distinción va perdiendo rápidamente sentido como forma fundamental de clasificación, aunque siga siendo un modo conveniente de denotar tipos de especialización. Toda teoría matemática «pura» ha encontrado, o puede encontrar pronto, su campo de aplicabilidad. El matemático que sigue sobre el papel el razonamiento estrictamente teórico de su ciencia puede descubrir en cualquier momento que en realidad ha estudiado las leyes de algún campo de la física, la química o la estadística. El ejemplo clásico lo constituye la teoría de las secciones cónicas, creada por los griegos probablemente con el resultado de su investigación de la trisección del ángulo o la duplicación del cubo, investigación que, dos mil años después, resultó ser el estudio de las órbitas de los planetas. Un ejemplo moderno de índole similar es el cálculo tensorial, descubierto como un estudio de la invariación de las formas diferenciales cuadráticas, que varias décadas después contribuyó a proporcionar una descripción del universo con arreglo a la teoría de la relatividad de Einstein. Ahora sabemos también que los tensores expresan nociones fundamentales en la dinámica, la elasticidad y la hidrodinámica. El cálculo tensorial puede aplicarse asimismo a las máquinas eléctricas giratorias y a la comparación de los colores, y algunas de sus concepciones más elementales han encontrado ya su camino en la psicología.

Tales ejemplos pueden multiplicarse centenares de veces. Una de las concepciones más abstractas de la matemática moderna es la medida de Lebesgue, que a algunos matemáticos les pareció la misma culminación de su ciencia como juego puro del espíritu. Sin embargo, ahora sabemos que constituye la clave para la comprensión de la teoría de la probabilidad y de la estadística, y esto a su vez es indispensable para la explicación de fenómenos tan distintos como el movimiento browniano de las partículas en suspensión líquida y la conducta de largo alcance de los sistemas mecánicos, que muestra la conexión entre la obra de Gibbs sobre la mecánica estática y la de Lebesgue sobre integración.

Jacobi observó ya cómo las funciones *theta* describen relaciones profundamente ocultas en la teoría de números con los movimientos del péndulo. Ahora, la teoría de números, uno de los campos más abstractos de la matemática, basada en la llamada función *theta* de Riemann, encuentra su camino en problemas de ingeniería eléctrica así como en algunas partes de la física. El álgebra matricial proporciona la base de la mecánica del *quantum* y de la conducta de los átomos en acción. Y Hilbert ha indicado que ciertas leyes de la genética, en el caso de la pequeña mosca *drosophila*, obedecen a los axiomas concernientes a la noción de «entre», así como a los axiomas euclidianos lineales de congruencia.

Por lo tanto, es posible sostener, como a veces se cree (y la concepción idealista subjetiva de la matemática debe conducir necesariamente a ello) que el amplio radio de aplicabilidad de la matemática a la naturaleza y a la sociedad es simplemente una coincidencia. La aplicabilidad de la matemática es demasiado general, demasiado universal, para tomar en serio semejante alegato. Cuando aumenta en tales proporciones el número de esos «accidentes», «coincidencias» y «golpes de suerte» debemos buscar una explicación más racional. Todos los hombres de ciencia están consagrados a la tarea cooperativa de descubrir el comportamiento del mundo, y aun cuando a veces puedan divergir considerablemente los caminos que siguen y los resultados que obtienen, la unidad fundamental del universo hace posible la armonía eventual de todos los resultados. El autor está convencido de que todos los hombres de ciencia serios comparten la creencia en esta unidad fundamental de todas las cosas que existen y de que esa creencia les comunica su profunda convicción en que sus investigaciones están repletas de sentido.

Tanto la práctica como la teoría han justificado así ampliamente nuestra creencia de que toda la actividad matemática es valiosa en el sentido de que proporciona una imagen de algún aspecto del mundo real. Ello parece coincidir con la opinión de Leibniz, según la expresó Schrecker:

> Mientras que según los utilitarios, el conocimiento es verdadero porque es útil, sería más adecuado, a juicio de Leibniz, decir que si el conocimiento es verdadero tiene que ser útil y que, por consiguiente, la utilidad solo es una confirmación, pero no un elemento constitutivo de la verdad. El conocimiento verdadero, en efecto, representa el orden real y objetivo del universo.

Debido a esta íntima relación entre pensamiento y naturaleza, entre experimento y teoría, revelada por la matemática moderna, Hilbert se mostró dispuesto a aceptar la noción de la «armonía preestablecida» formulada por Leibniz; pero en la relación entre la matemática teórica y sus aplicaciones vio todavía algo más que esta «armonía preestablecida». Sin la matemática, es imposible la astronomía y la física de nuestro tiempo: estas ciencias, en sus partes teóricas, se disuelven, por así decir, en la matemática.

A esta unidad del pensamiento y de la naturaleza es a lo que ha conducido el desarrollo de la matemática moderna.