El Porvenir de las Matemáticas

H. Poincaré

Para prever el porvenir de las matemáticas, el verdadero método es estudiar su historia y su estado actual.

¿No es eso para nosotros, los matemáticos, un procedimiento un poco profesional? Estamos acostumbrados a extrapolar, que no es más que un medio de deducir el porvenir del pasado y del presente, y como sabemos lo que vale, no corremos el peligro de ilusionarnos sobre el alcance de los resultados que nos da.

En épocas anteriores han existido profetas de desgracias. Repetían, convencidos, que todos los problemas susceptibles de ser resueltos lo habían sido ya, y que después de ellos lo único que haría falta hacer es ponerse a cosechar. Felizmente el ejemplo del pasado nos tranquiliza. Tantas veces hemos creído haber resuelto todos los problemas, o por lo menos, haber hecho el inventario de los que implican una solución. Más tarde el sentido de la palabra solución se ha ensanchado, los problemas insolubles se han convertido en los más interesantes de todos, se han planteado nuevos problemas en que ni siquiera se había soñado. Para los griegos, una buena solución era la que no empleaba más que la regla y el compás; en seguida ha sido la que se obtiene por la extracción de radicales, después en la que no figuran más que funciones algebraicas o logarítmicas. Los pesimistas se encontraban así siempre desbordados, forzados a retroceder, de manera que en el presente creo que no hay más.

Mi intención no es, por lo tanto, combatir los puestos que ya han dejado de existir; sabemos que las matemáticas continuarán desenvolviéndose, pero se trata de saber en qué sentido. Se me responderá: «en todos los sentidos», y esto es verdad en parte; pero si todo esto fuera cierto, sería un poco espantoso. Nuestras riquezas no tardarían en sernos embarazosas y su acumulación produciría un revoltijo tan impenetrable que sería, como para el ignorante, la verdad desconocida.

El historiador, el físico, deben elegir entre los hechos. El cerebro del sabio, que no es más que un rincón del Universo, no podrá contenerlo jamás entero, de manera que en medio de los innumerables hechos que la naturaleza nos ofrece, hay algunos de los que no nos ocuparemos mientras que, por el contrario, estudiaremos otros. Sucede lo mismo, *a fortiori*, en matemáticas; el matemático tampoco puede conservar entremezclados todos los hechos que se le representan; tanto más cuanto que estos hechos lo representan a él mismo, perdón, iba a decir que era su capricho el que los había creado. Es él quien construye con todas las piezas una combinación nueva relacionando los elementos; no es por lo general la naturaleza quien lo ha traído todo hecho.

Ocurre a veces que el matemático se plantea un problema para satisfacer una necesidad de la física; que el físico o el ingeniero le piden que calcule un número a fin de aplicarlo. ¿Dirán que los geómetras debemos limitarnos a esperar los pedidos y, en lugar de cultivar nuestra ciencia para nuestro placer, no tener otra preocupación más que la de acomodarnos al gusto de nuestra clientela? Si las matemáticas no tienen otro objeto más que acudir en ayuda de los que estudian la naturaleza, es lógico que de estos últimos debemos esperar la palabra de orden. ¿Es legítima esta manera de pensar? De ningún modo; si no hubiéramos cultivado las ciencias exactas por ellas mismas, no habríamos creado el instrumento matemático, y el día en que hubiera venido la orden del físico nos hubiera encontrado desarmados.

Los físicos tampoco esperan para estudiar un fenómeno que cualquier necesidad urgente de la vida material les haya creado una necesidad, y tienen razón; si los sabios del siglo XVIII hubieran abandonado la electricidad, puesto que no representaba para ellos más que una curiosidad sin interés práctico, no existirían en el siglo XX ni la telegrafía, ni la electroquímica, ni la electrotécnica. Los físicos obligados a elegir no van únicamente guiados por la utilidad. ¿Cómo hacen entonces para escoger entre los hechos naturales? Los hechos que les interesan son los que pueden conducir al descubrimiento de una ley; o sea los que son análogos a muchos otros, y que no se nos aparecen aislados, sino estrechamente agrupados con otros. El hecho aislado choca tanto al vulgo como al sabio. Pero es que el físico solamente sabe ver el lazo que une varios hechos en los que la analogía es profunda, pero oculta. La anécdota de la manzana de Newton es probable que no sea verdadera, pero es simbólico; hablemos entonces como si lo fuera. Debemos creer que antes que Newton hubo muchos hombres que vieron caer manzanas: sin embargo, ninguno dedujo nada. Los hechos serían estériles si no hubiera espíritus capaces de escoger entre ellos, discerniendo aquellos detrás de cuales se oculta alguna cosa y de reconocer lo que se oculta detrás, espíritus que en el hecho bruto verán el alma del hecho.

En matemáticas hacemos más o menos lo mismo; de los diversos elementos que disponemos, podemos hacer millones de combinaciones diferentes, pero cada una, mientras esté aislada, está completamente desprovista de valor. Nos ha costado a menudo mucho trabajo construirla, pero esto no nos sirve absolutamente de nada, si no es para darnos un tema de ejercicio para la enseñanza secundaria. Sucederá todo lo contrario el día en que esta combinación entre en una clase de combinaciones análogas y en la que habremos notado esta analogía; no nos hallaremos más en presencia de un hecho, sino de una ley. Y ese día, el verdadero inventor no será el obrero que pacientemente haya edificado alguna de estas combinaciones, será el que haya puesto en evidencia su analogía. El primero no habría observado más que el hecho, el otro habrá percibido el alma del hecho. A menudo para afirmar esta analogía le habría bastado inventar una palabra nueva y esta palabra habría sido creadora; la historia de la ciencia nos provee de una cantidad de ejemplos que a todos nos son familiares.

El célebre filósofo vienés Mach dijo que el papel de la ciencia es producir economía de pensamiento, de la misma manera que la máquina produce economía de esfuerzo. Y es muy justo. El salvaje cuenta con los dedos, o juntando pequeñas piedras. Enseñando a los niños la tabla de multiplicar, les ahorraremos para más tarde innumerables maniobras con piedras. Con piedras o de otra manera alguien ha comprobado que 6 veces 7 son 42 y ha tenido la idea de anotar el resultado. Por esto es por lo que no tenemos necesidad de volver a comenzar. Éste no ha perdido su tiempo, aunque hubiera calculado nada más que por placer; la operación no ha requerido más de dos minutos, pero habría exigido dos mil, si mil hombres la hubieran vuelto a comenzar después de él.

La importancia de un hecho se mide entonces por su rendimiento, es decir, por la cantidad de pensamiento que nos permite economizar.

En física los hechos de gran rendimiento son los que entran en una ley muy general, puesto que permiten prever un gran número de ellos; lo mismo sucede en matemáticas. Me he dedicado a un cálculo complicado y he llegado penosamente al resultado; no sería recompensado en mi esfuerzo si no hubiera sido capaz de prever los resultados de otros resultados análogos y dirigirlos con seguridad evitando los tanteos a los que tuve que resignarme la primera vez. No habría perdido el tiempo si estos mismos tanteos acabaran por revelarme la profunda analogía del problema que he tratado con una clase mucho más extensa de otros problemas; si me hubieran enseñado a la vez los parecidos y las diferencias; si, en una palabra, me hubieran hecho entrever la posibilidad de una generalización. No es un resultado nuevo el adquirido, sino una fuerza nueva.

Una fórmula algebraica que nos da la solución de un tipo de problemas numéricos, siempre que se reemplacen al final las letras por números, es el ejemplo simple que se presenta al espíritu. Gracias a ella un solo cálculo algebraico nos ahorra el trabajo de recomenzar constantemente nuevos cálculos numéricos. Pero esto no es más que un grosero ejemplo; todo el mundo sabe que hay analogías que no pueden expresarse por una fórmula y que son las más valiosas.

Un resultado nuevo tiene valor cuando reúne elementos conocidos hace mucho tiempo, pero dispersos hasta el punto de parecer extraños los unos a los otros, e introduce de repente el orden donde reinaba el desorden. Nos permite ver entonces en conjunto cada uno de estos elementos y el lugar que ocupan en él. Este nuevo hecho no es solamente de gran valor por él mismo, sino que él solo da valor a los viejos hechos que relaciona. Nuestro espíritu es enfermizo como lo son nuestros sentidos; se perdería en la complejidad del mundo si esta complejidad no fuera armoniosa. No vería los detalles sino lo mismo que un miope, y estaría obligado a olvidar cada uno de ellos antes de examinar el siguiente, puesto que sería incapaz de abarcarlos todos. Los únicos hechos dignos de nuestra atención son los que introducen el orden en esta complejidad y la tornan, por lo tanto, accesible.

Si los matemáticos atribuyen una gran importancia a la elegancia de sus métodos y de sus resultados, no es sólo por diletantismo. ¿Qué es lo que nos da, en efecto, en una solución, en una demostración, el sentimiento de la elegancia? Es la armonía de las diversas partes, su simetría, su feliz equilibrio; es en una palabra todo lo que pone orden, lo que da unidad y nos permite, por lo tanto, ver claro y comprender el conjunto al mismo tiempo que los detalles. Pero precisamente esto es lo que le da un gran rendimiento; en efecto, cuanto más claramente veamos el conjunto, mejor nos daremos cuenta de su analogía con otros objetos vecinos, más probabilidades tendremos, por consiguiente, de adivinar las generalizaciones posibles. La elegancia puede provenir del sentimiento de lo imprevisto por el encuentro inesperado de objetos que no estamos acostumbrados a relacionar; aun ahí es fecunda, puesto que nos descubre parentescos hasta entonces desconocidos; también es fecunda cuando resulta del contraste entre la sencillez de los medios y la complejidad del problema planteado; nos hace reflexionar entonces sobre la razón de este contraste, y lo más frecuente es que nos haga ver que esta razón no es debida al azar, que se encuentra en cualquier ley insospechada. En una palabra, el sentimiento de la elegancia matemática no es otra cosa que la satisfacción debida a no sé qué adaptación entre la solución que se acaba de descubrir y las necesidades de nuestro espíritu, y es a causa de esta adaptación cómo la solución puede ser para nosotros un instrumento. Esta satisfacción estética está, por consiguiente, unida a la economía de pensamiento. Otra vez más la comparación del Erecteón me viene al espíritu, pero no deseo emplearla con demasiada frecuencia.

Es por la misma razón por la que, cuando un cálculo un poco largo nos ha conducido a cualquier resultado simple y sorprendente, no estamos satisfechos hasta tanto no hayamos mostrado que podíamos haberlo previsto, si no todo el resultado, por lo menos sus trazos más característicos. ¿Por qué? ¿Qué es lo que nos impide contentarnos con un cálculo que nos ha enseñado, según parece, todo lo que desearíamos saber? Es porque en casos análogos, el gran cálculo no podría servirnos de nuevo; según parece no sucede lo mismo con el razonamiento, a menudo medio intuitivo, que podía habernos permitido preverlo. Como este razonamiento es cierto, vemos al mismo tiempo todas las partes, de manera que se da uno cuenta inmediatamente de lo que hacía falta cambiar para adaptarlo a los problemas de la misma naturaleza que puedan presentarse. Puesto que él nos permite prever si la solución de éstos será simple, nos muestra también si el cálculo merece ser emprendido.

Lo que acabamos de decir basta para demostrar cuán vano sería reemplazar por un procedimiento mecánico cualquiera la libre iniciativa del matemático. Para obtener un resultado que tenga valor real, no es suficiente crear continuamente cálculos y más cálculos, poseer una máquina para ordenar las cosas; esto nos indica que no es solamente el orden, sino el orden inesperado el que produce algo. La máquina puede trabajar sobre el hecho bruto, pero nunca logrará aprehender el alma de éste.

Desde mediados del siglo pasado [siglo XIX], los matemáticos han tratado con ahínco creciente de alcanzar la certeza absoluta; tienen razón y esta tendencia se acentuará cada vez más. En matemáticas la certeza no es todo, mas sin ella no hay nada; una demostración que no sea rigurosa, es nada. Creo que a nadie se le ha de ocurrir discutir esta verdad. Pero si se la tomara demasiado al pie de la letra, se podría inferir que antes del año 1820, por ejemplo, no había matemáticas, y esto sería excesivo; los geómetras de entonces sobrentendían voluntariamente lo que nosotros explicamos mediante prolijos discursos; claro es que esto no quiere decir que no se hubiesen apercibido de todo; pero pasaban por encima demasiado rápidamente, y para verlo bien hubiera sido necesario que se hubieran molestado en decírnoslo.

¿Es acaso necesario decirlo tantas veces? Los que primero se han preocupado del rigor, nos han dado razonamientos que debemos tratar de imitar, pero si las demostraciones del futuro deben ser construidas sobre este modelo, los tratados de matemáticas se tornarían muy extensos; si temo por el tamaño no es solamente que me preocupe por el amontonamiento que se produciría en las bibliotecas, sino porque al alargar nuestras demostraciones perderían esa aparencia de armonía de la cual acabo de explicar hace un momento la utilidad.

Es hacia la economía del pensamiento a la que se debe tender; no es suficiente dar modelos a imitar. Es preciso que se pueda después de nosotros abandonar esos modelos y en lugar de repetir un razonamiento ya hecho, resumirlo en algunas líneas. Y es en esto en lo que se ha logrado el éxito varias veces: por ejemplo, existía una clase de razonamientos que se parecían y que se encontraban en todas partes; eran perfectamente rigurosos, pero eran largos. Un día se imaginó la palabra convergencia uniforme, y esta sola frase los ha tornado inútiles; ya no hay más necesidad de repetirlos, puesto que se sobrentienden. Los que dividen las dificultades en cuatro, pueden, pues, hacernos un doble servicio, primero enseñarnos a actuar como ellos en la necesidad, pero sobre todo permitirnos lo más a menudo posible no hacer nada como ellos, sin sacrificar nada al rigor.

Acabamos de ver a través de un ejemplo cuál es la importancia de las palabras en matemáticas; podría citar muchos otros. Como dice bien Mach, no podemos darnos cuenta cabal de cuánto pensamiento puede economizar una palabra bien elegida. No recuerdo si ya he dicho que las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes. Es conveniente que estas cosas diferentes por la materia, sean parecidas por la forma, que puedan, válganos la frase, fundirse en el mismo molde. Cuando el lenguaje ha sido bien elegido, nos sorprende ver que todas las demostraciones hechas para un objeto conocido se aplican inmediatamente a muchos objetos nuevos; no hay que cambiar nada, ni las palabras, puesto que los nombres se han vuelto idénticos.

Una palabra bien elegida es suficiente muchas veces para hacer desaparecer las excepciones que traen las reglas enunciadas en el antiguo lenguaje; es para esto para lo que se han imaginado las cantidades negativas, las cantidades imaginarias, los puntos del infinito y no sé cuántas más; las excepciones, no lo olvidemos, son perniciosas, puesto que ocultan las leyes.

Ésta es una de las características en las que se reconocen los hechos de gran rendimiento, son los que permiten esas felices innovaciones del lenguaje. El hecho bruto se halla algunas veces desprovisto de interés, se le ha podido señalar muchas veces sin haber prestado gran servicio a la ciencia; no adquiere valor hasta el día en que un pensador perspicaz se da cuenta de la relación, relación que pone inmediatamente en evidencia y que simboliza mediante una palabra.

Los físicos obran lo mismo: han inventado la palabra energía, y esta palabra ha sido prodigiosamente fecunda, puesto que también crea la ley eliminando las excepciones y designa con la misma palabra cosas diferentes por la materia y parecidas por la forma.

Entre las palabras que han ejercido más influencia señalaré las de grupo y la de invariante. Nos han hecho conocer la esencia de muchos razonamientos matemáticos; nos han mostrado en cuántos casos los viejos matemáticos consideraban los grupos sin saberlo y cómo, creyéndose muy alejados los unos de los otros, se encontraban de pronto aproximados sin comprender por qué.

Hoy diríamos que habían encarado los grupos isomorfos. Sabemos ahora que en un grupo la materia interesa poco, que es solamente la forma la que interesa, y que cuando se conoce bien un grupo, se conocen por consiguiente todos los grupos isomorfos; y gracias a estos nombres de grupos e isomorfismo, que resumen en pocas sílabas esta regla sutil y la tornan en seguida familiar a todos los espíritus, el tránsito es inmediato y puede hacerse economizando todo esfuerzo de pensamiento. La idea de grupo se une, por lo tanto, a la de transformación. ¿Por qué se atribuye tanto valor a la invención de una nueva transformación? Pues porque de un solo teorema nos permite sacar diez o veinte; tiene el mismo valor que un cero colocado a la derecha de un número entero.

Esto es lo que ha determinado hasta ahora el sentido del movimiento de la ciencia matemática y lo que lo ha de determinar en el futuro. Pero a esto contribuye también la naturaleza de los problemas que se plantean. No podemos olvidar cuál debe ser nuestro propósito; de acuerdo con mi opinión este propósito debe ser doble; nuestra ciencia confina a la vez con la filosofía y con la física, y es para estos dos vecinos para quienes trabajamos. Es por eso por lo que hemos visto y veremos aún marchar las matemáticas en dos direcciones opuestas.

Por un lado la ciencia matemática debe reflexionar sobre ella misma, y esto es útil, porque cavilar sobre ella misma es reflexionar sobre el espíritu humano que la ha creado, tanto más puesto que entre las múltiples creaciones del hombre es esta ciencia la que menos ha pedido al exterior, en una palabra, la más pura y esencial. Es por esto por lo que ciertas especulaciones matemáticas son útiles, por ejemplo, las que encaran el estudio de los postulados, de las geometrías no acostumbradas, de las funciones de porte extraño. Cuanto más se aparten estas especulaciones de las concepciones más comunes y por consiguiente de la naturaleza y de sus aplicaciones, mejor nos mostrarán lo que el espíritu humano es capaz de hacer cuando se sustrae a la tiranía del mundo exterior; por consiguiente, nos lo harán conocer mejor en cuanto a él mismo.

Pero es al lado opuesto, al de la naturaleza, al que hace falta dirigir el grueso de nuestro ejército.

Allí nos encontramos al físico o al ingeniero que nos dicen: «¿Podría usted integrarme esta ecuación diferencial? La necesitaré dentro de ocho días para tal construcción que debe ser terminada para tal fecha.» «Esta ecuación, responderemos, no entra en uno de los tipos integrables, y usted bien sabe que no hay más.» «Sí, lo sé, ¿pero entonces para qué sirve usted?» A menudo bastaría llegar a un acuerdo: el ingeniero en realidad no necesita la integral en términos finitos; necesita conocer el porte general de la función integral, o simplemente una cierta cifra fácil de deducir de esta integral en caso de conocerlo. Por regla general no lo conoce; pero podría calcular esta cifra sin él, si supiese justamente de qué cifra tiene el ingeniero necesidad y con qué aproximación.

Antes no se consideraba resuelta una ecuación sino cuando se había expresado la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto apenas si es posible más que en el uno por ciento. Lo que siempre podemos hacer es resolver el problema *cualitativamente*, es decir, tratar de conocer la forma general de la curva, que representa la función desconocida.

Nos queda luego por encontrar la solución *cuantitativa* del problema; pero si lo desconocido no puede ser determinado por un cálculo finito, lo podemos representan siempre por una serie infinita convergente que permita calcularlo. ¿Puede esto considerarse como una solución? Se cuenta que Newton comunicó a Leibniz un anagrama poco más o menos como éste: aaaaabbbeeeii, etc. Leibniz, naturalmente, no comprendió nada; pero nosotros, que tenemos la clave, sabemos que este anagrama quiere decir, traduciéndolo al lenguaje moderno: «Yo sé integrar todas las ecuaciones diferenciales.» Claro es, que una de dos, o Newton tuvo suerte, o se hacía singulares ilusiones. Quería simplemente decir que podía formar (por el método de los coeficientes indeterminados) una serie de potencias satisfaciendo formalmente la ecuación propuesta.

Hoy una solución parecida no nos satisfaría más, por dos razones: porque la convergencia es demasiado lenta y porque los términos se suceden sin obedecer a ninguna ley. Por el contrario, la serie Θ nos parece satisfactoria, primero porque converge muy rápida (esto para el practicante que desea obtener su número lo antes posible), y segundo porque vemos de un solo vistazo la ley de términos (esto satisface las necesidades estéticas del teórico).

Pero entonces no hay problemas resueltos y otros que no lo están; sólo hay problemas más o menos resueltos, según lo sean por una serie convergente más o menos rápida, o bien regidos por una ley más o menos armoniosa. Ocurre a veces que una solución imperfecta nos conduce hacia una solución mejor. Sucede a menudo que la serie es de una convergencia tan lenta que el cálculo es impracticable y no se logra demostrar más que la posibilidad del problema.

Entonces el ingeniero encuentra esto irrisorio y tiene razón, puesto que no le ayudará a terminar la construcción para la fecha fijada. Se preocupa poco de saber si esto será útil a los ingenieros del siglo XXII. Nosotros pensamos de distinta manera: algunas veces somos más felices por haber ahorrado un día de trabajo a nuestros nietos que una hora a nuestros contemporáneos.

Alguna vez tanteando empíricamente, digámoslo así, llegamos a una fórmula suficientemente convergente. ¿Qué más quiere usted?, nos dice el ingeniero; sin embargo, a pesar de todo, no nos damos por satisfechos: hubieramos querido prever esta contingencia. ¿Por qué? Porque si la hubiéramos previsto una vez, sabríamos preverla otra. Hemos tenido éxito, pero es poca cosa a nuestros ojos, si no tenemos la firme esperanza de volver a comenzar.

A medida que la ciencia evoluciona es más difícil abarcarla; en vista de ello se la divide a fin de estudiarla detalladamente; en una palabra, esto es especializarse. Si se exagera en este sentido sería un obstáculo para el progreso de la ciencia. Ya lo hemos dicho, es por aproximaciones inesperadas entre las diversas partes como se efectúan los progresos. Especializarse mucho sería lo mismo que prohibir estas aproximaciones. Esperemos que en congresos como los de Heidelberg y Roma, poniéndonos en contacto los unos con los otros, abriremos miradores sobre el campo del vecino, obligándonos a compararlo con el nuestro, y de esta manera saldremos un poco de nuestro pequeño villorrio; ése sería el mejor remedio para el peligro que acabo de señalar.

Pero me he detenido demasiado en estas generalidades y es necesario entrar en el detalle.

Pasemos revista a las ciencias particulares que forman las matemáticas; veamos lo que cada una ha hecho, hacia dónde nos conducen y qué es lo que se puede esperar de ellas. Sí lo que precede es justo, observaremos que los grandes progresos del pasado se han producido cuando dos de estas ciencias se han aproximado, cuando hemos tenido conciencia de la similitud de sus formas, a pesar de lo dispar de sus materias, cuando se han modelado la una sobre la otra, de tal manera que una pudo aprovecharse de las conquistas de la otra. Debemos también entrever en acercamientos de este género los progresos del porvenir.

La aritmética

Los progresos de la aritmética han sido mucho más lentos que los del álgebra y análisis; es fácil comprenderlo; el sentimiento de la continuidad es una guía inapreciable de la cual carece el aritmético; cada número entero está separado de los otros, tiene, permítaseme expresarlo así, cada uno de ellos una especie de excepción, y es por eso por lo que los teoremas generales son más raros en la teoría de los números, y los que existen están más ocultos y han de escapar más tiempo a los investigadores.

Si la aritmética está retrasada con respecto al álgebra y al análisis, le conviene tratar de modelarse sobre estas ciencias para aprovecharse de sus adelantos. El aritmético debe guiarse por las analogías con el álgebra. Estas analogías son numerosas y si, en muchos casos, no han sido estudiadas bastante profundamente como para ser de utilidad, son presentidas, por lo menos después de largo tiempo; el lenguaje de estas dos ciencias indica que ya se las ha percibido. Así se habla de números trascendentes; nos damos cuenta en seguida de que la clasificación futura de éstos tiene ya por imagen la clasificación de las funciones trascendentales, y, sin embargo, no vemos muy bien todavía cómo podremos pasar de una clasificación a otra; pero si la hubiéramos visto ya, estaría hecho y no sería obra del futuro.

El primer ejemplo que se me ocurre es el de la teoría de las congruencias, en la que se encuentra un paralelismo perfecto con la de las ecuaciones algebraicas. Claro es que se llegará a completar este paralelismo, que debe subsistir, por ejemplo, entre la teoría de las curvas algebraicas y la de las congruencias de dos variables. Cuando los problemas relativos a las congruencias con varias variables sean resueltos, se habrá dado el primer paso hacia la solución de muchas cuestiones de análisis indeterminados.

El álgebra

La teoría de las ecuaciones algebraicas detendrá mucho tiempo aún la atención de los geómetras; los lados por donde se la puede estudiar son numerosos y diversos.

No hay que creer que el álgebra está agotada porque nos provea de las reglas necesarias para formar todas las combinaciones posibles; nos falta buscar las combinaciones interesantes, las que satisfacen tal o cual condición. De esta manera se constituirá una especie de análisis indeterminado en el que las incógnitas no serán más números enteros, sino polinomios.

Entonces esta vez es el álgebra quien se modela sobre la aritmética, guiándose sobre la analogía del número entero, ya sea con el polinomio entero de coeficiente cualquiera, o con el polinomio entero de coeficiente entero.

La geometría

Parece como si la geometría no pudiera contener nada que no se hubiera tratado ya en el álgebra o en el análisis; que los hechos geométricos no fueron otra cosa que los hechos algebraicos o analíticos expresados en otro lenguaje. Se podría creer entonces que después del examen que acabamos de hacer, no nos quedaría nada por agregar que se refiriera especialmente a la geometría. Esto sería desconocer la importancia de un lenguaje bien constituido, no comprender el sentido que se les puede dar a las mismas cosas, la manera de expresarlas y, por consiguiente, de agruparlas.

En primer lugar, las consideraciones geométricas nos conducen a plantearnos nuevos problemas; son, si se quiere, problemas analíticos, pero que no nos hubiéramos planteado con motivo del análisis. El análisis se aprovecha, sin embargo, de la misma manera que se aprovecha de lo que está obligado a resolver para satisfacer las necesidades de la física.

Una gran ventaja de la geometría es que los sentidos pueden socorrer a la inteligencia y ayudarla a entrever la ruta a seguir; muchos espíritus prefieren por eso llevar los problemas del análisis a la forma geométrica. Desgraciadamente nuestros sentidos no pueden conducirnos muy lejos; se alejan desde el momento en que queremos salir fuera de las tres dimensiones clásicas. ¿Quiere esto decir que fuera de este dominio restringido donde parecen querer encerrarnos, no debemos contar más que sobre el análisis puro? ¿Que toda geometría que tenga más de tres dimensiones es vana y sin objeto?

En la generación que nos ha precedido, los más grandes maestros hubieran contestado: « Sí, hoy en día estamos tan familiarizados con esta noción que podemos hablar de ella incluso en un curso universitario sin provocar demasiada sorpresa.»

Pero ¿para qué puede servirnos? Es fácil saberlo: expresa en términos muy concisos lo que el lenguaje analítico ordinario diría en frases complejas. Además, este lenguaje nos hace denominar con el mismo nombre lo que se parece y afirma de las analogías, no dejándonoslo olvidar. Nos permite, por lo tanto, orientarnos en este espacio que es demasiado grande para nosotros y que no podemos ver, recordándonos sin cesar el espacio visible que no es más que una imagen imperfecta, sin duda, pero que aún es una imagen. Aquí, como en todos los casos anteriores, es la analogía con lo simple lo que nos permite comprender lo complejo.

Esta geometría de más de tres dimensiones no es una simple geometría analítica, no es solamente cuantitativa, también es cualitativa, y es por ello por lo que es más interesante. Hay una ciencia que se llama *Análisis Situs* y que tiene por objeto el estudio de las relaciones de posición de los diversos elementos de una figura, abstrayendo sus tamaños. Esta geometría es solamente cualitativa, sus teoremas serían verdaderos si las figuras, en vez de ser exactas, fueran groseramente copiadas por un niño. Se puede también hacer un *Análisis Situs* de más de tres dimensiones. Su importancia es tan grande que nunca se podría insistir lo bastante sobre ello; el partido que ha sacado Riemann, uno de sus principales creadores, bastaría para demostrarlo. Es necesario que se la llegue a construir completamente en los espacios superiores; tendremos un instrumento que nos permitirá realmente ver en el hiperespacio, supliendo nuestros sentidos.

Los problemas del *Análisis Situs* no se habrían, por otra parte, planteado si no se hubiera hablado más que en lenguaje analítico; o más bien, me equivoco: se habrían planteado seguramente, puesto que su solución es necesaria a un gran número de cuestiones de análisis; pero se habrían planteado aisladamente, los unos después de los otros y sin que se hubiera notado su lazo común.

El cantorismo

Me he referido antes a la necesidad que tenemos de recordar continuamente los primeros principios de nuestra ciencia y al provecho que se puede sacar del estudio del espíritu humano. Es esta necesidad la que ha inspirado dos tentativas que han ocupado un gran lugar en la historia de las matemáticas en estos últimos años. La primera es el cantorismo, cuyo aporte a la ciencia todo el mundo conoce. Cantor ha introducido en la ciencia una manera nueva de considerar el infinito matemático. Uno de los rasgos más característicos del cantorismo es que en lugar de elevarse a lo general edificando construcciones cada vez más complicadas y de definir por construcción, parte del *genus supremus*, y no define como lo hubieran hecho los escolásticos *per genus proximun et diferentiam specificam*. De ahí el horror que algunas veces han inspirado a ciertos espíritus, a Hermite, por ejemplo, cuya idea favorita era comparar las ciencias naturales con las matemáticas. En la mayoría de nosotros estas prevenciones se habían disipado, pero ha ocurrido que se ha chocado con ciertas paradojas y contradicciones aparentes que hubieran colmado de gozo a Zenón de Elea y a la escuela de Megara. Entonces todos nos hemos puesto a buscar el remedio. Por mi parte, pienso, y no soy el único, que lo importante está en no introducir más que otros seres que lo puedan definir completamente en un número finito de palabras. Cualquiera que sea el remedio adoptado, nos podemos prometer el placer que un médico experimenta al ser llamado para seguir un interesante caso patológico.

La búsqueda de los postulados

Nos hemos esforzado en enumerar los axiomas y postulados más o menos disimulados que sirven de fundamento a las diferentes teorías matemáticas. El señor Hilbert ha obtenido brillantes resultados. Parece, al principio, que este dominio era limitado, que no hubiera nada más que hacer cuando el inventario estuviera terminado, lo que sucedería pronto. Pero cuando se tenga todo enumerado aún quedarán bastantes maneras para clasificarlo todo, pues un buen bibliotecario encuentra siempre en qué ocuparse y cada nueva clasificación es de utilidad al filósofo.

Detengo este examen que no podría ni en sueños presentar completo. Creo que estos ejemplos habrán sido suficientes para mostrar por qué mecanismo las ciencias matemáticas han progresado en el pasado y en qué sentido deben marchar en el futuro.