

# Índice

Introducción . . . . .	3
Potencias . . . . .	4
Radicales . . . . .	5
Polinomios . . . . .	6
Ecuaciones y sistemas . . . . .	7
Números complejos . . . . .	8
Logaritmos y trigonometría . . . . .	9
Límites . . . . .	10
Derivadas . . . . .	11
Integrales . . . . .	12
Vectores . . . . .	13
Matrices . . . . .	14
Sistemas lineales . . . . .	15
Sucesiones y combinatoria . . . . .	16
Estadística descriptiva . . . . .	17
Estadística bidimensional . . . . .	18
Probabilidad . . . . .	19

# Geometría no euclidiana

- Las rectas en el modelo de Poincaré. Rectas paralelas.
- La suma de los ángulos de un triángulo no es  $180^\circ$ .
- Construcción de la mediatriz de un segmento. Perpendicularidad. Punto medio.
- Construcción de la bisectriz. Igualdad de los ángulos.
- Construcción de las mediatrices, del circuncentro y de la circunferencia circunscrita.
- Construcción de las medianas y del baricentro.
- Construcción de las bisectrices y del incentro.
- Construcción de un triángulo equilátero y equiángulo.
- Construcción de un triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras.
- Construcción de un cuadrado a partir de un lado.
- Otra construcción de un cuadrado.

# Introducción

- Realiza la operación:

$$51 + 53 \cdot (3 - 21) - 7 \cdot (-2)^7$$

- Realiza la operación:

$$\frac{41}{2} + \frac{11}{3} \left( \frac{77}{3} + \frac{5}{9} \right) - 3$$

- Realiza la operación con decimales:

$$4,8(45,94 - 89,78)^2 - 89,65$$

- Calcula  $\pi$  con 50 cifras. Lo mismo para  $\sqrt{2}$ .
- Factoriza 612 y 5292.
- Calcula MCM y MCD de 612 y 5292.
- Comprueba si 5673 es primo. Lo mismo con  $2^{32} + 1$ .
- Calcula el cociente y el resto de 567854 entre 457.
- Calcula todos los divisores 180.
- Demuestra que 496 es un número perfecto.

# Potencias

- Calcular las siguientes potencias:

$$a) (-3)^{23} \qquad b) a^{-4}$$

- Comprueba la propiedad del producto de potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

- Haz lo mismo con la propiedades de división y potencia de potencia:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^n)^m = a^{nm}$$

- Comprueba la propiedad:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- Comprueba la propiedad:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- Comprueba la propiedad:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

# Radicales

- Calcula, de modo exacto y aproximado:

$$a) \sqrt{80}$$

$$b) \sqrt[5]{224}$$

- Transforma en radicales las siguientes potencias:

$$a) 2^{7/3}$$

$$b) 2^{16/6}$$

- Simplifica los siguientes radicales:

$$a) \sqrt[12]{2^9}$$

$$b) \sqrt[3]{2^{11}}$$

- Realiza la siguiente multiplicación:

$$\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt{2^7} \cdot \sqrt[3]{2^2}$$

- Racionaliza:

$$a) \frac{3}{\sqrt[3]{2^7}}$$

$$b) \frac{5}{2\sqrt{3}-2}$$

- Simplifica:

$$23\sqrt{125} + 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$$

- Simplifica:

$$\sqrt[3]{2^5\sqrt{2}}$$

# Polinomios

- Realiza la operación:

$$(x - 2)^2 + (8 - 5x)(4x - 1)$$

- Factoriza los siguientes polinomios

$$p = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 \quad q = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

- Calcula MCM y MCD de los polinomios anteriores.
- Realiza la siguiente operación:

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 5} + \frac{5x - 2}{7x - 1} \cdot \frac{6x + 2}{4x^2 - 1}$$

- Calcula el cociente y el resto:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x - 3) : (2x^2 - 1)$$

- Factoriza (con números complejos) y sustituye:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3$$

# Ecuaciones y sistemas

- Resuelve la ecuación:

$$(2x^2 + 1)^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$$

- Resuelve la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Resuelve el sistema lineal:

$$\begin{cases} 5x + 3 &= 20 - 9y \\ 2x - 3y &= 5x - y \end{cases}$$

- Resuelve el sistema no lineal:

$$\begin{cases} xy &= 15 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{cases}$$

- Resuelve de modo aproximado:

$$3 \cos(x) + x^2 = 5$$

- Resuelve la inecuación:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

# Números complejos

- Calcula  $\sqrt{-1}$  y resuelve la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

- Resuelve la ecuación (y factoriza):

$$x^3 - 8x^2 + 29x - 52$$

- Dados  $z = 4 + 5i$  y  $w = -2 + 6i$  realiza varias operaciones con ellos.
- Pasa a forma polar el número  $z$ . Calcula el módulo y el argumento por separado.
- Dado el número complejo  $5_{30^\circ}$  calcula su parte real e imaginaria.
- Utiliza la fórmula de Euler para pasar a forma polar.
- Calcula el conjugado del número anterior y pásalo a forma polar.
- Calcula distintas raíces de  $3 + 6i$ .



# Logaritmos y trigonometría

- Calcula los siguientes logaritmos:

$$a) \log_2(1024) \qquad b) \log_2(\sqrt{8})$$

- Halla el valor de  $x$  en las siguientes igualdades:

$$a) \log_x(125) = 3 \qquad b) 7^x = 115$$

- Resuelve la ecuación:

$$\log(x+3) - \log(x-6) = 1$$

- Realiza la siguiente operación (en radianes):

$$5 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(\pi) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

- Realiza la siguiente operación (en grados):

$$\cos(60^\circ) - 5 \sin(135^\circ)$$

- Resuelve la siguiente ecuación, tanto en radianes como en grados:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

- Calcula el arcocoseno de  $\frac{1}{2}$ .

- Encuentra la fórmula de seno de la suma, de la resta,...

# Límites

- Dada la función  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , calcula la función en valores próximos al cero. Dibuja la función en un entorno de cero.

- Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

- Calcula los límites laterales en  $x = 0$  de:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

- Calcula la derivada de  $\cos(x)$  en un punto  $a$  utilizando la definición con límites.

# Derivadas

- Calcula la derivada de las funciones:

$$f(x) = 4x^3 - 35x^2 \qquad f(y) = 4y^3 - 35y^2$$

- Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros.

- Calcula la derivada de orden 5 de:

$$f(x) = \cos(12x)$$

- Calcula los posibles extremos y puntos de inflexión de:

$$f(x) = 4x^3 - 2x + 7$$

- Calcular la ecuación de la recta tangente a:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

en el punto  $x = \pi$ .

- Calcula polinomios de Taylor de:  $f(x) = \cos(x)$ .

# Integrales

- Calcula la integral indefinida:

$$\int x \cos(x)$$

Deriva el resultado para comprobar la integral.

- Calcula la integral definida:

$$\int_0^4 4x^2 - 3$$

- Calcula la integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

- Calcular la integral dependiente de parámetros:

$$\int A \cos(\omega t) dt$$

- Calcular el área entre las curvas:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2 + 4$$

- Descomponer en fracciones simples:

$$\frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

# Vectores

- Dados  $u = (3,4)$  y  $v = (-2,5)$  realiza combinaciones lineales con ellos.
- Realiza el producto escalar de los vectores.
- Calcula el módulo de ambos vectores. Haz la raíz cuadrada del producto escalar y comprueba que coinciden.
- Calcula el ángulo que forman ambos vectores.
- Calcula el ángulo con la fórmula del coseno.
- Dados los vectores  $u = (3,5,2)$  y  $v = (-3,1,7)$  calcula su producto vectorial y comprueba la antisimetría.
- Dado el vector  $w = (7,2,1)$  comprobar que no se cumple la propiedad asociativa.
- Comprueba la identidad de Jacobi con los tres vectores.

# Matrices

- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

realiza combinaciones lineales con ellas.

- Multiplica las matrices anteriores.
- Calcular  $A$  elevado a la quinta potencia.
- Calcular el determinante de las matrices.
- Calcula la inversa de  $A$ . También la traspuesta.
- Construye la matriz identidad de orden 3 y comprueba que es el elemento neutro.
- Calcula el rango de las matrices.
- Reduce las matrices a forma escalonada.
- Construye una matriz utilizando la hoja de cálculo.

# Sistemas lineales

- Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - z &= 9 \\ 3x + y - 2z &= 13 \end{cases}$$

- Resuelve el sistema anterior por el método de Cramer.
- Resuelve ahora por el método de Gauss.
- Resuelve, por distintos métodos:

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x - y + 3z &= 3 \\ 3x + y + z &= 5 \end{cases}$$

- Comprueba que el siguiente sistema es incompatible:

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x - y + 3z &= 3 \\ 3x + y + z &= 6 \end{cases}$$

# Sucesiones y combinatoria

- Construye la sucesión  $a_n = n^2 + n$ , calcula algunos de sus términos y suma los 100 primeros términos.
- Calcula:

$$a) \sum_{k=1}^n k$$

$$b) \sum_{k=1}^n k^2$$

$$c) \sum_{k=1}^n k^3$$

- Dada la sucesión  $a_n = \frac{1}{n^2}$  calcula la suma de su serie.
- Dada la progresión geométrica,  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , calcula la suma de los infinitos términos. Lo mismo con  $a_n = b \cdot r^n$ .
- Calcula el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

- Calcula:

$$a) 45!$$

$$b) V_{6,4}$$

$$c) \binom{6}{4}$$

- Obtén la fórmula de las variaciones sin repetición y las de las combinaciones. Comprueba que  $V_{n,n} = n!$ .
- Genera números aleatorios.



# Estadística descriptiva

Las edades de un conjunto de 13 alumnos son:

21, 22, 21, 23, 22, 21, 23, 23, 21, 21, 21, 24, 22

- Calcula el número de datos. Calcula la media aritmética. Suma los datos y divide entre el número de datos.
- Calcula la mediana. Ordena los datos.
- Calcula el máximo, el mínimo y el rango.
- Calcula la desviación típica y la varianza y comprueba que una es la raíz cuadrada de la otra.
- Calcula cuartiles y percentiles. Calcula el rango intercuartílico.
- Calcula las frecuencias de los datos. Calcula la moda. Haz la tabla de frecuencias acumuladas.
- Calcula otras medias distintas.
- Haz lo mismo con la tabla de frecuencias:

x	f
3	4
4	6
5	8

- Genera 1000 tiradas de dos dados, suma los resultados y calcula la tabla de frecuencias.

# Estadística bidimensional

Las notas de 10 alumnos en dos asignaturas son:

A	7	6	4	7	8	3	7	5	7	2
B	6	6	5	8	8	4	7	7	6	1

- Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación.
- Calcula la media y la desviación típica de cada variable y comprueba la fórmula:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

- Calcula el sumatorio de los cuadrados de cada variable y el sumatorio del producto.
- Calcula la recta de regresión de la primera variable respecto a la segunda y comprueba que la pendiente se calcula con la fórmula:

$$\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$$

- Calcula el coeficiente de determinación  $R^2$  para la recta de regresión anterior. Comprueba que coincide con el coeficiente de correlación al cuadrado.
- Haz un ajuste logarítmico y calcula el coeficiente de determinación  $R^2$ .

# Probabilidad

- Dada una variable aleatoria  $X \sim N(6, 2)$ , calcula:

$$P(X < 7) \quad P(X > 5) \quad P(3 < X < 6)$$

- Dada  $X \sim N(6, 2)$  calcula  $a$  para que:

$$P(X \leq a) = 0,7$$

- Genera 100 números aleatorios que sigan una normal de tipo  $N(6, 2)$  y calcula la media y la varianza.
- Dada una variable  $X \sim B(14, 0,8)$  calcula:

$$P(X = 7) \quad P(X \leq 6)$$

- Genera 100 números aleatorios que sigan una binomial de tipo  $B(14, 0,8)$  y calcula  $\mu$  y  $\sigma^2$ . Compara con la teoría.