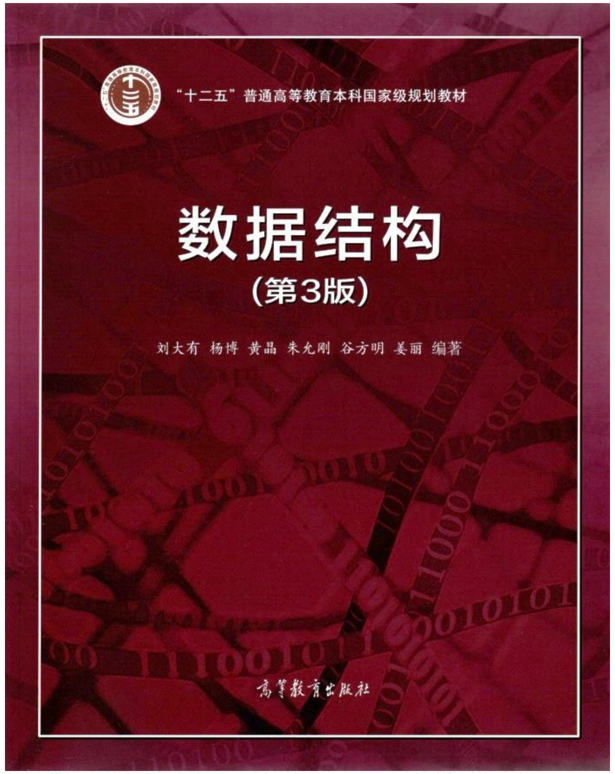


树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

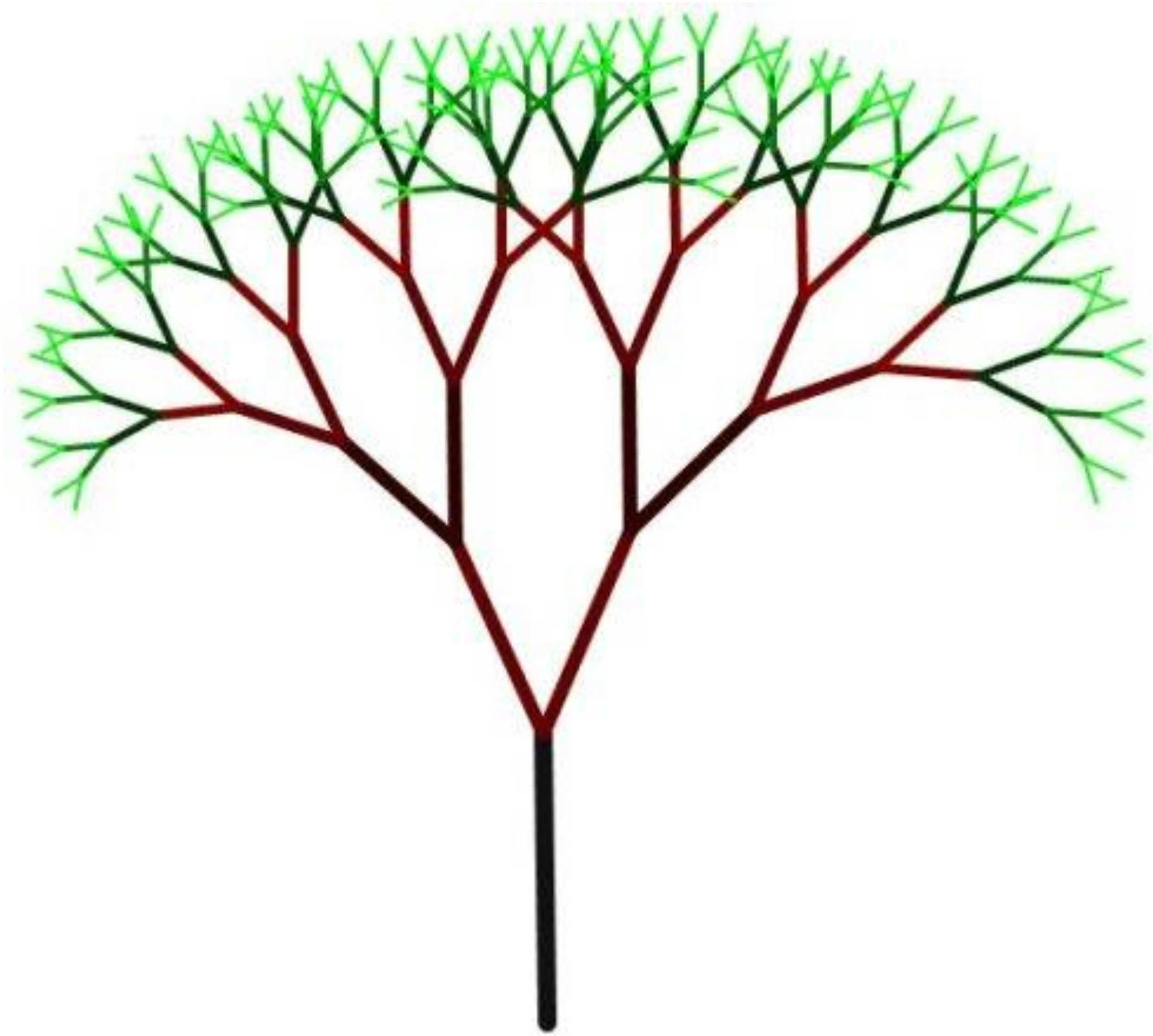
Last updated on 2024.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

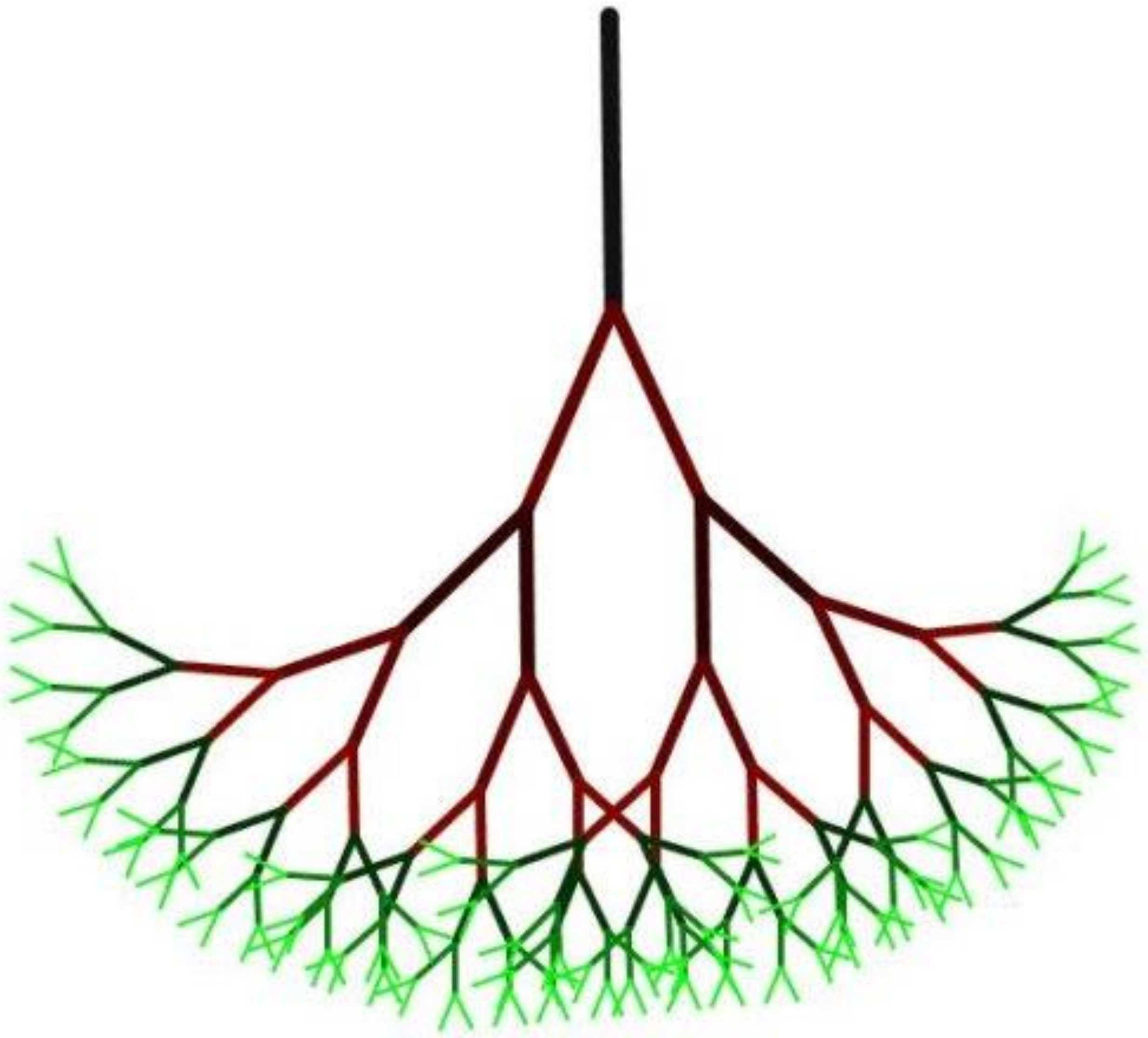
慕课自学内容（必看，计入期末成绩）

自学内容	视频时长	主讲人
树的定义	6分58秒	刘大有教授
树的相关术语	7分17秒	刘大有教授

生活中的树



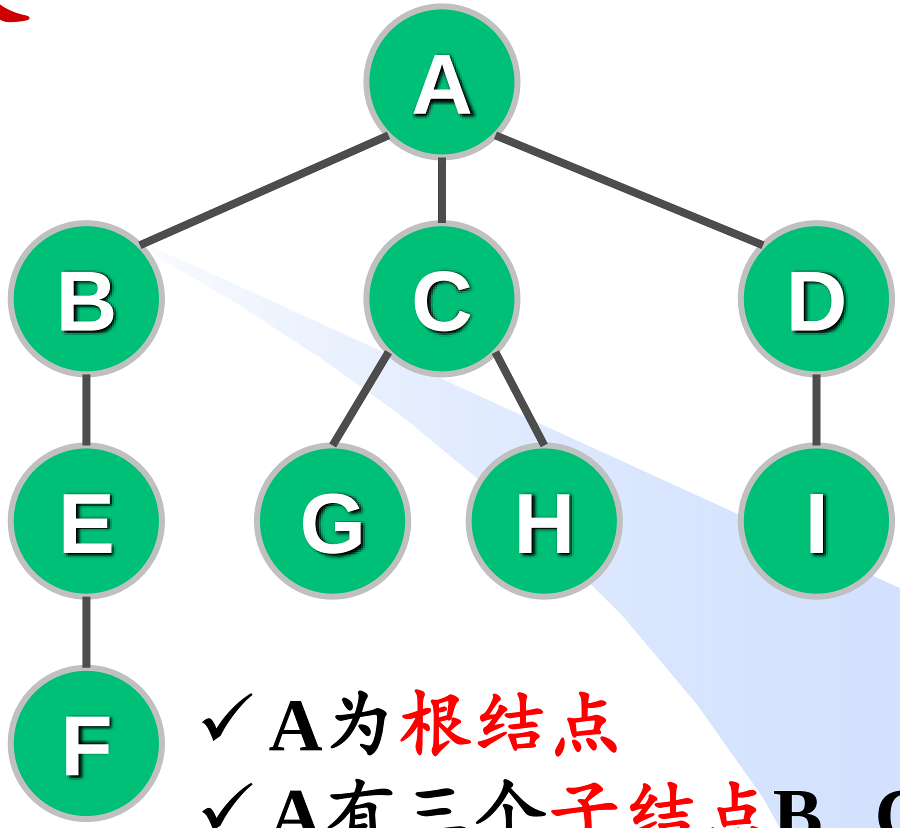
计算机的树



树的定义

一棵**树**是结点的一个有限集合T。

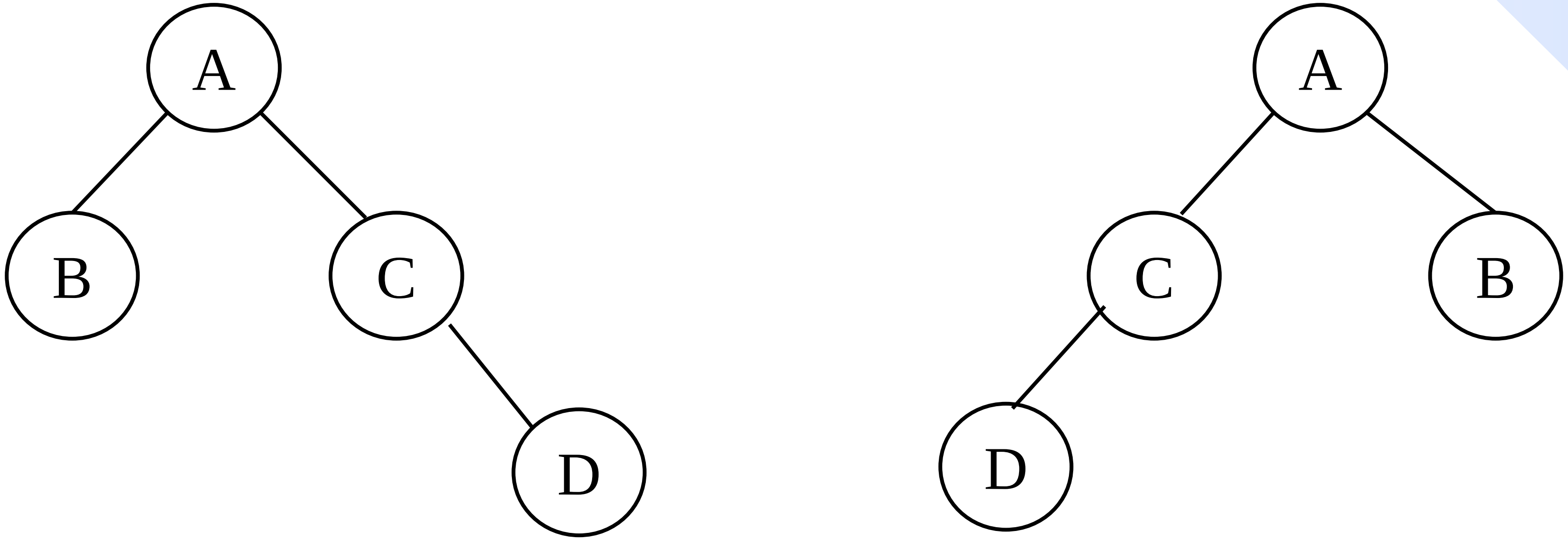
- 若T空，则称为空树。
- 若T非空，则：
  - ✓有一个被称为**根**的结点，记为$root(T)$；
  - ✓其余结点被分成$m(m \geq 0)$个不相交的非空集合$T_1, T,\ldots,T_m$，且$T_1, T_2, \ldots, T_m$也都是树，其称为$root(T)$的**子树**。



✓A为**根结点**
✓A有三个**子结点**B，C，D；
✓B、C和D的**父结点**是A；
✓B有一个子结点E；
✓C有两个子结点G和H；
✓A有三棵子树。

有序树

如果一棵树的子树$T_1, T_2, \ldots, T_m$ 的相对次序被指明，则称该树为有序树，否则称为无序树。在有序树中，把T_i 称作根的第i个子树。



线性结构与树结构的比较

A

	线性结构	树结构
首元素	无前驱	无前驱 （根结点）
末元素	无后继	无后继 （叶结点，可能多个）
中间元素	一个前驱、一个后继	一个前驱、多个后继 （非根非叶结点）

树的相关术语

A

- **度**

  一个结点的度指该结点的子结点的数目。一棵树的度为各结点的度的最大值。

- **叶结点**

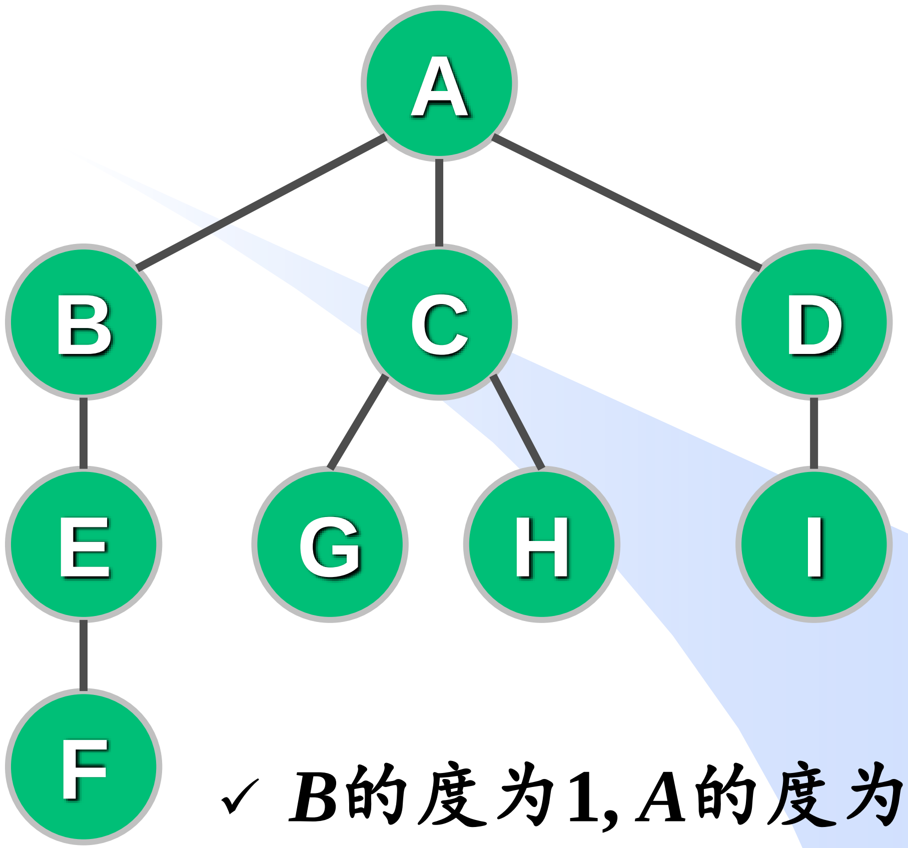
  度为0的结点，即没有孩子的结点。

- **分支结点**

  度大于0的结点，即非叶结点 。

- **边**

  树中结点间的连线。

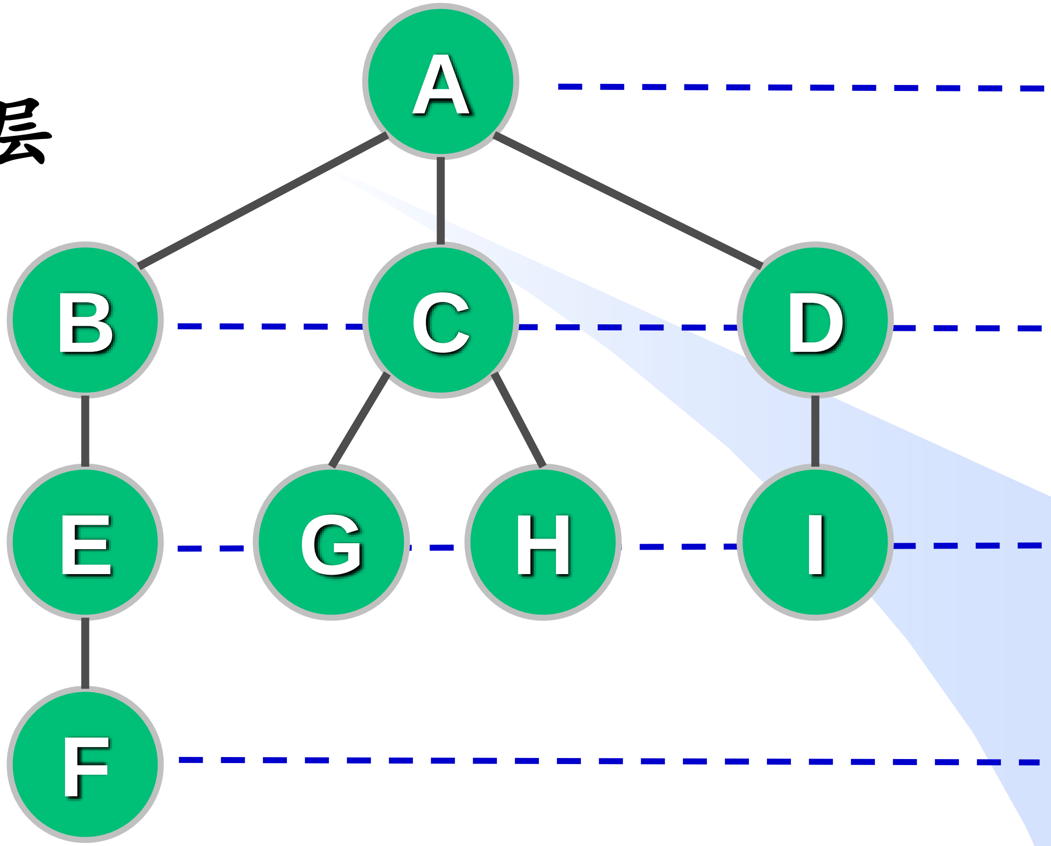


- ✓ *B*的度为1, *A*的度为3
- ✓ 整棵树的度为 3
- ✓ *F*、*G*、*H*、*I* 为叶结点
- ✓ 其余结点为分支结点。

树的相关术语

A

- **结点的层数/深度**
  根结点层数为0，其余结点的层数为其父结点的层数加1。
- **树的高度/深度**
  树中结点的最大层数。
- **结点的高度**
  以该结点为根的子树的高度。



	高度	深度
结点	以该结点为根的子树的高度	结点所在层数
树	树中结点的最大层数	

✓ *A*的层数/深度为0，*F*的层数为 3
✓ 该树高度/深度为3
✓ *B*的高度为2，*C*的高度为1。

树的相关术语

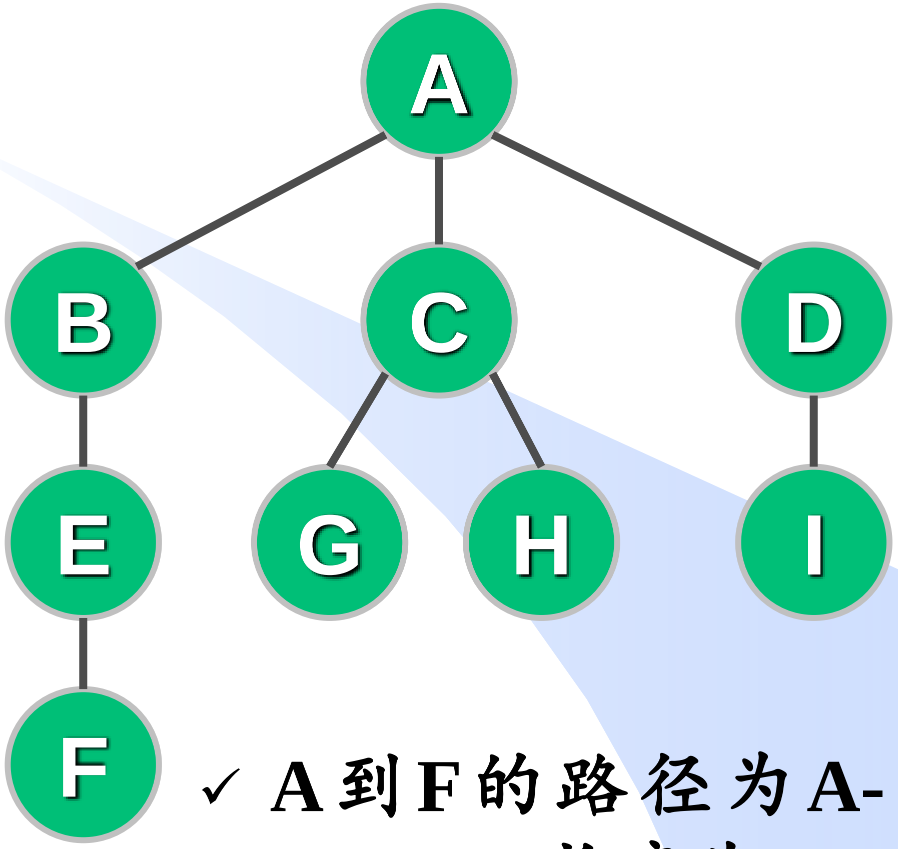
A

- **路径**

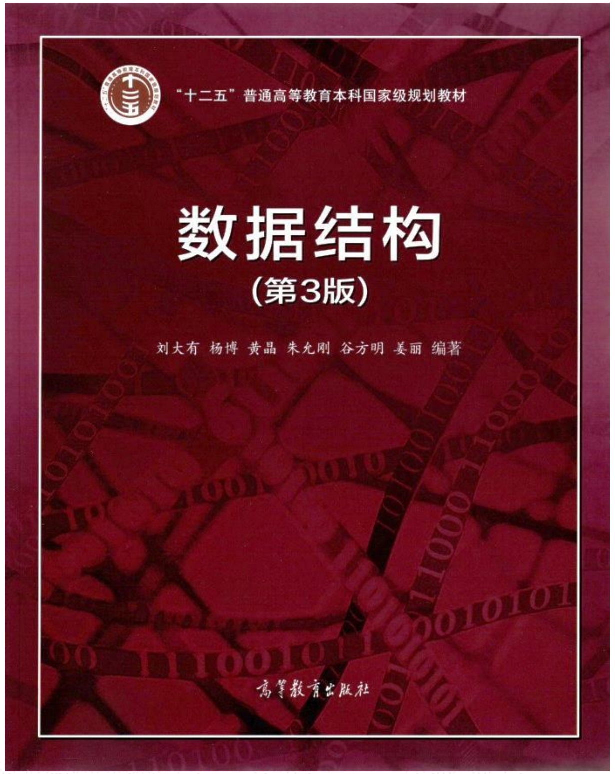
若树中存在结点序列$v_m \rightarrow v_{m+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m+k}$，其中$v_i$是$v_{i+1}$（$m \le i \le m+k-1$）的父结点，则称此结点序列为$v_m$到$v_{m+k}$的路径，该路径所经过的边数 k 被称为路径长度。从根结点到某个结点的路径长度恰为该结点的层数。

- **子孙结点、祖先结点**

一棵树中若存在结点v_m到v_n的路径，则称v_m为v_n的祖先结点，v_n为v_m的子孙结点，。



- ✓ A到F的路径为A-B-E-F，长度为3
- ✓ A是F的祖先结点
- ✓ F是A的子孙结点。



树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

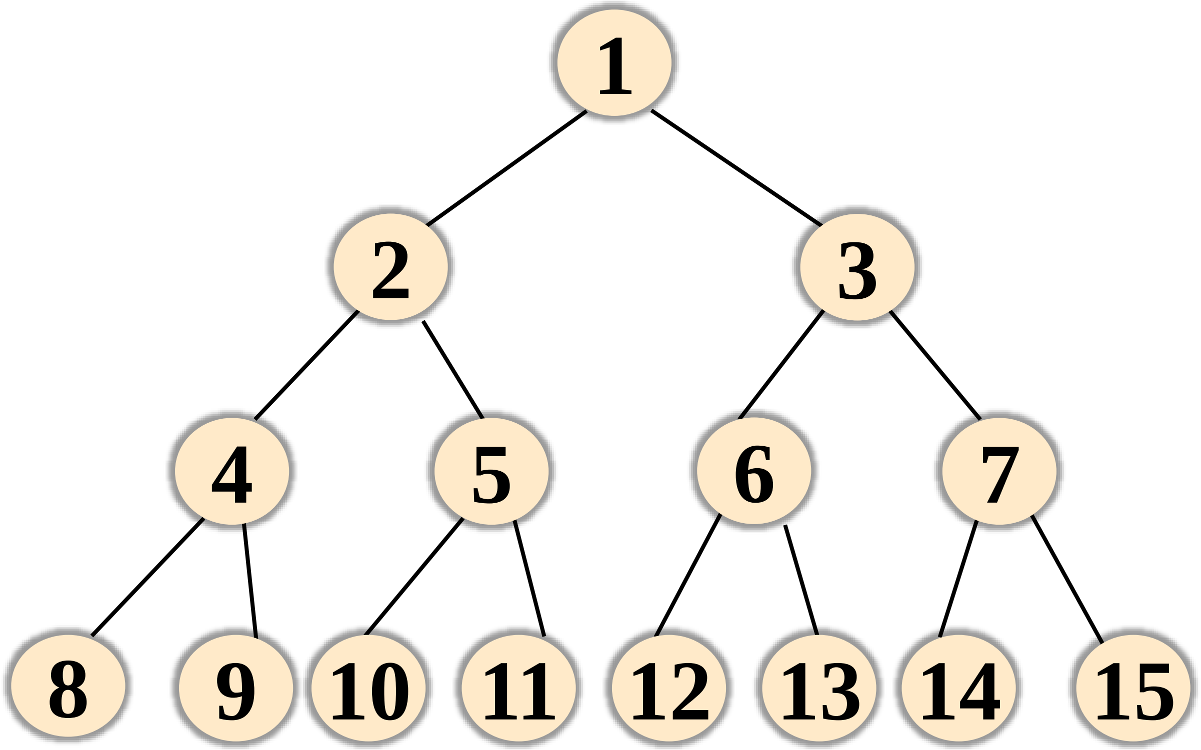
Last updated on 2024.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

二叉树（Binary Tree）的定义

A

二叉树是结点的有限集合，它或者是空集，或者由一个根结点及两棵不相交的称为该根的左、右子树的二叉树组成。

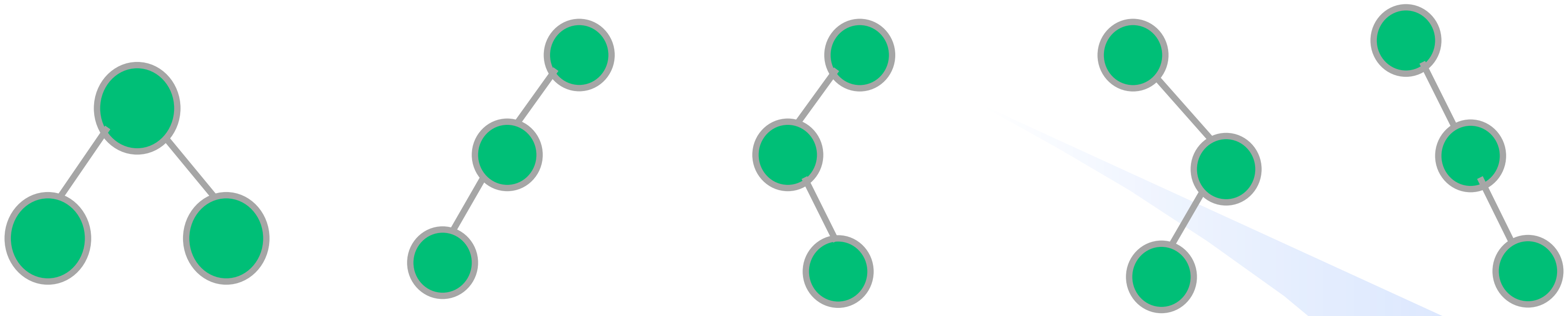


二叉树的特征

① 二叉树每个结点最多有2个子结点；

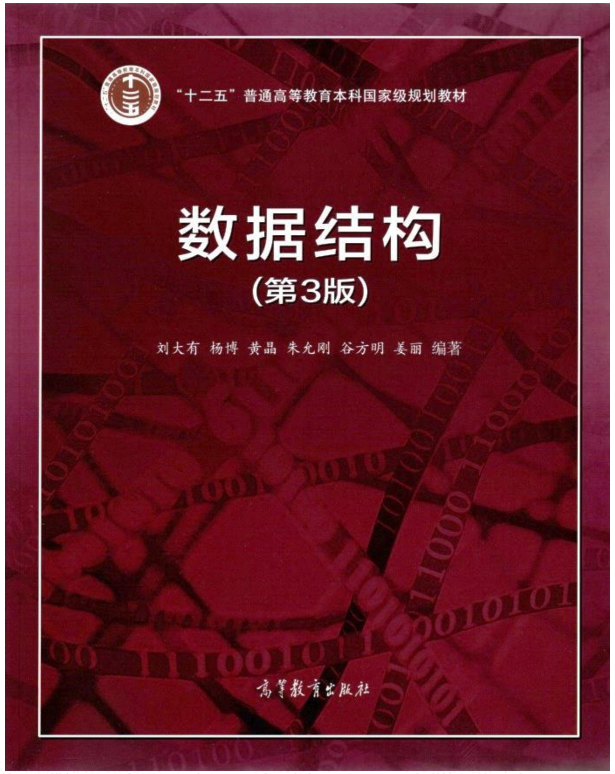
② 二叉树的子树有左右之分，即使某结点只有一棵子树，也要指明该子树是左子树，还是右子树；

含有3个结点的不同的二叉树的形态



含有3个结点的不同的树的形态

问题：含有*n*个结点的二叉树有多少种的形态？



树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

zhuyungang@jlu.edu.cn

A

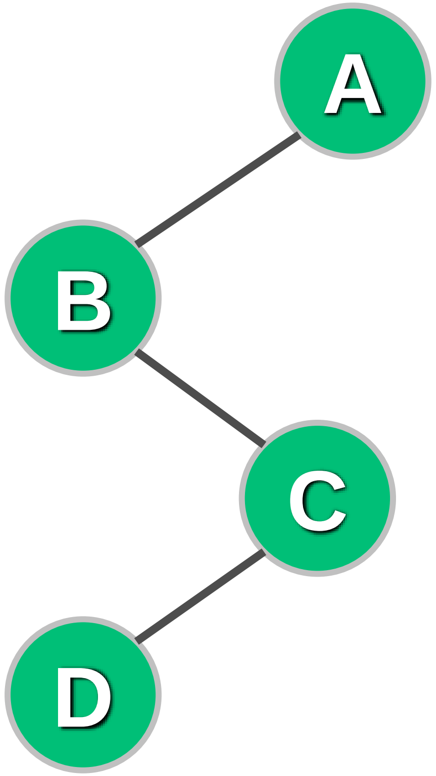
引理 二叉树中第i层至多有2^i个结点，$i \geq 0$。

证明：用数学归纳法。

- 当 $i=0$ 时，仅有一个根结点，其层数为0，因此$i=0$时引理成立。
- 假定当 $i=k$ $(k\geq 0)$时，引理成立，即第 k 层上至多有2^k个结点。
- 对于二叉树的任意结点，其子结点个数最大为2，故第$k+1$层上至多有 $2^k\times 2= 2^{k+1}$ 个结点，因此当 $i=k+1$时，引理成立。
- 证毕 ▌

- 高度为k ($k \ge 1$)的二叉树中至少有$k+1$个结点。
- 含有k ($k \ge 1$)个结点的二叉树高度至多为$k-1$。
- 如下图是高度为3结点最少的二叉树之一。

A



有4个结点、高度为3的二叉树

引理 高度为k的二叉树中至多有$2^{k+1}-1$ $(k \geq 0)$个结点。

A

证明：根据之前引理：第i层至多有2^i个结点

第0层上至多有2^0个结点，

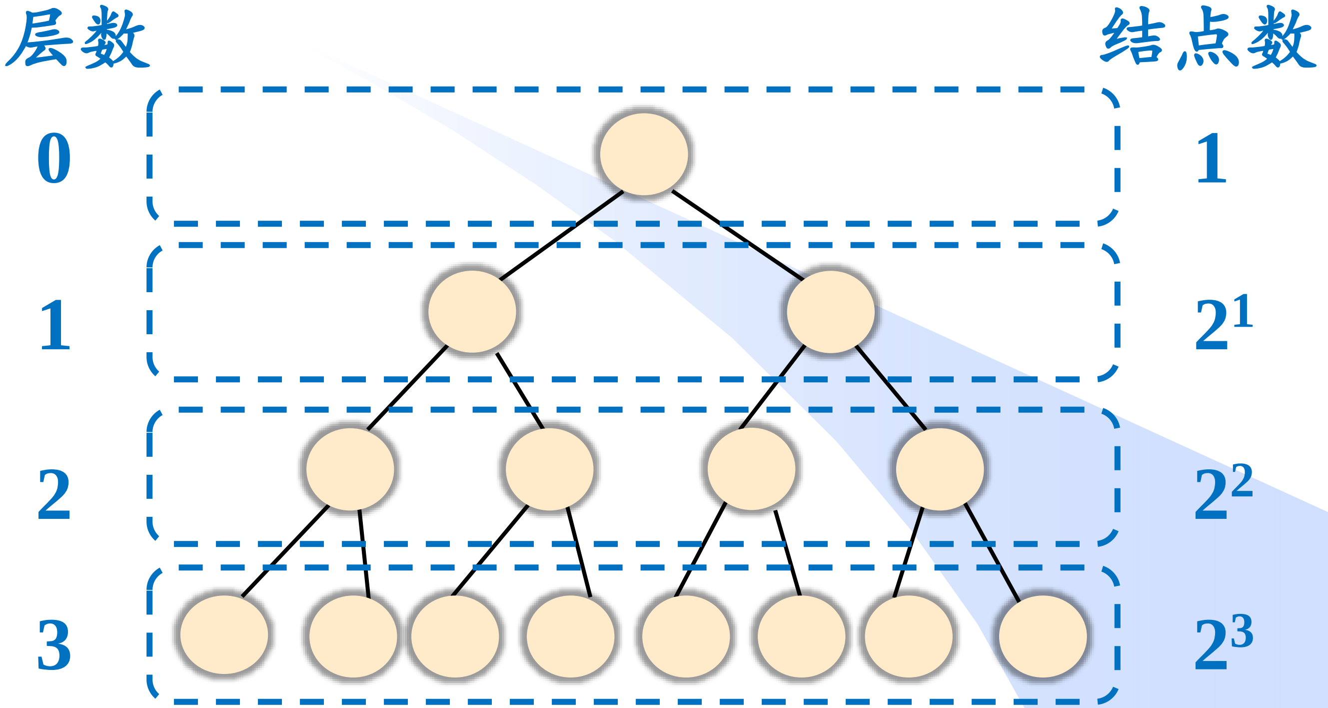
第1层上至多有2^1个结点，

第2层上至多有2^2个结点，

第3层上至多有2^3个结点，

……

第k层上至多有2^k个结点，



因此，高度为k的二叉树中至多有

$2^0 + 2^1 + \dots\dots + 2^k = 2^{k+1}-1$ 个结点。证毕 ■

A

引理 在n个结点构成的二叉树中，若叶结点个数为n_0，度为2的结点个数为n_2，则有：$n_0=n_2+1$.

证明：设度为1的结点有n_1个，总结点个数为n，总边数为e，

则 $n=n_0+n_1+n_2$

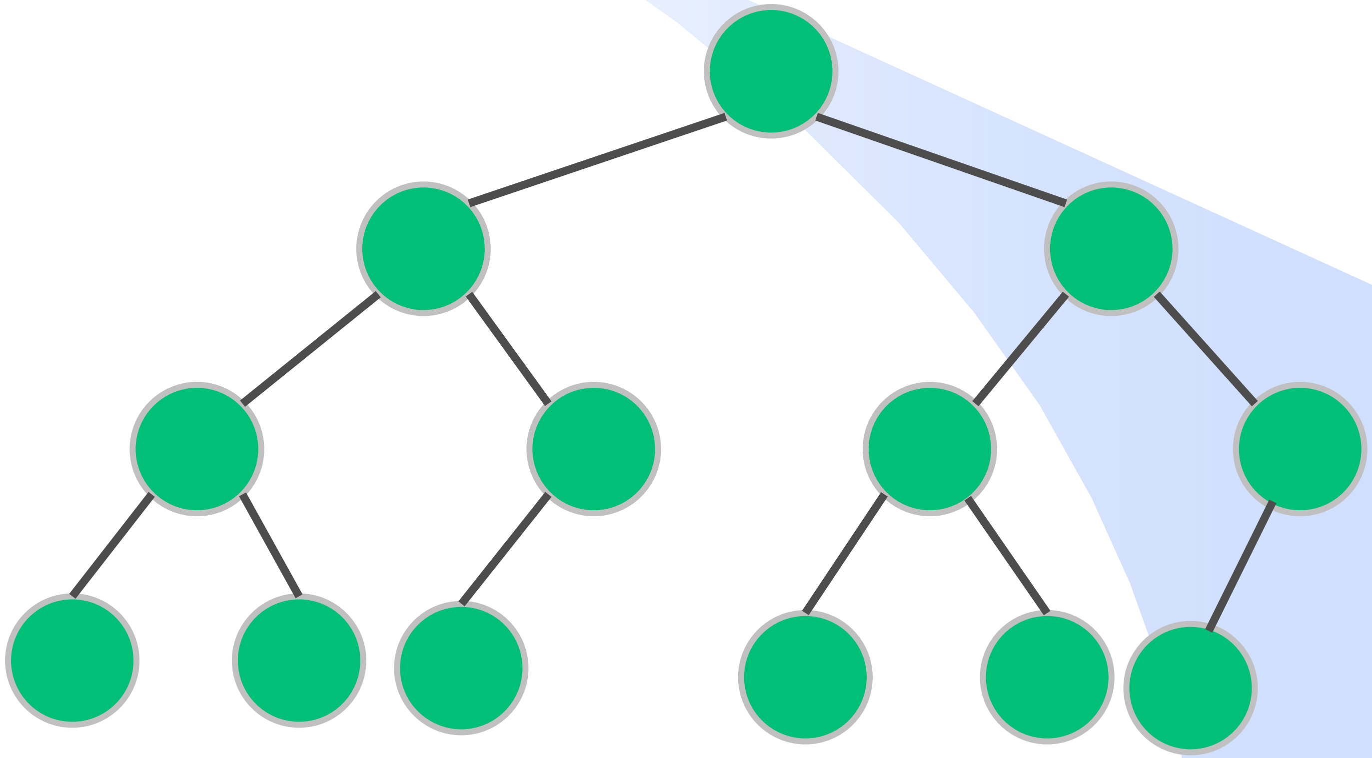
$e = n - 1$ （从下往上看）

$e = 2n_2 + n_1$ （从上往下看）

因此，有

$$2n_2 + n_1 = n - 1$$
$$= n_0 + n_1 + n_2 - 1$$
$$\therefore n_0 = n_2 + 1.$$

证毕 ▌



练习

A

若一棵二叉树具有10个度为2的结点，5个度为1的结点，则度为0的结点个数为________.【腾讯校园招聘笔试题】

A. 9　　B. 11　　C. 15　　D. 不确定

$$n_0 = n_2 + 1$$

练习

A

若二叉树有32个结点且度为1的结点有7个，则叶结点的个数为________.【搜狗校园招聘笔试题】

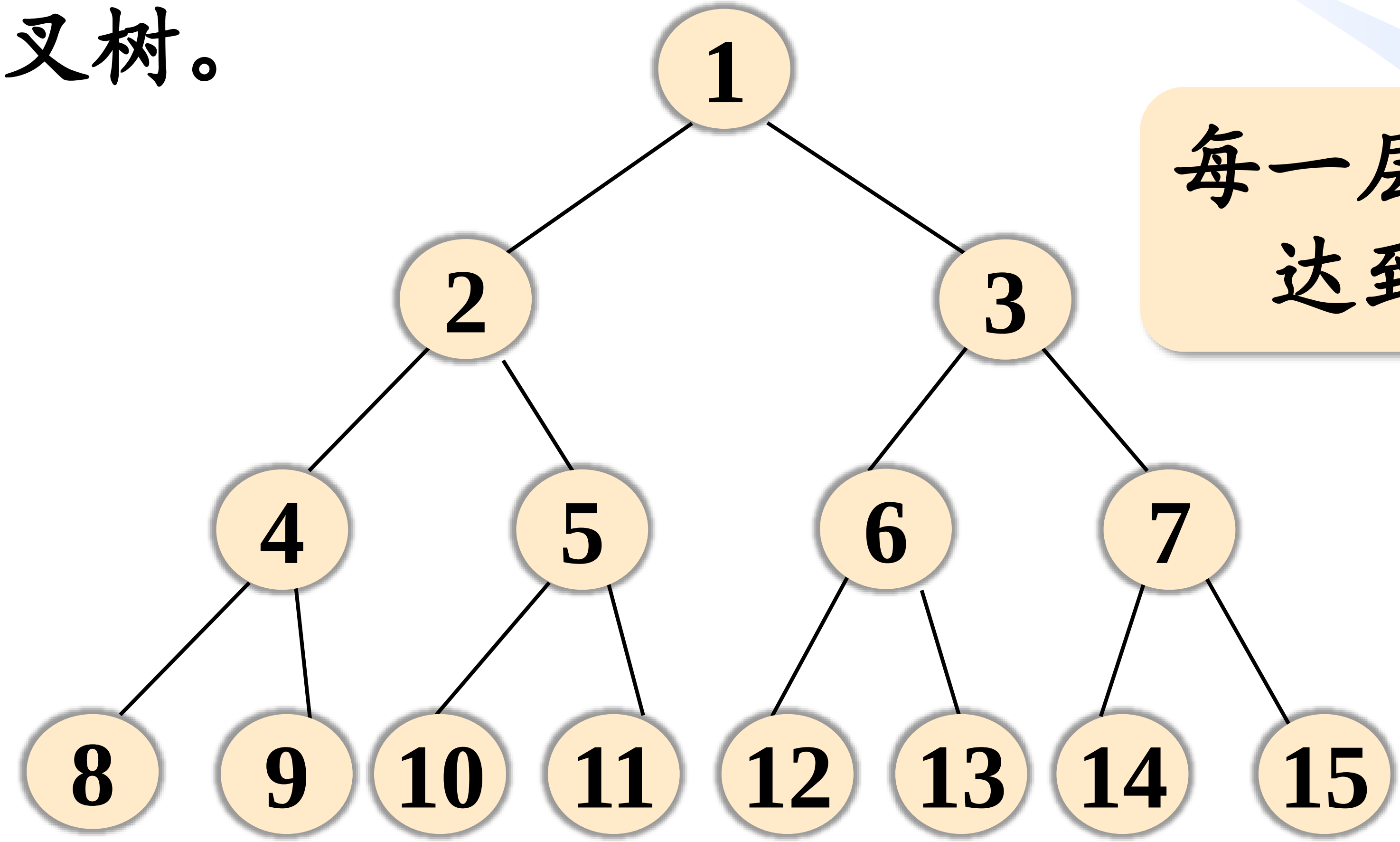
A. 13　　B. 14　　C. 12　　D. 15

$$n_0 + n_2 = 25 \qquad n_0 = n_2 + 1$$

A

满二叉树

一棵非空高度为$k(k \geq 0)$的<u>满二叉树</u>，是有$2^{k+1}-1$个结点的二叉树。



每一层都充满了结点达到最大结点数

满二叉树的特点

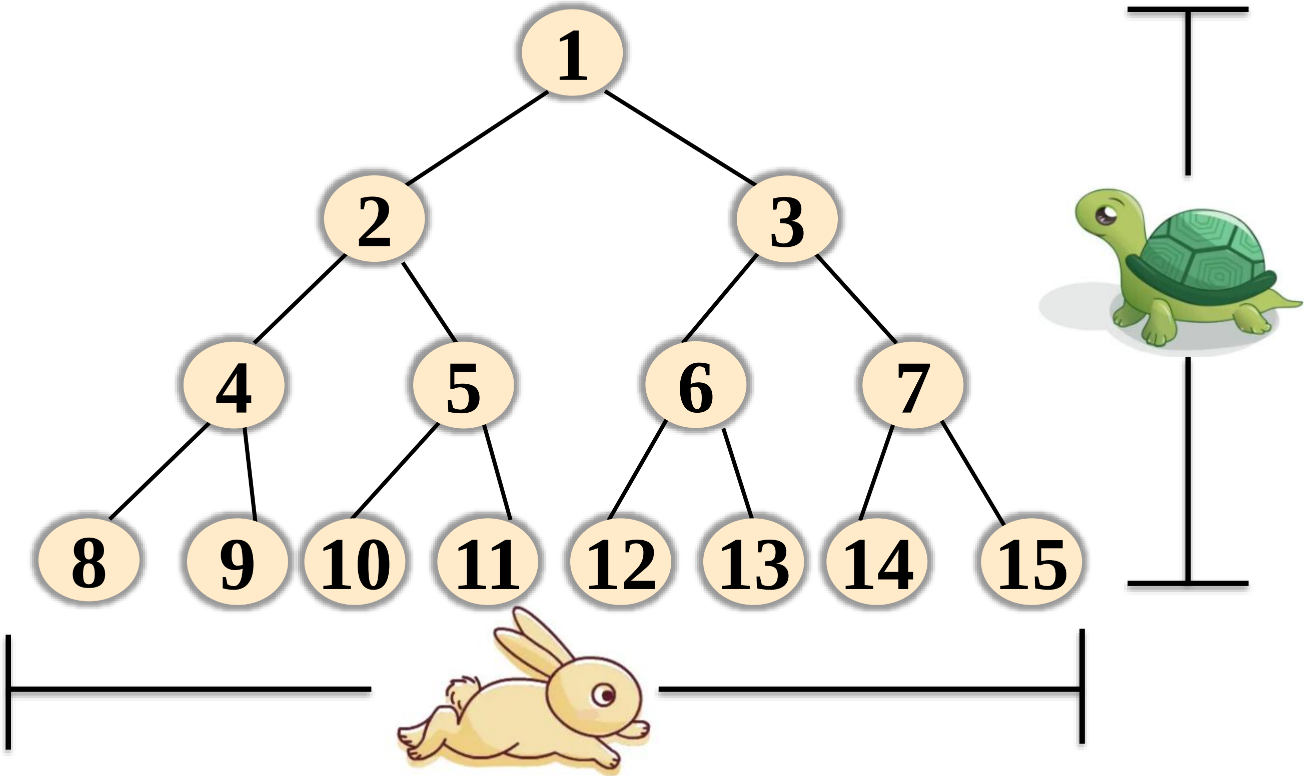
A

① 叶结点都在最后一层；

② 每个非叶结点都有两个子结点；

③ 叶结点的个数等于非叶结点个数加1。

引理 $n_0=n_2+1.$

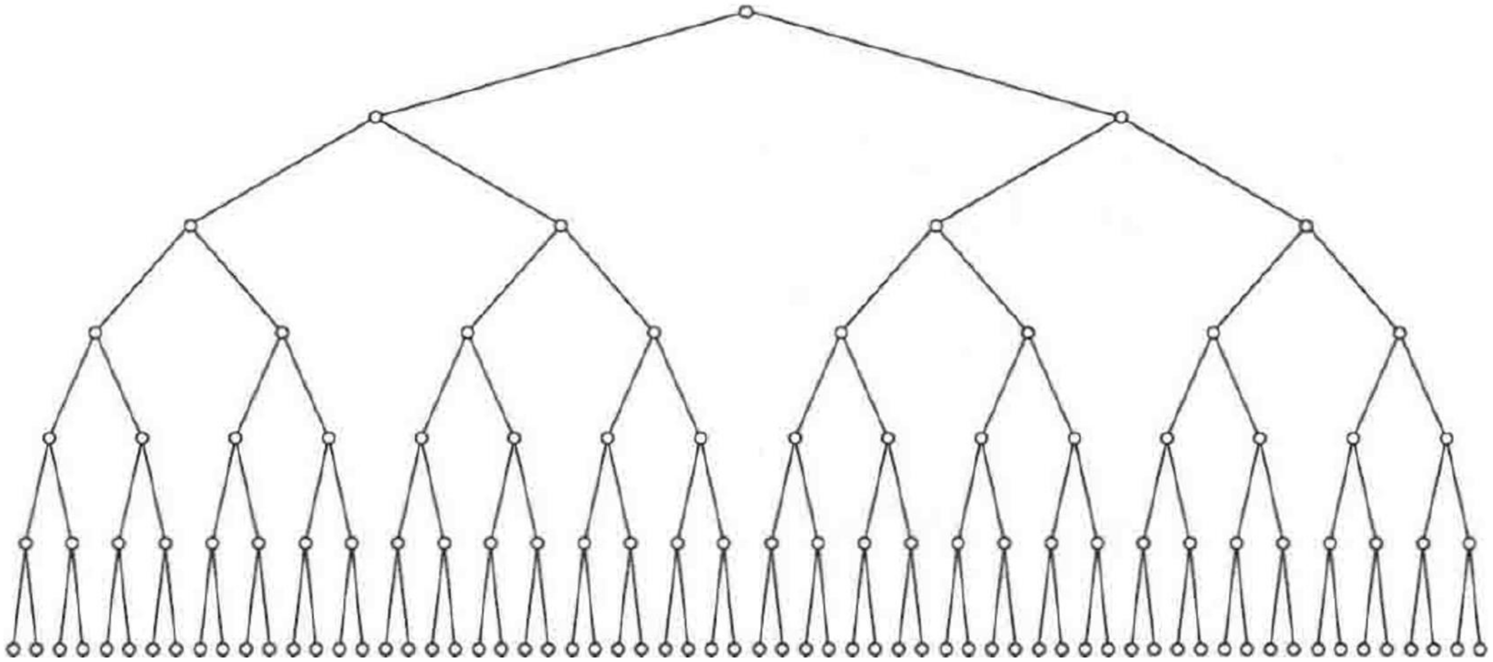


练习

A

一棵满二叉树有k个叶结点，则其结点总数为<u>　$2k$-1　</u>。

【2018年考研题全国卷】

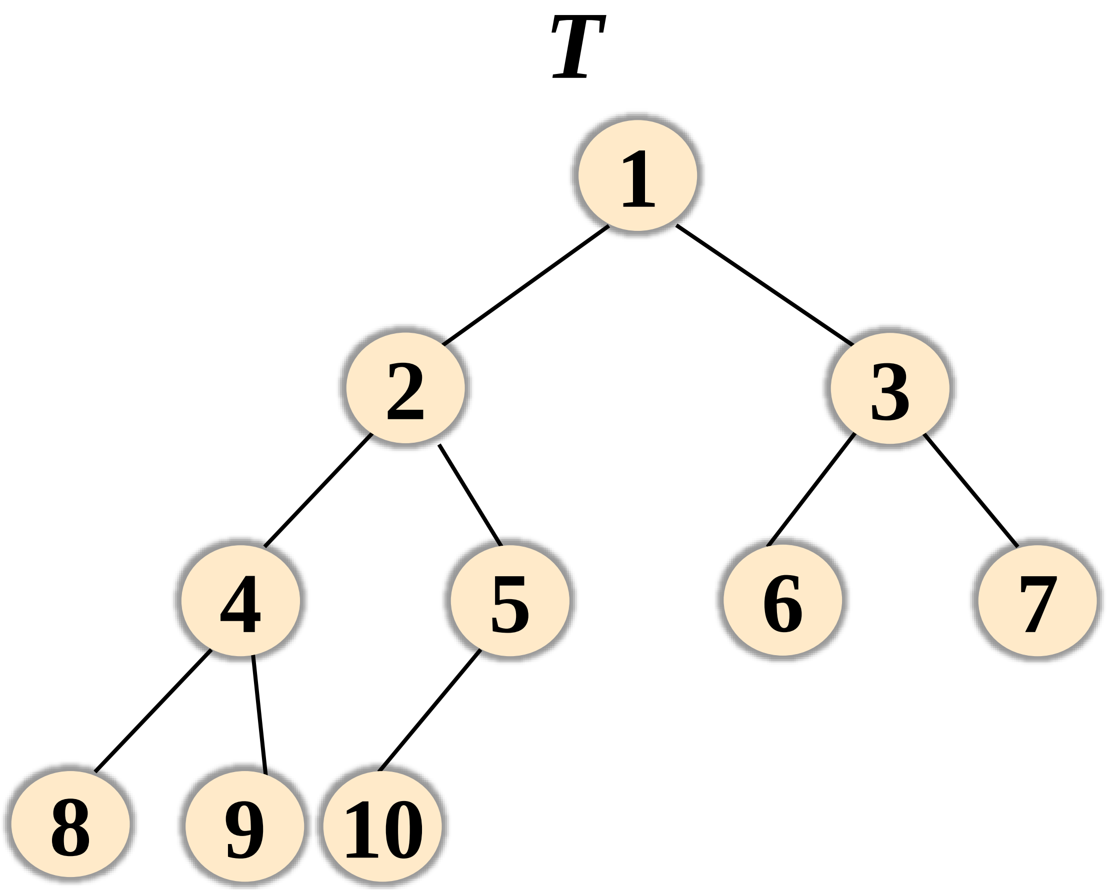


完全二叉树

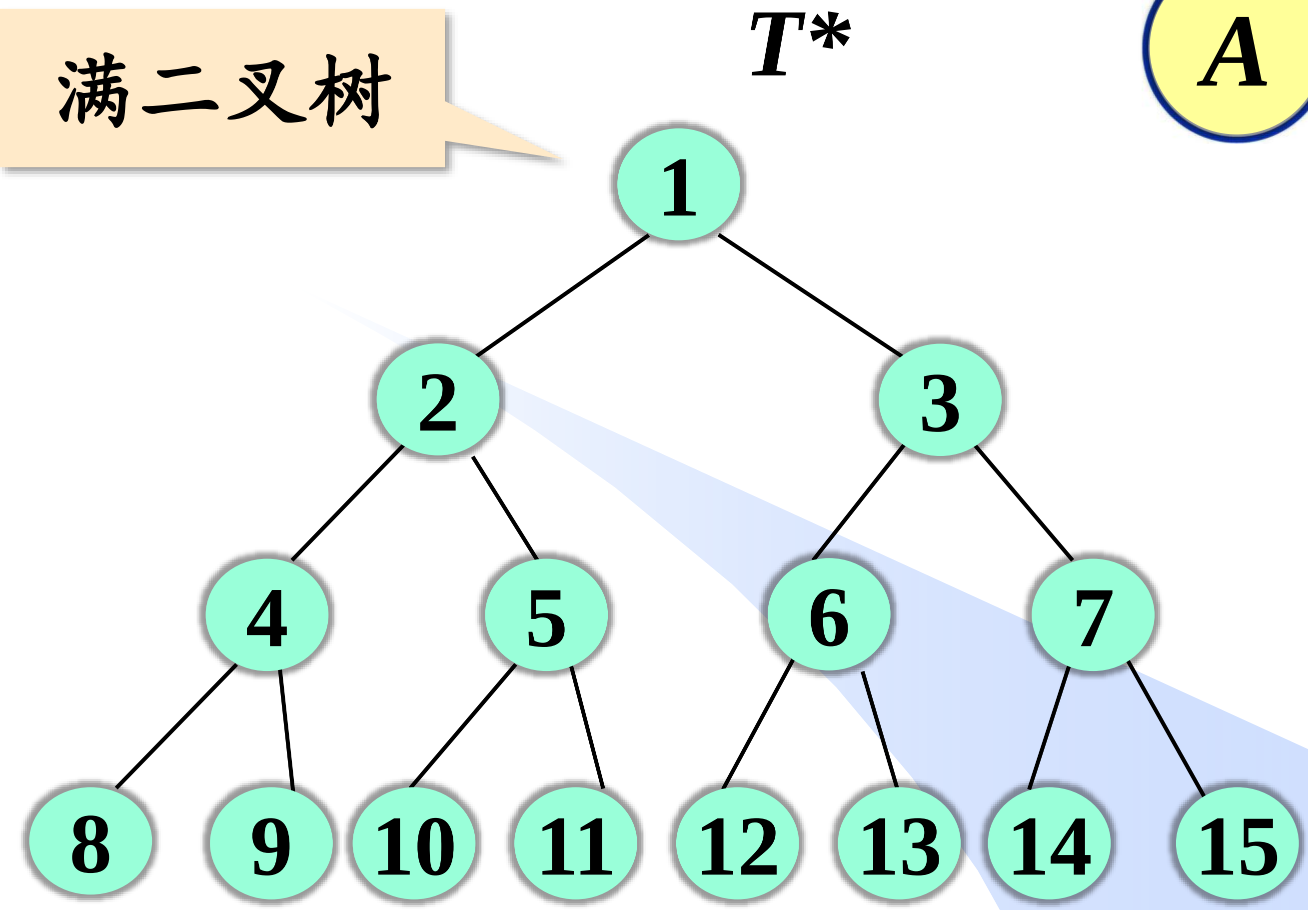
A

- 给定一棵有 n 个结点、高为 k 的二叉树 T，一棵高为 k 的满二叉树 T^*；
- 用正整数按层次顺序分别编号 T 和 T^* 的所有结点；
- 如果T之所有结点恰好对应于T^*的前 n 个结点，则称 T 为<u>完全二叉树</u>。
- 层次顺序：按层数从上至下（即从第0至第k层），同层结点由左到右的次序。

A



满二叉树



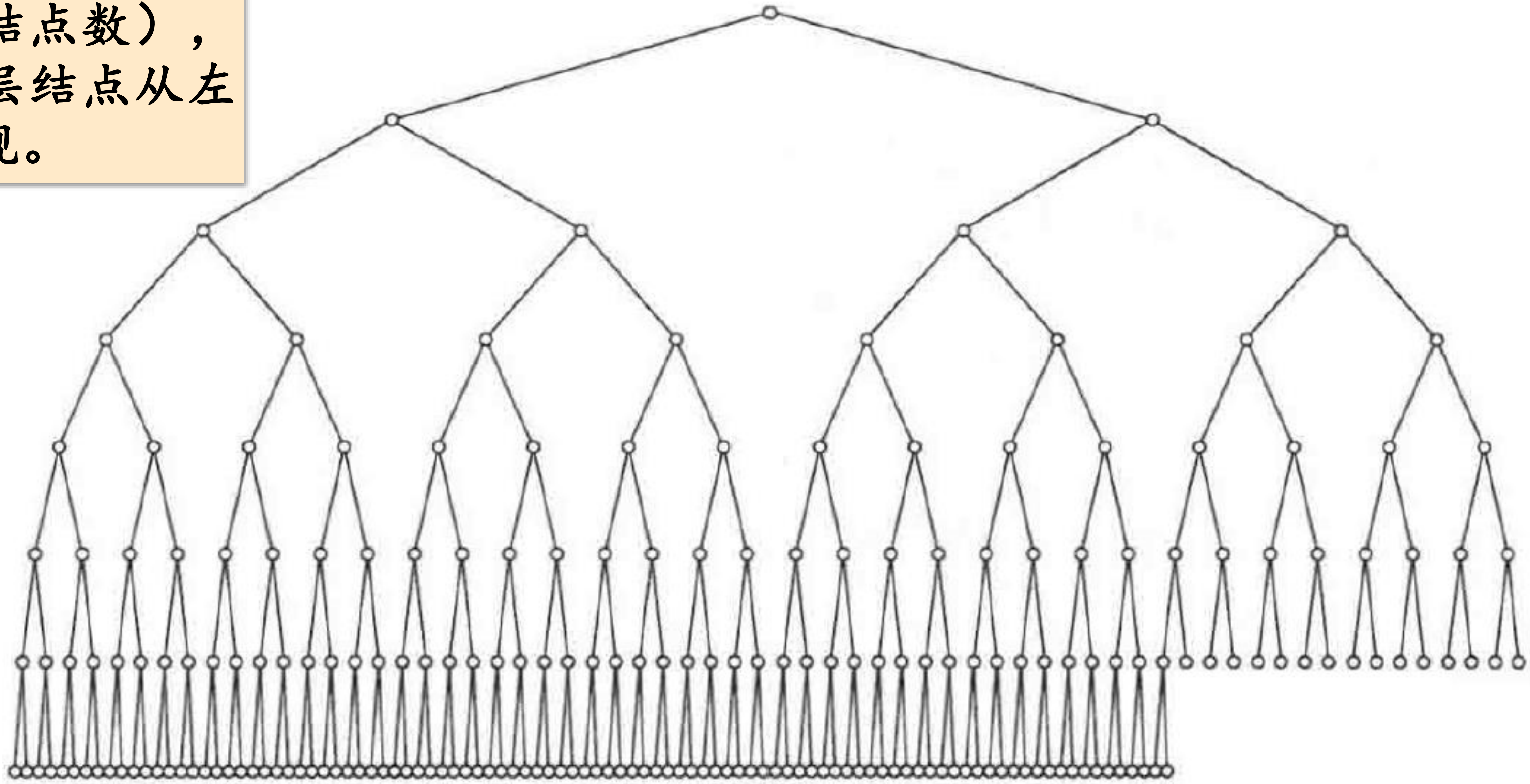
完全二叉树

特点：除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。

除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。

完全二叉树

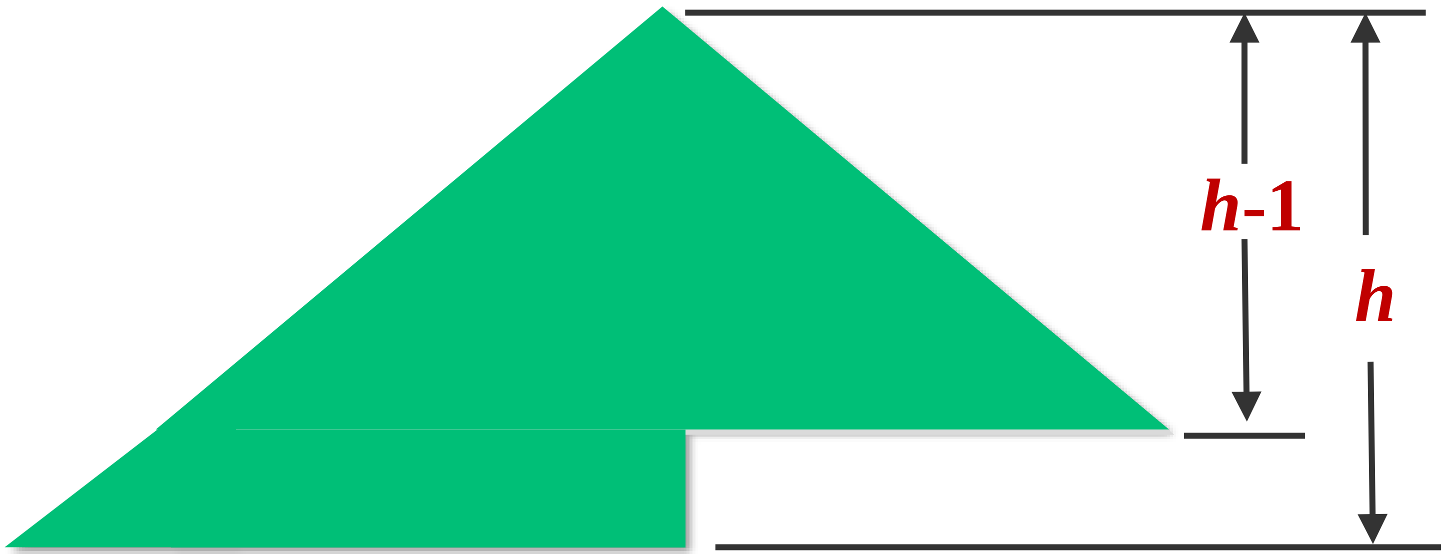
A

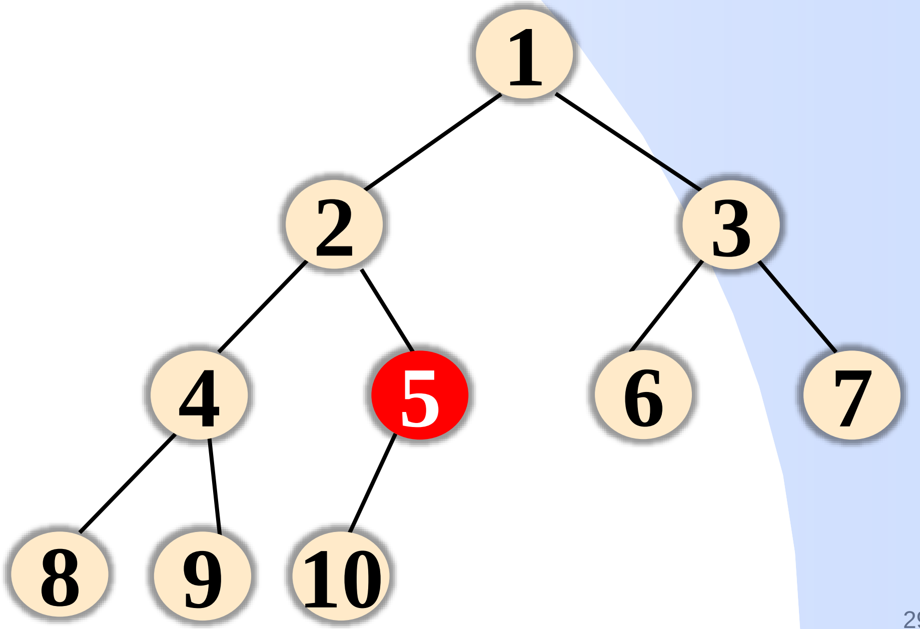


完全二叉树的特点

A

- 只有最下面两层结点的度可以小于2;
- 最下面一层的结点都集中在该层最左边的若干位置上;
- 叶结点只可能在最后两层出现;
- 对所有结点，按层次顺序从1开始编号，仅编号最大的非叶结点可以没有右孩子，其余非叶结点都有两个子结点。

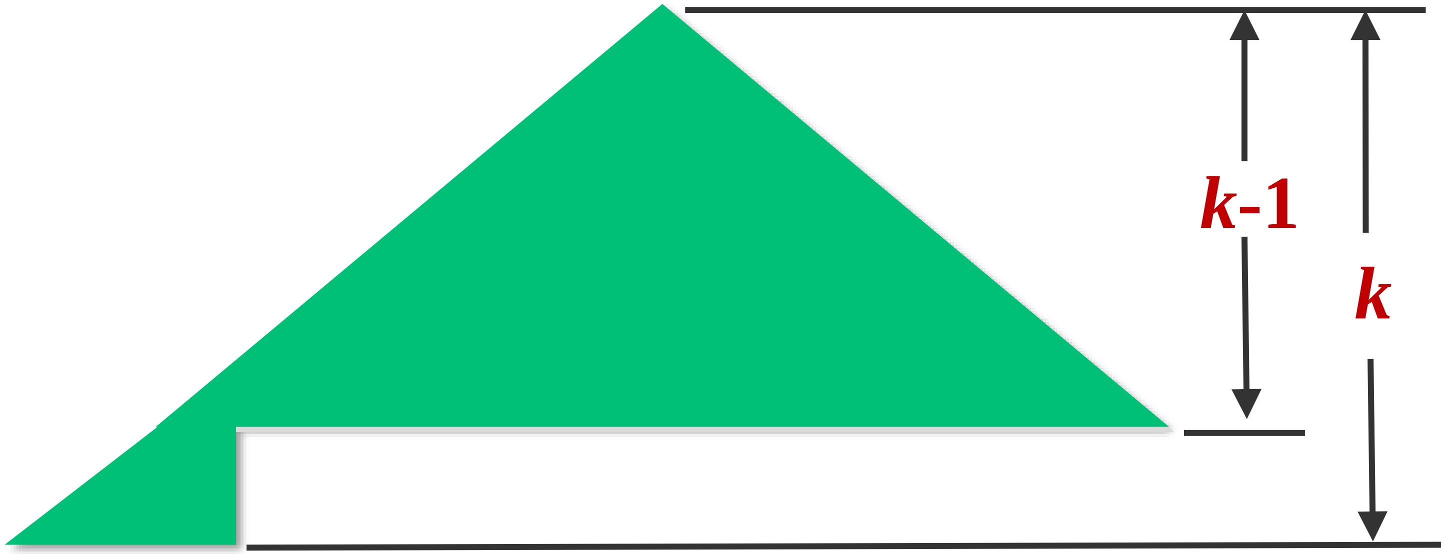




练习

A

高度为k的完全二叉树最少有 2^k 个结点。



高度为k-1的满二叉树再加1个结点

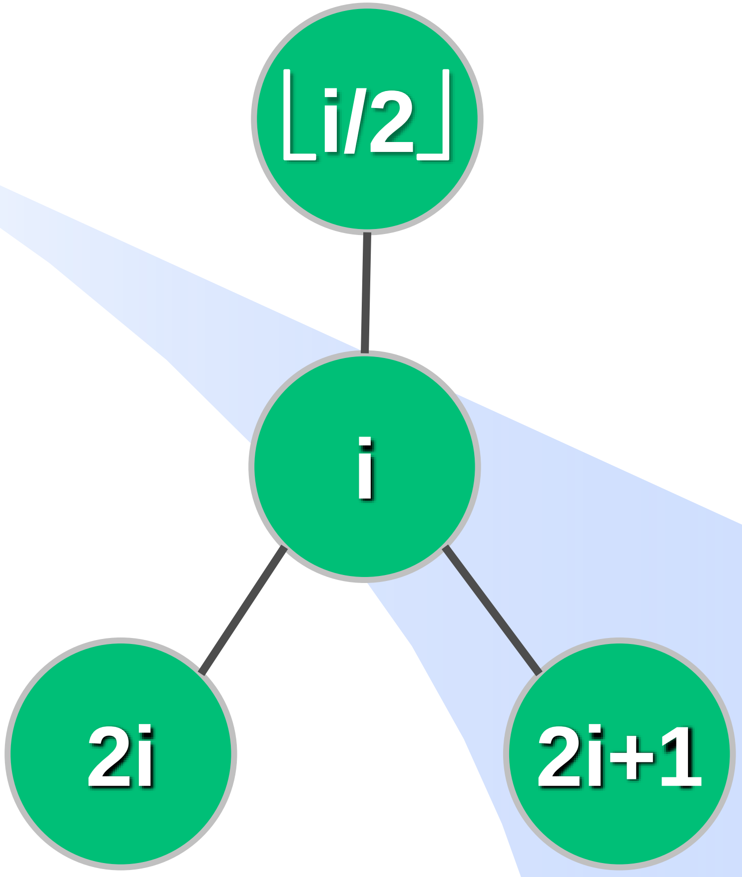
引理 高度为k的二叉树中至多有2^{k+1}-1个结点

引理 **若将一棵具有n个结点的完全二叉树按层次顺序从1开始编号，则对编号为i ($1\le i \le n$)的结点有：**

① 若$i\neq1$，则编号为 i 的结点的父结点的编号为$\lfloor i/2 \rfloor$。

②若$2i \le n$，则编号为 i 的结点的左孩子的编号为 $2i$，否则 i 无左孩子。

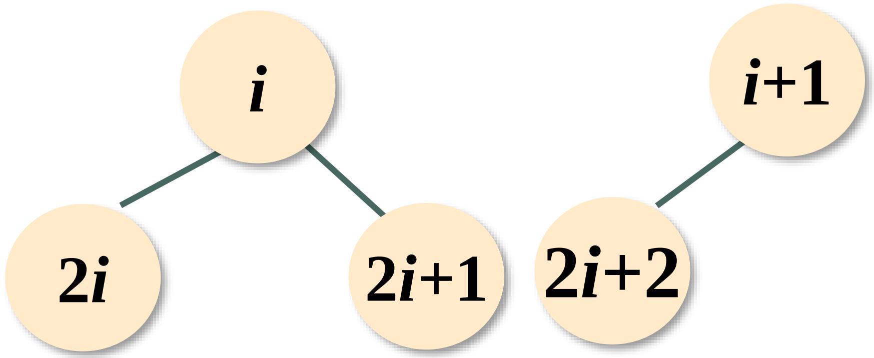
③若$2i+1 \le n$，则 i 结点的右孩子结点编号为$2i+1$，否则 i 无右孩子。



B

用归纳法证明②

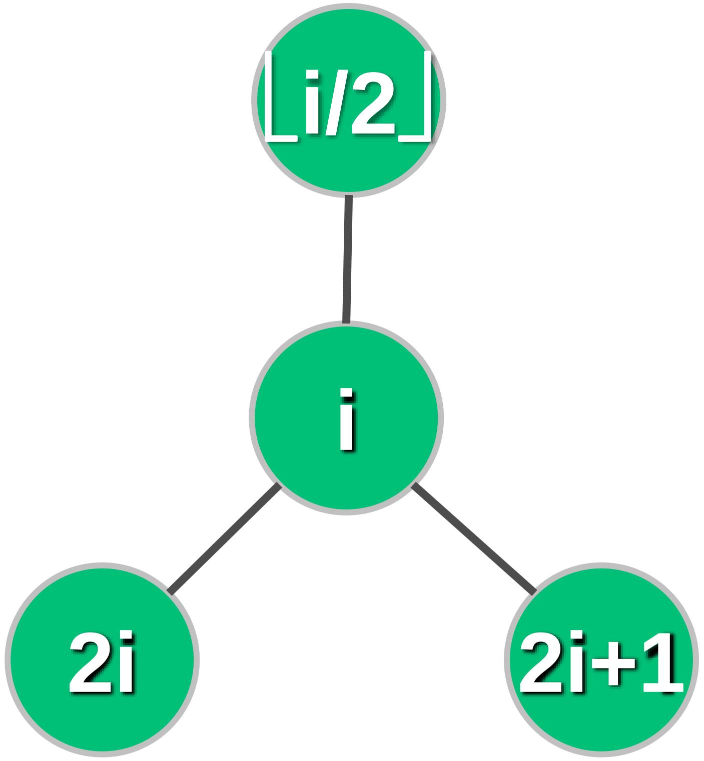
- 若i=1，如果$n \geq 2$，则左孩子的编号显然为2．
- 假定对所有j ($1 \leq j \leq i$，$2i \leq n$)，知j的左孩子编号为$2j$．
- 往证结点i+1的左孩子编号为$2(i+1)$．
- 如果$2(i+1) \leq n$，则由层次次序得知，i+1的左孩子之前的两个结点就是i的左孩子和右孩子，因为i的左孩子编号为$2i$（归纳假设），故i的右孩子编号为$2i+1$，从而i+1的左孩子编号为 $2i+2=2(i+1)$．
- 由②可直接推出③，由②和③又可得到①，证毕 ■

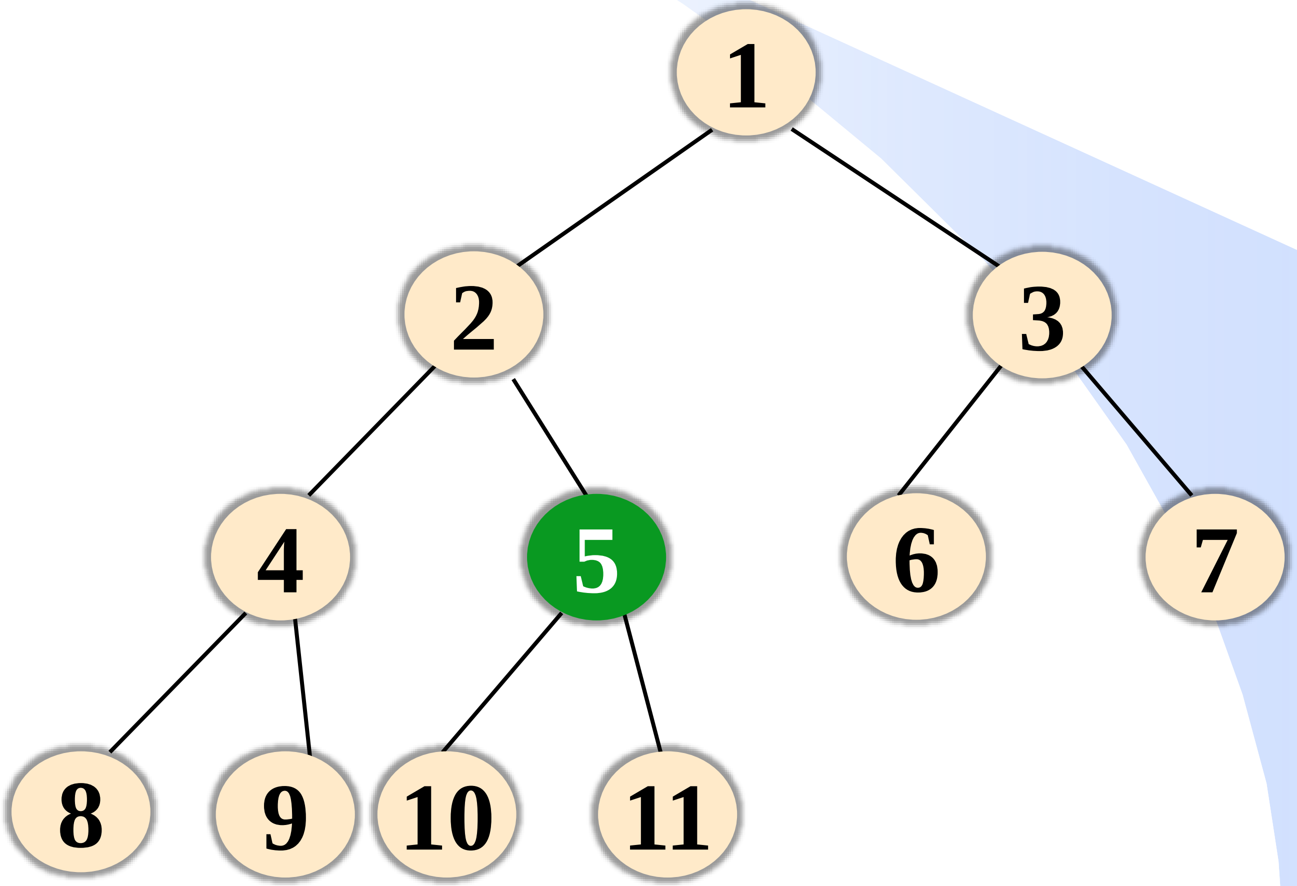


推论：一棵具有n个结点的完全二叉树，其非叶结点个数为$\lfloor n/2 \rfloor$，叶结点个数为$\lceil n/2 \rceil$

B

证明：最后一个结点编号为n，则最后一个非叶结点一定是其父结点，编号为$\lfloor n/2 \rfloor$，故非叶结点有$\lfloor n/2 \rfloor$个，叶结点有$n-\lfloor n/2 \rfloor=\lceil n/2 \rceil$个





练习

B

已知一棵完全二叉树有768个结点，则该完全二叉树的叶结点个数是________。【考研题全国卷】

推论：一棵n个结点的完全二叉树，非叶结点个数为$\lfloor n/2 \rfloor$，叶结点个数为$\lceil n/2 \rceil$

叶结点个数$\lceil 768/2 \rceil =384$

A

引理 $n\ (n>0)$个结点的完全二叉树的高度是$\lfloor \log_2 n \rfloor$.

证明:

设二叉树高度为k，由完全二叉树的定义知，完全二叉树的结点个数介于高度为k-1和高度为k的满二叉树的结点数之间，即有： $2^k-1 < n \le 2^{k+1}-1$

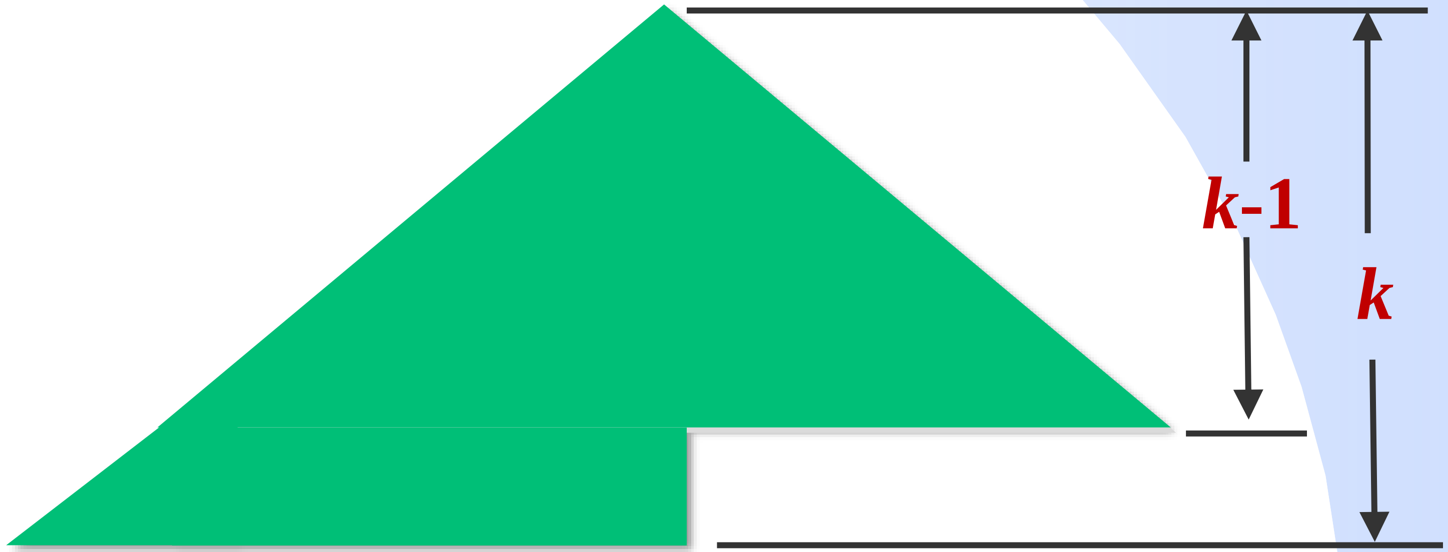
$$\text{故 } 2^k \le n < 2^{k+1}\text{，即 } k \le \log_2 n < k+1,$$

有$\log_2 n-1 < k \le \log_2 n$,

由于k为整数,

故有$k=\lfloor \log_2 n \rfloor$.

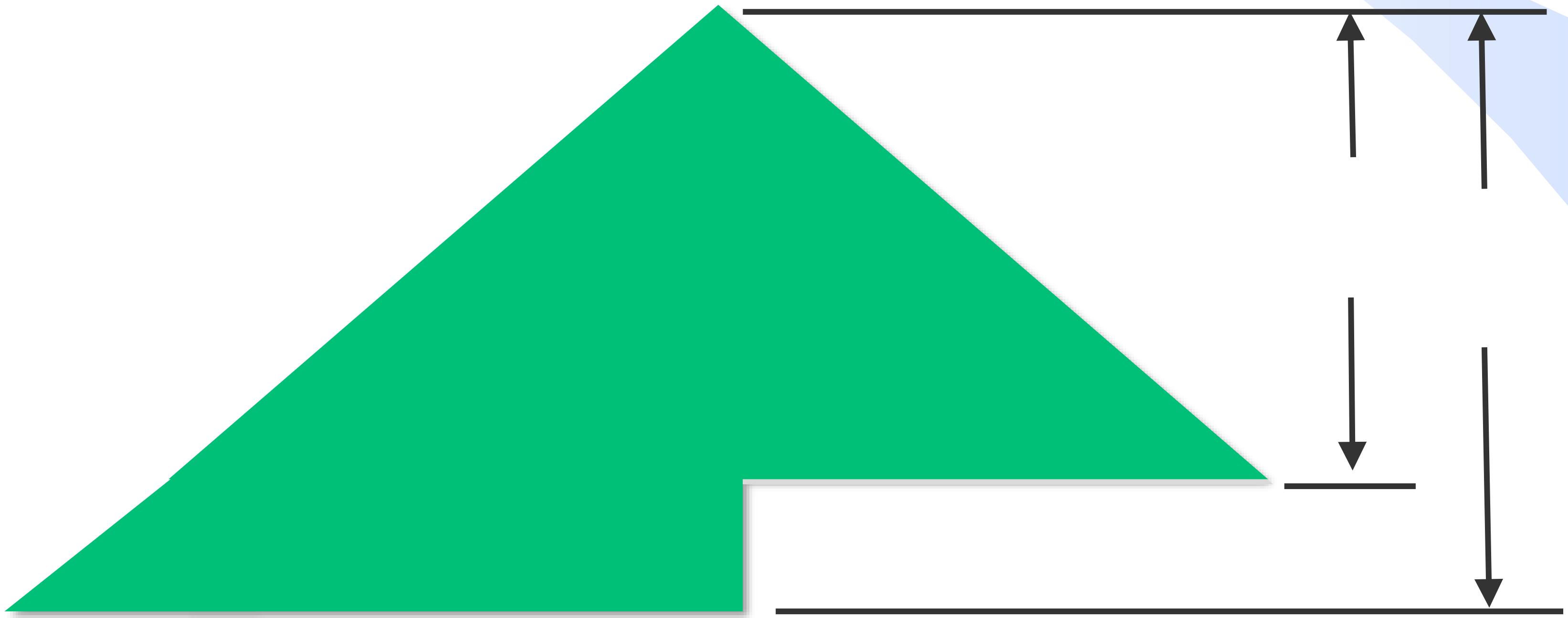
证毕 ▌



B

练习

已知一棵完全二叉树的第5层有8个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是<u>39</u>，最多是<u>111</u>。【考研题全国卷】



B

课下思考

已知一棵完全二叉树的第n层有k个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是 2^n+k-1 ，最多是 $2^{n+2}-2k-1$ 。