Lista 4 - Última lista que cai na prova 1.

1. Determine as derivadas parciais

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $z = \cos xy$

c) $z = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

f) $z = xy\, e^{xy}$

g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h) $z = \text{arc tg } \dfrac{x}{y}$

i) $g(x, y) = x^y$

j) $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

l) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

m) $z = \dfrac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Considere a função dada por $z = x \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

5) A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, onde n e R são constantes não-nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

6) Seja $z = e^y \phi(x - y)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

7) Sejam $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2} (2x \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \theta).$$

Conclua que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \theta.$$

8) Suponha que a função $z = z(x, y)$ admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio e que seja dada implicitamente pela equação $xyz + z^3 = x$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

9) Seja $z = f(x^2 - y^2)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável real. Verifique que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

10) Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2}\, dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

11) Seja $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\, dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

12) Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.