Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 28/05/2019

Axiomas de Giuseppe Peano(1858-1932):

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ possui quatro propriedades fundamentais que possuem como *consequências lógicas*, todas as afirmações *verdadeiras* referentes a este conjunto.
Assim, em linguagem corrente, podemos dizer que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é caracterizado pelas seguintes propriedades:

(i) Todo número natural possui um ÚNICO SUCESSOR que também é um número natural.

(ii) Números naturais DISTINTOS possuem SUCESSORES DISTINTOS.

(iii) Existe um ÚNICO número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo "1" e é chamado de "número um".

(iv) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$; isto é, contém todos os naturais.

Números Naturais - Axiomas de Giuseppe Peano

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Podemos escrever as quatro propriedades dos AXIOMAS DE PEANO em LINGUAGEM MATEMÁTICA do seguinte modo:

(i) Todo número natural possui um ÚNICO SUCESSOR que também é um número natural.
Ou seja, existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \to s(n)$.

(ii) Números naturais DISTINTOS possuem SUCESSORES DISTINTOS; isto é, a função s é INJETORA:
$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}; n_1 \neq n_2 \Rightarrow s(n_1) \neq s(n_2)$

(iii) Existe um ÚNICO número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo "1" e é chamado de "número um".
Deduzimos então que $1 \notin s(n); \forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) "Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$; isto é, contém todos os naturais".
Consequentemente, $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que
$1 \in X \Rightarrow S(1) = 2 \in X$
$2 \in X \Rightarrow S(2) = 3 \in X$
$\vdots$
$n \in X \Rightarrow S(n) = n + 1 \in X$
$\vdots$
então, $X = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\} = \mathbb{N}$
Assim, podemos representar o conjunto dos Naturais do seguinte modo;
$1 \xrightarrow{S(1)} 2 \xrightarrow{S(2)} 3 \xrightarrow{S(3)} \cdots n \xrightarrow{S(n)} n+1 \xrightarrow{S(n+1)} \cdots$

Números Naturais - Axiomas de Giuseppe Peano

$1 \xrightarrow{S(1)} 2 \xrightarrow{S(2)} 3 \xrightarrow{S(3)} \cdots n \xrightarrow{S(n)} n+1 \xrightarrow{S(n+1)} \cdots$ Desta forma, temos que os números naturais têm uma sequência começando pelo número 1;

$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n+1 < \cdots;$

isto nos leva a pensar que todo número natural pode ser obtido a partir do número 1 através de **repetidas aplicações de tomar o sucessor**.

"Temos, na verdade, um PROCESSO INDUTIVO".

Definiremos uma propriedade para os números naturais;

$P(n)$: "o número natural n é o sucessor de outro número natural".

Observação.1: Note que apenas o número 1 não satisfaz esta propriedade, todos os outros naturais satisfazem.

Observação.2: O papel fundamental do "**axioma da indução**" é que ele pode ser usado como método de demonstração denominado MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA ou PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA ou PRINCÍPIO DA INDUÇÃO.

PRINÍPIO DA INDUÇÃO FINITA:

Seja $P(n)$ uma propriedade referente aos números naturais.
Se 1 satisfaz $P(n)$ e, além disso, o fato de que o número natural n satisfaz $P(n)$ implicar que seu sucessor $n+1$ também satisfaz, então todos os números naturais satisfazem a mesma propriedade $P(n)$:
$(P(1) \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$.
Assim, o MÉTODO DE INDUÇÃO consiste em dois passos:

- Passo BASE(Inicialização):
  Verificamos se $P(1)$ é verdadeira.
- Passo INDUTIVO:
  Mostramos que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todos os naturais n.

Observação.3: Note que $(P(1) \wedge P(n))$ é a HIPÓTESE de indução. Por isso, precisamos verificar se $P(1)$ é verdadeira e supor que $P(n)$ é verdadeira a fim de provar a TESE $P(n+1)$.

Exercício.1: Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Passo BASE(Inicialização):
  Verificando se $P(1)$ é verdadeira, então;
  $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow (V)$.
- Passo $\mathrm{INDUTIVO}$:
  Mostramos que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todos os naturais n.
  Então; supondo que $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdadeira, vamos verificar se $P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$ é verdadeira.
  $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$

Exercício.2: Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares naturais é igual a n^2.
Ou seja, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

- Passo BASE(Inicialização):
  Verificando se $P(1)$ é verdadeira, então; $P(1) : 1 = 1^2 \Rightarrow (V)$.
- Passo INDUTIVO:
  Mostramos que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todos os naturais n.
  Então; supondo que $P(n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira, vamos verificar a validade de
  $P(n+1) : 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$.
  $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) =$
  $n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (V)

"Podemos também utilizar o Princípio da Indução para definirmos funções."
EXEMPLO.1 (Adição dos Números Naturais - "somar k")
Fixando um número $k \in \mathbb{N}$, vamos definir a função SOMA de dois naturais quaisquer k e n como segue;
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \to f(n) = k + n;$
onde,

(i) $s(k) = k + 1$; (por definição, $k + 1$ é o sucessor de k), e

(ii) $s(k + n) = k + s(n)$ (por definição, $s(n) = n + 1 \Rightarrow k + s(n) =$
$= k + (n + 1) = (k + n) + 1 = s(k + n)$)

EXEMPLO.2 (Multiplicação dos Números Naturais)
Fixando um número $k \in \mathbb{N}$, vamos definir a função MULTIPLICAÇÃO de dois naturais quaisquer k e n como segue; $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; n \to f(n) = n.k;$
onde,

(i) $1.k = k$; e

(ii) $k.s(n) = k.(n + 1) = k.n + k$ (isto é, $2.k = k + k$; $3.k = k + k + k, \ldots$)

PROPRIEDADES BÁSICAS: Sejam $k, n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, então;

(P_1) ASSOCIATIVIDADE:
$k + (n + p) = (k + n) + p$;
$k.(n.p) = (k.n).p$;

(P_2) COMUTATIVIDADE:
$k + n = n + k$;
$k.n = n.k$;

(P_3) LEI DO CORTE:
$k + n = k + p \Rightarrow n = p$;
$k.n = k.p \Rightarrow n = p$;

(P_4) DISTRIBUTIVIDADE:
$k.(n + p) = k.n + k.p$;

Observação.4: O Princípio da Indução pode ser utilizado para provar as propriedades básicas da adição e da multiplicação de números naturais.

Números Naturais - Propriedades

Pela ADIÇÃO de naturais definida, podemos introduzir uma relação de ORDEM entre os naturais.

PROPRIEDADES assumindo a ordem no conjunto dos naturais: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$

(P_1) : Se $m < n$ então $m + p = n$ "m MENOR DO QUE n" e
Se $m \leq n$ então $m = n$ ou $m < n$ "m MENOR DO QUE OU IGUAL AO n"

(P_2) : Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$ "TRANSITIVIDADE"

(P_3) : Qualquer uma das afirmações: $m < n$, $m = n$, $m > n$ exclui as outras. "TRICOTOMIA"
Notamos com esta propriedade que os números naturais são comparáveis.

(P_4) : Se $m < n$ então $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$.
"MONOTONICIDADE"

Prinípio da Boa Ordem:

"Todo subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento."

Observação.5: Dado o subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$,dizemos que o número natural a é o menor elemento (ou primeiro elemento) quando $a \in A$ e $a \leq x; \forall x \in A$.
Por exemplo, 1 é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$.

Números Naturais - Prinípio da Boa Ordem

Prinípio "Forte" da Indução Matemática ou Indução Completa(Generalizada):

Seja $P(n)$ uma propriedade referente aos números naturais.
Se o menor elemento, $a \in \mathbb{N}$, satisfaz $P(n)$ e, além disso, o fato de que o número natural $n \geq a$ satisfaz $P(n)$ implicar que seu sucessor $n+1$ também satisfaz, então todos os números naturais satisfazem a mesma propriedade $P(n)$; mais especificamente, temos a seguinte sentença considerando $a = 1$:
$(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$.
Assim;

- Passo BASE(Inicialização): Verificamos se $P(a)$ é verdadeira.
- Passo INDUTIVO: Mostramos que $\forall n \geq a, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

EXEMPLO.3

Mostre, utilizando o princípio de indução, que todo natural n maior do que "1" pode ser escrito como o produto de números primos. Consideremos a propriedade "$P(n)$: n pode ser escrito como o produto de números primos".

(i) Passo Básico: $P(2) : 2 = 2^1$ verdadeiro;

(i) Hipótese de Indução: $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 2$;
Passo indutivo: $(P(2) \wedge \cdots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$.
Vamos verificar a validade de $P(n+1)$:

Se $n+1$ for um número natural primo então satisfaz; mas,
Se $n+1$ for um número natural composto, então pode ser escrito pelo *produto de dois números naturais* a e m; tais que, $2 \leq a \leq m < n+1$.
Utilizando a hipótese de indução, temos que cada um desses números a e m pode ser escrito como o *produto de números primos*.
Assim, $n+1$ será o produto dos números primos de a com os de m.
Concluímos então que $P(n+1)$ é verdadeira. Logo, $P(n)$ vale para todo natural maior do que 1.

SEQUÊNCIAS:
As propriedades os naturais nos leva à relação de ordem no conjunto dos naturais seguindo uma SEQUÊNCIA definida.
Estas sequências podem ser definidas de forma RECURSIVA.
Exemplo: "Sequência de Fibonacci"
$F(1) = F(2) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2); n \geq 3$

$$\begin{array}{ll} F(1) & = F(2) = 1 \\ F(3) & = F(2) + F(1) = 2 \\ F(4) & = F(3) + F(2) = 3 \\ F(5) & = F(4) + F(3) = 5 \\ F(6) & = F(5) + F(4) = 8 \\ F(7) & = F(6) + F(5) = 13 \\ \dots & \dots \end{array}$$

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$
Mostre utilizando o princípio de indução: $F(n) < (\frac{7}{4})^n$.

"Sequência de Fibonacci"
$F(1) = F(2) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2); n \geq 3$
Mostre utilizando o princípio de indução: $F(n) < (\frac{7}{4})^n$.

- Base de indução: $F(1) < (\frac{7}{4})^1 \Rightarrow 1 < \frac{7}{4} \quad$ (V)
- Hipótese de indução: $F(n) < (\frac{7}{4})^n$.
  Passo de indução (tese): $F(n+1) < (\frac{7}{4})^{n+1}$
  $F(n) = (\frac{7}{4})^n$
  $F(n-1) = (\frac{7}{4})^{n-1}$
  $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$
  $F(n+1) < (\frac{7}{4})^n + (\frac{7}{4})^{n-1} = (\frac{7}{4})^{n-1}[(\frac{7}{4}) + 1] <$
  $< (\frac{7}{4})^{n-1}.(\frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{4})^{n+1}$
  Portanto, $F(n+1) < (\frac{7}{4})^{n+1}$ é verdadeira; validando $P(n+1)$.
  Logo, $P(n)$ vale para todos os naturais.

Exercícios - Princípio de Indução Matemática

(1) Prove os itens abaixo utilizando o PRINCÍPIO DA INDUÇÃO,

(a) $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2; n \geq 1.$

(b) $n < 2^n; n \geq 1$

(c) $2^n \geq n^2; n \geq 4$

(d) 2 divide $n^2 + n; n \geq 1$

(e) 5 divide $n^5 - n; n \geq 2$

(f) $n^2 > 3n; n \geq 4$

(g) $(1+x)^n \geq 1 + x^n; x > 0, n \geq 1$

(h) $n! > 2^n; n \geq 4$

(i) $n^2 < 2^n; n \geq 5$

(j) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1; n \geq 3$

(k) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n \geq 1$

(l) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}; r \neq 1, a \geq 1, n \geq 1$

(2) Encontre uma fórmula para a soma dos n primeiros naturais ímpares utilizando o processo recursivo.

Em seguida, prove utilizando a indução matemática.