Ordem produto e ordem lexicográfica (ou "do dicionário")

Sejam $(S, \leq_S)$ e $(T, \leq_T)$ posets.

No produto cartesiano $S \times T$ consideremos a seguinte relação:

$(x, y) \leq (x', y')$ sse $x \leq_S x'$ e $y \leq_T y'$ $\forall x, x' \in S$ $\forall y, y' \in T$.

$\forall (x, y) \in S \times T$, $x \leq_S x$ e $y \leq_T y$, então $(x, y) \leq (x, y)$ e $\leq$ é reflexiva.

$\forall (x, y), (x', y') \in S \times T$, se $(x, y) \leq (x', y')$ e $(x', y') \leq (x, y)$, então $x \leq_S x'$, $x' \leq_S x$, $y \leq_T y'$ e $y' \leq_T y$. Logo, $x = x'$ e $y = y'$ e portanto $(x, y) = (x', y')$ e $\leq$ é antissimétrica.

$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in S \times T$, se $(x, y) \leq (x', y')$ e $(x', y') \leq (x'', y'')$, então: $x \leq_S x'$, $x' \leq_S x''$, $y \leq_T y'$ e $y' \leq_T y''$. Como $\leq_S$ e $\leq_T$ são transitivas, $x \leq_S x''$ e $y \leq_T y''$, então $(x, y) \leq (x'', y'')$ e $\leq$ é transitiva.

$\leq$ é uma ordem dita <u>ordem produto</u> de $\leq_S$ e $\leq_T$.

Ainda em $S \times T$, consideremos a seguinte relação:

$(x,y) \operatorname{lex} (x',y')$ sse $\left(x <_S x' \text{ ou } \left(x = x' \text{ e } y \leq_T y'\right)\right)$

(ou $\leq_{lex}$)

$\forall (x,y) \in S \times T$, $x = x$ e $y = y \Rightarrow x = x$ e $y \leq_T y \Rightarrow (x,y) \operatorname{lex} (x,y)$ e lex é reflexiva

$\forall (x,y),(x',y') \in S \times T$, se $(x,y) \operatorname{lex} (x',y')$ e $(x',y') \operatorname{lex} (x,y)$, então

$x <_S x'$ é impossível, pois $<_S$ é antireflexiva e antissimétrica, então

$x <_S x' \Rightarrow x' \not<_S x$ e portanto $(x',y') \operatorname{lex} (x,y)$ em contradição com a

hipótese. Logo, $x = x'$ e $y \leq_T y'$ e $y' \leq_T y$. Mas isto

implica que também $y = y'$. Segue que $(x,y) = (x',y')$ e lex é antissimétrica.

$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')$, se $(x,y) \operatorname{lex} (x',y')$ e $(x',y') \operatorname{lex} (x'',y'')$.

Caso 1: $x <_S x'$.

Caso 1.1: $x' <_S x''$. Aí $x <_S x' <_S x'' \Rightarrow x <_S x'' \Rightarrow (x,y) \operatorname{lex} (x'',y'')$

Caso 1.2: $x' = x''$. Neste caso, $x <_S x' = x'' \Rightarrow (x,y) \operatorname{lex} (x'',y'')$.

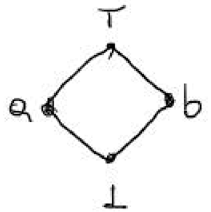
Caso 2: $x = x'$ e $y \leq_T y'$

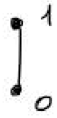
Caso 2.1 $x' <_S x'' \Rightarrow x <_S x'' \Rightarrow (x,y) \operatorname{lex} (x'',y'')$

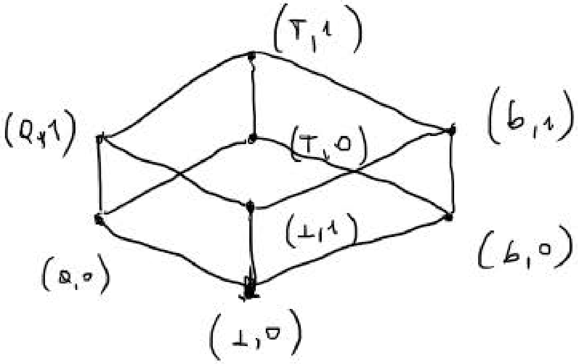
Caso 2.2: $x' = x''$ e $y' \leq_T y'' \Rightarrow x = x''$ e $y \leq_T y' \leq_T y'' \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x''$ e $y \leq_T y'' \Rightarrow (x,y) \operatorname{lex} (x'',y'')$.

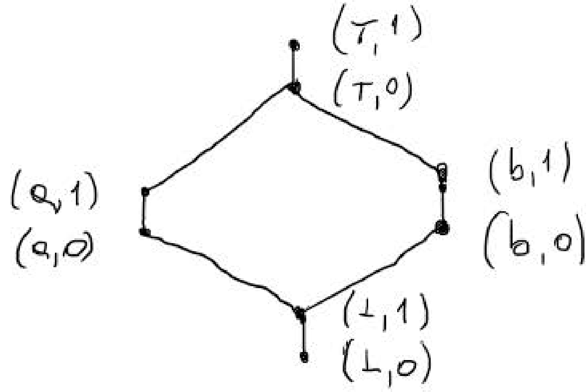
Logo, lex é transitiva e, portanto, é uma ordem, dita produto lexicográfico de $\leq_S$ e $\leq_T$.



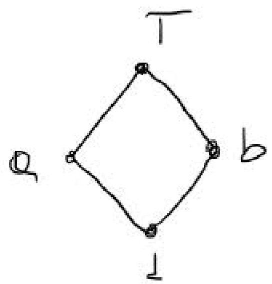


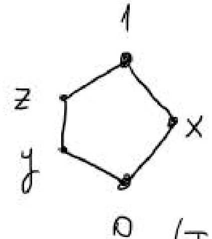


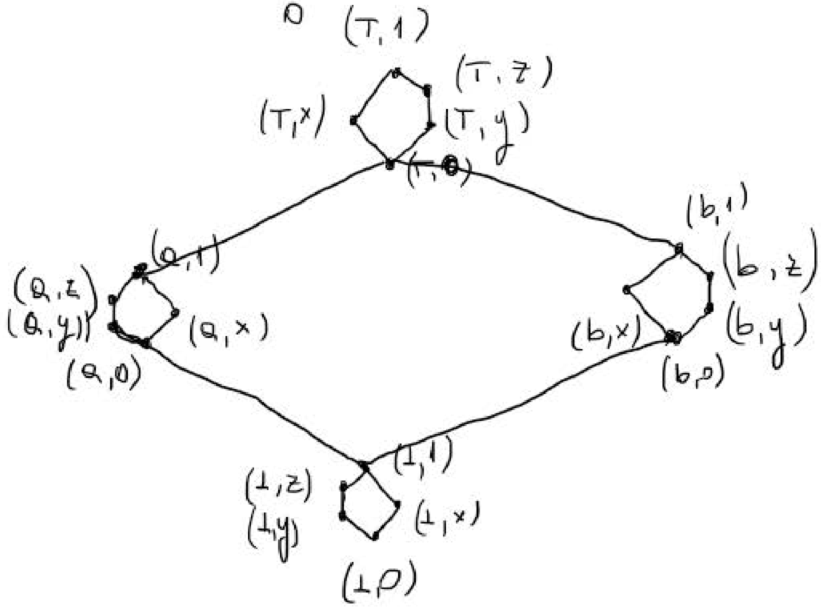
Ordem produto



ordem lexicográfica

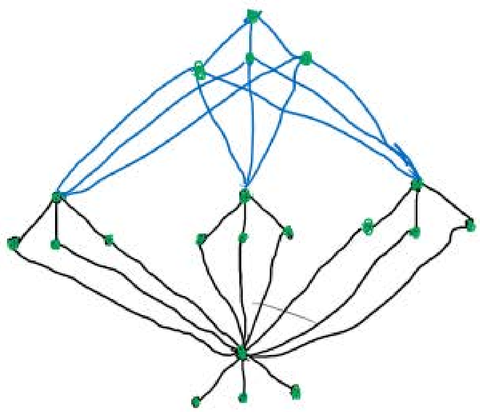




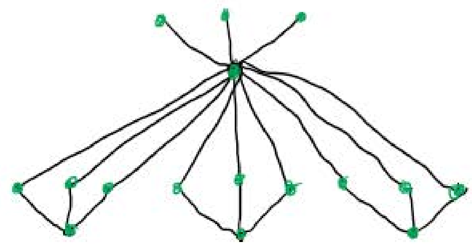


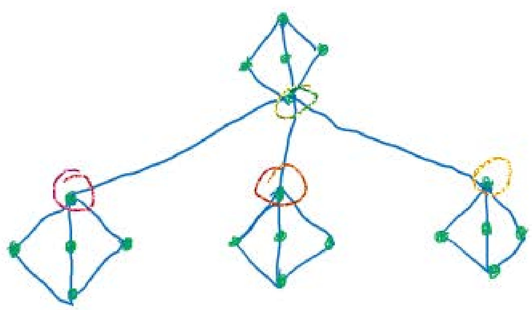
S   T

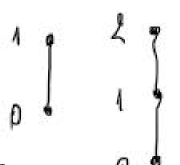
S lex T



T lex S

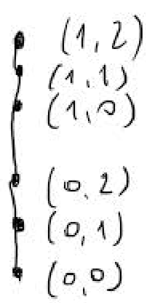




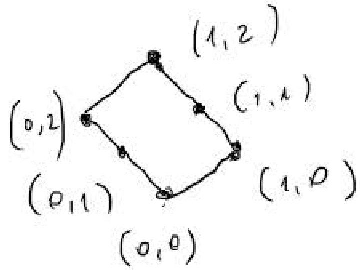


A B

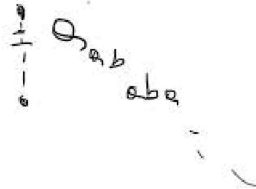
A lex B



O produto lexicográfico de conjuntos totalmente ordenados é totalmente ordenado.

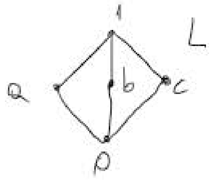


A × B



Subreticulados e subálgebras de Boole

Seja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado. Um subconjunto M de L é um subreticulado de L se $\forall x,y \in M\ (x \vee y \in M \text{ e } x \wedge y \in M)$.



$M = \{a, b, 1\}$ $\quad a \vee b = 1 = a \vee 1 = b \vee 1 \in M$

$a \wedge b = 0 \notin M$

M não é subreticulado de L.

$M_1 = \{a, 0, 1\}$ é subret. de L pois

$a \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0 \in M_1 \quad a \vee 0 = a \in M_1, \ 1 \vee 0 = 1 \in M_1$

$a \vee 1 = 1 \in M_1, \ a \wedge 1 = a \in M_1$

$\{x\}$ é subret. $\forall x \in L$ e para qualquer reticulado.

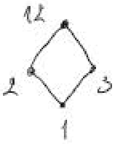
$\{x, 0, 1\}$ (x sendo a, b ou c) é subret. do diamante.

$\{x, y, 0, 1\}$ (x e y sendo dois entre a, b e c) é subret.

$(\mathbb{N}, \text{mmc}, \text{mdc})$ $\qquad X = \{1, 2, 6, 7, 14\}$

X não é subret. pois, por exemplo, $\text{mmc}(6,7) = 42 \notin X$

$Y = \{1, 2, 3, 12\}$ não é subret. pois $\text{mmc}(2,3) = 6 \notin Y$.

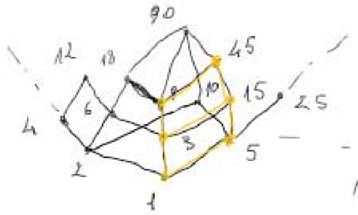


é subret. de $\mathbb{N}$

$Z = \{1, 2, 3, 6, 12\}$ é subret.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad D_n = \{x \in \mathbb{N} : x \mid n\}$ é subreticulado de $\mathbb{N}$

$n = 45$ $\qquad D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$



$\text{mmc}(3,5) = 15 \in D_{45}$

$\text{mmc}(3,9) = 9$

$45 = 3^2 \cdot 5 \qquad x \in D_{45}$ sse $x = 3^a \cdot 5^b$, $a \in \{0,1,2\}$, $b \in \{0,1\}$

$\forall x = 3^a 5^b, \ y = 3^c 5^d \in D_{45} \quad \text{mmc}(x,y) = 3^{\max(a,c)} \cdot 5^{\max(b,d)} \in D_{45}$

$\text{mdc}(x,y) = 3^{\min(a,c)} \cdot 5^{\min(b,d)} \in D_{45}$

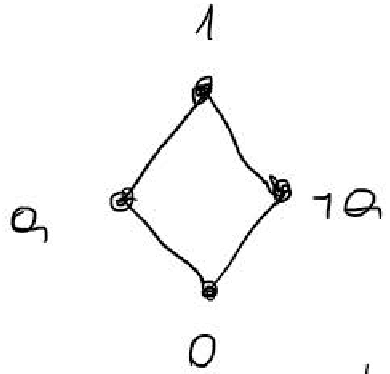
$\max(a,c), \min(a,c) \in \{0,1,2\}$, $\quad \max(b,d), \min(b,d) \in \{0,1\}$

D_n é subreticulado de $(\mathbb{N}, \text{mmc}, \text{mdc})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

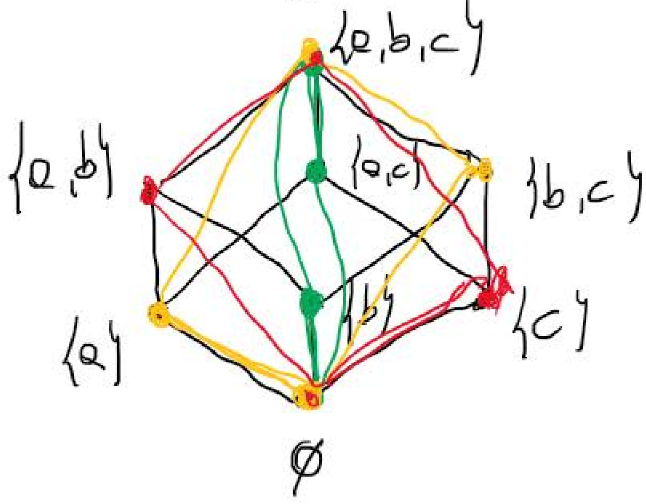
Seja $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ uma álgebra de Boole

Um subconjunto B de A é uma <u>subálgebra (de Boole)</u> de A se $0 \in B$, $1 \in B$ e $\forall x, y \in B$, $x \vee y \in B$, $x \wedge y \in B$, $\neg x \in B$.

(Em particular, uma subálgebra é um subreticulado.)



A e $\{0,1\}$ são sempre subálgebras de A.



$\mathcal{P}(\{a,b,c\})$

$\{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ é subálg. de $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$