Prova 2 2021.2

Fábio Braga, João Lucas Lima, Luca Argolo, Thiago Vieira

November 30, 2021

Questão 1. Seja $\Sigma = (h, f, c, R)$ uma assinatura onde $ar\,(f) = ar\,(R) = 2$, $ar\,(h) = 1$. Podemos criar 5 Σ-termos sem variavéis usando constantes e funções: $f\,(c_1, c_2)$, c_3, $R\,(c_4)$, $h\,(c_5)$, c_6. Podemos criar 5 Σ-fórmulas atômicas usando apenas o símbolo de igualdade, funções, relações, variáveis, constantes e também verum e falsum: $f\,(c_1, x)$, $c_2 = x$, $R\,(y, c_3)$, $\bot$, $\top$. Podemos criar 5 Σ-fórmulas complexas usando quantificadores e símbolos lógicos: $\neg x = c_2$, $c_3 \to g$, $c_4 \vee c_5$, $f\,(i, c_7)$, $h\,(z)$.

Questão 2. Seja $\varphi = \forall x\,(R\,(x, c) \to \exists y f\,(y) = c) \vee P\,(c)$. A assinatura que contém todos os símbolos não lógicos φ é $\Sigma = (\mathbf{C}, f, R, P; ar\,(f) = 1, ar\,(R) = 2, ar\,(P) = 1)$.
O conjunto das subfórmulas de φ terá a seguinte forma:
$sub\,(\varphi) = \{P\,(c)\,; R\,(x, c) \to \exists y f\,(y) = c; R\,(x, c)\,; f\,(y) = c\}$

Questão 3. Seja $\Sigma = (h, f, c, R)$ uma assinatura onde $ar\,(P) = ar\,(R) = 2$, $ar\,(h) = 1$. A fórmula $\exists x \forall y R\,(x, y) \vee P\,(c_1, y)$ é uma fórmula que apresenta x como uma variável ligada e livre ao mesmo tempo.

Questão 4.

Questão 5. Seja $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, ar)$ uma assinatura e $\mathcal{M} = (M, (c^{\mathcal{M}})_{c\in\mathcal{C}}, (f^{\mathcal{M}})_{f\in\mathcal{F}}, (r^{\mathcal{M}})_{r\in\mathcal{R}})$ uma estrutura.
Seja ainda v uma valoração e $I(\mathcal{M}, v)$ uma interpretação.
Definimos inicialmente $I \vDash \neg\forall x\varphi$
$\Leftrightarrow I \nvDash \forall x\varphi$
$\Leftrightarrow$ nem para todo $n \in \mathcal{M}$ temos que $I_x^n \vDash \varphi$
$\Leftrightarrow$ existe $n \in \mathcal{M}$ tal que $I_x^n \nvDash \varphi$
$\Leftrightarrow$ existe $n \in \mathcal{M}$ tal que $I_x^n \vDash \neg\varphi$
$\Leftrightarrow I \vDash \exists x\neg\varphi$, como queríamos provar.

Questão 6.

Questão 7.