Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 16/04/2019

Relações - Fecho

Definição: (Fecho Reflexivo de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a relação $\mathcal{R}$ em A. Indicamos por $ref(\mathcal{R})$ e denominamos fecho reflexivo da relação $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $ref(\mathcal{R}) := \mathcal{R} \cup \Delta_A$; Δ_A é a relação identidade em A.

Observação: Notemos que $ref(\mathcal{R})$ é a menor relação reflexiva contendo a relação $\mathcal{R}$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_A = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle, \langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle z, z\rangle\}$
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $ref(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \Delta_A = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle, \langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle z, z\rangle\}$

DEFINIÇÃO: (Fecho Simétrico de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a $\mathcal{R}$ RELAÇÃO em A. Indicamos por $sim(\mathcal{R})$ e denominamos FECHO SIMÉTRICO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $sim(\mathcal{R}) := \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

Observação: Notemos que $sim(\mathcal{R})$ é a menor relação simétrica contendo a relação $\mathcal{R}$; ou seja, $sim(\mathcal{R})$ é uma relação simétrica e qualquer outra relação simétrica contendo $\mathcal{R}$, contém $sim(\mathcal{R})$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, x\rangle, \langle y, z\rangle\}$
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
$sim(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, y\rangle, \langle x, z\rangle\}$

Definição: (Fecho Transitivo de uma Relação)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ em A. Indicamos por $tra(\mathcal{R})$ e denominamos FECHO TRANSITIVO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A: $tra(\mathcal{R}) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}^m$.

Observação: Notemos que $tra(\mathcal{R})$ é a menor relação transitiva contendo a relação $\mathcal{R}$; isto é, $tra(\mathcal{R})$ é uma relação transitiva e qualquer outra relação transitiva contendo $\mathcal{R}$, contém $tra(\mathcal{R})$.

Exemplo:

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $tra(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, pois $\mathcal{R}$ já é uma relação transitiva.
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle\}$ em $A = \{x, y, z\}$;
   $tra(\mathcal{S}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}^m = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3 \cup \mathcal{S}^4 \cup \cdots = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3 = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} \cup \Delta_A = \nabla_A$.

Exercícios:

Determine os fechos reflexivo, simétrico e transitivo das relações abaixo:

(a) $\mathcal{R} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ em $A = \{1,2,3\}$;

$ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$;
$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$;
$\mathcal{R}^2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$;
$\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$;
$\mathcal{R}^4 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^3 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\} = \mathcal{R}^3$;
$\mathcal{R}^5 = \mathcal{R} o \mathcal{R}^4 = \mathcal{R}^3; \cdots;$
assim, $tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}^m = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^3$.

(b) $\mathcal{S} = \{\langle x,y\rangle \mid x > y\}$ em $\mathbb{N}$,
$ref(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \Delta_{\mathbb{N}} = \{\langle x,y\rangle \mid x \geq y\}$,
$sim(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} = \{\langle x,y\rangle \mid x > y \vee y > x\} = \nabla_{\mathbb{N}} - \Delta_{\mathbb{N}}$,
$tra(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Definição:(Congruência)

Sejam os inteiros x, y, q, seja o inteiro positivo d, e seja o inteiro não-negativo r. Vamos definir $x := d.q + r;\ 0 \leq r < d$; isto é, q é o QUOCIENTE e r é o RESTO da divisão de x por d: $r = x - d.q$.
Dizemos que "x é CONGRUENTE MÓDULO d ao y" se, e somente se, o resto r da divisão por d é igual. Assim, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = d.k$.
Notação: $x \equiv y(mod\ d)$ ou $x\ mod\ d = y\ mod\ d$ ou $x \equiv_d y$

Exemplos: $20 \equiv_3 17$; pois
$20\ mod\ 3 = 17\ mod\ 3 \Rightarrow 20 - 17 = 3.k; k \in \mathbb{Z}$
$22 \equiv_3 19$; pois
$22\ mod\ 3 = 19\ mod\ 3 \Rightarrow 22 - 19 = 3.k; k \in \mathbb{Z}$

Exemplo: Seja a um inteiro positivo maior que 1. Mostre que a relação $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x \equiv y(mod\ a)\}$ é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros.

- Reflexiva: $x \equiv x(mod\ a)$; pois,
  $x\ mod\ a = x\ mod\ a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = k.a.$
- Simétrica: $x \equiv y(mod\ a) \Rightarrow y \equiv x(mod\ a)$; pois,
  $x\ mod\ a = y\ mod\ a \Rightarrow y\ mod\ a = x\ mod\ a \Rightarrow$
  $\exists k, m \in \mathbb{Z} : x - y = k.a$ e $y - x = m.a.$
- Transitiva: $x \equiv y(mod\ a)$ e $y \equiv z(mod\ a) \Rightarrow x \equiv z(mod\ a)$; pois,
  $x\ mod\ a = y\ mod\ a\ e\ y\ mod\ a = z\ mod\ a \Rightarrow x\ mod\ a = z\ mod\ a$
  $\Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{Z} : x - y = k.a\ e\ y - z = m.a$
  $\Rightarrow x - (m.a + z) = k.a \Rightarrow x - z = (k + m).a; (k + m) \in \mathbb{Z}.$

Logo, R é uma relação de equivalência pois é simultaneamente, reflexiva, simétrica e transitiva.

RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: (Exemplos)

1. A relação de igualdade $\Delta_{\mathbb{R}} = \mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$ é uma relação de equivalência.
2. A relação de "*equivalência lógica* $\Leftrightarrow$" é uma relação de equivalência.
3. A relação em $\mathbb{Z}$ denominada "CONGRUÊNCIA MÓDULO 3":
$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv_3 y\} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}; x - y = 3k\}$, é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$; ou seja, $\mathcal{R}$ é simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva:
   - (i) reflexiva: $x - x = 0 = 3k; k = 0$; assim, $x \equiv_3 x$;
   - (ii) simétrica: para $x \equiv_3 y \Leftrightarrow x - y = 3k$; multiplicando a equação por (-1): $y - x = 3(-k) \Leftrightarrow y \equiv_3 x$;
   - (iii) transitiva: para $x \equiv_3 y \Leftrightarrow x - y = 3k$;
     e para $y \equiv_3 z \Leftrightarrow y - z = 3m \Rightarrow y = z + 3m$;
     substituindo em $x \equiv_3 y$:
     $x - (z + 3m) = 3k \Rightarrow x - z = 3(k - m); \Leftrightarrow x \equiv_3 z$.

Definição: (Classe de Equivalência)

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A e seja $x \in A$.
Dizemos que o conjunto $[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$
é a classe de equivalência de x em $\mathcal{R}$.

Notação: $[x]_{\mathcal{R}}$, $\bar{x}$, ou $x/\mathcal{R}$.

Exemplos:

1. Para a relação de igualdade "$=$", temos que para $x \in \mathbb{N}$, a classe $[x]_{=} := \{x\}$
2. Para a relação de "congruência módulo $3, \equiv_3$", temos as classes:
   $[0]_{\equiv_3} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}; (0 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$
   $[1]_{\equiv_3} = \{\ldots, -5, -2, +1, +4, \ldots\}; (1 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$ e
   $[2]_{\equiv_3} = \{\ldots, -4, -1, +2, +5, \ldots\}; (2 - y = 3k; k \in \mathbb{Z})$.

Note que paramos na classe $[2]_{\equiv_3}$ porque as próximas serão repetições das anteriores, i.é, $[3]_{\equiv_3} = [0]_{\equiv_3}; [4]_{\equiv_3} = [1]_{\equiv_3}, \ldots$.

Relação de Equivalência - Conjunto Quociente

Definição: (Conjunto Quociente)

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A.
Dizemos que o conjunto $[A]_{\mathcal{R}} := \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in A\}$ é o conjunto quociente de A por $\mathcal{R}$.
Notação: $[A]_{\mathcal{R}}$, $\bar{A}$, ou $A/\mathcal{R}$.

Exemplos:

1. Para a relação de igualdade "$=$", temos que para $x \in \mathbb{N}$, a classe $[\mathbb{N}]_{=} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$; pois, $[x]_{=} := \{x\}$. Note que $\bigcup_{x \in \mathbb{N}} \{x\} = \mathbb{N}$; e ainda, esses conjuntos são disjuntos.
2. Para a relação de "congruência módulo $3, \equiv_3$", temos que o conjunto quociente contém apenas três elementos: $[\mathbb{Z}]_{\equiv_3} = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$.
   Obs: Denotamos por $[\mathbb{Z}]_{\equiv_3}$ ou $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$, ou simplesmente, $\mathbb{Z}_3$.
   Note que $[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$; e ainda, esses conjuntos são disjuntos.

Relação de Equivalência - Propriedades

Lema:

1. $\forall x \in A, x \in [x]_{\mathcal{R}}$.
   Assim, $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in A$, se $x\mathcal{R}y$, então $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.
3. $\forall x, y \in A$, se $\neg(x\mathcal{R}y)$, então $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

DEFINIÇÃO: (Partição)

Sejam A um conjunto e $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de subconjuntos não vazios de A.

1. Dizemos que o conjunto $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é uma COBERTURA de A se, e somente se, $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$.
2. Dizemos que o conjunto $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é uma PARTIÇÃO de A se, e somente se, $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é uma cobertura de A e os elementos da família são 2 a 2 disjuntos, ou seja, para quaisquer $i, j \in \mathcal{I}; i \neq j$, temos que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exercícios

Exemplos:

1. $[\mathbb{N}]_= = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de $\mathbb{N}$, pois é uma cobertura de $\mathbb{N}$: $\bigcup_{x\in\mathbb{N}}\{x\} = \mathbb{N}$ e;
   $\forall y \in \mathbb{N}; y \neq x, \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
2. $[\mathbb{Z}]_{\equiv_3} = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$; pois é uma cobertura de $\mathbb{Z}$: $[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$; e;
   $[0]_{\equiv_3} \cap [1]_{\equiv_3} = \emptyset$; $[0]_{\equiv_3} \cap [2]_{\equiv_3} = \emptyset$; $[1]_{\equiv_3} \cap [2]_{\equiv_3} = \emptyset$.

Exercício: Quais são as classes de equivalência correspondentes à relação de congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$? E qual é o conjunto quociente?

- $[0]_{\equiv_5} = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$
  $[1]_{\equiv_5} = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$
  $[2]_{\equiv_5} = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$
  $[3]_{\equiv_5} = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$
  $[4]_{\equiv_5} = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$
- $[\mathbb{Z}]_{\equiv_5} = \{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, [2]_{\equiv_5}, [3]_{\equiv_5}, [4]_{\equiv_5}\}$.

Proposição :

Seja A um conjunto não-vazio. Então, toda relação de equivalência em A determina uma partição em A e, toda partição em A determina uma relação de equivalência em A.

Exemplos:

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a seguinte partição em A; $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, então pela proposição acima determinamos uma relação de equivalência em A:
   $\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$
2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a seguinte relação de equivalência em A;
   $\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$,
   vamos determinar as classes de equivalência:
   $[1]_{\mathcal{R}} = \{1, 2\}$; $[2]_{\mathcal{R}} = \{1, 2\}$; $[3]_{\mathcal{R}} = \{3, 4\}$; e $[4]_{\mathcal{R}} = \{3, 4\}$;
   a partição de A determinada por esta relação :
   $\mathcal{P} = \{[1]_{\mathcal{R}}, [3]_{\mathcal{R}}\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
   Note que $\mathcal{P} = [A]_{\mathcal{R}}$; com, $[1]_{\mathcal{R}} \cup [3]_{\mathcal{R}} = A$ e $[1]_{\mathcal{R}} \cap [3]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.