INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
Teoria dos Grafos
Professor: Roberto Freitas Parente

GABARITO – EXERCÍCIOS 01

Última atualização: 6 de outubro de 2022

Exercício 1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $A \subseteq [n]$ é livre de soma se para todo $x, y \in A$ temos que $x + y \notin A$. Prove que se $A \subseteq [n]$ é livre de soma, então $|A| \leq \lceil n/2 \rceil$.*

Resposta. Seja $A \subset [n]$ com $|A| > \lceil n/2 \rceil$ e $m = \max A$ e $B = \{m - a \colon a \in A\} \setminus \{0\}$. Temos que $|A| = |B| + 1$ e assim $|A| + |B| \geq 2\lceil n/2 \rceil + 1 \geq n + 1$. Como $|A| + |B| \geq n + 1$ então pelo princípio da casa dos pombos $A \cap B \neq \emptyset$. Assim, seja $x \in A \cap B$ e pela definição de B temos que $x, a, m \in A$ tal que $x = m - a$ e assim A não é livre de soma. □

Exercício 2. *Uma aresta é uma aresta de corte se, e somente se, ela não pertence a um ciclo.*

Resposta. Ida ($\Rightarrow$): Seja $xy \in E$ uma aresta de corte de G. Suponha por contradição que xy pertence a um ciclo $C = (x, v_1, \dots, v_\ell, y)$. Pela definição de aresta de corte, temos que $G' = G \setminus xy$ é desconexo e estarão em componentes distintaso que é uma contradição pelo fato de existir o caminho $(x, v_1, \dots, v_\ell, y)$, então temos que o ciclo C não existe.

Volta ($\Rightarrow$): Fazendo a contrapositiva e por um argumento similar temos que se $xy \in E(G)$ e existe um ciclo $C = (x, v_1, \dots, v_\ell, y)$ temos que $G' = G \setminus xy$ não será desconexo devido a existência do caminho $(x, v_1, \dots, v_\ell, y)$ e assim, pela definição de aresta de corte temos que xy não é. □

Exercício 3. *Prove que todo (u, v)-passeio contém um (u, v)-caminho.*

Resposta. Seja $\mathcal{P} = (u, x_1, \dots, x_\ell, v$ um passeio. Se $\mathcal{P}$ não repete vértices, então $\mathcal{P}$ é um caminho. Para todo vértice y que se repete em $\mathcal{P}$ bata remover os vértices interemediários, ou seja, para $\mathcal{P} = (u, x_1, \dots, y, y_1, \dots, y_k, y \dots, x_\ell,$ faça $\mathcal{P}_y = \mathcal{P} \setminus \{y, y_1, \dots, y_k = (u, x_1, \dots, y, \dots, x_\ell, v)$ e y não se repete mais. Fazendo tal operçaão para todo $y \in \mathcal{P}$ e seja $\mathcal{P}'$ o resultado, temos que $\mathcal{P}'$ é um passeio sem repetição de vértices e assim um caminho com $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$. □

Exercício 4. *Seja v um vértice de corte de um grafo simples G. Prove que $\bar{G} - v$ é conexo.*

Resposta. Para provar o exercício basta observar que dado um grafo G temos que ou G é conexo ou $\bar{G}$ é conexo. Assim, pela definição de vértice de corte, temos $G \setminus v$ é desconexo, então $\bar{G} \setminus v$ é conexo.

Para provar que G ou $\bar{G}$ é conexo. Suponha que G é desconexo e sejam $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_\ell$ suas componentes conexas. Observe que para todo $x, \in \mathcal{C}_i$ e $y \in \mathcal{C}_j$ com $j \neq i$ temos que $xy \in E(\bar{G})$, caso contrário não seria componentes conexas. Desta forma podemos observar que quaisquer dois vértices x, y em componentes conexas distintas de G existe uma aresta. Ademais se $x, y \in \mathcal{C}_i$ estão na mesma componente conexas basta observar que existe o caminho $(x, z, y$ onde $y \in \mathcal{C}_j$ com $j \neq i$. □

Exercício 5. *Procure nas referências as definições de "circuito euleriano" em digrafos (seção 1.4 do Livro do Douglas West). Ademais, seja $d^+(v)$ o **grau de saída** de v e $d^-(v)$ o **grau de entrada** de v (ver definição formal nas referências). Por fim, prove que um digrafo D é euleriano se, e somente se, $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v e o grafo subjacente de D contém apenas uma componente conexa não trivial.*

Resposta. A prova é análoga a de grafos não direcionados e aqui não vou provar formalmente. Para a da basta observar que existindo um ciclo euleriano direcionado $\vec{C}$ temos que cada vez que um vértice aparece na lista de $\vec{C}$ irá receber uma aresta e sairá uma aresta. Para a volta, basta observar que para todo grafo G com $\delta^+(G) \geq 1$ contém um ciclo direcionado e daí vc pode usar a mesma estratégia de prova por indução observando que existirá um ciclo $\vec{C}$ em D e assim ao remover as arestas de $\vec{C}$ usamos indução nas componentes restantes e a partir de $\vec{C}$ podemos contruir um circuito direcionado que passa por todas as arestas de D. □

Exercício 6. *Considere um sistema de tráfego aéreo com k linhas aéreas. Suponha que (i) todo serviço direto entre duas cidades é considerado de ida e volta; (ii) Todo par de cidade tem uma serviço direto em pelo menos uma linha área. Suponha que também que toda linha aérea não pode escolonar um ciclo ímpar de cidades. Em termos de k, qual é a quantidade máxima de cidades no sistema?*

Resposta. Definia cada cidade como um vértice e as ligações entre cidades como arestas podemos obserevar que cada linha aérea $\mathcal{L}_i$ será um grafo G_i. Como linhas áreas não contém ciclos temos que cada G_i é um grafo bipartido com conjunto de vértices iguais. Ademais, pelo exercício visto em sala " O grafo completo K_n pode ser representado como a união de k grafos bipartidos se, e somente se, $n \leq 2^k$" temos que n é a quantidade cidades e k a quantidade de linhas aéreas. □

Exercício 7. *Mostre que um grafo G é uma floresta se e somente se $|E| = |V| - c(G)$, onde $c(G)$ denota o número de componentes conexas de G.*

Resposta. ($\Rightarrow$) Basta usar o resultado visto em sala que se T é um árvore, temos $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Seja F uma floresta e pela definição temos que cada componente conexa de F é uma árvore. Suponha que $F_1, F_2, \ldots, F_{c(F)}$ são as componentes conexas de F. temos $|E(F_i)| = |V(F_i)| - 1$ para $i = 1, \ldots, c(F)$. Assim temos que

$$|E(F)| = \sum_{i=1}^{c(F)} |V(F_i)| - 1 = V(F) - c(F).$$

($\Leftarrow$) Para a volta vamos lembrar do resultado que se G é um grafo conexo, então $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$ e a igualdade vale para quando G é uma árvore. Desta forma, sejam $G_1, \ldots, G_{c(F)}$ as componentes conexas de G. Assim temos

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{c(G)} |E(G_i)| \geq \sum_{i=1}^{c(G)} |V(G_i)| - 1 = |V(G)| - c(F).$$

Para valer a igualdade $|E(G)| = |V(G)| - c(F)$ temos que $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$ para todo $i = 1, \ldots, c(F)$. Então temos que as componentes conexas G_i's são árvores e assim F é uma floresta. □

Exercício 8. *Seja T uma árvore com n vértices. Prove que se $\Delta(T) = k$, então existem k folhas. Ademais, argumente apresentando uma construção tal que para qualquer $n > \Delta \geq 2$ não temos como ter menos que Δ folhas. Por outro lado, apresente uma árvore em que para existem mais que 2Δ folhas para $\Delta \geq 2$.*

Resposta. Seja x um vertice G tal que $d(x) = \Delta(G) \geq k$. Observe que ao removermos o vértice x teremos $\Delta(G)$ componentes conexas, pois caso contrário existiria um ciclo. Existem dois tipos de componente conexas. Se uma componente conexas só tem um vértice, então esse vértice era folha em G. Por outro lado, se uma componente conexa tem mais que um vértice, então não é uma árvore trivial e com isso temos que tal componente conexa tem duas folhas. Cada componente só pode conectar com x por 1 vértice, caso contrário teríamos um ciclo em G. Desta forma, pelo menos 1 folha da componente conexa também será folha no grafo original.

Por fim, como cada componente conexa contribui com pelo menos 1 folha, então a quantidade de vértices folhas em G é pelo menos $\Delta(G) \geq k$.

Parte 2: Para o primeiro caso basta observar que uma árvore com grau máximo Δ contém a estrela $K_{1,\Delta}$ e cada folha poderia ser substituída por uma árvore ,as que minimiza a quantidade de folhas é um caminho, ou seja, cada folha de $K_{1,\Delta}$ pode ser "alongada" por um caminho, mas isso não diminuiria a quantidade de folhas. Para o segundo caso basta fazer a construção $K_{1,\Delta}$ e substituir cada folha por uma $K_{1,\Delta}$ e fazendo isso sucessivamente crescemos rapidamente a quantidade de folhas da árvore. □

Exercício 9. *Explique por que a seguinte "prova" para o Teorema de Mantel está errada.*

Demonstração errada. Vamos provar o Teorema por indução em n. Caso base: $n \leq 2$. Aqui o grafo completo K_n tem a quantidade máxima de arestas e não tem triângulo. Passo de indução: $n > 2$. Suponha que a afirmação vale para $n = k$, então $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$ é o grafo livre de triângulos com k vértices com a maior quantidade de arestas possíveis. Adicionamos um novo vértice x para formar um grafo livre de triângulo com $k+1$ vértices. Fazendo x adjacente a todos os vértices da maior parte de $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$. Fazendo isso criamos o grafo $K_{\lfloor k+1/2 \rfloor \lceil k+1/2 \rceil}$ e isso completa a prova. □

Resposta. Ver exemplo "1.3.24. Example." do Livro Dougas West e sua discussão seguinte sobre "induction trap". □

Exercício 10. *Prove utilizando indução a seguinte versão mais simples do Teorema de Mantel: Se G é um grafo K_3-Livre com n vértices, então $e(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.*

Resposta. Seja G um grafo com n vértices K_3-Livre. Faça $G' = G \setminus xy$ com $xy \in E(G)$, temos que $e(G) = e(G') + d(x) + d(y) - 1$, onde "-1"vem do fato de contar a aresta xy duas vezes. Usando a hipótese de indução temos que $e(G') \leq \lfloor (n-2)^2/4 \rfloor$ e observando que $d(x) + d(y) \leq n$ dado que $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ caso contrário teremos um triângulo, temos que

$$e(G) = e(G') + d(x) + d(y) - 1 \leq \lfloor (n-2)^2/4 \rfloor + n - 1 \leq \lfloor n^2/4 \rfloor.$$

O(s) caso(s) base(s) fica como exercício. □

Exercício 11. *Prove que todo torneio com n vértices tem um caminho direcionado hamiltoniano.*

Resposta. Iremos provar por indução na quantidade de vértice. Para um torneio com $n = 1, 2, 3$ vértices o teorema é trivialmente satisfeito. Nossa hipótese de indução é que o Teorema vale para todo torneio com até $n-1$ vértices. Seja $\vec{T}_n$ um torneio com n vértices. Escolha arbitrariamente um vértice v de $\vec{T}_n$ e faça $T' = \vec{T}_n - v$. T' é um torneio com $n-1$ vértices e pela nossa hipótese de indução temos que existe um caminho hamiltoniano $\vec{P} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ em T'. Sejam os três casos possíveis:

- Se $(v, x_1) \in A(\vec{T}_n)$, então temos que $\{v, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ é um caminho hamiltoniano em $\vec{T}_n$.
- Se $(x_k, v) \in A(\vec{T}_n)$ e temos $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, v\}$ um caminho hamiltoniano.
- Caso contrário existirão dois vértices $x, y \in \vec{P}$ tal que os arcos (x, y), (v, x) e (y, v) estão em $\vec{T}_n$. Assim basta retirar o arco (x, y) do caminho $\vec{P}$ e inserir os arcos (v, x) e (y, v) no lugar que termos um caminho hamiltoniano.

Obs: O terceiro caso é fácil ver que existe, pois caso contrário v estaria enviando ou recebendo arcos para todos os vértices de $\vec{P}$ que são situações dos dois primeiros casos.

□

Exercício 12. *Prove ou desprove o seguinte. Se G tem pelo menos $n \geq 3$ vértices e G tem* **pelo menos** *$\alpha(G)$ vértices com grau $n-1$, então G é hamiltoniano.*

- $\alpha(G) = \max\{|X| : X \subset V(G)$ *e* $G[X]$ *é conjunto independente*$\}$.

Resposta. O resultado é verdadeiro e a prova é instrutiva como bom exercício para entender.

[Prova:] Se G tem pelo menos $\alpha(G)$ vértices com grau $n-1$, então G é hamiltoniano. Qualquer conjunto cuja deleção desconecta G deve incluir todos os vértices de grau $n-1$. Desta forma, temos que $\kappa(G) \geq n-1$ e pelas condições especificada temos que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Isso implica que G é hamiltoniano pelo Teorema de Chvátal–Erdős que pode ser encontrado no livro do Douglas West (7.2.19. Theorem. (Chvátal-Erdős [1972]). Também é instrutivo entender a definição de $\kappa(G)$ (iremos estudar esse parâmetro mais para frente do curso). □