Relações de equivalência

S conjunto, $R \subseteq S^2$ é equivalência se R é

1 reflexiva
2 simétrica
3 transitiva.

Ex1: $\Delta = \{(x,x) : x \in S\}$ é equivalência

Ex 2: $S = \mathbb{N}$

xRy sse x e y têm o mesmo resto na divisão por 2

$\forall x$, xRx óbvio pois todo número têm o mesmo resto de si mesmo na divisão por 2

R é reflexiva

$\forall x,y$, se xRy, x e y têm o mesmo resto na divisão por 2 e, então, y e x também. Logo, $xRy \Rightarrow yRx$ e R é simétrica.

$\forall x,y,z$, se xRy e yRz, então x e y têm o mesmo resto na divisão por 2 e y e z também. Então x e z também terão o mesmo resto. Logo, xRz, ou seja, R é transitiva.

R é equivalência.

S conjunto

$\subseteq$ em $\mathcal{P}(S)$, ou seja, $X \subseteq Y$ ssc $\forall x \in S (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

1. $\forall x \in S$ e $\forall X \in \mathcal{P}(S)$, obviamente $x \in X \Rightarrow x \in X$, então $X \subseteq X$ e portanto $\subseteq$ é reflexiva.

2. Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ e vamos supor que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$. Então $\forall x \in S (x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$. Logo $X = Y$ e a relação é antissimétrica.

3. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, então $\forall x \in S$:

$$x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \text{e} \quad x \in Y \Rightarrow x \in Z$$

Então $x \in X \Rightarrow x \in Z$, ou seja $X \subseteq Z$ e $\subseteq$ é transitiva.

---

refl. $\forall x \, (x R x)$

antiss. $\forall x \forall y \, (\underbrace{(x R y \text{ e } y R x)}_{} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{})$

sim. $\forall x \forall y \, (\underbrace{x R y}_{} \Rightarrow \underbrace{y R x}_{})$

trans. $\forall x \forall y \forall z \, ((x R y \text{ e } y R z) \Rightarrow x R z)$

Ex 3: S é o conjunto das seleções de futebol.

xRy sse x e y ganharam o mesmo número de copas.

Toda seleção ganhou o mesmo número de copas de si mesma, então $\forall x (xRx)$, isto é, R é reflexiva.

Se xRy, então x e y ganharam o mesmo número de copas. Então y e x também. Logo yRx e R é simétrica.

Se xRy e yRz, então x, y e z ganharam todas o mesmo número de copas. Logo xRz e R é transitiva.

R é equivalência.

$S = \{\text{Brasil}\} \cup \{\text{Itália, Alemanha}\} \cup \{\text{França, Arg., Uruguay}\} \cup \{\text{Espanha, Inglaterra}\} \cup \{\text{todas as outras}\}$

Def. $S \neq \emptyset$ conjunto. Um subconjunto P de $\mathcal{P}(S)$ é uma **partição de S** se:

(1) $\emptyset \notin P$;

(2) $\bigcup P = S$

$$\bigcup P = \bigcup_{X \in P} X$$

(3) $\forall X, Y \in P \ (X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \bigcup P = \{x : \exists X \in P \ (x \in X)\} \\ P = \{X_1, X_2, X_3\} \quad \bigcup P = X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \bigcup_{X \in P} X \end{array}}$$

Ex.: $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}$

$2\mathbb{N}+1 = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é impar}\}$

$\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ é partição de $\mathbb{N}$

S não é uma partição de S

$\{S\}$ é uma partição de S

D/C

Ex.: $\{a, b, c\} = S$

$\mathcal{P}(S) = \{\cancel{\emptyset}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, S\}$

$P_1 = \{S\}$

$P_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$P_2 = \{\{a\}, \{b,c\}\}$

$P_3 = \{\{b\}, \{a,c\}\}$

$P_4 = \{\{c\}, \{a,b\}\}$

Ex. $S = \{a\}$

$P = \{\{a\}\} = \{S\}$ única possível

Ex.: S = sel. futebol

$P = \{\{Br\}, \{It., Ale\}, \{Fr, Uru, Arg\}, \{Esp, Ing\}, \{Aus., Sui., \dots\}\}$

Ex.: $P = \{\{x\} : x \in S\}$ é partição para todo conjunto não vazio S.

Def. Seja S um conjunto não vazio e seja R uma equivalência em S. $\forall x \in S$, o conjunto $\boxed{x/_R = [x]_R = \{y \in S : xRy\}}$ é dito classe de equivalência de x módulo R.

O conjunto $S/_R = \{x/_R : x \in S\}$ é dito o conjunto quociênte de S módulo R. $(S/_R \subseteq \mathcal{P}(S))$

Proposição $\forall x, y \in S$ (1) $xRy \Rightarrow x/_R = y/_R$ e

(2) $x \not R y \Rightarrow x/_R \cap y/_R = \phi$.

Dem.

(1) Sejam $x, y \in S$ t.q. xRy. Vamos provar que $y/_R \subseteq x/_R$.

$\forall z \in y/_R$, por def. yRz. Como xRy e R é transitiva, segue xRz e, então, $z \in x/_R$. Logo $y/_R \subseteq x/_R$.

Vamos provar, agora, que $x/_R \subseteq y/_R$.

xRy, como R é simétrica, implica yRx.

$\forall z \in x/_R$, xRz por def. Como yRx e R é transitiva, segue yRz. Logo $z \in y/_R$ e, então, $x/_R \subseteq y/_R$.

Segue $x/_R = y/_R$.

representantes

(2) $x \not R y \Rightarrow x/_R \cap y/_R = \phi$ é equiv. $x/_R \cap y/_R \neq \phi \Rightarrow xRy$

Como $x/_R \cap y/_R \neq \phi$, seja $z \in x/_R \cap y/_R$.

xRz e yRz mas, como R é simétrica, isso implica zRy.

Pela propr. trans. xRz e $zRy \Rightarrow xRy$.

Resumindo: $x/_R = y/_R$ ou $x/_R \cap y/_R = \phi$.