UFBa - IME - DMAT —- Matemática Discreta I(MATA42) - Profa: Isamara

Lista de Exercícios.3 - Relações

---

1. Classifique $\Re$ em reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, anti-simétrica, transitiva e conectada.

   (a) Seja a relação $\Re := \{\langle x; y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é ímpar } \}$.

   (b) Seja a relação $\Re := \{\langle x; y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 2y\}$.

   (c) Seja a relação $\Re := \{\langle x; y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -y\}$.

   (d) Seja a relação $\Re := \{\langle x; y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y + 1\}$.

---

2. Para cada relação do exercício anterior, determine os fechos reflexivo, simétrico e transitivo.

---

3. Sejam $\Re := \{\langle x; y\rangle \mid x + y \text{ é par } \}$ e $\mathcal{S} := \{\langle x; y\rangle \mid x \text{ é múltiplo de } y\}$ em $A := \{3, 5, 7\}$.

   (a) Ache as inversas: $\widetilde{\Re}$, $\widetilde{\Re \cup \mathcal{S}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathcal{S}}}$.

   (b) Ache as complementares: $\overline{\Re}$, $\overline{\Re \cup \mathcal{S}}$, $\overline{\overline{\Re}}$.

   (c) Determine as compostas: $\mathcal{S} \circ \Re$, $\Re \circ \mathcal{S}$, $\Re^2$, $\mathcal{S}^3$.

   (d) Determine, se possível, os conjuntos quocientes: $[A]_{\Re}$, $[A]_{\mathcal{S}}$.

---

4. Seja a seguinte partição do conjunto A: $\mathcal{P} = \{\{0, 6, 8\}, \{2, 4\}, \{10\}\}$.

   (a) Determine uma cobertura para A.

   (b) Ache a relação de equivalência $\Re$ em A determinada por esta partição $\mathcal{P}$.

---

5. Seja $\Re$ uma relação de equivalência em A dada por $\Re := \{\langle 1; 1\rangle, \langle 1; 3\rangle, \langle 1; 5\rangle, \langle 3; 1\rangle, \langle 3; 3\rangle, \langle 3; 5\rangle, \langle 5; 1\rangle, \langle 5; 3\rangle, \langle 5; 5\rangle, \langle 7; 7\rangle, \langle 9; 9\rangle, \langle 9; 11\rangle, \langle 11; 9\rangle, \langle 11; 11\rangle, \langle 13; 13\rangle\}$.
   É possível determinar por $\Re$ uma partição de A? (justifique sua resposta)
   Em caso afirmativo, determine a partição de A.

---

6. Sejam $A := \{0, 1, 2, 3\}$ e $\Re := \{\langle x; y\rangle \mid x + y \text{ é par } \}$ uma relação em A. É possível determinar por $\Re$ uma partição de A? (justifique sua resposta)

   Em caso afirmativo, determine a partição de A.

---

7. Seja $\Re$ a relação *congruência módulo* 4 em $\mathbb{Z}$.

   (a) Determine as classes de equivalência em $\Re$ e o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ por $\Re$.

   (b) Determine uma cobertura para $\mathbb{Z}$.

   (c) Ache uma partição $\mathcal{P}$ de $\mathbb{Z}$ determinada por $\Re$.

---

8. Seja $\Re$ uma relação definida no conjunto de todas as pessoas. Classifique $\Re$ em REFLEXIVA, IRREFLEXIVA, SIMÉTRICA, ASSIMÉTRICA, ANTI-SIMÉTRICA, TRANSITIVA e CONECTADA.

   (a) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid x$ é mais alto que $y\}$.

   (b) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid x$ e y nasceram no mesmo dia $\}$.

   (c) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid x$ e y tem um avô em comum $\}$.

---

9. Seja $\Re$ uma relação definida no conjunto de todas as páginas WEB. Classifique $\Re$ em REFLEXIVA, IRREFLEXIVA, SIMÉTRICA, ASSIMÉTRICA, ANTI-SIMÉTRICA, TRANSITIVA e CONECTADA.

   (a) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid$ Todos que visitaram a página x também visitaram a página $y\}$.

   (b) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid$ Não existem links em comum na página x e na página $y\}$.

   (c) $\Re := \{\langle x;y\rangle \mid$ Existe pelo menos um link em comum nas duas páginas x e $y\}$.

---

10. Assinale V ou F em cada afirmação abaixo se for verdadeira ou falsa, respectivamente. (justifique cada resposta!)

   ( ) Seja $\Re$ uma relação em A. $\Re$ é REFLEXIVA se, e somente se, $\nexists x$ tal que $x \in A \wedge \langle x;x\rangle \notin \Re$.

   ( ) Seja $\Re := \{\langle 1;1\rangle, \langle 1;2\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 2;1\rangle\}$ uma relação em $A = \{1,2,3\}$; então $\Re$ é REFLEXIVA e $\mathrm{ref}(\Re) = \Re$.

   ( ) Seja $\Re$ uma relação em A. Se $\Re$ não é REFLEXIVA então $\Re$ é IRREFLEXIVA e $\mathrm{ref}(\Re) = \Re \cup \triangle_A$.

   ( ) Seja $\mathcal{S}$ uma relação em A. Se $\mathcal{S}$ é SIMÉTRICA então $\mathcal{S}$ não é ASSIMÉTRICA e $\mathcal{S}$ não é ANTI-SIMÉTRICA.

   ( ) Se uma relação $\Re$ em A for REFLEXIVA então $\Re$ também será ANTI-SIMÉTRICA.

   ( ) Seja $\Re$ uma relação de equivalência em A; então $\mathrm{ref}(\Re) = \mathrm{sim}(\Re) = \mathrm{tra}(\Re)$.

( ) A relação $\Re := \{\langle x; y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$ é CONECTADA.

( ) Seja $\Re$ uma relação em A. Então a relação S:= ref($\Re$)$\cup$ sim($\Re$)$\cup$ tra($\Re$) é uma relação de EQUIVALÊNCIA.

---

11. Mostre ou refute(apresente um contra exemplo) as afirmações a seguir:

    (i) Seja A um conjunto e $\{A_i\}_{\{i\in I\}}$ uma FAMÍLIA de subconjuntos não vazios de A. Então, esta FAMÍLIA é uma COBERTURA de A.

    (ii) Seja A um conjunto. Então, uma COBERTURA de A também será uma PARTIÇÃO de A.

    (iii) Seja A um conjunto. Então, toda relação $\Re$ definida em A determina uma PARTIÇÃO de A.

---

12. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações de equivalências num mesmo conjunto A. Mostre ou refute as afirmações a seguir:

    (i) $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é relação de equivalência.

    (ii) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é relação de equivalência.

    (iii) $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ é relação de equivalência.

    (iv) $\mathcal{S}o\mathcal{R}$ é relação de equivalência.

    (v) $\mathcal{R}^m; m \in \mathbb{N}^*$ é relação de equivalência.
