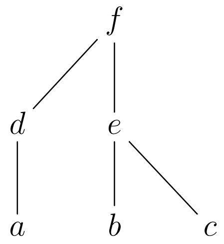
Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática Matemática Discreta II

Prof. Ciro Russo

Terceira unidade – 12/02/2014

Atenção: é preciso argumentar e justificar todas as respostas!

1. Sejam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\leq$ a relação de ordem em X cujo diagrama de Hasse é o seguinte:



(a) $\leq$ define uma estrutura de reticulado sobre X? Em caso afirmativo, ele é distributivo?

(b) Existem, em $\langle X, \leq \rangle$, máximo, mínimo, elementos maximais, elementos minimais?

(c) Encontre $l(Y)$ e $u(Y)$, para $Y = \{a, e, f\}$.

(d) Encontre, se houver, $\sup\{b, c, d\}$ e $\inf\{b, c, d\}$.

2. Seja $D_{70} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 70\}$.

(a) Desenhe o diagrama de Hasse do conjunto ordenado $\langle D_{70}, | \rangle$.

(b) D_{70} é um subreticulado de $\langle \mathbb{N}, \mathrm{mmc}, \mathrm{mdc} \rangle$? Em caso afirmativo, ele é um reticulado distributivo?

(c) Encontre os elementos complementados de D_{70}.

(d) D_{70} é uma álgebra de Boole?

3. Seja $D_{210} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 210\}$. D_{210}, com as operações de mmc e mdc, e com 1 e 210, respectivamente, máximo e mínimo, tem uma estrutura de álgebra de Boole.

(a) Encontre a operação de complemento nessa álgebra, ou seja, encontre $\neg n$ para todo $n \in D_{210}$.

(b) Quais dos seguintes subconjuntos de D_{210} são subálgebras de Boole dele? [Dica: a resposta à letra (a) pode ajudar!]

- $X = D_{30}$, ou seja, o conjunto dos divisores de 30.
- $Y = \{1, 5, 7, 35, 210\}$
- $Z = \{1, 7, 30, 210\}$

(c) Dada a álgebra de Boole

$$\langle \wp(\{a, b\}), \cup, \cap, {}^c, \varnothing, \{a, b\} \rangle,$$

a função $f : \wp(\{a, b\}) \to D_{210}$ definida por

$$f(\varnothing) = 1, \ f(\{a\}) = 15, \ f(\{b\}) = 14, \ f(\{a, b\}) = 210$$

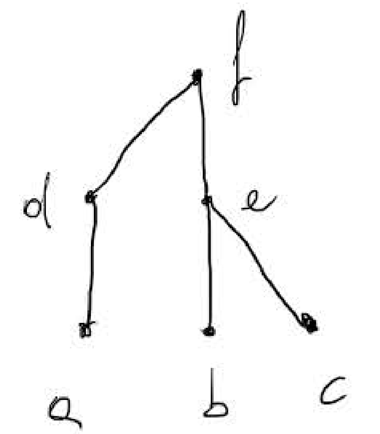
é um homomorfismo de álgebras de Boole? É injetivo? É um isomorfismo? É um homomorfismo de reticulados?

4. (Opcional) Para quais $n \in \mathbb{N}$ o reticulado D_n é uma álgebra de Boole?

Prova 12/2/2014

1)

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$



(a) $(X, \leq)$ não reticulado

pois, por exemplo, $\nexists \inf\{a,b\}$.

$\ell_X(\{a,b\}) = \emptyset$ e portanto não tem mínimo

(b) Pelo diagrama, fica evidente que $f \geq x \ \forall x \in X$, então $f = \max X$ e, consequentemente, é o único maximal de X.

X tem três elementos minimais: a, b, c. De fato, $\nexists x \in X$ t.q. $x < a$, $x < b$, ou $x < c$.

(c) $Y = \{a, e, f\}$. $u(a) = \{a, d, f\}$, $u(e) = \{e, f\}$, $u(f) = \{f\}$

$$u(\{a,e,f\}) = u(a) \cap u(e) \cap u(f) = \{a,d,f\} \cap \{e,f\} \cap \{f\} = \{f\}$$

$$\ell(\{a,e,f\}) = \ell(a) \cap \ell(e) \cap \ell(f) = \{a\} \cap \{e,b,c\} \cap X = \emptyset$$

(d) $u(\{b,c,d\}) = u(b) \cap u(c) \cap u(d) = \{b,e,f\} \cap \{c,e,f\} \cap \{d,f\} = \{f\}$

$\Rightarrow \sup\{b,c,d\} = \min\{f\} = f$.

$\ell(\{b,c,d\}) = \ell(b) \cap \ell(c) \cap \ell(d) = \{b\} \cap \{c\} \cap \{a,d\} = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \inf\{b,c,d\}$.

[2] $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

(a)

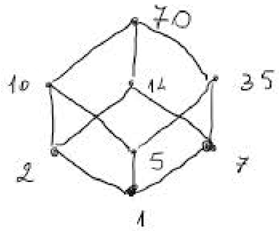


Diagrama de Hasse de $(D_{70}, |)$

(b) D_n é subreticulado de $(\mathbb{N}, mmc, mdc)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $\forall h, k \in D_n$, $mmc(h,k) | n$ e $mdc(h,k) | n \Rightarrow mmc(h,k), mdc(h,k) \in D_n$.

$mmc(a, mdc(b,c)) = mdc(mmc(a,b), mmc(a,c))$

Sejem $a = 2^{a_1} 5^{a_2} 7^{a_3}$, $b = 2^{b_1} 5^{b_2} 7^{b_3}$, $c = 2^{c_1} 5^{c_2} 7^{c_3}$,

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$

$mmc(a, mdc(b,c)) = mmc(a, 2^{b_1 \wedge c_1} 5^{b_2 \wedge c_2} 7^{b_3 \wedge c_3}) =$

$= 2^{a_1 \vee (b_1 \wedge c_1)} 5^{a_2 \vee (b_2 \wedge c_2)} 7^{a_3 \vee (b_3 \wedge c_3)}$

Como $(\mathbb{N}, \leq)$ é ret. distr. $\Rightarrow x^{a_i \vee (b_i \wedge c_i)} = x^{(a_i \vee b_i) \wedge (a_i \vee c_i)}$

$x \in \{2, 5, 7\}$, $i \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow mmc(a, mdc(b,c)) =$

$= 2^{(a_1 \vee b_1) \wedge (a_1 \vee c_1)} 5^{(a_2 \vee b_2) \wedge (a_2 \vee c_2)} 7^{(a_3 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee c_3)} =$

$= mdc(2^{a_1 \vee b_1} \cdot 5^{a_2 \vee b_2} \cdot 7^{a_3 \vee b_3}, 2^{a_1 \vee c_1} \cdot 5^{a_2 \vee c_2} \cdot 7^{a_3 \vee c_3}) =$

$= mdc(mmc(a,b), mmc(a,c)) \Rightarrow$

$\Rightarrow D_{70}$ é distributivo.

(c) x' é o complemento de x em D_{70} sse $mmc(x, x') = 70$ e $mdc(x, x') = 1$.

$\forall x \in D_{70}$, $x = 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, com $a, b, c \in \{0, 1\}$

Para $x' = 2^{a'} 5^{b'} \cdot 7^{c'}$ ser complemento de x, é nec. e suficiente que $a \vee a' = b \vee b' = c \vee c' = 1$ e $a \wedge a' = b \wedge b' = c \wedge c' = 0$ e, então, que $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$, $c' = 1 - c$. Logo, todo elemento de D_{70} tem complementar e, portanto, D_{70} é uma álgebra de Boole.

[3] $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow D_{210} = \{2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d : a,b,c,d \in \{0,1\}\}$

(a) Sejam $x = 2^a 3^b 5^c 7^d$, $y = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'} \in D_{210}$.

$y = \neg x$ sse $mdc(x,y) = 1 = 2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0$ e $mmc(x,y) = 210 = 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^1$

sse $a\wedge a' = b\wedge b' = c\wedge c' = d\wedge d' = 0$ e $a\vee a' = b\vee b' = c\vee c' = d\vee d' = 1$

sse em $\{0,1\}$, $a' = \neg a$, $b' = \neg b$, $c' = \neg c$ e $d' = \neg d$

sse $a' = 1-a, \ldots, d' = 1-d$. Logo $\neg(\underbrace{2^a 3^b 5^c 7^d}_{x}) = 2^{1-a}\cdot 3^{1-b}\cdot 5^{1-c}\cdot 7^{1-d} =$

$= 210/x$

(b) $X = D_{30}$, $Y = \{1,5,7,35,210\}$, $Z = \{1,7,30,210\}$

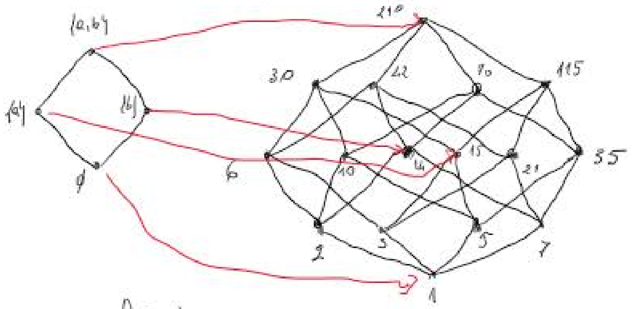
X não é subálgebra pois $210 \notin D_{30}$.

Y não é subálg. de D_{210} pois $\neg 5 = 42 \notin Y$.

Z é subálg. pois:

- $1, 210 \in Z$
- $mmc(7,30) = 210 \in Z$, $mdc(7,30) = 1 \in Z$
- $\neg 7 = 210/7 = 30 \in Z$, $\neg 30 = \frac{210}{30} = 7 \in Z$

(c) $\mathcal{P}(\{a,b\})$



$f(\emptyset) = 1$

$f(\neg\emptyset) = f(\{a,b\}) = 210 = \neg 1 = \neg f(\emptyset)$

$f(\neg\{a\}) = f(\{b\}) = 14 = \frac{210}{15} = \neg 15 = \neg f(\{a\})$

$f(\neg\{b\}) = f(\{a\}) = 15 = \frac{210}{14} = \neg 14 = \neg f(\{b\})$

$f(\{a\}\cup\{b\}) = f(\{a,b\}) = 210 = mmc(15,14) = mmc(f(\{a\}), f(\{b\}))$

f é hom. de álgebras de Boole.

É injetor pois $\forall x \neq y \in \mathcal{P}(\{a,b\})$, $f(x) \neq f(y)$.

Não é isomorfismo pois não pode ser sobrejetor, uma vez que $\mathcal{P}(\{a,b\})$ e D_{210} são ambos finitos e $|\mathcal{P}(\{a,b\})| = 4$ $|D_{210}| = 16$.

É hom. de reticulados pois hom. de álgebras de Boole implica hom. de reticulados.

[4] <u>Proposição</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, D_n é uma álgebra de Boole se, e somente se, n é produto de primos dois a dois distintos, ou seja, na fatoração de n em potências de primos dois a dois distintos, todos os primos têm expoente 1.

<u>Dem.</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ Seja $n = p_1 \cdots p_t$ com $p_i \neq p_j$ primos $\forall i, j \leq t$.

$\forall a \in D_n$, $a = p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$ com $k_1, \dots, k_t \in \{0, 1\}$ e, como já vimos, $n/a = p_1^{1-k_1} \cdots p_t^{1-k_t} = \neg a$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Seja $n = p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$, com $k_1 > 1$ e consideremos $p_1 \in D_n$. $\forall x \in D_n$, $\operatorname{mdc}(p_1, x) = 1 \Rightarrow p_1 \nmid x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = p_2^{h_2} \cdots p_t^{h_t} \Rightarrow \operatorname{mmc}(p_1, x) = p_1 x = p_1 \cdot p_2^{h_2} \cdots p_t^{h_t} \neq n$

pois $p_1^2 \mid n$ e $p_1^2 \nmid p_1 x$. Logo, p_1 não é complementado e, portanto, D_n não é uma álgebra de Boole.