Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A07 - Álgebra Linear A
Exercícios - Parte.C
Sistemas de Equações Lineares

Professora: Isamara

Data: 30/03/2021

Considere os Sistemas de Equações Lineares abaixo. Determinando o posto e a nulidade das matrizes destes Sistemas (matriz dos coeficientes e matriz aumentada), **estude o conjunto solução para os diferentes valores de $m \in \mathbb{R}$.**

(a) $$S : \begin{cases} mx + 2y + mz &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 2x + my + 2z &= 0 \end{cases}$$

(b) $$S : \begin{cases} 2x - 5y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + mz &= 0 \end{cases}$$

Considere o seguinte Sistema de Equações Lineares

$$S : \begin{cases} x + 2y + z & = 1 \\ y + 2z & = -4 \\ x + y + z & = 2 \end{cases}$$

Verifique se o Sistema acima é um SISTEMA DE CRAMER. Em caso afirmativo, determine o conjunto solução deste sistema utilizando a **inversa da matriz dos coeficientes.**

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Justifique suas respostas)

( ) O Sistema $S : A_n X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ possui solução única se, e somente se, o posto de A for igual a n.

( ) O Sistema $S : A_n X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ possui apenas a Solução Trivial $(X_{n\times 1} = 0_{n\times 1})$ se S for também um Sistema de Cramer.

( ) Um Sistema de Equações Lineares Homogêneo será sempre Compatível.

( ) Se um Sistema de Equações Lineares Homogêneo possui solução diferente da TRIVIAL então o Sistema é Impossível.

Seja o seguinte Sistema de Equações Lineares: $S : \begin{cases} mx + 2y + mz & = 0 \\ mx + y + z & = 0 \\ 2x + my + 2z & = 0 \end{cases}$

(a) Estude o conjunto solução do sistema S utilizando POSTO e NULIDADE das matrizes relacionadas para os diferentes valores de $m \in \mathbb{R}$.

(b) Para $m = 1$, determine o conjunto solução deste sistema utilizando, se possível, a INVERSA da matriz dos coeficientes.

Seja o seguinte Sistema de Equações Lineares para $k \in \mathbb{R}$:

$$S : \begin{cases} -kx_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & & -kx_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & -kx_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & & = 0 \end{cases}$$

(**Observação**: Para responder aos itens abaixo, efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes, indicando-as a cada passo; e, justifique as suas respostas.)

(*a*) Determine POSTO e NULIDADE da matriz dos coeficientes e da matriz aumentada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.

(*b*) Para $k = 2$, determine, se possível, a INVERSA da matriz dos coeficientes; e, o conjunto solução do sistema S utilizando esta matriz.

(*c*) Para $k = 2$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o Método de ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

(*d*) Para $k = 2$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o Método de ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN.

Seja o seguinte Sistema de Equações Lineares para $k \in \mathbb{R}$: $S : \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 2y + kz & = 4 \\ x + 3y + kz & = 3 \end{cases}$

(**Observação**: Para responder aos itens abaixo, efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes, indicando-as a cada passo; e, justifique as suas respostas.)

(a) Determine POSTO e NULIDADE da matriz dos coeficientes e da matriz aumentada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.

(b) Para $k = 4$, determine o conjunto solução deste sistema S utilizando, se possível, a INVERSA da matriz dos coeficientes.

(c) Para $k = 4$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o Método de ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

(d) Para $k = 4$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o Método de ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN.

Sistemas Lineares

Questão.7

Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada $10m^2$ $140g$ de nitrato, $190g$ de fosfato e $205g$ de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

(i) Cada quilograma do adubo I custa $R\$5,00$ e contém $10g$ de nitrato, $10g$ de fosfato e $100g$ de potássio.

(ii) Cada quilograma do adubo II custa $R\$6,00$ e contém $10g$ de nitrato, $100g$ de fosfato e $30g$ de potássio.

(iii) Cada quilograma do adubo III custa $R\$5,00$ e contém $50g$ de nitrato, $20g$ de fosfato e $20g$ de potássio.

(iv) Cada quilograma do adubo IV custa $R\$15,00$ e contém $20g$ de nitrato, $40g$ de fosfato e $35g$ de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar $R\$54,00$ a cada $10m^2$ com a adubação?
Determine o conjunto solução do sistema relacionado ao problema utilizando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan.

Um comerciante vende três tipos distintos de caixas com chocolates. A caixa tipo-I contém 2 unidades do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e 4 unidades do chocolate amargo. A caixa tipo-II contém 1 unidade do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e não contém chocolate amargo. A caixa tipo-III contém 1 unidade do chocolate branco, 3 unidades do chocolate ao leite e a unidade do chocolate amargo; $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo. Quantas caixas de cada tipo o comerciante consegue preparar utilizando todos os chocolates?

(a) Determine o conjunto solução do sistema correspondente ao problema do comerciante utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

(b) Verifique, se possível, para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o sistema correspondente ao problema do comerciante é um Sistema de Cramer.

Um comerciante de café vende três misturas de grãos.

(i) Um pacote com a mistura da casa contém $300g$ de café colombiano e $200g$ de café tostado tipo francês.

(ii) Um pacote com a mistura especial contém $200g$ de café colombiano, $200g$ de café queniano e $100g$ de café tostado tipo francês.

(iii) Um pacote com a mistura gourmet contém $100g$ de café colombiano, $200g$ de café queniano e $200g$ de café tostado tipo francês.

O comerciante tem $30kg$ de café colombiano, $15kg$ de café queniano e $25kg$ de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura ele deve preparar? Determine o conjunto solução do sistema relacionado ao problema utilizando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan.

$$(a)\ C = \begin{bmatrix} \mathrm{m} & 2 & \mathrm{m} & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & \mathrm{m} & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo apenas a solução trivial.
- Para $m = -2$ ou $m = 2$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 2$ e $\mathcal{N}(A) = 1$ e assim o sistema será possível e indeterminado com uma variável livre.
- Não existem valores de $m \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja impossível.

$$(b)\ C = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 0 & m & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $m \in \mathbb{R} - \{\frac{12}{7}\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo apenas a solução trivial.
- Para $m = \frac{12}{7}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 2$ e $\mathcal{N}(A) = 1$ e assim o sistema será possível e indeterminado com uma variável livre.
- Não existem valores de $m \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja impossível.

Considerando a matriz aumentada $[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ e, após efetuar uma sequência de operações elementares obtemos: $[I_3 \mid A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$

para determinarmos o conjunto solução, efetuamos o produto :

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(V) (i) Se $S : A_n X_{n\times1} = B_{n\times1}$ possui solução única então A é invertível, i.é, a M.L.R.F.E. de A não possui linhas(colunas) nulas $\Rightarrow \mathcal{P}(A) = n$; e
(ii) Se o posto $\mathcal{P}(A)$ for igual a $n \Rightarrow A$ é invertível $\Rightarrow X_{n\times1} = A^{-1}B_{n\times1} \Rightarrow S$ é um sistema de Cramer e assim, possui solução única.

(V) HIPÓTESE: O sistema homogêneo S é um Sistema de Cramer.
TESE: S possui apenas a Solução Trivial : $X_{n\times1} = 0_{n\times1}$.
Obtendo o conjunto solução:
Por hipótese, S é um Sistema de Cramer, então podemos obter o conjunto solução do seguinte modo: $X_{n\times1} = A^{-1}.B$; onde $B = 0_{n\times1}$ por ser um sistema homogêneo.
Assim, $X_{n\times1} = A^{-1}.B = A^{-1}.0_{n\times1} = 0_{n\times1}$; logo, a única solução possível para S será $X_{n\times1} = 0_{n\times1}$, ou seja, será apenas a trivial.

(V) HIPÓTESE: S é um Sistema Homogêneo.
TESE: S será sempre Compatível.
Obtendo o conjunto solução:
$C = [A_{m\times n}|0_{m\times 1}]$ efetuando operações elementares para obter a M.L.R.F.E. linha equivalente: $C \sim \cdots \sim C' = [A'_{m\times n}|0_{n\times 1}]$. Vamos analisar posto das matrizes e a nulidade:
$\mathcal{P}(A)$ será sempre igual ao posto de $\mathcal{P}(C)$ pois o número de linhas nulas em A' será sempre igual em C' visto que B' é sempre nulo.
Então, podemos ter $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = n \Rightarrow \mathcal{N}(A) = 0 \Rightarrow$ solução única; ou, podemos ter $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) < n \Rightarrow \mathcal{N}(A) > 0 \Rightarrow$ o sistema será possível e indeterminado com $\mathcal{N}(A)$ variáveis livres.

(F) HIPÓTESE: S Sistema de Equações Lineares Homogêneo tal que o conjunto solução é diferente da TRIVIAL: $X_{n\times 1} \neq 0_{n\times 1}$
TESE: S é um Sistema Impossível; $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(C)$.
Obtendo o conjunto solução de S utilizandoa matriz aumentada:
$C = [A_{m\times n}|0_{m\times 1}]$ efetuando operações elementares para obter a M.L.R.F.E. linha equivalente: $C \sim \cdots \sim C' = [A^{'}_{m\times n}|0_{n\times 1}]$. Vamos analisar posto das matrizes e a nulidade: $\mathcal{P}(A)$ será sempre igual ao posto de $\mathcal{P}(C)$ pois o número de linhas nulas em $A^{'}$ será sempre igual em $C^{'}$ visto que $B^{'}$ é sempre nulo. Então, podemos ter
$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = n \Rightarrow \mathcal{N}(A) = 0 \Rightarrow X_{n\times 1} = 0_{n\times 1} \Rightarrow$ solução única $=$ Solução trivial; ou, podemos ter $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) < n \Rightarrow \mathcal{N}(A) > 0 \Rightarrow$ o sistema será possível e indeterminado, incluindo a solução trivial $X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$, com $\mathcal{N}(A)$ variáveis livres.

(a) $C = \begin{bmatrix} m & 2 & m & | & 0 \\ m & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & m & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$

- Para $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo apenas a solução trivial.
- Para $m = 1$ ou $m = -2$ ou $m = 2$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 2$ e $\mathcal{N}(A) = 1$ e assim o sistema será possível e indeterminado com uma variável livre.
- Não existem valores de $m \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja impossível.

(b) Para $m = 1 \Rightarrow C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$;
$x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ o sistema possui infinitas soluções e não é um sistema de Cramer.
Ou seja, a matriz dos coeficientes não é linha equivalente à matriz identidade de mesma ordem. Portanto, matriz dos coeficientes não é invertível.

(a)

- Para $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 4$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo apenas a solução trivial.
- Para $k = -1$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 1$ e assim o sistema será possível e indeterminado com uma variável livre.
- Não existem valores de $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja impossível.

(b) Para $k = 2$:

$$[A \mid I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] = [I_4 \mid A^{-1}] \Rightarrow$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{Solução trivial}}\,.$$

(c) Para $k = 2 \Rightarrow$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} -2x_1' & +x_2' & & -x_4' & = 0 \\ & -\frac{3}{2}x_2' & +x_3' & -\frac{1}{2}x_4' & = 0 \\ & & -2x_3' & -x_4' & = 0 \\ & & & -\frac{3}{2}x_4' & = 0 \end{cases}$$

Após efetuar SUBSTITUIÇÕES RETROATIVAS, obtemos o conjunto solução $X = X' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) Para $k = 2 \Rightarrow$

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$S' : \begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \\ x_3' = 0 \\ x_4' = 0 \end{cases} \Rightarrow X = X' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k \in \mathbb{R}\text{: } S : \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 2y + kz & = 4 \\ x + 3y + kz & = 3 \end{cases}$$

(a)
- Para $k \in \mathbb{R} - \{-\frac{4}{3}\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo apenas a solução trivial.
- Para $k = -\frac{4}{3}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = 2 \neq \mathcal{P}(C) = 3 \Rightarrow$ sistema é impossível.

  $$C \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$
- Não existem valores de $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja possível e indeterminado.

$$k \in \mathbb{R}\colon\ S: \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 2y + kz & = 4 \\ x + 3y + kz & = 3 \end{cases}$$

(b) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{11}{16} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{array}\right].$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{11}{16} & -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$k \in \mathbb{R}\text{:}\;\; S : \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 2y + kz & = 4 \\ x + 3y + kz & = 3 \end{cases}$$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 3 & 4 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 6 & | & 2 \\ 0 & 0 & 8 & | & 3 \end{bmatrix}.$

Sistema equivalente: $S^{'} : \begin{cases} x^{'} & +2y^{'} & -z^{'} & = 1 \\ & -2y^{'} & +6z^{'} & = 2 \\ & & 8z^{'} & = 3 \end{cases}$

Após efetuar as substituições retroativas: $X^{'} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow X = X^{'}$

$$k \in \mathbb{R}: \; S: \begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 2x + 2y + kz & = 4 \\ x + 3y + kz & = 3 \end{cases}$$

(d) $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array}\right].$

Sistema equivalente: $S^{'}: \begin{cases} x^{'} & & & = \frac{9}{8} \\ & y^{'} & & = \frac{1}{8} \\ & & z^{'} & = \frac{3}{8} \end{cases}$

Neste caso, não precisamos efetuar substituições: $X^{'} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow X = X^{'}$

$$S : \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 15x_4 & = 54 \\ 10x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 20x_4 & = 140 \\ 10x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 40x_4 & = 190 \\ 100x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 35x_4 & = 205 \end{cases}$$

O conjunto solução: $X = \begin{bmatrix} \frac{6451}{9619} \\ \frac{4381}{9619} \\ \frac{14396}{9619} \\ \frac{25927}{9619} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,671 \\ 0,455 \\ 1,497 \\ 2,695 \end{bmatrix} kg = \begin{bmatrix} 671 \\ 455 \\ 1497 \\ 2695 \end{bmatrix} g$

$$S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 50 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 100 \\ 4x_1 \quad + ax_3 & = 60 \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema: $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 2 & 3 & 100 \\ 4 & 0 & a & 60 \end{array}\right]$

Observe que :

- Para $a \in \mathbb{R} - \{-2\}$ teremos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 0$ e assim o sistema será possível e determinado admitindo uma única solução.
- Para $a = -2$ teremos que $\mathcal{P}(A) = 2 \neq \mathcal{P}(C) = 3$; logo, o sistema será impossível, ou seja, não admite solução.
- Não existem valores de $a \in \mathbb{R}$ para que o sistema seja possível e indeterminado

(a) $C \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & a+2 & 60 \end{array}\right]$

$$S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 50 \\ x_2 + 3x_3 & = 50 \\ (a+2)x_3 & = 60 \end{cases}$$

Efetuando substituições retroativas:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{30}{a+2} \\ \frac{50a-20}{a+2} \\ \frac{60}{a+2} \end{bmatrix} ; a \neq -2$$

(b) Para $a \neq -2$ a matriz A do sistema será linha equivalente à matriz identidade I_3, consequentemente, A será invertível e assim, S será um Sistema de Cramer.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 300 \\ 0 & 2 & 2 & | & 150 \\ 2 & 1 & 2 & | & 250 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 65 \\ 0 & 1 & 0 & | & 30 \\ 0 & 0 & 1 & | & 45 \end{bmatrix} = C^{'}$$

e o conjunto solução $X = X^{'} = \begin{bmatrix} 65 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix}$