Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II

Prof. Ciro Russo

Primeira unidade, segunda chamada – 17 de fevereiro de 2017

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Demonstre, usando o princípio de indução, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, 6 divide $7^n - 1$.

2. Verifique que o seguinte sistema de equações congruenciais é solucionável e encontre o conjunto das soluções.

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{9} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

3. Verifique que a seguinte equação diofantina é solucionável e encontre o conjunto das soluções.

$$8x + 26y = 20.$$

4. Encontre a representação nas bases 10 e 13 do número 1243_6.

5. Verifique se, para a seguinte relação binária R em $\mathbb{Z}$, valem as propriedades reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva. Consequentemente, determine se a relação é uma equivalência, uma ordem, ou nenhuma das duas.

$$a \; R \; b \quad \text{se e somente se} \quad 0 \leq a - b \leq 2.$$

1. É preciso provar a seguinte:

$$\forall n \exists a (n^3 - n + 12 = 3 \cdot a).$$

Base de indução: $n = 0$.

$$0^3 - 0 + 12 = 12 = 3 \cdot 4 \quad \text{verificada.}$$

Hipótese de indução: $n = k$.

$$\exists a (k^3 - k + 12 = 3 \cdot a).$$

Tese: $n = k + 1$.

$$\exists b ((k+1)^3 - (k+1) + 12 = 3 \cdot b).$$

Vamos calcular $(k+1)^3 - (k+1) + 12$:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^3 - (k+1) + 12 = \\
&= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 12 = \\
&= 3k^2 + 3k + (k^3 - k + 12) \overset{HP}{=} \\
&\overset{HP}{=} 3k^2 + 3k + 3a = \\
&= 3 \cdot (k^2 + k + a).
\end{aligned}$$

Então a tese vale com $b = k^2 + k + a$.

2. Como $9 = 3^2$, e 7 e 11 são primos, os três módulos no sistema são dois a dois primos entre si. Então, pelo Teorema Chinês do Resto, o sistema tem soluções.

Temos $m = 9 \cdot 7 \cdot 11 = 693$, $m_1' = 7 \cdot 11 = 77$, $m_2' = 9 \cdot 11 = 99$, $m_3' = 9 \cdot 7 = 63$. Daí, as três equações auxiliárias:

$$77x \equiv 1 \pmod 9, \quad 99x \equiv 1 \pmod 7, \quad 63x \equiv 1 \pmod{11},$$

que podem são equivalentes, respectivamente, a

$$5x \equiv 1 \pmod 9, \quad x \equiv 1 \pmod 7, \quad 8x \equiv 1 \pmod{11}.$$

A segunda equação dá resultado óbvio: $c_2 = 1$. Quanto às outras, aplicando o algoritmo das divisões sucessivas, obtemos: $c_1 = 2$ e $c_3 = -4$. Daí, uma solução do sistema é: $6 \cdot 77 \cdot 2 + 9 \cdot 99 \cdot 1 + 2 \cdot 63 \cdot (-4) = 1311$ e o conjunto das soluções é

$$S = \{1311 + 693n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

3. $\begin{array}{l} 52 = 16 \cdot 3 + 4 \\ 16 = 4 \cdot 4 + 0 \end{array}$, então $\text{mdc}(16, 52) = \{\pm 4\}$ e, como 4 divide 20, a equação tem soluções. Seja $h = 20/4 = 5$. Vale: $4 = 52 - 3 \cdot 16$. Logo, uma solução do sistema é o par $(-15, 5)$ e o conjunto das soluções é

$$S = \{(-15 + 13k, 5 - 4k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.

$$1256_7 = 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 6 = 343 + 98 + 35 + 6 = 482.$$

$$\begin{array}{l} 482 = 15 \cdot 32 + 2 \\ 32 = 15 \cdot 2 + 2 \\ 2 = 15 \cdot 0 + 2. \end{array}$$

Segue $1256_7 = 482 = 222_{15}$.

5. R é reflexiva pois, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $|a - a| = 0$. Ela é simétrica também, pois, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a - b| = |b - a|$.

R não é antissimétrica, pois, por exemplo, $2R3$ e $3R2$, mas $2 \neq 3$.

R não é transitiva, pois, por exemplo, $0R3$ e $3R5$, mas $|0 - 5| = 5 > 3$, o que implica que o par $(0, 5)$ não está na relação R.