UFBa - IME - DMAT —- Álgebra Linear I (MATA07) - Profa: Isamara

1^a LISTA DE EXERCÍCIOS — Matrizes e sistemas de Equações Lineares

---

---

1. Seja o conjunto $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$. Vamos definir uma matriz real $A : I \times I \to \mathbb{R}$ da seguinte forma: $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ que é denominada Matriz de Hilbert de ordem $n \times n$. Escreva a Matriz de Hilbert para $n = 4$.

---

2. Seja o conjunto $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$. Vamos definir uma matriz real $A : I \times I \to \mathbb{R}$ da seguinte forma: $a_{ij} = \dfrac{(i+j-2)!}{(i-1)!.(j-1)!}$ que é denominada Matriz de Pascal de ordem $n \times n$. Escreva a Matriz de Pascal para $n = 5$.

---

3. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em Simétricas, anti-Simétricas:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$

   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix}$

   (e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

   (f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Seja A uma matriz de ordem n. Mostre que, a matriz $B = A + A^t$ é simétrica e a matriz $C = A - A^t$ é anti-simétrica.

---

5. Dizemos que uma matriz A de ordem n é uma matriz NORMAL se, e somente se, $\overline{A}^t.A = A.\overline{A}^t$, isto é, as matrizes A e $\overline{A}^t$ são comutativas.

   Mostre que: se A é uma matriz real e simétrica (ou anti-simétrica) então A é uma matriz normal.

---

6. Dizemos que uma matriz A de ordem n é uma matriz HERMITIANA se, e somente se, $A = \overline{A}^t$; e dizemos que A é uma matriz ANTI-HERMITIANA se, e somente se, $A = -\overline{A}^t$.

   Mostre que: se A é uma matriz complexa Hermitiana (ou Anti-Hermitiana) então A é uma Matriz Normal.

---

7. Seja A uma matriz complexa de ordem n. Mostre que: as matrizes $C = A+\overline{A}^t$ e $D = A.\overline{A}^t$, são matrizes hermitianas.

---

8. Classifique, se possível, as matrizes abaixo Hermitianas, anti-Hermitianas, Normal:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$

   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

(f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

---

9. Seja A uma matriz complexa de ordem n. Mostre que: $tr(\overline{A}^t) = \overline{tr(A)}$.

---

10. Seja A uma matriz complexa de ordem n e invertível, e seja $\overline{A}$ a sua matriz conjugada. Mostre que: $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

---

11. Uma matriz A complexa de ordem n é dita ser ORTOGONAL se, e somente se, A é invertível e $A^{-1} = A^t$.

    Mostre que: O produto de duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

---

12. Determine, se possível, os valores de $x; y \in \mathbb{R}$ para que a matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

---

13. Seja A uma matriz de ordem n. Define-se potenciação para expoentes naturais da seguinte forma: $A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = A.A$ e $A^{k+1} = A.A^k$.

    Dizemos que A é uma matriz IDEMPOTENTE se, e somente se, $A^2 = A$.

    Mostre que: se A é uma matriz IDEMPOTENTE então $B = I_n - A$ é uma matriz IDEMPOTENTE; e, além disso, temos que $AB = BA = 0_n$.

---

14. Verifique se as matrizes abaixo são IDEMPOTENTES:

(a) $A = \frac{1}{2}. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

---

15. Seja A uma matriz de ordem n. Dizemos que A é uma matriz AUTOREFLEXIVA se, e somente se, $A^2 = I_n$.

    Verifique se as matrizes abaixo são AUTOREFLEXIVAS:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

    (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

    (c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

---

16. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Justifique suas respostas)

    ( ) Toda matriz complexa SIMÉTRICA é uma matriz NORMAL.

    ( ) Se A é uma matriz real simétrica então A é também uma matriz normal.

    ( ) O conjugado da soma de duas matrizes simétricas é uma matriz normal.

    ( ) O produto de matrizes SIMÉTRICAS é uma matriz SIMÉTRICA.

    ( ) A soma de matrizes reais HERMITIANAS é uma matriz SIMÉTRICA.

    ( ) Sejam A e B matrizes reais anti-simétricas então a matriz $C = A + \alpha B; \alpha \in \mathbb{R}$ é também uma matriz anti-simétrica.

    ( ) O produto de matrizes reais ORTOGONAIS é uma matriz ORTOGONAL.

    ( ) Sejam A e B matrizes complexas ortogonais então a matriz $C = A.B$ é também uma matriz ortogonal.

    ( ) A transposta do produto de matrizes ortogonais é o produto das suas inversas.

    ( ) O produto de matrizes complexas ORTOGONAIS é uma matriz ORTOGONAL.

    ( ) A soma de matrizes complexas IDEMPOTENTES é uma matriz idempotente.

( ) O produto de matrizes IDEMPOTENTES é uma matriz idempotente.

( ) A transposta do produto de duas matrizes anti-hermitianas é igual ao conjugado do produto destas matrizes.

( ) A soma de duas matrizes hermitianas é uma matriz normal.

( ) Se A é uma matriz complexa de ordem n então as matrizes $C = A+\overline{(A)}^t$ e $D = A.\overline{(A)}^t$ são hermitianas.

( ) O traço de uma matriz complexa A é igual ao traço da sua transconjugada, $\overline{A}^t$.

( ) O traço de uma matriz ortogonal é igual ao traço da sua inversa.

( ) O traço de uma matriz quadrada é igual ao traço da sua transposta.

( ) O traço de uma matriz real simétrica é igual ao traço da sua transposta conjugada.

( ) O conjugado do traço de uma matriz hermitiana é igual ao traço da matriz.

( ) Sejam A e B matrizes complexas de ordem n então $tr(A^t+\alpha(B^{-1}AB)) = 2\alpha tr(A); \alpha \in \mathbb{C}$.
