INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
Teoria dos Grafos
Professor: Roberto Freitas Parente

GABARITO – EXERCÍCIOS 02

Última atualização: 16 de novembro de 2022

Exercício 1. ***Suponha a seguinte situação na Terra média:***
Os hobbits estão organizando um grande casamento coletivo, mas que devido a crise financeira gerada pelo governo só poderá acontecer se for 150 casais simultaneamente. Como os hobbit estão tendo muita dificuldade pediram a ajuda ao Mago Gandalf. Gandalf sabendo que Hobbit são seres conservadores e que só aceitam casamento monogâmicos e heteronormativos pede para seus assistentes Frodo, Sam, Merry e Pippin conseguirem informações das 150 damas e 150 cavalheiros para poder organizar os casamentos. Porém, ao analisar as informações, Gandalf observou que 62 damas não querem casar com nenhum dos 92 cavalheiros de um certo grupo. Por conta dessa situação, Gandalf disse que não conseguirá organizar os 150 casamentos.

Respondas as seguintes perguntas:

- *Por que Gandalf já sabe que não conseguirá montar os casamentos?*
- *Pensando em grafos, como podemos modelar a situação relatada?*
- *Baseado na ideia acima, qual seria uma condição necessária para organizarmos N casamentos?*

Resposta. Feita em sala! $\square$

Exercício 2. *Prove ou disprove: Toda árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.*

Resposta. Existem várias provas. Iremos apresentar uma prova por contradição.

Suponha que existem M e M' emparelhamentos máximo numa árvore. Como visto em sala temos que diferença simétrica entre dois emparelhamentos máximo $M \triangle M'$ temos que cada vértice tem grau 0 ou 2, ou seja, é um ciclo ou vértices isolados. Como árvore não contém ciclo, então temos apenas vértices isolados o que contradiz o fato de M e M' serem diferentes. $\square$

Exercício 3. *Prove o Teorema de Hall por indução em $|X|$: "Seja $G = (X \cup Y, E)$ um grafo bipartido. G tem um emparelhamento que cobre X se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$". A prova deve seguir as etapas vista em sala:*

1. *Prove a base para $|X| = 1$*
2. ***Caso 1:*** *$|N(S)| \geq |S| + 1$ todo conjunto não vazio $S \subsetneq X$*
3. ***Caso 2:*** *$|N(S)| = |S|$*
4. *Explique porque a prova pode ser separada em dois casos.*

Resposta. Feito em sala! Ver livro Graph Theory do Diestel Theorem 2.1.2. "second proof" $\square$

Exercício 4. *Utilize o Teorema de Hall para provar o seguinte resultado: Seja $G = (X; Y, E)$ um grafo bipartido. Se $|N(S)| \geq |S| - k$ para todo $S \subset X$ e k inteiro positivio, então G tem um emparelhamento com cardinalidade $|X| - k$.*

Resposta. Vamos criar um grafo G' tal que adicionamos k vértice em Y da seguinte forma: Seja U conjunto com k novos vértices e faça $Y' = Y \cup U$ e para todo vértice em U adicionamos todas as arestas possíveis entre U e X, ou seja, teremos $V(G') = X \cup Y'$ e $E(G') = E(G) \cup \{xu \colon x \in X, u \in U\}$. Observe que G satisfaz a condição do Teorema de Hall, ou seja, $\forall S \subset X'$ temos $|N(S)| \geq |S|$. Assim, pelo Teorema de Hall, temos que existe um emparelhamento M que cobre X de forma que $M \subset M$ é um emparelhamento em G que cobre X com cardinalidade $|X| - k$.

$\square$

Exercício 5. *Prove o seguinte*

1. *Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem um emparelhamento perfeito.*

2. *Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 2$ tem k emparelhamentos perfeito dois a dois disjunstos.*

Resposta. Seja $G(V, E)$ um grafo com bipartição X, Y dos vértices. Para provar (2) vamos primeiro provar o (1) que usamos como base na indução. Primeira observação que precisamos provar é: G é k-regular para $k \geq 1$, então $|X| = |Y|$. Prova: como é k-regular, temos a dupla contagem que cada vértice de X enviará k arestas para y e assim temos $\sum_{v \in X} d(v) = k|X|$. O mesmo vale para Y e como G é bipartido temos $k|X| = k|Y| \Longrightarrow |X| = |Y|$.

A segunda observação é que se G é k-regular para $k \geq 1$ temos que para todo $S \subset X$ temos que $|N_G(X)| \geq |S|$. Observe que todo vértice de S enviará k arestas para $N(S)$ e nem todo vértice em $N(S)$ enviará arestas para S. Ademais, temos que todo grafo G bipartido k regular com $k \geq 1$ satisfaz a condição de Hall e como $|X| = |Y|$, então haverá um emparelhamento perfeito. Assim, o item (1) sai direto das duas observações.

Para provar o item (2) usaremos indução em k. Para caso base temos que $k = 1$ seguem das observações acima. Para $k \geq 2$ temos pelas observações que existe um emparelhamento perfeito $M_k \subset E(G)$. Fazendo $G' = G \setminus M_k$ temos que G' será $k-1$-regular e como $k - 1 \geq 1$ temos pela hipótese de indução que existirão $M_1, \ldots, M_{k-1}$ emparelhamentos dois a dois dijunstos. Como G' não contém nenhuma aresta de M_k, então temos que $M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k$ são k emparelhamentos dois a dois disjuntos. $\square$

Exercício 6 (Entrega: 11 de novembro)**.** *Prove o seguinte teorema visto em sala: Se G é um grafo $2k$-regular conexo, $k \geq 1$, então o conjunto de aresta de G pode ser particionado em k 2-fatores arestas-disjuntos.*

- *Dicas:*
  - *Utilize o teorema de euler para gerar uma ordenação dos vértices*
  - *Duplique cada vértice de forma que vc gere um grafo bipartido*
  - *Utilize o Exercício*(5)
  - *Retorne ao grafo original.*

Resposta. Feito em sala. Ver Livro Graph Theory do Diestel "Corollary 2.1.5.". $\square$

Exercício 7.

1. *Use o Teorema de König–Egerváry para provar que todo grafo bipartido G tem um emparalhamento de tamanho pelo menos $e(G)/\Delta(G)$.*

   Dica: *Observe a relação de quantas arestas podem ser cobertas por um dado vértice.*

2. *Use o resultado acima para concluir que todo sugrafo de $K_{n,n}$ com mais que $n(k-1)$ arestas tem um emparelhamento de tamanho pelo menos k.* **(CANCELADA)**

Resposta. Sejam $\beta(G) :=$ cobertura por vértices mínima e $\alpha'(G) :=$ emparelhamento máximo. Para (1) observe que cada vértice de G cobre no máximo $\Delta(G)$ arestas. Desta forma para cobrir todas arestas temos que $\beta(G) \geq e(G)/\Delta(G)$. Como G é bipartido, temos que $\beta(G) = \alpha'(G)$, então temos $\alpha'(G) \geq e(G)/\Delta(G)$.

Pra (2) existe um erro de digitação no enunciado, então a questão está **CANCELADA**. Para título de informação provaremos o correto. Para todo subgrafo sugrafo G de $K_{n,n}$ com $e(G) > n(k-1)$, observe que $\Delta(G) \leq n$ pelo fato que cada parte tem no máximo n. Ademais, usando resultado anterior temos $\alpha'(G) \geq e(G)/\Delta(G) > (k-1)n/n = k - 1$. Assim G tem um emparelhamento com tamanho pelo menos k.

$\square$

Exercício 8. *Seja G um grafo conexo com pelo menos quatro vértices. Construa G' a partir de G pela adição uma aresta entre $u, v \in V(G)$ sempre que $d_G(u, v) = 2$. Prove que G' é 2-conexo.*

Resposta. Primeiramente observe que G é conexo, então G' também é conexo e se G é 2-conexo, então G' também será 2-conexo. Ademais, precisamos mostrar o caso quando G é 1-conexo, mas não é 2-conexo, ou seja, existem vértices de corte em G. Pela definição de corte, temos que se v é um vértice de corte, então $G \setminus v$ tem pelo menos 2 componente conexas, mas pela construção de G' temos que todos os vértice da vizinhança de v em G terão arestas adicionadas entre eles, então $G' \setminus v$ não será desconexo. Assim, temos que G' é 2-conexo. □

Exercício 9. *Prove o seguinte: Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$. Ademais, se G é K_3-livre, então $m \leq 2n - 4$.*

Resposta. Theorem. 6.1.23 no livro do Douglas West. □

Exercício 10. *Prove que todo grafo planar simples G tem $\delta(G) \leq 5$.*

Resposta. Pelo Exercício(9) se G é planar e simples temos $e(G) \leq 3n - 6$. Também sabemos que

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq n\delta(G).$$

Assim temos que $\delta(G) \leq (6n - 12)/n = 6 - 12/n$. Como $\delta(G)$ é um inteiro, então temos que $\delta(G) \leq 5$. □

Exercício 11. *Utilizando coloração própria das arestas e vértices, explique como podemos modelar e resolver os dois problemas a seguir.*

1. *Um programa de computador armazena os valores de suas variáveis na memória. Para a aritmética, esses valores devem estar facilmente acessíveis em um local especial chamado registradores. Como registradores são caros e devemos utilizá-los eficientemente é um desafio na construção de compilares definir quais variáveis devem ou não estar no registradores. Se duas variáveis não são nunca usadadas simultaneamentes, então podemos alocá-las no mesmo registrador em tempos distintos. Utilizando grafos de intervalo e colorações, explique como podemos contabilizar a quantidade de registradores necesssários.*

   Resposta. Usando um grafos de intervalo[1]G, onde cada variável é definida como o intervalo do seu uso. Desta forma, temos que $\chi(G)$ é a quantidade mínima de registradores necessários. Na Figura 1 temos um exemplo de um grafo de intervalos 4-colorível, mas facilmente podemos observar que pode ser colorido com 3 cores, ou seja, $\chi = 3$.

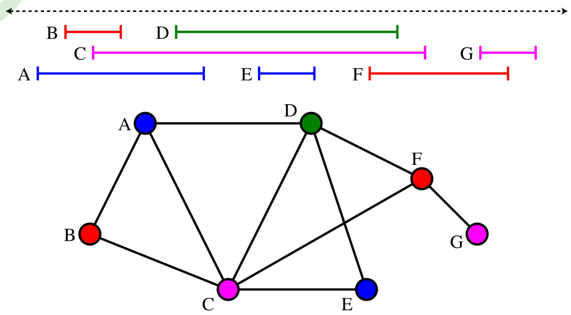

Figura 1: Fonte: wikipédia

□

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_graph

2. *Suponha que desejamos montar um campeonato onde todos os times jogam com todos os times com as seguintes restrições: Cada semana é uma rodada, cada time deve jogar apenas uma vez por rodadas, o tima A só deve jogar com o time B uma vez e os jogos devem ser distintos em cada rodada. Suponha que existem $2n$ times e responda como modelar utilizando coloração e como definir a quantidade de rodadas.*

   Resposta. Podemos definir G onde cada vértice é um time e dizemos que $xy \in E(G)$ se, e somente se, os times x e y devem jogar entre si. No exemplo acima como todos devem jogar contra todos exatamente uma vez, então temos $G = K_{2n}$. Assim, temos que as rodadas serão definidas através de uma coloração própria das arestas de G. Com isso temos que cada rodada é definida por uma classe de cor. Ademais, o valor $\chi'(G)$ define a quantidade mínima de rodadas necessárias para finalizar o campeonato. $\square$

Second proof. We apply induction on $|A|$. For $|A| = 1$ the assertion is true. Now let $|A| \geqslant 2$, and assume that the marriage condition is sufficient for the existence of a matching of A when $|A|$ is smaller.

If $|N(S)| \geqslant |S|+1$ for every non-empty set $S \subsetneq A$, we pick an edge $ab \in G$ and consider the graph $G' := G - \{a, b\}$. Then every non-empty set $S \subseteq A \setminus \{a\}$ satisfies

$$|N_{G'}(S)| \geqslant |N_G(S)| - 1 \geqslant |S|,$$

so by the induction hypothesis G' contains a matching of $A \setminus \{a\}$. Together with the edge ab, this yields a matching of A in G.

Suppose now that A has a non-empty proper subset A' with $|B'| = |A'|$ for $B' := N(A')$. By the induction hypothesis, $G' := G[A' \cup B']$ contains a matching of A'. But $G - G'$ satisfies the marriage condition too: for any set $S \subseteq A \setminus A'$ with $|N_{G-G'}(S)| < |S|$ we would have $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$, contrary to our assumption. Again by induction, $G - G'$ contains a matching of $A \setminus A'$. Putting the two matchings together, we obtain a matching of A in G. □

A', B

G

For our last proof, let H be a spanning subgraph of G that satisfies

Corollary 2.1.5. (Petersen 1891)
Every regular graph of positive even degree has a 2-factor.

Proof. Let G be any $2k$-regular graph ($k \geqslant 1$), without loss of generality connected. By Theorem 1.8.1, G contains an Euler tour $v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$, with $v_\ell = v_0$. We replace every vertex v by a pair (v^-, v^+), and every edge $e_i = v_i v_{i+1}$ by the edge $v_i^+ v_{i+1}^-$ (Fig. 2.1.4). The resulting bipartite graph G' is k-regular, so by Corollary 2.1.3 it has a 1-factor. Collapsing every vertex pair (v^-, v^+) back into a single vertex v, we turn this 1-factor of G' into a 2-factor of G. □ (1.8.1)

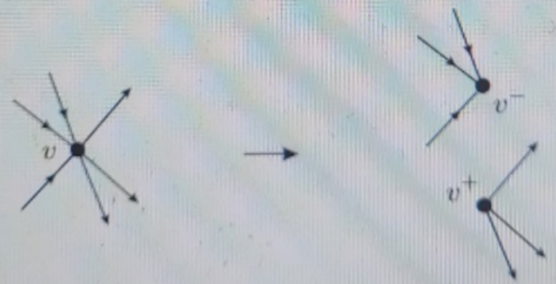

Fig. 2.1.4. Splitting vertices in the proof of Corollary 2.1.5

6.1.23. Theorem. If G is a simple planar graph with at least three vertices, then $e(G) \le 3n(G) - 6$. If also G is triangle-free, then $e(G) \le 2n(G) - 4$.

Proof: It suffices to consider connected graphs; otherwise we could add edges. Euler's Formula will relate $n(G)$ and $e(G)$ if we can dispose of f.

Proposition 6.1.13 provides an inequality between e and f. Every face boundary in a simple graph contains at least three edges (if $n(G) \ge 3$). Letting $\{f_i\}$ be the list of face lengths, this yields $2e = \sum f_i \ge 3f$. Substituting into $n - e + f = 2$ yields $e \le 3n - 6$.

When G is triangle-free, the faces have length at least 4. In this case $2e = \sum f_i \ge 4f$, and we obtain $e \le 2n - 4$. ■