UFBa - IME - DMAT —- Álgebra Linear I(MATA07) - Profa: Isamara

RESPOSTAS - 5^a LISTA EXERCÍCIO

---

1. (i) $\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3; \forall u = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \implies T(v+u) = -2(x_1+x_2) + 3(y_1 + y_2) + 7(z_1+z_2) = (-2x_1 + 3y_1 + 7z_1) + (-2x_2 + 3y_2 + 7z_2) = T(v) + T(u)$.
   (ii) $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies T(\lambda v) = -2(\lambda x) + 3(\lambda y) + 7(\lambda z) = \lambda(-2x + 3y + 7z) = \lambda T(v)$; por (i) e (ii) mostramos que T é uma transformação linear.

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$ um espaço vetorial real e seja T não é uma transformação linear; visto que $T(0) \neq 0$.

3. (a) T é uma transformação linear do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, T é denominada Dilatação ou Contração.
   Temos então; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$; sendo que:
      i. se $|\lambda| > 1, T$ dilata o vetor;
      ii. se $|\lambda| < 1, T$ contrai o vetor;
      iii. se $\lambda = 1, T$ não altera o vetor, i.é. T é o operador linear idêntico;
      iv. se $\lambda < 0, T$ troca o sentido do vetor.
      v. se $\lambda = 0, T$ seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo-x se definida: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$; ou sobre o eixo-$y$ se definida: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

   (b) T é uma transformação linear do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, T é denominada Espelhamento ou Reflexão em torno do eixo-x.
   $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(c) T é uma transformação linear do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, T é denominada ESPELHAMENTO OU REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO-y.
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(d) T é uma transformação linear do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, T é denominada ESPELHAMENTO OU REFLEXÃO EM TORNO DA ORIGEM.
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(e) T é uma transformação de TRANSLAÇÃO do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, porém não é linear , pois não transforma o vetor nulo nele mesmo: $T(0.0) = (a, b) \neq (0, 0)$
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(f) T é uma transformação linear do plano $\mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$, T é uma ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM DE UM ÂNGULO θ NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO.
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(g) T é uma transformação linear denominada CISALHAMENTO EM RELAÇÃO AO EIXO-x; θ é o ângulo de deslocamento do eixo-y.
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ytg\theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tg\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(h) T não é uma transformação linear, pois $T(u + v) \neq T(u) + T(v); \forall u, v \in \mathbb{R}^2$.

4. (i) $\forall v = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2; \forall u = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \implies T(v + u) = (x_1 + x_2)e^t + (y_1 + y_2)e^{2t} = (x_1)e^t + (y_1)e^{2t} + (x_2)e^t + (y_2)e^{2t} = T(v) + T(u)$.
(ii) $\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2; \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies T(\lambda v) = (\lambda x)e^t + (\lambda y)e^{2t} = \lambda(xe^t + ye^{2t}) = \lambda T(v)$;
por (i) e (ii) mostramos que T é uma transformação linear.

5. (i) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \implies T(A+B) = P^{-1}(A+B)P = (P^{-1}A + P^{-1}B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = T(A) + T(B)$.
(ii) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}); \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies T(\lambda A) = P^{-1}(\lambda A)P = \lambda(P^{-1}AP) = \lambda T(A)$;
por (i) e (ii) mostramos que T é uma transformação linear.

6. (i) $\forall p(t), q(t) \in P_3(\mathbb{R}) \implies T((p+q)(t)) = 2(p+q)^{'}(t) = 2(p^{'}(t) + q^{'}(t)) = 2p^{'}(t) + 2q^{'}(t) = T(p(t)) + T(q(t))$.
(ii) $\forall p(t) \in P_3(\mathbb{R}); \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies T(\lambda p(t)) = 2((\lambda p)^{'}(t)) = 2(\lambda(p^{'}(t))) = \lambda(2p^{'}(t)) = \lambda T(p(t))$; por (i) e (ii) mostramos que T é um operador linear.

7. Temos que a aplicação NULA $0 : U \longrightarrow V; 0(u) = 0 \in L(U,V)$. E ainda, (i) $\forall F, G \in L(U,V) \implies F+G \in L(U,V)$, e (ii) $\forall F \in L(U,V); \alpha \in K \implies (\alpha F) \in L(U,V)$. Logo, $L(U,V)$ é um espaço vetorial sobre K, visto que estão definidas as operações de soma e multiplicação por escalar.

8. $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}; F(x,y,z) = -2x + 3y + 7z$ e $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}; G(x,y,z) = x + y + z$.
$(F+G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z) = (-2x+3y+7z) + (x+y+z) = -x+4y+8z$,
$(2F)(x,y,z) = 2(F(x,y,z)) = 2(-2x+3y+7z) = -4x+6y+14z$,
$(FoI)(x,y,z) = F(I(x,y,z)) = F(x,y,z) = -2x+3y+7z$.

9. $F(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x & z \\ w & y \end{pmatrix}$, $G(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2z & x-y \\ w & w \end{pmatrix}$, e
$T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + at + (b+d)t^2 + ct^3$.
$(F+3G)(x,y,z,w) = F(x,y,z,w) + 3(G(x,y,z,w)) = \begin{pmatrix} x+6z & z+3x-3y \\ 4w & y+3w \end{pmatrix}$.
$(ToG)(x,y,z,w) = T(G(x,y,z,w)) = T(\begin{pmatrix} 2z & x-y \\ w & w \end{pmatrix}) = 2z+2zt+(x-y+w)t^2+wt^3$

10. $(FoG)(x,y,z,w) = F(G(x,y,z,w)) = F(z, z+w, z, x+y) = (2z, z, x+y+z+w, x+y)$,

(GoF)(x,y,z,w)=G(F(x,y,z,w))= G(2x,z,w+y,w)= (y+w,y+2w,y+w,2x+z),

$(\mathrm{F}^2)(x,y,z,w) = F(F(x,y,z,w)) = F(2x, z, w+y, w) = (4x, w+y, w+z, w)$,

$(\mathrm{G}^2)(x,y,z,w) = G(G(x,y,z,w)) = G(z, z+w, z, x+y) = (z, x+y+z, z, 2z+w)$.

11. Seja $\beta_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\} \implies \forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2; v = \alpha_1(e_1) + \alpha_2(e_2) \implies \alpha_1 = x$ e $\alpha_2 = y \implies T(v) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) = x(1-t) + y(1-t^2) = (x+y) - xt - yt^2$.

12. Seja $\beta_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_1+e_3, e_3-e_2\} \implies \forall v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; v = \alpha_1(e_1) + \alpha_2(e_1+e_3) + \alpha_3(e_3 - e_2) \implies \alpha_1 = x-y-z, \alpha_2 = z+y$ e $\alpha_3 = -y \implies T(v) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_1+e_3) + \alpha_3 T(e_3-e_2) = (x-y-z)e_3 + (z+y)(e_1+e_2+e_3) - y(e_1+e_2) = ze_1 + ze_2 + xe_3 = (z,z,x)$.