

# Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 12/03/2019

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

❶ **Princípio da Identidade:** “O que é, é.”

*Todo objeto é idêntico a si próprio.*

❷ **Princípio da Não Contradição:**

“Um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser.”

*Não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa.*

❸ **Princípio do Terceiro Excluído:** “Todo objeto é ou não é.”

*Uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.*

## DEFINIÇÃO:

Chama-se PROPOSIÇÃO uma sentença declarativa que exprime um pensamento de sentido completo, e que pode ser classificada como VERDADEIRA ou FALSA. **NOTAÇÃO:**  $p, q, r, s, t, \dots$

## Exemplos de Proposições:

- *O morcego é um mamífero.*
- *Salvador é a capital da Bahia.*
- *Há 57 alunos na turma—01 de matA42 na UFBA.*
- $1 + 1 = 3$ .

## Não são Proposições:

- Frases interrogativas: *Qual é a sua idade?*
- Frases imperativas: *Estude mais para as provas.*
- Frases exclamativas: *Lógico!*
- Não é verdadeiro nem falso:  $x + 1 = 3$ .

## DEFINIÇÃO:

Dizemos que o “Valor Lógico” (**VL**) ou “Valor Verdade” de uma proposição é VERDADEIRO se, e somente se, a proposição for verdadeira; e FALSO se, e somente se, a proposição NÃO FOR VERDADEIRA.

## EXEMPLOS:

- ①  $p$  : *Salvador é a capital da Bahia.*  $\mathbf{VL}(p) = V$
- ②  $q$  : *Salvador é a capital do Rio de Janeiro.*  $\mathbf{VL}(q) = F$

## OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- ① Toda proposição é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo outra possibilidade.
- ② Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.
- ③ Toda proposição verdadeira é sempre verdadeira, não podendo ser ora verdadeira ora falsa.

## LÓGICA SIMBÓLICA:(Iniciada pelo inglês George Boole em 1854)

Em LÓGICA SIMBÓLICA, a ação de combinar proposições para obtermos novas proposições é denominada OPERAÇÃO, e os conectivos são chamados de OPERADORES representados por símbolos.

OPERAÇÃO	SÍMBOLO	PROPOSIÇÃO	LÊ-SE
NEGAÇÃO	$\neg$ ou $\sim$	$\sim p$ ou $\neg p$ ou $\bar{p}$	não $p$
CONJUNÇÃO	$\wedge$	$p \wedge q$	$p$ e $q$
DISJUNÇÃO	$\vee$	$p \vee q$	$p$ ou $q$
CONDICIONAL	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	se $p$ então $q$
BICONDICIONAL	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	$p$ se, e somente se, $q$

## DEFINIÇÃO:

As PROPOSIÇÕES COMPOSTAS são obtidas combinando as proposições simples através dos Conectivos Lógicos.

NOTAÇÃO:  $P, Q, R, S, T, \dots$

## Exemplos:

- *O morcego não é um inseto.*
- *Basília é a capital do Brasil e Salvador é a capital da Bahia.*
- *João foi ao cinema ou Maria ficou em casa.*
- *Se Maria estudar então será aprovada.*
- *Maria será aprovada se, e somente se, estudar.*

- NEGAÇÃO

Seja  $p$  uma proposição. A negação de  $p$ , denotada  $\neg p$ , é verdadeira quando  $p$  for falso, e falsidade caso contrário.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

- CONJUNÇÃO

Sejam  $p$  e  $q$  proposições. A conjunção  $p$  e  $q$  denotada por  $p \wedge q$  é verdadeira quando ambos forem verdadeiros e falsidade caso contrário.

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- DISJUNÇÃO

Sejam  $p$  e  $q$  proposições. A disjunção entre  $p$  e  $q$  denotada por  $p \vee q$  é verdadeira quando pelo menos um for verdadeiro e falsidade quando ambos forem falsos.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**Observação:** Notamos que na disjunção definida acima, podemos ter as duas proposições verdadeiras, ou seja, temos uma disjunção INCLUSIVA.

Por exemplo: “Hoje é segunda-feira ou está chovendo hoje.”

Neste caso, hoje pode ser segunda-feira e também pode estar chovendo.



**Observação:** Podemos ter uma disjunção EXCLUSIVA, denotada por  $p \oplus q$ , que é verdadeira quando exatamente uma das proposições é verdade; e falsidade caso contrário.

Por exemplo: “Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira.”

Neste caso, hoje não pode ser segunda-feira e terça-feira ao mesmo tempo.

$p$	$q$	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

## ● CONDICIONAL

Sejam  $p$  e  $q$  proposições. A condicional  $p \rightarrow q$  é falsidade quando  $p$  é verdadeira e  $q$  é falsidade, e é verdadeira caso contrário.

Podemos ler a condicional “Se  $p$  então  $q$ ” ou

“ $p$  é suficiente para  $q$ ” ou

“ $q$  se  $p$ ” ou “ $q$  é necessário para  $p$ ” ou “ $p$ , somente se  $q$ ”.

Na condicional temos que  $p$  é denominada a HIPÓTESE ou ANTECEDENTE ou PREMISA; e  $q$  é denominada CONCLUSÃO ou CONSEQUÊNCIA.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **CONDICIONAL**

Por exemplo: “Se Isa é graduada em Ciência da Computação então Isa terá um bom emprego.”; ou “Isa terá um bom emprego quando ela for graduada em Ciência da Computação.”; ou “Para Isa obter um bom emprego, é suficiente que ela seja graduada em Ciência da Computação.”; ou “Isa terá um bom emprego a menos que ela não se gradue em Ciência da Computação. ”

**Observação:** Na condicional do exemplo acima temos uma sentença como na linguagem natural; porém, na linguagem matemática podemos ter proposições formando uma condicional sem uma relação entre a hipótese e a conclusão: “Se Isa é graduada em Ciência da Computação então  $2+2 = 5$ ”. Neste caso, a sentença é verdadeira, exceto se Isa for graduada em Ciência da Computação que a sentença será falsa.

O conceito matemático de uma **CONDICIONAL** é independente de uma *causa* e *efeito* entre a hipótese e a conclusão; ele é baseado nos seus valores verdade e não na linguagem natural usada.

- BICONDICIONAL

Sejam  $p$  e  $q$  proposições. A bicondicional  $p \leftrightarrow q$  é a proposição “ $p$  se, e somente se  $q$ ”.

A bicondicional é verdadeira quando  $p$  e  $q$  tiverem o mesmo valor, e é falsidade caso contrário.

Podemos ler a bicondicional “ $p$  se, e somente se,  $q$ ” ou “ $p$  sse  $q$ ” ou “ $p$  é condição necessária e suficiente para  $q$ ” ou “ $q$  é condição necessária e suficiente para  $p$ ”.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Observação:** A bicondicional é uma dupla-condicional, ou seja, o valor verdade da condicional  $p \leftrightarrow q$  é o mesmo que  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

HIERARQUIA (ou ordem de precedência) de operações dos conectivos lógicos:

- ❶ NEGAÇÃO  $\neg$
- ❷ CONJUNÇÃO  $\wedge$
- ❸ DISJUNÇÃO  $\vee$
- ❹ CONDICIONAL  $\rightarrow$
- ❺ BICONDICIONAL  $\leftrightarrow$

**Exemplo.1:**  $p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$

$p$	$q$	$r$	$s$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \vee s$	$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee s$
F	V	F	V	F	F	V	V

**Observação:** Se for necessário alterar a ordem das operações, devemos utilizar “PARÊNTESES”,  $()$ .

## Exemplo.2:

- ❶ **p**: Mário foi ao cinema.
- ❷ **q**: João foi ao teatro.
- ❸ **r**: Marcelo ficou em casa.

- **Considerando a expressão proposicional:**  $p \wedge q \rightarrow r$

**lê-se:** “SE Mário foi ao cinema E João foi ao teatro, ENTÃO Marcelo ficou em casa”.

- **Agora, utilizando os parênteses na expressão:**  $p \wedge (q \rightarrow r)$

**lê-se:** “Mário foi ao cinema, E, SE João foi ao teatro, ENTÃO Marcelo ficou em casa”.

## Definição: (Tabela Verdade)

Uma Tabela na qual são apresentados todos os valores verdade possíveis de uma proposição composta, para cada combinação dos valores verdade das proposições componentes, é denominada **"TABELA VERDADE"**.

**Observação:** Cada linha da Tabela Verdade corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições correspondentes.

Como existem 2 (dois) valores **V** ou **F** para **n** componentes, temos então,  $2^n$  combinações possíveis, ou seja,

**"A Tabela Verdade de uma EXPRESSÃO PROPOSICIONAL tem  $2^n$  linhas."**

Considerando as expressões do Exemplo.2:

- $p \wedge q \rightarrow r$
- $p \wedge (q \rightarrow r)$

temos a seguinte Tabela Verdade com  $2^3 = 8$  linhas:

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \rightarrow r$	$p \wedge q \rightarrow r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F