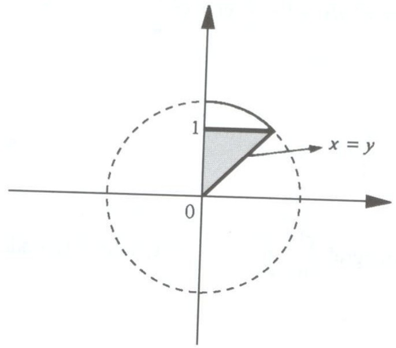
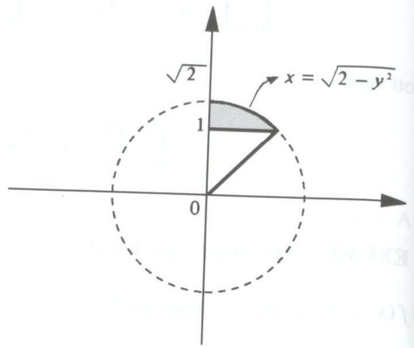
onde B_1 é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 1) e (0, 1) e B_2 o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2 - x^2}$.





$$\iint_{B_1} f\,(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^y f\,(x, y)\,dx\right] dy$$

e

$$\iint_{B_2} f\,(x, y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2 - y^2}} f\,(x, y)\,dx\right] dy.$$

Assim,

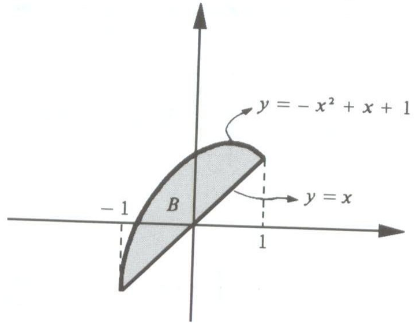
$$\int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{2 - x^2}} f\,(x, y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^y f\,(x, y)\,dx\right] dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2 - y^2}} f\,(x, y)\,dx\right] dy. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 11. Utilizando integral dupla, calcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = -x^2 + x + 1$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Solução

Seja B a região dada. Temos: área de $B = \iint_B dx\,dy$. (Veja Seção 2.2.)

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\int_x^{-x^2 + x + 1} dy\right] dx.$$



Como

$$\int_x^{-x^2 + x + 1} dy = [y]_x^{-x^2 + x + 1} = -x^2 + x + 1 - x = -x^2 + 1$$

resulta

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}.$$

Portanto, a área da região dada é $\frac{4}{3}$. ■

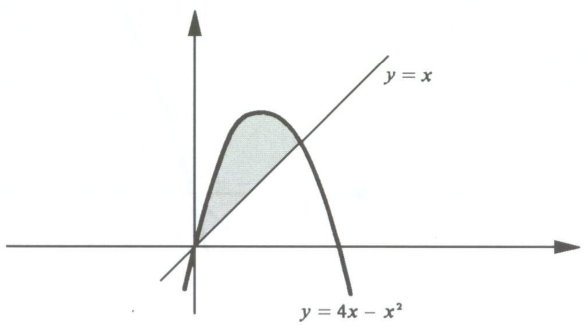
EXEMPLO 12. Inverta a ordem de integração na integral

$$\int_0^3 \left[\int_x^{4x - x^2} f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Solução

Primeiro precisamos descobrir a região de integração. Para cada x fixo no intervalo $[0, 3]$, y deve variar de x até $4x - x^2$: a região de integração é o conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ e } x \leqslant y \leqslant 4x - x^2\}$$



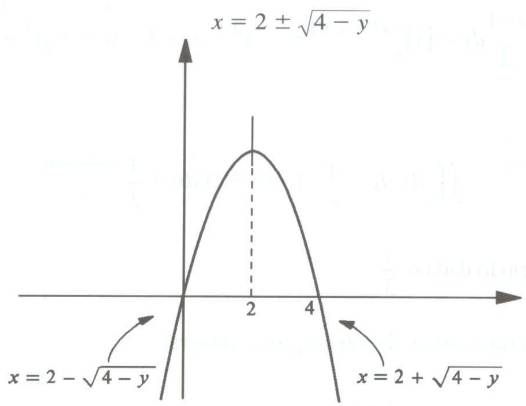
Precisamos expressar x em função de y. Temos

$$y = 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y = 0.$$

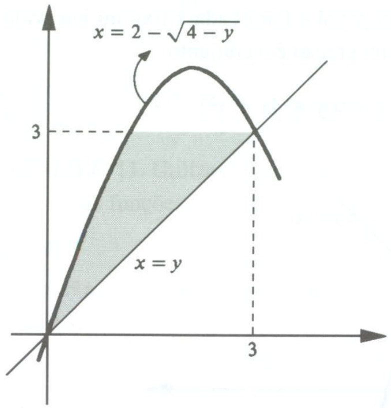
Segue que

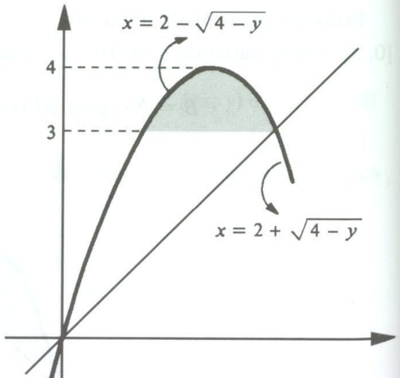
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4y}}{2}$$

ou seja



Para inverter a ordem de integração vamos precisar dividir a região de integração em duas regiões.





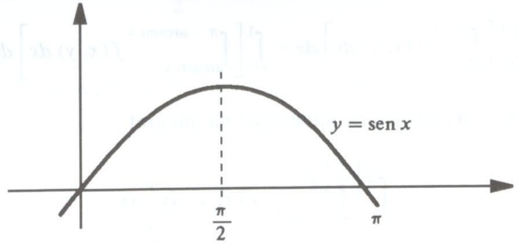
Temos, então:

$$\int_0^3\left[\int_x^{4x-x^2} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^3\left[\int_{2-\sqrt{4-y}}^{y} f(x,y)\,dx\right]dy+\int_3^4\left[\int_{2-\sqrt{4-y}}^{2+\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx\right]dy. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 13. Inverta a ordem de integração na integral

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Solução



A região de integração é o conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}.$$

Precisamos expressar x em função de y.

$$y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

é equivalente a

$$x = \operatorname{arcsen} y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Por outro lado,

$$y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow y = \operatorname{sen}(\pi - x).$$

Como

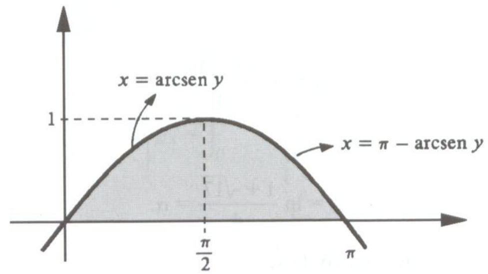
$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \Leftrightarrow 0 \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

resulta

$$\pi - x = \operatorname{arcsen} y$$

ou seja

$$x = \pi - \operatorname{arcsen} y.$$



Logo,

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dy\right] dx = \int_0^{1}\left[\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi - \operatorname{arcsen} y} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

EXEMPLO 14. Inverta a ordem de integração na integral

$$\int_0^{a}\left[\int_{e^x - e^{-x}}^{\frac{1}{2}e^x} f(x, y)\, dy\right] dx$$

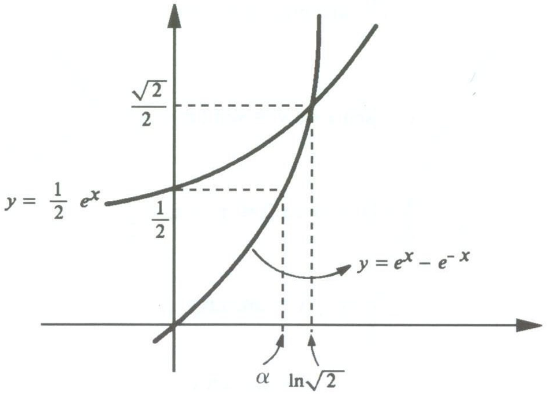
onde $0 < a \leqslant \ln\sqrt{2}$.

Solução

A região de integração é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ e^x - e^{-x} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}e^x\}.$$

$$e^x - e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\,(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$$



e, portanto,

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$$

Logo,

$$x = \ln\frac{1 + \sqrt{17}}{4} = \alpha.$$

Vamos, agora, expressar x em função de y.

$$y = \frac{1}{2}e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2y.$$

Por outro lado,

$$y = e^x - e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - e^x y - 1 = 0$$

e, portanto,

$$e^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

Como

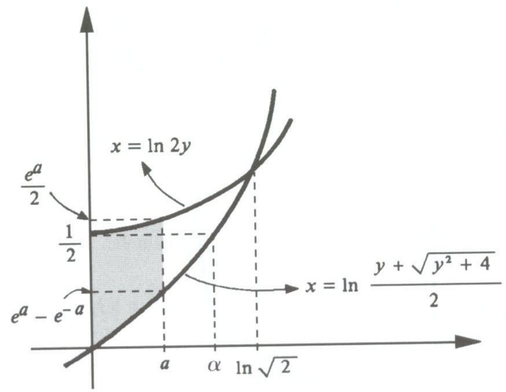
$$\sqrt{y^2 + 4} \geqslant |y| \text{ e } e^x > 0$$

o sinal $-$ na expressão acima deve ser descartado. Logo,

$$y = e^x - e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

$$\boxed{\textit{1.° caso: } 0 < a < \ln\frac{1 + \sqrt{17}}{4}.}$$

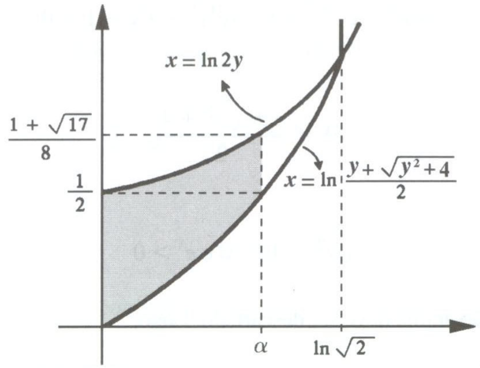
Temos:



$$\int_0^{a}\left[\int_{e^x - e^{-x}}^{\frac{1}{2}e^x} f(x, y)\, dy\right] dx = \int_0^{e^a - e^{-a}}\left[\int_0^{\ln\frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\, dx\right] dy$$

$$+ \int_{e^a - e^{-a}}^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{a} f(x, y)\, dx\right] dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}e^a}\left[\int_{\ln 2y}^{a} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

$$\boxed{2.^\circ \textit{ caso: } a = \alpha = \ln \frac{1+\sqrt{17}}{4}.}$$



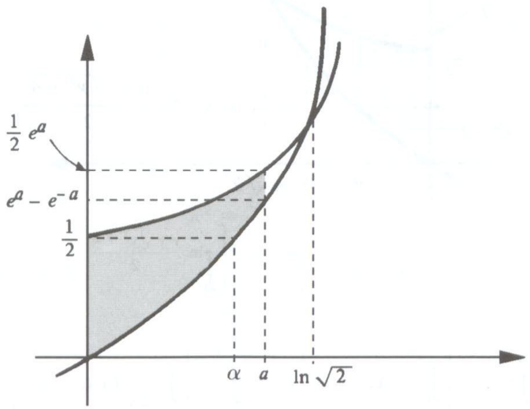
Observe que

$$\frac{1}{2}e^{\alpha} = \frac{1+\sqrt{17}}{8}.$$

A integral dada será, então, igual a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\ln \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\left[\int_{\ln 2y}^{\alpha} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

$$\boxed{3.^\circ \textit{ caso: } \alpha < a \leq \ln\sqrt{2}.}$$



Neste caso a integral dada será igual a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\ln \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy + \int_{\frac{1}{2}}^{e^a - e^{-a}}\left[\int_{\ln 2y}^{\ln \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}} f(x, y)\,dx\right]dy$$

$$+ \int_{e^a - e^{-a}}^{\frac{1}{2}e^a}\left[\int_{\ln 2y}^{a} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

Observação. Para $a = \ln\sqrt{2}$, a última integral se anula. ■

Exercícios 3.1

1. Seja A o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$. Calcule $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$, sendo $f(x, y)$ igual a

   a) $x + 2y$ *b)* $x - y$

   c) $\sqrt{x+y}$ *d)* $\dfrac{1}{x+y}$

   e) 1 *f)* $x \cos xy$

   g) $y \cos xy$ *h)* $\dfrac{1}{(x+y)^2}$

   i) $y e^{xy}$ *j)* xy^2

   l) $x \operatorname{sen} \pi y$ *m)* $\dfrac{1}{1 + x^2 + 2xy + y^2}$

2. Sejam $f(x)$ e $g(y)$ duas funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$. Prove que

$$\iint_A f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

   onde A é o retângulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

3. Utilizando o Exercício 2, calcule

   a) $\iint_A xy^2\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq y \leq 3$.

   b) $\iint_A x \cos 2y\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

   c) $\iint_A x \ln y\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$.

   d) $\iint_A xy\, e^{x^2 - y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$.

   e) $\iint_A \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + 4y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.

   f) $\iint_A \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{1 + 4y^2}\,dx\,dy$, onde A é o retângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq 1$.

4. Calcule o volume do conjunto dado.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + 2y\}$.
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$.
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\, e^{x^2 - y^2}\}$.
d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$.
e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq z \leq x + y + 2\}$.
f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq e^{x+y}\}$.

5. Calcule $\iint_B y\, dx\, dy$ onde B é o conjunto dado.

a) B é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1).
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x + 2\}$.
c) B é o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + 4y^2 \leq 1$.
d) B é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (2, 1).
e) B é a região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.
f) B é o paralelogramo de vértices $(-1, 0)$, (0, 0), (1, 1) e (0, 1).
g) B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.
h) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^5 - x \leq y \leq 0\}$.

6. Calcule $\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$ sendo dados:

a) $f(x, y) = x \cos y$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 \leq y \leq \pi\}$.
b) $f(x, y) = xy$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x \text{ e } x \geq 0\}$.
c) $f(x, y) = x$ e B o triângulo de vértices (0, 0), (1, 1) e (2, 0).
d) $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ e B o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
e) $f(x, y) = x + y$ e B o paralelogramo de vértices (0, 0), (1, 1), (3, 1) e (2, 0).
f) $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln y}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \dfrac{1}{y}\right\}$.
g) $f(x, y) = xy \cos x^2$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.
h) $f(x, y) = (\cos 2y)\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}$ e B o triângulo de vértices (0, 0), $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
i) $f(x, y) = x + y$ e B a região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$.
j) $f(x, y) = y^3 e^{xy^2}$ e B o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$.
l) $f(x, y) = x^5 \cos y^3$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$.
m) $f(x, y) = x^2$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $x \leq y \leq -x^2 + 2x + 2$.
n) $f(x, y) = x$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

o) $f(x, y) = 1$ e B a região compreendida entre os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 1 - \cos x$, com $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.
p) $f(x, y) = \sqrt{1 + y^3}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.
q) $f(x, y) = x$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $y \geq x^2$ e $x \leq y \leq x + 2$.
r) $f(x, y) = \dfrac{y}{x + y^2}$ e B o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

7. Inverta a ordem de integração.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y)\, dy\right] dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y)\, dy\right] dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\right] dy.$

d) $\displaystyle\int_1^e \left[\int_{\ln x}^x f(x, y)\, dy\right] dx.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_y^{y+3} f(x, y)\, dx\right] dy.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy\right] dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy\right] dx.$

h) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{y-1}^{2-2y} f(x, y)\, dx\right] dy.$

i) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\right] dx.$

j) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{e^y - 1}^{e^y} f(x, y)\, dx\right] dy.$

l) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{2x}^{x+1} f(x, y)\, dy\right] dx.$

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\operatorname{tg} x} f(x, y)\, dy\right] dx.$

n) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy\right] dx.$

o) $\displaystyle\int_0^{3a} \left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{4ax-x^2}} f(x, y)\, dy\right] dx \; (a > 0).$

p) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dy\right] dx.$

q) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} f(x, y)\, dy\right] dx.$

r) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left[\int_{\sqrt{\frac{7+5y^2}{3}}}^{\frac{y+7}{3}} f(x, y)\, dx\right] dy.$

s) $\displaystyle\int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x, y)\, dy\right] dx.$

8. Calcule o volume do conjunto dado. (Sugerimos ao leitor desenhar o conjunto.)

a) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $x + y + 2 \leqslant z \leqslant 4$.

b) $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$.

c) $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ e $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$.

d) $x^2 + y^2 + 3 \leqslant z \leqslant 4$.

e) $x^2 + 4y^2 \leqslant 4$ e $x + y \leqslant z \leqslant x + y + 1$.

f) $x \geqslant 0, x \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant e^{y^2}$.

g) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ e $y^2 + z^2 \leqslant a^2 \quad (a > 0)$.

h) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$.

i) $x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$.

j) $x \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant 0, z \geqslant 0$ e $z^2 + x^4 + x^2y^2 \leqslant 2x^2$.

l) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2x$.

m) $x \leqslant z \leqslant 1 - y^2$ e $x \geqslant 0$.

n) $4x + 2y \leqslant z \leqslant 3x + y + 1, x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

o) $0 \leqslant z \leqslant \operatorname{sen} y^3$ e $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{\pi}$.

9. Utilizando integral dupla, calcule a área do conjunto B dado.

a) B é o conjunto de todos (x, y) tais que $\ln x \leqslant y \leqslant 1 + \ln x, y \geqslant 0$ e $x \leqslant e$.

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.

c) B é determinado pelas desigualdades $xy \leqslant 2, x \leqslant y \leqslant x + 1$ e $x \geqslant 0$.

d) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \dfrac{4}{x} \leqslant 3y \leqslant -3x^2 + 7x\right\}$.

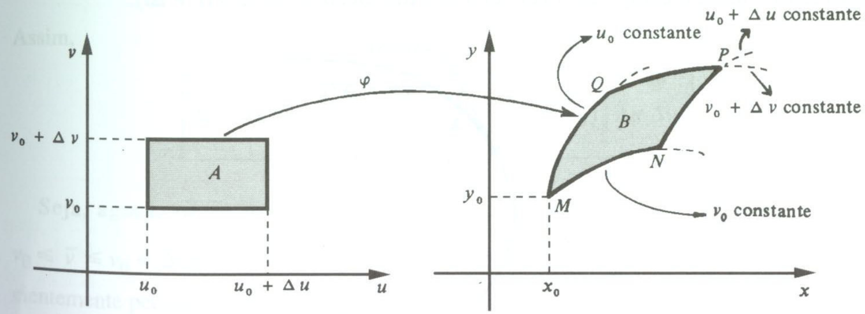
e) B é limitado pelas curvas $y = x^2 - x$ e $x = y^2 - y$.

4

Mudança de Variáveis na Integral Dupla

4.1. Preliminares

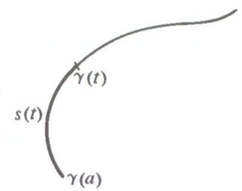
Seja $(x, y) = \varphi(u, v), (u, v) \in \Omega$, uma transformação de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja A um retângulo, de lados paralelos aos eixos, contido em Ω.



Seja $B = \varphi(A) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v) \in A\}$. Assim, φ transforma o retângulo A no conjunto B. Estamos interessados, a seguir, em avaliar a área de B, supondo Δu e Δv suficientemente pequenos.

Observamos, inicialmente, que se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva de classe C^1, o comprimento $s = s(t)$ do arco de extremidades $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$ (a fixo) é (veja Vol. 2)

$$s(t) = \int_a^t \| \gamma'(u) \| \, du.$$



Pelo teorema fundamental do cálculo (observe que $\| \gamma'(u) \|$ é contínua, pois estamos supondo γ de classe C^1)

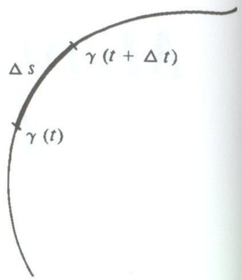
$$\frac{ds}{dt} = \| \gamma'(t) \|$$

e, assim, a diferencial de $s = s(t)$ será

$$ds = \| \gamma'(t) \| \, dt.$$

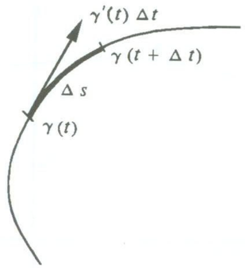
Deste modo, teremos

$$\Delta s \cong \| \gamma'(t) \| \, \Delta t$$



onde Δs é o comprimento do arco de extremidades $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$, com $\Delta t > 0$. Evidentemente, a aproximação será tanto melhor quanto menor for Δt.

Como $\gamma'(t)$ é um vetor tangente à curva γ, em $\gamma(t)$, segue que $\gamma'(t)\,\Delta t$ será, também, tangente a esta curva em $\gamma(t)$; além disso, o seu comprimento $\|\gamma'(t)\,\Delta t\| = \|\gamma'(t)\|\,\Delta t$ é aproximadamente o comprimento do arco de extremidades $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$.



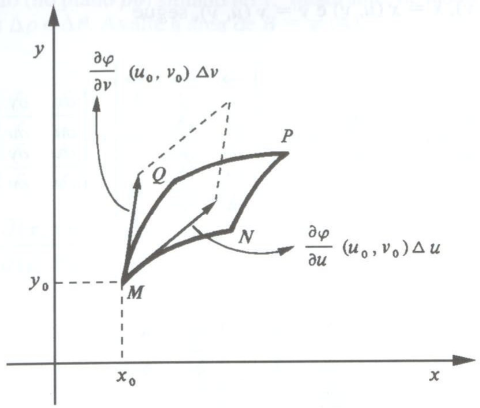
Voltemos, agora, ao nosso conjunto B. A derivada $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ desempenha (em relação à curva $v \mapsto \varphi(u_0, v)$) o mesmo papel que $\gamma'(t)$. Pelo que vimos acima.

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta v$$

é aproximadamente o comprimento do arco MQ. Do mesmo modo,

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\| \Delta u$$

é aproximadamente o comprimento do arco MN.



Conforme você aprendeu em vetores, a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\,\Delta u$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\,\Delta v$ é:

$$\left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\,\Delta u \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\,\Delta v \right) \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u\,\Delta v.$$

Assim,

$$\boxed{\text{área de } B \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u\,\Delta v.}$$

Seja, agora, $(\bar{u}, \bar{v})$ um ponto qualquer no retângulo A ($u_0 \leq \bar{u} \leq u_0 + \Delta u$ e $v_0 \leq \bar{v} \leq v_0 + \Delta v$); tendo em vista a continuidade de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ e supondo Δu e Δv suficientemente pequenos, teremos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \cong \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \cong \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Segue que, para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in A$,

$$\boxed{\text{área de } B \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \right\| \Delta u\,\Delta v.}$$

Deste modo, o número $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$ pode ser interpretado como um fator de ampliação (ou contração) *local* de área.

De $(x, y) = \varphi(u, v)$, $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, segue

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

resulta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k}$$

onde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

é o determinante jacobiano da transformação $(x, y) = \varphi(u, v)$. Assim,

$$\boxed{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}$$

isto é, a norma do vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ é igual ao módulo do determinante jacobiano da transformação $(x, y) = \varphi(u, v)$.

EXEMPLO. Considere a transformação φ dada por $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ (coordenadas polares).

a) Calcule o determinante jacobiano.

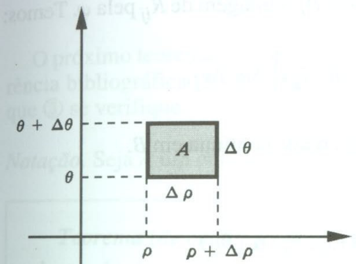
b) Seja A um retângulo (no plano $\rho\theta$) situado no 1.° quadrante, de lados paralelos aos eixos, e com comprimentos $\Delta\rho$ e $\Delta\theta$. Avalie a área de $B = \varphi(A)$.

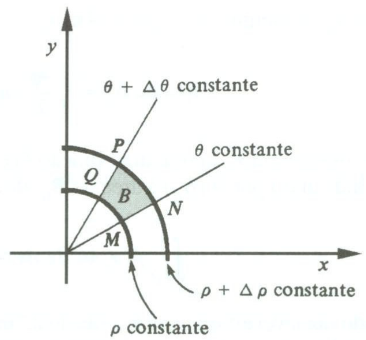
Solução

a)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

b)





$$\boxed{\text{área de } B \cong \rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta}$$

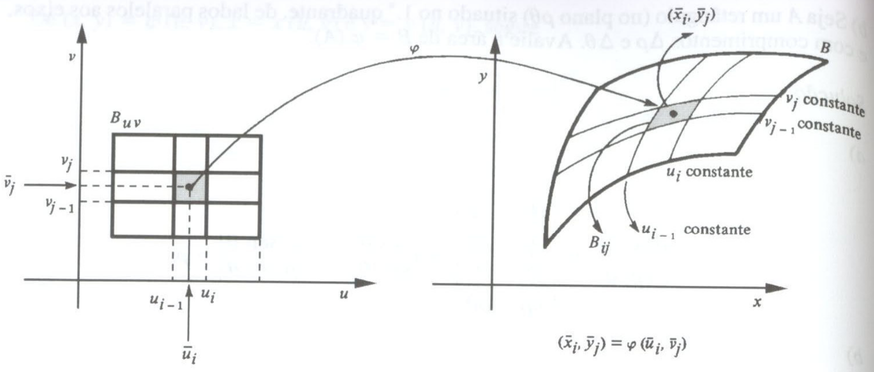
pois, $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \rho$. Observe que o comprimento do segmento MN é $\Delta\rho$ e o do arco MQ é $\rho\,\Delta\theta$. Deste modo, a área de B é aproximadamente a área de um retângulo de lados $\Delta\rho$ e $\rho\,\Delta\theta$. ■

4.2. Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Seja $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, Ω aberto, uma transformação de classe C^1 e seja B_{uv} um subconjunto de Ω. Seja B a imagem de B_{uv} pela transformação φ. Suponhamos, por um momento, que B_{uv} seja um retângulo de lados paralelos aos eixos e que φ seja injetora no interior de B_{uv}. (O *interior* de B_{uv} é, por definição, o conjunto formado pelos pontos interiores de B_{uv}.) Seja

$$P = \{(u_i, v_j) \mid i = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \ldots, m\}$$

uma partição de B_{uv}.



Seja R_{ij} o retângulo $u_{i-1} \leqslant u \leqslant u_i$, $v_{j-1} \leqslant v \leqslant v_j$ e seja B_{ij} a imagem de R_{ij} pela φ. Temos:

$$\text{área de } B_{ij} \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \right\| \Delta u_i \, \Delta v_j.$$

Consideremos, agora, uma função $f(x, y)$, a valores reais, contínua em B. Indicando por $\alpha(B_{ij})$ a área de B_{ij}, devemos ter

① $$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \alpha(B_{ij})$$

sendo razoável esperar que a soma do 2.° membro tenda para a integral do 1.° membro quando Δ tende a zero, onde Δ é o maior dos números Δu_i e Δv_j, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$. Como

$$\alpha(B_{ij}) \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \right\| \Delta u_i \, \Delta v_j$$

e

$$(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j)$$

resulta que a soma que aparece em ① é aproximadamente

② $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \right\| \Delta u_i \, \Delta v_j.$$

Da continuidade de $f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$ no retângulo B_{uv}, segue que ② tende a

$$\iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv$$

quando Δ tende a zero. É razoável, então, esperar que

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv$$

ou

③ $$\boxed{\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv}$$

pois, como vimos na seção anterior,

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

O próximo teorema que enunciaremos sem demonstração (para demonstração veja referência bibliográfica [33]) conta-nos que condições são suficientes impor a f, φ e B_{uv} para que ③ se verifique.

Notação. Seja A um conjunto. O conjunto dos pontos interiores de A será indicado por $\mathring{A}$.

Teorema *(de mudança de variáveis na integral dupla)*. Seja φ: $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, Ω aberto, de classe C^1, sendo φ dada por $(x, y) = \varphi(u, v)$, com $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$. Seja $B_{uv} \subset \Omega$, B_{uv} compacto e com fronteira de conteúdo nulo. Seja B a imagem de B_{uv}, isto é, $B = \varphi(B_{uv})$. Suponhamos que $\varphi(\mathring{B}_{uv}) = \mathring{B}$. Suponhamos, ainda, que φ seja inversível no interior de B_{uv} e que, para todo $(u, v) \in \mathring{B}_{uv}$, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for integrável em B, então

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = ?$$

$$\begin{cases} x = x(u, v),\ y = y(u, v);\ dx\, dy = \left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv. \\ \text{Determina-se } B_{uv} \text{ (no plano } uv\text{) tal que } B = \varphi(B_{uv}). \end{cases}$$

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{B_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy$, onde B é o trapézio

$$1 \leqslant x + y \leqslant 2,\ x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0.$$

Solução

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy = ?$$

Façamos a mudança de variável $u = x - y$, $v = x + y$. Temos:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{2} + \dfrac{v}{2} \\[2ex] y = \dfrac{v}{2} - \dfrac{u}{2} \end{cases}$$

De

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

segue que

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\,du\,dv.$$

Observe que a transformação $(u, v) = \psi(x, y)$ dada por

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

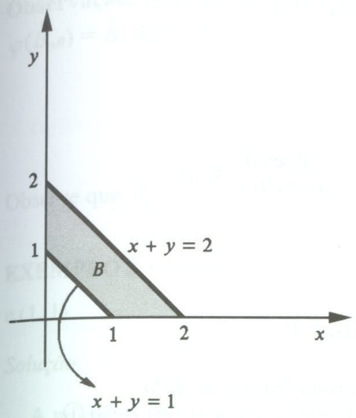
é a inversa de $(x, y) = \varphi(u, v)$ dada por

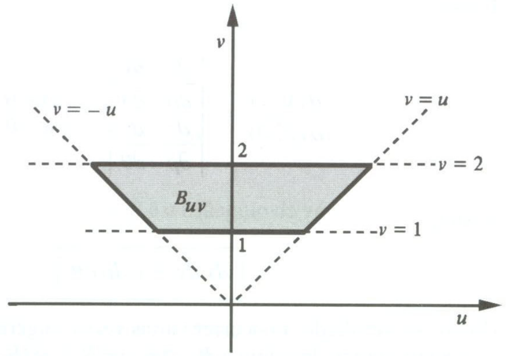
$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{2} + \dfrac{v}{2} \\[2ex] y = \dfrac{v}{2} - \dfrac{u}{2} \end{cases}$$

e que φ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

A seguir, vamos determinar B_{uv} de modo que $B = \varphi(B_{uv})$. Como ψ é a inversa de φ, segue, então, que B_{uv} é a imagem de B pela ψ.

$$\psi : \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$





Observe que ψ transforma as retas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, nas retas $v = 1$, $v = 2$, $v = u$ e $v = -u$. Observe, ainda, que $\varphi(\overset{\circ}{B}_{uv}) = \overset{\circ}{B}$.

Segue que

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy = \iint_{B_{uv}} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\,du\,dv}_{dx\,dy} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[\int_{-v}^{v} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v}\,du\right] dv.$$

Como

$$\int_{-v}^{v} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v}\,du = \left[\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}\right]_{-v}^{v} = 2$$

segue que

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\,dx\,dy = \int_1^2 dv = 1. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. (Envolvendo coordenadas polares.) Calcule

$$\iint_B \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

onde B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$.

Solução

Façamos a mudança de variável

① $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}; \qquad dx\,dy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta.$

Temos:

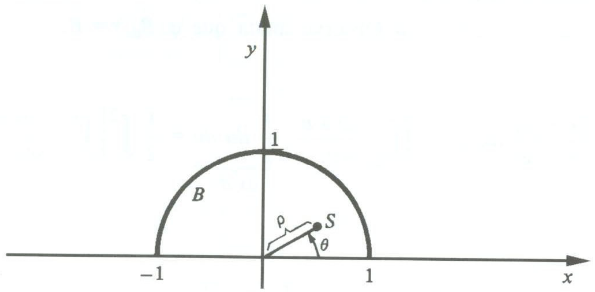
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Assim,

$$\boxed{dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta} \qquad (\rho \geqslant 0).$$

Como este resultado irá ocorrer várias vezes, sugerimos ao leitor *decorá-lo*.

Vamos, agora, determinar $B_{\rho\theta}$ tal que $B = \varphi\,(B_{\rho\theta})$, onde φ é a transformação ①.



Para que o ponto S permaneça no semicírculo B é suficiente que θ pertença ao intervalo $[0, \pi]$ e ρ ao intervalo $[0, 1]$. Quando o ponto (ρ, θ) descreve o retângulo $B_{\rho\theta} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$, o ponto S descreverá o semicírculo B. A φ transforma o retângulo $B_{\rho\theta}$ no semicírculo B.

Temos, então:

$$\iint_B \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{B_{\rho\theta}} \operatorname{sen}\rho^2 \cdot \overbrace{\rho\,d\rho\,d\theta}^{dx\ dy} = \int_{B_{\rho\theta}} \rho \operatorname{sen}\rho^2\,d\rho\,d\theta.$$

Como

$$\iint_{B_{\rho\theta}} \rho \operatorname{sen}\rho^2\,d\rho\,d\theta = \int_0^\pi \left[\int_0^1 \rho\operatorname{sen}\rho^2\,d\rho\right] d\theta = \pi\left[-\frac{1}{2}\cos\rho^2\right]_0^1$$

resulta

$$\iint_B \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 1). \qquad \blacksquare$$

Observação. Note que φ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$; φ é inversível no interior de $B_{\rho\theta}$ e $\varphi(\mathring{B}_{\rho\theta}) = \mathring{B}$. Além disso, para todo $(\rho, \theta) \in \mathring{B}_{\rho\theta}$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho \neq 0.$$

Observe que $\mathring{B}_{\rho\theta} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi\}$.

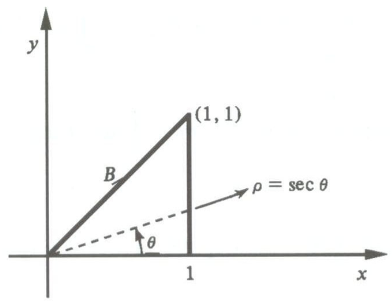
EXEMPLO 3. Calcule $\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, onde B é o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1).

Solução

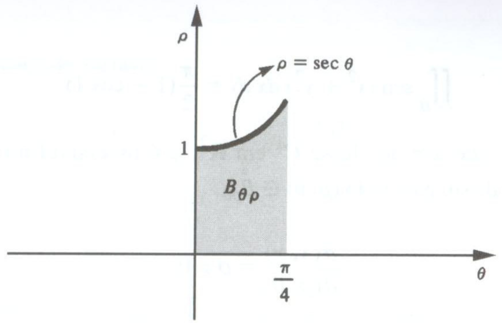
A mudança de variáveis para coordenadas polares elimina a raiz do integrando, o que poderá facilitar as coisas. Vamos, então, tentar o cálculo da integral em coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}; \qquad dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Vamos, agora, determinar $B_{\theta\rho}$.



A equação da reta $x = 1$ é, em coordenadas polares, $\rho\cos\theta = 1$, ou seja, $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. Deste modo, para cada θ fixo em $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, ρ deverá variar de 0 a $\sec\theta$. $B_{\theta\rho}$ é, então, o conjunto de todos (θ, ρ) tais que $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \sec\theta$.



Temos:

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \rho \cdot \underbrace{\rho\,d\rho\,d\theta}_{dx\,dy} = \iint_{B_{\theta\rho}} \rho^2\,d\rho\,d\theta.$$

Como

$$\iint_{B_{\theta\rho}} \rho^2\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\sec\theta} \rho^2\,d\rho\right] d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln\left(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

resulta

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{6}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

(Veja: $\int \sec^3 d\theta = \int \underset{\underset{f}{\uparrow}}{\sec\theta}\ \underset{\underset{g'}{\uparrow}}{\sec^2\theta}\,d\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$

$$= \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta + \int \sec\theta\,d\theta;$$

portanto,

$$2\int \sec^3\theta\,d\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + k_1$$

ou seja,

$$\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}[\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|] + k.)$$ ■

EXEMPLO 4. Calcule $\int_0^1 \left[\int_0^x x\sqrt{x^2+3y^2}\,dy\right] dx.$

Solução

Primeiro vamos determinar a região de integração. Para cada x fixo em $[0, 1]$, y deve variar de 0 a x; a região B de integração é, então, o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, ou seja, B é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Assim,

$$\int_0^1 \left[\int_0^x x\sqrt{x^2+3y^2}\,dy\right] dx = \iint_B x\sqrt{x^2+3y^2}\,dx\,dy.$$

A mudança de variável

① $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \sqrt{3}\,y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

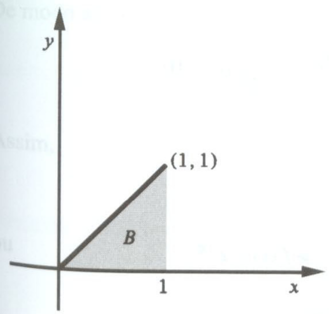
elimina a raiz do integrando. (Observe que $x^2 + 3y^2 = \rho^2$.) Temos:

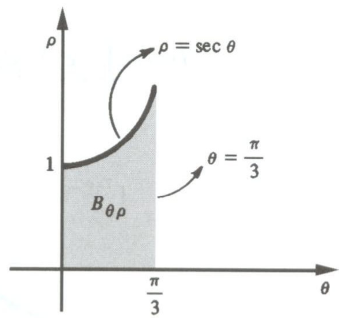
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} = \begin{vmatrix} -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}\,\theta \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\rho.$$

Assim

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)}\right| d\rho\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho\,d\rho\,d\theta \qquad (\rho \geq 0).$$

Vamos, agora, determinar $B_{\theta\rho}$.





Observe que ① transforma a reta $x = 1$ na curva $\rho = \sec\theta$; por outro lado, ① transforma a reta $y = x$ na reta $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Temos, então:

$$\iint_B x\sqrt{x^2+3y^2}\,dx\,dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \frac{\sqrt{3}}{3}\rho^3\cos\theta\,d\rho\,d\theta.$$

Como

$$\iint_{B_{\theta\rho}} \frac{\sqrt{3}}{3}\rho^3\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_0^{\sec\theta}\rho^3\cos\theta\,d\rho\right]d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\rho^4}{4}\cos\theta\right]_0^{\sec\theta} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta\,d\theta$$

resulta

$$\iint_B x\sqrt{x^2+3y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{3}}{24}\left[\sec\theta\,\text{tg}\,\theta + \ln(\sec\theta+\text{tg}\,\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

e, portanto,

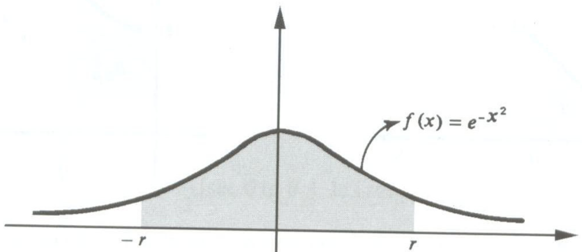
$$\iint_B x\sqrt{x^2+3y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{3}}{24}\left[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right]. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 5. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Solução

Façamos

$$I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx = \int_{-r}^{r} e^{-y^2}\,dy \qquad (r > 0).$$

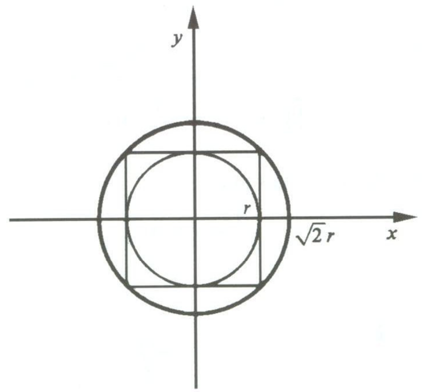


$I(r)$ = área da região hachurada

Temos:

$$[I(r)]^2 = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx \int_{-r}^{r} e^{-y^2}\,dy = \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Sejam B e B_1 os círculos inscrito e circunscrito, respectivamente, ao quadrado $-r \leq x \leq r$, $-r \leq y \leq r$; o raio de B é r e o de B_1 é $\sqrt{2}\,r$. Temos:



$$\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leq [I(r)]^2 \leq \iint_{B_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Pela mudança de variável $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ obtemos

$$\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r}\rho\,e^{-\rho^2}\,d\rho = \pi\,[1-e^{-r^2}].$$

De modo análogo,

$$\iint_{B_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\,[1-e^{-2r^2}].$$

Assim,

$$\pi[1-e^{-r^2}] \leq [I(r)]^2 \leq \pi[1-e^{-2r^2}]$$

ou

$$\sqrt{\pi[1-e^{-r^2}]} \leq I(r) \leq \sqrt{\pi[1-e^{-2r^2}]}.$$

Como

$$\lim_{r\to+\infty}\sqrt{\pi[1-e^{-r^2}]} = \sqrt{\pi} = \lim_{r\to+\infty}\sqrt{\pi[1-e^{-2r^2}]}$$

segue, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{r \to +\infty} I(r) = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

■

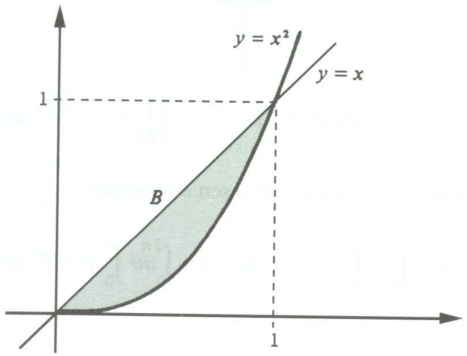
EXEMPLO 6. Calcule

$$\iint_B x\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que

$$x^2 \leqslant y \leqslant x.$$

Solução



B é o conjunto hachurado. Vamos tentar uma mudança para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

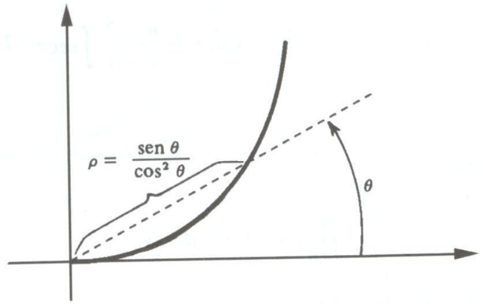
Vejamos, inicialmente, como fica a equação da parábola $y = x^2$ em coordenadas polares. Temos

$$\rho \operatorname{sen} \theta = (\rho \cos \theta)^2$$

daí

$$\rho = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta},\ 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2},$$

é a equação, em coordenadas polares, de $y = x^2$, $x \geqslant 0$.



$B_{\theta\rho}$ é, então, o conjunto

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}.$$

$\left(\text{Para cada } \theta \text{ fixo em } \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \rho \text{ deve variar de } 0 \text{ até } \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}.\right)$ Temos, então,

$$\iint_B x\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \rho^3 \cos \theta\, d\rho\, d\theta.$$

Vamos, agora, calcular a integral do 2.° membro

$$\iint_{B_{\theta\rho}} \rho^3 \cos \theta\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}} \rho^3 \cos \theta\, d\rho\right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}} d\theta.$$

Assim

$$\iint_{B_{\theta\rho}} \rho^3 \cos \theta\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^4 \theta}{\cos^7 \theta}\, d\theta.$$

Temos

$$\frac{\operatorname{sen}^4 \theta}{\cos^7 \theta} = \sec^3 \theta \operatorname{tg}^4 \theta = \sec^3 \theta (\sec^2 \theta - 1)^2.$$

Daí

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^4 \theta}{\cos^7 \theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sec^7 \theta - 2\sec^5 \theta + \sec^3 \theta]\, d\theta.$$

O cálculo da integral do 2.° membro fica para o leitor. (*Sugestão*. Utilize a fórmula de recorrência

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx.$$

Veja Vol. 1.)

EXEMPLO 7. Calcule

$$\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

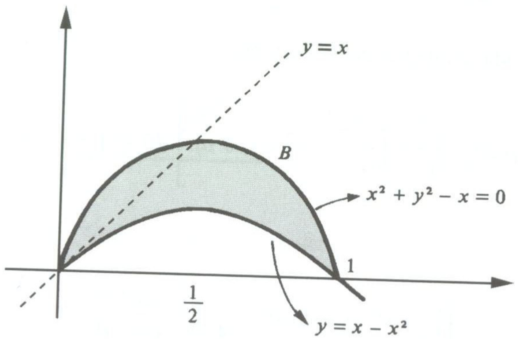
onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que

$$y \geqslant x - x^2 \text{ e } x^2 + y^2 - x \leqslant 0.$$

Solução

$$x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

A parábola $y = x - x^2$ e a circunferência $x^2 + y^2 - x = 0$ interceptam-se nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$. (Verifique.) Observamos que $y = x$ é a reta tangente à parábola no ponto $(0, 0)$.

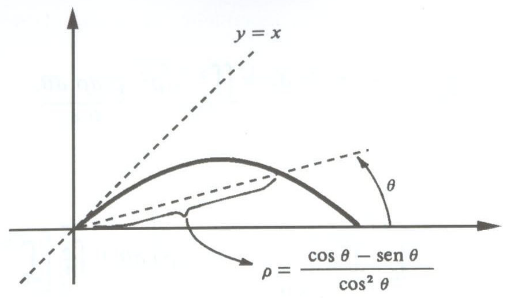


B é o conjunto hachurado. Vamos fazer uma mudança de variáveis para coordenadas polares. Vejamos como fica, em coordenadas polares, a equação $y = x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\rho \operatorname{sen} \theta = \rho \cos \theta - \rho^2 \cos^2 \theta$$

e, portanto,

$$\rho = \frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$



Observe que para cobrir o gráfico de $y = x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, θ deve variar de 0 a $\frac{\pi}{4}$. Fica a seu cargo verificar que

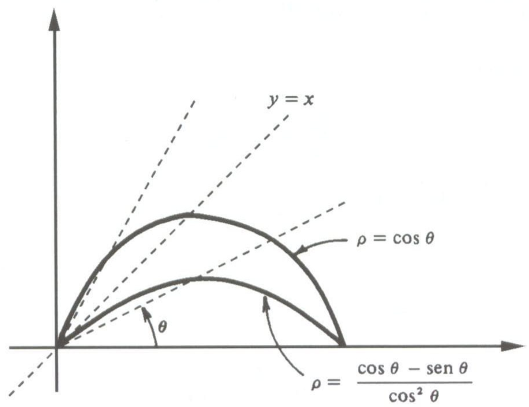
$$\rho = \cos \theta$$

é a equação, em coordenadas polares, da circunferência $x^2 + y^2 - x = 0$.

Para cobrir o conjunto B, θ deverá variar de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Para cada θ fixo em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ρ deverá variar de

$$\frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{a} \quad \cos \theta.$$

Para cada θ fixo em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, ρ deverá variar de 0 a $\cos \theta$.



Temos

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \sqrt{\rho^2}\, \underbrace{\rho\, d\rho\, d\theta}_{dx\, dy}.$$

Segue que

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{\frac{\cos\theta - sen\,\theta}{\cos^2\theta}}^{\cos\theta} \rho^2\, d\rho \right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\cos\theta} \rho^2\, d\rho \right] d\theta.$$

Daí

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos^3\theta - \frac{(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)^3}{\cos^6\theta} \right] d\theta + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta.$$

Fica a cargo do leitor o cálculo das integrais do 2.° membro. (*Sugestão*:

$$\int \cos^3\theta\, d\theta = \int \cos\theta\,(1 - \text{sen}^2\,\theta)\, d\theta = \int (1-u^2)\,du \qquad (u = \text{sen}\,\theta);$$

$$-\int \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta = \int \frac{dv}{v^4} \qquad (v = \cos\theta);$$

$$\int \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^5\theta}\, d\theta = \int \sec^3\theta\,(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

(utilize a fórmula de recorrência mencionada no exemplo anterior);

$$-\int \frac{\text{sen}^3\,\theta}{\cos^6\theta}\, d\theta = -\int \frac{\text{sen}\,\theta\,(1-\cos^2\theta)}{\cos^6\theta}\, d\theta = \int \frac{1-v^2}{v^6}\, dv \quad (v = \cos\theta).)$$ ■

EXEMPLO 8. Calcule

$$\iint_B x^2\, dx\, dy$$

onde B é o conjunto $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

Solução

Façamos a mudança de variáveis

① $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ 2y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2}\,\rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Temos

$$\frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(\theta, \rho)} = \begin{vmatrix} -\rho\,\text{sen}\,\theta & \cos\theta \\ \frac{1}{2}\,\rho\cos\theta & \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta \end{vmatrix} = -\frac{\rho}{2}.$$

Assim,

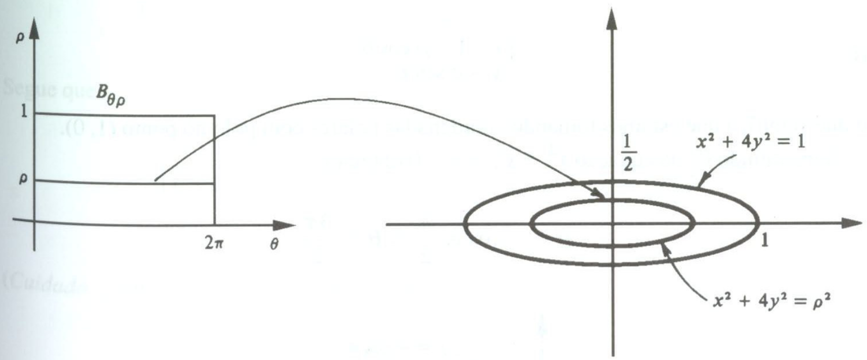
$$\left| \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(\theta, \rho)} \right| = \frac{\rho}{2}$$

isto é, o módulo do determinante jacobiano é igual a $\dfrac{\rho}{2}$.

A mudança de variáveis ① transforma o retângulo

$$B_{\theta\rho} = \{(\theta, \rho) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq 1\}$$

no conjunto B dado.



Observe que, para cada ρ fixo no intervalo $[0, 1]$, a mudança de variáveis ① transforma o segmento

$$\{(\theta, \rho) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

na elipse

$$x^2 + 4y^2 = \rho^2.$$

Temos, então,

$$\iint_B x^2\, dx\, dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \rho^2 \cos^2\theta \underbrace{\left(\frac{\rho}{2}\, d\rho\, d\theta\right)}_{dx\, dy}$$

e, portanto,

$$\iint_B x^2\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

■

EXEMPLO 9. Calcule

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

onde B é o círculo $x^2 + y^2 - x \leq 0$.

Solução

$$2x - x^2 - y^2 = 1 - (x-1)^2 - y^2$$

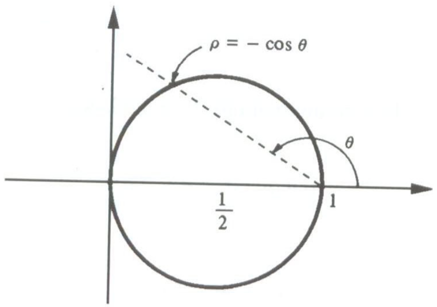
Façamos

① $$\begin{cases} x - 1 = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

o que significa que estamos tomando coordenadas polares com pólo no ponto $(1, 0)$.

Substituindo ① na equação $x^2 + y^2 - x = 0$ obtemos

$$\rho = -\cos\theta,\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$



Para cada θ fixo em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ρ deverá variar de 0 a $-\cos\theta$. $\left(\text{Observe que } -\cos\theta \geq 0 \text{ em } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].\right)$

Temos

$$dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Então

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \iint_{B_{\theta\rho}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

e, portanto,

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\int_0^{-\cos\theta} \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\right] d\theta.$$

Para calcular $\int \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho$ façamos a mudança de variável $u = 1 - \rho^2$ e, portanto, $du = -2\rho\, d\rho$. Então

$$\int \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}[\sqrt{1-\rho^2}\,]^3.$$

Segue que

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dx\, dy = -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [|\operatorname{sen}\theta|^3 - 1]\, d\theta.$$

(*Cuidado.* $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = |\operatorname{sen}\theta|$.) Temos, então,

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\operatorname{sen}\theta|^3\, d\theta.$$

Para calcular a integral que ocorre no 2.° membro procedemos da seguinte forma:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\operatorname{sen}\theta|^3\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$$

pois,

$$|\text{sen}\ \theta| = \begin{cases} \text{sen}\ \theta & \text{em} \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -\ \text{sen}\ \theta & \text{em} \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Observando que $\text{sen}^3\ \theta = \text{sen}\ \theta\,(1 - \cos^2\ \theta)$, temos

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}^3\ \theta\ d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\text{sen}\ \theta - \text{sen}\ \theta \cos^2\ \theta\right] d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3}$$

e

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}^3\ \theta\ d\theta = -\frac{2}{3}.$$

Conclusão.

$$\iint_B \sqrt{2x - x^2 - y^2}\ dx\ dy = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 4.2

1. Calcule

a) $\iint_B (x^2 + 2y)\, dx\, dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

b) $\iint_B (x^2 + y^2)\ dx\ dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

c) $\iint_B x^2\ dx\, dy$ onde B é o conjunto $4x^2 + y^2 \leqslant 1$.

d) $\iint_B \text{sen}\,(4x^2 + y^2)\, dx\, dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $y \geqslant 0$.

e) $\iint_B e^{x^2 + y^2}\ dx\ dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $-x \leqslant y \leqslant x$, $x \geqslant 0$.

f) $\iint_B \frac{\sqrt[3]{y - x}}{1 + y + x}\, dx\, dy$ onde B é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

g) $\iint_B x\ dx\ dy$ onde B é o conjunto, no plano xy, limitado pela cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$.

h) $\iint_B \frac{e^{y - x^2}}{y - x^2}\, dx\, dy$ onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $1 + x^2 \leqslant y \leqslant 2 + x^2$, $y \geqslant x + x^2$ e $x \geqslant 0$.

i) $\iint_B x\ dx\ dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 - x \leqslant 0$.

j) $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\ dx\, dy$ onde B é o quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

k) $\iint_B y^2\ dx\, dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant x \text{ e } x \geqslant 0\}$.

l) $\iint_B (2x + y)\ \cos\ (x - y)\ dx\ dy$ onde B é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Passe para coordenadas polares e calcule

a) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\ dy\right] dx.$

b) $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{x - x^2}} x\ dy\right] dx.$

c) $\int_0^1 \left[\int_{1 - \sqrt{1 - x^2}}^{1 + \sqrt{1 - x^2}} xy\ dy\right] dx.$

d) $\int_0^a \left[\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\ dy\right] dx \quad (a > 0).$

e) $\int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dy\right] dx \quad (a > 0).$

f) $\iint_B x\ dx\, dy$ onde B é a região, no plano xy, limitada pela curva (dada em coordenadas polares) $\rho = \cos 3\theta$, $-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.

g) $\iint_B dx\ dy$ onde B é a região, no plano xy, limitada pela curva (em coordenadas polares) $\rho = \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{8} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$.

h) $\iint_B xy\, dx\, dy$ onde B é o círculo $x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0$, $x \geqslant 0$.

3. Calcule $\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\ dx\ dy$ onde B é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Calcule a área da região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0 \text{ e } b > 0)$.

5. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x^2 \leqslant y \leqslant 2 + x^2, x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant x + x^2\}$ e $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ v \geqslant u \text{ e } u \geqslant 0\}$.

a) Verifique que $B = \varphi\,(A)$ onde $(u, v) = \varphi\,(x, y)$, com $u = x$ e $v = y - x^2$.

b) Verifique que a área de A é igual à área de B.

6. Seja B o conjunto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a > 0$ e $b > 0$. Verifique que

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = ab \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho\, f(a\rho \cos \theta,\, b\rho \operatorname{sen} \theta)\, d\rho \right] d\theta.$$

7. Seja B o conjunto $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2$ ($r > 0$, α e β reais dados). Verifique que

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \rho\, g(\theta, \rho)\, d\rho \right] d\theta$$

onde $g(\theta, \rho) = f(x, y)$, $x = \alpha + \rho \cos \theta$ e $y = \beta + \rho \operatorname{sen} \theta$.

8. Considere a função $g(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ onde $f(u)$ é uma função de uma variável real a valores reais, contínua em $[a, b]$, $0 \leq a < b$, e tal que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja B o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq g(x, y)\}$$

a) Verifique que B é gerado pela rotação em torno do eixo z do conjunto

$$\{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ y = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq f(x)\}$$

b) Utilizando coordenadas polares mostre que o volume de B é

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

c) Compare com a fórmula estabelecida na Seção 13.2 do Vol. 1, 5.ª edição.

4.3. Massa e Centro de Massa

Seja $B \subset \mathbb{R}^2$, B compacto e com fronteira de conteúdo nulo. Imaginemos B como uma chapa delgada. Por uma *função densidade superficial de massa* associada a B entendemos uma função $\delta : B \to \mathbb{R}$, contínua e positiva, tal que, para todo $B_1 \subset B$,

$$\boxed{\text{massa de } B_1 = \iint_{B_1} \delta(x, y)\, dx\, dy}$$

desde que a integral exista. Assim, se $\delta(x, y)$ é uma função densidade superficial de massa associada a B, então

$$\boxed{\text{massa de } B = \iint_B \delta(x, y)\, dx\, dy}$$

Se $\delta(x, y)$ for constante e igual a k, então a massa de B será igual ao produto de k pela área de B. Diremos, neste caso, que a chapa é *homogênea*; caso contrário, diremos que a chapa é *não-homogênea*.

Seja B_1 um retângulo contido em B; pelo teorema do valor médio, existe $(s, t) \in B_1$ tal que

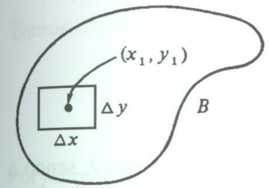
$$\iint_{B_1} \delta(x, y)\, dx\, dy = \delta(s, t) \text{ área de } B_1$$

ou seja,

$$\delta(s, t) = \frac{\text{massa de } B_1}{\text{área de } B_1}$$

Assim, $\delta(s, t)$ é a *densidade superficial média* (massa por unidade de área) de B_1. Seja, agora, (x_1, y_1) um ponto qualquer de B_1 e suponhamos que os lados de B_1 sejam suficientemente pequenos. Tendo em vista a continuidade de δ

$$\delta(x_1, y_1) \cong \frac{\text{massa de } B_1}{\text{área de } B_1}.$$



$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta m \cong \delta(x_1, y_1)\, \Delta x\, \Delta y \\ \text{onde } \Delta m \text{ é a massa do retângulo } B_1 \text{ de lados } \Delta x \text{ e } \Delta y.\end{array}}$$

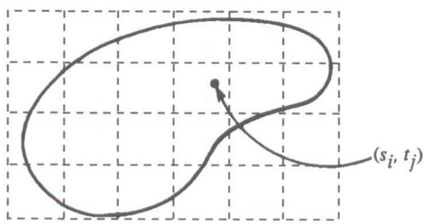
Pela definição de integral, temos:

$$\text{massa de } B = \iint_B \delta(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta(s_i, t_j)\, \Delta x_i \Delta y_j.$$

É comum referir-se a $dm = \delta(x, y)\, dx\, dy$ como *elemento de massa*. Escreveremos, então,

$$\boxed{\text{massa de } B = \iint_B dm}$$

Vamos, agora, definir *centro de massa* de B. Tomemos, inicialmente, uma partição de B. Em cada retângulo R_{ij} ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$) tomemos um ponto (s_i, t_j). A massa de R_{ij}



será aproximadamente $\delta(s_i, t_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$ (lembre-se de que devemos tomar $\delta(s_i, t_j) = 0$ se (s_i, t_j) não pertencer a B). Concentremos, agora, toda a massa de R_{ij} no ponto (s_i, t_j). O centro de massa do sistema obtido é, conforme aprendemos no Vol. 1, 5.ª edição, o ponto $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$ onde