Teorema Sejam S um conjunto não vazio e R uma equivalência em S.

Então S/R é uma partição em S.

Dem.

$S/R \subseteq \mathcal{P}(S)$.

$\forall x \in S$, $\underbrace{x \in x/R}_{\text{pela prop. refl. de } R}$ então $x/R \neq \emptyset \quad \forall x/R \in S/R$.

$$S \supseteq \bigcup S/R = \bigcup_{x/R \in S/R} x/R = \bigcup_{x \in S} x/R \supseteq \bigcup_{x \in S} \{x\} = S$$

pois é uma união de subconj. de S $\quad$ Logo $\bigcup S/R = S$.

Sejam $x/R, y/R \in S/R$. Se $x/R \neq y/R$, pela prop. ant.$^{(1)}$, $x \not R y$ e, então, pela (2) da prop. ant., $x/R \cap y/R = \emptyset$.

Então S/R é uma partição em S.

Se $S \neq \emptyset$ é um conjunto e R é equivalência em S,
então $S/_R$ é uma partição em S.

Prop. Seja $S \neq \emptyset$ um conjunto e seja P uma partição em S.
Então existe uma equivalência R em S t.q. $S/_R = P$.

Dem.

Seja $R \subseteq S^2$ definido como segue:

$\forall x,y \in S$, xRy (ou $(x,y) \in R$) sse $\exists X \in P$ t.q. $x,y \in X$.

$\forall x \in S$, como $\bigcup P = S$, então $\exists X \in P$ t.q. $x \in X$. Logo xRx e R é reflexiva.

A propriedade simétrica é óbvia.

Sejam $x,y,z \in S$ t.q. xRy e yRz. Por def., $\exists X, Y \in P$ t.q. $x,y \in X$ e $y,z \in Y$. Então $y \in X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$, porém P é uma partição. Logo $X = Y$ e isso implica que $x,z \in X$. Segue xRz e, portanto, a propr. transitiva.

R é equivalência.

- - - - - - - - - - - -

$\boxed{\supseteq}$ Seja $X \in P$. Como $X \neq \emptyset$, $\exists x \in X$. É óbvio que $X \subseteq x/_R$. Por outro lado, se $y \in x/_R$, existe $Y \in P$ t.q. $x, y \in Y$ e isso implica que $x \in X \cap Y$, ou seja, que $X \cap Y \neq \emptyset$. De novo, sendo P uma partição, isso implica $X = Y$. Logo, $y \in X$ e, então, $x/_R \subseteq X$. Segue $x/_R = X$ e, portanto $P \subseteq S/_R$. $\boxed{\text{Q.E.D}}$.

Para provar que $S/R = P$, iremos demonstrar as duas inclusões: $S/R \subseteq P$ e $S/R \supseteq P$.

$\boxed{\subseteq}$ Seja $x \in S$ e consideremos a classe x/R. Como P é uma partição, $\exists X \in P: x \in X$. $\forall y \in X$, pela definição de R, $x R y$ e, então, $y \in x/R$. Logo, $X \subseteq x/R$.

Seja $y \in x/R$. Pela def. de R, $\exists Y \in P$ t.q. $x, y \in Y$. Segue que $x \in X \cap Y$ e $X \cap Y \neq \phi$, mas P é partição. Portanto $X = Y$.

Segue que $y \in X$ $\forall y \in x/R$ e, então, $x/R \subseteq X$. Logo $x/R = X$.

Tudo isso prova que $\forall x \in S$, $x/R \in P$, ou seja, $S/R \subseteq P$.

Ex. Sejam S e T conjuntos não vazios e seja $f: S \to T$ uma função. Seja $\ker f$ a relação binária em S definida por:

$x \ker f\, y$ sse $f(x) = f(y)$.

$\forall x \in S$, $f(x) = f(x)$ e, então $x \ker f\, x$ e $\ker f$ é reflexiva.

$\forall x, y \in S$, se $x \ker f\, y$ então $f(x) = f(y)$. Segue que $f(y) = f(x)$ e, então, $y \ker f\, x$. $\ker f$ simétrica.

$\forall x, y, z \in S$, se $x \ker f\, y$ e $y \ker f\, z$, então $f(x) = f(y)$ e $f(y) = f(z)$. Isso implica $f(x) = f(z)$, ou seja, $x \ker f\, z$ e, então, $\ker f$ é transitiva.

$\ker f$ é equivalência.

Observação importante

Se S/R é um conjunto quociente e pretendo definir uma função de domínio S/R, digamos $f: S/R \to T$, preciso me certificar de que a definição de cada $f(x/R)$ não dependa do representante escolhido para x/R.

Em outras palavras, preciso ter certeza de que $f(x/R) = f(x'/R)$ se $x/R = x'/R$, isto é, se $x R x'$.

<u>Teorema</u> Sejam S, T conjuntos não vazios, $f : S \to T$ uma função e f' definida da maneira seguinte:

$$\forall x \in S, \quad f'\left(x/_{\ker f}\right) = f(x).$$

Então $f' : S/_{\ker f} \to \operatorname{Im} f$ é uma função bijetora.

Dem. Vamos provar que f' é bem definida.

Sejam $x, y \in S$ t.q. $x \ker f\, y$. Por definição, $f(x) = f(y)$ e, então $f'\left(x/_{\ker f}\right) = f(x) = f(y) = f'\left(y/_{\ker f}\right)$. Logo f' é uma função bem definida. $f' : S/_{\ker f} \to \operatorname{Im} f$

$\forall z \in \operatorname{Im} f$, $\exists x \in S$ t.q. $f(x) = z \Rightarrow f'\left(x/_{\ker f}\right) = z$. Logo $\forall z \in \operatorname{Im} f$ $\exists\, x/_{\ker f} \in S/_{\ker f}$ t.q. $f'\left(x/_{\ker f}\right) = z$, ou seja, f' é sobrejetora.

Sejam $x/_{\ker f}, y/_{\ker f} \in S/_{\ker f}$ t.q. $f'\left(x/_{\ker f}\right) = f'\left(y/_{\ker f}\right)$.

Então, por definição $f(x) = f'\left(x/_{\ker f}\right) = f'\left(y/_{\ker f}\right) = f(y)$, mas isto, pela def. de $\ker f$, implica $x \ker f\, y$ e, portanto, $x/_{\ker f} = y/_{\ker f}$. Logo, f' é injetora e, então, bijetora.

$\square$

Sejam $S \neq \emptyset$ conjunto e R equiv. em S.

A função $\pi_R : x \in S \mapsto x/R \in S/R$

$\pi_R : S \to S/R$ é função def. por $\pi_R(x) = x/R$ $\forall x \in S$.

π_R é sempre sobrejetora (dem. por exercício) e é chamada "projeção natural" (ou canônica) de S sobre S/R.

Seja A o conjunto de todos e apenas os conjuntos que não pertencem a si mesmo.

$A \in A$?

$$\left.\begin{array}{l} A \in A \Rightarrow A \notin A \\ A \notin A \Rightarrow A \in A \end{array}\right] \text{ contradição !}$$

Paradoxo do mentidor, do barbeiro, de Epiménides, de Russell

Aritmética de Peano

Símbolos lógicos:

- conectivos: $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (implicação, conjunção, disjunção, negação)
- quantificadores: $\forall$, $\exists$ (universal e existencial)
- $x_1, x_2, \ldots, y, z \ldots$ variáveis
- (,)

$x \Leftrightarrow y$ que é $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$

Símbolos da teoria dos conjuntos: $\emptyset$, $\in$, $\subseteq$ ...

Símbolos próprios da teoria de Peano:

- o símbolo funcional unário s,
- o símbolo de constante 0.