Revisão de Discreta

Pablo Hildo

Lembrete: Uma combinação/coeficiente binomial pode ser calculada usando a fórmula

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1 Princípio da Casa dos Pombos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet diz: **"Se temos n objetos para serem guardados em m gavetas e $n > m$ então pelo menos uma gaveta terá um ou mais objetos"**. Assim, na resolução dos problemas, se assume algo como os n objetos e outra coisa como as m gavetas.

Exemplo Uma caixa contém 3 tipos distintos de bolas (azuis, verdes,amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos 2 bolas da mesma cor?

Resposta Se temos 3 cores distintas de bolas e queremos ter 2 da mesma cor, então devemos retirar 4. Podemos associar as cores às casas dos pombos e as bolas retiradas aos pombos; assim teremos garantido que ao menos uma cor será retirada duas vezes.

A propriedade também vale para múltiplos de n. Podemos generalizar matematicamente dizendo que **"Se temos $nk+1$ objetos para serem guardados em n gavetas então pelo menos uma gaveta terá pelo menos $k+1$ objetos"**.

2 Soluções Inteiras de Uma Equação

Com o pretexto de calcular o número de soluções inteiras de uma equação, podemos fazer como visto no problema:

Exemplo Calcular o número de soluções inteiras positivas da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Resposta Cada solução da equação corresponde a uma lista de valores para x_1, x_2, x_3, x_4, sendo estes valores sempre maiores que 0. Podemos considerar alguns fatores:

1. O número 7 pode ser parcelado em números menores (1+1+1+1+1+1+1);
2. Podemos separar os fatores com separadores (como vírgulas), deixando separados por ela quatro grupos (ou seja, usando três vírgulas);
3. Existem 6 espaços que as vírgulas poderiam ocupar (os mesmos espaços que os sinais + ocupam).

A partir desses fatores, podemos concluir que devemos calcular de quantas formas podem ser distribuídas as três virgulas nos 6 espaços. Ou seja:

$$\binom{6}{3} = 20$$

Por generalização, concluímos que para calcular as soluções inteiras de uma equação podemos fazer o seguinte (sendo p o resultado e n o número de variáveis):

$$\begin{aligned} &\binom{p-1}{n-1} \qquad \text{(para positivas)} \\ \binom{n+p-1}{n-1} = &\binom{n+p-1}{p} \qquad \text{(para não negativas)} \end{aligned} \tag{1}$$

3 Relação de Stifel

Com $n, k \geq 0$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Em resumo: Tendo n do primeiro binômio igual a n do segundo binômio e k do primeiro binômio sendo antecessor de k do segundo, podemos considerar $\binom{n+1}{k_{maior}}$. Por exemplo:

$$\binom{20}{13} + \binom{20}{14} = \binom{21}{14}$$

Além disso, temos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

A partir disso, podemos concluir que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{n-k}$$

4 Triângulo de Pascal

A enésima linha do triângulo de pascal pode ser representada por

$$\binom{n}{k}$$

As arestas do triângulo de Pascal tem valor 1, ou seja:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Os elementos equidistantes tem o mesmo valor, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Qualquer elemento interno do triângulo pode ser obtido pela soma dos dois elementos acima dele, como visto na relação de Stifel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

A soma de todos valores da enésima linha é igual ao número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos. Ou seja:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Por proposição,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

Identidade de Vandermonde diz que com m, r, n, k naturais onde $r \leq m$ e $r \leq n$ e $0 \leq k \leq r$

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}$$

Relação de Lagrange diz que:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

5 Binômio de Newton

O binômio de Newton descreve que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Observação Para calcular os coeficientes de um binômio de Newton da forma $(x+y)^n$ podemos simplesmente utilizar a linha n do triângulo de pascal. Por exemplo, $(x+y)^5$ tem coeficientes da linha 5 do triângulo de pascal, sendo igual a $1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

6 Números de Stirling de Segunda Ordem

Números de Stirling de Segunda Ordem podem ser definidos recursivamente:

$$\begin{aligned}
S_{n,k} &:= 0; \text{ se } n < k \\
S_{0,k} &:= 0; \text{ se } k < 0 \\
S_{n,0} &:= 0; \text{ se } n > 0 \\
S_{n,n} &:= 1; \text{ se } n \geq 0 \\
S_{n,k} &:= S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}; \text{ se } n < k
\end{aligned}$$

E podem ser denotados como

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

Observação O Número de Stirling de Segunda Ordem é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia"; ou seja, "existem quantas maneiras de partir um conjunto com n elementos em k subconjuntos disjuntos?"

Com n, k naturais e $k \leq n$ e A sendo um conjunto com n elementos,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \qquad \text{é o número das k-partições de A}$$

Observação Para distribuir n objetos em k caixas, sem nenhuma vazia, temos:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

7 Números de Stirling de Primeira Ordem

Números de Stirling de Primeira Ordem são similares aos de segunda ordem, mas representam distribuições **circulares**.

Também podem ser definidos recursivamente:

$$\begin{aligned}
P_{n,k} \coloneqq& 0;\ \text{se } n < k \\
P_{0,k} \coloneqq& 0;\ \text{se } k < 0 \\
P_{n,0} \coloneqq& 0;\ \text{se } n > 0 \\
P_{n,1} \coloneqq& (n-1)!; \\
P_{n,n} \coloneqq& 1;\ \text{se } n \geq 0 \\
P_{n,k} \coloneqq& P_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot P_{n-1,k}
\end{aligned}$$

E podem ser denotados como

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Com n, k naturais e $k \leq n$ e A sendo um conjunto com n elementos,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$