Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 26/03/2019

Lógica de Predicados - Definição

Consideremos as seguintes sentenças:

- "O aluno x gosta de estudar Matemática Discreta."
- "A Linguagem de Programação x é de alto nível."
- "$x + y > 10$."

Como representá-las utilizando a Lógica Proposicional?
Como determinar os valores verdade de cada uma delas utilizando o Cálculo Proposicional?

Observação.1: As sentenças não podem ser simbolizadas adequadamente através de símbolos proposicionais, parênteses e conectivos lógicos. Assim, não conseguiremos utilizar Cálculo Proposicional para determinar o valor verdade.

Observação.2: As sentenças contêm novos elementos: VARIÁVEIS e PREDICADOS.

EXEMPLO:
"Todos os Alunos de MATA42 fizeram a primeira avaliação."
"Isa é aluna de MATA42, logo ela fez a primeira avaliação."

Definição: VARIÁVEL

Uma VARIÁVEL é o sujeito da sentença.
Notação: $x, y, z, \cdots$; ou seja, utilizamos as letras minúsculas.

Observação: As variáveis servem para estabelecer de forma *genérica* fatos a respeito de OBJETOS de um determinado contexto de discurso.

Definição: PREDICADO

Um PREDICADO é a propriedade que o sujeito da sentença pode assumir.
Notação: $P(x)$ "predicado que a variável x pode assumir".
$P(x)$ é também denominada "FUNÇÃO PROPOSICIONAL em x".

Observação: Dizemos que os **predicados unários** são aqueles que envolvem propriedades de uma única variável $P(x)$, os **predicados binários** são aqueles que envolvem propriedades de duas variáveis $P(x, y)$ e os **predicados** n**-ários** são aqueles que envolvem propriedades de n variáveis $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

"A Linguagem de Programação x é de alto nível."

VARIÁVEL: "A Linguagem de Programação x"

PREDICADO: "é de alto nível"

OBJETO: "C^{++}"; $P(x) = P(C^{++})$

"O aluno x estudou mais para a prova de Matemática Discreta que o aluno y."

VARIÁVEIS: "Alunos x e y"

PREDICADO: "x estudou mais para a prova de Matemática Discreta que y".

OBJETOS: "Paulo e Isa"; $P(x, y) = P(Paulo, Isa)$

"$x + y > 3z$."

VARIÁVEIS: "x, y, z"

PREDICADO: "$x + y > 3z$"

OBJETOS: "8, 5, 4"; $P(x, y, z) = P(8, 5, 4)$.

Quantificador Universal: $\forall$

O QUANTIFICADOR UNIVERSAL estabelece um predicado para TODOS os objetos de um determinado conjunto, sem a necessidade de enumerá-los explicitamente.
Notação: $\forall$
lê-se: "para todo", "para todos", "para cada", "para qualquer", "qualquer que seja", "dado qualquer" .

Exemplo.1: "Para todo x tal que x é maior que zero".
Utilizando as respectivas notações, temos a seguinte expressão:
$(\forall x)P(x)$ ou $\forall x(P(x))$ ou $\forall x, P(x)$ ou $\forall x|P(x)$;
onde, $P(x)$: $x > 0$.
Exemplo.2:
"Todo calouro da UFBa matricula-se em Matemática Discreta".
$(\forall x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em Matemática Discreta.

Quantificador Existencial: $\exists$

O QUANTIFICADOR EXISTENCIAL estabelece um predicado para UM OU MAIS objetos de um determinado conjunto, sem a necessidade de identificá-lo(os) explicitamente.

Notação: $\exists$

lê-se: "existe um", "para pelo menos um", "para algum"

Exemplo.1: $(\exists x)(x > 0)$; (lê-se: "existe pelo menos um x tal que x é maior que zero".)

Exemplo.2:

"Existem calouros da UFBa matriculados em Matemática Discreta".

$(\exists x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em Matemática Discreta.

Observação: O quantificador existencial pode restringir o predicado a um ÚNICO objeto. Neste caso, utilizamos a notação $\exists!$;
(lê-se: "existe um único x", "para um único x")
Exemplo: "Existe um único calouro da UFBa matriculado em Matemática Discreta";
$\exists! x : P(x)$.

Domínio de Interpretação e Valor Verdade

O Valor Verdade da expressão quantificada depende do "**Domínio de Interpretação**" (ou "*Conjunto Universo*"); ou seja, depende do domínio dos objetos sob os quais estamos interpretando a expressão.

Exemplo.1: "Para todo x tal que x é maior que zero".
$\forall x | P(x)$; onde, $P(x)$: $x > 0$.

- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}_+$, "conjunto dos inteiros positivos", o valor verdade é **V** pois qualquer valor de x no domínio será $x > 0$.
- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, "conjunto dos números inteiros", o valor verdade seria **F** pois nem todo x no domínio será positivo.

Lógica de Predicados - Domínio de Interpretação

Exemplo.2:
"Todo calouro da UFBa matricula-se em Matemática Discreta".
$(\forall x)P(x)$ onde, $P(x)$: Matricular-se em Matemática Discreta.

- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO = "curso de Ciência da Computação da UFBa", o valor verdade é **V** pois qualquer calouro x no domínio matricula-se em Matemática Discreta.
- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO = "curso de Estatística da UFBa", o valor verdade seria **F** pois nem todo calouro x no domínio matricula-se em Matemática Discreta.

Exemplo.3: $(\exists x)(x > 0)$;

- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}$, o valor verdade será **V**.
- Se o DOMÍNIO DE INTERPRETAÇÃO $= \mathbb{Z}_{-}$, o valor verdade será **F**.

Lógica de Predicados - Domínio de Interpretação

Exemplo.4: $(\exists! x)(x^2 - 1 = 0)$;

- Se o Domínio de Interpretação $= \mathbb{N}$, o valor verdade será **V**.
- Se o domínio de interpretação $= \mathbb{Z}$, o valor verdade será **F**.

Exemplo.5: $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$; onde a propriedade $Q(x, y) : x < y$;
(lê-se: "para qualquer x existe y tais que $x < y$".)

- Domínio de Interpretação $= \mathbb{Z}$, o valor verdade é **V**.

Exemplo.6: $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$; onde a propriedade $Q(x, y) : x < y$;
(lê-se: "existe y para qualquer x tais que $x < y$".)

- Domínio de Interpretação $= \mathbb{Z}$, o valor verdade é **F**.

Lógica de Predicados - Valor Verdade

Sentença	Verdade
$\forall x P(x)$	Verdade para qualquer x
$\exists x P(x)$	existe ao menos um x para o qual $P(x)$ é Verdade

Sentença	Falsidade
$\forall x P(x)$	existe ao menos um x para o qual $P(x)$ é Falso
$\exists x P(x)$	$P(x)$ é Falso para qualquer x

Leis de De Morgan	para Quantificadores
Sentença	Negação
$\forall x P(x)$	$\exists x(\neg P(x))$
$\exists x P(x)$	$\forall x(\neg P(x))$

Lógica de Predicados - Cálculo de Predicados

Observação: Na Lógica de Predicados podemos utilizar os conectivos lógicos: unário($\neg$) e binários($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$), para obtermos as FÓRMULAS BEM FORMADAS PREDICADAS seguindo as regras:

- Se P é uma fbf então $\neg P$ também será.
- Se P e Q são fbfs então $P \wedge Q$ também será.
- Se P e Q são fbfs então $P \vee Q$ também será.
- Se P e Q são fbfs então $P \rightarrow Q$ também será.
- Se P e Q são fbfs então $P \leftrightarrow Q$ também será.
- Se P é uma fbf e x uma variável então $\forall x(P(x))$ também será.
- Se P é uma fbf e x uma variável então $\exists x(P(x))$ e $\exists! x(P(x))$também será.

"Uma fbf será VÁLIDA se, e somente se, ela é verdadeira para todas as interpretações possíveis".

Lógica de Predicados - Cálculo de Predicados

Seja a **fbf predicada**: $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$

$P(x)$ é a propriedade de x ser par;
e o domínio de interpretação $= \mathbb{Z}$.
lê-se: "Se (existe um inteiro par) então (todo inteiro é par)".
Neste caso, o Valor Verdade do antecedente da condicional é Verdadeiro(**V**);
e o Valor Verdade do consequente da condicional é Falso (**F**).
Logo, dizemos que a **fbf predicada** não é **válida**, ou seja, o seu Valor Verdade é **F**.

Seja a **fbf predicada**: $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$

$P(x)$ é a propriedade de x ser par;
e o domínio de interpretação $= \mathbb{Z}$.
lê-se: "Se (todo inteiro é par) então (existe um inteiro que é par)".
Neste caso, o Valor Verdade do antecedente da condicional é Falso(**F**); e o Valor Verdade do consequente da condicional é Verdadeiro (**V**).
Assim, a **fbf predicada** é **válida**, ou seja, o seu Valor Verdade é **V**.

Exemplo: "Agumento Válido"

Prove a validade do argumento abaixo, utilizando a lógica de predicados.
$\forall x(P(x)) \wedge (\forall x(P(x)) \rightarrow \forall x(R(x))) \rightarrow \forall x(R(x))$ Sejam as premissas:
P_1 :$\forall x(P(x))$
P_2 :$\forall x(P(x)) \rightarrow \forall x(R(x))$
e a conclusão:
Q :$\forall x(R(x))$
Provamos a validade do argumento utilizando a Regra de Inferência "Modus Ponens" em P_1 e P_2:

$P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

Argumentos Válidos

Exemplo: "Agumento Válido"

"Todo microcomputador tem uma porta serial. Alguns microcomputadores têm porta paralela. Portanto, alguns computadores têm ambas as portas serial e paralela."

Sejam as proposições:

M(x): *" x é um microcomputador. "*

S(x): *" x tem porta serial. "*

P(x): *" x tem porta paralela. "*

premissas:

$P_1 : (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))$;

$P_2 : (\exists x)(M(x) \wedge P(x))$,

conclusão:

$Q : (\exists x)(M(x) \wedge S(x) \wedge P(x))$.

"Como verificar a validade deste argumento utilizando as Regras de Inferência?"

Regras de Inferência - Argumentos Válidos

"Para provarmos os Argumentos ou verificar a sua Validade, temos quatro novas *Regras de Inferência* utilizadas para RETIRAR e INSERIR os quantificadores.

REGRA DE INFERÊNCIA	NOME	OBSERVAÇÃO
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(a)}$	Instanciação Universal	a específico
$\dfrac{P(a) \text{ para um } a \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x P(x)}$	Generalização Universal	a arbitrário
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(a) \text{ para algum elemento } a}$	Instanciação Existencial	a específico (e não conhecido)
$\dfrac{P(a) \text{ para algum elemento } a}{\therefore \exists x P(x)}$	Generalização Existencial	a específico (e conhecido)

Lógica de Predicados - Argumentos Válidos

Exemplo: "Agumento Válido": Prova

$(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x)) \wedge (\exists x)(M(x) \wedge P(x)) \rightarrow (\exists x)(M(x) \wedge S(x) \wedge P(x))$.

Prova:

1. $(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))$ **Hipótese**
2. $(\exists x)(M(x) \wedge P(x))$ **Hipótese**
3. $M(a) \wedge P(a)$ **(2),Instanciação existencial; a é específico e não conhecido**
4. $M(a) \rightarrow S(a)$ **(1), Instanciação universal; a é arbitrário**
5. $M(a)$ **(3), Simplificação Conjuntiva**
6. $S(a)$ **(4) e (5), Modus Ponens**
7. $M(a) \wedge P(a) \wedge S(a)$ **(3) e (6)**
8. $M(a) \wedge S(a) \wedge P(a)$ **(7), Leis da Comutatividade**
9. $(\exists x)(M(x) \wedge S(x) \wedge P(x))$ **(8), Generalização existencial; a é específico e conhecido**

Regras de Inferência - Lógica de Predicados

Exemplo:

$(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x)) \wedge P(a) \rightarrow S(a)$.

Prova:

PREMISSAS:

P_1 : $(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x))$

P_2 : $P(a)$

CONCLUSÃO: $S(a)$

Prova:

1. $(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x))$ **Hipótese**
2. $P(a) \rightarrow S(a)$ **Instanciação Universal de (1)**
3. $P(a)$ **Hipótese**
4. $S(a)$ **(2) e (3) Modus Ponens**

Exemplo:

Mostre que as PREMISSAS: " *Todos na turma de Cálculo II já cursaram Cálculo I* " e " *João é um estudante na turma de Cálculo II* " implicam na CONCLUSÃO: " *João já cursou Cálculo I* ".

DECLARAÇÕES:
$F(x)$: " x está na turma de Cálculo II "
$C(x)$: " x já cursou Cálculo I "
PREMISSAS:
$(\forall x)(F(x) \to C(x))$
$F(João)$
CONCLUSÃO: $C(João)$
Prova:

1. $(\forall x)(F(x) \to C(x))$ **Hipótese**
2. $F(João) \to C(João)$ **Instanciação universal de (1)**
3. $F(João)$ **Hipótese**
4. $C(João)$ **(2) e (3) Modus Ponens**

Lógica de Predicados - Exercícios

1. Determine o valor lógico de cada uma das fbfs predicadas abaixo, cujo domínio de interpretação é $\mathbb{Z}$.
   - $\forall x[\exists y(x + y = 0)]$
   - $\exists y[\forall x(x + y = 0)]$
   - $\forall x[\exists! y(x + y = x)]$
   - $\exists! y[\forall x(x + y = x)]$
2. Use a lógica de predicado para provar o seguinte argumento: $[\exists x(T(x) \wedge \neg L(x)) \wedge \forall x(T(x) \rightarrow P(x))] \rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$.
3. Use a lógica de predicado para provar o seguinte argumento: $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\exists x(P(x))] \rightarrow \forall x(Q(x))$.

1. domínio de interpretação é $\mathbb{Z}$.
   - $\forall x[\exists y(x+y=0)]$ $y=0$(V)
   - $\exists y[\forall x(x+y=0)]$ $y=0$(F)
   - $\forall x[\exists! y(x+y=x)]$ $y=0$(V)
   - $\exists! y[\forall x(x+y=x)]$ $y=0$(V)
2. $[\exists x(T(x) \wedge \neg L(x)) \wedge \forall x(T(x) \to P(x))] \to \exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$.

   $P_1 : \exists x(T(x) \wedge \neg L(x))$ "Hipótese"

   $P_2 : \forall x(T(x) \to P(x))$ "Hipótese"

   $P_3 : T(a) \wedge \neg L(a)$ "Instanciação Existencial de P_1"

   $P_4 : T(a)$ "Simplificação de P_3"

   $P_5 : T(a) \to P(a)$ "Instanciação Universal" de P_2

   $P_6 : P(a)$ "Modus Ponens de P_4 e P_5"

   $P_7 : \neg L(a)$ "Simplificação de P_3"

   $P_8 : P(a) \wedge \neg L(a)$ "Conjunção de P_6 e P_7"

   $P_9 : \exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$ "Generalização Existencial de P_8"

1.
2.
3. $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\exists x(P(x))] \rightarrow \forall x(Q(x))$.
   $P_1 : \forall x[P(x) \vee Q(x)]$ "Hipótese"
   $P_2 : \neg[\exists x(P(x))]$ "Hipótese"
   $P_3 : \forall x(\neg P(x))$ "Negação de P_2"
   $P_4 : \neg P(a)$ "Instanciação Universal"
   $P_5 : P(a) \vee Q(a)$ "Instanciação Universal"
   $P_6 : Q(a)$ "Silogismo Disjuntivo de P_4 e P_5''

$P_7 : \forall x(Q(x))$ "Generalização Universal de P_6"