Exercicio I - Teoria dos Grafos

João Lucas Lima de Melo

Agosto 2022

Seja n $\in$ N. Dizemos que A $\subseteq$ [n] é livre de soma se para todo x, y $\in$ A temos que x + y $\notin$ A. Prove que se A $\subseteq$ [n] é livre de soma, então |A| $\leq \lceil$n/2$\rceil$.

Seja A livre de soma cuja cardinalidade seja descrita por |A| $> \lceil$n/2$\rceil$, m = max(A) e seja B = $\{m$ - a : $a \in A\}\backslash\{0\}$.
Como os elementos $b \in$ B estão sendo descritos em função de $m - a$, onde $m, a \in$ [n], é seguro afirmar que $\forall b \in$ B, $b \in$ [n].
Pode-se afirmar que para todo $a \neq m \in$ A existe um $b \in$ B. Logo, |A| - 1 = |B|.
Por hipótese, |A| $> \lceil$n/2$\rceil$. Para a prova, usaremos o menor elemento possível da inequação, assumindo um n par, onde não haveria arredondamento para cima.
Portanto, |A| = n/2 + 1.
Dessa forma:
|B| = |A| - 1
$\Leftrightarrow$ |B| = (n/2 + 1) - 1
$\Leftrightarrow$ |B| = n/2
Para um $b \in$ B e para m, $a \in$ A, temos:
$b = m - a, \forall a \in$ A
$\Leftrightarrow b + a = m$
Como A é livre de soma, não é possível existir um $b \in$ B somado a um $a \in$ A que resulte em um elemento $m \in$ A. Portanto, podemos afirmar $\forall b \in$ B, $b \notin$ A, onde A e B são conjuntos disjuntos entre si. Dessa forma, |[n]| = n $\geq$ |A| + |B|.
No entanto, analisando a cardinalidade dos conjuntos A e B, temos:
|A| + |B|
$\Leftrightarrow$ (n/2 + 1) + (n/2)
$\Leftrightarrow$ 2(n/2) + 1
$\Leftrightarrow$ n + 1 > n.
Haveria, portanto, um elemento pertencente simultaneamente a A e B, o que contradiz A ser livre de soma, descrito pela restrição $\forall b \in$ B, $b \notin$ A.
Portanto, sendo A um subconjunto de [n] livre de soma, |A| $\leq \lceil$n/2$\rceil$