Exercício 2 - Teoria dos Grafos

João Lucas Lima de Melo

Novembro 2022

Exercício 9:
Um desenho de um grafo G é uma função f definida por $V(G) \cup V(E)$ de tal forma que para todo vértice v haja um $f(v)$ e atribua à todas as arestas com extremos u, v uma representação visual $f(u), f(v)$.

Um grafo G é dito planar se pode ser desenhado sem que suas arestas atravessem uma às outras.

Faces de um grafo planar G são chamadas as regiões maximais de G que não contenham vértices usados na construção do desenho.

De acordo com a fórmula de Euler, um grafo planar conexo G possui exatamente n vértices, e arestas e f faces tais que $n - e + f = 2$. Além disso, se $l(f_i)$ denota o tamanho da face f_i em um grafo planar G, temos que $2E(G) = \Sigma l(f_i)$, onde o tamanho de uma face denota o tamanho total do passeio fechado em G sobre a face.

Para um grafo com $n \geq 3$ vértices, toda face terá ao menos 3 arestas. Nesse caso, $2E(G) = \Sigma f_i \geq 3f$.

Manipulando a fórmula de Euler, temos:
$\Leftrightarrow n - e + f = 2$
$\Leftrightarrow f = 2 - n + e$

Aplicando o resultado na fórmula de Euler, temos:
$\Leftrightarrow 2e \geq 3f$
$\Leftrightarrow 2e \geq 3(2 - n + e)$
$\Leftrightarrow 2e \geq 6 - 3n + 3e$
$\Leftrightarrow -e \geq 6 - 3n$
$\Leftrightarrow e \leq 3n - 6$

Agora, para um grafo com $n \geq 3$ vértices livre de triângulos, toda face terá ao menos 4 arestas. Dessa forma, $2E(G) = \Sigma f_i \geq 4f$.

Aplicando o resultado na fórmula de Euler, temos:

$\Leftrightarrow 2e \geq 4f$
$\Leftrightarrow 2e \geq 4(2 - n + e)$
$\Leftrightarrow 2e \geq 8 - 4n + 4e$
$\Leftrightarrow -2e \geq 8 - 4n$
$\Leftrightarrow e \leq 2n - 4$

Exercício 10:
Seja G um grafo planar simples com n vértices e m arestas. A quantidade m de arestas de G é dada por $\Sigma d(v) = 2e(G)$.

Para $n = 1$, segue que $\delta(G) = 0$. Para $n = 2$, $\delta(G) = 1$. Faremos a análise para $n \geq 3$, usando como referência o resultado obtido na questão anterior.

Vamos supor, por contradição, que o grau mínimo de G seja 6. Isso implica dizer que:
$\Leftrightarrow \Sigma d(v) = 2m$
$\Leftrightarrow 6n = 2m$
$\Leftrightarrow 3n = m$

No entanto, sendo G um grafo planar, temos que $m \leq 3n - 6$. O que é uma contradição.

Logo, para todo $v \in V(G)$, $d(v) \leq 5$.

Exercício 11: