Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 09/05/2019

Conjuntos - Cardinalidade

DEFINIÇÃO: (CARDINALIDADE)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que a CARDINALIDADE do conjunto A é o *número de elementos deste conjunto*.

NOTAÇÃO: $|A|$ ou $\#A$

EXEMPLOS:

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \#A = 5$; isto é, A possui 5 elementos.
- $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 1 \leq b < 21\} \Rightarrow \#B = 20$.

Cardinalidade - Conjuntos Equipotentes

DEFINIÇÃO: Conjuntos Equipotentes

Dizemos que dois conjuntos A e B possuem a mesma cardinalidade; ou seja, são EQUIPOTENTES se, e somente se, existe uma função bijetiva de A em B.

EXEMPLO: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{Maria, João, José, Mara, Isa\}$ e uma função $f : A \to B$;
f(1)= Maria, f(3)= João, f(5)= José, f(7)= Mara, f(9)= Isa.
Observe que f é bijetiva pois,

- f é UM PARA UM
  $\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f é SOBRE B.
  $Im(f) = B$; ou seja, $\forall b \in B, \exists a \in A; b = f(a)$.

Portanto, "A e B são EQUIPOTENTES".

DEFINIÇÃO: Conjuntos Finitos e Infinitos

Dizemos que um conjunto A é FINITO se, e somente se, $A = \emptyset$ ou existe uma função bijetiva $f : I_n \to A$; tal que $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, para um determinado $n \in \mathbb{N}^*$.
Caso contrário, dizemos que A é um conjunto INFINITO.

EXEMPLO: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, e $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.
Note que podemos definir um, a função $f : I_5 \to A$; $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8, f(5) = 10$.
Note que f é uma bijeção; logo, A é um conjunto FINITO.
Todavia, se definirmos uma função de $g : I_n \to B$;
g(1)=2, g(2)=4, g(3)=6, g(4)=8, g(5)=10, $\ldots, g(n) = 2n; n \in \mathbb{N}^*$;
temos que para um *determinado* valor de n, a função g é injetiva mas não é sobrejetiva; logo, g não é bijetiva e B é um conjunto INFINITO.

Motivação: (Hotel de Hilbert)

Um hotel possui um conjunto infinito enumerável de quartos. Certo dia, um grupo de k pessoas em excursão, chega ao hotel e solicita quartos para todos do grupo. O gerente, desculpando-se, diz que todos os quartos já estão ocupados. O chefe do grupo, então, explica ao gerente que como o hotel tem INFINITOS QUARTOS, basta, por exemplo, que o ocupante do quarto número 1 vá para o quarto de número $k+1$, o ocupante do quarto número 2 vá para o quarto de número $k+2, \cdots$, e assim por diante, o ocupante do quarto $k-1$ vá para o quarto de número $2k-1$, o ocupante do quarto k vai para o quarto $2k$. Ficarão k quartos livres que podem ser, então, ocupados pelos k elementos do grupo.

$$\begin{array}{llllll}
\text{OCUPANTES} & 1 & 2 & \ldots & k-1 & k \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad \Rightarrow 1\ 2\ 3\ \ldots\ k \\
\text{QUARTOS} & k+1 & k+2 & \ldots & 2k-1 & 2k \quad \text{QUARTOS LIVRES}
\end{array}$$

DEFINIÇÃO: Conjuntos Enumeráveis

Dizemos que um conjunto A é ENUMERÁVEL se, e somente se, A é finito ou existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to A$.
Caso contrário, dizemos que A é um conjunto NÃO-ENUMERÁVEL.

EXEMPLO: Sejam os conjuntos:

1. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; A é um conjunto FINITO; logo, é enumerável.
2. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} \subset \mathbb{N}$. A é um conjunto INFINITO e enumerável; pois podemos definir a seguinte função bijetiva: $f : \mathbb{N} \to A$; $f(n) = 2n$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
A: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & \cdots
\end{array}$$

PROPOSIÇÃO.1:

Subconjuntos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis.

Exemplo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

PROPOSIÇÃO.2:

Seja A um Conjunto infinito. Então, existe um subconjunto infinito enumerável próprio de A.

D] Seja A um conjunto infinito. Tomemos $x \in A$ arbitrário, e consideremos $B := A/\{x\}$. Obviamente, B ainda é infinito. Caso contrário, B finito, implicaria que A seria finito. O que seria um absurdo!
Agora, iniciando o processo de escolher o subconjunto infinito próprio de A, tome $x_1 \in B$ e observe que $B/\{x_1\}$ é infinito. Generalizando, tomamos agora $x_n \in B/\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}; \forall n \geq 2$. Assim obtemos o subconjunto infinito $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ próprio de A cujos elementos são enumeráveis.
Exemplo: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO.3:

Se $f : A \rightarrow B$ é uma função injetiva e B é enumerável, então A é enumerável.

D] Como B é enumerável existe uma função bijetiva $g : B \rightarrow \mathbb{N}$; e, considerando a função $f : A \rightarrow B$; temos,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{N}.$$

Podemos definir a função composta,

$$gof : A \rightarrow \mathbb{N}$$

que será também injetiva porque f e g são injetivas.
Observe que, pela proposição.1, $Im(gof) \subset \mathbb{N}$ é finito ou infinito enumerável.
Logo, a função $gof : A \rightarrow Im(gof)$ é bijetiva e assim, A é enumerável.

PROPOSIÇÃO.4:

Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva e A é enumerável, então B é enumerável.

D] Como A é enumerável existe uma função bijetiva $g : \mathbb{N} \to A$;
$a_1 = g(n_1), a_2 = g(n_2), \cdots$; e,
considerando a função sobrejetiva $f : A \to B$; temos, $\mathbb{N} \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$.
Podemos então definir a função composta,

$$fog : \mathbb{N} \to B$$

que será também sobrejetiva porque f e g são sobrejetivas; i.é,
$\forall b \in B; \exists n \in \mathbb{N}; f(g(n)) = f(a) = b$.
Agora, fog pode "não ser injetiva", e assim podemos ter para
$n_1 \neq n_2; fog(n_1) = fog(n_2) = b$; i.é,
$b = f(g(n_1)) = f(a_1), b = f(g(n_2)) = f(a_2), \cdots$
Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva então $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que; $b = f(a)$.
Agora, como f pode "não ser injetiva", podemos ter $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) = f(a_2) = b$.
Supondo que fog é também injetiva, vamos definir a função inversa
$(fog)^{-1} : B \to \mathbb{N}; \forall b \in B; (fog)^{-1}(b) = n$. Logo, a função $fog : \mathbb{N} \to B$ é bijetiva e assim, B é enumerável.

PROPOSIÇÃO.5:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

D] Vamos definir a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que; $(x, y) \to n = 2^x 3^y$. Pelo Teorema da Álgebra, sabemos que "todo número natural $n > 1$ se decompõe de maneira única como produto de fatores primos". Portanto, a função f é injetiva; e, utilizando o resultado da proposição.3 temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

PROPOSIÇÃO:.6

Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.

D] Se A e B são conjuntos enumeráveis, então existem funções bijetivas
$f : \mathbb{N} \to A; x \to f(x)$ e $g : \mathbb{N} \to B; y \to g(y)$.
Vamos agora definir uma função sobrejetiva:
$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ tal que; $(x, y) \to h(x, y) = (f(x), g(y))$.
Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável; pela proposição.4 temos que $A \times B$ é enumerável.

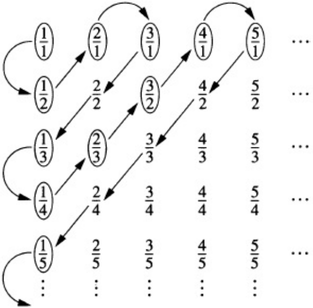
COROLÁRIO:

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

D] Vamos definir a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ tal que; $(x, y) \to \frac{x}{y}$.
Pela definição dos conjuntos dos racionais, temos que a função f definida é sobrejetiva. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável; pela proposição.4, $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.
Vamos considerar o conjunto $\mathbb{Q}^+$ e enumerar os seus elementos do seguinte modo,

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Utilizando o MÉTODO DA DIAGONAL DE CANTOR, na tabela acima,



vamos listar os elementos das diagonais cuja soma (numerador + denominador) são iguais, excluindo os termos iguais;

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}^+: & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \cdots
\end{array}$$

Conjuntos Enumeráveis

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}^+: & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \cdots
\end{array}$$

Agora, podemos incluir "*intercalando*" na bijeção acima, os elementos de $\mathbb{Q}^- \cup \{0\}$; a fim de enumerar todos os elementos do conjunto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
\mathbb{Q}: & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 2 & -3 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots
\end{array}$$

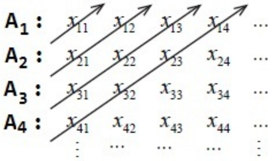
Observação: Notamos que os racionais negativos estão relacionados aos naturais ímpares; enquanto que os não-negativos estão relacionados aos naturais pares.

Conjuntos Enumeráveis

PROPOSIÇÃO.7:

Sejam os conjuntos enumeráveis $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m; m \in \mathbb{N}^*$. Então, a união destes conjuntos $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ é enumerável.

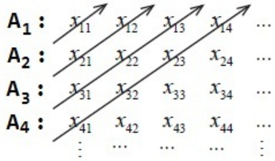
D] Considerando cada conjunto infinito enumerável $A_i; \forall i = 1, \cdots m$ com os elementos: $A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots\}$; podemos enumerar os elementos de cada conjunto A_i do seguinte modo,



PROPOSIÇÃO.7:

Sejam os conjuntos enumeráveis $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$; $m \in \mathbb{N}^*$. Então, a união destes conjuntos $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ é enumerável.

D] Considerando cada conjunto infinito enumerável $A_i; \forall i = 1, \cdots m$ com os elementos: $A_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots\}$; podemos enumerar os elementos de cada conjunto A_i do seguinte modo,



Seja $A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Vamos enumerar os elementos x_{ij} de A considerando na tabela acima os elementos cuja soma $i + j$ são iguais;

$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \cdots$

Vamos definir a função bijetiva $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to A$ tal que;

$(i, j) \to f((i, j)) = x_{ij}$.

PROPOSIÇÃO.8:

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável.

D] Vamos supor que $\mathbb{R}$ é um conjunto enumerável; pela proposição.1, se $\mathbb{R}$ é enumerável podemos tomar um subconjunto qualquer que também será enumerável: considerando o subconjunto $(0,1) \subset \mathbb{R}$ vamos definir uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ arbitrária; $\forall n \in \mathbb{N}$; escrevemos $f(n)$ em decimal; onde a_{ij} é a j-ésima casa decimal do i-ésimo número, $a_{ij} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}; \forall i,j \in \mathbb{N}$;

$f(0) := 0, a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\cdots$

$f(1) := 0, a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$f(2) := 0, a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$

$f(3) := 0, a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$

$\vdots$

$f(n) := 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$

$\vdots$

D] (continuação)
$a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}; \forall i, j \in \mathbb{N};$
$f(n) := 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots$
Agora, tomemos o número $x := 0, b_0b_1b_2 \cdots \in (0, 1)$ definido como:

$$b_n := \begin{cases} 1, \text{ se} & a_{nn} = 2 \\ 2, \text{ se} & a_{nn} \neq 2 \end{cases}$$

por exemplo, vamos supor:
$f(0) = 0, 23794102 \ldots$, $f(1) = 0, 44590138 \ldots$, $f(2) = 0, 09218764 \ldots$.
Então, $x = 0, b_0b_1b_2 \ldots = 0.121 \ldots$.
Considerando que cada número real tem uma representação *decimal única*, deduzimos que o número x não está na enumeração acima porque difere de todos os decimais definidos ($b_0 \neq a_{00}; b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \ldots$); ou seja, $x \in \mathbb{R}$; porém, $x \neq f(n); \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin Im(f)$. Assim, não conseguimos enumerar todos os elementos do conjunto $(0, 1)$ o que nos leva a concluir que $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

Exercícios - Conjuntos finitos e Infinitos

(1) Verifique se os conjuntos abaixo são enumeráveis ou não-enumeráveis. Em caso afirmativo, represente-os um para um em relação ao conjunto dos naturais, e, em caso negativo; justifique suas respostas.

   (a) O conjunto dos inteiros múltiplos de 5.
   (b) O conjunto dos inteiros pares negativos.
   (c) O conjunto dos inteiros maiores do que ou iguais 100.
   (d) O conjunto dos reais entre 0 e 2.
   (e) O conjunto dos inteiros divisíveis por 2 e 3.

(2) Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é enumerável.

(3) Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

(4) Sejam os conjuntos A e B. Mostre que se $A \subseteq B$ e A é não-enumerável então B é não-enumerável.

(5) Sejam os conjuntos A, B, C, D. Mostre que se A e B têm a mesma cardinalidade e C e D têm a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.