Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

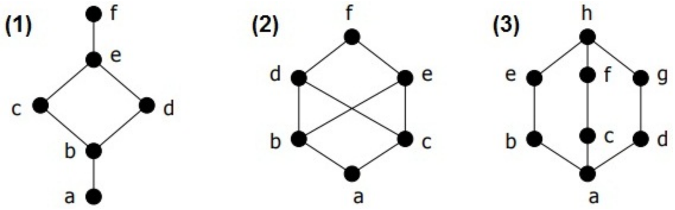
Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 07/05/2019

Definição:(RETICULADOS(*Lattices*))

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO. Dizemos que um conjunto A parcialmente ordenado, (POSET) $(A, \preccurlyeq)$, é um RETICULADO se, e somente se, todo par de elementos $\{x, y\} \in A$ possui um supremo e um ínfimo.

Notação: $\textbf{sup}(\{x, y\}) = x \vee y$ e $\textbf{inf}(\{x, y\}) = x \wedge y$.
Exemplos: Nos exemplos abaixo, temos que os POSETS (1) e (3) são reticulados, enquanto que o (2) não o é, pois não existe o $\textbf{sup}(\{b, c\})$.



Exemplos:

1. Seja $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid x \subseteq y\}$, e sejam dois subconjuntos quaisquer de A: E_1 e E_2. Então, o $\mathbf{sup}(\{E_1, E_2\}) = E_1 \cup E_2$ e o $\mathbf{inf}(\{E_1, E_2\}) = E_1 \cap E_2$. Logo, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado.
2. Seja $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid x \mid y\}$. Então, o $\mathbf{sup}(\{a, b\}) = a \vee b = mmc(a, b)$ e o $\mathbf{inf}(\{a, b\}) = x \wedge y = mdc(a, b)$ Logo, $(\mathbb{Z}^+, \mid)$ é um reticulado.

(1)

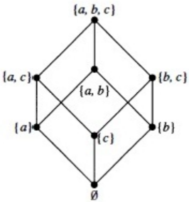


Diagrama de Hasse

A = {a,b,c}

(P(A) , ⊆) é um *Reticulado*

(2)

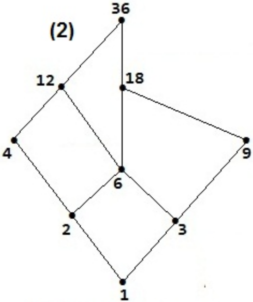


Diagrama de Hasse

A = {1,2,3,4,6,9,12,18,36}

(A, |) é um *Reticulado*

Conjunto Parcialmente Ordenado - Linearização

Definição:(Ordenação Topológica ou Linearização)

Seja A um conjunto finito não vazio PARCIALMENTE ORDENADO, $(A, \preccurlyeq)$. Denominamos "Ordenação Topológica(ou Linearização)" a construção de uma ordem total(linear) a partir do POSET A.

Lema: Todo POSET não vazio $(A, \preccurlyeq)$ tem, pelo menos, um elemento minimal.

Ordenação Topológica (ou Linearização): Seja A um poset com n elementos.

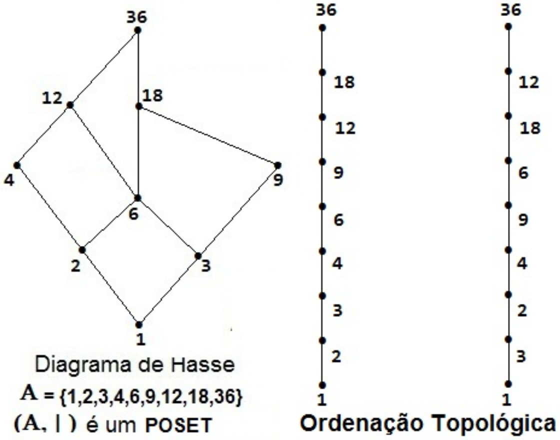
Construimos uma ordem total compatível com o poset $(A, \preccurlyeq)$ do seguinte modo,

1. Primeiro escolhemos um elemento minimal a_1; este existe pelo lema acima.
2. Agora $(A - \{a_1\}, \preccurlyeq)$ continua sendo um poset. Se $A - \{a_1\}$ for não vazio então podemos escolher um minimal a_2 deste poset.
3. Ainda temos um poset $(A - \{a_1, a_2\}, \preccurlyeq)$ do qual podemos remover um outro minimal, se este conjunto não for vazio.

   Repetimos o processo de remover minimais enquanto sobrar elementos.

   Como A é finito, o processo termina; e, obtemos uma **sequência de minimais** formando uma ordem total(linear): $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \ldots \prec a_n$

Exemplo:



36
12
18
4
9
6
2
3
1
Diagrama de Hasse
A = {1,2,3,4,6,9,12,18,36}
(A, |) é um POSET
36
18
12
9
6
4
3
2
1
36
12
18
6
9
4
2
3
1
Ordenação Topológica

Conjunto Parcialmente Ordenado - Linearização

Exercício: Determine uma ordem total(linear) compatível para o poset $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

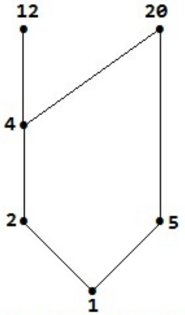


Diagrama de Hasse
POSET ({1,2,4,5,12,20}, |)

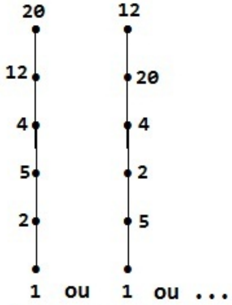


Diagrama de Hasse
Ordem Total

DEFINIÇÃO: (Funções)

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ e $f \subseteq A \times B$. Uma função de A em B é um terno (f, A, B) sendo f uma relação de A em B satisfazendo aos axiomas,

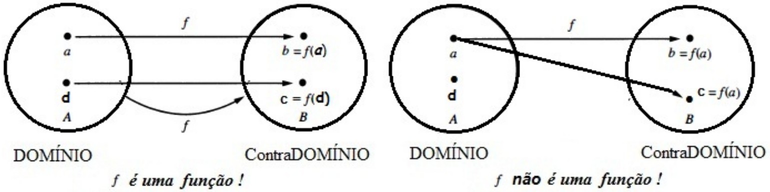
(i) $Dom(f) = A$; e

(ii) Se $\langle x, y\rangle \in f$ e $\langle x, z\rangle \in f$ então $y = z$; ou seja, f é "*unívoca*"

NOTAÇÃO:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to y = f(x) \end{aligned}$$

EXEMPLOS:



DEFINIÇÃO: (Domínio)

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que o conjunto $Dom(f) = A$ é o DOMÍNIO de f; ou seja, $\forall x \in A, \exists y \in B; f(x) = y$.

DEFINIÇÃO: (ContraDomínio)

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que o conjunto $Codom(f) = B$ é o CONTRA-DOMÍNIO de f.

DEFINIÇÃO: (Imagem)

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que o conjunto $Im(f) = \{y \in B \mid y = f(x)$, para algum $x \in A\} \subseteq Codom(f)$ é a IMAGEM de f.

DEFINIÇÃO:

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. A função (f, A, A) tal que

$$\begin{array}{rl} f: & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow x = f(x) \end{array}$$

é denominada FUNÇÃO IDENTIDADE em A.

NOTAÇÃO: Adotaremos neste caso, a seguinte notação "I_A", i.é.,

$$\begin{array}{rl} I_A: & A \rightarrow A \\ & x \rightarrow x = I_A(x) \end{array}$$

DEFINIÇÃO:

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ e $b \in B$ fixo. A função (f, A, B) tal que

$$\begin{array}{rl} f: & A \rightarrow B \\ & x \rightarrow b = f(x); \forall x \in A \end{array}$$

é denominada FUNÇÃO CONSTANTE.

Definição:

Sejam as funções (f, A, B) e (g, A, B). Dizemos que $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x); \forall x \in A$.

Definição:

Sejam as funções (f, A, B) e (g, C, D); tais que
$f(x) = g(x); \forall x \in A \cap C$.
Assim, a função união $h = f \cup g$ é definida por
$h: \quad A \cup C \to B \cup D$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in A \\ g(x), & \text{se} \quad x \in C \end{cases}$$

EXEMPLO:

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{se} \quad x > 5 \\ x^2 - 2, & \text{se} \quad -6 \leq x \leq 5 \\ 4 - 5x, & \text{se} \quad x < -6 \end{cases}$$

Então, por exemplo,

$f(-7) = 4 - 5(-7) = 39;$

$f(2) = (2)^2 - 2 = 2;$

$f(8) = 4(8) + 3 = 35.$

DEFINIÇÃO:

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que f é uma função INJETIVA (ou UM PARA UM) se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in A$, se
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
ou seja, $\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é injetora, pois, por exemplo: $f(-1) = f(1) = 1; x_1 = -1 \neq x_2 = 1$.
- A função $f(x) = x + 1$ é injetora, pois, para $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

DEFINIÇÃO:

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que f é uma função SOBREJETIVA (ou SOBRE B) se, e somente se, $Im(f) = B$; ou seja, $\forall y \in B, \exists x \in A; y = f(x)$.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é sobrejetora, pois, por exemplo: $\nexists x \in \mathbb{R}; f(x) = -1$; ou seja, $-1 \notin Im(f) \Rightarrow Im(f) \subset \mathbb{R}$.
- A função $f(x) = x + 1$ é sobrejetora, pois, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$; ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO:

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que f é uma função BIJETIVA se, e somente se, f é uma função INJETIVA e SOBREJETIVA.

EXEMPLOS:

- A função $f(x) = x^2$ não é injetora e não é sobrejetora; logo, não é bijetora.
- A função $f(x) = x + 1$ é injetora e sobrejetora; logo, é bijetora.

DEFINIÇÃO: (FUNÇÃO SOMA)

Sejam as funções (f, A, B) e (g, A, B). Dizemos que a função $(f+g, A, B)$ definida por

$$f+g : A \to B$$
$$f+g(a) = f(a) + g(a)$$

é a função SOMA de f com g.

Assim temos,

$$\begin{array}{lll} f : A \to B & g : A \to B & f+g : A \to B \\ a \to b_1 = f(a) & a \to b_2 = g(a) & f+g(a) = b_1 + b_2 \end{array}$$

EXEMPLO: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ a \to b_1 = f(a) = a^2 & a \to b_2 = g(a) = 2a \end{array}$$

$$f+g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f+g(a) = b_1 + b_2 = a^2 + 2a$$

DEFINIÇÃO: (FUNÇÃO MULTIPLICAÇÃO)

Sejam as funções (f, A, B) e (g, A, B). Dizemos que a função $(f.g, A, B)$ definida por

$f.g : A \to B$

$f.g(a) = f(a).g(a)$

é a função MULTIPLICAÇÃO de f e g.

Assim temos,

$$\begin{array}{lll} f : A \to B & g : A \to B & f.g : A \to B \\ a \to b_1 = f(a) & a \to b_2 = g(a) & f.g(a) = b_1 \dot{b}_2 \end{array}$$

EXEMPLO: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ a \to b_1 = f(a) = a^2 & a \to b_2 = g(a) = 2a \end{array}$$

então,

$f.g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f.g(a) = b_1 \dot{b}_2 = a^2 \dot{2} a = 2a^3$

Definição: (Função Composta)

Sejam as funções (f, A, B) e (g, B, C). Dizemos que a função (gof, A, C) definida por

$gof : A \to C$

$gof(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

é a função COMPOSTA de g com f.

Assim temos,

$f : A \to B$	$g : B \to C$	$gof : A \to C$
$a \to b = f(a)$	$b \to c = g(b)$	$gof(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

Exemplo: Sejam as funções f e g definidas abaixo;

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$a \to b = f(a) = a + 1$	$b \to c = g(b) = b^2 + 3b$

temos as funções: $gof : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $fog : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; tais que

$gof(a) = g(f(a)) = g(a + 1) = (a + 1)^2 + 3(a + 1) = a^2 + 5a + 4$

$fog(b) = f(g(b)) = f(b^2 + 3b) = b^2 + 3b + 1$

Funções Invertíveis

Proposição:

Seja uma função (f, A, B) BIJETIVA então existe uma função (g, B, A) BIJETIVA .

D] Uma função (f, A, B) é BIJETIVA se, e somente se, f é uma função UM PARA UM e é SOBRE B. Vamos agora definir a função (g, B, A) ;
$g : B \to A$; tal que $b \to g(b) = a$; onde a é o único valor em A para $g(b) = a$ e, isto é possível de ser definido pois, (i) a função f é UM PARA UM; e (ii) como $Im(f) = B$, temos que g está definida para qualquer $b \in B$; logo, por (i) e (ii), g é uma função bem definida.
Por outro lado, como f é função temos todos os elementos de A relacionados aos de B o que leva g a ser uma função "sobre A", mas f é injetiva então essa relação é "um para um" fato que define g também injetiva. Portanto, g é uma função bijetiva.

Função Invertível

DEFINIÇÃO: (FUNÇÃO INVERTÍVEL)

Seja uma função (f, A, B). Dizemos que f é uma função INVERTÍVEL se, e somente se, f é BIJETIVA. E ainda, dizemos que a função bijetiva (g, B, A) é a função INVERSA de f.
NOTAÇÃO: $g = f^{-1}$

Assim temos,

$$\begin{array}{ll} f : A \to B & f^{-1} : B \to A \\ a \to b = f(a) & b \to a = f^{-1}(b) \end{array}$$

Exemplo: Seja a função f bijetiva definida como segue;

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \to y = f(x) = x + 1 & y \to x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Como determinar a função inversa: $f^{-1}(y)$?

Função Invertível

Pela definição de funções invertíveis; temos que,

$f : A \to B; \quad b = f(a)$

Se aplicarmos a função f^{-1}, temos

$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a))$

$a = (f^{-1}of)(a)$; observe que $(f^{-1}of)(a) = I_A(a)$; e, por outro lado;

$f^{-1} : B \to A$

$b \to a = f^{-1}(b)$;

Se aplicarmos a função f, temos

$f(a) = f(f^{-1}(b))$;

$b = (fof^{-1})(b)$; observe que $(fof^{-1})(b) = I_B(b)$.

Observação: **Note que podemos aplicar este resultado a fim de obter a inversa de uma função bijetiva qualquer.**

Vamos voltar ao nosso exemplo:

$y = f(x) = x + 1$; e, $x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(y)) \Rightarrow x + 1 = (fof^{-1})(y) \Rightarrow x + 1 = I_{\mathbb{N}}(y) \Rightarrow x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = y - 1.$

Exercícios - Funções

(1) Verifique se as funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definidas abaixo são injetoras.

  (a) $f(x) = x - 1$
  (b) $f(x) = x^2 + 1$
  (c) $f(x) = x^3$
  (d) $f(x) = 2x^2$

(2) Verifique se as funções definidas no exercício anterior são sobrejetoras.

(3) Dê um exemplo de uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que seja

  (a) injetora mas não sobrejetora
  (b) sobrejetora mas não injetora
  (c) injetora e sobrejetora
  (d) não seja injetora e nem sobrejetora

(4) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

  (a) $f(x) = 3x - 4$
  (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
  (c) $f(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)}$
  (d) $f(x) = x^5 + 1$

Exercícios - Funções

(5) Verifique se as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas abaixo são bijetoras.

(a) $f(x) = 2x + 1$
(b) $f(x) = x^2 + 1$
(c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$

(6) Determine, se possível, a inversa das funções do exercício anterior.

(7) Sejam as funções $g : A \to B$ e $f : B \to C$.

(a) Mostre que se as funções f e g são funções injetivas, então fog também é injetiva.
(b) Mostre que se as funções f e g são funções sobrejetivas, então fog também é sobrejetiva.

(8) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine,

(a) fog e gof
(b) $f + g$ e $f.g$

(9) Sejam as funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$; onde a, b, c, d são constantes. Verifique para quais valores das constantes temos que $fog = gof$.

(10) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax + b$, com a, b constantes; $a \neq 0$. Mostre que f é invertível e, em seguida, ache a sua inversa.

(11) Sejam as funções invertíveis $f : A \to B$ e $g : C \to A$. Mostre que a composta fog é invertível e $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$.