Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 04/05/2019

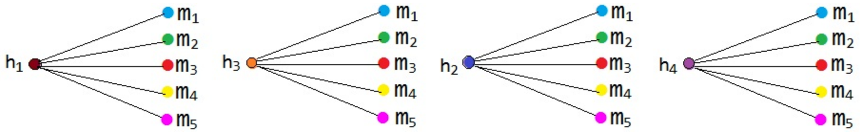
Princípio da Adição:

Sejam $A_1, \cdots, A_n$ conjuntos finitos dois a dois disjuntos, cada conjunto com $p_1, \cdots, p_n$ elementos, respectivamente. Então, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ tem $\sum_{i=1}^{n} p_i$ elementos; pois $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.

Exemplo.1

Numa sala de aula há 4 alunos e 5 alunas e queremos formar equipes com duas pessoas sendo um aluno com uma aluna.
De quantos modos distintos podemos fazer isso?
Como utilizar o princípio aditivo?

SOLUÇÃO(EXEMPLO.1): Vamos denotar os conjuntos;
$H := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ o conjunto dos alunos e
$M := \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ o conjunto das alunas.
Observe que temos a possibilidade de formar CINCO duplas para cada aluno, do seguinte modo:



Desta forma, teremos o total de $5 + 5 + 5 + 5 = 4(5) = 20$ duplas possíveis de alunos.
Generalizando o problema para uma sala de aula com n alunos e m alunas, teremos o total de

$$\underbrace{n + n + \cdots + n}_{m\text{parcelas}} = m(n)$$

Príncipios Básicos de Contagem

Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem):

Sejam $A_1, \cdots, A_n$ conjuntos finitos, cada conjunto com $p_1, \cdots, p_n$ elementos, respectivamente. Então, o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i$ tem $\prod_{i=1}^{n} p_i$ elementos.

Podemos reformular este princípio do seguinte modo:

"Se uma DECISÃO d_1 pode ser tomada de p_1 maneiras, uma vez tomada esta decisão, uma DECISÃO d_2 pode ser tomada de p_2 maneiras,

uma vez tomada estas decisões, uma DECISÃO d_3 pode ser tomada de p_3 maneiras, e; uma vez tomada $n-1$ decisões, uma DECISÃO d_n pode ser tomada de p_n maneiras; então, o número de maneiras de tomar as decisões $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{n-1}, d_n$ é $p_1.p_2.p_3.\cdots.p_{n-1}.p_n$.

Como utilizar o princípio multiplicativo no EXEMPLO.1 ?

SOLUÇÃO(EXEMPLO.1):
$H := \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ o conjunto dos alunos e
$M := \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ o conjunto das alunas.
Vamos denotar d_1 a decisão de escolher um dos 4 alunos e
d_2 a decisão de escolher uma das 5 alunas.
Observe que temos 4 maneiras de escolher um aluno: $p_1 = 4$, e;
para cada aluno escolhido, temos 5 maneiras de escolher uma aluna:
$p_2 = 5$.
Logo, $p_1.p_2 = 4.5 = 20$ maneiras distintas de formar as duplas.
Generalizando o problema para uma sala de aula com n alunos e m alunas,
teremos $p_1 = n$ e $p_2 = m$
o que resulta em $m.n$ maneiras distintas de formar as duplas.

EXEMPLO.2

As quatro listras de uma bandeira devem ser coloridas apenas com as cores cinza, azul e branco, e; as listras adjacentes devem ter cores distintas. De quantos modos podemos colorir esta bandeira?

Denotando d_i a decisão de escolher as cores para a i-ésima listra; com $i = 1, 2, 3, 4$, temos;

(i) 3 maneiras de escolher uma das 3 cores para a 1^a listra: $p_1 = 3$;

(ii) 2 maneiras de escolher uma das 2 cores restantes para a 2^a listra: $p_2 = 2$;

(iii) para a 3^a listra, após escolher a cor da 2^a listra e incluir de volta a cor da 1^a listra(não-adjacente): $p_3 = 2$;

(iv) para a 4^a listra, após escolher a cor da 3^a listra e incluir de volta as cores das 1^a e 2^a listras(não-adjacentes):$p_4 = 2$.

Logo, $p_1.p_2.p_3.p_4 = 3.2.2.2 = 3.2^3 = 24$ modos de pintar a bandeira.

EXEMPLO.2(Continuação)
Temos uma bandeira formada de quatro listras, as quais devem ser coloridas usando-se apenas as cores cinza, azul e branco, e; as listras adjacentes devem ter cores distintas. De quantos modos podemos colorir esta bandeira?
SOLUÇÃO: $p_1.p_2.p_3.p_4 = 3.2.2.2 = 3.2^3 = 24$ maneiras distintas de pintar a bandeira.
Generalizando o problema para uma bandeira com n listras e m cores distintas disponíveis para pintar, teremos
$p_1 = m, p_2 = m-1, p_3 = m-1, \cdots, p_n = m-1;$
o que resulta em $m.\underbrace{(m-1).(m-1).\cdots.(m-1)}_{(n-1)\text{vezes}} = m.(m-1)^{n-1}$ maneiras distintas de pintar as n listras da bandeira com m cores distintas.

EXEMPLO.3

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

$$\underline{\ 1^a\ } \quad \underline{\ 2^a\ } \quad \underline{\ 3^a\ }$$

Considerando os algarismos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, temos;
(i) d_1 a decisão de escolher o algarismo da 1^a posição $\Rightarrow p_1 = 9$ possibilidades, pois o zero 0 não pode ocupar a primeira posição,
(ii) d_2 a decisão de escolher o algarismo da 2^a posição $\Rightarrow p_2 = 9$ possibilidades, pois excluimos o algarismo da primeira posição e incluimos o zero 0,
(iii) d_3 a decisão de escolher o algarismo da 3^a posição $\Rightarrow p_3 = 8$ pois, excluimos os dois algarismos utilizados nas 1^a e 2^a posições.
Assim, temos $p_1.p_2.p_3 = 9.9.8 = 648$ números naturais distintos de três algarismos.

EXEMPLO.4

Quantos números naturais de quatro algarismos menores do que 5.000 e divisíveis por 5 podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$? Considere os algarismos do conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ para formarem os números.

$$\underline{a \in A \text{ e } a \leq 4} \quad \underline{\ \ b \in A\ \ } \quad \underline{\ \ c \in A\ \ } \quad \underline{\ \ d = 5\ \ }$$

Neste caso, o número deve ser divisível por 5; ou seja, tem que terminar em 0 ou 5. Temos apenas disponível o algarismo 5 para ocupar a última posição resultando numa única possibilidade para a decisão d_4: $p_4 = 1$.
Para o penúltimo dígito do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, para d_3: $p_3 = 5$.
Do mesmo modo, para o antepenúltimo dígito do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, para d_2: $p_2 = 5$.
E, finalmente, para o primeiro dígito, para tomar a decisão d_1 temos que utilizar dos algarismos disponíveis, apenas os que são menores do que ou iguais ao 4: $p_1 = 3$.
Utilizando agora o princípio multiplicativo, obtemos
$p_1.p_2.p_3.p_4 = 3.5.5.1 = 75$ números naturais menores do que 5.000 e múltiplos de 5 com quatro algarismos.

EXEMPLO.5

Quantos números naturais de quatro algarismos divisíveis por 5 podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$?
Considere os algarismos do conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ para formarem os números.

$$\underline{\ a \in A\ }\quad \underline{\ b \in A\ }\quad \underline{\ c \in A\ }\quad \underline{\ d = 5\ }$$

Como no exemplo anterior, temos apenas disponível o algarismo 5 para ocupar a última posição resultando numa única possibilidade para a decisão d_4: $p_4 = 1$.
Para os demais dígitos do número podemos utilizar todos os algarismos disponíveis, isto é, $p_3 = p_2 = p_1 = 5$.
Agora, pelo princípio multiplicativo, temos $p_1.p_2.p_3.p_4 = 5.5.5.1 = 125$ números naturais múltiplos de 5 com quatro algarismos.

EXEMPLO.6

Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos $2, 3, 4, 5, 7$?
Considere os algarismos do conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ para formarem os números.

$$\underline{\ a \in A\ }\quad \underline{\ b \in A\ }\quad \underline{\ c \in A\ }\quad \underline{\ d \in A\ }$$

Neste exemplo, para todos os dígitos do número podemos utilizar quaisquer elemento do conjunto A, isto é, $p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 5$.
Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $p_1.p_2.p_3.p_4 = 5.5.5.5 = 625$ números naturais com quatro algarismos.

Proposição.1:

Sejam n objetos. Então, podemos ordená-los em $n!$ modos numa linha.

Demonstração:

Vamos denotar os n objetos por $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Vamos agora ordená-los em linha. Então, para a primeira posição temos n possibilidades, pois todos os objetos estão disponíveis. Para a segunda posição, restam $n-1$ objetos, e; para a terceira $(n-1)-1 = n-2$ possibilidades. Observe que em cada posição seguinte, temos que diminuir um objeto pois já o usamos na posição anterior. Desta forma, temos:

$p_1 = n; p_2 = n-1; p_3 = n-2; \cdots, p_{n-1} = n-(n-2) = 2; p_n = 1.$

Seguindo o princípio multiplicativo:

$p_1.p_2.p_3.\cdots.p_{n-1}.p_n = n.(n-1).(n-2).\cdots.2.1 = n!.$

Logo, temos $n!$ modos de ordenar n objetos numa linha.

EXEMPLO.7
Queremos saber quantos anagramas podemos formar da palavra PRATICO.
SOLUÇÃO:
Sabemos que cada anagrama da palavra é uma ordenação das suas letras.
Então, vamos resolver utilizando a proposição.1 a fim de ordenar as letras:
temos $n = 7$ letras distintas $\Longrightarrow 7.6.5.4.3.2.1 = 7! = 5040$.
Logo, temos 5040 anagramas formados pelas 7 letras da palavra PRATICO.
EXEMPLO.8
Queremos saber agora quantos anagramas podemos formar da palavra PRATICO, as quais começam e terminam com uma consoante?
SOLUÇÃO:
A palavra PRATICO tem quatro consoantes P,R,T,C e três vogais A,I,O.
Então, para a primeira posição temos 4 possibilidades e para a última restam 3 consoantes; as $5(= 7 - 2)$ letras restantes podem ser ordenadas em linha utilizando a proposição.1: $5!$.
Desta forma, temos : $4.5!.3 = 1440$ anagramas.

EXEMPLO.9

Queremos saber de quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares cada.

SOLUÇÃO: Denotaremos as pessoas por : $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$.
Agora as colocamos numa fila e podemos fazer isso de 8! modos. Observe que algumas permutações são contadas como distintas, por exemplo:
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ e $P_2, P_1, P_3, P_4, P_8, P_6, P_7, P_5$.
Mas, as pessoas devem sentar em 2 mesas, a fila será dividida em 2:
$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa 1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa 2}$ e $\underbrace{P_2, P_1, P_3, P_4}_{mesa 1}, \underbrace{P_8, P_6, P_7, P_5}_{mesa 2}$; e, estas duas permutações são iguais; ou seja, as permutações de quatro pessoas em cada mesa: 4!, resultam numa mesma possibilidade. Retiramos então das 8! possibilidades, as permutações em cada mesa: $\frac{8!}{4!.4!}$. Além disso, contamos como duas possibilidades distintas, por exemplo :
$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa 1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa 2}$ e $\underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa 1}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa 2}$; que na verdade, são iguais. Então, dividimos as 8! possibilidades por 2: $\frac{8!}{2}$. Logo, $\frac{8!}{2.4!.4!}$ modos de dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares.

Combinações Simples

DEFINIÇÃO.1:

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural. Dizemos que um subconjunto de A com k elementos é uma COMBINAÇÃO SIMPLES DE CLASSE k.

DEFINIÇÃO.2:

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural. Definimos por $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e, dizemos que $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ é um COEFICIENTE BINOMIAL.

NOTAÇÃO: C_n^k

PROPOSIÇÃO.2

Sejam A um conjunto com n elementos e $k \leq n$ um natural. O número de COMBINAÇÃO SIMPLES DE CLASSE k do conjunto A é $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Demonstração: Sejam $A := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto com n elementos e seja k um natural tal que $k \leq n$. Queremos saber quantos subconjuntos de A com exatamente k elementos existem. Então,

• A escolha do primeiro elemento deste subconjunto podemos fazer de n modos, pois em A existem n elementos disponíveis;

• A escolha do segundo elemento deste subconjunto podemos fazer de $n - 1$ modos, pois em A existem agora $n - 1$ elementos disponíveis;

• Continuando o processo de escolhas, para o k-ésimo elemento ainda restam $(n - k) + 1$ elementos em A.

Então, pelo *princípio multiplicativo* temos: $n.(n-1).\cdots.(n-k+1)$ possibilidades para escolha.

Porém, note que estamos contando mais de uma vez alguns conjuntos com k elementos que são iguais, como por exemplo:

$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}; \{x_3, x_1, x_k, \cdots, x_1\}; \{x_2, x_3, x_1, \cdots, x_k\}$; ou seja, contamos $k!$ possibilidades a mais.

Logo, o número de escolhas de um subconjunto de A com k elementos é

$$\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!}$$

Combinações Simples

DEMONSTRAÇÃO(Continuação):
Encontramos $\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!}$ maneiras possíveis.
Note que,
$\frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!} = \frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1).(n-k).\cdots.2.1}{k!(n-k).\cdots.2.1} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$.
Conclusão:

$$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

maneiras possíveis de determinarmos subconjuntos de A com k elementos.

EXEMPLO.10

Quantas saladas diferentes podemos elaborar adicionando 4 frutas, se tivermos 10 frutas à disposição?

SOLUÇÃO:

Neste exemplo temos que escolher 4 frutas em 10 e fazer a salada de frutas. A escolha pode ser feita utilizando a proposição.2, isto é,

$$C_{10}^{4} = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{10!}{4!.(10-4)!} = 210$$

Logo, são 210 modos de fazer saladas de frutas, escolhendo 4 frutas em 10.

Combinação Simples

Exemplo.11

Quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 mesas de 4 lugares cada.

Solução:

Pela proposição.2, escolhemos um subconjunto de 4 elementos em 8 pessoas :

$$C_8^4 = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{8!}{4!.(8-4)!} = 70$$

Lembrando que estamos contando as mesmas escolhas por duas vezes, por exemplo:

$\underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa1}, \underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa2}$ e $\underbrace{P_5, P_6, P_7, P_8}_{mesa1}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, P_4}_{mesa2}$;

temos que dividir o resultado por 2:

$$\frac{C_8^4}{2} = \frac{1}{2}.\left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{1}{2}.\frac{8!}{4!.(8-4)!} = \frac{1}{2}.70 = 35$$

Logo, são 35 modos de dividir 8 pessoas em 2 mesas, com 4 lugares cada.

Exemplo.12
Queremos saber de quantos modos podemos escolher 5 pessoas, incluindo *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres?
Solução:
Se queremos incluir *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres, temos as possibilidades:

(i) 3 mulheres e 2 homens: $C_5^3.C_8^2 = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array} \right) = 280$;

(ii) ou, 4 mulheres e 1 homem $C_5^4.C_8^1 = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array} \right) = 40$;

(iii) ou, 5 mulheres e nenhum homem $C_5^5.C_8^0 = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array} \right) = 1$.

Concluindo pelos três casos possíveis, (i), (ii) e (iii), e observando que eles são disjuntos (um acontecimento exclui os outros dois), podemos utilizar o *princípio aditivo*:
$C_5^3.C_8^2 + C_5^4.C_8^1 + C_5^5.C_8^0 = 280 + 40 + 1 = 321$

EXEMPLO.12
Queremos saber de quantos modos podemos escolher 5 pessoas, incluindo *pelo menos* 3 mulheres num grupo de 8 homens e 5 mulheres?
SOLUÇÃO:
Observe que podíamos ter resolvido o problema pensando de outro modo: "Se queremos escolher um grupo de 5 pessoas de um total com 8 homens + 5 mulheres = 13 pessoas; com pelo menos 3 mulheres", então excluimos do total de possibilidades os grupos com menos de 3 mulheres; ou seja,

$$C_{13}^{5} - (C_{5}^{2}.C_{8}^{3} + C_{5}^{1}.C_{8}^{4} + C_{5}^{0}.C_{8}^{5}) = 321$$

Proposição.3:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) = C_n^{n-k}$

Demonstração:

Sabemos por definição que

$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$; e

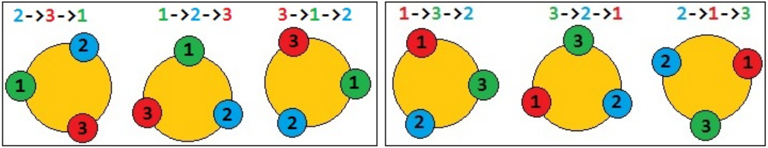
$C_n^{n-k} = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

"Temos n objetos distintos, e queremos colocá-los em torno de uma CIRCUNFERÊNCIA. De quantos modos isso é possível? "

EXEMPLO.13

Dados três objetos: $1, 2$ e 3 podemos colocá-los numa linha de $3! = 6$ maneiras distintas; ou seja,
$1/2/3; 1/3/2; 3/2/1; 3/1/2; 2/3/1; 2/1/3.$

Todavia, para ordená-los numa CIRCUNFERÊNCIA, observamos que algumas permutações são iguais numa circunferência:



Então, é suficiente escolhermos um de cada grupo e assim, temos apenas 2 modos de ordenar 3 objetos em torno de uma circunferência.

Observação: Existem menos casos possíveis numa CIRCUNFERÊNCIA do que numa linha.

Proposição.4:

Sejam n objetos. Então, temos $(n-1)!$ modos de colocá-los circularmente.

Demonstração:

Pela proposição.1, podemos colocar n objetos de $n!$ modos distintos numa linha.

Considerando agora posições equivalentes, as quais podemos obter através de rotação, cada escolha tem n rotações iguais.

Assim, as possibilidades são de

$$\frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

modos de colocarmos os n objetos circularmente.

EXEMPLO.14

Queremos saber de quantos modos podemos sentar 7 pessoas numa mesa redonda, tal que 2 pessoas determinadas não fiquem uma ao lado da outra?

SOLUÇÃO:

Pensando do seguinte modo:

temos 7 pessoas, retiramos as 2 que não podem sentar juntas e ficamos com 5 pessoas para sentarmos à mesa redonda de 5 lugares. Utilizando a proposição.3: $(5\text{-}1)! = 4! = 24$.

Agora, pegamos uma das duas pessoas retiradas do grupo e sentamos à mesa entre as outras 5; isto é possível de 5 maneiras.

Resta ainda a outra pessoa das duas para sentar-se entre as 6 que já estão à mesa redonda.

Porém, ela não pode sentar-se nem à esquerda e nem à direita da outra pessoa; então, das 6 possibilidades possíveis retiramos 2; e restam apenas 4 posições para ela sentar-se.

Pelo princípio multiplicativo, temos $4!.5.4 = 480$ modos de sentarmos 7 pessoas numa mesa redonda com a restrição dada.

EXEMPLO.15

Queremos saber de quantos modos podemos sentar 7 pessoas numa mesa redonda, tal que 2 pessoas determinadas fiquem uma ao lado da outra?

SOLUÇÃO:

Pensando do seguinte modo:

temos 7 pessoas das quais 2 devem sentar-se juntas.

Considerando as duas juntas como uma única pessoa, porque não podem separar-se; ficamos com 6 pessoas para sentarmos à mesa redonda de 6 lugares; e pela proposição.3: (6-1)! $=$ 5! $=$ 120.

Agora, vamos considerar as possibilidades das duas pessoas sentarem juntas; neste caso, são apenas 2 possibilidades: "*uma delas pode sentar-se à esquerda ou à direita da outra*".

Pelo princípio multiplicativo, temos 2.5! $=$ 240 modos de sentarmos 7 pessoas numa mesa redonda com a restrição dada.

Exercícios

(1) Um restaurante possui um cardápio que apresenta escolhas de saladas(salada verde, salada russa, salpicão), sopas(caldo verde, canja, de legumes) e pratos principais (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes, lasanha). Quantos são os modos de escolher um prato deste cardápio? Quantos modos se pode escolher uma refeição completa(salada, sopa e prato principal) ?

(2) O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

(3) Quantos são os números pares de 3 algarismos distintos?

(4) Quantos modos distintos 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

(5) Quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol para representá-lo em uma cerimônia de premiação?

Respostas

(1) Temos 3 opções de saladas, 3 de sopas e 4 de pratos principais; então, pelo princípio aditivo: $3 + 3 + 4 = 10$ modos de escolher um prato do cardápio.
E, pelo princípio multiplicativo: $3.3.4 = 36$ possíveis refeições.

(2) Existem palavras de $1, 2, 3, 4$ letras, em quantidades distintas. Assim, nossa estratégia é a de usar o princípio multiplicativo para contar separadamente estas palavras e, depois, somar estas quantidades:
(i) 2 palavras de 1 letra; (ii) $2.2 = 4$ palavras de 2 letras, pois temos dois modos de escolher a primeira letra e dois de escolher a segunda; (iii) $2.2.2 = 8$ palavras de três letras; (iv) $2.2.2.2 = 16$ palavras de quatro letras.
Assim, o total de $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ palavras.

(3) Começamos pelo último algarismo: $p_3 = 5$ possibilidades, ou seja, pode assumir $0, 2, 4, 6, 8$. Em seguida, vamos para o primeiro: $p_1 =?$.
Sabemos que o primeiro não pode ser igual a 0, mas pode ser qualquer outro valor; então chegamos em um impasse: "se o últimpo escolhido foi 0" temos $p_1 = 9$, caso contrário, temos $p_1 = 8$.

RESPOSTAS(continuação)

(3) Vamos então, primeiro, utilizar o princípio aditivo e o multiplicativo: (i) contando os números que terminam em 0:
$p_3 = 1, p_1 = 9, p_2 = 8 \Rightarrow 9.8.1 = 72$; e (ii) os números que não terminam em 0: $p_3 = 4, p_1 = 8, p_2 = 8 \Rightarrow 8.8.4 = 256$; agora: (i)+(ii)$= 72 + 256 = 328$.
Vamos agora resolver de outro modo, primeiro vamos incluir todos os casos, inclusive de o número começar por 0 e depois retiramos as possibilidades que não servem ao problema. (i) contando os números incluindo os que começam por 0: $p_3 = 5, p_1 = 9, p_2 = 8 \Rightarrow 9.8.5 = 360$; e (ii) contando os números que só podem começar por 0:
$p_1 = 1, p_3 = 4, p_2 = 8 \Rightarrow 1.8.4 = 32$; agora: (i)-(ii)$= 360 - 32 = 328$.

Respostas

(4) Problema de permutação simples: $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

(5) Inicialmente, pensamos em resolver pelo princípio multiplicativo: $11.10.9 = 990$.

Porém, desta forma, estamos contando comissõs iguais como distintas: ABC e BCA são iguais.

Então, temos que dividir por 3!; $\frac{11.10.9}{3!} = \frac{990}{6} = 165$;

ou seja, nos reportamos a um problema de combinação simples: $C_{11}^{3} = \frac{11!}{3!.8!} = \frac{990}{6} = 165$