

PROJETO 1: COMÉRCIO ELETRÔNICO COM CASHBACK

Adrielle A. Carvalho¹, Fernando F. L. Neto¹, João L. L. Melo¹, Thiago V. S. Andrade¹

¹Bacharelado em Ciência da Computação – Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Salvador – BA – Brasil

adrielle.andrade@ufba.br, fernando.franco@ufba.br, joaollm@ufba.br,
thiago.vieira@ufba.br

Abstract. *This project aims to develop a system for a retailer using Turing machines. The submachine system and binary and unary representation for numbers will be used for its implementation.*

Resumo. *Esse projeto visa desenvolver um sistema para um varejista através de máquinas de Turing. Será utilizado o sistema de submáquinas e representação binária e unária para os números na sua implementação.*

1. Informações Gerais

De acordo com a Tese de Church-Turing, todos os problemas computáveis devem ser capazes de ser representados em máquinas de Turing. Dessa forma, o projeto foi implementado utilizando submáquinas que representam as operações de soma e produto, ainda que fosse possível de ser feito com uma única máquina e fita. Também foi decidido que a representação com números binários de até duas casas decimais seria utilizada para os cálculos.

Considerando que alguns números, como 10%, não podem ser representados em representação binária, algumas adaptações no projeto foram necessárias, sendo elas:

- O parcelamento de até 10 vezes foi reduzido para 8 vezes;
- O desconto à vista será de 12,5%;
- A redução de 10% no frete a cada R\$200,00 foi modificada para 12,5% a cada n , sendo n determinado na entrada, com frete grátis a partir de 8 vezes n .

O Magazine Tabajara disponibiliza um *cashback* de 37,5% ou um entre os seguintes tipos de cupons:

- 87,5% - referido na máquina como CUPOM = 111;
- 75% - referido na máquina como CUPOM = 11;
- 50% - referido na máquina como CUPOM = 1.
- 0% - referido na máquina como CUPOM = .

Também foram definidas 3 regiões:

- Norte e Nordeste, com frete R\$8,00;
- Centro-Oeste, com frete R\$16,00;
- Sudeste e Sul, com frete R\$24,00.

É importante ressaltar que o JFLAP tem um bug que às vezes não permite que as submáquinas sejam executadas, precisando que o estado que contém a submáquina seja removido e inserido novamente.

2. Máquina de Turing

Nessa seção, o modelo da máquina de Turing construída será apresentado. É importante ressaltar que as submáquinas são feitas para funcionar em conjunto, portanto, algumas necessitam que o ponteiro não esteja no começo da fita. Dessa forma, as máquinas devem ser levemente modificadas nos exemplos individuais, a fim de colocar o ponteiro no lugar necessário.

2.1. Máquina principal

Seja MP uma mT tal que $MP = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{40}, \{q_{aceita}\}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_{40}, q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}, q_{45}, q_{46}, q_{47}, q_{48}, q_{49}, q_{50}, q_{51}, q_5, q_{16}, q_{21}, q_{24}, q_{27}, q_{14}, q_6, q_{20}, q_{30}, q_{12}, q_{22}, q_{29}, q_{26}, q_{25}, q_{28}, q_{31}, q_{35}, q_{38}, q_{53}, q_{54}, q_{55}, q_{57}, q_{94}, q_{60}, q_{63}, q_{63}, q_{62}, q_{64}, q_{67}, q_{34}, q_{36}, q_{56}, q_{58}, q_{61}, q_{80}, q_{81}, q_{82}, q_{85}, q_{83}, q_{86}, q_{84}, q_{87}, q_{88}, q_{89}, q_{90}, q_{92}, q_{101}, q_{102}, q_{103}, q_{104}, q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}, q_{109}, q_{110}, q_{111}, q_{112}, q_{113}, q_{114}, q_{115}, q_{116}, q_{117}, q_{118}, q_{119}, q_{120}, q_{121}, q_{122}, q_{123}, q_{124}, q_{125}, q_{126}, q_{127}, q_{128}, q_{129}, q_{130}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , V, P, k, l, p, q, c, f, \#\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - V - pagamento à vista;
 - P - pagamento parcelado;
 - k - separador de redução e valor base do frete;
 - l - separador de sequência de 1;
 - p - separador de produtos;
 - q - indicador da quantidade de parcelas;
 - c - separador de cupons;
 - f - separador para o número 111;
 - $\#$ - indicador de final de entrada.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{a, b, d, x, D, O, I, \$, \sqcup\}$;
- $q_{101} = q_{102} = q_{103} = q_{104}$ estado que chama a **submáquina de adição**;
- $q_{105} = q_{106} = q_{107} = q_{108} = q_{109} = q_{110} = q_{111} = q_{112} = q_{113} = q_{114} = q_{115} = q_{116}$ = estado que chama a **submáquina de divisão por 2**;
- $q_{117} = q_{118}$ = estado que chama a **submáquina de multiplicação binária**;
- $q_{119} = q_{120}$ = estado que chama a **submáquina de multiplicação unária**;
- $q_{121} = q_{122}$ = estado que chama a **submáquina de comparação que retorna símbolo com o número**;
- $q_{123} = q_{124}$ = estado que chama a **submáquina de subtração**;
- $q_{125} = q_{126}$ = estado que chama **submáquina para cópia de VALORPRODUTO para o início da fita**;
- q_{127} = estado que chama a **submáquina para cópia de VALORCASHBACK para o final da fita**;

- q_{128} = estado que chama a **submáquina para cópia de VALORCUPOM para o final da fita**;
- q_{129} = estado que chama a **submáquina de comparação que retorna o menor número**;
- q_{130} = estado que chama a **submáquina de cálculo de divisão por 2 com segunda entrada em unário**;
- $q_{aceita} = \{q_{30}, q_{92}\}$

Desse modo, a fita terá o seguinte formato:

Entrada:

À vista: VpPRODUTOSc111fREDUÇÃOOkFRETEI111111q#

Parcelado: PpPRODUTOScCUPOMf101fREDUÇÃOOkFRETEI111111qPARCELAS#

Saida:

À vista: VALOR

Parcelado: VALORPARCELA

Cada termo da entrada pode ser definido como:

- PRODUTO é uma sequência de números binários com o mesmo número de casas após a vírgula, que representam os valores de cada item, separados por um p .
- REDUÇÃO é um número binário que possui o mesmo número de casas após a vírgula que os de PRODUTO e representa o valor pelo qual o total será reduzido a cada n .
- FRETE é um número binário com o mesmo número de casas após a vírgula que os de PRODUTO e representa o valor do frete para uma região.
- CUPOM é uma sequência de 1's que representa o tipo de cupom, como citado anteriormente.
- PARCELAS é uma sequência de 1's que representa a quantidade de parcelas por exemplo 111 representa 3 parcelas
- VALOR é um número binário que representa o total a pagar caso escolha a opção à vista.
- VALORPARCELA é um número binário que representa o valor de cada parcela a pagar, considerado a melhor opção seja cashback ou cupom de desconto.

A primeira coisa que a máquina principal faz é diferenciar o tipo de pagamento a partir do primeiro caractere da entrada, após isso em ambos os casos ela soma os valores dos produtos com a **submáquina de adição**.

Caso seja à vista, a única redução que precisa ser calculada é a do desconto à vista, 12,5%, o que é equivalente a multiplicar por 7 e dividir por 8. Para isso, ela chama a **submáquina de multiplicação por inteiro** consumindo os 111 da entrada ($111_2 = 7_{10}$), após isso chama a **submáquina para cópia de TOTALPRODUTOS para o final da fita** guardando esse valor para ser utilizado posteriormente. Agora, a **submáquina de comparação que retorna símbolo com o número** é chamada. Caso o número com desconto seja maior que REDUÇÃO, ela marca isso na sequência de 1's a direita e chama a **submáquina de subtração** e repete o processo enquanto o valor total é maior

ou igual ao da redução. Quando se tornar menor, ela chama a **submáquina de multiplicação unária** para multiplicar o valor do frete pelo que restou da sequência de 1's e com esse resultado soma com o valor total dos produtos com desconto que foi guardado anteriormente utilizando a **submáquina de adição**.

Já no caso de parcelado, após a soma dos valores de PRODUTOS, a máquina principal copia o valor para o final utilizando a **submáquina para cópia de TOTALPRODUTOS para o final da fita**, já que ele vai necessário para calcular o cupom e o cashback. Após a cópia, a máquina se prepara para calcular o desconto do cupom com a **submáquina de cálculo de divisão por 2 com segunda entrada em unário** e então guarda esse valor no fim com a **submáquina para cópia de VALORCUPOM para o final da fita** para comparar esse valor com o desconto de cashback e encontrar o menor. Para isso, a máquina copia o valor da soma dos produtos original de volta para o início com a **submáquina para cópia de VALORPRODUTO para o início da fita** e calcula o valor de desconto do cashback de 37,5%, que apenas multiplicar por 5 e dividir por 8, chama a **submáquina de multiplicação binária** e depois a **submáquina de divisão por 2** três vezes consumindo assim o número 101 da entrada. Após isso, copia o valor com desconto do cashback com a **submáquina para cópia de VALORCASHBACK para o final da fita** e compara esse valor com o desconto do cupom com a **submáquina de comparação que retorna o menor número**, após isso chama a **submáquina para cópia de VALORPRODUTO para o início da fita** e calcula o frete e o valor com o frete igual a quando é à vista, por fim a máquina chama a **submáquina de cálculo de divisão por 2 com segunda entrada em unário** e calcula o valor de cada parcela.

Uma observação importante é que o valor final do frete é calculado baseado no valor total dos produtos com a redução, seja ela por conta do cupom, cashback ou o desconto de à vista.

2.2. Máquina de adição

Seja MA uma mT tal que $MA = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , p, c\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - p - separador de produtos;
 - c - aqui o separador de cupons marca o fim da lista de produtos.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{x, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = q_{15}$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada : NUMERO1pNUMERO2p ... pNUMERONc

Saída: SOMAc

Destaca-se que os números precisam ter a mesma quantidade de casas decimais. A máquina então recebe a entrada e percorre o produto até encontrar o um p , depois ela percorre o novo produto até encontrar outro p ou um c . Separando os produtos, a máquina subtrai 1 do segundo e soma no primeiro, até que a segunda parcela seja igual a

0. Nesse momento, a máquina copia o resultado para a direita e, caso existam outros produtos, repete o processo.

2.3. Máquina de subtração

Seja MS uma mT tal que $MS = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_7, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}, q_{22}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , c, k, f\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - p - separador de produtos;
 - c - aqui o separador de cupons marca o fim da lista de produtos.
 - k - final das entradas de subtração
 - f - final do resultado está à esquerda de f .
- $\Gamma = \Sigma \cup \{p, a, b, d, \sqcup\}$;
- q_{18} = estado que chama a submáquina de adição;
- $q_{aceita} = q_{21}$.

A fita terá o seguinte formato:

Entrada: NUMERO1cNUMERO2k

Saída: RESULTADOcNUMERO2k

É importante ressaltar que os números dessa máquina precisam ter o mesmo número de algarismo, mesmo que sejam com zeros à esquerda. Usando do resultado de que o complemento de 2 de um número pode ser usado para realizar a subtração dele por um outro número através da adição. Nessa máquina, o número 2 é complementado e adicionado ao número 1, ou uma fração menor caso haja vírgula, resultando na subtração.

2.4. Máquina de multiplicação binária

Seja MMB uma mT tal que $MMB = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}, q_{27}, q_{28}, q_{29}, q_{30}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}, q_{35}, q_{36}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , m, d, \#\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - $\#$ - final da entrada.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{b, c, \sqcup\}$;
- q_{21} = estado que chama a submáquina de adição;
- $q_{aceita} = q_{35}$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada : VALOR m VEZES#

Saída: TOTAL#

Sendo que TOTAL é o número valor multiplicado pelo número VEZES, sendo VEZES um número inteiro. A lógica dessa mT se baseia em repetidas somas. O valor do multiplicando é somado com ele mesmo n vezes, sendo n o valor do multiplicador. Isso é feito através da cópia do 1º fator para a esquerda e uma soma que acumula nessa cópia, após diminuir 1 no número VEZES e o resultado ser maior que 0. No fim, o total é copiado para o lugar correto e a mT finaliza sua execução.

2.5. Máquina de multiplicação unária

Seja MMU uma mT tal que $MMU = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}, q_{27}, q_{28}, q_{29}, q_{30}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}, q_{35}, q_{36}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , , m, d, \#\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - $\#$ - final da entrada.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{b, c, \sqcup\}$;
- $\Gamma = \Sigma \cup \{b, c, \sqcup\}$;
- q_{23} = estado que chama a submáquina de adição;
- $q_{aceita} = q_{31}$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada : VALOR m VEZES#

Saída: TOTAL#

Sendo que TOTAL é o número VALOR multiplicado pelo número VEZES. A lógica dessa mT se baseia em repetidas somas. O valor do multiplicando é somado com ele mesmo n vezes, sendo n o valor do multiplicador. Isso é feito através da cópia do 1º fator para a esquerda e uma soma que acumula nessa cópia, após diminuir 1 no número VEZES e o resultado ser maior que 0. No fim, o total é copiado para o lugar correto e a mT finaliza sua execução.

2.6. Máquina de divisão por 2

Seja $MD1$ uma mT tal que $MD1 = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_9, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , , c\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - c - aqui o separador de cupons marca o fim do número.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{x, \sqcup\}$;

- $q_{aceita} = q_8$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada : NUMEROc

Saída: QUOCIENTEc

O QUOCIENTE é calculado através de bitshifts para a direita sucessivos, pois estamos utilizando números binários. O resultado é, portanto, aproximado, por exemplo, 11 retorna 1.

2.7. Máquina de cálculo de divisão por 2 com segunda entrada em unário

Seja $MD2$ uma mT tal que $MD2 = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , c\}$:
 → $\{0, 1\}$ - algarismos;
 → , - para números racionais;
 → c - separador.
- $\Gamma = \Sigma \cup \{a, \sqcup\}$;
- q_4 = estado que chama a submáquina de divisão por 2;
- $q_{aceita} = q_{14}$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada: NUMEROcDIVISORc

Saída: TOTALc

O DIVISOR deve ser uma sequência de 1's, a qual indica a quantidade de divisões por 2 que deve ocorrer. TOTAL é o número NUMERO dividido por 2 DIVISOR vezes

2.8. Máquina de comparação que retorna o menor número

Seja $MC1$ uma mT tal que $MC1 = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{42}, \{q_{aceita}\}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}, q_{27}, q_{28}, q_{29}, q_{30}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}, q_{35}, q_{36}, q_{37}, q_{38}, q_{39}, q_{40}, q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}, q_{45}, q_{46}, q_{47}, q_{48}, q_{49}, q_{50}, q_{51}, q_{52}, q_{53}, q_{54}, q_{55}, q_{56}, q_{57}, q_{58}, q_{59}, q_{60}, q_{61}, q_{462}, q_{63}, q_{64}, q_{65}, q_{66}, q_{67}, q_{68}, q_{69}, q_{70}, q_{71}, q_{72}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , d, \$\}$:
 → $\{0, 1\}$ - algarismos;
 → , - para números racionais;
 → d - separa números a serem comparados;
 → \$ - sinaliza início da fita;
- $\Gamma = \Sigma \cup \{O, D, I, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = \{q_{11}, q_{24}, q_{39}, q_{58}, q_{72}\}$

Dessa maneira, a fita terá o seguinte formato:

Entrada: \$NUMERO1dNUMERO2

Saída: \$NUMERO1d, se NUMERO1 < NUMERO2

\$NUMERO2d, se NUMERO2 < NUMERO1

\$NUMERO1d, se NUMERO1 = NUMERO2

Faz-se necessário que a quantidade das casas decimais entre ambos os números da entrada seja igual e não seja considerado zero à esquerda (exceto para casos decimais como 0,1).

A máquina possui dois casos de processamento:

1. para números com mesma quantidade de caracteres;
 2. para números com diferente quantidade de caracteres.
1. A máquina marca os números processados em NUMERO1 e tenta também marcar em NUMERO2. Se a máquina não consegue marcar todos em NUMERO1, mas marcou todos em NUMERO2, então NUMERO1>NUMERO2. É feito o tratamento de saída da fita e NUMERO2 é retornado.
Caso contrário, NUMERO2>NUMERO1 ou NUMERO2 = NUMERO1. É conferido se todos os caracteres foram marcados em ambos os números. Se há caracteres não marcados em NUMERO2, então NUMERO2>NUMERO1. É feito o tratamento de saída da fita e NUMERO1 é retornado.
Caso contrário, o tratamento da fita é realizado de forma a retornar a fita ao seu estado original e a máquina segue para o próximo caso de processamento.
 2. A máquina marca os números processados em NUMERO1 e tenta também marcar em NUMERO2 de forma equivalente. Podemos ter três cenários:
 - 2.1. Ocorrência de 1 em NUMERO1 e 0 em NUMERO2: A máquina busca um 1 correspondente em NUMERO2. Se encontrado, passa para o próximo caractere. Caso encontre 0 em NUMERO2, então NUMERO1>NUMERO2. É feito o tratamento de saída da fita e NUMERO2 é retornado.
 - 2.2. Ocorrência de 0 em NUMERO1 e 1 em NUMERO2: A máquina busca um 0 correspondente em NUMERO2. Se encontrado, passa para o próximo caractere. Caso encontre 1 em NUMERO2, então NUMERO2>NUMERO1. É feito o tratamento de saída da fita e NUMERO1 é retornado.
 - 2.3. Todas as ocorrências de caracteres em NUMERO1 e NUMERO2 são iguais: Então o tratamento de saída da fita é realizado e NUMERO1 é retornado.
 Em todos os casos, a máquina coloca o caractere d ao fim da fita.

2.9. Máquina de comparação que retorna símbolo com o número

Seja MC2 uma mT tal que $MC2 = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{25}, \{q_{aceita}\}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18}, q_{19}, q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}, q_{27}, q_{28}, q_{29}, q_{30}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}, q_{35}, q_{36}, q_{37}, q_{38}, q_{39}, q_{40}, q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}, q_{45}, q_{46}, q_{47}, q_{48}, q_{49}, q_{50}, q_{51}, q_{52}, q_{53}, q_{54}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , c, k, l, \#\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - $,$ - para números racionais;
 - c - divisor entre os números a serem comparados.

- k - identificador de sequência de $\{1,0\}$
- l - identificador de sequência de $\{x\}^*$ seguido por sequência de 1's
- q - identificador de sequência de $\{1,0\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{O, D, I, <, >, =, -, \sqcup\};$
- $q_{aceita} = \{q_{10}, q_{39}, q_{44}, q_{46}, q_{48}, q_{50}, q_{52}, q_{54}\}$

Dessa maneira, a fita terá o seguinte formato:

Entrada: $\text{NUMERO1cNUMERO2k}\{1,0\}^*1\{x,1\}q\{1,0\}^*$

Saída: $>\text{NUMERO1cNUMERO2k}\{1,0\}^*1\{x,1\}q\{1,0\}^*$, se $\text{NUMERO1} > \text{NUMERO2}$ e converte o 1 mais à esquerda da sequência de 1's após o caractere k em x.

$<\text{NUMERO1cNUMERO2k}\{1,0\}^*1\{x,1\}q\{1,0\}^*$, se $\text{NUMERO2} > \text{NUMERO1}$.

$=\text{NUMERO1cNUMERO2k}\{1,0\}^*1\{x,1\}q\{1,0\}^*$, se $\text{NUMERO1} = \text{NUMERO2}$ e converte o 1 mais à esquerda da sequência de 1's após o caractere k em x.

$-\text{NUMERO1cNUMERO2k}\{1,0\}^*1\{x,1\}q\{1,0\}^*$, se a sequência após o caractere l for uma sequência composta apenas por caracteres x.

Faz-se necessário que a quantidade das casas decimais entre ambos os números da entrada seja igual e não seja considerado zero à esquerda (exceto para casos decimais como $0,I$).

A máquina possui três casos de processamento:

1. para números com mesma quantidade de caracteres;
 2. para números com diferente quantidade de caracteres.
 3. para sequência de x após o caractere l.
1. A máquina marca os números processados em NUMERO1 e tenta também marcar em NUMERO2 (de 1 para I, de 0 para O e de vírgula para D). Se a máquina não consegue marcar todos em NUMERO1, mas marcou todos em NUMERO2, então $\text{NUMERO1} > \text{NUMERO2}$. É feito o tratamento de saída da fita e a fita é retornada com o caractere > adicionado à esquerda e com o 1 mais à esquerda da sequência de 1's após o caractere k convertido em x.
Caso contrário, $\text{NUMERO2} > \text{NUMERO1}$ ou $\text{NUMERO2} = \text{NUMERO1}$. É conferido se todos os caracteres foram marcados em ambos os números. Se há caracteres não marcados em NUMERO2, então $\text{NUMERO2} > \text{NUMERO1}$. É feito o tratamento de saída da fita e a fita é retornada com o caractere < adicionado à esquerda.
Caso contrário, o tratamento da fita é realizado de forma a retornar a fita ao seu estado original e a máquina segue para o próximo caso de processamento.
 2. A máquina marca os números processados em NUMERO1 e tenta também marcar em NUMERO2 de forma equivalente (de 1 para I, de 0 para O e de vírgula para D). Podemos ter três cenários:
 - 2.1. Ocorrência de 1 em NUMERO1 e 0 em NUMERO2: A máquina busca um 1 correspondente em NUMERO2. Se encontrado, passa para o próximo caractere. Caso encontre 0 em NUMERO2, então $\text{NUMERO1} > \text{NUMERO2}$. É feito o tratamento de saída da fita e a fita é retornada com o caractere > adicionado à esquerda e com o 1 mais à esquerda da sequência de 1's após o caractere k convertido em x.
 - 2.2. Ocorrência de 0 em NUMERO1 e 1 em NUMERO2: A máquina busca um 0 correspondente em NUMERO2. Se encontrado, passa para o próximo caractere. Caso encontre 1 em NUMERO2, então $\text{NUMERO2} > \text{NUMERO1}$. É feito o

tratamento de saída da fita e a fita é retornada com o caractere < adicionado à esquerda.

2.3. Todas as ocorrências de caracteres em NUMERO1 e NUMERO2 são iguais: É feito o tratamento de saída da fita e a fita é retornada com o caractere = adicionado à esquerda e com o 1 mais à esquerda da sequência de 1's após o caractere k convertido em x.

3. Após os processamentos realizados pelos cenários descritos acima, no momento em que se faz necessária a conversão de um caractere 1 para x após o caractere l, a máquina confere se existe a possibilidade de conversão, buscando um caractere 1 entre o caractere l e #. Caso não encontre, percorre a fita da direita para a esquerda, desmarcando os I's, O's e D's possivelmente marcados (para 1, 0 e vírgula, respectivamente), marcando um - à esquerda da fita.

2.10. Máquina para cópia de TOTALPRODUTOS para o final da fita

Seja MCP uma mT tal que $MCP = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , c, k, f, l, q\}$:
 - $\{0, 1\}$ - algarismos;
 - , - para números racionais;
 - c - aqui o separador de cupons marca o fim da lista de produtos.
 - f - separador que marca o fim da sequência de cupons
 - k - separador que marca o fim da sequência de redução
 - l - separador que marca o fim da sequência de frete
 - q - separador que marca o fim da sequência de 1's (e possíveis x's)
 - # - último caractere da fita
- $\Gamma = \Sigma \cup \{I, O, D, \$, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = q_0$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada: PRODUTOScCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI1111111q#

Saída: PRODUTOScCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI1111111q#PRODUTO\$

ou

Entrada: PRODUTOScCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI1111111qPARCELAS#

Saída: PRODUTOScCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI1111111qPARCELAS#PRODUTO\$

Sabendo que PRODUTO, CUPOM, FRETE e PARCELAS são sequências de 1's e 0's, tal que PRODUTO admite casa decimal separando a parte inteira da decimal pelo uso de “,” , como o exemplo 110,11.

A fita lê o primeiro caractere, sabendo que a partir dele até o caractere c todos as sequências de 1's, 0's e uma possível vírgula deverão ser iterados e copiados ao fim da fita (após o caractere #). A máquina marca cada 1, 0 ou “,” com uma letra (I, O e D, respectivamente), copiando o caractere correspondente ao final da fita, voltando à primeira recorrência de 1, 0 ou “,” na fita após os caracteres marcados antes do caractere c. Após a cópia, a máquina itera sobre os I's, O's e D, convertendo-os aos seus caracteres originais e marca um caractere \$ ao final da fita.

2.11. Máquina para cópia de VALORCUPOM para o final da fita

Seja MCC uma mT tal que $MCC = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , k, q, f, l, \#, \$\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - , - para números racionais;
 - f - separador que marca o fim da sequência de cupons
 - k - separador que marca o fim da sequência de redução
 - l - separador que marca o fim da sequência de frete
 - q - separador que marca o fim da sequência de 1's (e possíveis x's)
 - # - indica início de sequência de 1's e 0's
 - \$ - último caractere da fita
- $\Gamma = \Sigma \cup \{I, O, D, d, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = q_0$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada: CUPOMfREDUÇÃOokFRETEl1111111q#PRODUTO\$

Saída: CUPOMfREDUÇÃOokFRETEl1111111q#PRODUTO\$CUPOMd

ou

Entrada: CUPOMfREDUÇÃOokFRETEl1111111qPARCELAS#PRODUTO\$

Saída: CUPOMfREDUÇÃOokFRETEl1111111qPARCELAS#PRODUTO\$CUPOMd

Sendo que VALORCUPOM, FRETE e PARCELAS são sequências de 1's e 0's, tal que PRODUTO admite casa decimal separando a parte inteira da decimal pelo uso de “,”, como o exemplo 110,11. Pode haver mais de uma ocorrência de f{1,0} na fita.

A fita lê o primeiro caractere, sabendo que a partir dele até o caractere f todos as sequências de 1's, 0's e uma possível vírgula deverão ser iterados e copiados ao fim da fita (após o caractere \$). A máquina marca cada 1, 0 ou , com uma letra (I, O e D, respectivamente), copiando o caractere correspondente ao final da fita, voltando à primeira recorrência de 1, 0 ou , na fita após os caracteres marcados antes do caractere f. Após a cópia, a máquina itera sobre os 1's, 0's e D, convertendo-os aos seus caracteres originais e marcando o caractere d ao final da fita.

2.12. Máquina para cópia de VALORCASHBACK para o final da fita

Seja MCB uma mT tal que $MCB = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , c, k, l, q\}$:
 - $\{0,1\}$ - algarismos;
 - , - para números racionais;
 - c - aqui o separador de cupons marca o fim da sequência de cashback
 - k - separador que marca o fim da sequência de redução
 - l - separador que marca o fim da sequência de frete

- q - separador que marca o fim da sequência de 1's (e possíveis x's)
- # - último caractere da fita
- $\Gamma = \Sigma \cup \{I, O, D, \$, d, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = q_0$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada:

CASHBACKcREDUÇÃOkFRETEI11111111qPARCELAS#PRODUTO\$VALORCUPOMd

Saída:

CASHBACKcREDUÇÃOkFRETEI11111111qPARCELAS#PRODUTO\$VALORCUPOMdCASHBACK

Tendo em vista que CASHBACK, REDUÇÃO, FRETE, VALORCUPOM e PARCELAS são sequências de 1's e 0's, tal que todas admitem casa decimal separando a parte inteira da decimal pelo uso de “,”, como o exemplo 110,11.

A fita lê o primeiro caractere, sabendo que a partir dele até o caractere c todos as sequências de 1's, 0's e uma possível vírgula deverão ser iterados e copiados ao fim da fita (após o caractere d). A máquina marca cada 1, 0 ou , com uma letra (I, O e D, respectivamente), copiando o caractere correspondente ao final da fita, voltando à primeira recorrência de 1, 0 ou , na fita após os caracteres marcados antes do caractere c. Após a cópia, a máquina itera sobre os I's, O's e D, convertendo-os aos seus caracteres originais.

2.13. Máquina para cópia de VALORPRODUTO para o início da fita

Seja $MCPI$ uma mT tal que $MCPI = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_5, q_{aceita}\}$, sendo a rejeição feita em caso de não terminar em q_{aceita} .

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, , , k, q, f, l, \#, \$, d\}$:
 - {0,1} - algarismos;
 - , - para números racionais;
 - f - separador que marca o fim da sequência de cupons
 - k - separador que marca o fim da sequência de redução
 - l - separador que marca o fim da sequência de frete
 - q - separador que marca o fim da sequência de 1's (e possíveis x's)
 - # - indica início de sequência de 1's e 0's que devem ser copiados para o início da fita
 - \$ - indica início de sequência de 1's e 0's
 - d - último caractere da fita
- $\Gamma = \Sigma \cup \{I, O, D, \$, d, \sqcup\}$;
- $q_{aceita} = q_{10}$.

Assim, a fita terá o seguinte formato:

Entrada:

VALORCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI11111111q#PRODUTO\$VALORCUPOMd

Saída: PRODUTOfREDUÇÃOkFRETEI11111111q#PRODUTO\$VALORCUPOMd

ou

Entrada:

VALORCUPOMfREDUÇÃOkFRETEI11111111qPARCELAS#PRODUTO\$VALORCUPOMd

Saída:

PRODUTOfREDUÇÃOkFRETEI11111111qPARCELAS#PRODUTO\$VALORCUPOMd

Sabendo que PRODUTO, VALORCUPOM, REDUÇÃO, FRETE e PARCELAS são sequências de 1's e 0's, tal que PRODUTO admite casa decimal separando a parte inteira da decimal pelo uso de “,”, como o exemplo 110,11.

A fita lê e apaga todos os caracteres, sequências de 1, 0 e , , até uma ocorrência de f. Essa operação garante que VALORCUPOM será apagado no início da fita, mas seu valor no final estará mantido. A máquina percorre a fita buscando alguma ocorrência de \$, sinalizando o primeiro caractere após toda a sequência de PRODUTO. A máquina então percorre da direita para a esquerda, marcando cada ocorrência de 1, 0 ou , com uma letra (I, O e D, respectivamente), copiando o caractere correspondente ao início da fita, voltando ao primeiro caractere antes de alguma ocorrência de I, O, D ou \$, copiando-o ao início da fita, e assim por diante até copiar todos os caracteres entre # e \$.

3. Exemplos

Nessa seção, será demonstrado de forma expositiva o comportamento de cada submáquina para dois tipos de entradas diferentes. Para a máquina principal, serão analisados os comportamentos para quatro diferentes entradas. Os exemplos das submáquinas serão dados em números pequenos apenas para o entendimento do seu funcionamento.

3.1. Máquina principal

Entrada: Vp10,10p10,00c111f10,00k1000,00I11111111#

A máquina consome V, prosseguindo para a seção que fará o processamento da fita para pagamento à vista. O caractere p é consumido, sinalizando o valor do primeiro produto. A máquina de adição é chamada para calcular o valor total de todos os produtos da fita, e sobrescrever os caracteres antes da ocorrência de c. O estado da fita após a operação é: 100,10c111f10,00k1000,00I11111111#

A máquina retorna o cabeçote à esquerda e prepara a fita de entrada para chamar a sequência de submáquinas responsável pela aplicação do desconto no valor total dos produtos. Esse cálculo é dado pela multiplicação do valor total por sete e divisão por oito. A submáquina de multiplicação binária é chamada e, em seguida, são realizadas três chamadas das submáquinas de divisão por dois, onde a sequência de caracteres até a ocorrência de c é reescrita pelo resultado das operações. Após a operação, o estado da fita é dado por: 11,1c10,00k1000,00I11111111#

A submáquina de cópia de valor dos produtos é chamada, copiando a sequência até o

caractere c para o final da fita, escrevendo também o caractere \$ ao final. O estado da fita é dado por: 11,1c10,00k1000,00l11111111#11,1\$

Após a cópia, o valor até o caractere c (preço total descontado os cupons) é comparado com o valor referido como REDUÇÃO por meio da submáquina de comparação cujo retorno é um símbolo, que será consumida pela consequente submáquina de subtração. Essas iterações irão sobrescrever o valor total dos produtos pelo seu valor subtraído de REDUÇÃO até que este seja menor que REDUÇÃO. Para cada desigualdade em que valor total seja maior que REDUÇÃO, a máquina irá sobrescrever um caractere 1 para x na sequência entre l e #. O estado da fita após o procedimento é: 01,11c10,00k1000,00lx11111111#11,1\$

Realizada as subtrações, comparações e marcações na sequência entre l e #, a máquina apaga todos os caracteres até o primeiro caractere à direita de k, ou seja, a primeira sequência da fita diz respeito agora ao FRETE. O desconto é também aplicado pelo frete, cujo valor será dividido por oito após três chamadas da submáquina de divisão por dois e uma chamada da máquina de multiplicação unária, que o multiplica por dois pela quantidade de ocorrências de 1 na sequência entre l e #. O resultado da operação sobrescreve todos os caracteres antes da ocorrência de #. Após o procedimento, o estado da fita é: 111,00p11,11c

Obtido o valor do frete e do valor total dos produtos, aplicados os respectivos descontos, a máquina chama a submáquina de adição, sobrescrevendo a fita para o valor resultante da operação.

Saída: 1010,11

Entrada: Pp10,10p10,00c111f101f10,00k1000,00l11111111q11#

A máquina consome P, prosseguindo para a seção que fará o processamento da fita para pagamento parcelado. O caractere p é consumido, sinalizando o valor do primeiro produto. A máquina de adição é chamada para calcular o valor total de todos os produtos da fita, e sobrescrever os caracteres antes da ocorrência de c. O estado da fita após a operação é: 100,10c111f101f10,00k1000,00l11111111q11#

A máquina retorna o cabeçote para o primeiro caractere da fita e chama a submáquina de cópia do valor dos produtos para o final da fita. Após a cópia, também é escrito o caractere \$ ao final da fita. Após a cópia, o estado da fita é: 100,10c111f101f10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$

A máquina chama a submáquina de divisão binária por dois com entrada unária, de forma a dividir por dois o valor 100,10 uma quantidade de vezes correspondente à quantidade de ocorrências de 1 entre os caracteres c e f. O resultado sobrescreve na fita os caracteres à esquerda da primeira ocorrência de f. O estado da fita após a operação é: 0,10f101f10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$

A máquina chama a submáquina de cópia de valor do cupom, copiando a sequência de caracteres antes da primeira ocorrência de f para o fim da fita. Após a operação, o estado da fita é: 0,10f101f10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d

A máquina chama a submáquina de cópia do valor total dos produtos, armazenado na fita entre os caracteres # e \$, para o início da fita. Após a operação, o estado da fita é: 100,10f101f10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d

A máquina então calcula a redução do valor total dos produtos após uma divisão por oito e multiplicação por 101, cujo resultado corresponde ao cashback. A submáquina de divisão por dois é chamada três vezes e então a submáquina de multiplicação binária. O resultado da operação sobrescreve os caracteres à esquerda da segunda ocorrência de f. O estado da fita após a iteração é: 10,10c10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d

A máquina chama a submáquina de cópia do valor de cashback para o fim da fita, que copiará a sequência à esquerda de c para o fim da fita. Após a operação, o estado da fita é: 10,10c10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d10,10

A máquina percorre a fita buscando a ocorrência de \$. Uma vez encontrado, chama a submáquina de comparação retornando o menor número. A submáquina compara 10,10 e 0,10, sobrescrevendo à direita de \$ o menor dos valores. Após a operação, a fita é dada por: 10,10c10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d

A máquina mais uma vez chama a submáquina de copiar o valor total dos produtos para o início da fita. Após a operação, a fita é dada por: 100,10f10,00k1000,00l11111111q11#100,10\$0,10d

Após a cópia, o valor até o caractere c (preço total descontado os cupons) é comparado com 10,00, referido como REDUÇÃO, por meio da submáquina de comparação cujo retorno é um símbolo, que será consumida pela consequente submáquina de subtração. Essas iterações irão sobrescrever o valor total dos produtos pelo seu valor subtraído de REDUÇÃO até que este seja menor que REDUÇÃO. Para cada desigualdade em que valor total seja maior que REDUÇÃO, a máquina irá sobrescrever um caractere 1 para x na sequência entre l e #. O estado da máquina após a operação é: 00,10f10,00k1000,00lxx111111q11#100,10\$0,10d

Realizada as subtrações, comparações e marcações na sequência entre l e q, a máquina apaga todos os caracteres até o primeiro caractere à direita de k, ou seja, a primeira sequência da fita diz respeito agora ao FRETE. O desconto é também aplicado pelo frete, cujo valor será dividido por oito após três chamadas da submáquina de divisão por dois e uma chamada da máquina de multiplicação unária, que o multiplica por dois pela quantidade de ocorrências de 1 na sequência entre l e #. O resultado da operação sobrescreve todos os caracteres antes da ocorrência de #. A fita após a operação é: 110,00c11#100,10\$0,10d

A máquina chama a submáquina de divisão por dois com entrada em unário, dividindo por dois o valor 110,00 uma quantidade de vezes correspondente à quantidade de ocorrências de 1 entre c e #. Após a operação, a fita é dada por: 1,10p0,10c

A máquina chama a submáquina de adição para somar os valores divididos na fita pelo caractere p, cujo resultado da operação é o valor final da fita.

Saída: 10,00

Entrada: Vp1,00p11,00c111f10,00k1000,00l11111111#

A máquina consome V, prosseguindo para a seção que fará o processamento da fita para pagamento à vista. O caractere p é consumido, sinalizando o valor do primeiro produto. A máquina de adição é chamada para calcular o valor total de todos os produtos da fita, e sobrescrever os caracteres antes da ocorrência de c. O estado da fita após a operação é: 100,00c111f10,00k1000,00l11111111#

A máquina retorna o cabeçote à esquerda e prepara a fita de entrada para chamar a sequência de submáquinas responsável pela aplicação do desconto no valor total dos produtos. Esse cálculo é dado pela multiplicação do valor total por sete e divisão por oito. A submáquina de multiplicação binária é chamada e, em seguida, são realizadas três chamadas das submáquinas de divisão por dois, onde a sequência de caracteres até a ocorrência de c é reescrita pelo resultado das operações. Após a operação, o estado da fita é dado por: 11,10c10,00k1000,00l11111111#

A submáquina de cópia de valor dos produtos é chamada, copiando a sequência até o caractere c para o final da fita, escrevendo também o caractere \$ ao final. O estado da fita é dado por: 11,10c10,00k1000,00l11111111#11,10\$

Após a cópia, o valor até o caractere c (preço total descontado os cupons) é comparado com o valor referido como REDUÇÃO por meio da submáquina de comparação cujo retorno é um símbolo, que será consumida pela consequente submáquina de subtração. Essas iterações irão sobrescrever o valor total dos produtos pelo seu valor subtraído de REDUÇÃO até que este seja menor que REDUÇÃO. Para cada desigualdade em que valor total seja maior que REDUÇÃO, a máquina irá sobrescrever um caractere l para x na sequência entre l e #. O estado da fita após o procedimento é: 01,10c10,00k1000,00lx11111111#11,10\$

Realizada as subtrações, comparações e marcações na sequência entre l e #, a máquina apaga todos os caracteres até o primeiro caractere à direita de k, ou seja, a primeira sequência da fita diz respeito agora ao FRETE. O desconto é também aplicado pelo frete, cujo valor será dividido por oito após três chamadas da submáquina de divisão por dois e uma chamada da máquina de multiplicação unária, que o multiplica por dois pela quantidade de ocorrências de l na sequência entre l e #. O resultado da operação sobrescreve todos os caracteres antes da ocorrência de #. Após o procedimento, o estado da fita é: 111,00p11,10c

Obtido o valor do frete e do valor total dos produtos, aplicados os respectivos descontos, a máquina chama a submáquina de adição, sobrescrevendo a fita para o valor resultante da operação.

Saída: 1010,10

Entrada: Vp0,10p1,00c111f10,00k1000,00l11111111#

A máquina consome V, prosseguindo para a seção que fará o processamento da fita para pagamento à vista. O caractere p é consumido, sinalizando o valor do primeiro produto. A máquina de adição é chamada para calcular o valor total de todos os produtos da fita, e sobrescrever os caracteres antes da ocorrência de c. Após essa etapa, o estado da fita é: 1,10c111f10,00k1000,00l11111111#

A máquina retorna o cabeçote à esquerda e prepara a fita de entrada para chamar a sequência de submáquinas responsável pela aplicação do desconto no valor total dos produtos. Esse cálculo é dado pela multiplicação do valor total por sete e divisão por oito. A submáquina de multiplicação binária é chamada e, em seguida, são realizadas três chamadas das submáquinas de divisão por dois, onde a sequência de caracteres até a ocorrência de c é reescrita pelo resultado das operações. Após isso, o estado da fita é: 1,01c10,00k1000,00l11111111#

A submáquina de cópia de valor dos produtos é chamada, copiando a sequência até o caractere c para o final da fita, escrevendo também o caractere \$ ao final. O estado da fita após a operação é: 1,01c10,00k1000,00l11111111#1,01\$

Após a cópia, o valor até o caractere c (preço total descontado os cupons) é comparado com o valor referido como REDUÇÃO por meio da submáquina de comparação cujo retorno é um símbolo, que será consumida pela consequente submáquina de subtração. Essas iterações irão sobrescrever o valor total dos produtos pelo seu valor subtraído de REDUÇÃO até que este seja menor que REDUÇÃO. Para cada desigualdade em que valor total seja maior que REDUÇÃO, a máquina irá sobrescrever um caractere 1 para x na sequência entre l e #. Como o valor total é menor que REDUÇÃO, não há sobrescrita e alteração da fita.

A máquina apaga todos os caracteres até o primeiro caractere à direita de k, ou seja, a primeira sequência da fita diz respeito agora ao FRETE. O desconto é também aplicado pelo frete, cujo valor será dividido por oito após três chamadas da submáquina de divisão por dois e uma chamada da máquina de multiplicação unária, que o multiplica por dois pela quantidade de ocorrências de 1 na sequência entre l e #. O resultado da operação sobrescreve todos os caracteres antes da ocorrência de #. O estado da fita após a operação é: 1000,00p1,01c

Obtido o valor do frete e do valor total dos produtos, aplicados os respectivos descontos, a máquina chama a submáquina de adição, sobrescrevendo a fita para o valor resultante da operação.

Saída: 1001,10

3.2. Máquina de adição

Entrada: 1p11p10c

Primeiramente, a máquina procura o primeiro p. Quando o encontra, ela segue procurando o próximo p. No momento em que ele é encontrado, a máquina subtrai 1 do segundo número e segue percorrendo a fita da direita para a esquerda até voltar ao primeiro e somar esse 1. A máquina permanece nesse ciclo até que a segunda parcela seja 0. Atingindo esse resultado, o primeiro p e todos os 0's referentes ao segundo número são transformados em x e o resultado da soma é copiado para o lugar imediatamente anterior ao próximo p e os x's são apagados.

Agora a máquina retorna ao estado inicial e procura novamente por um p. Encontrando-o, ela procura o c para realizar o mesmo ciclo anterior, no qual 1 é subtraído da segunda parcela e somado na primeira, até que o segundo número seja 0. De forma análoga, o resultado é copiado para o local imediatamente anterior ao c e a máquina volta ao estado inicial e percorre o número procurando um p. Como sobra apenas c, a máquina o encontra e segue para a aceitação.

Saída: 110c

Entrada: 1,10p0,11c

Inicialmente, a máquina percorre o número a procura de p, passando também pelas casas fracionárias do primeiro número. Ao encontrar p, ela segue a fim de encontrar o

final do segundo número, o qual é marcado por c. Nesse instante, a máquina começa a subtrair 1 do segundo número, podendo ser da parte inteira ou fracionária, e somando no primeiro elemento. O processo é repetido até que a segunda parcela seja 0 e, então, o número resultante que se encontra no começo da fita é copiado para a posição imediatamente anterior a c. O restante da fita é apagado e a máquina volta ao estado inicial, no qual o total será percorrido até encontrar c e o resultado é aceito.

Saída: 10,01c

3.3. Máquina de subtração

Entrada: 11,0c01,0k

Primeiramente, a máquina retorna para o primeiro espaço branco na fila e coloca um p. Em seguida, ela percorre o primeiro número completamente, até encontrar o c, percorrendo depois o segundo número, até encontrar k. Nesse momento, a máquina começa a voltar para a esquerda substituindo os algarismos do segundo número de acordo com:

- 0 vira a;
- 1 vira b;
- , vira d.

No mesmo instante a máquina também volta para o começo da fita e coloca o número complementar do algarismo lido. A máquina então volta para o segundo número e devolve seus valores que haviam sido trocados. Após isso, a máquina volta ao começo e coloca outro p no primeiro caractere branco encontrado. Logo depois, a quantidade de casas após a vírgula é reservada no começo da fita, colocando 0's em seu lugar. O último 0 após a vírgula é substituído por um 1 (a fim de obter um complemento de 2) e a máquina chama a máquina de adição, a qual retornará o resultado da subtração, com um 1 no começo. A máquina então exclui esse 1 e aceita.

Saída: 10,0c01,0k

Entrada: 0,1c0,0k

Primeiramente, a máquina retorna para o primeiro espaço branco na fila e coloca um p. Em seguida, ela percorre o primeiro número completamente, até encontrar o c, percorrendo depois o segundo número, até encontrar k. Nesse momento, a máquina começa a voltar para a esquerda substituindo os algarismos do segundo número de acordo com:

- 0 vira a;
- 1 vira b;
- , vira d.

No mesmo instante a máquina também volta para o começo da fita e coloca o número complementar do algarismo lido. A máquina então volta para o segundo número e devolve seus valores que haviam sido trocados. Após isso, a máquina volta ao começo e coloca outro p no primeiro caractere branco encontrado. Logo depois, a quantidade de casas após a vírgula é reservada no começo da fita, colocando 0's em seu lugar. O último 0 após a vírgula é substituído por um 1 (a fim de obter um complemento de 2) e a

máquina chama a máquina de adição, a qual retornará o resultado da subtração, com um 1 no começo. A máquina então exclui esse 1 e aceita.

Saída: 0,1c0,0k

3.4. Máquina de multiplicação binária

Entrada: 1,1m1#

Primeiramente, a máquina vai para o espaço em branco à esquerda e o substitui por c. Em seguida, ela percorre o primeiro número, caso haja uma vírgula a máquina marca o próximo número após ela, o 1, e vai para a esquerda até encontrar um branco para então o substituir por 0 e repete esse processo enquanto existir número após a vírgula do primeiro número, quando encontrar o m ela vai para a esquerda na fita substituindo os valores marcados pelos originais até encontrar o branco e então adiciona uma vírgula e um 0, assim temos o número zero com o mesmo número de casas decimais que o primeiro número.

Após isso, ela tenta subtrair um do segundo número(o VEZES) utilizando a mesma lógica da adição e caso isso seja possível, ou seja, o número é diferente do zero, ela copia o primeiro número para esquerda do zero que foi criado os separando com um p, ela faz isso marcando os números já copiados para a esquerda da seguinte maneira

- 0 vira a;
- 1 vira b;
- , vira d;

Quando marcar todos, ela volta substituindo eles pelos valores originais e chama a máquina de adição. Nesse momento a fita está desta maneira: 1,1c1,1m0#.

Agora ela tenta subtrair um do número VEZES, mas como é 0, ela apaga tudo que não seja o número mais a esquerda, e copia esse número para a direita.

Saída: 1,1#

Entrada: 100,1m0#

Primeiramente, a máquina vai para o espaço em branco à esquerda e o substitui por c. Em seguida, ela percorre o primeiro número, a máquina marca o próximo número após a vírgula, o 1, e vai para a esquerda até encontrar um branco para então o substituir por 0, e vai para a direita, quando encontrar o m ela vai para a esquerda na fita substituindo os valores marcados pelos originais até encontrar o branco e então adiciona uma vírgula e um 0, assim temos o número zero com o mesmo número de casas decimais que o primeiro número.

Após isso, ela tenta diminuir um do número VEZES, mas como ele é zero, ela para e apaga tudo que não seja o número mais a esquerda, para então copiar ele para a direita.

Saída: 0,0#

3.5. Máquina de multiplicação unária

Entrada: 10,0m11#

Similar à máquina de multiplicação anterior, essa vai para o espaço em branco à esquerda e o substitui por c.

Em seguida, ela percorre o primeiro número, marca o próximo número após a vírgula, o 0, e vai para a esquerda até encontrar um branco para então o substituir por 0, e vai para a direita, quando encontrar o m ela vai para a esquerda na fita substituindo os valores marcados pelos originais até encontrar o branco e então adiciona uma vírgula e um 0, assim temos o número zero com o mesmo número de casas decimais que o primeiro número.

Após isso, ela subtrai um do segundo número, que para números unários é apenas marcar eles com um x, e copia o primeiro número para a esquerda do zero os esperando com um p, da mesma maneira que a outra máquina de multiplicação faz. Então chama a máquina de adição e repete o processo mais uma vez.

No final da segunda iteração, todos os dígitos do segundo número estão marcados, então ela apaga a entrada original e copia o resultado da multiplicação para a direita.

Saída: 100,0#

Entrada: 101,01m#

O vazio entre o m e a # representa o 0 em unário.

Primeiramente, a máquina vai para o espaço em branco à esquerda e o substitui por c.

Em seguida, ela percorre o primeiro número, marca o próximo número após a vírgula, o 0, e vai para a esquerda até encontrar um branco para então o substituir por 0, e vai para a direita até encontrar o próximo número, o marca e então vai para a direita e adiciona um zero quando encontra o vazio, após isso vai para a direita mais uma vez, quando encontrar o m ela vai para a esquerda na fita substituindo os valores marcados pelos originais até encontrar o branco e então adiciona uma vírgula e um 0.

Agora ela vai para direita até encontrar o m na tentativa de marcar o próximo 1, contudo como o primeiro símbolo após o m é a # significa que a multiplicação acabou, então a máquina apaga a entrada original e então faz uma cópia do valor da multiplicação na direita.

Saída: 0,00#

3.6. Máquina de divisão por 2

Entrada: 1100c

Inicialmente, a máquina lê o número procurando seu final, marcado por c. Quando o encontra, ela substitui o último número por x. Como o próximo elemento da direita para a esquerda é um 0, ela substitui por x novamente e coloca 0 no último x encontrado. Caso fosse 1, seria substituído por x e depois 1 no local à direita. Isso é feito de maneira cíclica até que todo o número tenha sido reposicionado, menos o último 0, o qual é excluído do resultado. Por fim, a máquina substitui o x que sobra por um espaço em branco e o resultado é aceito.

Saída: 110c

Entrada: 0,10c

Primeiramente, a máquina lê o número inteiro, ou seja até encontrar c. Nesse momento ela substitui o último 0 por x, assim como o 1 à sua esquerda. Logo após, esse 1 é reposicionado no local do último x. O mesmo é feito com os algarismos anteriores, portanto, eles são lidos e reposicionados no lugar do x mais a direita. No final, a máquina remove os x que sobraram e aceita.

Saída: 0,01c

3.7. Máquina de cálculo de divisão por 2 com segunda entrada em unário

Entrada: 1000c11c

Inicialmente, a máquina percorre o primeiro número por completo, encontrando seu final no primeiro caractere c lido. Em seguida, encontra-se a sequência de 1's que indica a quantidade de vezes que esse número será dividido por 2. A máquina então substitui esse 1 por a e chama a submáquina de divisão por 2, a qual já retorna o devido resultado. Nesse momento, a máquina volta a procurar outros 1's para realizar o mesmo procedimento. Finalizando as divisões, ela copia o resultado para o lugar imediatamente anterior ao último c, exclui os a's restantes e aceita.

Saída: 10c

Entrada: 1,00c1c

Primeiramente, a máquina percorre o primeiro número por completo, incluindo as casas após a vírgula, encontrando seu final no primeiro caractere c lido. Em seguida, encontra-se a sequência de 1's que indica a quantidade de vezes que esse número será dividido por 2. A máquina então substitui esse 1 por a e chama a submáquina de divisão por 2, a qual já retorna o devido resultado. Nesse momento, a máquina volta a procurar o outro 1 para realizar o mesmo procedimento. Finalizando as divisões, ela copia o resultado para o lugar imediatamente anterior ao último c, exclui os a's restantes e aceita.

Saída: 0,01c

3.8. Máquina de comparação que retorna o menor número

Entrada: \$11d1

A máquina lê inicialmente a fita até encontrar o caractere \$. Ela reconhece e marca o caractere 1, convertendo-o para I. Percorre a fita da esquerda para a direita, reconhece d e faz o mesmo para o caractere 1 após d. Percorre a fita da direita para a esquerda, buscando reconhecer algum dígito 1, 0 ou vírgula, o marca e tenta encontrar algum caractere do tipo após d, mas não encontra.

A máquina sabe que $11 > 1$, ou seja, $NUMERO1 > NUMERO2$. A máquina percorre a fita convertendo os I's em 1, retornando ao estado original da fita. Apaga os caracteres (exceto \$ e seus antecessores) da fita até o caractere d. Apaga d, segue à direita e percorre os consequentes caracteres válidos. Uma vez encontrado o vazio, a máquina marca o caractere &, sinalizando que a sequência de caracteres de referência para a

cópia termina ali. Cada caractere de NUMERO2 é percorrido e alocado sequencialmente após o caractere \$. Uma vez transcrito NUMERO2 para imediatamente após \$, o caractere & é removido da fita, a máquina percorre da direita para a esquerda até encontrar um caractere válido, e insere o caractere d à sua direita.

Saída: \$1d

Entrada: \$1d10

A máquina lê inicialmente a fita até encontrar o caractere \$. Ela reconhece e marca o caractere 1, convertendo-o para I. Percorre a fita da esquerda para a direita, reconhece d e faz o mesmo para o caractere 1 após d. Percorre a fita da direita para a esquerda, buscando reconhecer algum dígito 1, 0 ou vírgula. Apenas encontra d, e checa se para a direita ainda há caracteres do tipo. E há.

A máquina sabe que $1 < 10$, ou seja, $NUMERO1 < NUMERO2$. A máquina percorre a fita convertendo os I's em 1, retornando ao estado original da fita. A máquina então itera sobre d e os caracteres à sua direita, apagando-os. Percorre a fita encontrando o último caractere válido de NUMERO1 e insere à sua direita o caractere d.

Saída: \$1d

3.9. Máquina de comparação que retorna símbolo com o número

Entrada: 1c10k111q

A máquina lê inicialmente a fita até encontrar o caractere \$. Ela reconhece e marca o caractere 1, convertendo-o para I. Percorre a fita da esquerda para a direita, reconhece d e faz o mesmo para o caractere 1 após d. Percorre a fita da direita para a esquerda, buscando reconhecer algum dígito 1, 0 ou vírgula. Apenas encontra d, e checa se para a direita ainda há caracteres do tipo. E há.

A máquina sabe que $1 < 10$, ou seja, $NUMERO1 < NUMERO2$. A máquina percorre a fita convertendo os I's em 1, retornando ao estado original da fita. A máquina não itera sobre a sequência de 1's entre l e q. Apenas percorre a fita pela esquerda e adiciona o caractere < ao início da fita.

Saída: <1c10k111q

Entrada: 1c0k11q

A máquina lê inicialmente a fita até encontrar o caractere \$. Ela reconhece e marca o caractere 1, convertendo-o para I. Percorre a fita da esquerda para a direita, reconhece d e faz o mesmo para o caractere 1 após d. Percorre a fita da direita para a esquerda, buscando reconhecer algum dígito 1, 0 ou vírgula. Apenas encontra d, e checa se para a direita ainda há caracteres do tipo. Não há. Portanto, NUMERO1 e NUMERO2 possuem a mesma quantidade de caracteres.

A máquina percorre a fita convertendo-a em seu estado original e então, da esquerda para a direita, tenta encontrar correspondência entre os dígitos mais significativos de NUMERO1 e NUMERO2. Ela reconhece 1 em NUMERO1 e o busca em NUMERO2, mas encontra 0. A máquina, portanto, sabe que $NUMERO1 \geq NUMERO2$.

A máquina percorre a fita convertendo-a em seu estado original e consome um caractere 1 da sequência entre l e q, convertendo-o em x. Além disso, retorna ao início da fita adicionando o caractere > à esquerda.

3.10. Máquina para cópia de TOTALPRODUTOS para o final da fita

Entrada: 1c1,1f0,1k10,0l111q#

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 1 para I) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após #. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 1. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é um c. A máquina então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de c ao seu estado inicial (de I para 1), percorre a fita até o final e escreve o caractere \$.

Saída: 1c1,1f0,1k10,0l111q#1\$

Entrada: 0,1c1,1f0,1k10,0l111q#

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 0 para O) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após #. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 0. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é uma vírgula. Marca o caractere (de vírgula para D) e repete o processo de escrita ao final da fita. O mesmo vale para o 1 após a vírgula. Após a escrita de 0,1 no final da fita, ao percorrer da direita para a esquerda na busca de caracteres a serem transcritos, a máquina lerá c. Ela então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de c ao seu estado inicial (de I para 1, O para 0 e de D para vírgula), percorre a fita até o final e escreve o caractere \$.

Entrada: 0,1c1,1f0,1k10,0l111q#0,1\$

3.11. Máquina para cópia de VALORCUPOM para o final da fita

Entrada: 0,1f10k111111111q#111\$

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 0 para O) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após \$. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 0. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é uma vírgula. Marca o caractere (de vírgula para D) e repete o processo de escrita ao final da fita. O mesmo vale para o 1 após a vírgula. Após a escrita de 0,1 no final da fita, ao percorrer da direita para a esquerda na busca de caracteres a serem transcritos, a máquina lerá f. Ela então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de f ao seu estado inicial (de I para 1, O para 0 e de D para vírgula), percorre a fita até o final e escreve o caractere d.

Saída: 0,1f10k111111111q#111\$0,1d

Entrada: 10f1011k1111111111q101#111\$

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 1 para I) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após \$. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 1. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é 0. Marca o caractere (de 0 para O) e repete o processo de escrita ao final da fita. Após a escrita de 10 no final da fita, ao percorrer da direita para a esquerda na busca de caracteres a serem transcritos, a máquina lerá f. Ela então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de f ao seu estado inicial (de I para 1, O para 0 e de D para vírgula), percorre a fita até o final e escreve o caractere d.

Saída: 10f1011k1111111111q101#111\$10d

3.12. Máquina para cópia de VALORCASHBACK para o final da fita

Entrada: 0,1c1k10111111111q10#10\$111d

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 0 para O) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após d. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 0. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é uma vírgula. Marca o caractere (de vírgula para D) e repete o processo de escrita ao final da fita. O mesmo vale para o 1 após a vírgula. Após a escrita de 0,1 no final da fita, ao percorrer da direita para a esquerda na busca de caracteres a serem transcritos, a máquina lerá c. Ela então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de c ao seu estado inicial (de I para 1, O para 0 e de D para vírgula).

Saída: 0,1c1k10111111111q10#10\$111d0,1

Entrada: 1c10k11111111111q100#10\$101,0d

A máquina lê o primeiro caractere da fita e o marca (de 1 para I) e então percorre até encontrar a primeira ocorrência de um caractere vazio após d. Uma vez encontrado, escreve o caractere correspondente marcado, nesse caso, escreve 1. Percorre da direita para a esquerda até encontrar o último caractere do tipo I, O ou D. Lê o caractere à direita que, nesse caso, é um c. A máquina então sabe que a transcrição chegou ao fim. Retorna os caracteres marcados à esquerda de c ao seu estado inicial (de I para 1).

Saída: 1c10k11111111111q100#10\$101,0d1

3.13. Máquina para cópia de VALORPRODUTO para o início da fita

Entrada: 0,1f11k10111111111q10#100\$111d

A máquina apaga todos os caracteres antes da primeira ocorrência de f. Percorre da esquerda para a direita buscando o caractere \$. Uma vez encontrado, sabe que todos os caracteres à sua esquerda até o caractere # devem ser copiados para o início da fita. A máquina marca o primeiro caractere à esquerda de \$, de 0 para O, percorre a fita até o

início e escreve à esquerda o caractere 0. Percorre novamente a fita buscando alguma ocorrência de O, I ou D. Caso encontre um caractere que não seja #, repete o processo de marcá-lo e escrevê-lo ao início da fita. Isso ocorrerá para o 0 e 1. Na próxima tentativa de ler o caractere à esquerda de alguma ocorrência de O, I ou D, a máquina lerá #. Ela sabe então que todos os caracteres foram transcritos. Percorre a fita reescrevendo os caracteres marcados (de I para 1, de O para 0 e de vírgula para D).

Saída: 100f11k10l111111111q10#100\$111d

Entrada: 100f10k10l111111111q11#0\$111d

A máquina apaga todos os caracteres antes da primeira ocorrência de f. Percorre da esquerda para a direita buscando o caractere \$. Uma vez encontrado, sabe que todos os caracteres à sua esquerda até o caractere # devem ser copiados para o início da fita. A máquina marca o primeiro caractere à esquerda de \$, de 0 para O, percorre a fita até o início e escreve à esquerda o caractere 0. Percorre novamente a fita buscando alguma ocorrência de O, I ou D. Nessa tentativa, a máquina lerá #. Ela sabe então que todos os caracteres foram transcritos. Percorre a fita reescrevendo os caracteres marcados (de I para 1, de O para 0 e de vírgula para D).

Saída: 0f10k10l111111111q11#0\$111d

4. Referências

- Hopcroft, J. E.; Ullman, J. D.; Motwani, R. (2002) “Introdução à teoria de autômatos, linguagens e computação”, Editora Campus.
- Sipser, M. (2007) “Introdução à teoria da computação”, Thomson Learning.
- Vieira, N. J. (2004) “Linguagens e Máquinas: Uma Introdução aos Fundamentos da Computação”.