MATA50 - Exercícios da Semana 01

- Estudante: João Lucas Lima de Melo
- Matrícula: 219116052
- Grupo: Uva

Exercícios

Sejam os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq n \leq 5\}$. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:

```
A = set(n for n in range(9))
B = set(n for n in range(-5,6))
print("A:", A)
print("B:", B)
```

```
A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
B: {0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, -5, -4, -3, -2}
```

a) $E = A \cap B$

```
E = A.intersection(B)
print("E:", E)
```

```
E: {0, 1, 2, 3, 4, 5}
```

b) $C = \{n \in A \cup B \mid n = 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z}\}$

```
a_union_b = A.union(B)
C = set()

for x in a_union_b:
  if (x % 2) == 0:
    C.add(x)

print("C:", C)
```

```
C: {0, 2, 4, 6, 8, -4, -2}
```

c) $D = (A - B) \cup (B - A)$

```
a_difference_b = A.difference(B)
b_difference_a = B.difference(A)

D = a_difference_b.union(b_difference_a)

print("D", D)
```

```
D {6, 7, 8, -1, -5, -4, -3, -2}
```

d) $[(A \cap C) - (A \cap D)] \times [(A \cap D) - (A \cap C)]$

```
a_inter_c = A.intersection(C)
a_inter_d = A.intersection(D)

first_dif = a_inter_c.difference(a_inter_d)
second_dif = a_inter_d.difference(a_inter_c)

res = dict()

#print("first difference:", first_dif)
#print("second difference:", second_dif)

for i in first_dif:
  for j in second_dif:
    res.update({i:j})

print("[(A∩C)-(A∩D)]×[(A∩D)-(A∩C)]:",res)
```

```
[(A∩C)-(A∩D)]×[(A∩D)-(A∩C)]: {0: 7, 2: 7, 4: 7}
```

Para cada uma das igualdades abaixo, certifique-se de que seja válida para $n \leq 100$ e prove por indução sua validade para qualquer n:

a)

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Passo para n = 0 pertencente aos naturais:

$$\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$$

Temos:

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0$$

$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{1}{2} = 0$$

Portanto, vale

.

Passo para n+1:

Hipótese:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tese:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Temos:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, vale a tese.

```
soma = 0
expressao = 0

for x in range(101):
  #resultado do somatório
  soma += x

  #resultado expressao n(n+1)/2
  expressao = x*(x+1)/2

  if soma == expressao:
    print("Vale para:\t", x)
  else:
    print("Não vale para:\t")
```

```
Vale para:       0
Vale para:       1
Vale para:       2
Vale para:       3
Vale para:       4
```

```
Vale para:       5
Vale para:       6
Vale para:       7
Vale para:       8
Vale para:       9
Vale para:       10
Vale para:       11
Vale para:       12
Vale para:       13
Vale para:       14
Vale para:       15
Vale para:       16
Vale para:       17
Vale para:       18
Vale para:       19
Vale para:       20
Vale para:       21
Vale para:       22
Vale para:       23
Vale para:       24
Vale para:       25
Vale para:       26
Vale para:       27
Vale para:       28
Vale para:       29
Vale para:       30
Vale para:       31
Vale para:       32
Vale para:       33
Vale para:       34
Vale para:       35
Vale para:       36
Vale para:       37
Vale para:       38
Vale para:       39
Vale para:       40
Vale para:       41
Vale para:       42
Vale para:       43
Vale para:       44
Vale para:       45
Vale para:       46
Vale para:       47
Vale para:       48
Vale para:       49
Vale para:       50
Vale para:       51
Vale para:       52
Vale para:       53
Vale para:       54
Vale para:       55
Vale para:       56
Vale para:       57
Vale para:       58
```

b)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

Passo para n = 0 pertencente aos naturais:

$$\sum_{i=0}^{0} i^3 = (\sum_{i=0}^{0} i)^2$$

Temos:

$$\sum_{i=0}^{0} i^3 = 0 * 0 * 0 = 0$$

$$(\sum_{i=0}^{0} i)^2 = 0^2 = 0$$

Portanto, vale

. **Passo para n+1:**

Hipótese:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$$

Tese:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = (\sum_{i=0}^{n+1} i)^2$$

$$(\sum_{i=0}^{n+1} i)^2 = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$$

$$(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{3n^3}{2} + \frac{13n^2}{4} + 3n + 1$$

Temos:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2 + (n+1)^3$$

$$(\sum_{i=0}^{n} i)^2 + (n+1)^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3$$

$$(\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \frac{n^4}{4} + \frac{3n^3}{2} + \frac{13n^2}{4} + 3n + 1$$

Portanto, vale a tese.

```
soma = 0
expressao = 0
```

```python
for x in range(101):
  #resultado do somatório
  soma += x*x*x

  #resultado expressao n(n+1)/2
  expressao += x

  if soma == expressao**2:
    print("Vale para:\t", x)
  else:
    print("Não vale para:\t")
```

```
Vale para:	 0
Vale para:	 1
Vale para:	 2
Vale para:	 3
Vale para:	 4
Vale para:	 5
Vale para:	 6
Vale para:	 7
Vale para:	 8
Vale para:	 9
Vale para:	 10
Vale para:	 11
Vale para:	 12
Vale para:	 13
Vale para:	 14
Vale para:	 15
Vale para:	 16
Vale para:	 17
Vale para:	 18
Vale para:	 19
Vale para:	 20
Vale para:	 21
Vale para:	 22
Vale para:	 23
Vale para:	 24
Vale para:	 25
Vale para:	 26
Vale para:	 27
Vale para:	 28
Vale para:	 29
Vale para:	 30
Vale para:	 31
Vale para:	 32
Vale para:	 33
Vale para:	 34
Vale para:	 35
Vale para:	 36
Vale para:	 37
Vale para:	 38
Vale para:	 39
Vale para:	 40
Vale para:	 41
Vale para:	 42
Vale para:	 43
Vale para:	 44
Vale para:	 45
Vale para:	 46
```

```
Vale para:       47
Vale para:       48
Vale para:       49
Vale para:       50
Vale para:       51
Vale para:       52
Vale para:       53
Vale para:       54
Vale para:       55
Vale para:       56
Vale para:       57
Vale para:       58
```