Seja $S \neq \emptyset$ um conjunto e $\leq \, \subseteq S^2$.

$\leq$ é uma relação de ordem se é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Uma ordem estrita é uma relação irreflexiva e transitiva.

Se $\leq$ é uma ordem em S, a relação $<$ definida por

$$x < y \text{ sse } (x \leq y \text{ e } x \neq y) \quad \forall x, y \in S$$

é uma ordem estrita.

$\forall x, y$, $x < y \Rightarrow x \neq y$, então $<$ é irreflexiva.

$\forall x, y, z \in S$, se $x < y$ e $y < z$, então $x \leq y$, $y \leq z$, $x \neq y$ e $y \neq z$ e isso implica, pela transitividade de $\leq$, $x \leq z$.

Se fosse $x = z$, então, teríamos $x \leq y$ e $y \leq x$ e, então, pela prop. antiss. do $\leq$, $x = y$, mas isto é em contradição com a hipótese de que $x \neq y$. Logo $x \neq z$ e portanto $x < z$ e $<$ é transitiva.

Se $<$ é uma ordem estrita em S, então a relação $\leq$ definida por:

$x \leq y$ sse $(x < y$ ou $x = y)$ é uma ordem.

Dem.

$\leq$ é obviamente reflexiva, pois $x = x \ \forall x$.

Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $(x < y$ ou $x = y)$ e $(y < x$ ou $x = y)$

$x < y$ e $y < x \Rightarrow x < x$ pela transitividade mas isto é absurdo pois $<$ é irreflexiva.

$x < y$ e $x = y$ também é absurdo, pois implicaria, de novo $x < x$.

Logo, $x = y$. Segue que $\leq$ é antissimétrica.

Sejam x, y, z t.q. $x \leq y$ e $y \leq z$. Se $x = y$ ou $y = z$, segue imediatamente $y = x \leq z$ ou $x \leq y = z$. Se $x \neq y$ e $y \neq z$, então $x < y$ e $y < z$ e, como $<$ é transitiva, segue $x < z$ e, então, $x \leq z$. Logo, $\leq$ é transitiva e portanto é uma ordem.

Dado $\leq$, se $<$ é a ordem estrita associada e $\leq'$ é a ordem associada a $<$, então $\leq$ e $\leq'$ coincidem.

Dada $<$, se $\leq$ é a ordem associada e $<'$ é a ordem estrita associada a $\leq$, então $<$ e $<'$ coincidem.

$\leq$ é uma <u>ordem total</u> (ou <u>linear</u>) se

$\forall x, y \in S, \quad x \leq y$ ou $y \leq x$.

As ordens usuais de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são totais.

Se $\leq$ é ordem em S, o par $(S, \leq)$ é dito <u>conjunto (parcialmente) ordenado</u> ou <u>poset</u>.

Consideremos a relação $|$ em $\mathbb{N}$, ou seja, $n|m$ se $\exists k \in \mathbb{N}$ t.q. $nk = m$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n = n \cdot 1 \Rightarrow n|n \Rightarrow |$ é reflexiva

$\forall n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, se $n|m$ e $m|n \Rightarrow \exists k, h$ t.q. $nk = m$ e $mh = n$

$\Rightarrow mhk = m$ e como $m \neq 0 \Rightarrow hk = 1 \Rightarrow h = k = 1 \Rightarrow m = n$.

Se $n = 0$, $n|m$ e $m|n \Rightarrow \exists k, h$ t.q. $0 \cdot k = m$ e $m \cdot h = n$
$\Rightarrow m = 0$.

Em todo caso, $(n|m$ e $m|n) \Rightarrow n = m$ e, então, $|$ é antiss.

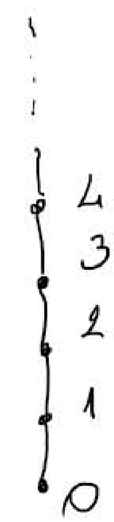
Se $n|m$ e $m|p \Rightarrow \exists h, k \; (nh = m$ e $mk = p) \Rightarrow nhk = p \Rightarrow n|p$

$\Rightarrow |$ é transitiva.

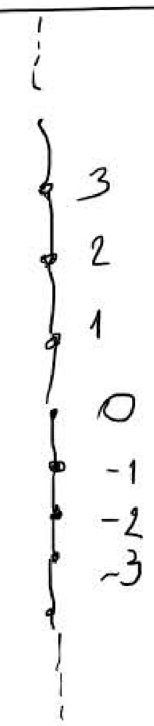
$(\mathbb{N}, |)$ é conjunto ordenado, porém não é totalmente ordenado, pois $4 \nmid 6$ e $6 \nmid 4$.

Um <u>diagrama de Hasse</u> é uma representação gráfica de um poset $(S, \leq)$. Os elementos de S são pontos e tais pontos são, eventualmente, conectados por meio de arestas <u>não horizontais</u>. Se $x \leq y$, haverá uma sequência de arestas conectando x a y, de maneira que, dadas duas arestas consecutivas, digamos $x_1 x_2$ e $x_2 x_3$, x_3 seja posicionado acima de x_2.

$(\mathbb{N}, \leq)$



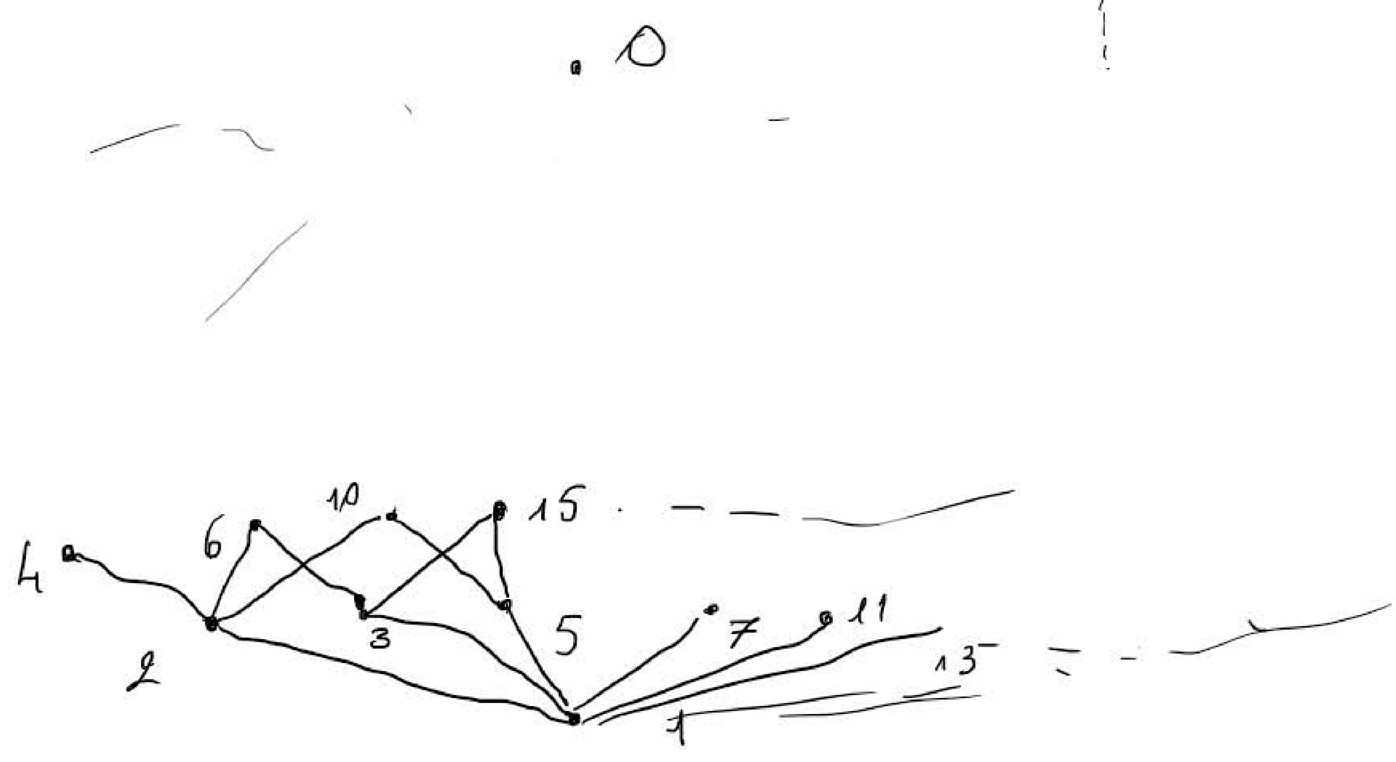
$(\mathbb{Z}, \leq)$



$(\mathbb{N}, |)$

pdts de 2 primos

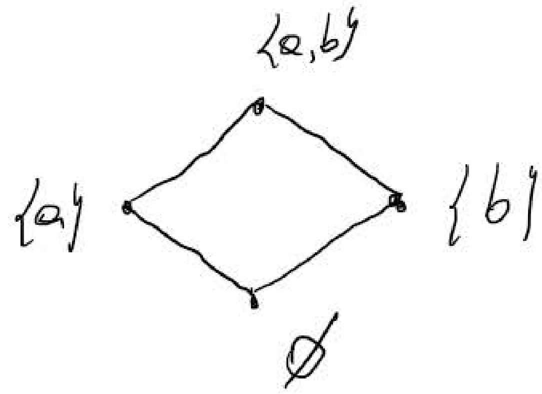
primos



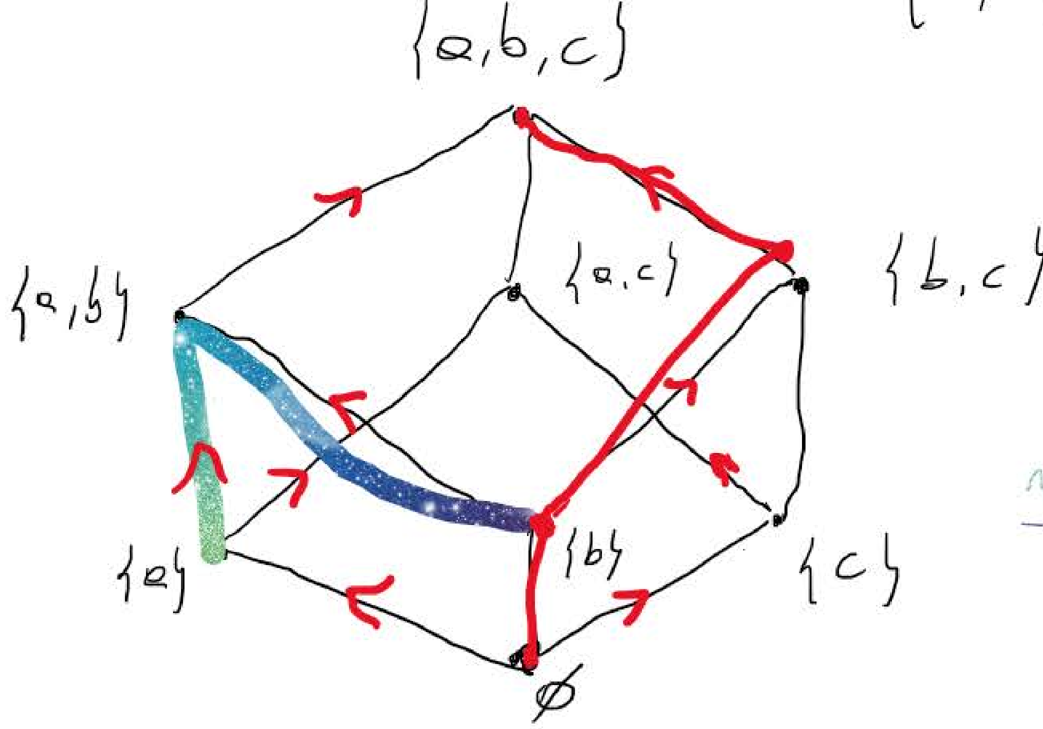
X conjunto qualquer

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ $\quad$ $Y \subseteq Z$ sse $\forall x \in X \, (x \in Y \Rightarrow x \in Z)$

$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

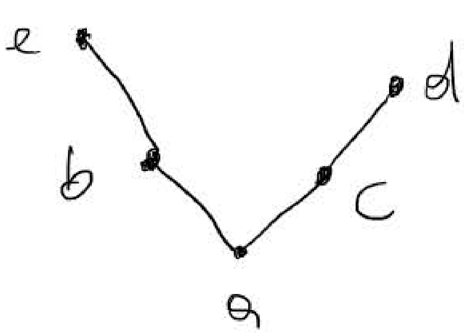


$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ $\quad$ $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$



não é admissível

$S = \{a,b,c,d,e\}$ $\quad$ $\leq \; = \Delta \cup \{(a,b), (a,c), (c,d), (b,e), (a,e), (a,d)\}$

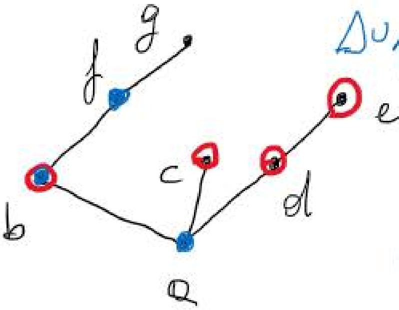


Def. Seja $(S, \leq)$ um conjunto ordenado e seja $X \subseteq S$. Um elemento $x \in S$ é dito:

- uma cota superior ou majorante de X em S se $y \leq x \quad \forall y \in X$;
- uma cota inferior ou minorante de X em S se $x \leq y \quad \forall y \in X$;
- o máximo de X se $x \in X$ e é um majorante de X em S;
- o mínimo de X se $x \in X$ e é um minorante de X em S.

$\Delta \cup \{(a,b),(a,f),(a,g), \ldots$

$X = \{b, c, d, e\}$



$S = \{a, b, \ldots, g\}$

$(S, \leq)$

g é majorante de X em S? Não pois, por exemplo, $g \not\geq d$

a é minorante de X em S pois $a \leq b, a \leq c, a \leq d, a \leq e$.

$Y = \{a, b, f\}$

$u_S(Y) = \{x \in S : x \geq y \quad \forall y \in Y\}$ conjunto dos majorantes de Y em S

$u_S(Y) = \{f, g\} \quad l_S(Y) = \{a\}$

$l_S(Y) = \{x \in S : x \leq y \quad \forall y \in Y\}$ conj. dos minorantes de Y em S

$\min Y = a \quad \max Y = f$

Se $\exists \max X \Rightarrow$ ele é único.

$(\mathbb{N}, \leq)$.

$2\mathbb{N} = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$. $\quad u_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}) = \emptyset$

$2\mathbb{N}+1 = \{2x+1 : x \in \mathbb{N}\}$ $\quad l_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}) = \{0\}$

$u_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}+1) = \emptyset \quad l_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}+1) = \{0, 1\}$

$1 \in 2\mathbb{N}+1 \Rightarrow 1 = \min 2\mathbb{N}+1$

Se $\exists \max X$, ele é único.

Sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ máximos de X. Por definição, $\bar{x} \in X, \bar{y} \in X$, $x \leq \bar{x}\ \forall x \in X$, $x \leq \bar{y}, \forall x \in X$. Em particular, como $\bar{x} \in X$ e $x \leq \bar{y}\ \forall x \in X$, segue $\bar{x} \leq \bar{y}$. Da mesma forma, $\bar{y} \in X$ e $x \leq \bar{x}\ \forall x \in X$, implicam $\bar{y} \leq \bar{x}$. Como $\leq$ é antiss., de $\bar{x} \leq \bar{y}$ e $\bar{y} \leq \bar{x}$ segue $\bar{x} = \bar{y}$.

Analogamente, se $\exists \min X$, ele é único

$(S, \leq)$ poset e $X \subseteq S$

$u_S(X) = \{x \in S : \forall y (y \in X \Rightarrow y \leq x)\}$

$l_S(X) = \{x \in S : \forall y (y \in X \Rightarrow x \leq y)\}$

$u_S(X) \cap X = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou} \\ \{\max X\} \end{cases}$ $\quad | \quad$ $l_S(X) \cap X = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou} \\ \{\min X\} \end{cases}$

Em $(\mathbb{N}, |)$, consideremos o subconjunto $D_{12} = \{x \in \mathbb{N} : x | 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$l_{\mathbb{N}}(D_{12}) = \{x \in \mathbb{N} : x | n\ \underline{\forall} n \in D_{12}\} = \{1\}$

$u_{\mathbb{N}}(D_{12}) = \{x \in \mathbb{N} : n | x\ \underline{\forall} n \in D_{12}\} = \{x \in \mathbb{N} : 12 | x\} = \{12k : k \in \mathbb{N}\}$

$\{\max D_{12}\} = D_{12} \cap u_{\mathbb{N}}(D_{12}) = \{12\}$

$\min D_{12} = 1$

$\exists \max \mathbb{N}$ (na relação de $|$) ?

$\max(\mathbb{N}, |) = 0$ e $\min(\mathbb{N}, |) = 1$

$m, n \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{N}, |)$ $\quad u_{\mathbb{N}}(\{m, n\}) = \{x \in \mathbb{N} : \operatorname{mmc}(m, n) | x\}$

$l_{\mathbb{N}}(\{m, n\}) = \{x \in \mathbb{N} : x | \operatorname{mdc}(m, n)\}$