Se $\vec{u}//\vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, então $\theta = \pi$. É o caso de $\vec{u}$ e $-3\vec{u}$ (Figura 1.28(b)).

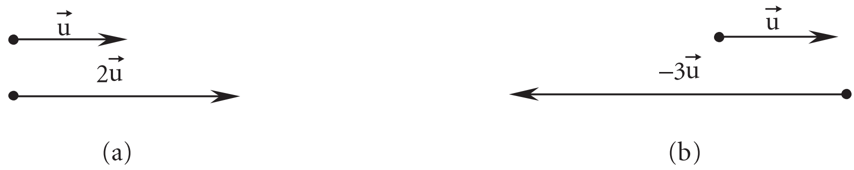


Figura 1.28

Problemas propostos

1. A Figura 1.29 apresenta o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de interseção das diagonais desse losango. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

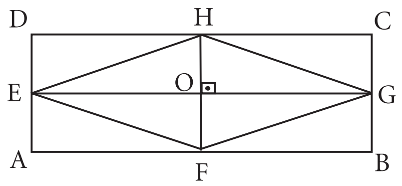


Figura 1.29

a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

d) $|C - O| = |O - B|$

e) $|H - O| = |H - D|$

f) $H - E = O - C$

g) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

h) $|\overrightarrow{OA}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

i) $\overrightarrow{AF} \,//\, \overrightarrow{CD}$

j) $\overrightarrow{GF} \,//\, \overrightarrow{HG}$

k) $\overrightarrow{AO} \,//\, \overrightarrow{OC}$

l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$

n) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$

o) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

2. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

c) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.

e) Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

f) $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

g) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então ABCD (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.

i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

j) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

k) Se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $-10\vec{v}$ é $-\dfrac{\vec{v}}{3}$.

3. Com base na Figura 1.29, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$

b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$

e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$

g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$

h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$

j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

4. O paralelogramo ABCD (Figura 1.30) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

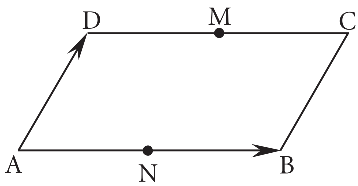


Figura 1.30

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

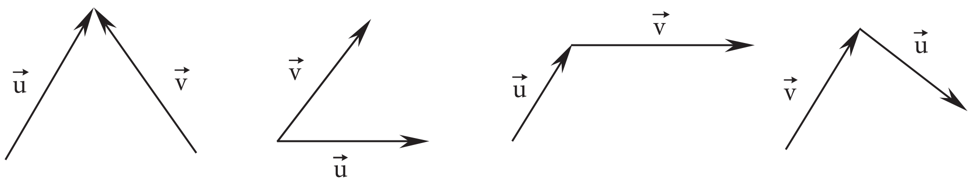
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

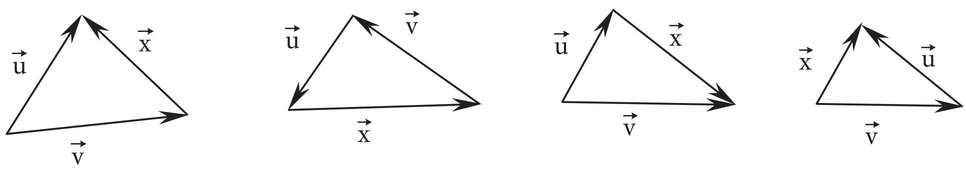
f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

5. Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:



(a) (b) (c) (d)

6. Determinar o vetor $\vec{x}$ nas figuras:



(a) (b) (c) (d)

7. Dados três pontos A, B e C não colineares, como na Figura 1.31, representar o vetor $\vec{x}$ nos casos:

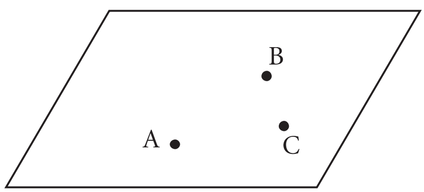


Figura 1.31

a) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$

b) $\vec{x} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$

c) $\vec{x} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

d) $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$

8. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da Figura 1.32, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

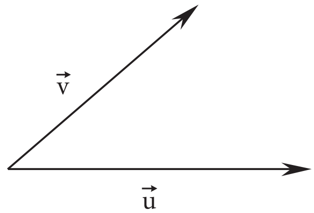


Figura 1.32

9. No triângulo ABC (Figura 1.33), seja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Construir um representante de cada um dos vetores

a) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

b) $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$

c) $\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$

d) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

e) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

f) $\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$

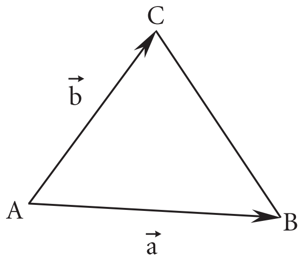


Figura 1.33

10. Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (Figura 1.34), apresentar graficamente um representante do vetor $\vec{x}$ tal que

a) $\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{x} = \vec{0}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{x} = 2\vec{b}$

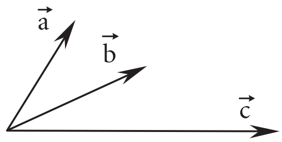


Figura 1.34

11. Na Figura 1.35 estão representados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Indicar, na própria figura, os vetores

a) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

b) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$

Seria possível realizar este exercício no caso de os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serem *não* coplanares?

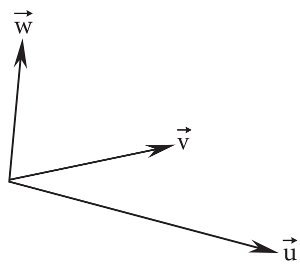


Figura 1.35

12. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ **b)** $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ **c)** $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ **d)** $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

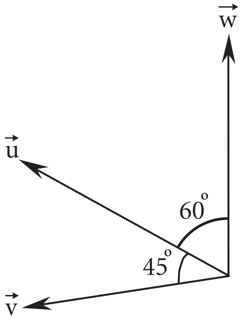


Figura 1.36

13. Dados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na Figura 1.36, determinar

a) um representante do vetor $\vec{x} + \vec{y}$, sendo $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = \vec{v} - 2\vec{u}$;

b) o ângulo entre os vetores $-3\vec{v}$ e $\vec{w}$;

c) o ângulo entre os vetores $-2\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

14. Demonstrar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

15. Demonstrar que o segmento de extremos nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semissoma.

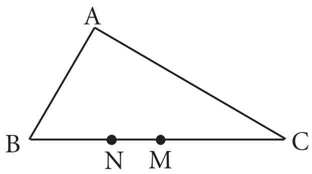


Figura 1.37

16. No triângulo ABC (Figura 1.37), tem-se $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Expressar os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Respostas de problemas propostos

1. **a)** V **d)** V **g)** V **j)** F **m)** V
b) F **e)** F **h)** V **k)** V **n)** F
c) V **f)** F **i)** V **l)** V **o)** V

2. **a)** V **c)** F **e)** F **g)** V **i)** F **k)** V
b) F **d)** V **f)** V **h)** V **j)** V

3. **a)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{AE}$ **g)** $\overrightarrow{AH}$ **i)** $\overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{AE}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ **f)** $\overrightarrow{AE}$ **h)** $\overrightarrow{AE}$ **j)** $\overrightarrow{AC}$

4. **a)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{AE}$ **d)** $\overrightarrow{AE}$ **f)** $\overrightarrow{AE}$

6. **a)** $\vec{u} - \vec{v}$ **b)** $-\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $\vec{v} - \vec{u}$ **d)** $\vec{u} + \vec{v}$

11. Não

12. a) 120° b) 120° c) 60° d) 60°

13. b) 75° c) 60°

16. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

O TRATAMENTO ALGÉBRICO

Vetores no plano

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo esses representantes, respectivamente, (Figura 1.38).

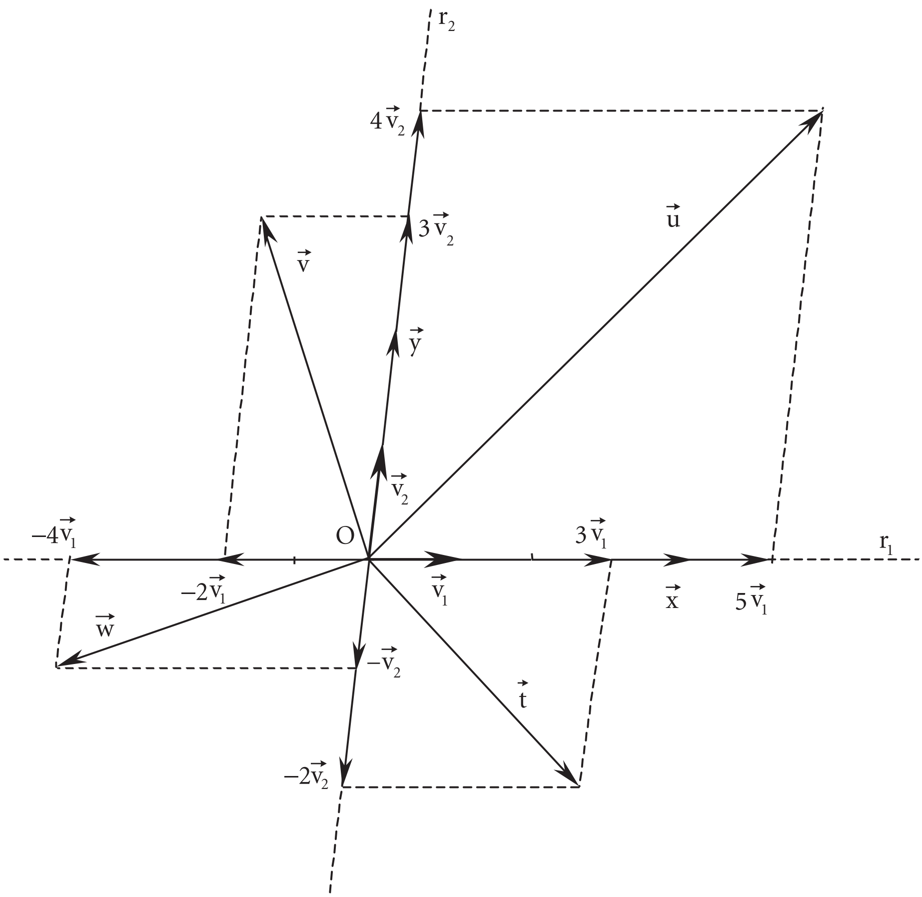


Figura 1.38

Solução

Como os pontos A, B e P pertencem à mesma reta (Figura 1.63), qualquer dupla de vetores formados utilizando estes três pontos são paralelos. Tomemos a condição $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AP}$, ou seja $(-2, -1, -3)//(-4, m+2, n-4)$ e, portanto,

$$\frac{-2}{-4}=\frac{-1}{m+2}=\frac{-3}{n-4} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}-2(m+2)=4\\ -2(n-4)=12\end{cases}$$ no sistema de solução $m=-4$ e $n=-2$.

Figura 1.63

4. Seja o triângulo de vértices $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$. Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.

Solução

A mediana em questão, de acordo com a Figura 1.64, é o segmento que tem como extremidades o ponto médio M de AB e o vértice oposto C. Então, o comprimento da mediana é o módulo do vetor $\overrightarrow{MC}$.

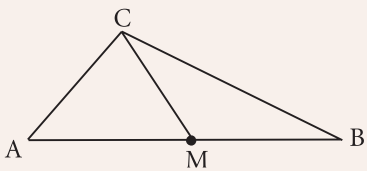


Figura 1.64

$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right)$ ou $M(3, 2, -4)$ e

$\overrightarrow{MC}=C-M=(1,-1,-2)-(3,2,-4)=(-2,-3,2)$

Portanto, $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$.

Problemas propostos

1. Dados os vetores $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{w}=-2\vec{i}+\vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u}-\vec{v}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{v}-\vec{w}$

c) $\vec{v}-\vec{u}+2\vec{w}$

d) $3\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$

2. Dados os vetores $\vec{u}=(3,-1)$ e $\vec{v}=(-1,2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{x}=2\vec{u}-\vec{x}$

b) $3\vec{x}-(2\vec{v}-\vec{u})=2(4\vec{x}-3\vec{u})$

3. Dados os pontos A(–1, 3), B(2, 5), C(3, –1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ **c)** $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

4. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

5. Dados os pontos A(3, –4) e B(–1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$ **c)** $B + 2(B - A)$

b) $(A - B) - \vec{v}$ **d)** $3\vec{v} - 2(A - B)$

6. Sejam os pontos A(–5, 1) e B(1, 3). Determinar o vetor $\vec{v}$ tal que

a) $B = A + 2\vec{v}$ **b)** $A = B + 3\vec{v}$

Construir o gráfico correspondente a cada situação.

7. Representar em um gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:

a) A(–1, 3) e B(3, 5) **c)** A(4, 0) e B(0, –2)

b) A(–1, 4) e B(4, 1) **d)** A(3, 1) e B(3, 4)

8. Qual ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente esse segmento.

9. No mesmo sistema cartesiano xOy, representar:

a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos A(1, 4) e B(1, –4), respectivamente;

b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10. Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).

a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$;

b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

11. Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para:

a) A(–3, –1), B(4, 2) e C(5, 5)

b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

12. Sabendo que A(1, –1), B(5, 1) e C(6, 4) são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

13. Dados os pontos A(–3, 2) e B(5, –2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, em que P seja tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

14. Sendo $A(-2, 3)$ e $B(6, -3)$ extremidades de um segmento, determinar:

a) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.

15. O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e a sua distância ao ponto A é a terça parte da sua distância ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

16. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular:

a) $|\vec{u}|$ **b)** $|\vec{w}|$ **c)** $|2\vec{u} - \vec{w}|$ **d)** $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

e) $|\vec{v}|$ **f)** $|\vec{u} + \vec{v}|$ **g)** $|\vec{w} - 3\vec{u}|$ **h)** $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17. Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18. Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

19. Provar que os pontos $A(-2, -1)$, $B(2, 2)$, $C(-1, 6)$ e $D(-5, 3)$, nesta ordem, são vértices de um quadrado.

20. Encontrar um ponto P do eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto $A(2, -3)$ seja igual a 5.

21. Dados os pontos $A(-4, 3)$ e $B(2, 1)$, encontrar o ponto P nos casos:

a) P pertence ao eixo Oy e é equidistante de A e B;

b) P é equidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;

c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.

22. Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ **b)** $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ **d)** $\vec{v} = (0, 4)$

23. Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

24. Traçar no mesmo sistema de eixos os retângulos de vértices

a) A(0, 0, 1), B(0, 0, 2), C(4, 0, 2) e D(4, 0, 1)

b) A(2, 1, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 2) e D(0, 1, 2)

25. Traçar o retângulo formado pelos pontos (x, y, z) tal que

a) $x = 0, 1 \leq y \leq 4$ e $0 \leq z \leq 4$

b) $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ e $z = 3$

26. Construir o cubo constituído dos pontos (x, y, z), de modo que

a) $-4 \leq x \leq -2$, $1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq z \leq 2$

b) $-2 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 4$ e $-4 \leq z \leq -2$

27. Construir o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos (x, y, z), de modo que $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq y \leq 5$ e $0 \leq z \leq 4$. Quais são as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?

28. Calcular a distância do ponto A(3, 4, –2)

a) ao plano xy;

b) ao plano xz;

c) ao plano yz;

d) ao eixo dos x;

e) ao eixo dos y;

f) ao eixo dos z.

29. A Figura 1.65 apresenta um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo que A(2, –1, 2).

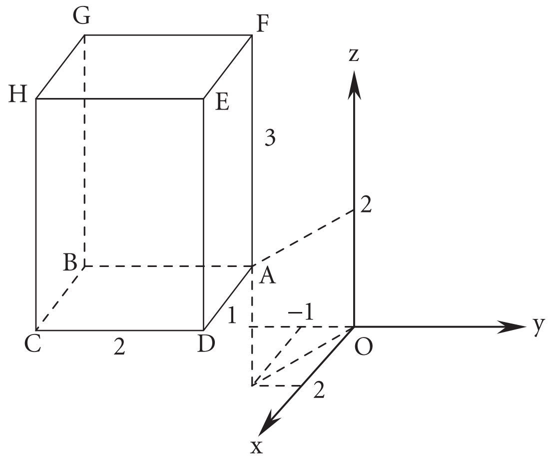


Figura 1.65

30. O paralelepípedo retângulo de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema Oxyz, conforme a Figura 1.66. Considerando um segundo sistema chamado O'x'y'z', no qual Ox//O'x', Oy//O'y' e Oz//O'z', e sendo O' um dos vértices do paralelepípedo de acordo com a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos sistemas dados.

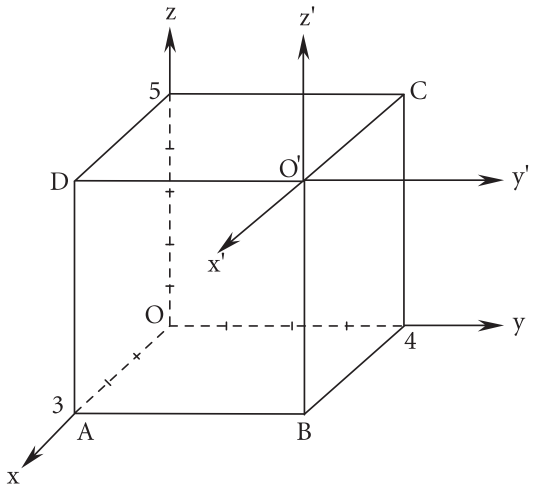


Figura 1.66

31. Dados os pontos A(2, −2, 3) e B(1, 1, 5) e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:

a) $A + 3\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 3(B - A)$

32. Dados os pontos A(3, −4, −2) e B(−2, 1, 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

33. Dados os pontos A(1, −2, 3), B(2, 1, −4) e C(−1, −3, 1), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

34. Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b, e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

35. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$,

a) determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$;

b) encontrar os números a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$.

36. Representar no mesmo sistema Oxyz o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos O(0, 0, 0), A(−3, −4, 0), B(−2, 4, 2), C(3, 0, −4) e D(3, 4, −2).

37. Sendo A(2, −5, 3) e B(7, 3, −1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, −3, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

38. Determinar os três vértices de um triângulo sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, −2), N(3, 1, −3) e P(4, 2, 1).

39. Dados os pontos $A(1, -1, 3)$ e $B(3, 1, 5)$, até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

40. Sendo $A(-2, 1, 3)$ e $B(6, -7, 1)$ extremidades de um segmento, determinar:

a) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

41. O ponto A é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B, C e D. Sendo AA' uma diagonal do paralelepípedo, determinar o ponto A' nos seguintes casos:

a) $A(3, 5, 0)$, $B(1, 5, 0)$, $C(3, 5, 4)$ e $D(3, 2, 0)$

b) $A(-1, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(4, 1, -3)$ e $D(0, -3, -1)$

c) $A(-1, 2, 3)$, $B(2, -1, 0)$, $C(3, 1, 4)$ e $D(-2, 0, 5)$

42. Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

a) paralelo ao eixo x;

b) representado no eixo z;

c) paralelo ao plano xy;

d) paralelo ao plano yz;

e) ortogonal ao eixo y;

f) ortogonal ao eixo z;

g) ortogonal ao plano xy;

h) ortogonal ao plano xz.

43. Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

44. Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

45. A reta que passa pelos pontos $A(-2, 5, 1)$ e $B(1, 3, 0)$ é paralela à reta determinada por $C(3, -1, -1)$ e $D(0, m, n)$. Determinar o ponto D.

46. Verificar se são colineares os pontos:

a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$

b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$

c) $A(-1, 4, -3)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(4, -1, 7)$

47. Sabendo que o ponto $P(m, 4, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(-1, -2, 3)$ e $B(2, 1, -5)$, calcular m e n.

48. Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para

a) $A(-1, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$ e $C(3, -2, 5)$

b) $A(4, 0, 1)$, $B(5, 1, 3)$ e $C(3, 2, 5)$

49. Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \text{ e } \vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

50. Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

51. Determinar o valor de *a* para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

52. Dados os pontos A(1, 0, −1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

53. Determinar o valor de y para que seja equilátero o triângulo de vértices A(4, y, 4), B(10, y, −2) e C(2, 0, −4).

54. Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos A(3,−1,4) e B(1,−2,−3).

55. Obter um ponto P do eixo das cotas cuja distância ao ponto A(−1, 2, −2) seja igual a 3.

56. Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas de problemas propostos

1. **a)** (3, −5) **b)** (−5, 4) **c)** $(1, -\frac{1}{2})$ **d)** $(\frac{13}{2}, -9)$

2. **a)** $(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ **b)** $(\frac{23}{5}, \frac{11}{5})$

3. **a)** (−4, 1) **b)** (2, 5) **c)** (−5, −30)

4. $a_1 = -1$ e $a_1 = 2$

5. **a)** (−8, 11) **b)** (6, −8) **c)** (−9, 11) **d)** (−14, 19)

6. **a)** $\vec{v} = (3, 1)$ **b)** $\vec{v} = (-2, -\frac{2}{3})$

8. (4, −2)

10. **b)** $\vec{0}$

11. **a)** D(−2, 4) **b)** D(1, 2)

12. (2, 2), (0, −4) e (10, 6)

13. $M(1,0), N(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}), P(9,-4)$

14. **a)** $C(0,\frac{3}{2})$, $D(2,0)$, $E(4,-\frac{3}{2})$ **b)** $F(\frac{2}{3},1)$, $G(\frac{10}{3},-1)$

15. $P(\frac{3}{4}x_1+\frac{x_2}{4},\frac{3}{4}y_1+\frac{y_2}{4})$

16. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** 10 **c)** $2\sqrt{13}$ **d)** $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

e) 5 **f)** $\sqrt{13}$ **g)** $\sqrt{34}$ **h)** 1

17. $\pm 2\sqrt{3}$

18. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. (6, 0) ou (−2, 0)

21. **a)** P(0, 5) **b)** P(−5, −10) **c)** $P(x, 3x+5), x \in \mathbb{R}$

22. **a)** $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ **b)** $(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$

c) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ **d)** (0, 1) e (0, −1)

23. **a)** (−2, 6) **b)** $(\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{6}{\sqrt{10}})$ **c)** $(-\frac{4}{\sqrt{10}},\frac{12}{\sqrt{10}})$

27. Vértices da base inferior: (1, 3, 0), (1, 5, 0), (3, 3, 0) e (3, 5, 0)

Vértices da base superior: (1, 3, 4), (1, 5, 4), (3, 3, 4) e (3, 5, 4)

28. **a)** 2 **d)** $2\sqrt{5}$

b) 4 **e)** $\sqrt{13}$

c) 3 **f)** 5

29. B(2, −3, 2), C(3, −3, 2), D(3, −1, 2), E(3, −1, 5), F(2, −1, 5), G(2, −3, 5), H(3, −3, 5)

30. Em relação a Oxyz: O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 5), D(3, 0,5) e O'(3,4,5)

Em relação a O'x'y'z': O(−3, −4, −5), A(0, −4, −5), B(0, 0, −5), C(−3, 0, 0), D(0, −4, 0) e O'(0, 0, 0)

31. **a)** (5, 7, −9) **c)** (−1, 7, 9)

b) (0, −6, 2) **d)** (5, −3, −14)

32. $N(1,-2,-\frac{6}{5})$

33. D(−2,−6,8)

34. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{7}{4}$ e $c = 4$

35. **a)** $\vec{x} = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ **b)** $a_2 = 2,\ a_2 = -3,\ a_2 = 1$

37. $C(6, -1, 3)$ e $D(1, -9, 7)$

38. $(4, -1, -6)$, $(6, 1, 2)$ e $(2, 3, 0)$

39. $(9, 7, 11)$

40. **a)** $(0, -1, \frac{5}{2}), (2, -3, 2), (4, -5, \frac{3}{2})$ **b)** $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}), (\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

41. **a)** $(1, 2, 4)$ **b)** $(9, -7, -4)$ **c)** $(5, -4, 3)$

42. **a)** $(x, 0, 0)$ **e)** $(x, 0, z)$
b) $(0, 0, z)$ **g)** $(0, 0, z)$
c) $(x, y, 0)$ **f)** $(x, y, 0)$
d) $(0, y, z)$ **h)** $(0, y, 0)$

43. São paralelos: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$

44. $a = 9$ e $b = -15$

45. $D(0, 1, 0)$

46. **a)** sim **b)** não **c)** sim

47. $m = 5$ e $n = -13$

48. **a)** $D(1, -3, 6)$ **b)** $D(2, 1, 3)$

49. $\vec{v}$ é unitário

50. $n = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

51. $a = \pm\frac{1}{3}$

52. $m = 3$ ou $-\frac{13}{5}$

53. $y = \pm 2$

54. $P(3, 0, 0)$

55. $P(0, 0, 0)$ ou $P(0, 0, -4)$

56. **a)** $(-6, 3, 9)$ **b)** $(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}})$ **c)** $(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}})$