Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 18/06/2019

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI:

A Sequência de Fibonacci : $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$; definida pela recorrência:

$$\begin{cases} F_0 & = F_1 & = 1 \\ F_{n+2} & = F_{n+1} + & F_n;\ n \geq 0 \end{cases}$$

pode ser obtida pela "SOMA DAS DIAGONAIS INVERSAS" do Triângulo de Pascal.

													Linha-n
			1										0
		$\swarrow$	1	1									1
$F_0 =$	1	$\swarrow$	1	2	1								2
$F_1 =$	1	$\swarrow$	1	3	3	1							3
$F_2 =$	2	$\swarrow$	1	4	6	4	1						4
$F_3 =$	3	$\swarrow$	1	5	10	10	5	1					5
$F_4 =$	5	$\swarrow$	1	6	15	20	15	6	1				6
$F_5 =$	8	$\swarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			7
$F_6 =$	13	$\swarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		8
$F_7 =$	21		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	9
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sequência de Fibonacci:

$$
\begin{array}{lllllll}
F_0 = & \binom{0}{0} & & & & = 1 \\
F_1 = & \binom{1}{0} & & & & = 1 \\
F_2 = & \binom{2}{0} & + \binom{1}{1} & & & = 2 \\
F_3 = & \binom{3}{0} & + \binom{2}{1} & & & = 3 \\
F_4 = & \binom{4}{0} & + \binom{3}{1} & + \binom{2}{2} & & = 5 \\
F_5 = & \binom{5}{0} & + \binom{4}{1} & + \binom{3}{2} & & = 8 \\
F_6 = & \binom{6}{0} & + \binom{5}{1} & + \binom{4}{2} & + \binom{3}{3} & = 13 \\
F_7 = & \binom{7}{0} & + \binom{6}{1} & + \binom{5}{2} & + \binom{4}{3} & = 21 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots
\end{array}
$$

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI:

Generalizando, obtemos $F_n; \forall n \geq 0$ utilizando os números binomiais:

$$F_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} & ; \text{ se } n \text{ for par} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k} & ; \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Exemplo.1:

$$F_{12} = \sum_{k=0}^{\frac{12}{2}} \binom{12-k}{k} = \binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} = (1) + (11) + (45) + (84) + (70) + (21) + (1) = 233; \text{ pois,}$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \forall n \geq 0; \binom{n}{1} = n, \forall n \geq 1; \binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} + \binom{n}{k}$

$\binom{10}{2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2-k}\binom{5}{k} = \binom{5}{2}\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{0}\binom{5}{2} =$
$(10).(1) + (5)(5) + (1)(10) = 45.$

Números de Stirling - Segunda Ordem

Definição(Números de Stirling de Segunda Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos os Números de Stirling de Segunda Ordem por recursão:

$$\begin{cases} S_{n,k} := 0; \textit{ se } \; n < k \\ S_{0,k} := 0; \textit{ se } \; k > 0 \\ S_{n,0} := 0; \textit{ se } \; n > 0 \\ S_{n,n} := 1; \textit{ se } \; n \geq 0 \\ S_{n,k} := S_{n-1,k-1} + k.S_{n-1,k} \end{cases}$$

Notação: $S_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

Observação: "O Número de Stirling de Segunda Ordem é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia"; ou seja, "existem quantas maneiras de partir um conjunto com n elementos em k subconjuntos disjuntos?"

PROPOSIÇÃO:(Números de Stirling de Segunda Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}^*$; $k \leq n$ e A um conjunto com n elementos. Então, o Número de Stirling de Segunda Ordem $S_{n,k}$ é o número das k-partições de A.

Demonstração: Seja A um conjunto com n elementos: $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$; e sejam os subconjuntos de A **não vazios** e **disjuntos**: A_i; $i = 1, 2, \cdots, k$ tais que; $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$; e $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$; Considerando um elemento fixo $x \in A$ temos duas possibilidades para a k-ésima partição de A: (i) Se $\{x\}$ for um bloco da partição para A então, os blocos restantes são formados a partir de $(k-1)$ partições do conjunto $A \backslash \{x\}$, isto é, x ficará sozinho num subconjunto. Assim, temos $S_{n-1,k-1}$ possibilidades. (ii) Se $\{x\}$ não for um bloco da partição para A então $A \backslash \{x\}$ é partido em k blocos; isto é, x não ficará sozinho num subconjunto; isto poderá ser feito de $S_{n-1,k}$ possibilidades. Ou seja, distribuímos os $k-1$ elementos em k subconjuntos e agora o elemento x precisa ser alocado em um dos k-subconjuntos em k modos distintos. Neste caso, obtemos entâo $k.S_{n-1,k}$ possibilidades. Logo; pelo princípio da adição, o número das k-partições do conjunto A de n elementos é dado por $S_{n,k} := S_{n-1,k-1} + k.S_{n-1,k}$; ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k. \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}.$$

Números de Stirling - Segunda Ordem

REPRESENTAÇÃO:(Números de Stirling de Segunda Ordem)

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0		$\left\{ {0 \atop 0} \right\}$						$\cdots$
1		$\left\{ {1 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {1 \atop 1} \right\}$					$\cdots$
2		$\left\{ {2 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 2} \right\}$				$\cdots$
3		$\left\{ {3 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 3} \right\}$			$\cdots$
4		$\left\{ {4 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 4} \right\}$		$\cdots$
5		$\left\{ {5 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 4} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 5} \right\}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Números de Stirling - Segunda Ordem

REPRESENTAÇÃO:(Números de Stirling de Segunda Ordem)

n k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						$\cdots$
1	0	1					$\cdots$
2	0	1	1				$\cdots$
3	0	1	3	1			$\cdots$
4	0	1	7	6	1		$\cdots$
5	0	1	15	25	10	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

OBSERVAÇÃO:

(i) $S_{n,n} = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\} := 1, n \geq 0;\ S_{n,0} = \left\{ \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right\} := 0, n > 0;$

$S_{n,1} = \left\{ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\} = 1;$ *se* $n > 0$; e,

(ii) $S_{n,k} := \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k.\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\};$

por exemplo; $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 3.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 25 = 7 + 3.6.$

Números de Stirling - Segunda Ordem

Representação:(Números de Stirling de Segunda Ordem)
Observação:
O número de maneiras de distribuirmos n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhum vazia é dado por;

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (k-i)^n.$$

"textcolorredNote que podemos calcular o número de Stirling de segunda ordem utilizando os coeficientes binomiais".

Exemplo.1: Calcular $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\}$ utilizando os coeficientes binomiais.

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ i \end{array} \right) (3-i)^5 =$$

$$= \frac{1}{3!} \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right) (3)^5 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) (2)^5 + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) (1)^5 - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) (0)^5 \right) =$$

$$\frac{1}{6} \left(1.(3)^5 - 3.(2)^5 + 3.(1)^5 - 1.(0)^5 \right) = \frac{1}{6} (243 - 96 + 3 - 0) = 25$$

Números de Stirling - Primeira Ordem

Definição(Números de Stirling de Primeira Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos os Números de Stirling de Primeira Ordem por recursão:

$$\begin{cases} P_{n,k} := 0; \, se \quad n < k \\ P_{n,0} := 0; \, se \quad n > 0 \\ P_{0,k} := 0; \, se \quad k > 0 \\ P_{n,1} := (n-1)! \\ P_{n,n} := 1; \, se \quad n \geq 0 \\ P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k} \end{cases}$$

Notação: $P_{n,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$

Observação: "O Número de Stirling de Primeira Ordem é o número de maneiras de distribuir n pessoas distintas em k mesas idênticas, com nenhuma mesa vazia"; ou seja, "existem quantas maneiras de distribuir os n elementos de um conjunto em k círculos?"

Números de Stirling - Primeira Ordem

Proposição:(Números de Stirling de Primeira Ordem)

Sejam $n, k \in \mathbb{N}^*$; $k < n$ e A um conjunto com n elementos. Então, o Número de Stirling de Primeira Ordem $P_{n,k} = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$.

Demonstração: Seja A um conjunto com n elementos: $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$; para serem distribuídos em k círculos **não vazios**.
Considerando um elemento qualquer $x \in A$ temos duas possibilidades: (i) Se $\{x\}$ ficar em um círculo isolado, então os $(k-1)$ círculos restantes são formados por $(n-1)$ elementos de A. Assim, temos $P_{n-1,k-1} = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right]$ possibilidades de arranjarmos $(n-1)$ elementos nos $(k-1)$ círculos.
(ii) Caso contrário, $\{x\}$ ficará em um círculo com outros elementos de A. Então, distribuímos os $(n-1)$ elementos em k círculos; neste caso, note que em cada círculo temos $(n-1)$ posições para encaixar o elemento x. Assim, temos $P_{n-1,k} = (n-1). \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]$ possibilidades. Logo; pelo princípio da adição,

$$P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1).P_{n-1,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1). \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right].$$

Números de Stirling - Primeira Ordem

REPRESENTAÇÃO:(Números de Stirling de Primeira Ordem)

n	k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0		$\left[\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right]$						$\cdots$
1		$\left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right]$					$\cdots$
2		$\left[\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right]$				$\cdots$
3		$\left[\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right]$			$\cdots$
4		$\left[\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right]$		$\cdots$
5		$\left[\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right]$	$\left[\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right]$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Números de Stirling - Primeira Ordem

REPRESENTAÇÃO:(Números de Stirling de Primeira Ordem)

n k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						$\cdots$
1	0	1					$\cdots$
2	0	1	1				$\cdots$
3	0	2	3	1			$\cdots$
4	0	6	11	6	1		$\cdots$
5	0	24	50	35	10	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

OBSERVAÇÃO:

(i) $P_{n,n} = \left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right] := 1, n \geq 0;\ P_{n,0} = \left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right] := 0, n > 0;$

$P_{n,1} = \left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right] := (n-1)!, n > 0;$ e,

(ii) $P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + (n-1).P_{n-1,k} = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right] + (n-1).\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right];$

por exemplo; $\left[\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] + (5-1).\left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right] \Rightarrow 35 = 11 + 4.6.$

Números de Stirling - Exercícios

(1) Calcule os seguintes números de Stirling de Segunda Ordem:

1. $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = \dfrac{1}{2!} \displaystyle\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ i \end{array} \right) (2-i)^4 =$
$\dfrac{1}{2} \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) (2)^4 - \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) (1)^4 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) (0)^4 \right) =$
$\dfrac{1}{2}(1.16 - 2.1 + 2.0) = \dfrac{1}{2}(14) = 7.$
2. $\left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right\} =$

$$\left\{\begin{array}{c}6\\3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}5\\2\end{array}\right\} + (3).\left\{\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}4\\1\end{array}\right\} + (2).\left\{\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right\} + 3.\left\{\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right\} +$$

$$9.\left\{\begin{array}{c}4\\3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}4\\1\end{array}\right\} + 5.\left\{\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right\} + 9.\left\{\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right\} + 27.\left\{\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{c}4\\1\end{array}\right\} + 5.\left\{\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right\} + 10.\left\{\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right\} + 9.\left\{\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right\} + 27.\left\{\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{c}4\\1\end{array}\right\} + 5.\left\{\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right\} + 19.\left\{\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right\} + 27.\left\{\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}4\\1\end{array}\right\} + 5.\left\{\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right\} +$$

$$19.\left\{\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right\} + 38.\left\{\begin{array}{c}2\\2\end{array}\right\} + 27.\left\{\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right\} = 1 + 5.1 + 19.1 + 38.1 + 27.1 = 90.$$

ou; $\left\{\begin{array}{c}6\\3\end{array}\right\} = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\left(\begin{array}{c}3\\i\end{array}\right)(3-i)^6 =$

$$\frac{1}{6}\left(\left(\begin{array}{c}3\\0\end{array}\right)(3)^6 - \left(\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right)(2)^6 + \left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)(1)^6 - \left(\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right)(0)^6\right) =$$

$$\frac{1}{6}(1.3^6 - 3.2^6 + 3.1^6 - 1.0^6) = \frac{1}{6}(540) = 90.$$

Números de Stirling - Exercícios

(2) Calcule por recursão os seguintes números de Stirling de Primeira Ordem:

1. $$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-1\\2-1\end{bmatrix}+(4-1).\begin{bmatrix}4-1\\2\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+(3).\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+(2).\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)\Rightarrow 2+3(1+2.1)=11.$$

2. $$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+(5).\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+(4).\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+5.\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+$$
$$20.\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+9.\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+20.\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+60.\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+9.\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+27.\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+20.\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+60.\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+9.\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+47.\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+60.\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+9.\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+47.\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+94.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+60.\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=$$
$$6+9.2+47.1+94.1+60.1=225.$$

(3) De quantas maneiras podemos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5 em duas caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia?

(4) De quantas maneiras podemos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5 em três caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia?

(5) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em uma mesa redonda. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

(6) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 2 mesas redondas idênticas. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

(3) Seja $A = \{o1, o2, o3, o4, o5\}$ o conjunto dos cinco objetos. Vamos iniciar colocando o objeto $o1$ numa caixa qualquer visto que são idênticas. Agora, vamos alocar os outros, como são duas caixas, temos duas possibilidades para cada: 2^4. Todavia, temos que eliminar o caso no qual ficamos com todos os objetos na mesma caixa que $o1$, para que não fique uma caixa vazia. Então, ficamos com $2^4 - 1 = 15 = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ possibilidades de distribuirmos 5 objetos em duas caixas idênticas com nenhuma vazia.

(4) Seja $A = \{o1, o2, o3, o4, o5\}$ o conjunto dos cinco objetos. Vamos iniciar colocando o objeto $o1$ numa caixa qualquer visto que são idênticas; e consideremos dois casos: (i) $o1$ ficar sozinho numa caixa e os outros nas outras duas: $2^3 - 1 = 7 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$; ou (ii) $o1$ não ficar sozinho numa caixa então os outros podem ser distribuídos nas 3 caixas. Temos que distribuir 4 objetos em 3 caixas idênticas: $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ e; o objeto $o1$ numa das três caixas de 3 modos distintos: $3.\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$. Pelo princípio da adição, temos $(i) + (ii) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 3.\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 7 + 3.6 = 25$ maneiras de distribuir 5 objetos numerados de 1 a 5 em três caixas idênticas.

Números de Stirling - Exercícios

(5) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em uma mesa redonda. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?
$\frac{4!}{4} = (4-1)! = 6 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right] + 3. \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right] = 0 + 3.2 = 6.$

(6) Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 2 mesas redondas idênticas. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?
Seja $A = \{c1, c2, c3, c4\}$ o conjunto dos convidados. Vamos iniciar acomodando $c1$, para tal, temos duas possibilidades: (i) $c1$ ficar sozinho numa mesa e os outros $c2, c3, c4$ na outra mesa: $1.(3-1)! = 1.2 = 2$; ou (ii) $c1$ não ficar sozinho numa mesa; e os outros $c2, c3, c4$ podem ser distribuídos nas 2 mesas: $[c1, c2]\&[c3, c4]$ ou $[c1, c3]\&[c2, c4]$ ou $[c1, c4]\&[c2, c3]$ ou $[c1, c2, c3]\&[c4]$ ou $[c1, c2, c4]\&[c3]$ ou $[c1, c3, c4]\&[c2]$ ou $[c1, c3, c2]\&[c4]$ ou $[c1, c4, c2]\&[c3]$ ou $[c1, c4, c3]\&[c2]$ ou $[c1, c2]\&[c3, c4]$ ou $[c1, c2]\&[c3, c4]$ ou $[c1, c2]\&[c3, c4]$; pelo princípio da adição, temos
$(i) + (ii) = 2 + 9 = 11 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right] + 3. \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right] = 2 + 3.3 = 11$