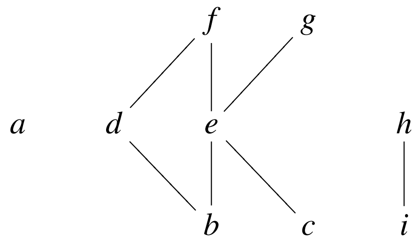
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Terceira unidade – 01/06/2016

1. Seja $(Y, \leq)$ o conjunto ordenado cujo diagrama de Hasse é o seguinte.



(a) Verifique se Y é um reticulado.

(b) Encontre eventuais máximo, mínimo, elementos maximais e elementos minimais de Y.

(c) Encontre, se existir, $\sup_Y\{c, d, e\}$.

(d) Liste todos os pares em $\leq$ cuja primeira componente é a ou c.

2. Considere os conjuntos ordenados $X = (D_{154}, |)$ e $Y = (\{0, 1\}, \leq_{\mathbb{N}})$.

(a) Desenhe o diagrama de Hasse do produto lexicográfico $(X \times Y, \leq_{\text{lex}})$.

(b) Prove que a função $f : X \to Y$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 7 \nmid x \\ 1 & \text{se } 7 \mid x \end{cases}$$

é um homomorfismo de álgebras de Boole. (Dica: Ao invés de verificar todo sup e todo complemento, é muito mais rápido usar o fato que a imagem de múltiplos de 7 é 1 e a dos outros é 0.)

(c) Defina uma função $g : Y \to X$ que seja um homomorfismo de reticulados mas não de álgebras de Boole.

(d) (Opcional.) Defina uma função $h : X \to Y$ que seja um homomorfismo de reticulados mas não de álgebras de Boole.

3. Considere os seguintes conjuntos ordenados:

$$X = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \leq_{\mathbb{N}}), \quad V = (D_{66}, |), \quad W = (D_{18}, |), \quad Y = (D_{33}, |), \quad Z = (D_{27}, |).$$

(a) Determine quais deles não podem ser álgebras de Boole pelo Teorema de Representação de Stone (caso finito).

(b) Dos restantes, determine as álgebras de Boole usando a caraterização dos D_n que são desse tipo.

(c) (Opcional.) Defina um isomorfismo entre uma das álgebras encontradas no item (b) e $Z = (\wp(\{a, b, c\}, \subseteq)$, e uma imersão da outra álgebra em Z.