Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 07/03/2019

Definição: (Conjunto Universo)

Seja $\mathcal{U}$ um conjunto. Dizemos que $\mathcal{U}$ é Conjunto Universo se, e somente se, $\mathcal{U}$ contém todos os conjuntos em discussão.

Definição:

Sejam $\mathcal{U}$ conjunto universo e $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que o conjunto $\mathcal{U} \backslash A := \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A\}$ é o Complemento de A relativo em $\mathcal{U}$. Notação: $\sim A$ ou $\overline{A}$ ou $C_{\mathcal{U}}^{A}$.

Exemplos:

1. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ e $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 15\}$ então $(\sim A) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$
2. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y;\text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$, e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y + 1;\text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$, então $\sim A = B$ e $\sim B = A$;
   Note que: $A \cup B = \mathcal{U}$ e $A \cap B = \emptyset$.

Propriedades:

Sejam o conjunto universo $\mathcal{U}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(i) $\sim(\sim A) = A$

(ii) $\sim \emptyset = \mathcal{U}$

(iii) $\sim \mathcal{U} = \emptyset$

(iv) $A \cup (\sim A) = \mathcal{U}$

(v) $A \cap (\sim A) = \emptyset$

Proposição:

Sejam $\mathcal{U}$ conjunto universo e $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então;

(i) $\sim(A \cap B) = (\sim A) \cup (\sim B)$

(ii) $\sim(A \cup B) = (\sim A) \cap (\sim B)$

Observação.13: A proposição acima denota as "**Leis de DeMorgan**".

Definição: (Diferença Simétrica)

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que o conjunto $C := \{(A \backslash B) \cup (B \backslash A)\}$ é a Diferença Simétrica de A com B.
Notação: $A \Delta B$

Exemplos:

1. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ então
   $(A \backslash B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x > 10\}$
   $(B \backslash A) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
   $(A \Delta B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5 \text{ ou } x > 10\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y; \text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$ e
   $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y + 1; \text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$
   então $(A \backslash B) := A$
   $(B \backslash A) := B$
   $(A \Delta B) := A \cup B = \mathbb{N}$

PROPRIEDADES:

Sejam A e B conjuntos quaisquer.
Então;

(i) $A \Delta B = B \Delta A$

(ii) $A \Delta \emptyset = A$

(iii) $A \Delta A = \emptyset$

DEFINIÇÃO: (Família de Conjuntos)

Sejam $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\mathcal{I}$ um conjunto de n índices. Dizemos que o conjunto $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é uma família de conjuntos.

EXEMPLO: Seja $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ então
$\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ é uma família com 6 conjuntos.

OBSERVAÇÃO.14:

- Seja a família $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}} \neq \emptyset$; onde $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}, n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos o conjunto INTERSECÇÃO desta família como sendo: $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e } \cdots \text{ e } x \in A_n\}$
- Seja a família $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}} \neq \emptyset$; onde $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}, n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos o conjunto UNIÃO desta família como sendo: $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } x \in A_3 \text{ ou } \cdots \text{ ou } x \in A_n\}$

EXEMPLOS:

Seja a família de conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ tais que:
$A_1 := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$, $A_2 := \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$, e
$A_3 := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y;\text{ para algum } y \in \mathbb{N}\}$

1. $\bigcap\{A_1, A_2, A_3\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 11 \text{ e } x = 2y;$ para algum $y \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2. $\bigcup\{A_1, A_2, A_3\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11 \text{ ou } x > 1 \text{ ou }$ $x = 2y;$ para algum $y \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\} = \mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO:(**Leis de DeMorgan**)

Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto de índices e $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \neq \emptyset$ uma família de conjuntos em um conjunto universo $\mathcal{U}$. Então;

(i) $\sim (\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (\sim A_i)$

(ii) $\sim (\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (\sim A_i)$

Diagrama de Venn

- John Venn foi um matemático inglês do século XIX. Em 1881, Ele introduziu uma representação gráfica dos conjuntos.
- Podemos utilizar os diagramas de Venn a fim de representar, graficamente, os conjuntos e as operações entre os conjuntos.

Exemplo:

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

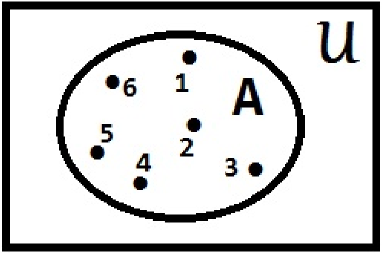


Diagrama de Venn

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; podemos representar as operações: intersecção e união, utilizando o *Diagrama de Venn*.

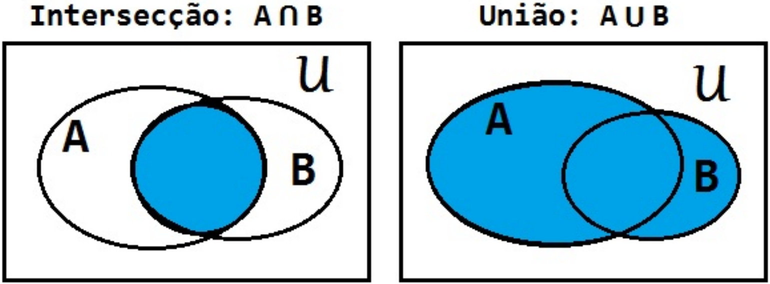
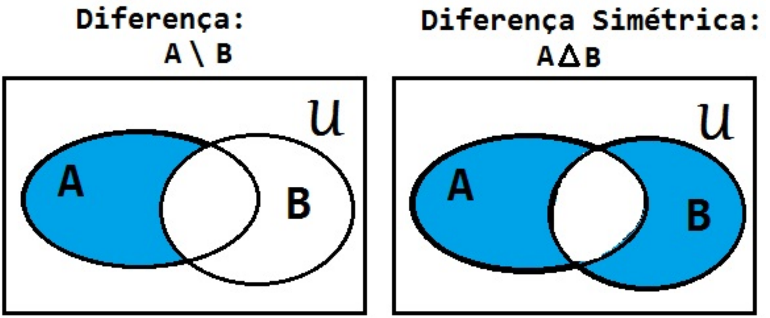


Diagrama de Venn

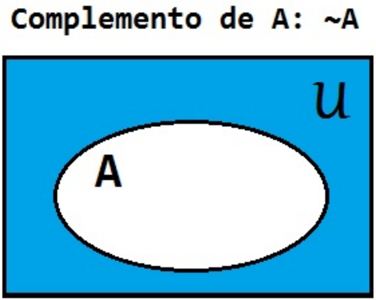
Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; podemos representar as operações: diferença e diferença simétrica, utilizando o *Diagrama de Venn*



Teoria de Conjuntos - Representação Gráfica

Diagrama de Venn

Seja o conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$; podemos representar o complemento de A relativo ao conjunto universo $\mathcal{U}$, utilizando o *Diagrama de Venn*



Teoria de Conjuntos - Exercícios

Questão.1: Sejam os conjuntos:
$A = \{0, 1, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}, C = \{4, 5\}$,
D=$\{$5, 6, 7$\}$.*Determine* :

(a) $(A \cup C) \cap B$
(b) $(B \cap C) \cup D$
(c) $(B - A) \cap C$
(d) $(B - C) \cup (A \cap B)$

Questão.1: (Respostas) $A = \{0, 1, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$, C=$\{4, 5\}$, D=$\{5, 6, 7\}$.

(a) $(A \cup C) \cap B = \{3, 4, 5\}$

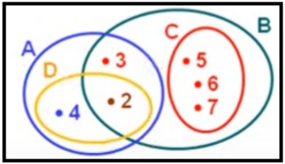
(b) $(B \cap C) \cup D = \{4, 5, 6, 7\}$

(c) $(B - A) \cap C = \{5\}$

(d) $(B - C) \cup (A \cap B) = \{2, 3, 4\}$

Questão.2: Sejam os conjuntos: $A = \{2,3,4\}, B = \{2,3,5,6,7\}$, C=$\{$5, 6, 7$\}$, D=$\{$2, 4$\}$.
Desenhe o Diagrama de Venn representando os conjuntos e determine as seguintes relações entre os conjuntos:

(a) $(A \cap B) \cup C =$
(b) $(C \cup D) \cap B =$
(c) $(A \cap D) \cup (A \cap C) =$
(d) $(C \cap D) \cup A =$
(e) $(B - A) \cup D =$
(f) $B - (C \cup D) =$
(g) $B - (A - D) =$
(h) $A - (D \cap A) =$
(i) $(A - D) \cup (B - C) =$



Questão.2: (Respostas)

(a) $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

(b) $(C \cup D) \cap B = \{2, 5, 6, 7\}$

(c) $(A \cap D) \cup (A \cap C) = \{2, 4\}$

(d) $(C \cap D) \cup A = \{2, 3, 4\}$

(e) $(B - A) \cup D = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

(f) $B - (C \cup D) = \{3\}$

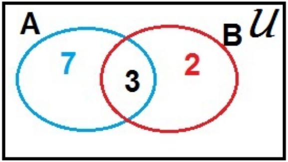
(g) $B - (A - D) = \{2, 5, 6, 7\}$

(h) $A - (D \cap A) = \{3\}$

(i) $(A - D) \cup (B - C) = \{2, 3\}$

Questão.3: Sejam os conjuntos A e B, tais que $\#A = 10, \#(A \cap B) = 3$ e $\#(A \cup B) = 12$. Determine $\#B$ utilizando o Diagrama de Venn.

Questão.3: Sejam os conjuntos A e B, tais que $\#A = 10, \#(A \cap B) = 3$ e $\#(A \cup B) = 12$. Determine $\#B$.



Logo, $\#B = 5$.

Princípio da Inclusão e Exclusão

Sejam A e B CONJUNTOS DISJUNTOS, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
Verificamos que o "número total" de elementos que pertencem a A ou a B, ou seja, a $A \cup B$ é dado por:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

Sejam A e B conjuntos não-disjuntos, ou seja, $A \cap B \neq \emptyset$. Então, quando unimos os elementos de A com os de B, INCLUIMOS alguns elementos que pertencem a ambos os conjuntos. Desta forma, para obtermos $\#(A \cup B)$ precisamos EXCLUÍ-los. Assim,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

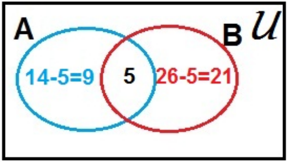
Exemplo.1: Um repórter entrevista 35 pessoas que optam pela CONDIÇÃO.1, CONDIÇÃO.2 ou ambos e conclui que 14 entrevistados optaram pela CONDIÇÃO.1, 26 pela CONDIÇÃO.2. Quantos entrevistados escolheram ambos?

Exemplo.1:

Resolução:

A =pessoas que optam pela CONDIÇÃO.1
B = pessoas que optam pela CONDIÇÃO.2
Então, $\#(A \cup B) = 35$.
Como, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
$35 = 14 + 26 - \#(A \cap B)$
$\#(A \cap B) = 5$.

Visualizando no Diagrama de Venn :



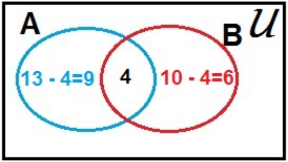
Conclusão: 5 pessoas optaram pelas CONDIÇÕES.1 e 2.

Exemplo.2: Todos os convidados de uma festa BEBEM CAFÉ e/ou BEBEM CHÁ.
13 convidados BEBEM CAFÉ, 10 BEBEM CHÁ e 4 BEBEM CAFÉ E CHÁ. Quantas pessoas tem na festa?

Resolução:

A =pessoas que BEBEM CAFÉ
B =pessoas que BEBEM CHÁ
Como, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
$\#(A \cup B) = 13 + 10 - 4$
$\#(A \cup B) = 19.$

Visualizando no Diagrama de Venn :



Conclusão: Existem 19 pessoas na festa.

Extensão do Princípio da Inclusão e Exclusão

Proposição: Extensão do Princípio da Inclusão e Exclusão

Sejam A, B e C conjuntos não disjuntos, então $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Demonstração:

$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) = \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C)) = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#((A \cap B) \cap (A \cap C))] = \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C). \blacksquare$

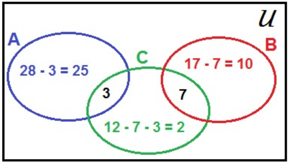
Exemplo.3: O controle de qualidade em uma fábrica verificou 47 peças com DEFEITOS DE PINTURA, DEFEITOS DE EMBALAGEM e/ou DEFEITOS NA PARTE ELETRÔNICA. Dessas peças, 28 tinham defeitos de pintura, 17 tinham defeitos na embalagem, 12 tinham defeitos na parte eletrônica, 7 tinham defeitos na embalagem e na parte eletrônica, 3 tinham defeitos de pintura e defeitos na parte eletrônica. Alguma peça tinha os três defeitos?

Exemplo.3:

Resolução:

$A =$ DEFEITOS DE PINTURA
$B =$ DEFEITOS DE EMBALAGEM
$C =$ DEFEITOS NA PARTE ELETRÔNICA
Então; $\#(A \cup B \cup C) =$
$\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C);$
$47 = 28 + 17 + 12 - 0 - 3 - 7 + \#(A \cap B \cap C);$
$\#(A \cap B \cap C) = 0.$

Visualizando no Diagrama de Venn :



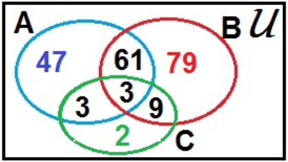
Conclusão: Nenhuma peça apresentou os três defeitos ao mesmo tempo.

Exemplo.4: Uma quitanda vende BROCÓLIS, CENOURA, QUIABO. Em determinado dia, a quitanda atendeu 204 pessoas. Se 114 pessoas compraram brocólis, 152 compraram cenouras, 17 compraram quiabos, 64 compraram brocólis e cenouras, 12 compraram cenouras e quiabos e 3 compraram os três. Quantas pessoas compraram brocólis e quiabos?

Exemplo.4:

Resolução:

A = pessoas que compraram BROCÓLIS
B = pessoas que compraram CENOURAS
C = pessoas que compraram QUIABOS
Então; $\#(A \cup B \cup C) =$
$\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$;
$204 = 114 + 152 + 17 - 64 - \#(A \cap C) - 12 + 3$;
$\#(A \cap C) = 6$.
Visualizando no Diagrama de Venn :



Conclusão: 6 pessoas compraram brocólis e quiabos.