Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 11/06/2019

Proposição.5:(Relação de Stifel)

Sejam n, k inteiros tais que e $n \geq k \geq 0$. Então,
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$$

Demonstração: Consideremos um conjunto com $n+1$ objetos, onde n são brancos e 1 é azul. Podemos selecionar $k+1$ objetos deste conjunto de $n+1$ elementos, de $\binom{n+1}{k+1}$ maneiras distintas. Por outro lado, "estes subconjuntos são de tal maneira que o objeto azul pode ser escolhido, ou não": (i) Se o objeto azul foi escolhido, temos $1.\binom{n}{k}$ possibilidades, pois o restante dos objetos devem ser brancos (ii) Se o objeto azul não foi escolhido, temos $\binom{n}{k+1}$ possibilidades, pois neste caso todos os elementos devem ser brancos. Como os dois casos são disjuntos, temos pelo princípio da adição, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$; onde $0 \leq k \leq n$.

Demonstração: Podemos também demonstrar a *Relação de Stifel* como segue: desenvolvendo o coeficiente $C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^{(n+1)-(k+1)} = C_{n+1}^{n-k}$; então,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n-k} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1).n!}{(n-k).(n-k-1)!(k+1).k!} =$$
$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k).(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n-k)+(k+1)}{(n-k).(k+1)} =$$
$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\left(\frac{(n-k)}{(n-k).(k+1)} + \frac{(k+1)}{(n-k).(k+1)}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(n-k)}\right) =$$
$$\frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)k!} + \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!.k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!}. + \frac{n!}{(n-k)!.k!} =$$
$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = C_n^{k+1} + C_n^k;$$ ou,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} =$$
$$\frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!.k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)k!} = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\left(\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{(k+1)}\right) =$$
$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\left(\frac{(k+1)}{(n-k).(k+1) + \frac{(n-k)}{(n-k).(k+1)}}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n-k)+(k+1)}{(n-k).(k+1)} =$$
$$\frac{n!}{(n-k-1)!.k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k).(k+1)} = \frac{(n+1).n!}{(n-k).(n-k-1)!(k+1).k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} =$$
$$\binom{n+1}{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Números Binomiais

Proposição.3:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = C_n^{n-k}$

Proposição.5:(Relação de Stifel)

Sejam n, k naturais tais que e $0 \leq k \leq n$. Então,
$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$

Corolário:(Triângulo de Pascal)

A n-èsima linha deste triângulo consiste em todos os valores $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$;

onde $0 \leq k \leq n$.

Corolário:(Triângulo de Pascal)

$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$; onde $0 \leq k \leq n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & & & 0 \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & 1 \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & & 2 \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & & 3 \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & & 4 \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & 5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Linha-n

Números Binomiais - (Triângulo de Pascal)

						Linha-n
$\underbrace{\binom{0}{0}}_{1}$						0
$\underbrace{\binom{1}{0}}_{1}$	$\underbrace{\binom{1}{1}}_{1}$					1
$\underbrace{\binom{2}{0}}_{1}$	$\underbrace{\binom{2}{1}}_{2}$	$\underbrace{\binom{2}{2}}_{1}$				2
$\underbrace{\binom{3}{0}}_{1}$	$\underbrace{\binom{3}{1}}_{3}$	$\underbrace{\binom{3}{2}}_{3}$	$\underbrace{\binom{3}{3}}_{1}$			3
$\underbrace{\binom{4}{0}}_{1}$	$\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}$	$\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}$	$\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}$	$\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}$		4
$\underbrace{\binom{5}{0}}_{1}$	$\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}$	$\underbrace{\binom{5}{2}}_{10}$	$\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}$	$\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}$	$\underbrace{\binom{5}{5}}_{1}$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Corolário:(Triângulo de Pascal)

												Linha-n
					1							0
				1		1						1
			1		2		1					2
		1		3		3		1				3
	1		4		6		4		1			4
1		5		10		10		5		1		5
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Proposição.3: $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = C_n^{n-k}$; e,

Proposição.5:

$$C_{n+1}^{k+1} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{n-k}$$

OBSERVAÇÕES:

1. As ARESTAS do triângulo de Pascal têm sempre o valor "1":
$C_n^0 = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = 1 = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = C_n^n;$
2. Proposição.3: Os elementos EQUIDISTANTES possuem o mesmo valor,
$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) = C_n^{n-k};$
3. "Relação de Stifel" (IDENTIDADE DE PASCAL): Qualquer elemento INTERIOR do triângulo pode ser obtido pela soma dos dois elementos diretamente acima (linha anterior),
$C_{n+1}^{k+1} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = C_n^k + C_n^{k+1};$
4. A soma de todos os valores da n-ésima linha, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$, é igual ao número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

PROPOSIÇÃO.6:

Sejam n e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam A um conjunto com n elementos e $0 \leq k \leq n$. Sabemos que o número de subconjuntos com k elementos de A é dado por $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$. Assim, temos que o número total de subconjuntos de A é dado por $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.

Por outro lado, podemos formar um subconjunto de A do seguinte modo: $A := \{A_1, \cdots, A_n\}$. Então, para obter um subconjunto de A temos 2 possibilidades para cada elemento $A_i \in A$; $i = 1, \cdots, n$: "escolher" ou "não-escolher" este elemento.

Pelo princípio multiplicativo, temos então $\underbrace{2.2.2.\cdots.2}_{n-vezes} = 2^n$ possibilidades de formar um subconjunto de A. Logo, $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$.

COROLÁRIO:

Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos, isto é, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

EXEMPLO:

Vamos calcular a soma $S := 1.\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) + 2.\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) + \cdots + n.\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right)$; $n \geq 1$.

Observe que $S = \sum_{k=0}^{n} k.\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \sum_{k=1}^{n} k.\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{k!(n-k)!} =$
$\sum_{k=1}^{n} k.\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$
$n\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) = n\sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right) = n.2^{n-1}$.

Logo, $S = n.2^{n-1}$.

PROPOSIÇÃO.7:

Sejam $n \geq 0$ e $k \geq 0$ naturais. Então,
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

Observando o Triângulo de Pascal:
"Se SOMARMOS elementos de uma COLUNA qualquer do Triângulo de Pascal de **cima para baixo** obtemos como resultado o valor que está imediatamente à direita na linha abaixo da última parcela na soma".

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.7:) Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Vamos aplicar a Relação de Stiefel;

$$\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}+\binom{k}{k+1};\ \binom{k+2}{k+1}=\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1};$$

$$\binom{k+3}{k+1}=\binom{k+2}{k}+\binom{k+2}{k+1};\ \ldots;\ \binom{k+n}{k+1}=\binom{k+(n-1)}{k}+\binom{k+(n-1)}{k+1};$$

$\binom{k+(n+1)}{k+1}=\binom{k+n}{k}+\binom{k+n}{k+1}$; Agora, somando todas estas igualdades:

$$\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+2}{k+1}+\binom{k+3}{k+1}+\cdots+\binom{k+n}{k+1}+\binom{k+(n+1)}{k+1}=$$

$$\binom{k}{k}+\binom{k}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+2}{k+1}+\cdots+$$

$\binom{k+(n-1)}{k}+\binom{k+(n-1)}{k+1}+\binom{k+n}{k}+\binom{k+n}{k+1}$; simplificando as parcelas que aparecem em membros opostos; e, assumindo que $\binom{k}{k+1}=0$; então, $\cancel{\binom{k+1}{k+1}}+\cancel{\binom{k+2}{k+1}}+\cancel{\binom{k+3}{k+1}}+$

$$\cdots+\cancel{\binom{k+n}{k+1}}+\binom{k+(n+1)}{k+1}=\binom{k}{k}+\cancel{\binom{k}{k+1}}+\binom{k+1}{k}+\cancel{\binom{k+1}{k+1}}+$$

$$\binom{k+2}{k}+\cancel{\binom{k+2}{k+1}}+\cdots+\binom{k+(n-1)}{k}+\cancel{\binom{k+(n-1)}{k+1}}+\binom{k+n}{k}+\cancel{\binom{k+n}{k+1}};$$

obtemos;

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{k+(n-1)}{k}+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Proposição.8:

Sejam $n \geq 0$ e $k \geq 0$ naturais. Então, $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} =$
$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$.

Observando o Triângulo de Pascal:
"Se SOMARMOS elementos de uma DIAGONAL qualquer do Triângulo de Pascal da **esquerda para a direita** obtemos como resultado o valor que está imediatamente abaixo da última parcela na soma".

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.8:) Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$ naturais. Então,
$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$.

Vamos aplicar a proposição.3: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$; $\binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n}$; $\binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{n}$; $\ldots$;
$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$; Agora, somando todas estas igualdades:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} =$$
$$\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n}}_{\binom{n+k+1}{n+1} \text{ pela proposicão.7}};$$

mas, $\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k}$ pela proposição.3.

Logo, $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

Proposição.9: (Identidade de Vandermonde)

Sejam $m, n, r, k \in \mathbb{N}$ com $r \leq m$, $r \leq n$; e $0 \leq k \leq r$ naturais. Então,

$$\begin{pmatrix} m+n \\ r \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} m \\ r-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Se tomarmos no Triângulo de Pascal$m = 2$; $n = 3$; $r = 2 \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2+3 \\ 2 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.1 + 2.3 + 1.3 = 10 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Números Binomiais

DEMONSTRAÇÃO: (PROPOSIÇÃO.9)
Supondo que existem m elementos no conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e n elementos no conjunto $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. Notamos que estes conjuntos são disjuntos e o número de elementos no conjunto união $A \cup B = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ é igual a $m + n$. Então, o número total de possibilidades de escolhermos r elementos de $m + n$ é dado por $\left(\begin{array}{c} m+n \\ r \end{array}\right)$; o qual seria equivalente se escolhêssemos k elementos de n do conjunto B: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$; e, $r - k$ elementos de m do conjunto A: $\left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array}\right)$; e pelo P.F.C. temos $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array}\right)$ possibilidades para um determinado valor de k.
Mas $0 \leq k \leq r$, vamos considerar para todos os valores de k e utilizar o princípio da adição a fim de obter o número total de possibilidades de escolher r elementos de $m + n$:
$\sum_{k=0}^{r} \left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$.

Corolário: (Relação de Lagrange)

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

No Triângulo de Pascal se tomarmos $n = 2 \Rightarrow \binom{2.2}{2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 =$
$\binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	Linha-n
1						0
1	1					1
1	2	1				2
1	3	3	1			3
1	4	6	4	1		4
1	5	10	10	5	1	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

DEMONSTRAÇÃO: (RELAÇÃO DE LAGRANGE)
Pela Relação de Vandermonde; para $m, n, r, k \in \mathbb{N}$; $r \leq m$; $r \leq n$; $k \leq r$, temos que; $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}$.
Assumindo $m = r = n$ e substituindo na relação acima;

$$\binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot \binom{n}{k}$$

mas pela proposição.3;

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; então,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$