Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Primeira (substitutiva) e segunda unidade – 3 de abril de 2017

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Demonstre, usando o princípio de indução, que, em qualquer reticulado $(L, \vee, \wedge)$, vale:

$$\forall n \geq 2\ \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in L\ (\exists x_1 \vee \cdots \vee x_n \in L).$$

2. Considere o conjunto ordenado $X = (D_{60} \setminus \{1, 60\}, |)$.

(a) Desenhe o diagrama de Hasse de X.

(b) Encontre os três elementos minimais m_1, m_2 e m_3, e os três maximais b_1, b_2 e b_3 de X.

(c) Solucione, por meio do Teorema Chinês do Resto, o sistema de equações congruenciais

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ x \equiv b_3 \pmod{m_3} \end{cases},$$

onde $b_1 < b_2 < b_3$ e $m_1 < m_2 < m_3$.

(d) 2420 é uma solução do sistema da letra (c). Encontre, usando os critérios de divisibilidade, a sua decomposição no produto de potências de primos.

3. Considere a álgebra de Boole $\mathbf{D_{110}} = (D_{110}, \mathrm{mmc}, \mathrm{mdc}, \frac{110}{\cdot}, 1, 110)$. Encontre, explicando como, um conjunto X tal que a álgebra de Boole $\mathbf{2^X} = (\wp(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$ seja isomorfa a $\mathbf{D_{110}}$ e apresente um isomorfismo entre as duas.

1. Base de indução: $n = 2$.

$\exists x_1 \vee x_2 \in L$ é verificada pelas propriedades que definem os reticulados.

Hipótese de indução: $n = k$.

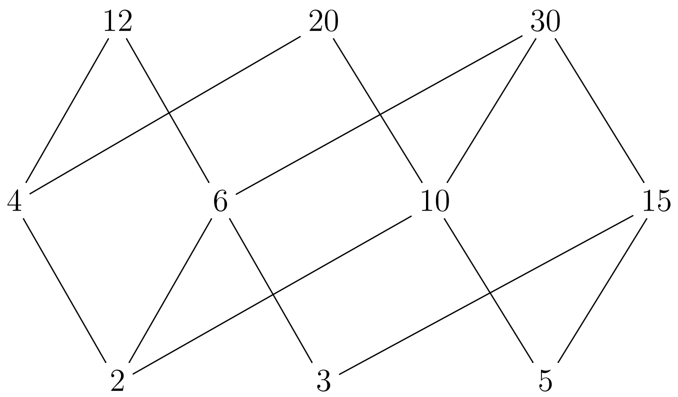
$$\exists x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \in L.$$

Tese: $n = k + 1$.

$$\exists x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{k+1}.$$

Como L é um reticulado, existe, em L, o sup de cada par de seus elementos. Pela hipótese de indução, $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$ existe em L. Então existe em L o elemento $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) \vee x_{k+1}$ que é igual a $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \vee x_{k+1}$ pela propriedade associativa de $\vee$.

2. (a) O diagrama de Hasse de X é o seguinte



(b) Os elementos minimais de X são 2, 3 e 5 e os maximais 12, 20 e 30.

(c) O sistema é

$$\begin{cases} x \equiv 12 \pmod 2 \\ x \equiv 20 \pmod 3 \\ x \equiv 30 \pmod 5 \end{cases}.$$

Como 2, 3 e 5 são primos, eles são primos entre si e o sistema é solucionável. Além disso, o sistema é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}.$$

Temos $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $m_1' = 3 \cdot 5 = 15$, $m_2' = 2 \cdot 5 = 10$, $m_3' = 2 \cdot 3 = 6$. Daí, as três equações auxiliárias:

$$15x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2), \quad 10x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3), \quad 6x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5).$$

Uma vez que, no sistema equivalente, $b_1 = b_3 = 0$, não precisaremos solucionar a primeira e a terceira equação, pois as soluções, c_1 e c_3, delas não vão contribuir no cálculo de uma solução particular. Aplicando o algoritmo das divisões sucessivas à segunda equação , obtemos $c_2 = 1$. Daí, uma solução do sistema é

$$\sum_{i=1}^{3} b_i \cdot m_i' \cdot c_i = 0 \cdot 15 \cdot c_1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 0 \cdot 6 \cdot c_3 = 0 + 20 + 0 = 20$$

e o conjunto das soluções é

$$S = \{20 + 30n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

(d) 20 é divisível por 4, então 2420 também é: $2420 = 605 \cdot 2^2$.

605 é divisível por 5, pois o último algarismo é o próprio 5. Daí, $2420 = 605 \cdot 4 = 121 \cdot 5 \cdot 4$.

121, por sua vez, é divisível por 11, pois a soma dos seus algarismos de lugar par coincide com aquela dos algarismos de lugar impar, e portanto a diferença dessas soma é 0, que é divisível por 11. $121 = 11^2$.

Logo, $2420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11^2$.

3. $D_{110} = \{1, 2, 5, 11, 10, 22, 55, 110\}$, então $|D_{110}| = 2^3$. Pelo Teorema de Representação de Stone (caso finito), $\mathbf{D_{110}}$ é isomorfa à álgebra de Boole das partes de um conjunto de três elementos. Seja $X = \{a, b, c\}$; $\mathbf{D_{110}} \cong \mathbf{2^X}$.

Uma função entre as duas álgebras é um isomorfismo se, e somente se, ela associa 1 a $\emptyset$, 110 a X, átomos a átomos, e o complementar de cada átomo ao complementar da imagem do mesmo átomo. Por exemplo, a função a seguir é um isomorfismo:

$$\begin{array}{cccc}
f: & D_{110} & \to & \wp(X) \\
 & 1 & \mapsto & \emptyset \\
 & 2 & \mapsto & \{a\} \\
 & 5 & \mapsto & \{c\} \\
 & 11 & \mapsto & \{b\} \\
 & 10 & \mapsto & \{a, c\} \\
 & 22 & \mapsto & \{a, b\} \\
 & 55 & \mapsto & \{b, c\} \\
 & 110 & \mapsto & X
\end{array}$$