Exercícios Álgebra Linear // Semestre Letivo Suplementar 2020

Discente: João Lucas Lima de Melo

1) Prove que a multiplicação de matrizes não é comutativa. Então existem A e B tais que A.B != B.A
2) Provar que *det* A^{-1} = 1/*det* A
3) Qual matriz faz reflexão simétrica em relação à origem?
4) Encontre, com prova, a imagem e núcleo da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

1) Seja a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \le i \le = n;\, 1 \le j \le n}$; $a_{ij} \in R$ e a matriz $B_n = (b_{ij})_{1 \le i \le n;\, 1 \le j \le n}$; $b_{ij} \in R$.
Vamos assumir os valores de A e B, matrizes quadradas de ordem 2, como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz A pela matriz B, obteremos uma matriz $C_2 = (c_{ij})_{1 \le i \le = 2;\, 1 \le j \le 2}$ definida da seguinte forma:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+21 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 36 & 50 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz B pela matriz A, obteremos uma matriz $D_2 = (d_{ij})_{1 \le i \le = 2;\, 1 \le j \le 2}$ definida da seguinte forma:

$$D = B.A = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

Como visto, C != D. Portanto, como encontrado um caso em que para duas matrizes quaisquer A e B, A.B != B.A, podemos afirmar que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

2) Seja a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \le i \le = n;\, 1 \le j \le n}$; $a_{ij} \in R$. A matriz inversa de A é dada por A_n^{-1}, tal que:

$$A_n.\, A_n^{-1} = A_n^{-1}.A_n = I_n$$

Onde I_n é uma matriz identidade de ordem n.
Nestas condições, podemos afirmar que

$$\det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$$

e, portanto, igual a 1.
Dessa forma,

$$\det(A).\det(A^{-1}) = 1$$

Logo, concluímos que:

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A).$$

3) Por definição, seja a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \le i \le = n;\, 1 \le j \le n}$. Ela fará reflexão simétrica em relação à origem se

$$a_{ij} \in C \text{ (se i=j) e } a_{ij} = a_{ji} \text{(se i != j)}$$

ou seja, se a matriz A for igual à sua transposta.

4) Seja a matriz A dada por A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. O núcleo de uma matriz é o conjunto solução do sistema homogêneo Ax = 0; para x = $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$. Portanto, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = 0$$

Obtemos então o sistema:

$$\begin{cases} x1 + 5x2 = 0 \\ 2x1 + 3x2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo separadamente as equações, percebemos que:

x1 = -5x2

Substituindo em 2x1 + 3x2 = 0, temos:

-10x2 + 3x2 = 0

-7x2 = 0

-x2 = 0/7

x2 = 0

Substituindo x2 = 0 em x1 = =5x2, temos:

x1 = -5(0)

x1 = 0

Portanto, o núcleo da matriz A é o vetor solução $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Podemos definir a imagem de uma matriz como os vetores coluna dessa matriz. Dessa forma, afirmamos que a imagem da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é definida pelos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.