Matemática Discreta I - MATA42 - II^a Unidade

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 23/04/2019

DEFINIÇÃO: (Matriz)

Uma MATRIZ de ordem $m \times n$ é uma tabela de $m.n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas.

Notação: $A_{m \times n} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$; onde a_{ij} representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

Assim, $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Relações - Representação Matricial

Exemplo: A tabela abaixo representa as informações sobre o número de horas/dia dedicadas por 5 alunos monitores do curso de Ciências da Computação.

ALUNOS	SEG	TER	QUA	QUIN	SEX	SÁB
Aluno.1	2	1	0	0	0	0
Aluno.2	1	2	0	0	0	0
Aluno.3	0	0	2	0	1	0
Aluno.4	0	0	0	2	0	1
Aluno.5	0	0	1	0	2	0

A matriz

$$A_{5\times 6} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \text{SEG} & \text{TER} & \text{QUA} & \text{QUIN} & \text{SEX} & \text{SÁB} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \text{A.1} \\ \text{A.2} \\ \text{A.3} \\ \text{A.4} \\ \text{A.5} \end{array} \end{array}$$ representa a tabela acima.

Observe que a i-ésima linha da matriz representa as informações do i-ésimo Aluno; enquanto que, a j-ésima coluna representa o j-ésimo dia. Assim, por exemplo, o elemento $a_{35} = 1$ representa o número de horas do Aluno.3 na sexta-feira(5^odia).

Observação: Se $m = n$, dizemos que A é uma MATRIZ QUADRADA.

Exemplo.1: "**Matriz Identidade**"

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 1; & \text{se } \ i = j \\ 0; & \text{se } \ i \neq j \end{cases}$$

Exemplo.2: Seja a matriz, cujos elementos são obtidos do seguinte modo

$$A_4 = (a_{ij}) = \begin{cases} \text{i}; & \text{se } \ i > j \\ \text{i+j}; & \text{se } \ i = j \\ \text{j}; & \text{se } \ i < j \end{cases} \text{ ; então,}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Definição: (Transposta da Matriz)

Uma MATRIZ B de ordem $n \times m$ é denominada TRANSPOSTA DA MATRIZ A de ordem $m \times n$ se, e somente se, $B_{n \times m} = (b_{ji}) = (a_{ij}); \forall i = 1, \cdots, m$; e, $\forall j = 1, \cdots, n$.
Notação: A^t; assim, $B = A^t$.

Exemplo: Seja a matriz $A_{5\times 6} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; então a transposta é a matriz $A^t_{6\times 5} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

DEFINIÇÃO: (Matriz Simétrica)

Seja A uma MATRIZ quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma MATRIZ SIMÉTRICA se, e somente se, $A = A^t$; ou seja, $A_{m\times n} = (a_{ij}) = (a_{ji})$; $\forall i = 1, \cdots, m$; e, $\forall j = 1, \cdots, n$.

Exemplo: Seja a matriz $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} = A^t$.

Logo, A é uma matriz simétrica.

Definição:(PRODUTO ENTRE MATRIZES)

Sejam as matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})_{1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n}$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})_{1\leq j\leq n; 1\leq k\leq p}$.
O PRODUTO entre as matrizes A e B é obtido do seguinte modo:
$A_{m\times n}.B_{n\times p} = C_{m\times p} = (c_{ik})_{1\leq i\leq m; 1\leq k\leq p} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}.b_{jk})$;
$\forall i = 1, \cdots, m; \forall k = 1, \cdots, p$.

EXEMPLO:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, a matriz $A^2 = A.A =$

$$= \begin{bmatrix} (1.1)+(0.1)+(1.1) & (1.0)+(0.0)+(1.1) & (1.1)+(0.0)+(1.0) \\ (1.1)+(0.1)+(0.1) & (1.0)+(0.0)+(0.1) & (1.1)+(0.0)+(0.0) \\ (1.1)+(1.1)+(0.1) & (1.0)+(1.0)+(0.1) & (1.1)+(1.0)+(0.0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)+(0)+(1) & (0)+(0)+(1) & (1)+(0)+(0) \\ (1)+(0)+(0) & (0)+(0)+(0) & (1)+(0)+(0) \\ (1)+(1)+(0) & (0)+(0)+(0) & (1)+(0)+(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição:(PRODUTO BOOLEANO)

Sejam as matrizes booleanas $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$.
O PRODUTO BOOLEANO entre A e B é obtido do seguinte modo:
$A_{m\times n} \otimes B_{n\times p} = C_{m\times p} = (c_{ik}) = \bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_{jk}); \forall i = 1, \cdots, m; \forall k = 1, \cdots, p$.

EXEMPLO:

Seja a matriz booleana $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, a matriz $A^2 = A \otimes A =$

$$\begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) \\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1)\vee(0)\vee(1) & (0)\vee(0)\vee(1) & (1)\vee(0)\vee(0) \\ (1)\vee(0)\vee(0) & (0)\vee(0)\vee(0) & (1)\vee(0)\vee(0) \\ (1)\vee(1)\vee(0) & (0)\vee(0)\vee(0) & (1)\vee(0)\vee(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO: (Matriz de Adjacência)

Seja o conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A.
Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ uma matriz quadrada de ordem n, cujos elementos $(m_{ij}), \forall i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n$ são obtidos do seguinte modo

$$(m_{ij}) = \begin{cases} 1; & \text{se } \langle x_i, x_j \rangle \in \mathcal{R} \\ 0; & \text{se } \langle x_i, x_j \rangle \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

A matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é denominada "MATRIZ DE ADJACÊNCIA de $\mathcal{R}$".

Exemplo.1: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y \rangle \in A \times A \mid x > y\}$ em A então, $\mathcal{R} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$.
Assim,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Exemplo.1:(Relações: Complementar e Inversa)
Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y \rangle \in A \times A \mid x > y\} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$.
Então, a Relação Inversa é dada por;
$\mathcal{R}^{-1} = \{\langle x, y \rangle \in A \times A \mid x < y\} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$;
e, a Relação Complementar;
$\overline{\mathcal{R}} = \{\langle x, y \rangle \in A \times A \mid x \leq y\} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$.
Agora, construindo as matrizes que representam as relações, temos,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t}; \text{ e,}$$

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

PROPRIEDADES: (Relação - Matriz de Adjacência)

Seja o conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A; e, seja a "MATRIZ DE ADJACÊNCIA" $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 1; \text{ se } \langle x_i, x_j \rangle \in \mathcal{R} \\ 0; \text{ se } \langle x_i, x_j \rangle \notin \mathcal{R} \end{cases}$;
$\forall i = 1, \cdots, n$ e $\forall j = 1, \cdots, n$ então,

- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO COMPLEMENTAR $\overline{\mathcal{R}}$
  $\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0; \text{ se } \langle x_i, x_j \rangle \in \mathcal{R} \\ 1; \text{ se } \langle x_i, x_j \rangle \notin \mathcal{R} \end{cases}$
- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{M}^t_{\mathcal{R}}$

Exemplo.2: Seja $\mathcal{R}$ uma relação em $A = \{1, 2, 3\}$ e seja a sua Matriz de Adjacência $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; então;

$\mathcal{R} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Note que;

$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; e,

$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$;

ou seja, $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$; e, $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{t} \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é matriz simétrica.

Relações - Representação Matricial

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO REFLEXIVA,
  $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i \neq j \end{cases}$$
- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO IRREFLEXIVA.
  $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i \neq j \end{cases}$$
- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO SIMÉTRICA.
  $$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i = j \\ (m_{ji}); & \text{se } i \neq j \end{cases};$$
  ou seja,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ é uma "*Matriz Simétrica*" $\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}^t$.
- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO ASSIMÉTRICA
  Para que a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ seja de uma relação assimétrica, temos que
  $\exists (m_{ij}) \neq (m_{ji})$; para $i \neq j$.
  ou seja,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ não é uma "*Matriz Simétrica*".

Relações - Representação Matricial

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA
$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1; & \text{se } i = j \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ji} = 0) \wedge (i \neq j) \\ 0; & \text{se } (m_{ji} = 1) \wedge (i \neq j) \end{cases}$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO TRANSITIVA
$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ik}) = \begin{cases} 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 1; \forall i, j, k \\ 0; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 0; \forall (i = j) \vee (j = k) \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 0; \forall (i \neq j) \wedge (j \neq k) \\ 0 \text{ ou } 1; & \text{se } (m_{ij}) \neq (m_{jk}); \quad \forall i, j, k \end{cases}$$
ou seja,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}^2}$$

- *Matriz de Adjacência* de uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = (m_{ik}) = \begin{cases} 1; & \text{se } i = k \\ m_{ki}; & \text{se } i \neq k \\ 1; & \text{se } (m_{ij}) = (m_{jk}) = 1; \forall i, j, k \end{cases}$$

Operações entre Relações - Representação Matricial

Representação Matricial:(Operações entre Relações)

- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO INTERSECÇÃO $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO UNIÃO $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \vee \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$
- *Matriz de Adjacência* da RELAÇÃO COMPOSTA $\mathcal{R} o \mathcal{S}$,
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R} o \mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$
- "*Matriz de Adjacência*" da RELAÇÃO POTÊNCIA $\mathcal{R}^n$; $n \geq 2$
  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n} = \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}}_{n-fatores}$

Operações entre Relações - Representação Matricial

EXEMPLO:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

então;

- $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cap\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{R} o \mathcal{S}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{S} o \mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Observação: Na RELAÇÃO COMPOSTA temos a propriedade associativa
$\mathcal{T}o(\mathcal{R}o\mathcal{S}) = (\mathcal{T}o\mathcal{R})o\mathcal{S}$
então,
$\mathcal{M}_{\mathcal{T}o(\mathcal{R}o\mathcal{S})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{R}o\mathcal{S})} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}} = (\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}}) \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}} =$
$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes (\mathcal{M}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{(\mathcal{T}o\mathcal{R})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{T}o\mathcal{R})o\mathcal{S}}.$

2. Observação: Na inversa da RELAÇÃO COMPOSTA temos
$(\mathcal{R}o\mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}o\mathcal{R}^{-1}$
então,
$\mathcal{M}_{(\mathcal{R}o\mathcal{S})^{-1}} = (\mathcal{M}_{(\mathcal{R}o\mathcal{S})})^t = (\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{R}})^t = (\mathcal{M}_{\mathcal{R}})^t \otimes (\mathcal{M}_{\mathcal{S}})^t =$
$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^{-1}} \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{S}^{-1}} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}^{-1}o\mathcal{R}^{-1}}$

Relações - Exercícios

Seja $A = \{3, 4, 6, 7\}$ e seja uma relação $\mathcal{R}$ em A definida em cada item abaixo.

(i) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \leq y\}$

(ii) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x + y = 10\}$

(iii) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x + y \geq 10\}$

(iv) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x = y + 1\}$

(a) Classifique cada relação em reflexiva, irreflexiva, assimétrica, simétrica, anti-simétrica, transitiva, conectada, equivalência.

(b) Determine para cada relação; os fechos $ref(\mathcal{R})$, $sim(\mathcal{R})$, e $tra(\mathcal{R})$.

(c) Determine para cada relação; as relações $\mathcal{R}^{-1}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}o\mathcal{R}^{-1}$, e $\mathcal{R}o\overline{\mathcal{R}}$.

(d) Ache, se possível, uma partição de A determinada por cada relação.

(e) Represente cada relação dos itens (i),(ii),(iii),(iv),(b) e (c) por matriz de adjacência.