UFBA

Departamento de Ciência da Computação
Teoria dos Grafos – Gabarito da Lista 2 – 2019.1
Professor: Roberto Freitas Parente

Exercício 1. *Seja v um vértice de um grafo conexo G. Mostre que G é bipartido se, e somente se, $d(a,b) \neq d(a,c)$ para toda aresta bc.*

Resposta. Relembremos que um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ é um grafo com bipartição de vértices (X, Y) onde toda aresta $(u, v) \in E$ é tal que u está numa parte diferente de v. Além disso, os vértices de um caminho $P = p_1, p_2, \ldots, p_n$ em G alternam entre as partes. Mais formalmente, p_i e p_{i+1} pertencem a partes diferentes, para todo $1 \leq i < n$. Portanto, se existe um caminho entre u e v de tamanho par, u, v pertencem a mesma parte. Se existe um caminho entre u e v de tamanho ímpar, então u, v pertencem a partes diferentes. Agora provaremos cada direção da equivalência.

$\Rightarrow$ (Prova por contradição):
Suponha por absurdo que G é bipartido e que existe uma tripla a, b, c t.q. $d(a,b) = d(a,c)$, $(b,c) \in E$. Como G é bipartido, então b e c pertencem a partes diferentes.

Se $d(a,b)$ é par: Como $d(a,b) = d(a,c)$, temos que b pertence a mesma parte de a, e c pertence a mesma parte de a. Portanto, contraditoriamente, b, c pertencem a mesma parte.
Se $d(a,b)$ é ímpar: Como $d(a,b) = d(a,c)$, b pertence a uma parte diferente de a, c pertence a uma parte diferente de a. Portanto, contraditoriamente, b, c pertencem a mesma parte.

$\Leftarrow$: Vamos provar pela seguinte contrapositiva: Se G não é bipartido, então existe uma aresta bc tal que $d(a,b) = d(a,c)$.
Se G não é bipartido sabemos que existe um ciclo ímpar C_{2k+1} para algum $k \geq 1$. Se o vértice a está no ciclo C_{2k+1}, então basta pegar a aresta bc tal que $d(a,b) = d(a,c) = k$ e o resultado segue. Por outro lado, se a não está no ciclo e G é conexo, então existe um caminho P de a até um vértice v de C_{2k+1}, onde v é o primeiro vértice de P que está em C_{2k+1}. Então escolhemos a aresta bc de forma que $d(v,b) = d(v,c) = k$ e assim o resultado segue.

□

Exercício 2. *Prove que todo torneio contém um caminho direcionado hamiltoneano. Chamamos de caminho direcionado hamiltoniano um caminho que passa por todos os vértice sem repetição.*

Resposta. Iremos provar por indução na quantidade de vértice. Para um torneio com $n = 1, 2, 3$ vértices o teorema é trivialmente satisfeito. Nossa hipótese de indução é que o Teorema vale para todo torneio com até $n-1$ vértices. Seja $\vec{T}_n$ um torneio com n vértices. Escolha arbitrariamente um vértice v de $\vec{T}_n$ e faça $T' = \vec{T}_n - v$. T' é um torneio com $n-1$ vértices e pela nossa hipótese de indução temos que existe um caminho hamiltoniano $\vec{P} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ em T'. Sejam os três casos possíveis:

- Se $(v, x_1) \in A(\vec{T}_n)$, então temos que $\{v, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ é um caminho hamiltoniano em $\vec{T}_n$.
- Se $(x_k, v) \in A(\vec{T}_n)$ e temos $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, v\}$ um caminho hamiltoniano.
- Caso contrário existirão dois vértices $x, y \in \vec{P}$ tal que os arcos (x,y), (v,x) e (y,v) estão em $\vec{T}_n$. Assim basta retirar o arco (x,y) do caminho $\vec{P}$ e inserir os arcos (v,x) e (y,v) no lugar que termos um caminho hamiltoniano.

Obs: O terceiro caso é fácil ver que existe, pois caso contrário v estaria enviando ou recebendo arcos para todos os vértices de $\vec{P}$ que são situações dos dois primeiros casos.

□

Exercício 3. *Se D é um digrafo com $\delta^+ \geq 1$, então D contém um ciclo direcionado.*

Resposta. Suponha que $\vec{P} = v_1, v_2, \ldots, v_k$ é o meio caminho direcionado de D. Como $\delta^* \geq 1$, então temos que $d(v_k) \geq 1$, mas como $\vec{P}$ é o maior caminho então a vizinhança de saída de v_k está dentro do caminho $\vec{P} \setminus v_k$, ou seja, existe v_i, $i \in [k-1]$, tal que (v_k, v_i) é uma aresta de D, então temos o ciclo de v_i até v_k com o arco (v_k, v_i) fechando o ciclo.

□

Exercício 4. *Um digrafo é euleriano se, e somente se, $d^+(v) = d^-(v)$ para todo vértice e o grafo subjacente tem no máximo uma componente não trivial.*
Dica: *A prova é parecida com a prova do caso não direcionado.*

Resposta. IDA ($\Rightarrow$): Suponha que D é um digrafo euleriano, ou seja, D tem uma trilha direcionada fechada que passa por todas as arestas de D e seu grafo subjacente é uma componente conexa. Seja $\vec{C} = v_1 v_2, \ldots, v_k$ a trilha fechada que passa por todas as arestas, temos que cada vez que uma vértice v aparece na sequência $v_1 v_2, \ldots, v_k$ o mesmo contribui com 1 para o grau de entrada e grau de saída, então teremos que $d^+(v) = d^-(v)$.

VOLTA($\Leftarrow$): Vamos provar por indução na quantidade de arestas de D. Para o caso base é trivial. Suponha que D é um digrafo com $d^+(v) = d^-(v)$ para todo vértice v e que o grafo subjacente de D tem apenas uma componente conexa, então certamente todo vértice de v tem alguma arestas chegando ou saíndo. Como $d^+(v) = d^-(v)$, então temos para todo vértice v $d^+(v) \geq 1$ e $d^-(v) \geq 1$.

Pelo Exercício 3, existe um ciclo direcionado em D. Pegue C um ciclo direcionado de D e faça $D' = D \setminus C$. Como todo vértice v em C tem $d^+_C(v) = D^-_C(v) = 1$, então D' mantém a propriedade de que todo vértice tem grau de entrada igual ao grau de saída.

Se o subjacente de D' contém apenas uma componente conexa temos por hipótese de indução que D' contém uma trilha fechada que passa por todas as arestas e D' e unindo esta trilha com o ciclo direiconado C temos uma trilha fechada que passa por todas as arestas de D, então D também será euleriano.

Suponha agora que o grafo subjacente de D' contém mais que uma componente conexa. Por hipótese de indução, cada componente conexa do grafo subjacente de D' será euleriano, ou seja, terá uma trilha fechada euleriana passando por todos as arestas. Podemos criar uma trilha eurleriana em D com o seguinte procentemento: Seja $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$ começamos contruíndo a trilha T a partir de v_1 seguindo a ordem do ciclo C, mas quando v_i fizer parte de uma componente conexa do subjacente de D' e a mesma não tiver sido incorporada a T então devemos utilizar a trilha dessa componente até retornar a v_i. Fazemos essa construção para cada $v \in C$ até fecharmos a trilha T com o vértice v_1. Podemos observar que todas as aresta das componente conexas do subjacente de D' foram incorporada a trilha T e também as arestas presentes em C, então temos que T é um trilha fechada que passa por todas as arestas de D e assim D é euleriano. □

Exercício 5. *Faça um pesquisa nas referências bibliográficas, defina o que é uma decomposição em ciclos e dê pelo menos 2 exemplos. Em seguida mostre que todo grafo euleriano tem uma decomposição em ciclos.*

Resposta. Seja G um grafo euleriano. Pelo Teorema de Euler temos que existe um ciclo euleriano C em G. Se C não repete vértice, então não tem o que ser feito, pois C é um ciclo. Suponha que $C = G[\{x_1, x_2, \ldots x_k\}]$ repete vértices, então temos que existirá $i \neq j$ tal que $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ não repete vértices, então temos que $C_{ij} = G[\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j, x_i\}]$ será um ciclo.

Retire as arestas de C_{ij} em G ($G' = G \setminus C_{ij}$) Como observado em sala, estaremos retirando uma quantidade par de graus (≥ 0) de cada vértice. Se G' é desconexo, temos que as arestas só estarão em uma componente conexas, ou seja, com exceção de vértices isolados o grafo é conexo. O segundo caso podemos fazer $G' = G' \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$,onde $\{x_1, \ldots, x_k\}$ são os vértices isolados.

Como G' é conexo podemos seguir aplicando o mesmo método e em algum momento G' será vazio. Os ciclos C_{ij} retirados formaram uma decomposição em ciclos de G.

$\square$

Exercício 6. *Formalize a prova, vista em sala, do seguinte Teorema: O grafo completo K_n pode ser expressado como a união de k grafos bipartidos se, e somente se, $n \leq 2^k$.*

Resposta. Provaremos por indução em k. Para a base basta observar que quando $k = 1$ só teremos um grafo bipartido, como K_3 tem ciclo um ciclo ímpar e K_2 é um bipartido, então $n \leq 2$.

Ida ($\Rightarrow$): Suponha que $K_n = G_1 \cup \ldots \cup G_{k-1} \cup G_k$, onde G_i é bipartido. Sejam X e Y uma partição de G_k onde não existem arestas entre X e Y em G_k. Observe que $K_n[X]$ e $K_n[Y]$ são grafos completos formados pela união dos outros $k-1$ grafos bipartidos. Pela Hipótes de indução da ida ($\Rightarrow$)temos que$|X| \leq 2^{k-1}$ e $|Y| \leq 2^{k-1}$, então $n = |X| + |Y| \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

Volta ($\Leftarrow$): Suponha que $n \leq 2^k$. Particionamos K_n em dois conjuntos X e Y com tamanho no máximo 2^{k-1}. Pela hipóteese de indução da volta ($\Leftarrow$) temos que os grafos completos induzidos por X e Y podem ser definidos com a união de $k-1$ subgrafo bipartidos cada um. A união do i-ésimo grafo bipartido de X com o i-ésimo grafo bipartido de Y é um grafo bipartido, pois não compartilham arestas. Assim, temos $k-1$ grafos bipartidos formando $K_n[X]$ e $K_n[Y]$. As arestas restantes formam um grafo bipartido completo com partes X e Y, e este será o k-ésimo grafo bipartido que unindo aos demais forma K_n. $\square$