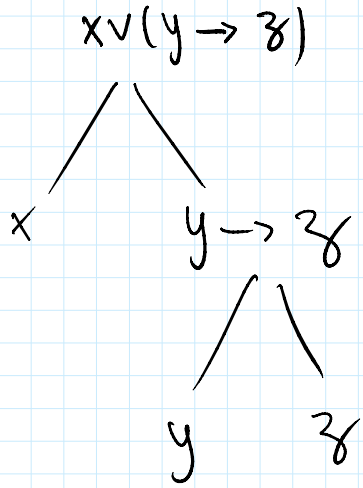
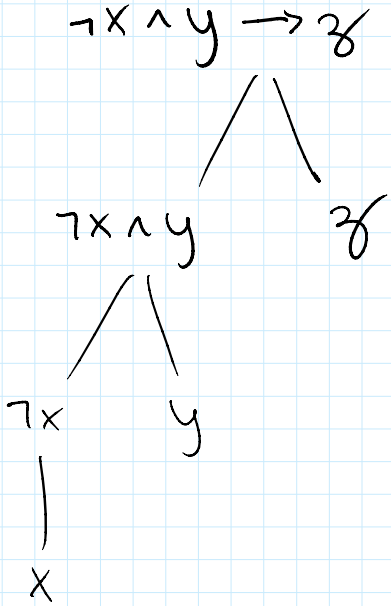
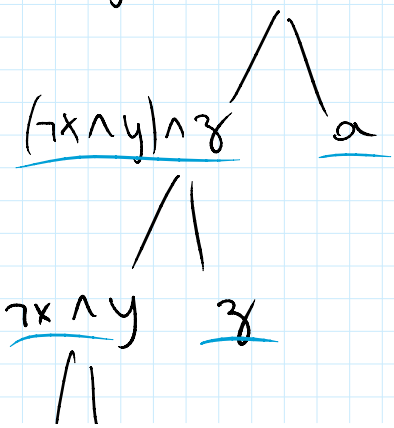
sexta-feira, 27 de agosto de 2021 20:01

Árvore Sintática





$\varphi = (\neg x \wedge y) \wedge z \to a$



$$\begin{array}{c} \wedge \\ \neg x \quad y \\ | \\ x \end{array}$$

$$\begin{cases} \to \emptyset \in \mathbb{N} \\ \to n \in \mathbb{N} \to \underbrace{n \cup \{n\}}_{s(n)} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$0 := \emptyset$

$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$

$$2^M = \{f : M \to \{0,1\}\}$$

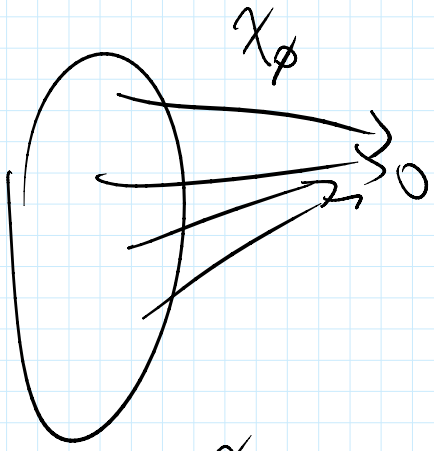
$$A^B = \{f : B \to A\}$$

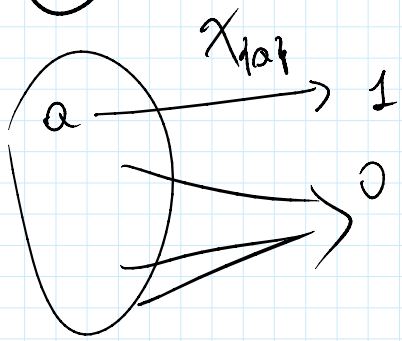
sexta-feira, 27 de agosto de 2021 20:34

Exercício 3.8.

$2^M \longrightarrow Pow(M)$

Seja M um conjunto.





$A = \underline{\{1,2,3\}}$ $\{\chi_\emptyset, \chi_{\{1\}}, \chi_{\{2\}}, \chi_{\{3\}}, \chi_{\{1,2\}}, \chi_{\{1,3\}}, \chi_{\{2,3\}}, \chi_A\}$

$= 2^A$

$\chi_\emptyset(x) = 0$ $\chi_A(x) = 1$

$\chi_{\{1\}}(1) = 1$, $\chi_{\{1\}}(2) = 0$, $\chi_{\{2\}}(3) = 0$

$\chi_{\{2\}}(1) = 0$, $\chi_{\{2\}}(2) = 1$, $\chi_{\{3\}}(3) = 0$

$\chi_{\{1,2\}}(1) = 1$, $\chi_{\{1,2\}}(2) = 1$, $\chi_{\{1,2\}}(3) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} f : 2^M &\longrightarrow Pow(M) \\ \chi_S &\longmapsto S \end{aligned}}$$

Uma função é 1) Injetora $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

2) Sobrejetora $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{cd} f \iff$

$\iff$ para todo $y \in \operatorname{cd} f$ existe x dom f t.q. $f(x) = y$.

4) Bijetora: inj. + sobr.

Injetividade:

Suponha $f(\chi_A) = f(\chi_B)$, com $\chi_A \neq \chi_B$, por absurdo. Pela definição da função, temos que $A = B$. Mas como $\chi_A \neq \chi_B$, existe algum $m \in M$ t.q. $\chi_A(m) \neq \chi_B(m)$. Sem perda de generalidade, digamos que $\chi_A(m) = 1$ e $\chi_B(m) = 0$. Logo, $m \in A$ e $m \notin B$, o que implica $A \neq B$, uma contradição, pois já vimos que $A = B$. Logo, f é injetora ■ (Por absurdo)

Suponha $f(\chi_A) = f(\chi_B)$. Logo, temos que $A = B$, pela definição da f. Por definição de função característica, temos que $\chi_A(m) = 1 \iff \chi_B(m) = 1$. Logo, $\chi_A = \chi_B$, e segue a injetividade. ■ (Prova Direta)

Sobrejetividade

Seja $S \in \operatorname{Pow}(S)$. Então, a função $h: M \to \{0,1\}$ t.q. $h(m) = \begin{cases} 1, & \text{se } m \in S \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

é igual a χ_S.

sexta-feira, 27 de agosto de 2021 21:28

Métodos de Prova

"$A \Rightarrow B$"

1) Prova Direta

Consiste em assumir verdadeiras as premissas e derivar o consequente.

"Se $n \in \mathbb{N}$ é múltiplo de 4, então n é múltiplo de 2."

Seja $n \in \mathbb{N}$ múltiplo de 4. Então $n = 4 \cdot m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. E veja que

$$n = 4m = 2(2m).$$

Logo, n é múltiplo de 2. ■

2) Prova por contraposição

$(\neg B \Rightarrow \neg A)$

Exercício: Se $f: X \to Y$ é uma função bijetora e $f(x) = y$, para $x \in X$ e $y \in Y$, prove que existe $f^{-1}: Y \to X$ t.q. $f^{-1}(y) = x$.

3) Prova por contradição

4) Prova por contraexemplo (mínimo)

"Todo múltiplo de 3 é múltiplo de 6"

Veja que 9 é múltiplo de 3, mas não é múltiplo de 6. Logo, a afirmação é falsa.

5) Prova por indução em $n \in \mathbb{N}$

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos $(n \geq 2)$ tais que para dois conjuntos quaisquer A_i e A_j temos que $\boxed{A_i \subseteq A_j \text{ ou } A_j \subseteq A_i}$. Prove, por indução em $n \geq 2$, que um dos n conjuntos é subconjunto de todos.

Base: $n=2$

Temos A_1 e A_2 t.q. $A_1 \subseteq A_2$ ou $A_2 \subseteq A_1$. No primeiro caso, A_1 é o conjunto procurado, e, no segundo, A_2 o é.

Hipótese de Indução: Assumo que A_k é subconjunto de todos os $A_1, \dots, A_m$, nas condições do enunciado.

P.I. Seja A_{m+1} um novo conjunto nas condições do enunciado. Pela H.I., A_k é subconjunto de todos os $A_1, \dots, A_m$. Pela hipótese do enunciado, vale uma das seguintes alternativas:

1) Agora, se $A_k \subseteq A_{m+1}$, então A_k é o conjunto procurado.

2) Se $A_{m+1} \subseteq A_k$, então A_{m+1} é o conjunto procurado.

5) Prove por indução nas fórmulas.

Seja $FORM_V$ o menor conjunto que satisfaz o seguinte:

(i) $V \subseteq FORM_V$; $\quad V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \subseteq FORM_V$

(ii) Se $\varphi, \psi \in FORM_V$, então $(\varphi \vee \psi) \in FORM_V$.

Prove que toda fórmula de $FORM_V$ é satisfatível.

Vamos provar por indução nas fórmulas de $FORM_V$:

Seja $\varphi \in FORM_V$.

Base: $\varphi = x$, para alguma $x \in V$

Toda variável é satisfatível.

H.I. Suponha que φ, $\psi \in FORM_V$ são satisfatíveis, i.e., existe $v_1 \models \varphi$ e existe $v_2 \models \psi$, $v_1, v_2 \in 2^V$.

P.I. Temos que $(\varphi \vee \psi)$ é satisfatível, pois, por H.I., φ é satisfatível, com $v_1 \models \varphi$. Logo, $v_1 \models (\varphi \vee \psi)$ (por def. de $\vee$). ■

$B = \{A\} \cup B'$?

Dizemos que $A \in B$ se, e somente se, A consta na listagem dos elementos de B.

$1 \subseteq \{1,2,3\} \iff$ para todo $x \in 1$, $x \in \{1,2,3\}$

$\{\boxed{\emptyset}\} \notin \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

NÃO!

$X = \{a \notin a\}$

ZFC → Choice

↳ Fraenkel

↳ Zermelo