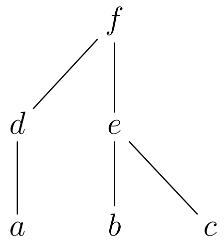
Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática Matemática Discreta II

Prof. Ciro Russo

Terceira unidade – 12/02/2014

Atenção: é preciso argumentar e justificar todas as respostas!

1. Sejam $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\leq$ a relação de ordem em X cujo diagrama de Hasse é o seguinte:



(a) $\leq$ define uma estrutura de reticulado sobre X? Em caso afirmativo, ele é distributivo?

(b) Existem, em $\langle X, \leq \rangle$, máximo, mínimo, elementos maximais, elementos minimais?

(c) Encontre $l(Y)$ e $u(Y)$, para $Y = \{a, e, f\}$.

(d) Encontre, se houver, $\sup\{b, c, d\}$ e $\inf\{b, c, d\}$.

2. Seja $D_{70} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 70\}$.

(a) Desenhe o diagrama de Hasse do conjunto ordenado $\langle D_{70}, | \rangle$.

(b) D_{70} é um subreticulado de $\langle \mathbb{N}, \mathrm{mmc}, \mathrm{mdc} \rangle$? Em caso afirmativo, ele é um reticulado distributivo?

(c) Encontre os elementos complementados de D_{70}.

(d) D_{70} é uma álgebra de Boole?

3. Seja $D_{210} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 210\}$. D_{210}, com as operações de mmc e mdc, e com 1 e 210, respectivamente, máximo e mínimo, tem uma estrutura de álgebra de Boole.

(a) Encontre a operação de complemento nessa álgebra, ou seja, encontre $\neg n$ para todo $n \in D_{210}$.

(b) Quais dos seguintes subconjuntos de D_{210} são subálgebras de Boole dele? [Dica: a resposta à letra (a) pode ajudar!]

- $X = D_{30}$, ou seja, o conjunto dos divisores de 30.
- $Y = \{1, 5, 7, 35, 210\}$
- $Z = \{1, 7, 30, 210\}$

(c) Dada a álgebra de Boole

$$\langle \wp(\{a, b\}), \cup, \cap, {}^c, \varnothing, \{a, b\} \rangle,$$

a função $f : \wp(\{a, b\}) \to D_{210}$ definida por

$$f(\varnothing) = 1,\ f(\{a\}) = 15,\ f(\{b\}) = 14,\ f(\{a, b\}) = 210$$

é um homomorfismo de álgebras de Boole? É injetivo? É um isomorfismo? É um homomorfismo de reticulados?

4. (Opcional) Para quais $n \in \mathbb{N}$ o reticulado D_n é uma álgebra de Boole?