Redexes e formas normais

Definição: um **redex** *(reducible expression)* é um subtermo de M com o formato

$$(\lambda x.P)\ Q$$

e o seu respectivo **contractum** é

$$P[x := Q]$$

Definição: um termo que não contenha nenhum redex é chamado **forma normal** (ou termo irredutível).

Exemplo:

a) $\lambda y.(\lambda x.y\ x)((\lambda y.x)\ y)$ contém dois redexes
b) $\lambda x.\lambda y.\ x\ x$ é uma forma normal

Redução beta

Redução beta descreve a avaliação de termos lambda através de substituição.

Temos $M \rightarrow_\beta N$ se obtivermos N através da contração de um redex de M.

Exemplo:

(a) $$(\lambda z.\lambda x.x\ z)\ y \ \rightarrow_\beta\ \lambda x.x\ y$$

(b) $$\lambda y.(\lambda x.y\ x)\ ((\lambda y.x)\ y)\ \rightarrow_\beta\ \lambda y.(\lambda x.y\ x)\ x$$

$$\lambda y.(\lambda x.y\ x)\ x\ \rightarrow_\beta\ \lambda y.y\ x$$

ver mais exemplos nos slides de Marcus Ramos

Redução beta: definição formal

Definição: $\rightarrow_\beta$ é a menor relação em Λ tal que

$$(\lambda x.P)\ Q \rightarrow_\beta P[x := Q] \qquad (\beta) \qquad\qquad \frac{M \rightarrow_\beta M'}{N\ M \rightarrow_\beta N\ M'}$$

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.M'} \qquad\qquad \frac{M \rightarrow_\beta M'}{M\ N \rightarrow_\beta M'\ N}$$

Definição: $\twoheadrightarrow_\beta$ é o fecho transitivo e reflexivo de $\rightarrow_\beta$.

Intuitivamente, $M \twoheadrightarrow N$ quando M reduz para N em 0 ou mais passos de redução beta.

Equivalência beta

β-**equivalência** identifica termos que possuem reescritas confluentes.

Definição: $=_\beta$ é a menor relação em Λ tal que

$$\frac{M \twoheadrightarrow_\beta P \qquad N \twoheadrightarrow_\beta P}{M =_\beta N}$$

Exemplo: os seguintes termos são β-equivalentes:

$$M = (\lambda z.\lambda x.x\ z)\ y$$
$$N = (\lambda u.\lambda x.x\ y)\ (t\ t)$$
$$P = \lambda x.x\ y$$

Nota: perceba que $M \not\twoheadrightarrow_\beta N$ e $N \not\twoheadrightarrow_\beta M$.

Equivalência beta: possuir forma normal

Definição: dizemos que um termo M **possui forma normal** sss

$$M =_\beta N$$

e N é uma forma normal.

Exemplo:

$(\lambda x.x\ x)$ possui forma normal (ele **é** f.n.)

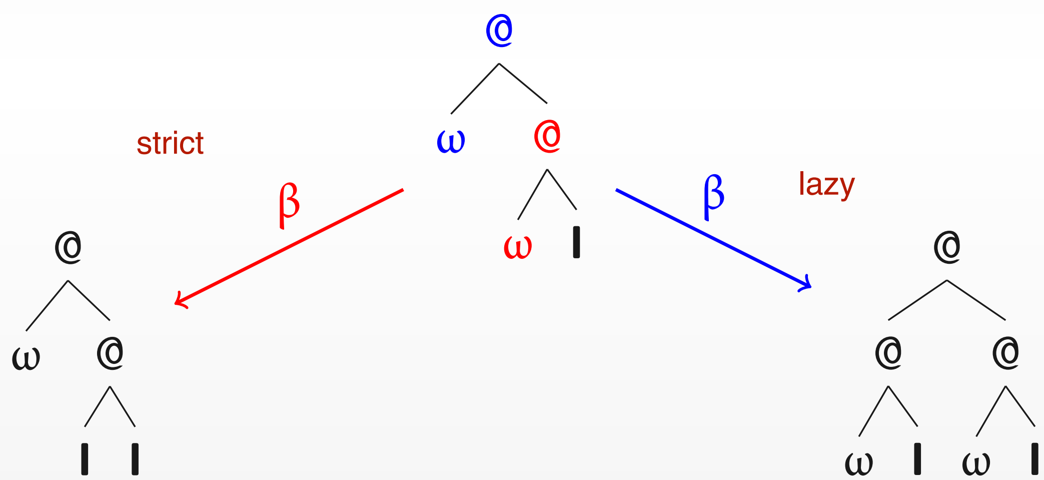
$(\lambda x.x\ x)\ a$ possui forma normal (ele β-reduz para $(a\ a)$, que **é** f.n.)

$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$ não possui forma normal (ele β-reduz para si mesmo)

Estratégias de avaliação

Um termo P pode ter diversos redexes e, portanto, avaliar para distintos termos.

Exemplo: (considere $\omega = \lambda x.x\ x$ e $\mathbf{I} = \lambda x.x$)



Estratégias de avaliação (2)

Definição: Uma **estratégia de avaliação** é uma escolha fixa para todos os termos de qual redex tem prioridade na redução.

Avaliação preguiçosa (lazy):

- redex mais externo, mais à esquerda
- realiza a aplicação sem normalizar os argumentos

Avaliação estrita (strict):

- redex mais interno, mais à esquerda
- normaliza todos os argumentos antes de aplicar a função

Exemplo:

- lazy: $(\mathbf{true}\ \mathbf{I}\ \Omega) \ \rightarrow_\beta\ (\lambda y.\mathbf{I})\ \Omega \ \rightarrow_\beta\ \mathbf{I}$
- strict: $(\mathbf{true}\ \mathbf{I}\ \Omega) \ \rightarrow_\beta\ (\lambda y.\mathbf{I})\ \Omega \ \rightarrow_\beta\ (\lambda y.\mathbf{I})\ \Omega \rightarrow_\beta\ \ldots$

true = lambda xy.x I = lambda x.x Omega = omega omega = lambda x. xx lambda x.xx

rever exemplo (b) slide 29

Propriedades de redução beta: confluência

Confluência: (Church-Rosser)

$$\text{se } N \leftarrow_\beta M \rightarrow_\beta N' \text{ então existe } P \text{ tal que } N \twoheadrightarrow_\beta P \twoheadleftarrow_\beta N'$$

Corolário: formas normais são únicas.

Exemplo:

$$\begin{tikzcd}
\omega(\mathbf{II}) \arrow[rr] \arrow[d] & & \omega(\mathbf{I}) \arrow[d] \\
(\mathbf{II})(\mathbf{II}) \arrow[r] & \mathbf{I}(\mathbf{II}) \arrow[r] & \mathbf{II}
\end{tikzcd}$$

Propriedades de redução beta: normalização

Normalização:

se o termo M possui forma normal N, então avaliar M usando a estratégia preguiçosa certamente alcança N.

- observe que nem todo termo possui forma normal.
- avaliação estrita pode não alcançar forma normal.
- determinar equivalência beta de termos é um problema indecidível.

Nota: não vamos apresentar neste minicurso as provas de confluência e normalização da redução beta. Contudo, elas são essenciais para a utilização do cálculo como linguagem de programação.

Cálculo lambda: revisão da teoria

Os seguintes conceitos e definições foram apresentados:

- pré-termos (Λ^-), variáveis livres e ligadas, operação de substituição, captura de variáveis livres.
- α-equivalência, termos (Λ), extensão de operações de pré-termos para termos.
- redexes, formas normais, β-redução, β-equivalência, possuir forma normal, estratégia de avaliação.
- propriedades de β-redução: confluência, normalização.

Alguns aspectos importantes não foram mencionados (por brevidade):

- provas formais das propriedades de confluência e normalização (β-redução)
- redução η (extensionalidade)
- redução δ (tipos de dados e operações primitivas)