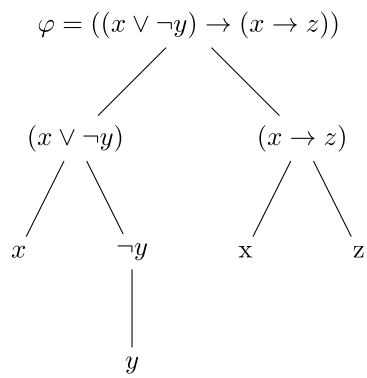
Prova 1 Lógica para Computação - MATA47

João Lucas Lima de Melo

October 22, 2021

Questão 1. Seja a fórmula $\varphi = x \vee \neg y \to x \to z$. As subfórmulas e as inserções de parênteses de φ são dadas por:

$$x \vee \neg y \to x \to z$$
$$(x \vee \neg y) \to x \to z$$
$$(x \vee \neg y) \to (x \to z)$$
$$\varphi = ((x \vee \neg y) \to (x \to z))$$



Questão 2. A relação de satisfabilidade $\vDash \subseteq 2^v \times Fm$ entre valorações e fórmulas é dada por:

$$v \vDash \varphi :\Leftrightarrow v(\varphi) = 1$$
$$v \nvDash \varphi :\Leftrightarrow v(\varphi) = 0$$

Seja $\Phi \subseteq Fm$ um conjunto de fórmulas. Estendemos a definição de satisfabilidade para $\Phi, \forall \varphi \in \Phi$, da seguinte forma:

$$v \vDash \Phi :\Leftrightarrow v \vDash \varphi$$

Definimos ainda Mod(Φ) := v $\in 2^v | v \vDash \Phi$ como o conjunto de todos os modelos de Φ.
Por fim, uma fórmula ψ consequência lógica de um conjunto de fórmulas $\Phi(\Phi \Vdash \psi)$ se $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\psi\})$.
Tendo em vista as definições apresentadas, seguimos com a prova pelo ciclo de implicações.

1. i $\Rightarrow$ ii
   Seja Φ, um conjunto de fórmulas, insatisfazível, isto é, $Mod(\Phi) = \varnothing$
   Por definição, $\varnothing$ está contido em qualquer conjunto.
   Portanto, $\forall\varphi$, $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\varphi\})$.
   Por definição de consequência lógica, portanto, temos:

$$\Phi \Vdash \varphi, \forall\varphi \in \Phi$$

2. ii $\Rightarrow$ iii
   Seja Φ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula tal que $\Phi \Vdash \varphi, \forall\varphi \in \Phi$.
   De imediato, basta adotar $\varphi = \perp$ para afirmar que

$$\Phi \Vdash \perp$$

3. iii $\Rightarrow$ i
   Por definição de consequência lógica,

$$\Phi \Vdash \perp \text{ se } Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\perp\})$$

   $\perp$ nunca é satisfeita por nenhuma valoração. Ou seja,

$$v \nvDash \perp :\Leftrightarrow v(\perp) = 0$$

   Dessa forma,

$$Mod(\{\perp\}) = \varnothing$$

   Já que
   $\Phi \Vdash \perp$,
   $\Phi \Vdash \perp$ se $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\perp\})$,
   $Mod(\{\perp\}) = \varnothing$,
   temos, portanto,

$$Mod(\Phi) = \varnothing, \text{ isto é, } \Phi \text{ é insatistafatível.}$$

Questão 3. Seguindo as definições de Fórmula Normal Disjuntiva e Fórmula Normal Conjuntiva, segue o desenvolvimento de φ :

$$\varphi = \neg p \vee q \to \neg(r \to q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q \to \neg(\neg r \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q \to (r \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (r \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \text{ FND}$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q) \text{ FNC}$$

Questão 4.

1. $\Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
    Por hipótese, vale $\Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
2. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
    Uma vez que $\Phi \subseteq \Phi \cup \{\varphi\}$, vale $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
3. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$.
    Temos que $\varphi \in \Phi \cup \{\varphi\}$, conjunto de premissas da conclusão da consequência lógica φ. Portanto, vale $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$.
4. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
    Atestamos a validade de $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ e $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ nos itens anteriores. Dessa forma, basta aplicar a regra da inferência, Modus Ponens, às fórmulas. Dessa forma, podemos inferir $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Questão 5. Temos as premissas $\Delta \vdash \varphi$, $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ e conclusão $\Delta \vdash \psi$. Assumimos as premissas como verdadeiras. Por definição de consequência lógica, temos que:

$Mod(\Delta) \subseteq Mod(\{\varphi\})$
$Mod(\Delta \cup \{\varphi\}) \subseteq Mod(\{\psi\})$

Pelo exposto anteriormente, temos que $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Delta \cup \{\varphi\}) \subseteq Mod(\{\psi\})$. Portanto, $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\{\psi\})$. Isto é, $\Delta \vdash \psi$.