# Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 19/03/2019 - 21/03/2019

## Definição: (Fórmulas bem formadas - fbf)

Podemos encadear sentenças simples ($p, q, r, s, \cdots$) ou compostas ($P, Q, R, S, \cdots$) usando os conectivos lógicos unário ($\neg$) e binários ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) obedecendo a hierarquia das operações, e usando os parênteses () se necessário, a fim de obtermos as chamadas "FÓRMULAS BEM FORMADAS- fbf" ou wffs(*well-formed formulas*).

### Exemplo:

1. $P \vee \neg P$

| $P$ | $\neg P$ | $P \vee \neg P$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

A fbf é uma TAUTOLOGIA

2. $P \wedge \neg P$

| $P$ | $\neg P$ | $P \wedge \neg P$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

A fbf é uma CONTRADIÇÃO

3. $\neg P \vee Q$

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

## Definição: (Equivalência)

Dizemos que uma fórmula bem formada da bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é uma Equivalência(ou EQUIVALÊNCIA LÓGICA) se, e somente se, é também uma tautologia. Dizemos assim que as proposições $P$ e $Q$ são Equivalentes e, denotamos por $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplo:

$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q \to \neg P$ | $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |

A fbf é uma TAUTOLOGIA logo, é uma EQUIVALÊNCIA :

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

## Propriedades de Equivalência

1. REFLEXIVA: $P \Leftrightarrow P$
2. SIMÉTRICA: Se $P \Leftrightarrow Q$ então $Q \Leftrightarrow P$
3. TRANSITIVA: Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$ então $P \Leftrightarrow R$

# Lógica Proposicional - Principais Equivalências

- LEIS DA COMUTATIVIDADE: $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
  $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- LEIS DA ASSOCIATIVIDADE: $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
  $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
- LEIS DA DISTRIBUTIVIDADE: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- LEI DA DUPLA NEGAÇÃO: $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

- LEIS DE DE MORGAN: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
- LEIS DA CONJUNÇÃO - DISJUNÇÃO: $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
  $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- LEI DA CONDICIONAL: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- LEI DA CONTRAPOSIÇÃO: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

# Lógica Proposicional - Principais Equivalências

- LEIS DA BICONDICIONAL: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
- LEIS DE IDEMPOTÊNCIA: $P \wedge P \Leftrightarrow P$
  $P \vee P \Leftrightarrow P$
- LEIS DA ABSORÇÃO: $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
  $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- LEIS DO COMPLEMENTO: $P \vee \neg P \Leftrightarrow V$
  $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

# Lógica Proposicional - Principais Equivalências

- LEIS DO ELEMENTO NEUTRO (IDENTIDADE): $\begin{array}{l} P \wedge V \Leftrightarrow P \\ P \vee F \Leftrightarrow P \end{array}$
- LEIS DO ELEMENTO ABSORVENTE: $\begin{array}{l} P \wedge F \Leftrightarrow F \\ P \vee V \Leftrightarrow V \end{array}$
- LEI DO DILEMA: $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \Leftrightarrow Q$
- LEI DA REDUÇÃO AO ABSURDO: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \rightarrow F$
- LEI DA EXPORTAÇÃO - IMPORTAÇÃO: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$

**Exemplo: Mostre a equivalência $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$**

$P \leftrightarrow Q \overset{Bicondicional}{\Longleftrightarrow} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \overset{Condicional}{\Longleftrightarrow}$
$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \overset{Distributiva}{\Longleftrightarrow} (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee$
$(Q \wedge P) \overset{Complemento}{\Longleftrightarrow} (\neg P \wedge \neg Q) \vee F \vee F \vee (Q \wedge P) \overset{Elemento\ Neutro}{\Longleftrightarrow}$
$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \overset{Comutativa}{\Longleftrightarrow} (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$ ■

### Aplicação:Comando na linguagem de programação Pascal

**if**(notaprova2 $>$ notaprova1) **and not** ((notaprova2 $>$ notaprova1) **and** (media $<$ 5)) **then**
um procedimento (lista de parâmetros)
**else**
outro procedimento (lista de parâmetros).

Definindo as proposições: $P$ : notaprova2 $>$ notaprova1; e $Q$ : media $<$ 5; a expressão condicional acima tem a seguinte **fbf**: $P \wedge \neg(P \wedge Q)$.
Esta **fbf** pode ser simplificada substituindo-se algumas subexpressões por suas expressões equivalentes:

$$P \wedge \neg(P \wedge Q) \overset{DeMorgan}{\Longleftrightarrow} P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \overset{Distributiva}{\Longleftrightarrow}$$
$$(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \overset{Complemento}{\Longleftrightarrow} F \vee (P \wedge \neg Q) \overset{ElementoNeutro}{\Longleftrightarrow} (P \wedge \neg Q).$$

## Aplicação:Comando na linguagem de programação Pascal

Agora, considerando a equivalência:
$P \wedge \neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q)$.
temos,
**if**(notaprova2 $>$ notaprova1) **and not** (media $<$ 5) **then**
um procedimento (lista de parâmetros)
**else**
outro procedimento (lista de parâmetros).

Exemplo: Escrever a fbf $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg P$ em termo de negação e disjunção:

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg P \overset{Condicional}{\Longleftrightarrow} \neg(P \leftrightarrow Q) \vee \neg P \overset{Bicondicional}{\Longleftrightarrow} \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee \neg P \overset{Conjuncão}{\Longleftrightarrow} \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \vee \neg P \overset{DuplaNegacão}{\Longleftrightarrow} \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)) \vee \neg P$.

## Definição: (Inferência ou Implicação)

Dizemos que uma fórmula bem formulada( fbf) da forma condicional $P \to Q$ é uma Inferência(IMPLICAÇÃO ou INFERÊNCIA LÓGICA ou REGRA DE INFERÊNCIA) se, e somente se, é também uma tautologia. Dizemos assim que a proposições $P$ é o **antecedente** e $Q$ é o **consequente**,
e denotamos por $P \Rightarrow Q$.

### Exemplo:

a fbf: $(P \to Q) \wedge P \to Q$ é uma tautologia,

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $(P \to Q) \wedge P$ | $(P \to Q) \wedge P \to Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | F | V |

logo, é também uma Inferência (ou Implicação): $(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$.

## Propriedades de Inferência

1. REFLEXIVA: $P \Rightarrow P$
2. TRANSITIVA: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ então $P \Rightarrow R$

## Observação:

As Regras de Inferência têm um papel importante nas demonstrações matemáticas.
Há TEOREMAS em matemática que são da forma $P \Rightarrow Q$, ou seja, uma *condicional tautológica*, onde $P$ é denominada HIPÓTESE e $Q$ é a TESE.
Devido à Lei da Contraposição, temos a Equivalência:
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$;
logo, a **contrapositiva** do teorema $\neg Q \Rightarrow \neg P$ também é uma *condicional tautológica* e, consequentemente, é um teorema.

# Lógica Clássica - Regras de Inferência

- Regra da Adição: **(AD)** "Ampliação Disjuntiva"
  $P \Rightarrow P \vee Q$
- Regra da Simplificação Conjuntiva: **(SIMPC)**
  $P \wedge Q \Rightarrow P$
- Regra da Simplificação Disjuntiva: **(SIMPD)**
  $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \Rightarrow P$
- Regra do Modus Ponens: **(MP)** **"método da afirmação"**
  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
- Regra do Modus Tollens: **(MT)** **"método da negação"**
  $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

# Lógica Clássica - Regras de Inferência

- Regra da Absorção:**(ABS)**
  $(P \rightarrow Q) \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$
- Regra do Silogismo Hipotético:**(SH)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$
- Regra do Silogismo Disjuntivo:**(SD)**
  $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$
  $(P \vee Q) \wedge \neg Q \Rightarrow P$
- Regra do Silogismo Conjuntivo:**(SC)**
  $\neg(P \wedge Q) \wedge Q \Rightarrow \neg P$
- Regra do Dilema Construtivo:**(DC)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)$
- Regra do Dilema Destrutivo:**(DD)**
  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$

## Definição: ARGUMENTOS

Sejam as fbfs tautológicas "$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, Q$". Dizemos que a implicação $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$ é um **Argumento** se, e somente se, podemos concluir $Q$ a partir de $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n)$; onde $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ são denominadas "PREMISSAS" e $Q$ é denominada "CONCLUSÃO".

**Notação:**

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \\ \therefore Q \end{array}$$

**Observação:**

As PREMISSAS podem ser listadas em qualquer ordem; e a regra de inferência pode ser aplicada em passos não consecutivos.

**Exemplo.1:**

Sejam as premissas $P_1 : (R \vee S)$ e $P_2 : ((R \vee S) \rightarrow U)$, conclua $Q : U$.

1. $P_1 : (R \vee S)$
2. $P_2 : ((R \vee S) \rightarrow U)$
3. $Q : U$

aplicando *Modus Ponens* em (1) e (2) : $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$, concluimos, $(R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow U) \Rightarrow U$.

### Exemplo.2:

Sejam as premissas $P_1 : R$ e $P_2 : (R \rightarrow (\neg\neg T))$, conclua $Q : T$.

1. $P_1 : R$
2. $P_2 : (R \rightarrow (\neg\neg T))$
3. $Q : T$

1. $P_1 : R$
2. $P_2 : (R \rightarrow (\neg\neg T))$
3. $P_3 : (R \rightarrow T)$ *Dupla Negação* em (2)
4. $P_4 : T$ *Modus Ponens* em (1) e (3), ou seja, concluimos $Q : T$

## Exemplo.3:

*"Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do pôr-do-sol."*
Prove que estas hipóteses levam à conclusão:
*"voltaremos antes do pôr-do-sol"*.

PRIMEIRO PASSO: **definir as proposições**

**p:** *Está ensolarado;* **u:** *Está mais frio que ontem;* **r:** *Iremos nadar;*
**s:** *Iremos passear de canoa;* **t:** *Voltaremos antes do pôr-do-sol.*

SEGUNDO PASSO: **definir as premissas e a conclusão**

1. $P_1 : \neg p \wedge u$
2. $P_2 : r \rightarrow p$
3. $P_3 : \neg r \rightarrow s$
4. $P_4 : s \rightarrow t$
5. $Q : t$

## Observações:

Temos que construir um ARGUMENTO onde as premissas $P_1, P_2, P_3, P_4$ levem à conclusão $Q$.

1. $P_1 : \neg p \wedge u$
2. $P_2 : r \rightarrow p$
3. $P_3 : \neg r \rightarrow s$
4. $P_4 : s \rightarrow t$
5. $P_5 : \neg p$ Simplificação em (1)
6. $P_6 : \neg r$ Modus Tollens em (2) e (5)
7. $P_7 : s$ Modus Ponens em (3) e (6)
8. $P_8 : t$ Modus Ponens em (4) e (7)

Assim, a partir das hipóteses e aplicando as regras de inferência, deduzimos a **conclusão** $t$: *Voltaremos antes do pôr-do-sol.*

# Argumentos Válidos e Falácias

## Definição: "Argumentos Válidos"

Seja o **Argumento** $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$. Dizemos que o **Argumento** é VÁLIDO se, e somente se, a conclusão $Q$ pode ser deduzida da conjunção $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n)$; ou seja, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ é um teorema.

## Definição: "Falácias"

Seja o **Argumento** $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$. Dizemos que o **Argumento** é uma FALÁCIA se, e somente se, a conclusão $Q$ não pode ser deduzida da conjunção $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n)$; ou seja, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$ não é um teorema.

### Exemplo: "Falácia"

"Se Pedro é alto, então Pedro é magro. Pedro é magro. Então Pedro é alto."
Sejam as proposições:
**p:** *Pedro é alto;* **q:** *Pedro é magro* .
premissas $P_1 : p \to q$ e $P_2 : q$, conclua $Q : p$.

### Observação:

A condicional : $P_1 \wedge P_2 \to Q$ não é uma tautologia, ou seja,
$(p \to q) \wedge q \to p$
não é um *Argumento Válido*; é uma **Falácia**.