Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II

Prof. Ciro Russo

Primeira unidade (prova substitutiva) – 20 de abril de 2015

1. Seja $|$ a relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$, isto é,

$$a|b \text{ sse } \exists c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } ac = b.$$

(a) Demonstre que $|$ não é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$.

(b) Apresente dois números inteiros distintos a e b tais que $a|b$ e $b|a$.

(c) Prove que, se $d \in \mathrm{mdc}(a, b)$ e $c|d$, então $c|a$ e $c|b$.

(d) Prove que $|$ é compatível com o produto, isto é:

$$\text{se } a|b \text{ e } c|d, \text{ então } ac|bd.$$

2. (a) Seja $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ e, para todo $n \geq 3$, $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-3})$. Encontre todos os elementos da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ até a_7.

(b) Defina por recorrência uma sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstre, por indução (e usando apenas os axiomas de Peano), a propriedade distributiva à esquerda do produto respeito à soma, ou seja, que para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$,

$$m(n + p) = mn + mp.$$

4. Demonstre, usando a indução, as seguintes:

(a) para todo $n \geq 6$, $5n + 5 \leq n^2$;

(b) para todo $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)$ é par.