Álgebra Linear IA - MATA07

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA.7 2020.01 - Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Definição: Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Dizemos que a matriz A é uma "**Matriz Linha Reduzida à Forma Escada**(M.L.R.F.E.)" se, e somente se, A satizfaz as seguintes condições:

1. Se A tem r linhas não-nulas; $1 \leq r \leq m$, então o primeiro elemento não-nulo de cada uma destas linhas é igual a 1;
2. Toda coluna da matriz A que possui o primeiro elemento não-nulo de alguma linha, tem os demais elementos iguais a zero;
3. Se A tem linhas nulas e não-nulas então as linhas nulas estão abaixo das linhas não-nulas; e,
4. Se A tem r, linhas não-nulas e o primeiro elemento não-nulo da i-èsima linha ocorre na coluna $c_i; \forall i = 1, \cdots, r; 1 \leq r \leq m$ então os escalares c_i respeitam a ordem crescente: $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$.

Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Observação: Matriz na Forma Escada (Escalonada)

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Dizemos que a matriz A é uma "**Matriz na Forma Escada (Escalonada)**" se, e somente se, A satizfaz as seguintes condições:

1. Toda coluna da matriz A que possui o primeiro elemento não-nulo de alguma linha, tem os elementos ABAIXO iguais a zero;
2. Se A tem linhas nulas e não-nulas então as linhas nulas estão abaixo das linhas não-nulas; e,
3. Se A tem r, linhas não-nulas e o primeiro elemento não-nulo da i-èsima linha ocorre na coluna $c_i; \forall i = 1, \cdots, r; 1 \leq r \leq m$ então os escalares c_i respeitam a ordem crescente: $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$.

Observe que toda M.L.R.F.E. é uma Matriz na Forma Escada mas a recíproca não é verdadeira.

EXEMPLOS:

1. $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $c_1 = 1; c_2 = 3 \Rightarrow c_1 < c_2$
2. $A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $c_1 = 1; c_2 = 2; c_3 = 3 \Rightarrow c_1 < c_2 < c_3$
3. $A_{m\times n} = O_{m\times n}$
4. $I_n; r = n; c_1 < c_2 < \cdots < c_n$

Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Proposição:

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ é linha equivalente a uma única Matriz Linha Reduzida à Forma Escada.

Exemplos:

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2i \\ -1 & -2-3i & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I_3 é a M.L.R.F.E. de A.

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2i \\ -1 & -2-3i & -3 \\ 0 & 6-6i & -6+2i \end{bmatrix} \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10+8i}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2-i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

B é a M.L.R.F.E. de A.

Observação: Uma Matriz na Forma Escada que seja linha equivalente à matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ não será única. A unicidade vale apenas para a M.L.R.F.E.

Exercícios

Questão.1: Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes abaixo a fim de obter para cada uma a M.L.R.F.E. .

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

Exercícios

Questão.1: (Respostas)

(a) $A \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $A \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Posto e Nulidade

Definição:(Posto)

Seja $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que B é a Matriz Linha Reduzida à Forma Escada de A. Indicamos por $\mathcal{P}(A)$ e denominamos POSTO de A "o número de linhas não-nulas da matriz B".

Definição:(Nulidade)

Seja $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que B é a Matriz Linha Reduzida à Forma Escada de A. Indicamos por $\mathcal{N}(A)$ e denominamos NULIDADE de A "o escalar $(n - \mathcal{P}(A))$"; n é o número de colunas da matriz A.

EXEMPLOS:

(1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2i \\ -1 & -2-3i & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B\ .$$

Então, $\mathcal{P}(A) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 3 - 3 = 0$.

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2i \\ -1 & -2-3i & -3 \\ 0 & 6-6i & -6+2i \end{bmatrix} \cdots \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{10+8i}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{-2-i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B\ .$$

Então, $\mathcal{P}(A) = 2$ e $\mathcal{N}(A) = 3 - 2 = 1$.

Exercícios

Questão.2: Determine o Posto e a Nulidade das matrizes abaixo, efetuando operações elementares sobre as linhas das matrizes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

Questão.2: (Respostas)

(a) $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{-}2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & \text{-}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\mathcal{P}(A) = 2$ e $\mathcal{N}(A) = 4 - 2 = 2$.

(b) $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathcal{P}(A) = 3$ e $\mathcal{N}(A) = 3 - 3 = 0$.