Álgebra Linear IA - MATA07

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA.8 2020.01 - Matriz Elementar

Definição: Matriz Elementar

Seja $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dizemos que a matriz E_n é uma "**Matriz Elementar**" se, e somente se, E_n é obtida a partir de uma ÚNICA operação elementar efetuada sobre as linhas da matriz identidade de mesma ordem, I_n.

EXEMPLOS:

1. $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; pois, $I_3 \xrightarrow{op} E_3$; $op : L_1 \leftrightarrow L_3$

2. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; pois, $I_3 \xrightarrow{op} E_3$; $op : L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1$

3. $E_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; pois, $I_2 \xrightarrow{op} E_2$; $op : L_1 \rightarrow -\frac{1}{4}L_1$

Proposição.1:

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e E_n uma matriz elementar. Se aplicarmos sobre as linhas de $A_{n\times m}$ a MESMA OPERAÇÃO ELEMENTAR que transforma I_n em E_n obteremos a matriz $E_n.A_{n\times m}$.
Ou seja,
Se $I_n \xrightarrow{op} E_n$ então $A_{n\times m} \xrightarrow{op} E_n.A_{n\times m}$.

D]: HIPÓTESES: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $I_n \xrightarrow{op} E_n$
TESE: $A_{n\times m} \xrightarrow{op} E_n.A_{n\times m}$.
Considerando $C_{n\times m}$ uma matriz linha equivalente à matriz $A_{n\times m}$ tal que $A_{n\times m} \xrightarrow{op} C_{n\times m}$.
Se fizermos $(I_n.A_{n\times m}) \xrightarrow{op} C_{n\times m}$ (1); não alteramos o resultado.
Note que (1) é equivalente a $(I_n \xrightarrow{op}).A_{n\times m} = C_{n\times m}$ (2); agora, por hipótese, temos: $I_n \xrightarrow{op} E_n$; substituindo em (2): $(E_n).A_{n\times m} = C_{n\times m}$. Logo, $E_n.A_{n\times m} = C_{n\times m}$.

Exemplos: Sejam as matrizes: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 5 & -4i & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

utilizando a Proposição.1: $I_2 \xrightarrow{op} E_2 \Rightarrow A_{2\times 3} \xrightarrow{op} C_{2\times 3} = E_2.A_{2\times 3}$

1. $op : L_1 \leftrightarrow L_2 \Longrightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & -4i & -\dfrac{1}{2} \\ 2 & 1+i & 3 \end{bmatrix}$
2. $op : L_2 \to L_2 + 2L_1 \Longrightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 9 & 2-2i & -\dfrac{11}{2} \end{bmatrix}$
3. $op : L_1 \to -\frac{1}{4}L_1 \Longrightarrow E_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   $$C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4}(1+i) & -\dfrac{3}{4} \\ 5 & -4i & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matriz Elementar

Teorema:

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Então, a matriz B é linha equivalente a matriz A se, e somente se, $B = PA$; $P = E_n^t E_n^{t-1} \cdots E_n^3 E_n^2 E_n^1$, onde cada matriz $E_n^k; (k = 1, 2, \cdots, t-1, t)$ é uma matriz elementar.

Observe,

$B \sim A \Leftrightarrow A \sim \overset{op_1 \cdots op_t}{\cdots} \sim B$; isto é,

Se B é linha equivalente a matriz A então efetuando-se "t-operações elementares" sobre as linhas de A obtém-se B.

Pela proposição.1, aplicar a k-ésima operação elementar (op_k) é equivalente à multiplicação, à esquerda, pela k-ésima matriz elementar, E_n^k .

Assim,

$$(E_n^t(E_n^{t-1} \cdots (E_n^3(E_n^2(E_n^1 A))))) = B$$

$$\Downarrow$$

$$(E_n^t E_n^{t-1} \cdots E_n^3 E_n^2 E_n^1)A = B.$$

Exemplo

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2i \\ -1 & -2-3i & -3 \\ 0 & 6-6i & -6+2i \end{bmatrix} \sim^{op_1 \cdots op_5}_{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{10+8i}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{-2-i}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B;$$

pelo teorema temos,

$$(E_3^5 E_3^4 E_3^3 E_3^2 E_3^1)A = B;$$

com,

$op_1 : L_1 \to (\frac{1}{2})L_1 \Rightarrow I_3 \xrightarrow{op_1} E_3^1$

$op_2 : L_2 \to L_2 + L_1 \Rightarrow I_3 \xrightarrow{op_2} E_3^2$

$op_3 : L_2 \to (\frac{1}{3-3i})L_2 \Rightarrow I_3 \xrightarrow{op_3} E_3^3$

$op_4 : L_1 \to L_1 - 5L_2 \Rightarrow I_3 \xrightarrow{op_4} E_3^4$

$op_5 : L_3 \to L_3 - (6-6i)L_2 \Rightarrow I_3 \xrightarrow{op_5} E_3^5$

Matriz Elementar

Teorema:

Toda matriz elementar E_n é invertível.

D]: Hipótese: E_n é uma matriz elementar.
Tese: E_n é invertível.
Por hipótese, sendo E_n uma matriz elementar então $I_n \xrightarrow{op} E_n \Rightarrow I_n \sim E_n$.
Pela propriedade simétrica das matrizes linhas equivalentes:
Se $I_n \sim E_n$ então $E_n \sim I_n$.
Assim, aplicando a operação elementar inversa em E_n obtemos I_n.
Considerando, op^{-1} a operação inversa de op, obtemos;

$I_n \xrightarrow{op} E_n \Rightarrow E_n \xrightarrow{op^{-1}} I_n$.
Pela proposição.1 ;
$E_n \xrightarrow{op^{-1}} I_n \Rightarrow I_n \xrightarrow{op^{-1}} E_n^{'} \Rightarrow E_n^{'}.E_n = I_n$ (1) e; do mesmo modo,
$E_n^{'} \xrightarrow{(op^{-1})^{-1}=op} I_n$ mas por hipótese, $I_n \xrightarrow{op} E_n \Rightarrow E_n.E_n^{'} = I_n$ (2).
Agora, utilizando a definição de matrizes invertíveis, por (1) e (2), concluímos
$E_n^{'}.E_n = E_n.E_n^{'} = I_n \Rightarrow E_n^{'} = E_n^{-1}$.

Exemplos

1. $I_2 \stackrel{op: L_1 \to \frac{1}{3} L_1}{\longrightarrow} E_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_2 \stackrel{op^{-1}: L_1 \to 3L_1}{\longrightarrow} E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
   $E_2^{-1} E_2 = E_2 E_2^{-1} = I_n$
2. $I_2 \stackrel{op: L_1 \to L_1 + 2L_2}{\longrightarrow} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_2 \stackrel{op^{-1}: L_1 \to L_1 - 2L_2}{\longrightarrow} E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
   $E_2^{-1} E_2 = E_2 E_2^{-1} = I_n$