Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad = \quad Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t\,Q \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

3

Espaços Vetoriais

Conteúdo

3.1 Espaço Vetorial. Propriedades

Em vários ramos da matemática, defrontamo-nos com conjuntos, nos quais são, ao mesmo tempo significativos e interessante trabalhar com *combinações lineares* de seus elementos. Por exemplo, no estudo de equações lineares, é bastante natural considerar combinações lineares das linhas ou colunas de uma matriz. Em cálculo diferencial trabalhamos com combinações lineares de funções, por exemplo, no estudo de equações diferenciais. De um modo geral, a primeira experiência com vetores é apresentada com o estudo dos espaços euclidianos bidimensional e tridimensional.

Em geral, a Álgebra Linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto no qual a noção de combinação linear de seus elementos possa ser definida. Nesta seção vamos definir o objeto matemático que, como a experiência mostrou, é a abstração mais útil e interessante deste tipo de sistema algébrico.

Definição 3.1.1 *Um **Espaço Vetorial** consiste do seguinte:*

(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.

(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.

*(3) uma **operação de adição de vetores**, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto é, V é **fechado** com relação à operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:*

(A_1) Comutatividade. $u + v = v + u \; ; \; \forall \; u, v \in V.$

(A_2) Associatividade. $u + (v + w) = (u + v) + w \; ; \; \forall \; u, v, w \in V.$

(A_3) Elemento Neutro. Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u \; ; \forall \, u \in V$.

(A_4) Elemento Simétrico. Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0_V \; ; \; \forall \; u \in V$.

*(4) uma **operação de multiplicação por escalar**, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é **fechado** com relação à operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:*

(M_1) Associatividade. $(\alpha \beta) u = \alpha (\beta u) \; ; \; \forall \; u \in V \;$ e $\; \forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos.
$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v \; ; \; \forall \; u, v \in V \;$ e $\; \forall \; \alpha \in \mathbb{F}.$

(M_3) *Distributividade para a Multiplicação por Escalar.*
$(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$; $\forall\ u \in V$ *e* $\forall\ \alpha, \beta \in I\!\!F$.

(M_4) *Elemento Identidade.* $1_{I\!\!F}\, u = u$; $\forall\ u \in V$.

Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $I\!\!F = I\!\!R$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $I\!\!F = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo. Por simplicidade, em todo texto podemos pensar $I\!\!F = I\!\!R$ ou $I\!\!F = \mathbb{C}$, a menos nos casos em que o corpo é explicitado. De uma maneira mais geral, podemos considerar que $I\!\!F$ é um corpo de característica zero, veja Definição 1.8.1.

Exemplo 3.1.1 *O conjunto do números reais,* $I\!\!R$*, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 3.1.2 *O conjunto do números complexos,* $\mathbb{C}$*, com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo* $I\!\!F = \mathbb{C}$*. Entretanto, podemos considerar o corpo de escalares como sendo* $I\!\!F = I\!\!R$*. Desse modo, temos que* $\mathbb{C}$ *é um espaço vetorial real.*

Exemplo 3.1.3 *O conjunto* $I\!\!R^n = \{\ u = (x_1, \cdots, x_n)\ /\ x_i \in I\!\!R\ \}$*, conjunto de todas as n–uplas reais, com a operação de adição de elementos definida por:*

$$u + v = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

e a operação de multiplicação por escalar definida por:

$$\lambda u = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

é um espaço vetorial real.

Para mostrar que a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $I\!\!R^n$ verificam os axiomas da definição de espaço vetorial, basta utilizar as propriedades da operação de adição e da operação de multiplicação de elementos do corpo $I\!\!R$.

Exemplo 3.1.4 *O conjunto* $\mathbb{C}^n = \{ (z_1, \cdots, z_n) \ / \ z_i \in \mathbb{C} \}$, *conjunto de todas as* n*–uplas complexas, com as operações usuais, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Para mostrar que a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $\mathbb{C}^n$ verificam os axiomas da definição de espaço vetorial, basta utilizar as propriedades da operação de adição e da operação de multiplicação de elementos do corpo $\mathbb{C}$. Entretanto, podemos considerar o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. desse modo, temos que $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1.5 *O conjunto* $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ *é uma função* $\}$, *com a operação de adição de elementos definida como:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad \forall\, f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

e a operação de multiplicação por escalar definida como:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad ; \quad \forall\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ \ e \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1.6 *O conjunto* $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ *é uma função contínua* $\}$, *com a operação de adição de elementos e como a operação de multiplicação por escalar definidas em* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, *é um espaço vetorial real.*

Exemplo 3.1.7 *Seja* $n \geq 0$ *um número natural. O conjunto dos polinômios reais de grau* $\leq n$, *com coeficientes reais, que denotamos por* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, *munido da operação de adição de elementos e da operação de multiplicação por escalar definidas de modo análogo ao Exemplo 3.1.5, é um espaço vetorial real. Assim, todo elemento* $p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ *é escrito na forma:*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n ,$$

com os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.8 *O conjunto da matrizes reais de ordem* $m \times n$, *que vamos denotar por* $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, *é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar.*

Teorema 3.1.1 (Unicidade do Elemento Neutro)
Seja V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Então, existe um único elemento neutro da operação de adição* $0_V \in V$*.*

Demonstração – O axioma (A_3) afirma que existe pelo menos um elemento neutro 0_V em V. Vamos supor que existem dois elementos neutros 0_V e 0_1, isto é,

$$0_V = 0_V + 0_1 = 0_1 + 0_V = 0_1 ,$$

o que prova a unicidade do elemento neutro da operação de adição. ■

Exemplo 3.1.9 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*. Assim, o elemento neutro da operação de adição é o polinômio* $p_0(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$p_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. Assim, temos que* $a = b = c = d = 0$*.*

Teorema 3.1.2 (Unicidade do Elemento Simétrico)
Seja V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Então, todo elemento* $u \in V$ *possui um único elemento simétrico.*

Demonstração – O axioma (A_4) afirma que todo elemento $u \in V$ possui pelo menos um elemento simétrico $-u \in V$. Vamos supor que o elemento $u \in V$ possui dois elementos simétricos $-u$ e u_1, isto é,

$$u + (-u) = 0_V \qquad \text{e} \qquad u + u_1 = 0_V$$

Desse modo, temos que

$$(-u) = 0_V + (-u) = (u + u_1) + (-u) = 0_V + u_1 = u_1 ,$$

o que prova a unicidade do elemento simétrico. ■

Exemplo 3.1.10 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$*. Assim, o elemento neutro da operação de adição é a função* $f_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ *dada por:*

$$f_0(x) = 0 \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a,b] .$$

Além disso, dada uma função $f \in \mathcal{C}([a,b])$*, o seu elemento simétrico é a função* $(-f)$ *definida por:*

$$(-f)(x) = -f(x) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a,b] .$$

Teorema 3.1.3 (Lei do Cancelamento) *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, $u, v, w \in V$ *e* $u + v = u + w$. *Então,* $v = w$.

Demonstração – Somando $(-u)$ em ambos os lados na igualdade temos

$$v = u + (-u) + v = u + (-u) + w = w$$

o que completa a prova. ■

Teorema 3.1.4 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, *e* $u, w \in V$. *Então, existe um único elemento* $v \in V$ *tal que* $u + v = w$.

Demonstração – Somando $(-u)$ em ambos os lados da equação tem–se que

$$v = u + (-u) + v = (-u) + w$$

o que completa a prova. ■

Teorema 3.1.5 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, $u, v \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. *Então, temos as seguintes propriedades:*

(a) $0_{\mathbb{F}}\, u = 0_V$;

(b) $\alpha\, 0_V = 0_V$;

(c) $(-\alpha)\, u = -(\alpha\, u) = \alpha\, (-u)$;

(d) se $\alpha\, u = 0_V$, *então* $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ *ou* $u = 0_V$;

(e) se $\alpha\, u = \alpha\, v$ *e* $\alpha \neq 0_{\mathbb{F}}$, *então* $u = v$;

(f) se $\alpha\, u = \beta\, u$ *e* $u \neq 0_V$, *então* $\alpha = \beta$;

(g) $-(u + v) = (-u) + (-v) = -u - v$;

(h) $u + u = 2\, u$, $u + u + u = 3\, u$, *de um modo geral*, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u = n\, u$.

Demonstração

(a) Seja $v = 0_{I\!F}\, u$. Queremos mostrar que $v = 0_V$. Fazendo

$$v + v = 0_{I\!F}\,(u + u) = v$$

e somando $(-v)$ em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$v = v + 0_V = v + (\, v + (-v)\,) = v + (-v) = 0_V$$

Logo, $v = 0_V$. ■

(b) A prova é feita de modo análogo ao item *(a)*, e pode ficar a cargo do leitor. □

(c) Seja $v = (-\alpha)\, u$. Temos que

$$v + \alpha\, u = (-\alpha)\, u + \alpha\, u = (-\alpha + \alpha)\, u = 0_V$$

Assim, obtemos que $v = -(\alpha\, u)$. Vamos provar agora que $v = \alpha\,(-u)$. Fazendo

$$\alpha\,(-u) + \alpha\, u = \alpha\,(\,(-u) + u\,) = \alpha\, 0_V = 0_V$$

provamos que $-(\alpha\, u) = \alpha\,(-u)$. ■

(d) Se $\alpha = 0_{I\!F}$ reduz–se ao caso do item *(a)*. Tomamos $\alpha\, u = 0_V$ com $\alpha \neq 0_F$. Sabemos que existe um único $\alpha^{-1} \in I\!F$ tal que $\alpha\,\alpha^{-1} = 1_{I\!F}$. Desse modo, tem–se que

$$u = 1_{I\!F}\, u = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, u = \alpha^{-1}\,(\alpha\, u) = \alpha^{-1}\, 0_V = 0_V\ ,$$

pelo item *(b)*. Logo, $u = 0_V$. ■

(e) Como $\alpha \neq 0_{I\!F}$, sabemos que existe um único $\alpha^{-1} \in I\!F$ tal que $\alpha\,\alpha^{-1} = 1_{I\!F}$. Desse modo, temos que

$$u = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, u = \alpha^{-1}\,(\alpha\, u) = \alpha^{-1}\,(\alpha\, v) = (\alpha^{-1}\,\alpha)\, v = v$$

Logo, $u = v$. ■

(f) Somando $-(\beta\, u)$ em ambos os lados da igualdade $\alpha\, u = \beta\, u$, obtemos

$$\alpha\, u + (-(\beta\, u)) = \alpha\, u + (-\beta)\, u = = (\alpha + (-\beta))\, u = (\alpha - \beta)\, u = 0_V$$

como $u \neq 0_V$, temos que $(\alpha - \beta) = 0_{I\!F}$. Logo, $\alpha = \beta$. ■

(g) A prova é feita de modo análogo ao item *(f)*, e pode ficar a cargo do leitor. □

(h) A prova é feita por indução a partir dos axiomas (A_2) e (M_3) da definição de espaço vetorial. □

Exercícios

Exercício 3.1 *Mostre que o conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$ *é um espaço vetorial real, com as operações usuais de adição de elementos e multiplicação por escalar.*

Exercício 3.2 *Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais de ordem* n*, que denotamos por* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, com a operação de adição de elementos,* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$*, definida por:* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ *e a operação de multiplicação por escalar definida por:* $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$*, é um espaço vetorial real.*

Exercício 3.3 *Considere o espaço vetorial real* $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \}$ *com as operações:*

- ***adição de elementos:*** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.
- ***multiplicação por escalar:*** $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, \alpha y) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

(a) *Exiba o elemento neutro da operação adição.*

(b) *Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento* $(x, y) \in V$.

(c) *Mostre que* $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v \quad , \quad u, v \in V \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.4 *Considere o conjunto* $V = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \}$*. Definimos as seguintes operações em* V*:*

1. $x \oplus y = xy \,, \ \forall \, x, y \in V$;
2. $\alpha \odot x = x^\alpha \,, \ \forall \, x \in V, \ \forall \, \alpha \in \mathbb{R}$.

Verifique se $(V, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial real.*

Exercício 3.5 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$*. Mostre que*

$$Z = V \times W = \{ (v,u) \ / \ v \in V \quad e \quad w \in W \}$$

munido das seguintes operações:

$$(v_1 , w_1) + (v_2 , w_2) = (v_1 + v_2 , w_1 + w_2)$$

$$\lambda(v , w) = (\lambda v , \lambda w) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

3.2 Subespaço Vetorial

Definição 3.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um* ***subespaço vetorial*** *de V é um subconjunto U de V que é ele mesmo um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.*

Exemplo 3.2.1 *O subconjunto $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - ax = 0 \ ; \ a \in \mathbb{R} \}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Dê uma interpretação geométrica para S.*

Exemplo 3.2.2 *o conjunto $\mathcal{C}_0([a,b]) = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ f(a) = f(b) = 0 \}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}([a,b])$.*

Exemplo 3.2.3 *O subconjunto S do $\mathbb{R}^3$ definido da forma:*

$$S = \{ w \in \mathbb{R}^3 \ / \ w = a(1,-1,1) + b(2,1,-1) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Dê uma interpretação geométrica para S.

Teorema 3.2.1 (Subespaço Vetorial) *Um subconjunto* ***não vazio*** *U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos u , $v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, tem–se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$, isto é, U é fechado com relação as operações de adição e multiplicação por escalar.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Se U é um subespaço vetorial de V, então satisfaz todos os axiomas de espaço vetorial, em particular satisfaz os axiomas de fechamento.

($\Longleftarrow$) Agora, vamos mostrar que se U satisfaz os axiomas de fechamento, então satisfaz os axiomas da adição de elementos e os axiomas da multiplicação por escalar. Como $U \subset V$, os axiomas (A_1) e (A_2) são automaticamente satisfeitos, pois são válidos para todos os elementos de V. De modo análogo, os axiomas (M_1), (M_2), (M_3) e (M_4) são satisfeitos automaticamente. Finalmente, devemos provar somente os axiomas:

(A_3) Elemento Neutro. Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$, obtemos $0_{\mathbb{F}} u = 0_V \in U$. Logo, U possui elemento neutro.

(A_4) Elemento Simétrico. Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = -1_{\mathbb{F}}$, obtemos $-1_{\mathbb{F}} u = 1_{\mathbb{F}} (-u) = -u \in U$. Logo, todo elemento de U possui o elemento simétrico. O que completa a demonstração. ■

Exemplo 3.2.4 *O subconjunto* $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - 2x = 1 \}$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$, não pertence a S. Além disso, o subconjunto S não é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exemplo 3.2.5 *o subconjunto* $U = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ f(a) = 1 \}$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([a,b])$.

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, não pertence a U. Além disso, o subconjunto U não é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exemplo 3.2.6 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *O subconjunto*

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) = 0 \quad e \quad p'(1) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Para mostrar que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, vamos verificar se o elemento neutro da adição pertence a S e se os axiomas de fechamento são satisfeitos. É fácil ver que o polinômio identicamente nulo satisfaz as condições $p(-1) = 0$ e $p'(1) = 0$.

Inicialmente, vamos verificar se o subconjunto S é fechado com relação à operação de adição de elementos, isto é, dados os elementos $p(x), q(x) \in S$ temos que

$$(p + q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad (p + q)'(1) = p'(1) + q'(1) = 0$$

Logo, o elemento $(p(x) + q(x)) \in S$.

Finalmente, vamos verificar se o subconjunto S é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar, isto é, dados os elementos $p(x) \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$(\lambda p)(-1) = \lambda p(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad (\lambda p)'(1) = \lambda p'(1) = 0$$

Logo, o elemento $\lambda p(x) \in S$. Portanto, o subconjunto S é um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.2.7 *Considere o sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} .$$

Mostre que o conjunto solução é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Vamos obter a solução do sistema linear utilizando o escalonamento

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Portanto, temos que $x = -z$ e $y = -z$ com $z \in \mathbb{R}$.

Assim, o conjunto solução do sistema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z) = \alpha(-1,-1,1) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \}$$

onde $v = (-1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ é denominada solução básica. Agora podemos verificar facilmente que S é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Por simplicidade, representamos o sistema linear homogêneo na sua forma matricial

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Assim, podemos definir o conjunto solução da seguinte forma:

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ AX = 0 \} \qquad \text{onde} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

Temos uma representação mais interessante com a qual podemos obter vários resultados sobre o conjunto solução. Apresentamos o mesmo problema de uma maneira mais geral no Exemplo 3.2.10.

Exemplo 3.2.8 *O subconjunto*

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx \geq 0 \right\}$$

não é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{C}([0,1])$.

De fato, o conjunto S não é fechado em relação à operação de multiplicação por escalar. Tomando um elemento $f \in S$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ negativo, temos que o elemento $(\lambda f) \notin S$. Note que o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, pertence ao conjunto S e o conjunto S é fechado com relação à operação de adição de elementos.

Exemplo 3.2.9 *O subconjunto* U, *do espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *definido por:*

$$U = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \;/\; \int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Podemos verificar facilmente que U é um subconjunto não vazio de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. De fato, o polinômio identicamente nulo satisfaz a condição para que um elemento de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pertença a U, isto é, $0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} \in U$.

Assim, devemos mostrar que U é fechado com relação à operação de adição e fechado com relação à operação de multiplicação por escalar.

Tomando os elementos $p(x)$, $q(x) \in U$, isto é, satisfazendo a condição

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{1} q(x)dx \;+\; q'(0) = 0\,.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{1}^{1} (p+q)(x)dx \;+\; (p+q)'(0) &= \int_{1}^{1} (\,p(x) + q(x)\,)dx \;+\; p'(0) \;+\; q'(0) \\ &= \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} + \left\{ \int_{-1}^{1} q(x)dx + q'(0) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que $(\,p(x) + q(x)\,) \in U$.

Tomando $p(x) \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{1}^{1} (\lambda p)(x)dx \;+\; (\lambda p)'(0) &= \int_{1}^{1} \lambda p(x)dx \;+\; \lambda p'(0) \\ &= \lambda \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} = 0\,. \end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\lambda p(x) \in U$.

Portanto, o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.2.10 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *O subconjunto* S *do* $\mathbb{R}^n$ *definido da forma:*

$$S = \{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ AX = 0_{\mathbb{R}^n} \} \qquad \textit{onde} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

que é o conjunto solução do sistema linear homogêneo $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$, *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.

Por simplicidade, vamos utilizar a seguinte representação

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

para os elementos $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Assim, podemos fazer a representação matricial do sistema linear homogêneo $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Podemos verificar facilmente que o elemento neutro da adição $0_{\mathbb{R}^n} \in S$, isto é, o elemento neutro $0_{\mathbb{R}^n}$ é a solução trivial do sistema linear homogêneo.

Considerando $x, y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$A(X + Y) = AX + AY = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \Longrightarrow \qquad (x + y) \in S$$

e que

$$A(\lambda X) = \lambda AX = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \Longrightarrow \qquad (\lambda x) \in S .$$

Portanto, o subconjunto S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2.11 *O conjunto* S *de todas as funções representadas da forma*

$$f(x) = ae^{x} + be^{-x} \qquad ; \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

para $x \in \mathbb{R}$, *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

De fato, o elemento neutro da operação de adição, $f \equiv 0$, pertence a S, bastando tomar $a = b = 0$. Além disso, o conjunto S é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

Exercícios

Exercício 3.6 *Verifique se o subconjunto* S *de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$S = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^2 = A \},$$

o conjunto das matrizes idempotentes, é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Exercício 3.7 *Mostre que o subconjunto de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$*.*

Exercício 3.8 *Considere o espaço vetorial real* $V = \{ (x,y) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$*, com as operações:*

- ***adição de elementos:*** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 5, \, y_1 + y_2)$
- ***multiplicação por escalar:*** $\alpha \odot (x,y) = (\alpha \, x + 5(\alpha - 1), \, \alpha \, y) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

(a) Exiba o elemento neutro da operação adição.

(b) Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento $(x,y) \in V$*.*

(c) Verifique se $W = \{ (x,y) \in V \ / \ x = -5 \}$ *é um subespaço vetorial de* V*.*

Definição 3.2.2 *Dado um elemento* $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ *fixo, porém arbitrário, e um escalar* $d \in \mathbb{R}$*. O subconjunto* $H \subset \mathbb{R}^n$ *definido por:*

$$H = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = d \}$$

é denominado **hiperplano***.*

Exercício 3.9 *Considere um hiperplano* H *contido em* $\mathbb{R}^n$*. Mostre que* H *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$*, no caso em que* $d = 0$*.*

Exercício 3.10 *Considere o seguinte subconjunto* S *de* $\mathcal{C}([a,b])$ *definido por:*

$$S = \{ f \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ f \text{ é uma função crescente} \}.$$

Verifique se S *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([a,b])$*.*

Exercício 3.11 *Mostre que o seguinte subconjunto*

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ / \ \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$$

é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercício 3.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Mostre que o subconjunto*

$$U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) = p(1) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercício 3.13 *Definimos o* ***traço*** *da matriz* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *que denotamos por* $tr(A)$, *da seguinte forma:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

Mostre que o subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$S = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ tr(A) = 0 \}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 3.14 *Mostre que os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *definidos por:*

$$U = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A \}$$

$$W = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = -A \}$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 3.15 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-a,a])$ *com* $a \in \mathbb{R}_+$. *Mostre que os seguintes subconjuntos*

$$U = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

$$W = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = -f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

são subespaços vetoriais de $\mathcal{C}([-a,a])$.

Exercício 3.16 *Considere o subconjunto* S *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$S = \{ v \in \mathbb{R}^2 \ / \ v = \alpha(1,\ 2) + (3,\ 2) \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \} .$$

Verifique se S *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

3.3 Combinação Linear. Subespaço Gerado

Definição 3.3.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Dizemos que o elemento* $u \in V$ *é uma* ***combinação linear*** *dos elementos* $v_1 , \cdots , v_n \in V$ *se existem escalares* $c_1 , \cdots , c_n \in \mathbb{F}$ *tais que*

$$u = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n .$$

Definição 3.3.2 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* S *um conjunto finito de elementos de* V, *isto é,* $S = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$. *O subconjunto* U *construído a partir dos elementos de* S *da seguinte forma:*

$$U = \left\{ u \in V \ / \ u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

é um subespaço vetorial de V, *que vamos denotar por*

$$U = [v_1, \cdots , v_n] \qquad \text{ou por} \qquad U = [S] ,$$

denominado ***subespaço gerado*** *pelos elementos de* S. *Dizemos que o conjunto* S *é um* ***sistema de geradores*** *para o subespaço* U.

Exemplo 3.3.1 *Considere o seguinte espaço vetorial real*

$$\mathcal{C}_0([-\pi, \pi]) = \{ f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \ / \ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \}$$

Note que $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$ *é também um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$. *Considere o subconjunto* S *de elementos de* $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$ *dado por:*

$$S = \{ \sin(x), \ \sin(2\,x), \ \cdots , \ \sin(n\,x) \}$$

O subconjunto W *definido como:*

$$W = \left\{ f \in \mathcal{C}_0([-\pi, \pi]) \ / \ f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin(k\,x) \quad ; \quad c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

é o subespaço gerado pelos elementos de S. *Logo,* W *é um subespaço de* $\mathcal{C}_0([-\pi, \pi])$.

Exemplo 3.3.2 *Considere uma matriz* $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, *com* $m > n$. *Vamos denotar por* $v_1, \cdots , v_n \in \mathbb{R}^m$ *as colunas da matriz* A. *O subconjunto* $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}^m$ *definido por:*

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \ / \ y = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \quad ; \quad c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

é o subespaço gerado pelas colunas da matriz A, *denominado* ***espaço coluna de*** A.

Exemplo 3.3.3 *Dada a matriz* $A \in \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que o elemento $v = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao* ***espaço coluna de*** A.

Basta mostrar que o elemento v pode ser representado pela combinação linear

$$(-1, 0, 1) = a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R},$$

isto é, devemos encontrar a solução do sistema linear

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ 2a & + & b & = & 0 \\ 3a & + & b & = & 1 \end{array}$$

Logo, $a = 1$ e $b = -2$ é a única solução do sistema linear acima. Assim, mostramos que o elemento $v \in \mathcal{R}(A)$.

Exemplo 3.3.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Dados os elementos*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 - 1 \\ p_2(x) &= x^2 + x - 1 \\ p_3(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $p_1(x) = \alpha\, p_2(x) + \beta\, p_3(x)$ *?*

Exemplo 3.3.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *Dados os elementos*

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1) \\ v_2 &= (3, -2) \\ v_3 &= (1, -1) \end{aligned}$$

determine o elemento $u \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\frac{u + v_1}{2} + \frac{v_2 + u}{3} = v_3 \,.$$

Definição 3.3.3 *Dizemos que um espaço vetorial* V *é* ***finitamente gerado*** *se existe um subconjunto finito* $S \subset V$ *de maneira que* $V = [S]$.

Exemplo 3.3.6 *Considere o subespaço* $W = \{ A \in I\!M_2(I\!R) \ / \ A = A^t \}$ *de* $I\!M_2(I\!R)$. *Mostre que* W *é gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Basta observar que qualquer elemento $A \in I\!M_2(I\!R)$ é representado de modo único pela combinação linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 3.3.7 *Mostre que o espaço vetorial* $I\!M_2(I\!R)$ *é gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Basta mostrar que qualquer elemento $A \in I\!M_2(I\!R)$ é representado pela combinação linear

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

para $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4 \in I\!R$. Assim, devemos mostrar que o sistema linear

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & = & a \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & & & \alpha_4 & = & b \\ \alpha_1 & + & & & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & c \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & d \end{array}$$

possui solução. Escalonando a matriz do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ,$$

obtemos que o $posto(A) = 4$, veja Definição 2.6.3. Assim, concluímos que o sistema linear possui uma única solução. Desse modo, mostramos que o conjunto

$$\{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$$

gera de modo único os elementos do espaço vetorial $I\!M_2(I\!R)$. Note que para obter a solução do sistema linear, devemos realizar as mesmas operações elementares no lado direito do sistema.

Exercícios

Exercício 3.17 *Considere o subespaço vetorial de* $I\!M_2(I\!R)$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \;/\; x - y - z = 0 \right\}.$$

Determine um sistema de geradores para U.

Exercício 3.18 *Considere o subespaço vetorial de* $I\!R^4$ *dado por:*

$$U = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \;/\; x - y + z + t = 0 \quad e \quad -x + 2y + z - t = 0 \}.$$

Determine um sistema de geradores para U.

Exercício 3.19 *Seja* W *o subespaço de* $I\!M_{3\times 2}(I\!R)$ *gerado pelas matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se a matriz A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

pertence ao subespaço W.

Exercício 3.20 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$*. Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

verifique se os elementos $u, v \in I\!R^3$*, dados abaixo, pertencem ao subespaço gerado pelas colunas da matriz* A.

(i) $u = (1, 2, -8)$ *(ii)* $v = (6, -3, -2)$.

Exercício 3.21 *Mostre que as matrizes*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam um sistema de geradores para o subespaço $W = \{ A \in I\!M_2(I\!R) \;/\; A = A^t \}$.

3.4 Soma e Intersecção. Soma Direta

Teorema 3.4.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, U e W subespaços vetoriais de V. Então, o subconjunto de V definido por:*

$$U \cap W = \{ v \in V \ / \ v \in U \quad e \quad v \in W \}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração – Temos que $U \cap W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U \cap W$. Agora, basta mostrar que o subconjunto $U \cap W$ satisfaz as condições do Teorema 3.2.1, isto é, que satisfaz os axiomas de fechamento.

Sejam $u, v \in U \cap W$. Logo, $u, v \in U$ e $u, v \in W$. Como U e W são subespaços vetoriais de V temos que $u + v \in U$ e $u + v \in W$. Portanto, mostramos que $U \cap W$ é fechado com relação à operação de adição de elementos.

De modo análogo, seja $u \in U \cap W$. Logo, $u \in U$ e $u \in W$. Como U e W são subespaços vetoriais de V temos que $\lambda u \in U$ e $\lambda u \in W$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$. Portanto, mostramos que $U \cap W$ é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Desse modo, provamos que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V. ■

Corolário 3.4.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então, a intersecção de uma coleção arbitrária de subespaços de V é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 3.4.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, U e W subespaços vetoriais de V. Então, o subconjunto de V definido por:*

$$U + W = \{ v \in V \ / \ v = u + w \quad com \quad u \in U \quad e \quad w \in W \}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração – Temos que $U + W \neq \emptyset$, pois $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U + W$. Agora, basta mostrar que o subconjunto $U + W$ satisfaz as condições do Teorema 3.2.1, isto é, que satisfaz os axiomas de fechamento. □

Definição 3.4.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, U e W subespaços vetoriais de V tais que $U \cap W = \{ 0_V \}$. Dizemos que o subespaço $U + W$ é a* ***soma direta*** *dos subespaços U e W, e denotamos por $U \oplus W$.*

Exemplo 3.4.1 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0 \} \qquad e \qquad W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0 \} .$$

Temos que $\mathbb{R}^3 = U + W$*, entretanto, não como soma direta dos subespaços* U *e* W*.*

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,0,0), (0,1,0)] \qquad \text{e} \qquad W = [(1,0,0), (0,0,1)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)] \qquad \text{e} \qquad U \cap W = [(1,0,0)] .$$

Portanto, temos que $\mathbb{R}^3 = U + W$, mas não como soma direta.

Exemplo 3.4.2 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^2$

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0 \} \qquad e \qquad W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0 \} .$$

Temos que $\mathbb{R}^2 = U + W$ *é uma soma direta dos subespaços* U *e* W*.*

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,0)] \qquad \text{e} \qquad W = [(0,1)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,0), (0,1)] \qquad \text{e} \qquad U \cap W = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \} .$$

Portanto, temos que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Exemplo 3.4.3 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^2$

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x \} \qquad e \qquad W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -2x \} .$$

Temos que $\mathbb{R}^2 = U + W$ *é uma soma direta dos subespaços* U *e* W*.*

Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1,1)] \qquad \text{e} \qquad W = [(1,-2)] .$$

Assim, temos que

$$U + W = [(1,1), (1,-2)] \qquad \text{e} \qquad U \cap W = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \} .$$

Portanto, temos que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Definição 3.4.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, U e W subespaços vetoriais de V. Dizemos que o espaço vetorial V é a soma direta dos subespaços U e W, e denotamos $V = U \oplus W$, se*

1. $U \cap W = \{ 0_V \}$
2. $V = U + W$

Proposição 3.4.1 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então, $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada elemento $v \in V$ possui uma única decomposição $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração – ($\Longrightarrow$) Considerando por hipótese $V = U \oplus W$, temos a existência da decomposição, então basta mostrar a unicidade. Para isso, supomos que

$$v = u + w = u_1 + w_1 \quad ; \quad u,\, u_1 \in U \quad \text{e} \quad w,\, w_1 \in W$$

Assim, obtemos $u - u_1 = w - w_1$. Como $u - u_1 \in U$, então,

$$w - w_1 \in W \cap U = \{ 0_V \}$$

Logo, $w - w_1 = 0_V$ o que implica em $w = w_1$. De mesmo modo, temos que $u - u_1 = 0_V$ implicando em $u = u_1$, mostrando a unicidade da decomposição.

($\Longleftarrow$) Tomando por hipótese a unidade da decomposição $v = (u + w) \in V$, com $u \in U$ e $w \in W$, vamos mostrar que $V = U \oplus W$. Para isso, supomos que $v \in U \cap W$. Desse modo, temos que

$$u + w = (u + v) + (w - v)$$

Pela unicidade da decomposição, podemos afirmar que

$$u = u + v \qquad \text{e} \qquad w = w - v$$

Logo, $v = 0_V$. Assim, provamos que $U \cap W = \{ 0_V \}$. Portanto, mostramos que $V = U \oplus W$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 3.4.4 *Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$*

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x \} \qquad e \qquad W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = -x \}.$$

Temos que todo elemento $v \in \mathbb{R}^2$ é escrito de modo único como $v = u + w$ onde $u \in U$ e $w \in W$, isto é, $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Podemos verificar facilmente que $U + W = [(1,1),\,(1,-1)]$. Consideramos um elemento genérico $v = (x,y) \in I\!\!R^2$. Escrevendo

$$(x,y) \;=\; a(1,1) \;+\; b(1,-1)$$

obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$$

que tem por única solução

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{x-y}{2}\,.$$

Assim, mostramos que os coeficientes da combinação linear, a e b, são obtidos de modo único em função das componentes do elemento genérico $v = (x,y) \in I\!\!R^2$. Portanto, obtemos o resultado desejado.

Do Corolário 3.4.1 decorre que se S é uma coleção arbitrária de elementos de V, então existe um menor subespaço de V que contém S, isto é, um subespaço de V que contém S e que está contido em todos os outros subespaços que contém S. Desse modo, podemos apresentar o conceito de subespaço gerado da forma a seguir.

Definição 3.4.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!\!F$ e S um conjunto de elementos de V. O* ***subespaço gerado*** *por S, que vamos denotar por $U = [S]$, é definido como sendo a intersecção de todos os subespaços de V que contém o conjunto S. Quando S é um conjunto finito de elementos de V, isto é, $S = \{\, v_1\,,\,\cdots\,,\,v_n \,\}$, dizemos que U é o* ***subespaço gerado*** *pelos elementos de S. O conjunto S também é chamado de* ***sistema de geradores*** *do subespaço U.*

Exemplo 3.4.5 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$*.*

Inicialmente, vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço U. Para os elementos $u \in U$ temos que

$$u = a(1,0,1) + b(0,1,0) \qquad \text{para} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, $\{ (1,0,1), (0,1,0) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Agora vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço W. Para os elementos $w \in W$ temos que

$$w = c(-1,1,0) + d(-1,0,1) \qquad \text{para} \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (-1,1,0), (-1,0,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço W.

Vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Sabemos que, se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(1,0,1) + b(0,1,0) = c(-1,1,0) + d(-1,0,1) \qquad \text{para} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = -c - d \\ b = c \\ a = d \end{cases}$$

cuja solução é dada por $a = d$, $b = -2d$ e $c = -2d$ para $d \in \mathbb{R}$.

Portanto, os elementos $v \in U \cap W$ são escritos como $v = d(1,-2,1)$ para $d \in \mathbb{R}$. Logo, $\{ (1,-2,1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Exemplo 3.4.6 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Os elementos $v = (x, y, z) \in U \cap W$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Escolhendo x e y como variáveis básicas e z como variável livre, temos que

$$y = \frac{2}{3}z \quad \text{e} \quad x = -\frac{5}{3}z \quad , \quad z \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, o conjunto solução do sistema linear homogêneo é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = \alpha(-5, 2, 3) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que $U \cap W = [(-5, 2, 3)]$.

Exemplo 3.4.7 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do* $\mathbb{R}^3$ *dados por:*

$$U = \{ u \in \mathbb{R}^3 \ / \ u = \lambda \overline{u} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ w \in \mathbb{R}^3 \ / \ w = \alpha \overline{w} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \}$$

com $\overline{u}, \overline{w} \in \mathbb{R}^3$ *não-nulos. Temos que o subespaço* $U + W = [\overline{u}, \overline{w}]$.

Exemplo 3.4.8 *Considere os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0 \} \quad e \quad W = [(1, 2, 1)]$$

Temos que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Podemos verificar facilmente que $U = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$. Vamos mostra que qualquer elemento $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ é escrito de modo único pela combinação linear

$$u = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(1, 2, 1) \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Portanto, basta mostrar que a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é não–singular. Sendo assim, obtemos de modo único os coeficientes da combinação linear, a, b e c, em função das componentes do elemento $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.4.9 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

Inicialmente, vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço U. Para os elementos $u \in U$ temos que

$$u = a(2, 1, 0) + b(-3, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Agora vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço W. Para os elementos $w \in W$ temos que

$$w = c(-1, 1, 0) + d(-1, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad c,\, d \in \mathbb{R}$$

Logo, $\{ (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço W.

Portanto, o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (2, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (-3, 0, 1) \quad , \quad v_3 = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-1, 0, 1)\,,$$

isto é, $U + W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Exemplo 3.4.10 *Considere os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$

$$U = [(1, 2, 1), (-1, 1, -1)] \qquad e \qquad W = [(2, 2, 1), (1, 1, -1)]\,.$$

Encontre um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Temos que se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(1, 2, 1) + b(-1, 1, -1) = c(2, 2, 1) + d(1, 1, -1) \qquad \text{para} \qquad a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}\,.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - b = 2c + d \\ 2a + b = 2c + d \\ a - b = c - d \end{cases} \iff \begin{cases} a - b - 2c - d = 0 \\ 2a + b - 2c - d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $a = -2d$, $b = d$ e $c = -2d$ para $d \in \mathbb{R}$. Portanto, temos que os elementos $v \in U \cap W$ são escritos como $v = d(1, 1, 1)$ para $d \in \mathbb{R}$. Logo, $\{ (1, 1, 1) \}$ é um sistemas de geradores para o subespaço $U \cap W$.

Exercícios

Exercício 3.22 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *e os subespaços gerados*

$$U = [(1,0,0),(1,1,1)] \qquad e \qquad W = [(0,1,0),(0,0,1)] .$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $V = U \cap W$.

Exercício 3.23 *Considere os seguintes subespaços*

$$U = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x + y = 0 \ e \ z - t = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x - y - z + t = 0 \}$$

Pede–se:

(a) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

(b) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

(c) O subespaço $U + W$ *é uma soma direta ? Justifique sua resposta.*

Exercício 3.24 *Sejam* U *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelo elemento* $u_1 = (1, 0, 0)$ *e* W *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelos elementos* $w_1 = (1, 1, 0)$ *e* $w_2 = (0, 1, 1)$. *Mostre que o espaço vetorial* $I\!R^3 = U \oplus W$.

Exercício 3.25 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $I\!M_n(I\!R)$

$$U = \{ A \in I\!M_n(I\!R) \ / \ A^t = A \} \qquad e \qquad W = \{ A \in I\!M_n(I\!R) \ / \ A^t = -A \} .$$

Mostre que $I\!M_n(I\!R) = U \oplus W$.

Exercício 3.26 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{C}([-a,a])$

$$U = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

$$W = \{ f \in \mathcal{C}([-a,a]) \ / \ f(-x) = -f(x) \ ; \ x \in [-a,a] \}$$

Mostre que $\mathcal{C}([-a,a]) = U \oplus W$.

Exercício 3.27 *Considere o subespaço* V *do espaço vetorial* $I\!R^3$ *dado por:*

$$V = \{ (x,\, y,\, z) \in I\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \quad e \quad -x + 3y + 2z = 0 \} ,$$

Determine um subespaço W *do* $I\!R^3$ *tal que* $I\!R^3 = V \oplus W$.

Exercício 3.28 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *e os seguinte subespaços*

$$U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = 3x \} \qquad e \qquad W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y = -2x \} .$$

Verifique se o seguinte subconjunto

$$U \cup W = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ (x,y) \in U \quad ou \quad (x,y) \in W \}$$

é um subespaço vetorial de $I\!R^2$.

Exercício 3.29 *Encontre o conjunto solução* $S \subset I\!R^3$ *do sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Mostre que S *é um subespaço do* $I\!R^3$. *Dado o subespaço*

$$U = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x - y + z = 0 \} ,$$

determine um sistema de geradores para o subespaço $S \cap U$.

Exercício 3.30 *Considere o subespaço* S *do* $I\!R^3$ *definido por:*

$$S = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \} .$$

Determine um subespaço W *do* $I\!R^3$ *tal que* $R^3 = S \oplus W$.

Exercício 3.31 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $I\!M_2(I\!R)$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad ; \quad a \, , \, b \, , \, c \in I\!R \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \quad ; \quad a \, , \, b \in I\!R \right\}$$

Determine um sistema de geradores para os subespaços

$$W \quad , \quad U \quad , \quad W \cap U \qquad e \qquad W + U .$$

Exercício 3.32 *Sejam* W *o subespaço de* $I\!R^3$ *gerado pelo vetor* $w = (1,0,0)$ *e* U *o subespaço do* $I\!R^3$ *gerado pelos vetores* $u_1 = (1,1,0)$ *e* $u_2 = (0,1,1)$. *Mostre que* $I\!R^3 = U \oplus W$.

3.5 Dependência e Independência Linear

Definição 3.5.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!F$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ é **Linearmente Independente**(LI) se, e somente se, toda combinação linear nula*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \qquad ; \qquad \alpha_i \in I\!F$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 3.5.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!F$ e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ é **Linearmente Dependente**(LD) se, e somente se, é possível uma combinação linear nula*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \qquad ; \qquad \alpha_i \in I\!F$$

sem que os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sejam todos nulos.

De maneira equivalente, encontramos o conceito de dependência e independência linear apresentado da forma a seguir.

Definição 3.5.3 *Seja V um espaço vetorial sobre $I\!F$. Um subconjunto S de V é dito **Linearmente Dependente** (LD), se existirem elementos distintos $v_1, \cdots, v_n$ em S e escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ em $I\!F$, não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V .$$

*Um conjunto que não é linearmente dependente é **Linearmente Independente**(LI). Decorrem facilmente da definição as seguintes conseqüências:*

(a) Todo conjunto que contém um subconjunto linearmente dependente é LD.

(b) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é LI.

(c) Todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é linearmente dependente.

(d) Um conjunto S de vetores é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de S é linearmente independente, isto é, se, e somente se, para quaisquer elementos distintos $v_1, \cdots, v_n$ em S, com

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(e) Convencionaremos que o conjunto vazio, $\emptyset \subset V$, é linearmente independente.

Teorema 3.5.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $v_1, \cdots, v_n \in V$. *O conjunto* $S = \{ v_1, \cdots, v_n \} \subset V$ *é Linearmente Dependente (LD) se, e somente se, um de seus elementos for uma combinação linear dos outros elementos.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 3.5.1 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (1, 4, 5) \quad e \quad v_3 = (3, 6, 5) \, ,$$

é linearmente dependente no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear nula $x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos que o sistema possui infinitas soluções não–nulas, provando que o conjunto S é linearmente dependente.

Podemos verificar facilmente que $v_3 = 2v_1 + v_2$. Assim, utilizando o resultado do Teorema 3.5.1, mostramos que o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 3.5.2 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1, 2, 3) \quad , \quad v_2 = (1, 4, 9) \quad e \quad v_3 = (1, 8, 27) \, ,$$

é linearmente independente no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear nula $x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \\ 3x + 9y + 27z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases}$$

Assim, o sistema linear homogêneo possui somente a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$, provando que o conjunto S é linearmente independente.

Definição 3.5.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$. *Dizemos que o conjunto de funções* $S = \{ f_1(x), \cdots, f_n(x) \} \subset \mathcal{C}([a,b])$ *é* ***Linearmente Dependente****, se existirem escalares* $c_1, \cdots, c_n$*, não todos nulos, tais que*

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad ; \quad \forall\ x \in [a,b] .$$

O conjunto S *é* ***Linearmente Independente*** *se não for Linearmente Dependente.*

Exemplo 3.5.3 *O conjunto* $S = \{ 1, \cos(x), \cos(2x) \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$.

Considere a combinação linear nula

$$\alpha + \beta \cos(x) + \lambda \cos(2x) = 0 \quad ; \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi] .$$

Avaliando a equação acima nos pontos $x = -\pi$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \lambda = 0 \\ \alpha \phantom{{}+\beta} - \lambda = 0 \end{cases}$$

Analisando o conjunto solução do sistema linear homogêneo, através de escalonamento, obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Desse modo, provamos que o conjunto S é linearmente independente em $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, de acordo com a Definição 3.5.4.

Exemplo 3.5.4 *O conjunto* $S = \{ 1,\ x,\ x^2,\ 2 - 3x + 2x^2 \}$ *é linearmente dependente no espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Por simplicidade, vamos denotar

$$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = x \quad , \quad p_3(x) = x^2 \quad \text{e} \quad p_4(x) = 2 - 3x + 2x^2 .$$

Podemos verificar facilmente que $p_4(x) = 2p_1(x) - 3p_2(x) + 2p_3(x)$. Assim, utilizando o resultado do Teorema 3.5.1, mostramos que o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 3.5.5 *O conjunto* $S = \{ \cos^2(x), \sin^2(x), 1 \}$ *é linearmente dependente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. *De fato, fazendo uso da identidade trigonométrica*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

obtemos o resultado desejado.

A seguir, iniciamos a apresentação de uma caracterização para que um conjunto de funções

$$S = \{ f_1(x), f_2(x), \cdots , f_n(x) \}$$

seja linearmente dependente em um determinado intervalo.

Teorema 3.5.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}^1([a,b])$ *e as funções* $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. *O conjunto* $S = \{ f(x), g(x) \}$ *é* ***linearmente dependente*** *se, e somente se,* $\det(A(x)) = 0$ *para todo* $x \in [a,b]$, *onde a matriz* $A(x)$ *é dada por:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} \quad ; \quad x \in [a,b] .$$

O determinante da matriz A *é denominado* ***wronskiano*** *das funções* f *e* g, *que vamos denotar por* $\mathbf{W}(f,g)(x)$.

Demonstração – Vamos considerar a combinação linear nula

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \quad ; \quad \forall \; x \in [a,b] .$$

Considerando a equação acima e a sua derivada com relação à x, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \\ c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0 \end{cases} .$$

Sabemos que o sistema linear homogêneo possui solução não–nula se, e somente se, o determinante da matriz do sistema linear for igual à zero, isto é,

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \forall \; x \in [a,b] .$$

Assim, completamos a demonstração. ■

Exemplo 3.5.6 *Vamos utilizar o resultado do Teorema 3.5.2 para mostrar que as funções* $f(x) = \exp(x)$ *e* $g(x) = x\exp(x)$ *são linearmente independentes para* $x \in I\!R$.

Podemos observar facilmente que as funções f e g são continuamente diferenciáveis para todo $x \in I\!R$. Vamos calcular o wronskiano das funções f e g

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1 + x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I\!R .$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Exemplo 3.5.7 *As funções* $f(x) = \sin(x)$ *e* $g(x) = x\sin(x)$ *são linearmente independentes para* $x \in \mathbb{R}$. *De fato, o wronskiano* $\mathbf{W}(f,g)(x) = -(\sin(x))^2$ *não é sempre nulo para* $x \in \mathbb{R}$.

A seguir, vamos apresentar uma extensão do Teorema 3.5.2, que o leitor poderá facilmente generalizar para um conjunto com n funções que sejam $(n-1)$ vezes continuamente diferenciáveis para $x \in [a,b]$.

Teorema 3.5.3 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}^2([a,b])$ *e as funções* $f,\ g,\ h \in \mathcal{C}^2([a,b])$. *O conjunto* $S = \{ f(x),\ g(x),\ h(x) \}$ *é* ***linearmente dependente*** *se, e somente se,* $\mathbf{W}(f,g,h)(x) = 0$ *para todo* $x \in [a,b]$, *onde o wronskiano* $\mathbf{W}(f,g,h)(x)$ *é dado por:*

$$\mathbf{W}(f,g,h)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \quad ; \quad x \in [a,b]\,.$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 3.5.8 *Vamos utilizar o resultado do Teorema 3.5.3 para mostrar que as funções* $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ *e* $h(x) = \cos(x)$ *são linearmente independentes para* $x \in \mathbb{R}$.

Podemos observar facilmente que as funções f , g e h são duas vezes continuamente diferenciáveis para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos calcular o wronskiano $\mathbf{W}(f,g,h)(x)$

$$\mathbf{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix} = -1 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Exemplo 3.5.9 *Podemos verificar facilmente que as funções*

$$f(x) = \sin(x) \qquad e \qquad g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

são linearmente dependentes para $x \in \mathbb{R}$. *De fato, basta utilizar a Definição 3.5.4 e a identidade trigonométrica para o cosseno da diferença.*

Exercícios

Exercício 3.33 *Verifique quais dos subconjuntos*

(a) $\{\, (1,0,0)\, ,\, (0,1,0)\, ,\, (0,0,1)\, ,\, (2,2,5)\, \}$

(b) $\{\, (1,1,1)\, ,\, (1,2,1)\, ,\, (3,2,-1)\, \}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3.34 *Verifique quais dos subconjuntos*

(a) $\{\, 1\, ,\; x-1\, ,\; x^2+2x+1\, ,\; x^2\, \}$

(b) $\{\, x(x-1)\, ,\; x^3\, ,\; 2x^3-x^2\, ,\; x\, \}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Exercício 3.35 *Mostre que o conjunto*

$$\gamma \;=\; \{\, (1,0,0,-1),\, (0,1,0,1),\, (0,0,1,1),\, (1,0,0,1)\, \}$$

é linearmente independente no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.36 *Considere as seguintes funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = |\, x\,|$. *Mostre que o conjunto* $S = \{\, f(x),\, g(x)\, \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{C}([-1,1])$.

Exercício 3.37 *Considere as seguintes funções* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x\,|\, x\,|$. *Mostre que o conjunto* $S = \{\, f(x),\, g(x)\, \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-1,1])$. *Entretanto, é linearmente dependente em* $\mathcal{C}([0,1])$ *e em* $\mathcal{C}([-1,0])$.

Exercício 3.38 *Determine três elementos de* $\mathbb{R}^3$ *que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer sejam linearmente independentes.*

Exercício 3.39 *Considere* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Mostre que se dois elementos de* V *são linearmente dependentes, então um é múltiplo escalar do outro.*

Exercício 3.40 *Mostre que o conjunto* $S = \{\, 1,\, e^x,\, xe^x\, \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Exercício 3.41 *Mostre que o conjunto* $S = \{\, 1,\, e^x,\, e^{2x}\, \}$ *é linearmente independente no espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

3.6 Bases e Dimensão

Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente **dimensão** a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de uma base para o espaço vetorial.

Definição 3.6.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!\!F$. Uma **base** de V é um conjunto linearmente independente de elementos de V que gera V.*

Exemplo 3.6.1 *Considere o espaço vetorial real $I\!\!R^3$. O conjunto*

$$\beta = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$$

é linearmente independente em $I\!\!R^3$ e gera o espaço $I\!\!R^3$. Logo, β é uma base para $I\!\!R^3$, denominada base canônica.

Exemplo 3.6.2 *Considere o espaço vetorial real $I\!\!R^2$. O conjunto*

$$\Gamma = \{ (1,1), (-1,1) \}$$

é linearmente independente em $I\!\!R^2$ e gera o espaço $I\!\!R^2$. Logo, Γ é uma base para $I\!\!R^2$.

Teorema 3.6.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!\!F$ finitamente gerado pelos elementos do conjunto $S = \{ v_1, \cdots, v_n \}$. Então, podemos extrair do conjunto S uma base para V.*

Demonstração – Se $v_1, \cdots, v_n \in V$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições de base, e não temos nada a fazer. Se $v_1, \cdots, v_n \in V$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear nula

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$$

com os coeficientes c_i não todos nulos. Digamos que $c_n \neq 0$. Desse modo, temos que

$$v_n = -\frac{c_1}{c_n} v_1 - \cdots - \frac{c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$$

Assim, os elementos $v_1, \cdots, v_{n-1}$ ainda geram V. Se $\{ v_1, \cdots, v_{n-1} \}$ for linearmente dependente, repetimos o processo anterior e extraímos o elemento, digamos v_{n-1}, que é uma combinação linear dos outros. Repetindo esse processo um número finito de vezes, obtemos um subconjunto de $\{ v_1, \cdots, v_n \}$ formado com m elementos linearmente independentes $\{ v_1, \cdots, v_m \}$ que ainda geram V, com $m < n$. Assim, obtemos uma base para o espaço vetorial V. ■

Teorema 3.6.2 *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de elementos $v_1 , \cdots , v_n \in V$. Então, todo conjunto linearmente independente de V é finito e contém no máximo n elementos.*

Demonstração – Para provar o teorema, basta mostrar que todo subconjunto W de V que contém mais de n elementos é linearmente dependente. Seja W um tal conjunto. Em W existem elementos distintos $w_1, \cdots , w_m$, com $m > n$. Como os elementos $v_1, \cdots , v_n$ geram V, existem escalares c_{ij} tais que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, v_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots , m$$

Consideramos agora uma combinação linear dos elementos de W, isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, \alpha_j \right) v_i$$

Como $m > n$, podemos encontrar escalares $\alpha_1, \cdots , \alpha_m$, não todos nulos, solução do sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, \alpha_j = 0 \qquad ; \qquad i = 1, \cdots , n\,.$$

Logo, $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = 0_V$ com algum $\alpha_i \neq 0$. Portanto, mostramos que W é um conjunto linearmente dependente em V. ■

Definição 3.6.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que V é um espaço vetorial de **dimensão finita** se V possui uma base finita.*

Exemplo 3.6.3 *Vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios reais, com a operação usual de adição de polinômios e a operação usual de multiplicação de um polinômio por um escalar. Assim, podemos mostrar facilmente que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real. Entretanto, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não possui uma base finita.*

De fato, dado um conjunto $S = \{ p_1(x), \cdots , p_n(x) \}$, considerando que o elemento $p_n(x)$ seja o polinômio de maior grau em S. Desse modo, se $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [S]$, qualquer elemento $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ pode ser escrito como

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + \cdots + c_n p_n(x)\,,$$

e seu grau é sempre menor ou igual ao grau de $p_n(x)$. Entretanto, como $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ contém todos os polinômios reais, sabemos que existem polinômios em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de grau maior que o grau de $p_n(x)$. Portanto, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \neq [S]$ para todo conjunto finito $S \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

O resultado a seguir, será necessário para que possamos apresentar uma definição algébrica adequada de dimensão de um espaço vetorial.

Corolário 3.6.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, quaisquer duas bases de V têm o mesmo número (finito) de elementos.*

Demonstração – Vamos supor que

$$\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$$

sejam duas bases finitas para V.

Como $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ gera V e $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$ é linearmente independente em V, pelo Teorema 3.6.2 temos que $m \leq n$.

Por outro lado, como $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$ gera V e $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é linearmente independente em V, pelo Teorema 3.6.2 temos que $n \leq m$. Portanto, mostramos que $m = n$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 3.6.4 *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Podemos verificar facilmente que os conjuntos $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ e $\Gamma = \{ (1,1), (1,-1) \}$ são duas bases para o $\mathbb{R}^2$.*

Definição 3.6.3 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, que possui uma base com n elementos. A **dimensão** de V é definida como sendo o número de elementos de uma base de V. Indicaremos a dimensão do espaço vetorial V por $dim(V) = n$. No caso em que $V = \{ 0_V \}$, temos que o conjunto vazio, $\emptyset \subset V$, é uma base de V e dizemos que o espaço vetorial V tem dimensão nula.*

Exemplo 3.6.5 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Temos que o conjunto*

$$\beta = \{ 1, x, x^2, \cdots, x^n \}$$

é uma base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, denominada base canônica. Assim, $dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = (n+1)$.

Exemplo 3.6.6 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Temos que o conjunto*

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Desse modo, $dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

Corolário 3.6.2 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então,*

(a) Todo conjunto de elementos em V que contém mais de n elementos é LD.

(b) Nenhum conjunto contendo menos de n elementos pode gerar V.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Lema 3.6.1 *Seja S um subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V. Seja u um elemento em V que não esteja no subespaço gerado por S. Então, o conjunto obtido acrescendo-se o elemento u a S é linearmente independente.*

Demonstração – Suponhamos que $v_1, \cdots, v_n$ sejam elementos distintos de S e que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n + \alpha u = 0_V .$$

Então, $\alpha = 0$. Caso contrário

$$u = -\frac{c_1}{\alpha} v_1 - \cdots - -\frac{c_n}{\alpha} v_n$$

e u estaria no subespaço gerado por S. Assim, tem–se que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$$

e como S é um conjunto linearmente independente, cada escalar $c_i = 0$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 3.6.3 (Completamento) *Seja S um subconjunto linearmente independente de elementos de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então, S pode ser completado de modo a formar uma base para V.*

Demonstração – Considere $dim(V) = n$ e $S = \{ v_1, \cdots, v_r \}$ linearmente independente. Note que pelo Teorema 3.6.2, temos que $r \leq n$. Se $V = [v_1, \cdots, v_r]$, então S é uma base de V e não temos nada a fazer.

Se existe $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \notin [v_1, \cdots, v_r]$, então pelo Lema 3.6.1 temos que $[v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}]$ é linearmente independente. Se $V = [v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}]$, então $\{ v_1, \cdots, v_r, v_{r+1} \}$ é uma base de V e não temos nada a fazer. Caso contrário, existe $v_{r+2} \in V$ tal que $v_{r+2} \notin [v_1, \cdots, v_r, v_{r+2}]$ e, então $[v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}]$ é linearmente independente. Se $V = [v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}]$ nossa prova está concluída. Caso contrário, prosseguimos com o mesmo processo. Como não podemos ter mais do que n elementos linearmente independente em V, após um número finito de passos teremos encontrado uma base para o espaço vetorial V que contém o conjunto original S, o que completa a demonstração. ■

Teorema 3.6.4 *Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então, todo subconjunto de U que é linearmente independente, é finito e é parte de uma base (finita) de U.*

Demonstração – Suponhamos que S_0 seja um subconjunto de U linearmente independente . Se S é um subconjunto de U linearmente independente contendo S_0, então S também é um subconjunto de V linearmente independente. Como V tem dimensão finita, S contém no máximo $dim(\,V\,)$ elementos. Portanto, existe um subconjunto S de U linearmente independente que é maximal e contém S_0. Como S é um subconjunto de U linearmente independente e maximal contendo S_0, o Lema 3.6.1 mostra que U é o subespaço gerado por S. Logo, S é uma base de U e o conjunto original S_0 é parte de uma base de U, o que completa a demonstração. ■

Corolário 3.6.3 *Seja U um subespaço vetorial próprio de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então, U é de dimensão finita e $dim(\,U\,) \,<\, dim(\,V\,)$.*

Demonstração – Suponhamos que U contém um elemento $u \neq 0_V$. Pelo Teorema 3.6.4 e sua demonstração, existe uma base para U que contém o elemento u e no máximo $dim(\,V\,)$ elementos. Logo, U é de dimensão finita e $dim(\,U\,) \,\leq\, dim(\,V\,)$. Como U é um subespaço próprio, existe um elemento u_1 em V que não está em U. Acrescentando o elemento u_1 a uma base de U obtemos um subconjunto de V linearmente independente. Portanto, provamos que $dim(\,U\,) \,<\, dim(\,V\,)$. ■

Corolário 3.6.4 *Num espaço vetorial V de dimensão finita todo conjunto linearmente independente, não vazio, é parte de uma base de V.*

Teorema 3.6.5 *Sejam U e W subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V. Então, o subespaço $U + W$ é de dimensão finita e tem–se que*

$$dim(\,U \,+\, W\,) \,=\, dim(\,U\,) \,+\, dim(\,W\,) \,-\, dim(\,U \cap W\,)\,.$$

Demonstração – Pelo Teorema 3.6.4 e seus Corolários, temos que o subespaço $U \cap W$ possui uma base finita $\{\, v_1,\, \cdots\,,\, v_r \,\}$ que é parte de uma base

$$\{\, v_1,\, \cdots\,,\, v_r,\, u_1,\, \cdots\,,\, u_m \,\}$$

do subespaço U, e parte de uma base

$$\{\, v_1,\, \cdots\,,\, v_r,\, w_1,\, \cdots\,,\, w_n \,\}$$

do subespaço W.

O subespaço $U + W$ é gerado pelos elementos do conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n \}$$

que é um conjunto linearmente independente em V.

De fato, considere a combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j + \sum_{k=1}^{n} c_k w_k = 0_V$$

Então, tem–se que

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j$$

o que mostra que o elemento

$$\widehat{u} = \sum_{k=1}^{n} c_k w_k \in U$$

Como o elemento $\widehat{u}$ também pertence a W, isto é, $\widehat{u} \in U \cap W$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \iff \sum_{k=1}^{n} c_k w_k - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0_V$$

para certos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Como o conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_n \}$$

é linearmente independente, cada um dos escalares $c_k = 0$ e $\alpha_i = 0$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j = 0_V .$$

Como o conjunto $\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m \}$ é linearmente independente, temos que cada um dos escalares $a_i = 0$ e $b_j = 0$. Assim, mostramos que o conjunto

$$\{ v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n \}$$

é uma base para o subespaço vetorial $U + W$.

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} dim(U) + dim(W) &= (r + m) + (r + n) \\ &= r + (r + m + n) \\ &= dim(U \cap W) + dim(U + W) , \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ∎

Proposição 3.6.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Então, existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.*

Demonstração – Seja $\{ w_1 , \cdots , w_m \}$ uma base para o subespaço W. Pelo Teorema do completamento, podemos completar a base de W para obter uma base de V, isto é,

$$\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$$

é uma base para V.

Assim, vamos considerar U o subespaço gerado pelo conjunto linearmente independente $\{ w_{m+1} , \cdots , w_n \}$, que satisfaz as propriedades desejadas.

De fato, é evidente que $V = U + W$, pois o conjunto

$$\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$$

é linearmente independente e gera V. Por outro lado, como

$$W = [w_1 , \cdots , w_m] \quad , \quad U = [w_{m+1} , \cdots , w_n]$$

e o conjunto $\{ w_1 , \cdots , w_m , w_{m+1} , \cdots , w_n \}$ é linearmente independente, temos que $W \cap U = \{ 0_V \}$, o que completa a demonstração. ■

Proposição 3.6.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Se $dim(W) = dim(V)$, então $W = V$.*

Demonstração – Sabemos que W tem uma base. Toda base de W também é uma base de V devido ao fato que $dim(W) = dim(V)$. Logo, todo elemento de V também pertence a W. Assim, $V \subset W$ e, como $W \subset V$, segue–se que $V = W$. ■

Exemplo 3.6.7 *Sejam V um espaço vetorial real, com $dim(V) = 9$, U e W subespaços vetoriais de V tais que $dim(U) = 6$ e $dim(W) = 5$. Mostre que*

$$2 \leq dim(U \cap W) \leq 5 .$$

Considerando o resultado do Teorema 3.6.5, temos que

$$6 \leq dim(U + W) = 6 + 5 - dim(U \cap W) \leq 9$$

Assim, mostramos que $2 \leq dim(U \cap W) \leq 5$.

Exemplo 3.6.8 *O conjunto* $S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *onde*

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v_2 = (1, 2, 1) \quad e \quad v_3 = (0, -3, 2) \, ,$$

é uma base para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*.*

Devemos mostrar que S é linearmente independente e que gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto S é linearmente independente. Considerando a combinação linear nula

$$av_1 \; + \; bv_2 \; + \; cv_3 \; = \; 0_{\mathbb{R}^3} \; ,$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ & & 2b & - & 3c & = & 0 \\ -a & + & b & + & 2c & = & 0 \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ & & 2b & - & 3c & = & 0 \\ & & & & 5c & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial, isto é,

$$a \; = \; b \; = \; c \; = \; 0 \, ,$$

provando que o conjunto S é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, vamos mostrar que S gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, isto é, que todo elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é escrito como uma combinação linear dos elemento do conjunto S

$$(x, y, z) \; = \; a(1, 0, -1) \; + \; b(1, 2, 1) \; + \; c(0, -3, 2) \, .$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & x \\ & & 2b & - & 3c & = & y \\ -a & + & b & + & 2c & = & z \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & x \\ & & 2b & - & 3c & = & y \\ & & & & 5c & = & z + x - y \end{array} \right.$$

Portanto, podemos obter de modo único os coeficientes da combinação linear, a, b e c, em função das componentes do elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim, provamos que $\mathbb{R}^3 \; = \; [S]$. Logo, o conjunto S é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.6.9 *Seja* $I\!M_2(I\!R)$ *o espaço vetorial das matrizes reais de ordem* 2*. Mostre que a* $dim(\, I\!M_2(I\!R)\,) = 4$ *exibindo uma base* $\beta = \{\, A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4 \,\}$*.*

Podemos mostrar facilmente que tomando as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o conjunto $\beta = \{\, A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4 \,\}$ é uma base para o espaço vetorial $I\!M_2(I\!R)$. Assim, temos que $dim(\, I\!M_2(I\!R)\,) = 4$.

Exemplo 3.6.10 *Considerando* $\mathbb{C} = \{\, z = a + bi \;\; / \;\; a, b \in I\!R \,\}$ *como um espaço vetorial real, temos que o conjunto* $\beta = \{\, 1,\, i \,\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}$*.*

Sabemos que todo elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito como uma combinação linear dos elementos do conjunto β, com coeficientes em $I\!R$. Além disso, o conjunto β é linearmente independente. De fato, considere a combinação linear nula $a + bi = 0 + 0i$ para $a, b \in I\!R$. Desse modo, temos que $a = b = 0$. Portanto, mostramos que o conjunto β é uma base para $\mathbb{C}$ como espaço vetorial real. Desse modo, temos que $dim(\, \mathbb{C}\,) = 2$.

Exemplo 3.6.11 *Considere* $\mathbb{C}$ *um espaço vetorial complexo. Qual é a dimensão de* $\mathbb{C}$*?*

Neste caso, podemos verificar facilmente que o conjunto $\beta = \{\, 1 \,\}$ é uma base para $\mathbb{C}$. Assim, temos que $dim(\, \mathbb{C}\,) = 1$.

Exemplo 3.6.12 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial complexo, temos que o conjunto* $\beta = \{\, e_1,\, e_2 \,\}$*, onde* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$*, é uma base de* $\mathbb{C}^2$*.*

Podemos verificar facilmente que todo elemento de $\mathbb{C}^2$ é escrito como uma combinação linear dos elementos de β, com coeficientes em $\mathbb{C}$, isto é,

$$(z_1,\, z_2) = z_1 e_1 + z_2 e_2 \qquad ; \qquad z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Além disso, sabemos que β é linearmente independente. Assim, temos que β é uma base para $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial complexo. Logo, temos que $dim(\, \mathbb{C}^2\,) = 2$.

Exemplo 3.6.13 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real, exibir uma base.*

Neste caso, podemos verificar facilmente que o conjunto $\gamma = \{\, z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4 \,\}$, onde

$$z_1 = (1, 0) \quad , \quad z_2 = (i, 0) \quad , \quad z_3 = (0, 1) \quad \text{e} \quad z_4 = (0, i)\,,$$

é linearmente independente e que todo elemento de $\mathbb{C}^2$ é escrito como uma combinação linear dos elementos de γ, com coeficientes em $I\!R$. Assim, γ é uma base para $\mathbb{C}^2$. Logo, temos que $dim(\, \mathbb{C}^2\,) = 4$.

Exemplo 3.6.14 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial complexo, temos que o conjunto* $S = \{ (1-i,\ i),\ (2,\ -1+i) \}$ *é linearmente dependente.*

Considerando a combinação linear nula

$$z_1(1-i,\ i) \ + \ z_2(2,\ -1+i) \ = \ (0,\ 0) \qquad ; \qquad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (1-i)z_1 \ + \ 2z_2 \ = \ 0 \\ iz_1 \ + \ (-1+i)z_2 \ = \ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 \ + \ (i+1)z_2 \ = \ 0 \\ iz_1 \ + \ (-1+i)z_2 \ = \ 0 \end{cases}$$

Note que o segundo sistema linear homogêneo foi obtido somando a segunda equação à primeira equação.

Tomando o segundo sistema linear homogêneo, multiplicamos a primeira equação por $-i$ e somamos à segunda equação. Assim, ficamos somente com a primeira equação

$$z_1 \ + \ (i+1)z_2 \ = \ 0$$

que possui infinitas soluções não–nulas, $z_1 = -(i+1)z_2$, $z_2 \in \mathbb{C}$. Portanto, o conjunto S é linearmente dependente.

Exemplo 3.6.15 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real, temos que o conjunto* $S = \{ (1-i,\ i),\ (2,\ -1+i) \}$ *é linearmente independente.*

Considerando a combinação linear nula

$$a(1-i,\ i) \ + \ b(2,\ -1+i) \ = \ (0,\ 0) \qquad ; \qquad a,\ b \in \mathbb{R}$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (1-i)a \ + \ 2b \ = \ 0 \\ ia \ + \ (-1+i)b \ = \ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \ + \ (i+1)b \ = \ 0 \\ ia \ + \ (-1+i)b \ = \ 0 \end{cases}$$

Como $a,\ b \in \mathbb{R}$, temos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial, $a = b = 0$. Desse modo, mostramos que o conjunto S é linearmente independente.

Exemplo 3.6.16 *Considere a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)*

$$u''(x) \; + \; u(x) \; = \; 0 \, .$$

Sabemos que as funções $u_1(x) = \sin(x)$ *e* $u_2 = \cos(x)$ *são duas soluções linearmente independentes da EDO, isto é, as funções* $u_1(x)$ *e* $u_2(x)$ *satisfazem a EDO e o conjunto* $\Gamma = \{ \, u_1(x), \, u_2(x) \, \}$ *é linearmente independente para* $x \in I\!\!R$*. Além disso, temos que toda solução da EDO é uma combinação linear dessas duas funções. Desse modo, o conjunto* Γ *é uma base para o espaço solução da EDO.*

Exemplo 3.6.17 *O conjunto* $\Gamma = \{ \, (1,2), \, (1,-1) \, \}$ *é uma base para o* $I\!\!R^2$*.*

Podemos verificar facilmente que Γ é linearmente independente, pois cada um de seus elementos não é múltiplo escalar do outro. Dado um elemento $u = (x,y) \in I\!\!R^2$, vamos mostrar que u pode ser escrito de modo único como $u = a(1,2) + b(1,-1)$ para $a, \, b \in I\!\!R$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2a - b = y \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = x \\ 3a = x + y \end{cases}$$

Assim, temos que

$$a = \frac{x + y}{3} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{2x - y}{3} \, ,$$

obtidos de modo único, em função das componentes do elemento $u \in I\!\!R^2$.

Exemplo 3.6.18 *Considere o espaço vetorial real* $I\!\!R^5$*. Determine uma base para o subespaço vetorial de* $I\!\!R^5$ *dado por:*

$$W = \{ \, (x_1, \, x_2, \, x_3, \, x_4, \, x_5) \in I\!\!R^5 \; / \; x_1 + x_3 + x_5 = 0 \quad e \quad x_2 = x_4 \, \} \, .$$

Temos que $x_1 = -x_3 - x_5$ e $x_2 = x_4$. Assim, temos que os elementos

$$\begin{aligned} w_1 &= (-1,0,1,0,0) \\ w_2 &= (-1,0,0,0,1) \\ w_3 &= (0,1,0,1,0) \end{aligned}$$

formam uma base para o subespaço W. Desse modo, $dim(W) = 3$.

Exemplo 3.6.19 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Determine uma base para o subespaço vetorial de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$S = \{ \, p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;\; / \;\; p(-1) = 0 \quad e \quad p'(1) = 0 \, \} .$$

Vamos tomar um elemento $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ escrito da seguinte forma:

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Impondo as restrições $p(-1) = p'(1) = 0$, obtemos as seguintes equações algébricas

$$\begin{aligned} p(-1) &= a - b + c - d = 0 \\ p'(1) &= b + 2c + 3d = 0 \end{aligned}$$

Podemos observar que o sistema linear homogêneo possui dois graus de liberdade. Assim, $dim(S) = 2$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} a &= -3c - 2d \\ b &= -2c - 3d \end{aligned}$$

Assim, todo elemento $p(x) \in S$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = c(-3 - 2x + x^2) + d(-2 - 3x + x^3) \qquad , \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerado pelos elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ \, -3 - 2x + x^2, \, -2 - 3x + x^3 \, \} ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, pois os elementos não são múltiplos escalares. Logo, como $dim(\, S \,) = 2$, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 3.6.20 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$. *Os polinômios*

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - 2x^2 + x^3 \\ q(x) &= 3 - x + 4x^2 \\ r(x) &= -2 + 3x \\ s(x) &= x - 3x^3 \end{aligned}$$

formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$ *? Justifique sua resposta.*

Considerando que $dim(\mathcal{P}_3(I\!\!R)) = 4$, basta verificar se o conjunto

$$\{ p(x), q(x), r(x), s(x) \}$$

é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$. Tomando a combinação linear nula

$$a(1 - 2x^2 + x^3) + b(3 - x + 4x^2) + c(-2 + 3x) + d(x - 3x^3) = 0$$

e organizando os termos de mesma potência, obtemos

$$(a + 3b - 2c) + (-b + 3c + d)x + (-2a + 4b)x^2 + (a - 3d)x^3 = 0 .$$

Desse modo, temos um sistema linear homogêneo nas incógnitas a, b, c, d cuja matriz é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Agora temos que analisar o tipo do conjunto solução do sistema linear homogêneo através do posto da matriz A. Efetuando o escalonamento na matriz A encontramos uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -86 \end{bmatrix} .$$

Como o $posto(A) = posto(\widehat{A}) = 4$, veja Definição 2.6.3, o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial $a = b = c = d = 0$. Logo, o conjunto

$$\{ p(x), q(x), r(x), s(x) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$.

Exemplo 3.6.21 *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita com* $dim(V) = n$*. Se* U *e* W *são subespaços vetoriais de* V *com* $dim(U) > \dfrac{n}{2}$ *e* $dim(W) > \dfrac{n}{2}$*. Mostre que* $U \cap W \neq \{ 0_V \}$*.*

A prova é feita por absurdo, isto é, vamos negar a tese e obter uma contradição. Supondo que $U \cap W = \{ 0_V \}$, isto é, $dim(U \cap W) = 0$. Pelo Teorema 3.6.5 temos que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) > n$$

que é uma contradição, pois $U + W$ é um subespaço vetorial de V e temos que $dim(V) = n$. Portanto, $U \cap W \neq \{ 0_V \}$.

Exemplo 3.6.22 *Considere o subespaço vetorial* $S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ p(1) = 0 \}$ *do espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(I\!R)$*. Determine uma base para* S*.*

Considerando $\mathcal{P}_2(I\!R)$ com a base canônica $\{ 1, x, x^2 \}$, temos que $p(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R)$ é escrito de modo único como $p(x) = a + bx + cx^2$. Impondo a condição $p(1) = 0$, para que $p \in S$, obtemos a seguinte equação algébrica

$$p(1) = a + b + c = 0 .$$

Assim, temos que $a = -b - c$. Podemos concluir que $dim(S) = 2$, pois temos dois graus de liberdade. Logo, $p(x) \in S$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = (-b - c) + bx + cx^2 = b(x - 1) + c(x^2 - 1) .$$

Portanto, $\{ (x - 1), (x^2 - 1) \}$ é uma base para o subespaço S.

Exemplo 3.6.23 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ p(-1) = 0 \quad e \quad p(1) = 0 \}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$*. Temos que* $dim(S) = 1$ *e o conjunto* $\Gamma = \{ x^2 - 1 \}$ *é uma base para o subespaço* S*.*

Note que o elemento da base Γ satisfaz as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 3.6.24 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \{ \, p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \;\; / \;\; p'(-1) = 0 \quad e \quad p(1) = 0 \, \}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!R)$*. Encontre uma base para* S*.*

Consideramos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(I\!R)$ e vamos impor as condições para que esse elemento pertença ao subespaço S, isto é,

$$\begin{array}{rcccccccccl} p'(-1) & = & & & b & - & 2c & + & 3d & = & 0 \\ p(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \end{array} .$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo com dois graus de liberdade. Desse modo, podemos concluir que o subespaço S tem dimensão dois. Logo, temos uma relação entre os coeficientes dos elementos $p(x) \in S$. Podemos verificar facilmente que

$$b = 2c - 3d \qquad \text{e} \qquad a = -3c + 2d$$

para $c, d \in I\!R$. Substituindo a e b no polinômio $p(x)$, obtemos que todo elemento do subespaço S é escrito como:

$$p(x) = c(-3 + 2x + x^2) + d(2 - 3x + x^3) \qquad ; \qquad c, d \in I\!R .$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerando pelo elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ -3 + 2x + x^2 \, , \, 2 - 3x + x^3 \} ,$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(I\!R)$. Logo, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(I\!R)$ pertença ao subespaço S.

Exemplo 3.6.25 *Considere o seguinte subespaço*

$$S = \left\{ \, p(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R) \;\; / \;\; \int_0^1 p(x)dx = 0 \, \right\}$$

do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$*. Temos que* $dim(\, S \,) = 2$ *e o conjunto*

$$\Gamma = \left\{ \, -\frac{1}{2} + x \; , \; -\frac{1}{3} + x^2 \, \right\}$$

é uma base para o subespaço S*.*

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$ pertença ao subespaço S.

Estratégia para Completamento de Base

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base de V. Sabemos que todo elemento $u \in V$ pode ser representado pela combinação linear

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n ,$$

onde os escalares $c_i \in \mathbb{F}$ para $i = 1, \cdots , n$, são as coordenadas do elemento u com relação à base β.

Pelo resultado do Teorema 3.6.3, sabemos que todo conjunto linearmente independente em V pode ser completado até formar uma base para V. Vamos mostrar uma maneira prática, e eficiente, para determinar quais elementos que serão necessários para completar esse conjunto para formar uma base de V. Os resultados que vamos apresentar dependem fortemente dos resultados das seções 2.6 e 2.9.

Para isso, vamos considerar um conjunto $S = \{ w_1 , \cdots , w_m \}$ de elemento de V, com $m \leq n$. Sabemos que cada elemento $w_j \in S$ pode ser representado pela combinação linear

$$w_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \cdots + a_{in} v_n ,$$

para $i = 1, \cdots , m$. A seguir, construímos uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ cujas linhas são as coordenadas dos elementos do conjunto S em relação à base β, que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Em seguida, obtemos a matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, que representamos por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{mn} \end{bmatrix} .$$

As linhas da matriz $\widehat{A}$ são combinações lineares das linhas da matriz A, pois foram obtidas através de operações elementares de linhas da matriz A. Assim, podemos verificar facilmente que os elementos $u_1, \cdots, u_m$ representados da forma:

$$u_i = \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}\, v_j \,,$$

para $i = 1, \cdots, m$, são combinações lineares dos elementos $w_1, \cdots, w_m$.

Portanto, os subespaços vetoriais W e U do espaço vetorial V, gerados pelos conjuntos

$$\{ w_1 \,, \cdots, w_m \} \qquad \text{e} \qquad \{ u_1 \,, \cdots, u_m \} \,,$$

respectivamente, são os mesmos.

Finalmente, temos que fazer uma análise do $posto(A) = posto(\widehat{A})$, com as seguintes possibilidades.

(1) No caso em que $posto(A) = posto(\widehat{A}) = m = n$, todas as linhas da matriz $\widehat{A}$ são não–nulas. Assim, temos que os conjuntos

$$\{ w_1 \,, \cdots, w_m \} \qquad \text{e} \qquad \{ u_1 \,, \cdots, u_m \}$$

são linearmente independentes, e formam uma base para V.

(2) No caso em que $posto(A) = posto(\widehat{A}) = m < n$, temos que os conjuntos

$$\{ w_1 \,, \cdots, w_m \} \qquad \text{e} \qquad \{ u_1 \,, \cdots, u_m \}$$

são linearmente independentes.

Construímos uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ na forma escalonada a partir da matriz $\widehat{A}$, acrescentando linhas que são as coordenadas de elementos da base canônica de $\mathbb{F}^n$, escolhidos de modo conveniente. Portanto, os elementos de V cujas coordenadas em relação à base β são dadas pelas linhas da matriz M formam um conjunto linearmente independente em V, e conseqüentemente, uma base para V.

É importante observar que estamos completando o conjunto

$$\{ u_1 \,, \cdots, u_m \}$$

com elementos da base β, para formar uma nova base para V.

(3) No caso em que $posto(A) = posto(\widehat{A}) = r < m$, as $m - r$ últimas linhas da matriz $\widehat{A}$ são nulas. Assim, temos que o conjunto

$$\{ u_1 , \cdots , u_r \}$$

é linearmente independente, e forma uma base para o subespaço $W = [w_1, \cdots , w_m]$.

De maneira análoga, construímos uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ na forma escalonada a partir das linhas não–nulas da matriz $\widehat{A}$, acrescentando linhas que são as coordenadas de elementos da base canônica de $\mathbb{F}^n$, escolhidos de modo conveniente.

Desse modo, os elementos de V cujas coordenadas em relação à base β são dadas pelas linhas da matriz M formam um conjunto linearmente independente em V, e portanto, uma base para V.

Para exemplificar, considere $n = 6$, $m = 4$ e $posto(A) = posto(\widehat{A}) = 3 < m$. Assim sendo, a matriz $\widehat{A} \in \mathbb{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, a matriz $M \in \mathbb{M}_6(\mathbb{R})$ será construída da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

e portanto, o conjunto $\{ u_1, u_2, u_3, v_4, v_5, v_6 \}$ é uma nova base para o espaço vetorial V, onde os elementos u_1, u_2, u_3 são dados por:

$$u_i = \sum_{j=i}^{6} \alpha_{ij} \, v_j ,$$

para $i = 1, \cdots , 3$, e formam uma base para o subespaço $W = [w_1, \cdots , w_4]$.

A seguir apresentamos vários exemplos, que mostram como verificar se um conjunto é uma base, bem como a aplicação da estratégia de completamento de base.

Exemplo 3.6.26 *Considere os seguintes subespaços de* $I\!R^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \; / \; x - 2y + 3z = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \; / \; x + y + z = 0 \}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 3.4.9, sabemos que o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (-1, 0, 1) \quad , \quad v_2 = (-1, 1, 0) \quad , \quad v_3 = (2, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-3, 0, 1)$$

dentre os quais vamos escolher uma base para o subespaço. Para isso, construímos uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos elementos do sistema de geradores, em relação à base canônica, e efetuamos o escalonamento

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz tem posto igual a três, temos que $dim(U + W) = 3$. Assim, podemos escolher uma base para o subespaço $U + W$ um dos seguintes conjuntos

$$\{ (-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 0) \} \qquad \text{ou} \qquad \{ (-1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 3) \}$$

Note que qualquer base de $I\!R^3$ é uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 3.4.6, sabemos que o subespaço $U \cap W = [(-5, 2, 3)]$. Desse modo, temos que $I\!R^3 = U + W$, entretanto, não como soma direta.

Exemplo 3.6.27 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Do Exemplo 3.4.5, sabemos que o subespaço $U + W$ tem como um sistema de geradores os seguintes elementos

$$v_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad v_2 = (0, 1, 0) \quad , \quad v_3 = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_4 = (-1, 0, 1)$$

dentre os quais vamos escolher uma base para o subespaço. Para isso, construímos uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos elementos do sistema de geradores, em relação à base canônica, e efetuamos o escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz tem posto igual a três, temos que $dim(U + W) = 3$. Assim, podemos escolher como base para o subespaço $U + W$ um dos seguintes conjuntos

$$\{ (1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0) \} \qquad \text{ou} \qquad \{ (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$$

Do Exemplo 3.4.5, sabemos que o subespaço $U \cap W = [(1, -2, 1)]$. Desse modo, temos que $\mathbb{R}^3 = U + W$, entretanto, não como soma direta.

Exemplo 3.6.28 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. *Determine uma base para* $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ p(x), q(x), r(x) \}$, *onde*

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + x + x^2 + 3x^3 + 2x^4 \\ q(x) &= 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 \\ r(x) &= 1 + 3x + 2x^2 + 1x^3 + 2x^4 \end{aligned}$$

Os elementos $p(x), q(x), r(x)$ estão escritos em relação à base canônica

$$\beta = \{ 1, x, x^2, x^3, x^4 \}.$$

Inicialmente, vamos construir uma matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ com relação à base canônica, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuando o escalonamento na matriz A encontramos uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que o conjunto S é linearmente independente em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Finalmente, construímos uma matriz M de ordem 5×5 a partir da matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada acrescentando linhas na matriz $\widehat{A}$ que são as coordenadas de elementos da base canônica escolhidos de modo conveniente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $\gamma = \{ p(x), q(x), r(x), x^3, x^4 \}$ é uma base para o espaço $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, contendo os elementos do conjunto S.

Exemplo 3.6.29 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$. *Determine uma base para* $\mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ A_1, A_2, A_3 \}$, *onde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Considere uma base Γ para o espaço vetorial $\mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$ dada por:

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Sabemos que $dim(\mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})) = 6$.

Inicialmente, vamos construir uma matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos A_1, A_2 e A_3 com relação à base Γ, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuando o escalonamento na matriz A encontramos uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que o conjunto $\{ A_1, A_2 \}$ é linearmente independente em $\mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$, pois a matriz A_3 é uma combinação linear das matrizes A_1 e A_2.

Finalmente, construímos uma matriz M de ordem 6×6 a partir da matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada acrescentando linhas na matriz $\widehat{A}$ que são as coordenadas de elementos da base Γ escolhidos de modo conveniente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que o conjunto

$$\Gamma' = \left\{ A_1 \ , \ A_2 \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, contendo dois elementos do conjunto S.

Exemplo 3.6.30 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$. *Determine uma base para* $\mathbb{R}^4$ *contendo elementos do conjunto* $S = \{ v_1, v_2 \}$, *onde*

$$v_1 = (1, 0, -2, 2) \qquad e \qquad v_2 = (1, 2, -2, 1) .$$

Como nos exemplos anteriores, obtemos a matriz M de ordem 4×4 dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que o conjunto

$$\gamma = \{ (1, 0, -2, 2), (1, 2, -2, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, contendo os elementos do conjunto S.

Exemplo 3.6.31 *Considere o subespaço* $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0 \}$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$. *Determine um subespaço* W *de modo que* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Inicialmente, vamos encontrar uma base para o subespaço U. Podemos escrever os elementos $u \in U$ da seguinte forma:

$$u = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Portanto, $\{ (1, 1, 0), (-2, 0, 1) \}$ é uma base para o subespaço U. Finalmente, vamos completar a base de U, para obter uma base para $\mathbb{R}^3$, com o elemento $(0, 0, 1)$. Assim, obtemos o subespaço $W = [(0, 0, 1)]$. Note que esse problema possui infinitas soluções, pois podemos completar a base com um outro elemento.

Exemplo 3.6.32 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} U &= [(1,0,1,0),\ (0,1,0,0)] \\ W &= \{\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ /\ x\ +\ y\ =\ 0\ \} \end{aligned}$$

Determine $dim(U+W)$ *e* $dim(U \cap W)$*.*

Podemos verificar facilmente que os elementos $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$ formam uma base para o subespaço U. Logo, $dim(U) = 2$. Para o subespaço W temos a seguinte base

$$\{\ (-1,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\ \}$$

portanto, $dim(W) = 3$.

Vamos agora determinar a dimensão do subespaço $U+W$, para isso construímos uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos elementos do sistema de geradores do subespaço $U+W$, em relação à base canônica, que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, efetuando o escalonamento na matriz A encontramos uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $posto(A) = posto(\widehat{A}) = 4$, podemos concluir que $dim(U+W) = 4$.

Considerando o resultado do Teorema 3.6.5, temos que

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U+W) = 2 + 3 - 4 = 1$$

Assim, obtemos que $dim(U \cap W) = 1$.

Exemplo 3.6.33 *Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$, com $U \neq W$, tais que $dim(U) = 3$ e o subespaço $U \cap W = [v_1, v_2, v_3]$, onde*

$$v_1 = (1,2,1,0) \quad , \quad v_2 = (-1,1,0,1) \quad e \quad v_3 = (1,5,2,1)\ .$$

Determine $dim(U \cap W)$ e as possíveis dimensões dos subespaços W e $U + W$.

Vamos determinar a dimensão do subespaço $U \cap W$. De modo análogo, escalonando a matriz A, cujas linhas são as coordenadas dos elementos do sistema de geradores do subespaço $U \cap W$, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

obtemos que $dim(U \cap W) = 2$. Considerando o resultado do Teorema 3.6.5, temos que

$$3 \leq dim(U + W) = 1 + dim(W) \leq 4 ,$$

uma vez que $U \subseteq U + W$ e $dim(U) = 3$. Portanto, temos duas possibilidades:

(1) $dim(W) = 2$ e $dim(U + W) = 3$

(2) $dim(W) = 3$ e $dim(U + W) = 4$

Exemplo 3.6.34 *Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto*

$$S = \{ (a,1,0), (1,a,1), (0,1,a) \}$$

seja uma base para $\mathbb{R}^3$.

Vamos encontrar os valores para a de modo que o conjunto acima seja linearmente independente. Assim, vamos construir uma matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos do conjunto S, em relação à base canônica, e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 - a^2 & -a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(a^2 - 2) \end{bmatrix}$$

Portanto, devemos impor que $a(a^2 - 2) \neq 0$. Assim, obtemos $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{2}$.

De modo análogo, consideramos uma combinação linear nula dos elementos do conjunto S, obtendo um sistema linear homogêneo, e impomos a condição na matriz do sistema de modo que os coeficientes da combinação linear sejam todos nulos. Assim, obtemos os valores para o parâmetro a.

Exemplo 3.6.35 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $I\!R^3$

$$\begin{aligned} U &= [(1,-1,2),\,(2,1,1)] \\ W &= [(1,2,1),\,(0,1,-1)] \end{aligned}$$

Determine uma base para os subespaços $U + W$ *e* $U \cap W$.

Podemos verificar facilmente que o conjunto $\{\,(1,-1,2),\,(2,1,1)\,\}$ é uma base para o subespaço U e que $\{\,(1,2,1),\,(0,1,-1)\,\}$ é uma base para o subespaço W. Agora vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$. Para isso construímos uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos elementos do sistema de geradores do subespaço $U + W$, em relação à base canônica, e efetuamos o escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escolher uma base para o subespaço $U + W$ um dos seguintes conjuntos

$$\{\,(1,-1,2),\,(2,1,1),\,(1,2,1)\,\} \qquad \text{ou} \qquad \{\,(1,-1,2),\,(0,3,-3),\,(0,0,2)\,\}$$

Logo, temos $dim(U + W) = 3$. Considerando o resultado do Teorema 3.6.5, obtemos

$$dim(U \cap W) \;=\; dim(U) \;+\; dim(W) \;-\; dim(U + W) \;=\; 1\,.$$

Neste caso, do processo de escalonamento, podemos concluir que o elemento $(0,1,-1)$ pertence ao subespaço $U \cap W$, pois observamos que ele também pertence ao subespaço U. Logo, $\{\,(0,1,-1)\,\}$ é uma base para o subespaço $U \cap W$.

Exemplo 3.6.36 *Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $I\!R^4$

$$\begin{aligned} U &= [(1,-1,0,2),\ (-1,2,0,1)] \\ W &= [(2,1,-1,3),\ (3,-4,0,3),\ (4,5,-3,5)] \end{aligned}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$ *e* $dim(U \cap W)$.

Vamos determinar a dimensão do subespaço U, procedendo o escalonamento na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como o $posto(A) = 2$, obtemos $dim(U) = 2$.

De modo análogo, vamos determinar a dimensão do subespaço W

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & -32 \end{bmatrix}$$

Como o $posto(A) = 3$, obtemos $dim(W) = 3$.

De modo análogo, vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & -3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, provamos que o conjunto $\{ (1,-1,0,2),\ (-1,2,0,1),\ (2,1,-1,3) \}$ é uma base para o subespaço $U + W$. Logo, $dim(U + W) = 3$.

Considerando o resultado do Teorema 3.6.5

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 2 + 3 - 3 = 2$$

obtemos $dim(U \cap W) = 2$.

Exemplo 3.6.37 *Considere o subespaço U, do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$, definido por:*

$$U = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ \int_{-1}^{1} p(x)dx \ + \ p'(0) = 0 \right\} .$$

Determine uma base para o subespaço U.

É importante lembrar que no exemplo 3.2.9 mostramos que U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(I\!R)$. Vamos determinar uma base para o subespaço U.

Tomando um elemento genérico $p(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R)$, que é escrito da forma:

$$p(x) = a + bx + cx^2 ,$$

e impondo a condição para que $p(x)$ pertença à U, isto é,

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)dx \ + \ b \ = \ 0 ,$$

obtemos a equação algébrica homogênea, que representa o vínculo entre os coeficientes do elemento $p(x)$, dada por:

$$6a + 3b + 2c = 0 ,$$

que possui dois grau de liberdade, de onde concluímos que $dim(U) = 2$.

Assim, podemos escolher

$$c = -3a - \frac{3}{2}b \quad ; \quad a, b \in I\!R .$$

Logo, todo elemento $p(x) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = (1 - 3x^2)a + \left(x - \frac{3}{2}x^2 \right) b \quad ; \quad a, b \in I\!R .$$

Portanto, temos que o conjunto

$$\gamma = \left\{ 1 - 3x^2 , x - \frac{3}{2}x^2 \right\}$$

é uma base para o subespaço U, uma vez que γ é linearmente independente em $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Exercícios

Exercício 3.42 *Verifique se os elementos*

$$u_1 = (1,1,1,1) \quad , \quad u_2 = (0,1,1,1) \quad , \quad u_3 = (0,0,1,1) \quad e \quad u_4 = (0,0,0,1)$$

formam uma base para o espaço vetorial real $I\!R^4$.

Exercício 3.43 *Encontre uma base para o subespaço* W *de* $I\!M_3(I\!R)$ *definido por:*

$$W = \{ \, A \in I\!M_3(I\!R) \ / \ A^t = -A \, \} \, .$$

Exercício 3.44 *Encontre uma base para o subespaço* W *de* $I\!M_3(I\!R)$ *definido por:*

$$W = \{ \, A \in I\!M_3(I\!R) \ / \ A^t = A \, \} \, .$$

Exercício 3.45 *Mostre que o conjunto* $\gamma = \{ \, 1, \, 1-x, \, (1-x)^2, \, (1-x)^3 \, \}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

Exercício 3.46 *Determine uma base para o subespaço vetorial de* $I\!M_2(I\!R)$ *dado por:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\} .$$

Exercício 3.47 *Determine uma base para o espaço solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

que é um subespaço vetorial do $I\!R^4$.

Exercício 3.48 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{P}_2(I\!R)$

$$\begin{aligned} U &= \{ \, p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ a - 2c = 0 \, \} \\ W &= [1 - x \, , \, x - x^2] \end{aligned}$$

Determine uma base para o subespaço $U + W$.

Exercício 3.49 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{P}_2(I\!R)$

$$\begin{aligned} U &= \{ \, p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ a - 2c = 0 \, \} \\ W &= [1 - x \, , \, x - x^2] \end{aligned}$$

Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

Exercício 3.50 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad ; \quad a,\, b,\, c, \ \in \ \mathbb{R} \right\} \qquad e \qquad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad ; \quad a,\, b,\, c \ \in \ \mathbb{R} \right\}.$$

Determine uma base para os subespaços U, W *e* $U \cap W$.

Exercício 3.51 *Para quais valores de* $a \in \mathbb{R}$ *o conjunto*

$$\beta \ = \ \{ \, (a,1,0)\,,\, (1,a,1)\,,\, (0,1,a) \, \}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercício 3.52 *Considere a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)*

$$-u''(x) \ + \ u(x) \ = \ 0\,.$$

Mostre que as funções $u_1(x) = \exp(x)$ *e* $u_2 = \exp(-x)$ *são duas soluções linearmente independentes da EDO e que o conjunto* $\Gamma = \{ \, u_1(x),\, u_2(x) \, \}$ *é uma base para o espaço solução da EDO.*

Exercício 3.53 *Mostre que uma base para o espaço vetorial real* U *definido por:*

$$U \ = \ \{ \, p(x) \ \in \ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) \ = \ p(1) \ = \ 0 \, \}$$

é dada pelo conjunto $\gamma = \{ \, 1 - x^2 \,,\, x - x^3 \, \}$.

Exercício 3.54 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial* V*. Determine as condições necessária e suficiente sobre os subespaços* U *e* W *para que* $dim(\, U \cap W \,) \ = \ dim(W)$.

Exercício 3.55 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial* V *com dimensões* m *e* n*, respectivamente, onde* $m \geq n$.

(a) Prove que $dim(\, U \cap W \,) \ \leq \ n$.

(b) Prove que $dim(\, U + W \,) \ \leq \ n + m$.

Exercício 3.56 *Determine uma base para o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *contendo os elementos*

$$v_1 \ = \ (1,1,1,0) \qquad e \qquad v_2 = (1,1,2,1)\,.$$

Exercício 3.57 *Mostre que os polinômios*

$$p_1(x) = 1 \,, \quad p_2(x) = 1 + x \,, \quad p_3(x) = 1 - x^2 \quad e \quad p_4(x) = 1 - x - x^2 - x^3$$

formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercício 3.58 *Sejam* V *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $dim(V) = 1$, $dim(W) = 2$ *e* V *não está contido em* W. *Mostre que* $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Exercício 3.59 *Determine uma base para o espaço solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ \quad\;\; 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$$

que é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.60 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de dimensão* 3 *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$. *Considerando que*

$$U \cap W = [\,(1,2,1,0)\,,\,(-1,1,0,1)\,,\,(1,5,2,1)\,]\,.$$

Qual é a dimensão do subespaço $U + W$ *?*

Exercício 3.61 *Sejam* W *o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *definido por:*

$$W = \{\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x - y = z \quad e \quad x - 3y + t = 0\,\}$$

e U *o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *gerado pelos elementos* $u_1 = (1,2,1,3)$ *e* $u_2 = (3,1,-1,4)$. *Determine uma base para o subespaço* $U + W$ *e para o subespaço* $U \cap W$.

Exercício 3.62 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = 0\,\} \\ V &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; y - 2z = 0\,\} \\ W &= [\,(1,1,0)\,,\,(0,0,2)\,] \end{aligned}$$

Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços

$$U \cap V \quad , \quad V + W \qquad e \qquad U + V + W\,.$$

3.7 Coordenadas

Uma das características úteis de uma base β de um espaço vetorial V de dimensão finita é essencialmente que ela nos permite introduzir coordenadas em V de maneira análoga às *coordenadas naturais* x_i de um elemento $u = (x_1, \cdots, x_x)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, por exemplo. Assim, as coordenadas de um elemento u de V em relação a base β serão os escalares que servem para representar u como uma combinação linear dos elementos da base ordenada β.

Se β é uma base arbitrária do espaço vetorial V de dimensão n, não teremos nenhuma ordenação natural para os elementos de β e será portanto necessário impormos uma certa ordem sobre esses elementos antes de podermos definir as coordenadas de um elemento de V em relação a β.

Definição 3.7.1 *Seja S um conjunto de n elementos. Uma* ***ordenação*** *do conjunto S, é uma função do conjunto dos inteiros positivos $1, \cdots, n$ sobre o conjunto S.*

Desse modo, uma ordenação do conjunto é simplesmente uma regra para nos dizer que elemento deve ser considerado como o primeiro elemento de S, que elemento é o segundo, e assim sucessivamente.

Uma **base ordenada** de um espaço vetorial V de dimensão finita é uma base β de V, mais uma ordenação fixa dos elementos de β. Desse modo, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.7.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base ordenada de V. Então, todo elemento de V é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de β, isto é, dado o elemento $u \in V$ temos que existe uma única n–upla $(c_1 , \cdots , c_i , \cdots , c_n) \in \mathbb{F}^n$ tal que*

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i \, v_i \, .$$

Dizemos que c_i é a i–ésima coordenada do elemento u com relação à base ordenada β.

Demonstração – Para mostrar a unicidade, vamos considerar que

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j \, v_j = \sum_{j=1}^{n} b_j \, v_j \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} (c_j - b_j) \, v_j = 0_V \, .$$

Como $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ é linearmente independente em V, temos que $c_j - b_j = 0$ para todo j. Logo, $c_j = b_j$ para todo j, o que completa a demonstração. ∎

Observamos que, cada base ordenada β do espaço vetorial V determina uma bijeção

$$u \in V \quad \longrightarrow \quad (c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n) \in \mathbb{F}^n$$

entre o conjunto de elementos de V e o conjunto das n–uplas de $\mathbb{F}^n$.

Esta associação tem a propriedade de que o correspondente do elemento $(u + v) \in V$ é a soma em $\mathbb{F}^n$ das correspondentes n–uplas de u e v. Além disso, o correspondente do elemento $(\lambda u) \in V$ é o produto em $\mathbb{F}^n$ do escalar λ pela correspondente n–upla do elemento u.

Neste ponto poderíamos perguntar por que não tomar simplesmente uma base ordenada no espaço vetorial V e descrever cada elemento de V pelo seu vetor de coordenadas, visto que teríamos então a conveniência de operar apenas com elementos de $\mathbb{F}^n$. Esta atitude faria malograr nosso objetivo, por duas razões. A primeira, como indica a nossa definição de espaço vetorial, estamos aprendendo a raciocinar com espaços vetoriais como sistemas algébricos. A segunda razão, mesmo nos casos em que usamos coordenadas, os resultados importantes decorrem de nossa habilidade de mudar o sistema de coordenadas, isto é, mudar a base ordenada do espaço vetorial V.

Desse modo, será mais conveniente utilizar a **matriz de coordenadas** do elemento u em relação à base ordenada β, que denotamos por $[u]_\beta$, dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{F}) \, .$$

Esta notação será particularmente útil quando passarmos a descrever o que ocorre com as coordenadas de um elemento $u \in V$ quando fazemos a mudança de uma base ordenada para uma outra base ordenada, que é o tema da próxima seção.

Teorema 3.7.2 *Considere* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*. Então, os vetores colunas de* A *formam um conjunto linearmente independente em* $\mathbb{R}^n$ *se, e somente se,* A *é uma matriz invertível.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Sejam $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ os vetores colunas da matriz A e W o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores colunas de A. Como os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente independentes, temos que $dim(\, W\,) = n$. Pelo Corolário 3.6.3, sabemos que $W = \mathbb{R}^n$.

Desse modo, existem escalares $b_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i, j = 1, \cdots, n$, de modo que cada elemento e_j pode ser escrito de modo único da forma:

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots, n\,,$$

onde $\{\, e_1, \cdots, e_j, \cdots, e_n \,\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Portanto, a matriz $B = [b_{ij}]$ satisfaz $AB = I$.

($\Longleftarrow$) A prova segue do Teorema 2.9.7 e do conceito de independência linear. ■

Exemplo 3.7.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *e o elemento*

$$u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Se $\beta = \{\, e_1, \cdots, e_n \,\}$ *é a base ordenada canônica de* $\mathbb{R}^n$*, a matriz de coordenadas do elemento* u *em relação à base* β *é dada por:*

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Para exemplificar, considere o elemento $u = (1, 2, 4, 7) \in \mathbb{R}^4$. Assim, a matriz de coordenadas de u com relação à base ordenada canônica de $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.7.2 *Podemos verificar facilmente que* $\gamma = \{ 1, 1+x, 1+x^2 \}$ *é uma base ordenada para o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*. Determine as coordenadas do elemento* $p(x) = 2 + 4x + x^2$ *em relação à base ordenada* γ.

Inicialmente, escrevemos o polinômio $p(x)$ como uma combinação linear dos elementos da base ordenada γ

$$p(x) = 2 + 4x + x^2 = a + b(1+x) + c(1+x^2) = (a+b+c) + bx + cx^2$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b e c que são as coordenadas de $p(x)$ com relação à base ordenada γ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ b &= 4 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $a = -3$, $b = 4$ e $c = 1$. Portanto, o vetor de coordenadas do elemento p com relação à base ordenada γ é dado por:

$$[p]_\gamma = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.7.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*. Determine as coordenadas do elemento* $u = (2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base* $\gamma = \{ (1,1,1), (1,0,1), (1,0,-1) \}$.

Vamos escrever o elemento $u = (2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear dos elementos da base ordenada γ

$$u = (2,1,4) = a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(1,0,-1)$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b e c que são as coordenadas de u com relação à base ordenada γ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ a &= 1 \\ a + b - c &= 4 \end{aligned}$$

Desse modo, temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$. Portanto, o vetor de coordenadas do elemento u com relação à base ordenada γ é dado por:

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.7.4 *Sejam* V *um espaço vetorial real e* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ *uma base ordenada para* V*. Pede–se:*

(a) *Mostre que* $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \}$ *é uma base de* V*.*

(b) *Se o elemento* $v \in V$ *tem como vetor de coordenadas*

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determine seu vetor de coordenadas $[v]_\beta$*.*

Vamos mostrar que β é linearmente independente em V. Para isso, vamos considerar a combinação linear nula

$$av_1 + b(v_1 + v_2) + c(v_1 + v_2 + v_3) + d(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0_V .$$

Escrevendo a combinação linear acima da seguinte forma:

$$(a + b + c + d)v_1 + (b + c + d)v_2 + (c + d)v_3 + dv_4 = 0_V$$

e utilizando a hipótese que $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ é linearmente independente em V, obtemos o seguinte sistema linear triangular superior homogêneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & & & & c & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 0 \end{array}$$

que tem por solução $a = b = c = d = 0$. Assim, provamos que β é linearmente independente em V. Logo, β é uma base para V.

Note que na primeira parte da resolução, o vetor de coordenadas de um elemento $v \in V$ na base β está representado por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

e o vetor de coordenadas do elemento $v \in V$ na base γ está representado por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ b+c+d \\ c+d \\ d \end{bmatrix}.$$

Assim, para encontrar o vetor de coordenadas $[v]_\beta$, conhecendo o vetor de coordenadas $[v]_\gamma$, basta obter a solução do seguinte sistema linear triangular superior

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 4 \\ & & b & + & c & + & d & = & 3 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & & & d & = & 2 \end{array}$$

Portanto, temos que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.7.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *com a base ordenada* $\gamma = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ *onde*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine o vetor de coordenadas $[A]_\gamma$ da matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $\boxed{[A]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$

Exemplo 3.7.6 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ *e o subespaço* $U = [u_1(x), u_2(x)]$, *onde* $u_1 = \exp(x)$ *e* $u_2 = \exp(-x)$. *Podemos verificar facilmente que o conjunto* $\Gamma = \{\exp(x), \exp(-x)\}$ *é uma base ordenada para o subespaço* U. *Temos que as funções hiperbólicas*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

pertencem ao subespaço U *e cujos vetores de coordenadas em relação à base ordenada* Γ *são dados por*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad e \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Teorema 3.7.3 *Considere* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ *um conjunto finito de elementos de* V. *Se todo elemento de* V *é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de* β, *então* β *é uma base de* V.

Demonstração – Como todo elemento de V é escrito como uma combinação linear dos elementos de β, temos que V é gerado pelos elementos do conjunto β. Agora basta mostrar que β é linearmente independente em V.

Considere os escalares $c_1 , \cdots , c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, v_i = 0_V \, .$$

Temos também que

$$\sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{F}} \, v_i = 0_V \, .$$

Desse modo, pela hipótese de unicidade, obtemos $c_i = 0_{\mathbb{F}}$ para $i = 1, \cdots , n$.

Portanto, β é uma base para o espaço vetorial V. ■

Exercícios

Exercício 3.63 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ 1, 1 - x, (1-x)^2, (1-x)^3 \}.$$

Encontre o vetor de coordenadas $[p]_\gamma$ *do polinômio* $p(x) = 3 - 2x - x^2$.

Exercício 3.64 *Considere a base* $\beta = \{ 2, a + x, 1 + bx^2 \}$ *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Determine as constantes* $a, b \in \mathbb{R}$ *de modo que o vetor de coordenadas do polinômio* $p(x) = x + x^2$ *em relação à base* β *seja dado por:*

$$[p]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.65 *Mostre que o conjunto* $\gamma = \{ 1, x + a, (x+a)^2 \}$, *para* $a \in \mathbb{R}$ *fixo, é uma base para o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 3.66 *Considere a base ordenada* $\gamma = \{ 1, x + a, (x+a)^2 \}$, $a \in \mathbb{R}$ *fixo, do espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Considere que um elemento* $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tem por vetor de coordenadas, em relação à base ordenada canônica* $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$,

$$[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento $p(x)$ *em relação à base ordenada* γ.

Exercício 3.67 *Seja* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *uma base ordenada para o espaço vetorial real* V. *Pede–se:*

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_2 + v_3 \}$ *é também uma base para* V.

(b) Considere que o vetor de coordenadas do elemento $v \in V$, *em relação à base* γ, *é dado por:*

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento v *em relação à base* β.

3.8 Mudança de Base

Teorema 3.8.1 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$, $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ *e* $\gamma = \{ w_1 , \cdots , w_n \}$ *bases ordenadas para* V. *Então, existe uma única matriz* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *invertível tal que para todo* $u \in V$ *tem–se que*

(a) $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$

(b) $[u]_\beta = P^{-1}\,[u]_\gamma$

Demonstração – Inicialmente vamos representar cada elemento v_j da base ordenada β em relação à base ordenada γ. Pelo Teorema 3.7.1, existem escalares $p_{1j}, \cdots , p_{nj} \in \mathbb{F}$, bem definidos, tais que

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots , n\,.$$

Dado um elemento $u \in V$, sejam $c_1, \cdots , c_n \in \mathbb{F}$ suas coordenadas com relação à base ordenada β, isto é,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\, p_{ij}\, c_j \,)\, w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \right) w_i\,. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a relação

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \right) w_i\,.$$

Como as coordenadas $b_1, \cdots , b_n$ do elemento $u \in V$ com relação à base γ são determinadas de modo único, temos que

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, c_j \qquad ; \qquad i = 1, \cdots , n\,.$$

Tomando a matriz $P = [p_{ij}]$, podemos escrever a relação acima na forma matricial $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$. Como β e γ são linearmente independentes em V, então $[u]_\gamma = 0$ se, e somente se, $[u]_\beta = 0$. Assim, temos que P é uma matriz invertível. Logo, temos que $[u]_\beta = P^{-1}\,[u]_\gamma$. A matriz $P = [p_{ij}]$ é denominada matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ, o que completa a demonstração. ■

Utilizaremos a notação $[I]^\beta_\gamma$ para indicar a matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ.

Teorema 3.8.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_n \}$ uma base ordenada para V, e $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ uma matriz invertível. Então, existe uma única base ordenada $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ de V tal que*

(a) $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$

(b) $[u]_\beta = P^{-1}\,[u]_\gamma$

para todo elemento $u \in V$.

Demonstração – Se $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é uma base ordenada para V para qual *(a)* é válido, é claro que

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots, n\,.$$

Assim, basta mostrar que os elementos v_j assim definidos formam uma base para V. Considerando a matriz $Q = [q_{ij}] = P^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\, v_j &= \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk} \right) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, q_{jk} \right) w_i \\ &= w_k \end{aligned}$$

Portanto, o subespaço gerado pelos elementos do conjunto β contém γ. Logo, é igual ao espaço vetorial V. Assim, β é uma base e, de sua definição e do Teorema 3.8.1, é evidente que *(a)* é válido. Logo, *(b)* também o é, o que completa a demonstração. ∎

Note que a j–ésima coluna da matriz P são as coordenadas do j–ésimo elemento da base ordenada β com relação à base ordenada γ, isto é,

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, w_i \qquad ; \qquad j = 1, \cdots, n\,.$$

Portanto, P é a matriz de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ, isto é, $P = [I]^{\beta}_{\gamma}$.

Exemplo 3.8.1 *Considere a matriz* $P \in I\!M_2(I\!R)$ *dada por:*

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

onde θ *é um número real. A matriz* P *é a matriz de rotação de um ângulo* θ *no sentido anti–horário. A matriz* P *é invertível e sua inversa é dada por:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Portanto, para cada $\theta \in I\!R$, *o conjunto* $\gamma = \{ v_1, v_2 \}$ *onde*

$$v_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad e \qquad v_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

é uma base ordenada de $I\!R^2$.

Podemos observar que a base ordenada γ *pode ser descrita como sendo a base obtida pela rotação de um ângulo* θ *da base ordenada canônica* $\beta = \{ e_1, e_2 \}$. *Assim, dado um elemento* $u = (x, y) \in I\!R^2$, *temos que*

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_\beta.$$

Logo, temos que $[u]_\gamma = P^{-1}[u]_\beta$ *e* $[u]_\beta = P[u]_\gamma$.

Esse exemplo é uma excelente ilustração do Teorema 3.8.2. Para exemplificar, vamos considerar $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Desse modo, temos a base ordenada canônica $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ e a base ordenada $\gamma = \{ v_1, v_2 \}$ onde

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1).$$

Neste caso, as seguintes matrizes

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}_\beta^\gamma \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}_\gamma^\beta$$

que são, respectivamente, a matriz de mudança da base ordenada γ para a base canônica β e a matriz de mudança da base canônica β para a base ordenada γ.

Exemplo 3.8.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$. *Determine a matriz de mudança de base,* $[I]^{\beta}_{\gamma}$, *da base canônica* $\beta = \{\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\ \}$ *para a base ordenada* $\gamma = \{\ (1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,0,-1)\ \}$.

Vamos escrever cada elemento da base canônica β como uma combinação linear dos elementos da base γ

$$
\begin{array}{rcccl}
e_1 & = & (1,0,0) & = & p_{11}(1,1,1) \ + \ p_{21}(1,0,1) \ + \ p_{31}(1,0,-1) \\
e_2 & = & (0,1,0) & = & p_{12}(1,1,1) \ + \ p_{22}(1,0,1) \ + \ p_{32}(1,0,-1) \\
e_3 & = & (0,0,1) & = & p_{13}(1,1,1) \ + \ p_{23}(1,0,1) \ + \ p_{33}(1,0,-1)
\end{array}
$$

obtendo três sistemas lineares, que podem ser resolvidos pelo processo de escalonamento. Assim, temos que

$$
[I]^{\beta}_{\gamma} \ = \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

Podemos verificar facilmente que

$$
[I]^{\gamma}_{\beta} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Portanto, temos que $[I]^{\gamma}_{\beta}\,[I]^{\beta}_{\gamma} \ = \ I$.

Exemplo 3.8.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *Determine a matriz de mudança da base* $\alpha \ = \ \{\ (-3,-1),\ (-1,3)\ \}$ *para a base* $\gamma \ = \ \{\ (-1,1),\ (1,1)\ \}$.

Resposta:
$$
\boxed{[I]^{\alpha}_{\gamma} \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (\,[I]^{\alpha}_{\gamma}\,)^{-1} \ = \ [I]^{\gamma}_{\alpha} \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix}}
$$

Exemplo 3.8.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *A matriz de mudança da base* $\gamma = \{ 1 + t, 1 - t^2 \}$ *para uma base* α, *de um mesmo subespaço de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, *é dada por*

$$[I]^{\gamma}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine a base α.

Fazendo $\alpha = \{ p_1, p_2 \}$, temos que

$$\begin{aligned} p_1(t) &+ p_2(t) = 1 + t \\ 2p_1(t) &- p_2(t) = 1 - t^2 \end{aligned}$$

obtendo a seguinte relação entre os elementos da base α com os elementos da base γ

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{3}(1 + t) + \frac{1}{3}(1 - t^2) \\ p_2(t) &= \frac{2}{3}(1 + t) - \frac{1}{3}(1 - t^2) \end{aligned}$$

De outro modo, sabemos que

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = ([I]^{\gamma}_{\alpha})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a relação entre os elementos da base α com os elementos da base γ.

Exemplo 3.8.5 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Determine a matriz de mudança da base canônica* $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$ *para a base ordenada* $\gamma = \{ 2, 1 - x, 1 - x^2 \}$.

Podemos verificar facilmente que

$$[I]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = ([I]^{\gamma}_{\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Exercício 3.68 *Considere a base ordenada* $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *onde*

$$v_1 = (1,0,-1) \,, \qquad v_2 = (1,1,1) \quad e \quad v_3 = (1,0,0) \,.$$

Encontre o vetor de coordenadas do elemento $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base ordenada* γ.

Exercício 3.69 *Considere o seguinte subespaço vetorial de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \ / \ x - y - z = 0 \right\} .$$

Considere as seguintes bases do subespaço vetorial U

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad e \qquad \gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

Determine a matriz de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$.

Exercício 3.70 *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão* n. *Sejam*

$$\beta = \{ v_1 \,, \cdots , v_n \} \ , \ \alpha = \{ u_1 \,, \cdots , u_n \} \quad e \quad \gamma = \{ w_1 \,, \cdots , w_n \}$$

três bases ordenadas para V. *Considerando a matriz* $P = [I]^{\beta}_{\alpha}$, *a matriz de mudança da base* β *para a base* α, *e* $Q = [I]^{\alpha}_{\gamma}$, *a matriz de mudança da base* α *para a base* γ. *Determine a matriz de mudança da base* β *para a base* γ, $[I]^{\beta}_{\gamma}$. *Utilizando esse resultado mostre que uma matriz de mudança de base é sempre invertível.*

Exercício 3.71 *Seja* V *um espaço vetorial real e* $\beta = \{ u_1, \cdots , u_n \}$ *uma base para* V. *Mostre que se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz de ordem* n *invertível, então os elementos*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, u_i \qquad para \qquad j = 1, \cdots , n$$

formam uma base para V, *e que* A *é a matriz de mudança da base*

$$\gamma = \{ v_1, \cdots , v_n \}$$

para a base β, *isto é* $A = [I]^{\gamma}_{\beta}$.

Exercício 3.72 *Considere o espaço vetorial real* $I\!\!R^2$. *A matriz de mudança da base ordenada* $\gamma = \{ u_1, u_2 \}$, *onde* $u_1 = (1,1)$ *e* $u_2 = (-2,2)$, *para a base ordenada* $\alpha = \{ v_1, v_2 \}$ *é dada por:*

$$[I]^{\gamma}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine a base ordenada α. *Determine o elemento* $u \in I\!\!R^2$ *tal que* $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 3.73 *Considere as bases* $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ *e* $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ *de* $I\!\!R^3$, *relacionadas da seguinte forma:*

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

Pede–se:

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]^{\beta}_{\gamma}$ *e* $[I]^{\gamma}_{\beta}$.

(b) Considere que o elemento $u \in I\!\!R^3$ *tem por vetor de coordenadas*

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine o vetor de coordenadas do elemento u *com relação à base* γ.

Exercício 3.74 *Considere a seguinte matriz de mudança de base*

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontre:

(a) $[v]_\beta$ *onde* $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $[v]_{\beta'}$ *onde* $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] LUENBERGER, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.

[20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.