Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 14/05/2019

Exercícios - Conjuntos finitos e Infinitos

(1) Verifique se os conjuntos abaixo são enumeráveis ou não-enumeráveis. Em caso afirmativo, represente-os um para um em relação ao conjunto dos naturais, e, em caso negativo; justifique suas respostas.

 (a) O conjunto dos inteiros múltiplos de 5.
 (b) O conjunto dos inteiros pares negativos.
 (c) O conjunto dos inteiros maiores do que ou iguais 100.
 (d) O conjunto dos reais entre 0 e 2.
 (e) O conjunto dos inteiros divisíveis por 2 e 3.

(2) Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é enumerável.

(3) Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

(4) Sejam os conjuntos A e B. Mostre que se $A \subseteq B$ e A é não-enumerável então B é não-enumerável.

(5) Sejam os conjuntos A, B, C, D. Mostre que se A e B têm a mesma cardinalidade e C e D têm a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.

(1) (a) O conjunto dos inteiros múltiplos de 5. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5.k; \forall k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ A: & 0 & -5 & 5 & -10 & 10 & -15 & 15 & -20 & 20 & \dots \end{array}$$

Por definição, precisamos encontrar uma bijeção de $\mathbb{N}$ em A; assim, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$$f(n) = \begin{cases} 5.\frac{n}{2}\ ; & \text{se } n \text{ é par } (n = 2k; \forall k \in \mathbb{N}) \\ -5\frac{(n+1)}{2}\ ; & \text{se } n \text{ é ímpar } (n = 2k - 1; \forall k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

(b) O conjunto dos inteiros pares negativos. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z}^- \mid x = 2.k; \forall k \in \mathbb{Z}^-\}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ A: & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 & -14 & -16 & -18 & \dots \end{array}$$

assim, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que, $f(n) = -2(n+1)$.

Observação: O conjunto é infinito, mas podemos identificar a imagem para um determinado valor de n, por exemplo, $f(90) = -2(90+1) = -2(91) = -182$.

(1) (c) O conjunto dos inteiros maiores do que ou iguais 100.

"ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 100\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ A: & 100 & 101 & 102 & 103 & 104 & 105 & 106 & 107 & 108 & \ldots \end{array}$$

assim, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que, $f(n) = n + 100$.

(e) O conjunto dos inteiros divisíveis por 2 e 3. "ENUMERÁVEIS"

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6.k; \forall k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ A: & 0 & -6 & 6 & -12 & 12 & -18 & 18 & -24 & 24 & \ldots \end{array}$$

assim, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que,

$$f(n) = \begin{cases} 6.\frac{n}{2} \ ; & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{par} \\ -6\frac{(n+1)}{2} \ ; & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

(1)(d) O conjunto dos reais entre 0 e 2. "NÃO-ENUMERÁVEIS"
Vamos verificar se o conjunto $]0,2[\in \mathbb{R}$ é enumerável.
Começaremos utilizando o resultado da PROPOSIÇÃO.1: "subconjuntos de conjuntos enumeráveis, são também enumeráveis".
Por esta proposição, se $]0,1[\in \mathbb{R}$ for enumerável então $]0,2[\in \mathbb{R}$ é enumerável.
Considerando que todos os números entre 0 e 1 podem ser representados do seguinte modo;
$f(n) := 0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$
onde, $a_{ij} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}; \forall i,j \in \mathbb{N}$;
Agora, tomemos o número $x := 0, b_0b_1b_2\cdots \in]0,1[$ definido como:
$b_n := \begin{cases} 1, \text{ se} & a_{nn} = 2 \\ 2, \text{ se} & a_{nn} \neq 2 \end{cases}$ por exemplo, vamos supor:
$f(0) = 0,23794102\ldots$, $f(1) = 0,44590138\ldots$, $f(2) = 0,09218764\ldots$.
Então, $x = 0, b_0b_1b_2\ldots = 0.121\ldots$.
Considerando que cada número real tem uma representação *decimal única*, deduzimos que o número x não está na enumeração acima porque difere de todos os decimais definidos $(b_0 \neq a_{00}; b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \ldots)$; ou seja, $x \in]0,1[$; porém, $x \neq f(n); \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin Im(f)$. Assim, não conseguimos enumerar os elementos do conjunto $]0,1[$. Logo, $]0,2[$ é não enumerável.

(2) Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é enumerável.
$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x = 2k+1; \forall k \in \mathbb{Z}^+\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ A: & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \dots \end{array}$$

assim, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que, $f(n) = 2n+1$

(3) Prove que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.
$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. Então, vamos verificar se o conjunto dos reais é enumerável; visto que, pela $\text{Proposição}.1$ temos que subconjuntos de conjuntos enumeráveis, são também enumeráveis.
Todavia, pela $\text{Proposição}.8$ o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável. Agora, resta verificar se o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.
De acordo com a "Diagonalização de Cantor", conseguimos enumerar todos os elementos do conjunto dos racionais fazendo uma bijeção com o conjunto dos naturais.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \mathbb{Q}: & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 2 & -3 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \end{array}$$

Logo, por definição, o conjunto dos racionais é também enumerável.
Consequentemente, o conjunto dos reais é não-enumerável devido ao conjunto dos irracionais ser não-enumerável.

(4) Sejam os conjuntos A e B. Mostre que se $A \subseteq B$ e A é não-enumerável então B é não-enumerável.

(5) Sejam os conjuntos A, B, C, D. Mostre que se A e B têm a mesma cardinalidade e C e D têm a mesma cardinalidade, então $A \times C$ e $B \times D$ têm a mesma cardinalidade.