Lista 4 - Lógica para Computação

Ana Batista, Ariel Andrade, Daniel Ramos, Fabrício Santos e Laurinne Oliveira

Novembro 2021

1. Seja a assinatura $\Sigma = (c, f, g, R, P, ar)$ sendo c constante e $ar(f) = ar(R) = 2$ e $ar(g) = ar(P) = 1$.
   Para os Σ-termos sem variáveis, temos:
   $c, \;\; g(c), \;\; f(g(c), c), \;\; f(c, g(c)), \;\; g(f(c, g(c)))$

   Para as Σ-fórmulas sem variáveis livres, temos:
   $g(c) = c, \;\; P(c), \;\; P(g(c)), \;\; P(f(c, g(c))), \;\; R(g(c), f(c, c))$

2. Definir analogamente a adequada noção de "subformula", considerando o conjunto $sub(\varphi)$ do conjunto $Fm(\Sigma)$:
   Seja $\varphi \in Fm(\Sigma)$ o conjunto $fvar(\varphi)$ das variaveis livre de φ a definição segue como:

   * $fvar(\varphi) = (x \in V)/x$ ocorre em φ, se φ é atômica;

   * $fvar(\varphi) = fvar(\psi)$, se $\varphi = \neg\psi$;

   * $fvar(\varphi) = fvar(\psi)/(x)$, se $\varphi = \exists x\psi$ ou $\varphi = \forall x\psi$;

   * $fvar(\varphi) = fvar(\psi) \cup fvar(\chi)$, se $\varphi = \psi\Box\chi$, onde $\Box \in (\wedge, \vee, \rightarrow)$;

Logo, deduzimos que $x \in V$ é livre se x não é ligada a um quantificador.

3. Seja $\varphi = \exists x(x = f(c) \wedge x < c) \rightarrow R(c, h(c))$.

   Considerando que c seja símbolo de uma constante, f e h símbolos funções, R e '<' símbolos de relações, $ar(f) = ar(h) = 1$, e $ar(R) = ar(<) = 2$, temos a assinatura $\Gamma = (c, f, h, <, R, ar)$, com as aridades já expostas anteriormente.

   Considerando $\psi = (x = f(c) \wedge x < c)$ e $\chi = R(c, h(c))$, explicitamos as subfórmulas de φ:
   $sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup sub(\exists x\psi) \cup sub(\chi)$
   $sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup \{\exists x\psi\} \cup sub(\psi) \cup sub(\chi)$
   $sub(\varphi) = \{\varphi, \exists x\psi\} \cup \{\psi\} \cup sub(x = f(c)) \cup sub(x < c) \cup sub(R(c, h(c)))$

   Como os termos 'sub' na linha acima têm somente fórmulas atômicas (tipos i, ii, e iii do script), escrevemos:

   $sub(\varphi) = \{\ \varphi,\ \exists x\psi,\ \psi,\ x = f(c),\ x < c,\ R(c, h(c))\ \}$
   lembrando que $\varphi = \exists x(x = f(c) \wedge x < c) \rightarrow R(c, h(c))$ e $\psi = (x = f(c) \wedge x < c)$

   Explicitando os termos a partir das subfórmulas obtidas anteriormente:
   $\{x,\ c,\ f(c),\ h(c)\} \subseteq Tm(\Sigma)$

4.

5.

6. Seja $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, ar)$ uma Σ-assinatura e $\mathcal{M} = (M, (c^{\mathcal{M}})_{c\in\mathcal{C}}, (f^{\mathcal{M}})_{f\in\mathcal{F}}, (R^{\mathcal{M}})_{R\in\mathcal{R}})$ uma Σ-estrutura.

   Seja β uma valoração e $I(\mathcal{M}, \beta)$ uma interpretação tais que:

   $I \vDash \neg\exists x\varphi$

   $\iff$ não existe um $n \in M \;\; I_x^n \vDash \varphi$

   $\iff$ para todo $n \in M \;\; I_x^n \nvDash \varphi$

   $\iff \forall x\neg\varphi$