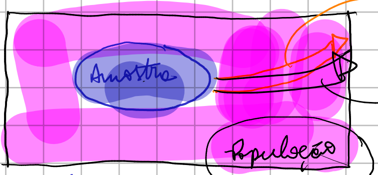
Probabilidade:

Motivação:



Indução / Inferência Indutiva
Desejamos controlar o erro usando probabilidade.

→ Processo de Generalização: Tem erro!

Mensurar e Controlar o erro! → Probabilidade //
Suposições razoáveis sobre pop.

Conceitos Básicos: Experimento / Acontecimento / procedimento que não conseguimos falar o resultado com antecedência.

Fenômeno Aleatório:
Ex.: Lançamento de um dado.
(Saltar o Pedro não é fenômeno aleatório / Fenômeno Determinístico)

Espaço Amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis. Notação: Ω.
Ex.: $\Omega = \{$face 1, face 2, face 3, face 4, face 5, face 6$\}$. → fenômeno aleatório

Evento: Subconjunto de Ω. Notação: letras maiúsculas do alfabeto latino.
Ex.: $A = \{$face par$\} = \{$face 2, face 4, face 6$\}$.

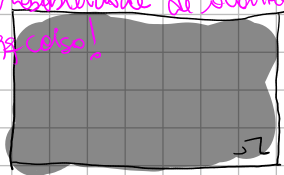
Exemplo: Fenômeno Aleatório: Lançamento de uma moeda;
Espaço Amostral: $\Omega = \{$Coroa, Cara$\}$;
Evento: $A = \{$Coroa$\}$.

Probabilidade: Achar um número que indica a plausibilidade ou quanto se acredita (dance / fé) que um ponto do evento será resultado do fenômeno aleatório.
Notação: $P(A)$. → O quanto acreditamos que um ponto do A será resultado do fenômeno aleatório!

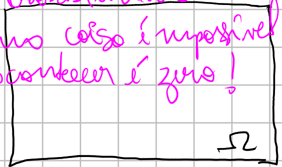
Axiomas de Probabilidade: 1) $P(A) \in [0,1]$ $[0,100]$ (Axiomas de Kolmogorov)

2) $P(\Omega) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$

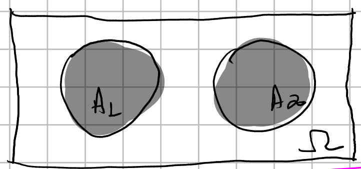
Probabilidade de acontecer sucesso!



Probabilidade de uma coisa impossível acontecer é zero!



3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (disjuntos)



$\emptyset$ é o evento impossível.
$\emptyset = \{$face que é par e ímpar$\} = \{\}$

$P(A) = 1{,}5$ → Erradíssimo!!

Como calcular P(A): (Princípio da Equiprobabilidade.) Se Ω é finito, e se cada ponto é igualmente provável de ser resultado do fenômeno aleatório. Nesse caso:

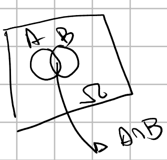
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

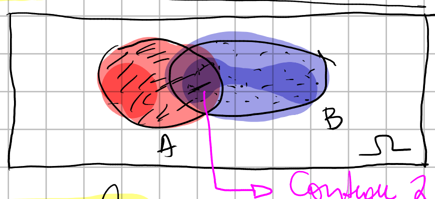
em que $n(A)$ é o número de pontos de A e $n(\Omega)$ é o nº de pontos de Ω.

Ex: Fenômeno aleatório: lançar dado 1
$A = \{$face par$\} = \{$face 2, face 4, face 6$\}$
$n(\Omega) = 6$; $n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = 3/6 = 0{,}5$

Propriedades: (Consequências dos Axiomas de Kolmogorov)

• **Regra da Adição** (União = "pelo menos"). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ //





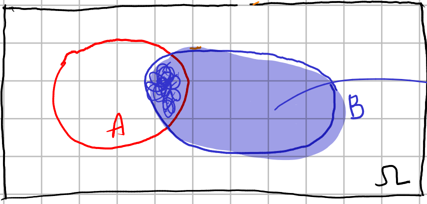
$$\frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} = P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional:

$P(A|B)$: probabilidade de um ponto de A ser resultado do fenômeno aleatório se eu sei de antemão que o resultado do fenômeno aleatório está em B.
Absoluta certeza que o resultado fenômeno aleatório tá B!

$P(A|B)$: Em estatística, falamos probabilidade de A dado B.



$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} \cdot 1 = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

O resultado do fenômeno aleatório tá aqui.

Ex: $B = \{\text{face par}\}$ / $A = \{\text{face } 2\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Como calcular $P(A|B)$:
- $P(B) > 0$, $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $P(B) = 0$, $\boxed{P(A|B) = P(A)}$ (Por conveniência) (Semelhante $0^0 = 1$)

Independência: Conhecer que um ponto de B é resultado do fenômeno aleatório não ajuda a saber se algum ponto de A será resultado do fenômeno aleatório.

- $P(A|B) = P(A)$

$B = \Omega$: $P(A|B) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$

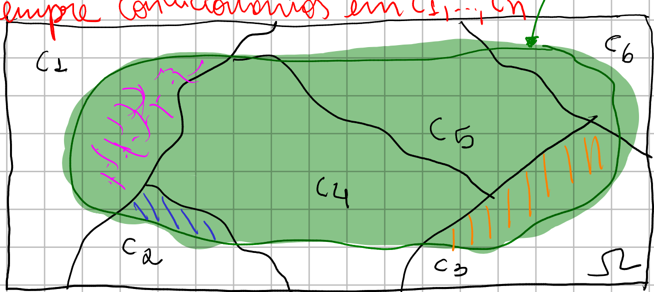
$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$

Regra da Multiplicação:
- $P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$ ✓
- $P(A\cap B) = P(B|A)P(A)$ ✓

- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ (A e B são independentes)

Teorema da Probabilidade Total: $C_1, \ldots, C_n$; $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$; $C_1 \cup \ldots C_n = \Omega$. Chamamos $C_1, \ldots, C_n$ de partição de Ω.

Sempre condicionamos em $C_1, \ldots, C_n$



$$P(A) = P(A\cap C_1) + P(A\cap C_2) + P(A\cap C_3) + \ldots + P(A\cap C_n)$$
$$= P(A|C_1)P(C_1) + \ldots + P(A|C_n)P(C_n)$$

(Regra da Multiplicação)

Quero A!

Eu sei: $\{P(A|C_1), P(A|C_2), \ldots, P(A|C_n)$; $P(C_1), \ldots, P(C_n)$

$$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \ldots + P(A|C_n)P(C_n)$$

Teorema de Bayes: $C_1, \ldots, C_n$ uma partição de Ω. A

Estatística Bayesiana

Sabemos calcular $P(A|C_1), \ldots, P(A|C_n)$; $P(C_1), \ldots, P(C_n)$

Interpretação: $C_1, \ldots, C_n$: Causa / A: efeito

Exemplo 1:

$C_1, \ldots, C_n$	A	$P(C_1), \ldots, P(C_n)$	$P(A|C_1), \ldots, P(A|C_n)$
Doenças	Sintomas	Prevalência Min. Saúde	Literatura médica ✓

Paciente com sintoma A ⇒ Queremos a probabilidade do paciente ter a doença C_1
$P(C_1|A), P(C_2|A), \ldots, P(C_n|A)$

Exemplo 2:

$C_1, \ldots, C_n$	A	$P(C_1), \ldots, P(C_n)$	$P(A|C_1), \ldots, P(A|C_n)$
Defeito na peça C_i	comportamento	probabilidade da peça C_i quebrar	Especificação do fabricante

Máquina com comportamento A ⇒ Queremos a probabilidade do paciente da peça C_1 quebrar
$P(C_1|A), \ldots, P(C_{1000}|A)$ / $P(C_2|A) = 0{,}4$

Como calcular $P(C_i|A)$:

$$P(C_i|A) \overset{\text{definição}}{=} \frac{P(A\cap C_i)}{P(A)} \overset{\text{Teorema da Prob. Total}}{=} \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \ldots + P(A|C_n)P(C_n)}.$$

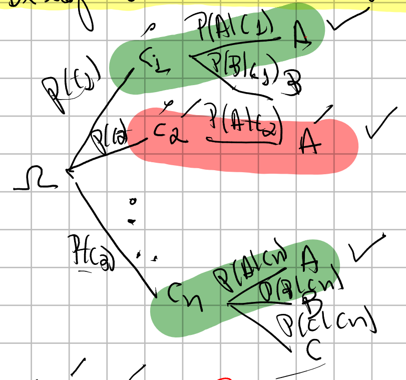
Regra da Multiplicação

Sempre condicionamos na partição!

Diagrama de Probabilidades: $\begin{cases} C_1, \ldots, C_n \text{ partição de } \Omega \\ A \end{cases}$

(Sempre condiciona na partição)

(Partição vem primeiro neste Diagrama)



$$P(C_2|A) = \frac{P(A|C_2)P(C_2)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) + \ldots + P(A|C_n)P(C_n)}$$

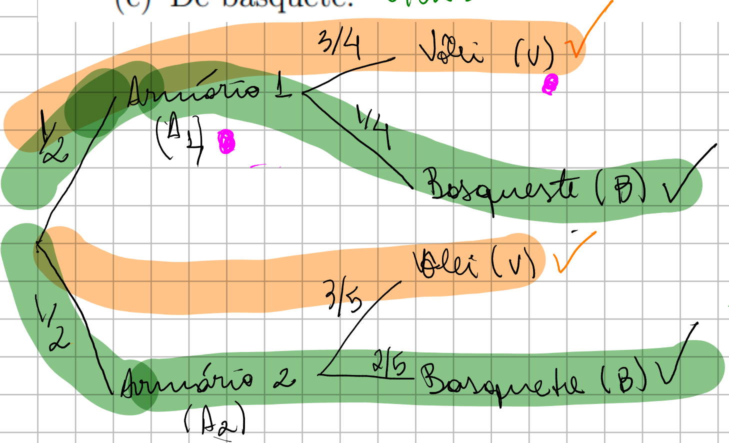
10. Dois armários guardam as bolas de voleibol e basquete. O armário 1 tem 3 bolas de voleibol e 1 de basquete, enquanto 2 tem 3 bolas de voleibol e 2 de basquete. Escolhendo-se, ao acaso, um armário e, em sequida, um de suas bolsas, calcule a probabilidade dela ser:

→ equiprobabilidade

(a) De voleibol, sabendo-se que o armário 1 foi escolhido; 3/4

(b) De basquete, sabendo-se que o armário 2 foir escolhido; 2/5

(c) De basquete. 0,325



c) $P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

$P(A_1|V) = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = 0,253125$

a) $P(V|A_1) = 3/4$

b) $P(B|A_2) = 2/5$

c) $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0,325$

Bônus: $P(A_1|B) = \dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \dfrac{1/4 \cdot 1/2}{1/4 \cdot 1/2 + 2/5 \cdot \frac{1}{2}} = 0,384615385$

A é independente de B ⟺ B é independente de A

⇒ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ | $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(\cancel{A})P(B)}{P(\cancel{A})} = P(B)$ ⇐

$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$ → Regra da Multiplicação!

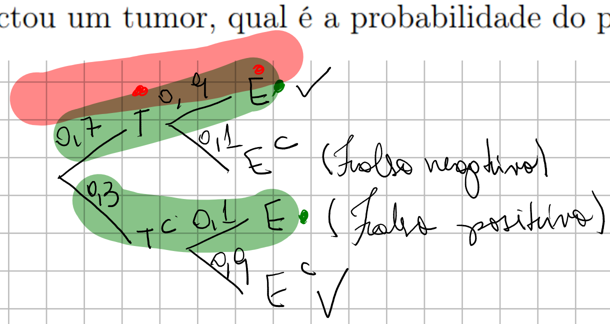
A e B são independentes.

7. Um médico desconfia que um paciente tem tumor no abdômen, pois isto ocorreu em 70% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultra-som detectará com probabilidade de 0,9. Entretanto, se ele não tiver o tumor, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade 0,1. Se o exame detectou um tumor, qual é a probabilidade do paciente tê-lo de fato?

$T = \{ \text{Vc tem tumor} \}$

$P(T) = 0{,}7 \; ; \; P(T^c) = 0{,}3$

$E = \{ \text{Exame detecta doença} \}$



$$P(T \mid E) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}7}{0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} = 0{,}954545455 \approx 0{,}95$$