Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A07 - Álgebra Linear A

Exercícios - II^a Unidade

Espaços Vetoriais e Subespaços: Operações, Bases Coordenadas, Matriz mudança de Base, Ortogonalidade

Professora: Isamara

Data: 13/04/2021

Subespaços Vetoriais - Operações

Exercício.1

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
$\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ e
$\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ e } z = 0\}$.
Determine os subconjuntos definidos abaixo e verifique se são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$,

(b) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$,

(c) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Considere os seguintes subespaços de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:
$\mathcal{W}_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0 = a_1\}$,
$\mathcal{W}_2 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_2 = 0\}$.
Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

(a) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$,

(b) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$,

(c) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Subespaços Vetoriais - Operações

Exercício.3

Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}$ e $\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z + w = 0\}$.
Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$,

(b) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$,

(c) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Verifique se $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

(a) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
$\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$ e
$\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \text{ e } z = 0\}$.
$\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$?.

(b) Considere os seguintes subespaços de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:
$\mathcal{W}_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_0 = a_1\}$,
$\mathcal{W}_2 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid a_2 = 0\}$.
$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$?.

Subespaços Vetoriais - Geradores

Exercício.5

Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:
$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\}$.
Determine um conjunto de geradores para o subespaço $\mathcal{W}$.

Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
$\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0; \forall i \neq j\}$.
Determine um conjunto de geradores para o subespaço $\mathcal{W}$.

Subespaços Vetoriais - Geradores

Exercício.7

Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$:
$\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{C}) \mid a_0 = a_3 = 0\}$.
Determine um conjunto de geradores para o subespaço $\mathcal{W}$.

Subespaços Vetoriais - Geradores

Exercício.8

Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$: $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) / a_0 + 3a_2 = 0\}$. Determine um conjunto de geradores para o subespaço $\mathcal{W}$.

Subespaços Vetoriais - Geradores

Exercício.9

Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 4y + 6z = 0\}$; $\mathcal{W}_2 = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)]$. Determine um conjunto de geradores para cada um dos subespaços: $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Considerando os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + w = 0 \text{ e } z - w = 0\}$;

$\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$.

Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Subespaços Vetoriais - Base

Exercício.11

Seja $\mathcal{W}$ o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores de
$\mathcal{S} = \{(1,0,1,2),(2,-1,1,3),(-1,1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$.
Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ contendo uma base do subespaço $\mathcal{W}$.

Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ x + 3y - z & = & 0 \end{cases}$$

1. Mostre que o conjunto solução $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e determine uma base para esse subespaço.
2. Dado o subespaço vetorial $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$, determine o subespaço $\mathcal{W} \cap \mathcal{S}$ e uma base para esse subespaço.
3. Determine o subespaço vetorial $\mathcal{W} + \mathcal{S}$ e uma base para esse subespaço.

Sejam o espaço vetorial $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ e, $\mathcal{W}_1 = [(-1, 1, -1), (1, 2, 1)]$, $\mathcal{W}_2 = [(2, 2, 1), (1, 1, -1)]$ subespaços de $\mathcal{V}$.

1. Identifique uma base para os subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
2. Determine a dimensão dos subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
3. $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$?

Subespaços Vetoriais - Base e Dimensão

Exercício.14

Sejam o espaço vetorial $\mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e, $\mathcal{W}_1 = [e_2 - e_4, e_1 + e_2 + e_3]$, $\mathcal{W}_2 = [e_1, e_2 + e_3]$ subespaços de $\mathcal{V}$.

1. Identifique uma base para os subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
2. Determine a dimensão dos subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
3. $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$?

Sejam o espaço vetorial $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e, $\mathcal{W}_1 = [e_1 + e_2 + e_3]$, $\mathcal{W}_2 = [e_1, e_2 - e_3]$ subespaços de $\mathcal{V}$.

1. Identifique uma base para os subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
2. Determine a dimensão dos subespaços: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
3. $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$?

Seja $\mathbb{C}^2$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

1. Verifique se o conjunto $\mathcal{S} = \{(1-i, i), (2, -1+i)\} \subset \mathbb{C}^2$, é uma base para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathcal{K} = \mathbb{C}$.
2. Verifique se o conjunto $\mathcal{S} = \{(1-i, i), (2, -1+i)\} \subset \mathbb{C}^2$, é uma base para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.

Sejam os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{W}_1 = [(1,0,0)], \mathcal{W}_2 = [(1,1,0),(0,1,1)]$. Verifique se $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Determine uma base para este espaço contendo elementos do conjunto $\mathcal{S} = \{(1, 0, -2, 2), (1, 2, -2, 1)\}$.

Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\}$.
Determine um subespaço $\mathcal{W}_2$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ sobre o corpo $\mathbb{K}$. Determine uma base para $\mathbb{C}^3$ nos itens abaixo:

1. Considere $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e os elementos do conjunto $\mathcal{S} = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1)\}$.
2. Considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e os elementos do conjunto $\mathcal{S} = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1), (0, 0, i)\}$.

sem respostas

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real, com $dim(\mathcal{V}) = 9$, $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços de $\mathcal{V}$ tais que $dim(\mathcal{W}_1) = 6$ e $dim(\mathcal{W}_2) = 5$.
Mostre que $2 \leq dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \leq 5$.

Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto $\mathcal{S} = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ seja uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:
$\mathcal{W}_1 = \{p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) / a - 2c = 0\}$ e $\mathcal{W}_2 = [1 - t, t - t^2]$. Determine uma base para o subespaço $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e a $dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)$.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que,
$\mathcal{W}_1 = \{u = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y \text{ e } w = 0\}$; e, $\mathcal{W}_2 = [e_1, 3e_3 + e_4]$.
(Responda os itens abaixo justificando suas respostas.)

(a) Verifique se $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão para os seguintes subespaços: $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

(c) Verifique se $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

(d) Determine um subespaço $\mathcal{W}$ tal que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}$.

Subespaços Vetoriais - Base e Coordenadas

Exercício.25

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e a base $\beta_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,1)(1,0,1),(1,0,-1)\}$.
Determine as coordenadas do vetor $u = (3,1,6) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base $\beta_{\mathbb{R}^3}$.

Seja $\beta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ uma base ordenada do espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas do vetor $p(t) = 2 + 4t + t^2$ em relação à base $\beta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$.

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ com a base ordenada
$\beta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4\}$.
Determine o vetor de coordenadas $[A]_{\beta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}$ da matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, e as seguintes bases ordenadas:
$\beta_{\mathbb{R}^4} = \{e_1 + 2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$ e, $\beta'_{\mathbb{R}^4}$ a base canônica.

(a) Determine a MATRIZ MUDANÇA DA BASE $\beta'_{\mathbb{R}^4}$ para a base $\beta_{\mathbb{R}^4}$: $[I]^{\beta'_{\mathbb{R}^4}}_{\beta_{\mathbb{R}^4}}$.

(b) Determine a MATRIZ DAS COORDENADAS do vetor $v = 3e_1 + e_2 - 4e_4 \in \mathbb{R}^4$ em relação à base $\beta_{\mathbb{R}^4}$, utilizando a matriz $[I]^{\beta'_{\mathbb{R}^4}}_{\beta_{\mathbb{R}^4}}$.

Sejam o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de dimensão finita, e as bases ordenadas:
$\beta_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} = \{1+2t, -t^3, 1, 2t^2\} = \{e_1+2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$; e $\beta'_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}$ a base canônica.

(a) Determine a MATRIZ MUDANÇA DA BASE $\beta'_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}$ para a base $\beta_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}$: $[I]^{\beta'_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}}_{\beta_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}}$.

(b) Determine a MATRIZ DAS COORDENADAS do vetor $p(t) = 3 + t - 4t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}$, utilizando a matriz $[I]^{\beta'_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}}_{\beta_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}}$.

Sejam $\beta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \{t, 1+t, 1-t^2\}$ e $\gamma_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \{e_1, e_2, e_3\}$ bases ordenadas do espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Seja $p(t) = 2 + 4t + t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine $[p(t)]_{\beta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}}$ e $[p(t)]_{\gamma_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}}$ usando as matrizes mudança de base: $[I]_{\gamma}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\gamma}$.

Considere a matriz mudança de base $[I]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encontre:

(a) $[v]_{\beta}$ onde $[v]_{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $[v]_{\gamma}$ onde $[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Subespaços Vetoriais - Matriz mudança de Base

Exercício.31

Seja $\mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ um espaço vetorial de dimensão finita e; sejam $\mathcal{W}_1 = [e_1 + e_4, 3e_2]$ e $\mathcal{W}_2 = [2e_1 - e_3]$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
(Responda os itens abaixo justificando suas respostas.)

(a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, diferente da base canônica, para o espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

(b) Ache a matriz mudança da base canônica do $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ para a base $\beta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ encontrada no item (a).

(c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 + 3e_2 - e_3 + 4e_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ utilizando a matriz do item (b).

Subespaços Vetoriais

Exercício.32

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial qualquer de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$ ou $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$

( ) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se, $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ ou $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$

( ) Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial então está definida em $\mathcal{V}$ a soma e a multiplicação entre seus vetores, satisfazendo às propriedades: comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento simétrico.

( ) O próprio espaço vetorial $\mathcal{V}$ e o subespaço $\{\emptyset\}$ são os chamados subespaços vetoriais triviais de $\mathcal{V}$.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

( ) $\beta_{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2} = \{0\}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

( ) $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ e $dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; então, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se,

(a) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$

(b) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

(c) $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

(d) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{V}$

(e) N.R.A.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$. Então,

(a) $\beta_{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2} = \{0\}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

(b) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

(c) $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ e $dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

(d) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

(e) N.R.A.

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial qualquer de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $dim(\mathcal{W}_1) = 2$ e $dim(\mathcal{W}_2) = 3$. Então, podemos afirmar que

(a) $dim(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = 5$

(b) $0 \leq dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \leq 2$

(c) $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$

(d) $5 \leq dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) \leq dim(\mathcal{V})$

(e) N.R.A.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno e; seja $\mathcal{W} = [e_1 - e_2]$ subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

(a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathbb{R}^2}$, utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}$.

(b) Determine uma base ortonormal $\beta^*_{\mathbb{R}^2}$ para $\mathbb{R}^2$ a partir da base $\beta_{\mathbb{R}^2}$.

(c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 - 2e_2$ em relação à base $\beta^*_{\mathbb{R}^2}$.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno e; seja $\mathcal{W}_1 = [e_1, e_2 - e_3]$ subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

(a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathbb{R}^3}$, utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}_1$.

(b) Determine uma base ortonormal $\beta^*_{\mathbb{R}^3}$ para $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\beta_{\mathbb{R}^3}$.

(c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ em relação à base $\beta^*_{\mathbb{R}^3}$.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno e; seja $\mathcal{W} = [e_1 + e_4, 3e_2]$ um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

(a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathbb{R}^4}$, utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}$.

(b) Determine uma base ortonormal $\beta^*_{\mathbb{R}^4}$ para $\mathbb{R}^4$ a partir da base $\beta_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 - 3e_3 + 2e_4$ em relação à base $\beta^*_{\mathbb{R}^4}$.

Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno e; sejam $\mathcal{W}_1 = [e_1 + e_4, 3e_2]$ e $\mathcal{W}_2 = [2e_1 - e_3]$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.

(a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathbb{R}^4}$, utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

(b) Determine uma base ortonormal $\beta^*_{\mathbb{R}^4}$ para $\mathbb{R}^4$ a partir da base $\beta_{\mathbb{R}^4}$.

(c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 + 3e_2 - e_3 + 4e_4$ em relação à base $\beta^*_{\mathbb{R}^4}$.