Notas de aula – Lógica de Predicados

Steffen Lewitzka

13 de novembro de 2021

Este script está em fase de elaboração.

1 Lógica de Predicados

1.1 Estruturas

Uma estrutura é um conjunto de elementos, o universo ou domínio, junto com uma coleção de funções, relações e constantes.[1] Neste sentido, o grupo aditivo $(\mathbb{Z}, 0, +)$ dos números inteiros, com 0 como constante e adição $+$ como função, é uma estrutura. Outro exemplo é o grupo multiplicativo dos números racionais sem o 0, $(\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}, 1, *)$.[2] Neste último exemplo consideramos $1 \in \mathbb{Z}$ como constante e a multiplicação $*$ como função. Exemplos de estruturas que contêm relações são $(\mathbb{Z}, \leq)$, o conjunto totalmente ordenado dos inteiros; e $(Pow(\{0,1,2\}, \subseteq)$, o conjunto das partes de $\{0,1,2\}$ parcialmente ordenado por inclusão $\subseteq$. Uma estrutura mais complexa é $(\mathbb{N}, 0, 1, +, suc, \leq, P)$, os números naturais com as constantes 0 e 1, as função binária da adição $+$, a função unária de sucessor suc, a relação binária $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de "menor ou igual"e a relação unária de $P \subseteq \mathbb{N}$: $P(n) \Leftrightarrow n$ é primo. A estrutura $(\Gamma^*, \varepsilon, \circ)$ é o monóide (i.e., semigrupo com elemento neutro) do conjunto das palavras $\Gamma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup ...$ sobre o alfabeto Γ com a palavra vazia $\varepsilon := \varnothing \in \Gamma^0 = \{\varnothing\} \subseteq \Gamma^*$ como constante e a concatenação de palavras $\circ$ como função binária.
Mais um exemplo: um corpo é uma estrutura $(K, +, *)$ tal que $(K, +)$ é um grupo

[1] Relações de aridade 1 também são, em particular, chamadas de predicados. Tem autores que usam "predicados"e "relações"(de qualquer aridade) somo sinônimos.

[2] Subtraímos o zero do conjunto dos racionais para garantir que cada elemento possui um elemento inverso referente à multiplicação, isto é, para cada $p \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ existe $q \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ tal que $p * q = 1$. Este é um dos axiomas que todos os grupos devem satisfazer. De fato, se $p = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então $q = n/m$.

comutativo (abeliano) com elemento neutro $0_K \in K$, e $(K \setminus \{0_K\}, *)$ também é um grupo comutativo, e as leis da distributividade valem: $a*(b+c) = a*b+a*c$, $(a+b)*c = a*c+b*c$. Exemplos de corpos são os conjuntos dos números racionais, reais, complexos junto com as respectivas funções de adição e multiplicação nestes conjuntos.

Exercício 1.1 *Relembre as definições de algumas estruturas algébricas como grupos, aneis, corpos, espaços vetoriais, reticulados, álgebras Booleanas etc. Além dos exemplos dados acima, apresente mais alguns exemplos de estruturas algébricas.*

É importante distinguir entre símbolos (sintaxe) e os significados dos mesmos (semântica). Usamos certas uplas, chamadas de assinaturas, para juntar e providenciar os símbolos de constantes, funções e relações que precisamos.

Definição 1.2 *Uma assinatura é uma quádrupla $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}; ar)$ contendo um conjunto $\mathcal{C}$ de símbolos de constantes, um conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de funções, um conjunto $\mathcal{R}$ de símbolos de relações, e uma função $ar : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{N}$ que atribui a cada símbolo de função e relação uma aridade. Os elementos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ também são chamados de símbolos "não-lógicos". Uma assinatura sem símbolos de constantes e funções, ou seja, $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} = \varnothing$, é dita relacional.*

Relembre que funções de aridade zero são constantes, isto é, elementos do contradomínio: se $f^{\mathcal{M}} \colon A^0 \to A$ é uma função numa estrutura $\mathcal{M}$, então $f^{\mathcal{M}} \in A$. Portanto, podemos considerar os símbolo de constantes também como símbolos de funções de aridade zero e supor que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ e $ar(c) = 0$ para $c \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Também admitimos símbolos de relações de aridade zero. Se $R^{\mathcal{M}} \subseteq A^0$ é uma relação de aridade zero de uma estrutura $\mathcal{M}$ com universo A, então $R^{\mathcal{M}} = \varnothing$ já que $A^0 = \{\varnothing\}$. Veremos que tal relação vazia representa semanticamente apenas um valor-verdade. Por isso, podemos interpretar símbolos de relações de aridade zero como variáveis de proposições. Neste sentido, a Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional.

A cada assinatura Σ atribuímos uma classe de Σ-estruturas, isto é, uma classe de estruturas onde interpretamos os *símbolos* de constantes, funções e relações de Σ por constantes, funções e relações da dada estrutura, respectivamente.

Definição 1.3 *Seja $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}; ar)$ uma assinatura. Então uma Σ-estrutura é uma quádrupla $\mathcal{M} = (M, (c^{\mathcal{M}})_{c\in\mathcal{C}}, (f^{\mathcal{M}})_{f\in\mathcal{F}}, (R^{\mathcal{M}})_{R\in\mathcal{R}})$ com as propriedades seguintes:*[3]

[3] $(c^{\mathcal{M}})_{c\in\mathcal{C}}$ é apenas uma notação simplificada para o conjunto $\{c^{\mathcal{M}} \mid c \in \mathcal{C}\}$. Analogamente para $(f^{\mathcal{M}})_{f\in\mathcal{F}}$ e $(R^{\mathcal{M}})_{R\in\mathcal{R}}$.

(i) *M é um conjunto não-vazio, chamado de universo ou de domínio. Os elementos de M são os "individuos"de $\mathcal{M}$.*

(ii) *$c^{\mathcal{M}} \in M$ é uma constante, para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$*

(iii) *$f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ é uma função de aridade $n \in \mathbb{N}$, para cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ com $ar(f) = n$*

(iv) *$R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ é uma relação de aridade $n \in \mathbb{N}$, para cada símbolo de relação $R \in \mathcal{R}$ com $ar(R) = n$.*

Se $p \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, então $p^{\mathcal{M}}$ é a interpretação do símbolo p na Σ-estrutura $\mathcal{M}$.

Precisamos distinguir estritamente os símbolos $c \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ das suas interpretações $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$, $R^{\mathcal{M}}$, respetivamente. Os primeiros objetos são *símbolos* de uma dada assinatura, os segundos são interpretações desses símbolos, isto é, constantes (elementos do universo), funções e relações de uma estrutura $\mathcal{M}$. Para uma relação $R^{\mathcal{M}}$ de aridade n usamos tanto a notação $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathcal{M}}$ como também $R^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)$ para expressar o fato que os $a_1, ..., a_n$ são relacionados por $R^{\mathcal{M}}$.

Geralmente usamos letras minúsculas a, b, c, d, e para símbolos de constantes, $f, g, h, ...$ para símbolos de funções, e letrar maiúsculas $P, Q, R, S, ...$ para símbolos de relações. Exceções a essa regra são certos símbolos comuns como, por exemplo, os símbolos de constantes $0, 1$ para elementos neutros referentes à adição e a multiplicação, os símbolos de funções $+, *$ para adição e multiplicação, ou símbolos de relações como $\leq, <, |$ que denotam algo como "menor ou igual", "menor", "divide", etc. Na prática flexibilizamos a notação de assinatura introduzida na Definição 1.2. Por exemplo, para uma assinatura que contém apenas os símbolos de adição $+$ e um símbolo de relação R de aridade 3, escrevemos simplesmente $\Sigma = (+, R)$, $ar(R) = 3$. A interpretação correta dessa notação segue do contexto e das nossas convenções (letras maiúsculas para símbolos de relações, etc.).

1.2 Linguagens da Lógica de Predicados

A cada assinatura Σ atribuímos uma linguagem $L = L(\Sigma)$ (nossa linguagem de objeto) que é construida sobre e os símbolos não-logicos de Σ e outros símbolos do alfabeto que são fixos. O alfabeto de L contém os seguintes símbolos:

(i) Conectivos lógicos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \top, \bot$

(ii) O quantificador existencial $\exists$ e o quantificador universal $\forall$

(iii) O símbolo de identidade $=$

(iv) Um conjunto infinito V de variáveis para indivíduos: $V = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$.[4]

(v) Os símbolos de Σ

(vi) parênteses), (

Note que alfabetos se distinguem apenas nos símbolos não-lógicos da assinatura subyacente, todos os outros símbolos do alfabeto são fixos e contidos em qualquer linguagem. Na Lógica de Predicados existem duas categorias sintáticas: os termos e as fórmulas.

Definição 1.4 *Seja* $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}; ar)$ *uma assinatura.*
O conjunto $Tm(\Sigma)$ *dos (*Σ*-)termos é o menor conjunto que contém as variáveis V e os símbolos de constantes* $\mathcal{C}$ *e satisfaz a condição seguinte. Se* $t_1, ..., t_n \in Tm(\Sigma)$ *e* $f \in \mathcal{F}$ *tal que* $ar(f) = n$*, então* $f(t_1, ..., t_n) \in Tm(\Sigma)$*.*

Exercício 1.5 *Observe que os termos são definidos indutivamente e, portanto, é possível efetuar provas por indução na construção indutiva dos termos. Prove que todo termo de uma dada assinatura possui um número par de parênteses. Seja* $\Sigma = (c, *, +, g, R)$*,* $ar(g) = 2$*. Mostre que* $+(c, *(x, y))$ *e* $*(g(y, y), g(c, z))$ *são* Σ*-termos apresentando os passos de construção dos mesmos. Apresente também as árvores sintáticas.*

Quando lidamos com símbolos de funções comuns, como p. ex. adição ou multiplicação, escrevemos termos em notação infixa em vez de prefixa. Por exemplo, em vez de $*(a, +(a, x))$ escrevemos $a * (a + x)$. Se os símbolos de funções são dadas como letras, então usamos a notação conforme a definição original dos termos, ou seja, a notação prefixa: $f(x, a)$ em vez de xfa.

Definição 1.6 *Seja* Σ *uma assinatura. O conjunto* $Fm(\Sigma)$ *das* Σ*-fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as condições seguintes.*

(i) Se $t_1, t_2 \in Tm(\Sigma)$*, então* $t_1 = t_2 \in Fm(\Sigma)$*.*

(ii) Se $R \in \mathcal{R}$*,* $ar(R) = n$ *e* $t_1, ..., t_n \in Tm(\Sigma)$*, então* $R(t_1, ..., t_n) \in Fm(\Sigma)$*.*

(iii) $\bot, \top \in Fm(\Sigma)$*.*

(iv) Se $\varphi, \psi \in Fm(\Sigma)$*, então* $\neg\varphi \in Fm(\Sigma)$ *e* $(\varphi \Box \psi) \in Fm(\Sigma)$*, onde* $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$*.*

[4]Usamos também as letras x, y, z, u, v para nos referir a variáveis para indivíduos.

(v) Se $\varphi \in Fm(\Sigma)$ e $x \in V$, então $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi \in Fm(\Sigma)$.

As fórmulas obtidas nas condições (i)–(iii) são chamadas de fórmulas atômicas.

A leitura informal das fórmulas é apresentada em sala de aula. Permitimos a omissão de certos parênteses conforme às mesmas regras que aplicamos na Lógica Proposicional. A linguagem de objeto $L(\Sigma)$ é dada por todos os Σ-termos e todas as Σ-fórmulas.

Note que o símbolo "="da identidade (ou igualdade) é o mesmo que utilizamos na nossa meta linguagem, por exemplo em expressões como $\Sigma = ...$ É importante levar em consideração essa diferência.

Numa fórmula $\exists x\varphi$ ou $\forall x\varphi$ chamamos φ o domínio do quantificador. Dizemos que a variável x é ligada (ingl.: bound) pelo quantificador ou está no domínio do quantificador. Uma variável é dita livre (no lugar da sua ocorrência) se ela não está no domínio de uma quantificador. Esta noção definimos formalmente como segue.

Definição 1.7 *O conjunto $fvar(\varphi)$ ("free variables") das variáveis livres de uma fórmula φ é definido de forma seguinte:*

(i) $fvar(\varphi) = \{x \in V \mid x \text{ ocorre em } \varphi\}$, se φ é atômica

(ii) $fvar(\neg\varphi) = fvar(\varphi)$

(iii) $fvar(\varphi\Box\psi) = fvar(\varphi) \cup fvar(\psi)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

(iv) $fvar(\exists x\varphi) = fvar(\forall x\psi) = fvar(\varphi) \setminus \{x\}$.

Uma fórmula φ é dita sentença se ela não contém variáveis livres, ou seja, se $fvar(\varphi) = \varnothing$.

Uma variável pode ocorrer tanto ligada como livre na mesma fórmula (em ocorrências diferentes). Exemplo: $\varphi = \exists x f(x, y) = c \vee \forall y P(y)$. Note que se trata se uma disjunção das duas subfórmulas imediatas $\exists x f(x, y) = c$ e $\forall y P(y)$. Apresente a árvore sintática e calcule $fvar(\varphi)$!

Como na Lógica Proposicional, podemos efetuar indução na complexidade de termos e de fórmulas. No caso das fórmulas, este fato é expresso pelo seguinte Teorema.

Teorema 1.8 *Para mostrar que uma afirmação $A(\varphi)$ é verdadeira para todas as $\varphi \in Fm(\Sigma)$ basta mostrar o seguinte: $A(\varphi)$ é verdadeiro para qualquer fórmula atômica φ (base da indução), e se as afirmações $A(\varphi)$ e $A(\psi)$ são verdadeiras e $x \in V$, então $A(\neg\varphi)$, $A(\varphi\Box\psi)$, $A(\exists x\varphi)$ e $A(\forall x\varphi)$ são verdadeiras, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ (passo indutivo).*

Demonstração. Exercício. Dica: leve em consideração a correspondente demonstração na Lógica Proposicional. Q.E.D.

1.3 Semântica

A semântica determina como a linguagem $L(\Sigma)$ é interpretada numa dada Σ-estrutura. Os termos denotam elementos do universo da estrutura, e as fórmulas denotam valores-verdade conforme uma relação de satisfatibilidade a ser definida. Na seção anterior apresentamos a interpretação dos símbolos não-lógicos de Σ numa dada Σ-estrutura: cada símbolo $p \in \Sigma$ recebe a interpretação $p^{\mathcal{M}}$ na estrutura $\mathcal{M}$. Agora vamos definir a interpretação de todos os termos e das fórmulas referente a uma dada estrutura $\mathcal{M}$. Vamos começar pelos termos. Já temos a interpretação dos símbolos de constantes: o símbolo $c \in \mathcal{C}$ é interpretado pela constante $c^{\mathcal{M}} \in M$, ou seja, por um elemento do universo M de $\mathcal{M}$. Para interpretar as variáveis $x \in V$, precisamos de uma função $\beta\colon V \to M$, chamada de valoração ou atribuição, que mapea cada $x \in V$ para um elemento $\beta(x) \in M$. Termos mais complexos $f(t_1, ..., t_n)$ então são interpretados recursivamente usando as interpretações dadas dos termos $t_1, ..., t_n$.

Definição 1.9 *Sejam Σ uma assinatura e $\mathcal{M}$ uma Σ-estrutura com universo M. Uma valoração (ou atribuição) para $\mathcal{M}$ é uma função $\beta\colon V \to M$ que atribui a cada variável $x \in V$ um indivíduo (=elemento do universo) $\beta(x) \in M$. A tupla $I = (\mathcal{M}, \beta)$ é chamada de (Σ-) interpretação. Se $\beta\colon V \to M$ é qualquer valoração, $x \in V$ e $m \in M$, então podemos definir uma nova valoração β_x^m por*

$$\beta_x^m(y) := \begin{cases} \beta(y), \ \textit{se } y \neq x \\ m \textit{ se } y = x. \end{cases}$$

Se $I = (\mathcal{M}, \beta)$ é uma Σ-interpretação e β_x^m a valoração dada como acima, então definimos a interpretação I_x^m por $I_x^m := (\mathcal{M}, \beta_x^m)$.

Note que β_x^m é aquela valoração que coincide com β em todas as variáveis $y \in V \setminus \{x\}$ e mapea x para $m \in M$.

Definição 1.10 *Sejam Σ uma assinatura e $I = (\mathcal{M}, \beta)$ uma Σ-interpretação. I mapea cada termo $t \in Tm(\Sigma)$ para um individuo $I(t) \in M$ do universo de maneira seguinte.*

- *$I(x) := \beta(x)$, se $x \in V$.*
- *$I(c) := c^{\mathcal{M}}$, se $c \in C$ é um símbolo de constante.*

- $I(f(t_1, ..., t_n)) := f^{\mathcal{M}}(I(t_1), ..., I(t_n))$, *se* $f \in \mathcal{F}$ *é símbolo de uma função de aridade* n.

Se $t \in Tm(\Sigma)$ *é um termo sem variáveis, então denotamos o elemento* $I(t) \in M$ *por* $t^{\mathcal{M}}$.

Exemplo 1.11 *Sejam* $\Sigma = (e, \circ)$ *uma assinatura e* $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, e^{\mathcal{A}}, \circ^{\mathcal{A}})$ *uma* Σ*-estrutura onde* $\circ^{\mathcal{A}} = +$ *é a adição em* $\mathbb{Z}$ *e* $e^{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{Z}$ *é o elemento neutro referente à adição. Esta estrutura é o grupo aditivo dos números inteiros. Seja* $\beta \colon V \to \mathbb{Z}$ *uma valoração de variáveis com* $\beta(x_1) = 2, \beta(x_2) = 6$. *Consideramos o termo* $t = \circ(x_1, \circ(e, x_2))$. *Em notação infixa,* t *tem a forma* $x_1 \circ (e \circ x_2)$. *Se* $I = (\mathcal{A}, \beta)$, *então* $I(t) = I(x_1 \circ (e \circ x_2)) = I(x_1) \circ^{\mathcal{A}} I(e \circ x_2) = \beta(x_1) \circ^{\mathcal{A}} I(e) \circ^{\mathcal{A}} \beta(x_2) = \beta(x_1) \circ^{\mathcal{A}} e^{\mathcal{A}} \circ^{\mathcal{A}} \beta(x_2) = 2 + (0 + 6) = 8$.
A estrutura $\mathcal{B} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, 1, *)$ *também é uma* Σ*-estrutura. Nesta estrutura, os símbolos* e *e* $\circ$ *são interpretados pela constante* $1 = e^{\mathcal{B}}$ *e multiplicação* $* = \circ^{\mathcal{B}}$ *em* $\mathbb{Q}$, *respetivamente. Consideramos a valoração* $\gamma \colon V \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *com* $\gamma(x_1) = 2$ *e* $\gamma(x_2) = 6$ *e a interpretação* $J = (\mathcal{B}, \gamma)$. *Agora interpretamos o mesmo* Σ*-termo* $t = \circ(x_1, \circ(e, x_2))$ *na interpretação* J*:* $J(t) = \circ^{\mathcal{B}}(\gamma(x_1), \circ^{\mathcal{B}}(I(e), \gamma(x_2)) = *(2, *(1, 6)) = 2 * (1 * 6) = 12$.
Vemos que os símbolos da mesma assinatura podem ter interpretações diferentes em estruturas diferentes. No exemplo anterior, o símbolo de constante c *é interpretado na primeira estrutura por* $0 \in \mathbb{Z}$ *e na segunda estrutura por* $1 \in \mathbb{Q}$*; e o símbolo de função* $\circ$ *é interpretado na primeira estrutura pela adição nos inteiros, e na segunda estrutura é interpretado pela multiplicação em* $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Como na Lógica Proposicional, as fórmulas são interpretadas por valores-verdade. Na Lógica de Predicados, para determinar os valores-verdade referente a uma dada Σ-interpretação, definimos uma relação de satisfatibilidade entre Σ-interpretações e fórmulas $\varphi \in Fm(\Sigma)$.

Definição 1.12 *Seja* Σ *uma assinatura. A relação de satisfatibilidade* $I \vDash \varphi$ *entre* Σ*-interpretações* $I = (\mathcal{M}, \beta)$ *e fórmulas* $\varphi \in Fm(\Sigma)$ *é definida indutivamente como segue:*

- $I \vDash t_1 = t_2 :\Leftrightarrow I(t_1) = I(t_2)$
- $I \vDash R(t_1, ..., t_n) :\Leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(I(t_1), ..., I(t_n))$
- $I \nvDash \bot$
- $I \vDash \top$
- $I \vDash \neg\varphi :\Leftrightarrow I \nvDash \varphi$

- $I \vDash \varphi \vee \psi :\Leftrightarrow I \vDash \varphi$ *ou* $I \vDash \psi$
- $I \vDash \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow I \vDash \varphi$ *e* $I \vDash \psi$
- $I \vDash \varphi \rightarrow \psi :\Leftrightarrow$ *se* $I \vDash \varphi$*, então* $I \vDash \psi$ *(equivalentemente:* $I \nvDash \varphi$ *ou* $I \vDash \psi$*)*
- $I \vDash \forall x \varphi :\Leftrightarrow$ *para qualquer* $m \in M$*:* $I_x^m \vDash \varphi$
- $I \vDash \exists x \varphi :\Leftrightarrow$ *existe um* $m \in M$ *tal que* $I_x^m \vDash \varphi$.

Se $I \vDash \varphi$*, então dizemos que* I *é modelo de* φ *ou* I *satisfaz* φ *ou a fórmula* φ *é verdadeira referente a* I*. Se* Φ *é um conjunto de fórmulas, então definimos:* $I \vDash \Phi :\Leftrightarrow I \vDash \varphi$ *para toda* $\varphi \in \Phi$.

Exemplo 1.13 *Seja novamente* $\Sigma = (\circ, e)$ *e* $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ *o grupo aditivo dos números inteiros onde adição* $+$ *interpreta o símbolo* $\circ$*, e* $0 \in \mathbb{Z}$ *interpreta o símbolo* e*. Seja* $\beta \colon V \rightarrow \mathbb{Z}$ *uma valoração,* $I = (\mathcal{M}, \beta)$*. Então* $I \vDash \forall x x \circ e = x$ *sse para todo* $n \in \mathbb{Z}$*:* $I_x^n \vDash x \circ e = x$ *sse para todo* $n \in \mathbb{Z}$*:* $I_x^n(x \circ e) = I_x^n(x)$ *sse para todo* $n \in \mathbb{Z}$*:* $I_x^n(x) + I_x^n(e) = I_x^n(x)$ *sse para todo* $n \in \mathbb{Z}$*:* $n + 0 = n$*. O último enunciado é obviamente verdadeiro. Então a cadeia de equivalências estabelecidas acima pela definição da semântica mostra que* $I \vDash \forall x x \circ e = x$*. Note que efetuamos, através das equivalências acima, uma tradução da fórmula* $\forall x x \circ e = x$ *da linguagem de objeto para um enunciado a nossa metalinguagem.*

Lema 1.14 (Lema da Coincidência) *Sejam* $I_1 = (\mathcal{M}_1, \beta_1)$ *uma* Σ_1*-interpretação e* $I_2 = (\mathcal{M}_2, \beta_2)$ *uma* Σ_2*-interpretação sobre o mesmo universo* $M_1 = M_2$*, e sejam* $\Sigma := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$*,* $t \in Tm(\Sigma)$ *e* $\varphi \in Fm(\Sigma)$*. Então vale o seguinte:*

(i) Se I_1 *e* I_2 *coincidem nos símbolos de* t *(isto é: para todo símbolo de constante ou de função* $f \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$ *de* Σ *que ocorre em* t *tem-se* $f^{\mathcal{M}_1} = f^{\mathcal{M}_2}$*, e para toda variável* x *que ocorre em* t *tem-se* $I_1(x) = \beta_1(x) = \beta_2(x) = I_2(x)$*), então segue* $I_1(t) = I_2(t)$*.*

(ii) Se I_1 *e* I_2 *coincidem nos símbolos que ocorrem em* φ *(isto é: para todo símbolo* $k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ *de* Σ *que ocorre em* φ *tem-se* $f^{\mathcal{M}_1} = f^{\mathcal{M}_2}$*, e para toda* $x \in fvar(\varphi)$ *tem-se* $I_1(x) = \beta_1(x) = \beta_2(x) = I_2(x)$*, então segue:* $I_1 \vDash \varphi$ *sse* $I_2 \vDash \varphi$*.*

A demonstração do Lema da Coincidência consiste numa indução na construção dos termos seguida por uma indução na construção as fórmulas.

A formulação do Lema da Coincidência é tecnicamente complexa. Mas o fato expresso pelo Lema é muito simples: Se as duas interpretações I_1 e I_2 coincidem nos símbolos não-lógicos e variáveis de $t \in Tm(\Sigma)$, isto é, interpretam esses símbolos iguais, então $I_1(t) = I_2(t)$; e se I_1 e I_2 coincidem nos símbolos não-lógicos e nas variáveis livres de $\varphi \in Fm(\Sigma)$, então $I_1 \models \varphi \Leftrightarrow I_2 \models \varphi$. Em palavras mais simples, a interpretação de um termo depende apenas da interpretação dos símbolos que ocorrem nele, e a semântica de uma fórmula depende apenas dos símbolos não-lógicos e das variáveis livres que ocorrem nela. Este resultado é um análago ao Lema da Coincidência da Lógica Proposicional que diz que a semântica (valor-verdade) de uma fórmula proposicional depende apenas dos valores-verdade das variáveis que realmente ocorrem na fórmula.

A consequência mais interessante e útil do Lema da Coincidência é o resultado seguinte:

Corolário 1.15 *Para uma dada assinatura Σ, sejam $\varphi \in Fm(\Sigma)$, $\mathcal{M}$ uma Σ-estrutura com universo M e $\beta, \beta' \colon V \to M$ valorações. Se $\beta(x) = \beta'(x)$ para todas as variáveis livres $x \in fvar(\varphi)$, então $(\mathcal{M}, \beta) \models \varphi$ sse $(\mathcal{M}, \beta') \models \varphi$. Isto é, a semântica de φ referente a $\mathcal{M}$ depende da interpretação das variáveis livres de φ mas não depende das variáveis ligadas. Em particular, se φ é uma sentença, ou seja $fvar(\varphi) = \varnothing$, então $(\mathcal{M}, \beta) \models \varphi$ sse $(\mathcal{M}, \gamma) \models \varphi$ para quaisquer valorações $\beta, \gamma \in M^V$; isto é, a semântica de φ referente a $\mathcal{M}$ não depende de uma valoração particular. Portanto podemos omitir a valoração dada escrevendo $\mathcal{M} \models \varphi$ em lugar de $(\mathcal{M}, \gamma) \models \varphi$, onde $\gamma \in M^V$.*

Para ilustrar o resoltado anterior, consideramos a assinatura $\Sigma = (R)$, com $ar(R) = 2$, e as sentenças seguintes:
(i) $\forall x R(x, x)$ (reflexividade)
(ii) $\forall x \forall y (R(x, y) \land R(y, x) \to x = y)$ (antisimetria)
(iii) $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z))$ (transitividade)

As sentenças (i)–(iii) axiomatizam a classe das ordens parciais, isto é, a classe de todas as Σ'-estruturas $\mathcal{M}$, $\Sigma \subseteq \Sigma'$, que são modelos de (i)–(iii), isto é, $\mathcal{M}$ é modelo de (i)–(iii) sse o universo M de $\mathcal{M}$ é parcialmente ordenado pela relação $R^{\mathcal{M}} \subseteq M$. Por exemplo, a estrutura $(\mathbb{Z}, \leq)$ é modelo das sentenças (i)–(iii). O símbolo R é interpretado por $\leq$. A estrutura $(\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}, |)$, com relação $a|b :\Leftrightarrow a$ divide b (sem resto), também é uma Σ-estrutura e um modelo das sentenças (i)–(iii). Aqui interpretamos o símbolo R pela relação | de 'divide'. Se acrescentamos a (i)–(iii) a sentença $\forall x \forall y (R(x, y) \lor R(y, x))$, então obtemos uma axiomatização das ordens lineares (ordens totais). Se acrescentamos a (i)–(iii) a sentença $\psi = \exists x \forall y R(x, y)$, então axiomatizamos a classe das ordens parciais com menor elemento. Mostramos que $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, R^{\mathcal{A}})$, onde $R^{\mathcal{A}} =\leq$ é a ordem linear em $\mathbb{N}$, é modelo de ψ. Como ψ é sentença, sua interpretação é independende de qualquer valoração particular de variáveis, conforme Corolário 1.15. Mesmo assim, para mostrar formalmente a satisfatibilidade de ψ, escolhemos uma valoração arbitrária $\gamma\colon V \to \mathbb{N}$. Então

$$
\begin{aligned}
& (\mathcal{A},\gamma) \vDash \exists x \forall y R(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\mathcal{A},\gamma_x^n) \vDash \forall y R(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo m } \in \mathbb{N} : (\mathcal{M},\gamma_{xy}^{nm}) \vDash R(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo m } \in \mathbb{N} : R^{\mathcal{A}}(\gamma_{xy}^{nm}(x),\gamma_{xy}^{nm}(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo m } \in \mathbb{N} : R^{\mathcal{A}}(n,m) \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo m } \in \mathbb{N} : n \leq m.
\end{aligned}
$$

Nas equivalências acima traduzimos a sentença ψ da linguagem de objeto para um enunciado da nossa metalinguagem. Obviamente, este enunciado é verdadeiro: considere $n = 0$. Também fica claro que a argumentação é independente da particular valoração γ. Qualquer valoração serve já que a fórmula em questão ψ é uma sentença. Isto é garantido pelo Corolário 1.15.

Exercício 1.16 *Seja X qualquer conjunto e $Pow(X)$ (power set) o conjunto das partes de X. Então a estrutura $\mathcal{B} = (Pow(X), R^{\mathcal{B}})$, onde $R^{\mathcal{B}} = \subseteq$ é a relação da inclusão (subconjunto), também é um modelo de (i)–(iii) e de ψ acima. Mostre que $\mathcal{B} \vDash \exists x \forall y R(y,x)$. O que expressa essa sentença?*

Definição 1.17 *Sejam Σ uma assinatura e $\Phi \subseteq Fm(\Sigma)$. Então $Mod(\Phi) := \{(\mathcal{M},\beta) \mid (\mathcal{M},\beta) \vDash \Phi\}$ é o conjunto dos modelos de Φ, isto é, o conjunto de todas as Σ-interpretações que satisfazem Φ. A relação $\Vdash$ da consequência lógica é definida como segue:*

$$\Phi \Vdash \psi :\Leftrightarrow Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\psi\}),$$

para $\Phi \cup \{\psi\} \subseteq Fm(\Sigma)$. Em vez de $\{\varphi\} \Vdash \psi$ escrevemos também $\varphi \Vdash \psi$, e em vez de $\varnothing \Vdash \psi$ escrevemos $\Vdash \psi$.
Duas fórmulas $\varphi,\psi \in Fm(\Sigma)$ são logicamente equivalentes, notação: $\varphi \equiv \psi$, se $Mod(\{\varphi\}) = Mod(\{\psi\})$.

Para ser mais precisos, deveríamos indicar a assinatura subyacente escrevendo algo como $Mod_{\Sigma}(\Phi)$ em vez de $Mod(\Phi)$, para $\Phi \subseteq Fm(\Sigma)$. Porém, pelo contexto dado na prática, essa ambiguidade geralmente não gera problema.

Relativamente a uma dada assinatura Σ e ao conjunto das fórmulas $Fm(\Sigma)$, as noções de fórmula válida (tautologia), satisfatível, e insatisfatível (contradição) são definidas analogamente às noções correspondentes da Lógica Proposicional. Por exemplo, $\varphi \in Fm(\Sigma)$ é satisfatível, se existe uma Σ-interpretação (uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ junto com uma valoração $\gamma \in M^V$) que é modelo de φ, isto é, $Mod(\{\varphi\}) \neq \varnothing$.

Exemplo 1.18 *Seguem alguns exemplos de equivalências e consequências lógicas:*
$\forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$*, em geral:* $\forall x \varphi \equiv \varphi$ *e* $\exists x \varphi \equiv \varphi$ *se* $x \notin fvar(\varphi)$
$\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$
$\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$
$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$
$\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$
$\forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$
$\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \varphi \rightarrow \exists x \psi$

$\exists x \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi$
$\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$
$\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$
$\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$
$\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$

Para o seguinte bloco de equivalências supomos $x \notin fvar(\psi)$
$\forall x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \psi$
$\exists x (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \varphi \wedge \psi$
$\forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \varphi \wedge \psi$
$\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \psi$
$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x \varphi \rightarrow \psi$
$\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \varphi \rightarrow \psi$
$\forall x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \forall x \varphi$
$\exists x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \exists x \varphi$

$\forall x \varphi \Vdash \exists x \varphi$
$\forall x \neg \varphi \Vdash \neg \forall x \varphi$
$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \Vdash \forall x (\varphi \vee \psi)$
$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \Vdash \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$

$\exists x \forall y \varphi \Vdash \forall y \exists x \varphi$
$\neg \exists x \varphi \Vdash \exists x \neg \varphi$
$\forall x (\varphi \vee \psi) \Vdash \exists x \varphi \vee \forall x \psi$
$\exists x \varphi \rightarrow \forall x \psi \Vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$
$\exists x (\varphi \wedge \psi) \Vdash \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$

Exercício 1.19 *Prove as equivalências e consequências lógicas dadas acima.*

Mostraremos: $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$.
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação de uma assinatura apropriada (isto é, a assinatura dada contém todos os símbolos não-lógicos que ocorrem em φ). Então pela semântica dos quantificadores e da negação:

$$
\begin{aligned}
I \models \neg\forall x\varphi &\Leftrightarrow I \not\models \forall x\varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ nem para todos os elementos } m \text{ do universo } M \text{ temos que } I_x^m \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um elemento } m \in M \text{ tal que não } I_x^m \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } I_x^m \not\models \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } I_x^m \models \neg\varphi \\
&\Leftrightarrow I \models \exists x\neg\varphi
\end{aligned}
$$

Como I foi uma interpretação arbitrária, segue a equivalência afirmada.

Afirmação: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$.
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação de uma assinatura apropriada, M seja o universo de $\mathcal{M}$. Então pela definição da semântica:

$$
\begin{aligned}
I \models \forall x(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_x^m \models \varphi \wedge \psi \\
&\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_x^m \models \varphi \text{ e } I_x^m \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_x^m \models \varphi, \text{ e para qualquer } m \in M : I_x^m \models \psi \\
&\Leftrightarrow I \models \forall x\varphi \text{ e } I \models \forall x\psi \\
&\Leftrightarrow I \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi
\end{aligned}
$$

Afirmação: $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \Vdash \forall x(\varphi \vee \psi)$
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação de uma assinatura apropriada, M seja o universo de $\mathcal{M}$. Então pela definição da semântica:

$$I \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi \Leftrightarrow I \models \forall x\varphi \text{ ou } I \models \forall x\psi$$

Vamos supor o primeiro caso, $I \models \forall x\varphi$. Então para todo $m \in M : I_x^m \models \varphi$, e portanto também para todo $m \in M$: $I_x^m \models \varphi \vee \psi$, onde ψ é qualquer fórmula. Logo, $I \models \forall x(\varphi \vee \psi)$. Analogamente argumentamos no segundo caso $I \models \forall x\psi$.

Afirmação: $\forall x(\varphi \vee \psi) \nVdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$.
Construimos um contra-exemplo para $\forall x(\varphi \vee \psi) \Vdash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, isto é, uma interpretação I e fórmulas φ e ψ tal que $I \models \forall x(\varphi \vee \psi)$ mas $I \not\models \forall x\varphi$ e $I \not\models \forall x\psi$. Seja $\Sigma = (P)$ uma assinatura contendo um símbolo de relação de aridade 1. Então

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, P^{\mathcal{A}})$, onde $P^{\mathcal{A}}(n) :\Leftrightarrow n$ é par, é uma Σ-estrutura. Então seja φ a fórmula $P(x)$ e ψ seja $\neg P(x)$. Obviamente, para qualquer valoração $\gamma\colon V \to \mathbb{Z}$, $(\mathcal{A}, \gamma) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$. De fato, $(\mathcal{A}, \gamma) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$ sse para todo $m \in \mathbb{Z}$: $(\mathcal{A}, \gamma_x^m) \models \varphi \vee \psi$ sse para todo $m \in \mathbb{Z}$: $(\mathcal{A}, \gamma_x^m) \models \varphi$ ou $(\mathcal{A}, \gamma_x^m) \models \psi$ sse para todo inteiro m: $P(m)$ ou não $P(m)$. Mostre em detalhe que $(\mathcal{A}, \gamma) \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$ é falso!

Agora supomos $x \notin fvar(\psi)$ e afirmamos $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\varphi \vee \psi$.
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação.

$$\begin{aligned} I \models \forall x(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow \text{ para todo } m \in M : I_x^m \models \varphi \vee \psi \\ &\Leftrightarrow \text{ para todo } m \in M : I_x^m \models \varphi \text{ ou } I_x^m \models \psi \\ &\Leftrightarrow \text{ (para todo } m \in M : I_x^m \models \varphi) \text{ ou } I \models \psi \\ &\Leftrightarrow I \models \forall x\varphi \text{ ou } I \models \psi \\ &\Leftrightarrow I \models \forall x\varphi \vee \psi. \end{aligned}$$

Note que na terceira equivalência acima aplicamos o Corolário 1.15. Isto é justificado pelo fato: $\gamma_x^m(y) = \gamma(y)$ para qualquer $y \in fvar(\psi)$, já que x não é variável livre de ψ. Então $I_x^m \models \psi \Leftrightarrow I \models \psi$.

Afirmação: $\forall x(\varphi \vee \psi) \Vdash \exists x\varphi \vee \forall x\psi$
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ um modelo de $\forall x(\varphi \vee \psi)$, ou seja, $I \models \forall x(\varphi \vee \psi)$. Então segue (*): para todo $m \in M$: $I_x^m \models \varphi$ ou $I_x^m \models \psi$. Queremos mostrar que isso implica $I \models \exists x\varphi \vee \forall x\psi$. Basta mostrar: se $I \not\models \exists x\varphi$ então $I \models \forall x\psi$. Supomos então $I \not\models \exists x\varphi$. Isto é, não existe nenhum $m \in M$ tal que $I_x^m \models \varphi$, ou seja, para todo $m \in M$ temos que $I_x^m \not\models \varphi$. Então usando nossa hipótese (*) acima concluimos: para todo $m \in M$: $I_x^m \models \psi$. Isto é, $I \models \forall x\psi$.

Afirmação: Se $x \notin fvar(\psi)$, então $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv \exists x\varphi \to \psi$.
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação tal que $I \models \forall x(\varphi \to \psi)$. Então para todo $m \in M$, $I_x^m \models \varphi \to \psi$. Logo, para todo $m \in M$: (*) $I_x^m \models \varphi$ implica $I_x^m \models \psi$. Para mostrar que $I \models \exists x\varphi \to \psi$ supomos $I \models \exists x\varphi$. Então existe um $n \in M$ tal que $I_x^n \models \varphi$. Como a implicação (*) vale para qualquer $m \in M$, obtemos $I_x^n \models \psi$. Lembre que $x \notin fvar(\psi)$. Pelo Lema da Coincidência (mais especificamente: pelo Corolário 1.15), $I \models \psi$. Logo, $I \models \exists x\varphi$ implica $I \models \psi$, isto é, $I \models \exists x\varphi \to \psi$.
Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ uma interpretação tal que $I \models \exists x\varphi \to \psi$. Isto é, (*) $I \models \exists x\varphi$ implica $I \models \psi$. Supomos que seja $m \in M$ tal que $I_x^m \models \varphi$. Então $I \models \exists x\varphi$. Por (*), obtemos $I \models \psi$ e portanto também $I_x^m \models \psi$ já que $x \notin fvar(\psi)$. Logo, para todo $m \in M$: se $I_x^m \models \varphi$, então $I_x^m \models \psi$. Isto é, para todo $m \in M$: $I_x^m \models \varphi \to \psi$. Logo, $I \models \forall x(\varphi \to \psi)$.

Definição 1.20 *Para uma assinatura Σ, sejam $t, t_1, ...t_n \in Tm(\Sigma)$, $x_1, ..., x_n \in V$, $\varphi \in Fm(\Sigma)$. Denotamos por $t^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$ o termo que resulta do termo t substituindo simultaneamente as variáveis $x_1, ..., x_n$ em t pelos termos $t_1, ..., t_n$, respectivamente. Se $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq fvar(\varphi)$, então, analogamente, $\varphi^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$ denota a fórmula que resulta da substituição simultânea das variáveis livres $x_1, ..., x_n$ em φ pelos termos $t_1, ..., t_n$, respectivamente.*

Essa definição pode ser dada mais formalmente usando a construção indutiva dos termos e das fórmulas. Vamos considerar o caso das fórmulas, ou seja, a definição indutiva de $\varphi^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$. Para simplificar, consideramos apenas o caso de $n = 1$, ou seja φ^t_x.

Seja φ a fórmula atômica $u = v$, onde $u, v \in Tm(\Sigma)$. Então $\varphi^t_x = [u = v]^t_x = [u^t_x = v^t_x]$. (Aqui usamos chaves adicionais para melhorar a legibilidade; note que elas não fazem parte das fórmulas.)
Seja φ a fórmula atômica $R(t_1, ..., t_m)$. Então $\varphi^t_x = R(t_1, ..., t_m)^t_x = R({t_1}^t_x, ..., {t_m}^t_x)$.
Oberve que nos dois casos, a substituição em φ se reduz a substituições em termos.
Seja $\varphi \in \{\bot, \top\}$. Então, $\varphi^t_x = \varphi$.
Agora seja φ uma fórmula complexa. Começamos com o caso $\varphi = \neg\psi$. Então, $\varphi^t_x = [\neg\psi]^t_x = \neg[\psi^t_x]$. Novamente, as chaves adicionais servem apenas para garantir a legibilidade, mas não fazem parte da fórmula.
Seja $\varphi = (\psi\Box\chi)$. Então $(\psi\Box\chi)^t_x = (\psi^t_x\Box\chi^t_x)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.
Finalmente, $\varphi = \exists y\psi$. Então,

$$[\exists y\psi]^t_x = \begin{cases} \exists y[\psi^t_x], \text{ se } x \neq y \\ \exists y\psi, \text{ se } x = y. \end{cases}$$

Analogamente para o caso $\varphi = \forall y\psi$.

Exemplo 1.21 *Seja t o termo $f(x, g(z))$. Então $t^c_z = f(x, g(c))$. Seja φ a fórmula $\forall x\exists y(P(x, y) \wedge f(x, z) = u)$, seja s qualquer termo. Então $\varphi^{ss}_{zu} = \forall x\exists y(P(x, y) \wedge f(x, s) = s)$ e $\varphi^s_x = \varphi$.*

Seja φ a fórmula $\exists xx+x = y$. Uma interpretação de φ na estrutura dos inteiros com adição expressa que (a interpretação, denotação de) do termo y é um número par. Se consideramos φ^t_y, então esperamos que esta nova fórmula agora expressa que o termo t denota um número par. Porém, se consideramos a substituição da variável y por x na fórmula $\varphi = \exists xx + x = y$, então obtemos uma fórmula expressando algo diferente. De fato, $\varphi^x_y = \exists xx + x = x$. Este fenômeno pode surgir quando o termo t na substituição φ^t_y contém uma variável que já ocorre ligada na fórmula φ. Uma substituição $\varphi^{t_0...t_n}_{x_0...x_n}$ é dita *normal* se nenhuma das variáveis que ocorrem nos termos $t_0, ..., t_n$ é ligada (por um quantificador) em φ. Na maioria dos casos consideramos apenas substituições normais.

Lema 1.22 (Lema da Substituição) *Sejam I uma Σ-interpretação, $\varphi \in Fm(\Sigma)$, t, t_1,...,$t_n \in Tm(\Sigma)$, x_1,..., $x_n \in V$ tais que $\varphi^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$ é uma substituição normal. Então*

(i) $I(t^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}) = I^{I(t_1)...I(t_n)}_{x_1...x_n}(t)$. *Isto é, a interpretação do termo $t^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$ em I coincide com a interpretação do termo t em $I^{I(t_1)...I(t_n)}_{x_1...x_n}$. Em outras palavras, os dois termos denotam o mesmo elemento do universo comum das interpretações I e $I^{I(t_1)...I(t_n)}_{x_1...x_n}$.*

(ii) $I \vDash \varphi^{t_1...t_n}_{x_1...x_n} \Leftrightarrow I^{I(t_1)...I(t_n)}_{x_1...x_n} \vDash \varphi$. *Isto é, a semântica (valor-verdade) de $\varphi^{t_1...t_n}_{x_1...x_n}$ referente à interpretação I coincide com a semântica da fórmula φ referente à interpretação $I^{I(t_1)...I(t_n)}_{x_1...x_n}$.*

Demonstração. (i), (ii) se prova por indução em termos $t \in Tm(\Sigma)$, em fórmulas $\varphi \in Fm(\Sigma)$, respectivamente. Consideramos aqui apenas o passo indutivo de (ii), para o caso $\varphi = \exists y \psi$. Os outros casos deixamos como exercício. Consideramos a substituição de apenas uma variável. O caso geral se prova do mesmo jeito. Primeiro, supomos $x \neq y$.

$$
\begin{aligned}
I \vDash \varphi^t_x &\Leftrightarrow I \vDash [\exists y \psi]^t_x \\
&\Leftrightarrow I \vDash \exists y [\psi^t_x] \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } I^m_y \vDash \psi^t_x \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } (I^m_y)^{I^m_y(t)}_x \vDash \psi, \text{ por hypótese da indução} \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } I^{mI(t)}_{yx} \vDash \psi, \text{ pelo Lema da Coincidência} \\
&\Leftrightarrow \text{ existe um } m \in M \text{ tal que } (I^{I(t)}_x)^m_y \vDash \psi \\
&\Leftrightarrow I^{I(t)}_x \vDash \exists y \psi \\
&\Leftrightarrow I^{I(t)}_x \vDash \varphi.
\end{aligned}
$$

Note que o Lema da Coincidência dá $I^m_y(t) = I(t)$ já que a substituição é normal e portanto y não ocorre em t.
Agora, seja $x = y$. Então $\varphi^t_x = [\exists y \psi]^t_x = [\exists y \psi]^t_y = \exists y \psi = \varphi$ e, novamente pelo Lema da Coincidência, $I^t_x \vDash \varphi \Leftrightarrow I \vDash \varphi$, já que $x = y \notin fvar(\exists y \psi)$. Logo, a afirmação segue também neste caso. Q.E.D.

Exemplo 1.23 *Seja $\Sigma = (c, +)$ e t o termo $x + y$. Consideramos a Σ-estrutura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, c^{\mathbb{Z}}, +^{\mathbb{Z}})$, onde $c^{\mathbb{Z}} = 0 \in \mathbb{Z}$ e $+^{\mathbb{Z}}$ é a adição nos números inteiros. Isto é, $\mathcal{A}$*

é o grupo aditivo dos números inteiros. Seja $\gamma \in \mathbb{Z}^V$ *tal que* $\gamma(x) = 1$, $\gamma(y) = 4$, *e* $I = (\mathcal{A}, \gamma)$. *Então* $I(t_x^c) = I([x+y]_x^c) = I(c+y) = I(c) +^{\mathcal{A}} \gamma(y) = 0 +^{\mathcal{A}} 4 = 4$. *Por outro lado,* $I_x^{I(c)}(t) = I_x^0(x+y) = I_x^0(x) +^{\mathcal{A}} I_x^0(y) = 0 +^{\mathcal{A}} \gamma(y) = 4$. *Isto é,* $I(t_x^c) = I_x^{I(c)}(t)$, *conforme (i) do Lema da Substituição.*
Agora seja φ *a* Σ*-fórmula* $x + y = y$. *Então, com* $I = (\mathcal{A}, \gamma)$, *temos que* $(\mathcal{A}, \gamma_x^{I(c)}) \vDash x + y = y \Leftrightarrow \gamma_x^0(x) +^{\mathcal{A}} \gamma_x^0(y) = 0 +^{\mathcal{A}} 4 = 4 \Leftrightarrow I(c) +^{\mathcal{A}} I(y) = I(y) \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \gamma) \vDash c + y = y \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \gamma) \vDash [x + y = y]_x^c$.

Lema 1.24 (Renomeação de variáveis ligadas) *Para qualquer* $\varphi \in Fm(\Sigma)$ *temos que* $\forall x\varphi \equiv \forall y[\varphi_x^y]$ *e* $\exists x\varphi \equiv \exists y[\varphi_x^y]$, *se* y *é uma variável que não ocorre em* φ.

Demonstração. Mostramos o caso $\forall x\varphi \equiv \forall y[\varphi_x^y]$, o outro se prova analogamente. Seja $I = (\mathcal{M}, \beta)$ uma Σ-interpretação.

$$\begin{aligned}
I \vDash \forall x\varphi &\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_x^m \vDash \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_x^{I_y^m(y)} \vDash \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : (I_y^m)_x^{I_y^m(y)} \vDash \varphi \\
&\Leftrightarrow \text{ para qualquer } m \in M : I_y^m \vDash \varphi_x^y \\
&\Leftrightarrow I \vDash \forall y[\varphi_x^y]
\end{aligned}$$

Na terceira equivalência aplicamos o Lema da Coincidência: as interpretações I e I_y^m coincidem em todos os símbolos e variáveis livres que ocorrem em φ já que y não ocorre em φ, por hipótese. A quarta equivalência é uma instância do Lema de Substituição. Q.E.D.

Lema 1.25 *Seja* $\varphi \in Fm(\Sigma)$ *e* $fvar(\varphi) = \{x_1, ..., x_n\}$. φ *é válida sse* $\forall x_1 ... \forall x_n\varphi$ *é válida.* φ *é satisfatível sse* $\exists x_1 ... \exists x_n\varphi$ *é satisfatível.*

Demonstração. Provamos a segunda afirmação e deixamos a primeira como exercício. φ é satisfatível sse existe uma Γ-estrutura $\mathcal{M}$ (com $\Gamma \supseteq \Sigma$) e uma valoração $\gamma \in M^V$ tal que (*): $(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \varphi$. A valoração γ mapea as variáveis $x_1, ..., x_n$ para indivíduos $m_1, ..., m_n \in M$, respectivamente. Então $\gamma(y) = \gamma_{x_1 ... x_n}^{m_1 ... m_n}(y)$ para toda $y \in fvar(\varphi)$. Pelo Lema da Coincidência (pelo Corolário 1.15), (*) é equivalente a dizer que existem $m_1, ..., m_n \in M$ tais que $(\mathcal{M}, \gamma_{x_1 ... x_n}^{m_1 ... m_n}) \vDash \varphi$. Aplicando sucessivamente a semântica do quantificador existencial verificamos que isso é equivalente a $(\mathcal{M}, \gamma) \vDash \exists x_1 ... \exists x_n\varphi$, isto é, à satisfatibilidade de $\exists x_1 ... \exists x_n\varphi$. Q.E.D.

Definição 1.26 *Uma fórmula está em forma prenexa (ou simplesmente: é prenexa) se tem a forma $Q_1x_1...Q_nx_n\psi$ onde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $x_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, e ψ é uma fórmula sem quantificadores. Dizemos que uma fórmula φ está limpa se nenhuma variável ocorre ao mesmo tempo livre e ligada em φ, e nenhuma variável ocorre ligada em mais de uma posição em φ.*

Exemplo 1.27 *As fórmulas $\exists x\forall y(R(x,y) \wedge P(c,x))$, $R(c,x)$, $\forall x\forall y\exists z(f(x,y) = c \to P(z))$ estão em forma prenexa e estão limpas. $\exists x\forall yR(x,y) \wedge P(c,x)$ não é prenexa nem está limpa. $P(x) \to \forall yR(y)$ também não está em forma prenexa mas está limpa. A fórmula $\forall x(P(x) \to \exists yR(x,y))$ está limpa mas não está em forma prenexa. $\forall xP(x) \to \exists yR(x,y)$ e $\forall xP(x) \to \exists xR(x,c)$ não estão em forma prenexa nem estão limpas.*

Lema 1.28 *Seja Σ uma assinatura. Para qualquer fórmula $\varphi \in Fm(\Sigma)$ existe uma fórmula $\psi \in Fm(\Sigma)$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e ψ está limpa e em forma prenexa.*

Observação 1.29 *Não apresentamos uma demonstração formal do Lema 1.28 (prova por indução nas fórmulas). Mas considerando as equivalências lógicas apresentadas acima, e o resultado sobre a renomeação de variáveis ligadas Lema 1.24, fica intuitivamente claro que qualquer fórmula podemos transformar em uma fórmula logicamente equivalente que está limpa e em forma prenexa. Neste processo (e em outros processos de gerar fórmulas logicamente equivalentes) aproveitamos do fato que equivalência lógica é uma relação de congruência entre fórmulas. Isto é, $\equiv \subseteq Fm(\Sigma) \times Fm(\Sigma)$ é uma relação de equivalência que adicionalmente satisfaz o seguinte: Se $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\varphi_2 \equiv \psi_2$, então $\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$, $\forall x\varphi_1 \equiv \forall x\psi_1$, $\exists x\varphi_1 \equiv \exists x\psi_1$, e $(\varphi_1 \Box \varphi_2) \equiv (\psi_1 \Box \psi_2)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$. Deixamos a prova como um exercício.*

Exemplo 1.30 *Seja $\varphi = \forall xR(x,y) \to \exists x(P(x,y) \wedge \forall yf(y) = c)$. Por vários motivos, φ não está limpa. Vamos apresentar uma fórmula ψ tal que $\psi \equiv \varphi$ e ψ está limpa. Basta renomear as variáveis ligadas x e y na segunda subfórmula imediata. Isto dá, por exemplo, $\psi = \forall xR(x,y) \to \exists u(P(u,y) \wedge \forall zf(z) = c)$.*

Definição 1.31 *Seja $\varphi \in Fm(\Sigma)$ uma fórmula limpa e prenexa. O algoritmo seguinte produz a partir de φ uma fórmula prenexa que não contém quantificadores existenciais. Essa fórmula é chamada de forma de Skolem de φ.*

INPUT: φ.
WHILE "existe um quantificador existencial em φ" DO
Seja $\varphi = \forall x_1...\forall x_n\exists y\psi$, onde ψ é uma fórmula prenexa. Isto é, $\exists y$ é a primeira ocorrência de um quantificador existencial em φ. $n = 0$ significa que o bloco de

quantificadores $\forall x_1...\forall x_n$ é vazio e φ começa com o quantificador $\exists y$. Seja f um novo símbolo de função (ou seja, um símbolo de função que não ocorre em φ) de aridade n. Então colocamos $\varphi := \forall x_1...\forall x_n[\psi_y^{f(x_1,...,x_n)}]$
END
OUTPUT: φ

Exemplo 1.32 $\varphi = \exists x\forall y\forall z\exists u\exists v(P(y,c) \to (R(y,x,c) \vee f(z) = v \vee P(z,u)))$. *Obviamente, φ está limpa e em forma prenexa. Os passos seguintes produzem sucessivamente a forma de Skolem de φ conforme o algoritmo acima.*
$\exists x\forall y\forall z\exists u\exists v(P(y,c) \to (R(y,x,c) \vee f(z) = v \vee P(z,u)))$
$\forall y\forall z\exists u\exists v(P(y,c) \to (R(y,a,c) \vee f(z) = v \vee P(z,u)))$
$\forall y\forall z\exists v(P(y,c) \to (R(y,a,c) \vee f(z) = v \vee P(z,g(y,z))))$
$\forall y\forall z(P(y,c) \to (R(y,a,c) \vee f(z) = h(y,z) \vee P(z,g(y,z))))$

Observe que o algoritmo baseia-se na seguinte intuição. Uma fórmula $\forall x\exists y\varphi$ descreve, de certa forma, uma função, a dizer, 'a função que atribui a qualquer x um elemento y tal que a propriedade φ é satisfeita'. Na verdade, tal função não está bem definida já que aquela atribuição de y para x não é necessariamente única, podem existir vários elementos y para um dado elemento x tal que a propriedade φ é satisfeita. Este é basicamente o motivo pelo qual a fórmula gerada no algoritmo não é logicamente equivalente à fórmula original, mas tem a propriedade: 'é satisfatível sse a fórmula original é satisfatível'. De fato, a forma de Skolem de φ geralmente não é mais logicamente equivalente a φ. Porém, o algoritmo preserva a (in-) satisfatibilidade de φ como mostra o resultado seguinte.

Teorema 1.33 *Sejam $\varphi \in Fm(\Sigma)$ e φ' a forma de Skolem de φ (conforme algoritmo acima). Então φ é satisfatível sse φ' é satisfatível. Ademais, todo modelo de φ' também é um modelo de φ.*

Demonstração. Seja $\varphi = \forall x_1...\forall x_n\exists y\psi$, onde ψ é prenexa. Então, um passo do laço WHILE produz a fórmula $\varphi' := \forall x_1...\forall x_n[\psi_y^{f(x_1,...,x_n)}]$. Seja $I = (\mathcal{M}, \gamma)$ tal que $I \vDash \varphi'$. Então para quaisquer $m_1,...,m_n \in M$, $I_{x_1...x_n}^{m_1...m_n} \vDash \psi_y^{f(x_1,...,x_n)}$. Pelo Lema de Substituição, para todos os $m_1,...,m_n \in M$ existe um $m \in M$ tal que $I_{x_1...x_n y}^{m_1...m_n m} \vDash \psi$, a dizer: $m = I_{x_1...x_n}^{m_1...m_n}(f(x_1,...,x_n)) = f^{\mathcal{M}}(m_1,...,m_n)$. Pela semântica dos quantificadores, $I \vDash \varphi$. Logo, todo modelo de φ' é modelo de φ. Isto é, $\varphi' \Vdash \varphi$.
Agora supomos que $J = (\mathcal{A}, \beta)$ seja uma Σ-interpretação tal que $J \vDash \varphi$. Então para todos os $a_1,...,a_n \in A$ existe um $a \in A$ tal que $J_{x_1...x_n y}^{a_1...a_n a} \vDash \psi$. Para uma assinatura $\Gamma \supseteq \Sigma$, com novo símbolo de função $f \in \Gamma$, definimos uma Γ-interpretação $I = (\mathcal{A}', \beta)$ sobre o universo original A onde o novo símbolo f é

interpretado por uma função $f^{\mathcal{A}'}$ apropriada: para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$ selecionamos um $a \in A$ particular (podem existir muitos) tal que $J^{a_1...a_n a}_{x_1...x_n y} \models \psi$ e definimos $f^{\mathcal{A}'}(a_1, ..., a_n) := a$. Isto é, I é exatamente como J com a única diferença que I contém a função adicional $f^{\mathcal{A}'}$. Então, para todos os $a_1, ..., a_n \in A$: $I^{a_1...a_n f^{\mathcal{A}}(a_1,...,a_n)}_{x_1...x_n y} \models \psi$. Pelo Lema de Substituição, isso é equivalente a: para todos os $a_1, ..., a_n \in A$, $I^{a_1...a_n}_{x_1...x_n} \models \psi^{f(x_1,...,x_n)}_y$. Isto é, $I \models \forall x_1 ... \forall x_n [\psi^{f(x_1,...,x_n)}_y]$. Logo, $\varphi' = \forall x_1 ... \forall x_n [\psi^{f(x_1,...,x_n)}_y]$ é satisfatível. Q.E.D.

Exercício 1.34 *Seja $\Sigma = (R)$, $ar(R) = 2$, e seja $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$ uma ordem linear (mais correto seria dizer: a relação $R^{\mathcal{M}} \subseteq M \times M$ é uma ordem linear no conjunto M). Isto é, $\mathcal{M}$ satisfaz os axiomas seguintes:*

(a) $\forall x R(x, x)$
(b) $\forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y)$
(c) $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
(d) $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$.
$R^{\mathcal{M}}$ é dita densa se $\mathcal{M}$ satisfaz adicionalmente o axioma
(e) $\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge \neg x = y) \rightarrow \exists z (\neg z = x \wedge \neg z = y \wedge R(x, z) \wedge R(z, y)))$.

Seja ψ essa sentença dada em (e), e seja Φ o conjunto dos quatro axiomas (a)–(d). Mostre que ψ é independente de Φ, isto é $\Phi \not\models \psi$ e $\Phi \not\models \neg\psi$.
Forme uma forma prenexa de ψ e uma forma de Skolem. Interprete informalmente essa forma de Skolem.
Se a estrutura $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$ satisfaz apenas os axiomas (a)–(c), então a relação $R^{\mathcal{M}}$ é dita uma ordem parcial (em M). Apresente algumas estruturas que são parcialmente ordenadas, ou seja, que satisfazem os axiomas (a)–(c).

Uma forma prenexa da fórmula em (e) acima é a seguinte (conforme equivalência lógica apresentada no Exemplo 1.18):

$\forall x \forall y \exists z ((R(x, y) \wedge \neg x = y) \rightarrow (\neg z = x \wedge \neg z = y \wedge R(x, z) \wedge R(z, y)))$.
Note que não podemos colocar $\exists z$ como primeiro quantificador no bloco dos quantificadores porque os domínios dos quantificadores $\forall x$ e $\forall y$ não acabam antes do $\exists z$.

1.4 Teoria de Herbrand

Jaques Herbrand, Kurt Gödel, Thoralf Skolem $\approx$ 1930

A Lógica de Predicados, infelizmente, não é decidível. Isto significa que não existe nenhum procedimento efetivo (algoritmo) que para qualquer assinatura Σ e qualquer fórmula $\varphi \in Fm(\Sigma)$ retorna uma resposta 'sim' caso φ é válida, e 'não' caso que φ não é válida. O problema (chamado de 'Entscheidungsproblem', problema de decisão) foi posto por David Hilbert e Wilhelm Ackermann em 1928 e resolvido negativamente por Alan Turing e Alonzo Church em 1936. Este problema, e muitas motivações da lógica moderna em geral, têm origens em idéias de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que já pensava numa linguagem formal e um cálculo (máquina) capaz de decidir os valores-verdade de todos os enunciados matemáticos. Em geral, um subconjunto $A \subseteq M$ de um conjunto contável M é dito decidível (ou recursivo, computável) se sua função característica $\chi_A \colon M \to \{0, 1\}$, $\chi_A(a) = 1 \Leftrightarrow a \in A$, é computável (isto é, existe uma máquina de Turing, um programa de computador que computa χ_A). O problema de decisão da Lógica de Predicados pode ser formalizado pelo conjunto $taut(\Sigma) = \{\varphi \in Fm(\Sigma) \mid \varphi \text{ é válida}\}$. Sabe-se que este conjunto é indecidível em geral. Porém, existem certas assinaturas simples para as quais o problema é decidível.
Um subconjunto (problema) A de um conjunto contável M é dito semi-decidível se existe um algoritmo que semi-decide A, isto é, um algoritmo que para qualquer entrada $a \in M$ para depois de um número finito de passos e retorna resposta 'sim' caso que $a \in M$, e não para nunca no caso contrário.

Exercício 1.35 *(i) O conjunto $A \subseteq M$ é decidível sse A e seu complemento $M \setminus A$ são semi-decidíveis.*
(ii) O problema $taut(\Sigma)$ é decidível sse o problema $sat(\Sigma) = \{\varphi \in Fm(\Sigma) \mid \varphi$ é satisfatível $\}$ é decidível.

Relembre que na Lógica Proposicional, os problemas de validade, satisfatibilidade, insatisfatibilidade são decidíveis (a construção de uma tabela-verdade, por exemplo, constitui um algoritmo que decide estes problemas). A Teoria de Herbrand representa uma tentativa de reduzir o problema de decisão da Lógica de Predicados (com certas restrições) para um problema de decisão na Lógica Proposicional. O principal resultado da teoria mostra que a busca por modelos que satisfazem uma dada fórmula pode ser reduzida para a busca por modelos específicos, canônicos: a dizer, por modelos de Herbrand. Estes modelos formam uma espécie de modelos de termos, ou seja, modelos cujo universo é dado por termos da linguagem. Na Teoria de Herbrand trabalhamos com 'Lógica de Predicados sem identidade', isto é, excluímos o símbolo da identidade '=' da linguagem de objeto (consequentemente, nesta Lógica de Predicados reduzida não existem fórmulas atômicas da forma $t_1 = t_2$). O motivo é o seguinte. O objetivo é achar um modelo para uma sentença φ que está em forma de Skolem. A idéia é construir um 'modelo de termos' para φ onde os indivíduos do universo são termos sem variáveis, gerados a partir de termos que ocorrem em φ. Então cada termo sem variáveis é interpretado por si mesmo: se $I = (\mathcal{M}, \beta)$ é o modelo e $t \in Tm(\Sigma)$ é sem variáveis, então $I(t) = t^{\mathcal{M}} = t \in M$. Agora fica claro porque precisamos evitar fórmulas da forma $t_1 = t_2$. Considere, por exemplo, $c = f(a)$. Então, pela definição da semântica, $I \vDash t_1 = t_2 \Leftrightarrow I(t_1) = I(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$. Mas $t_1 = c \neq f(a) = t_2$. De fato, c e $f(a)$ são objetos sintáticos diferentes.

Nesta seção consideramos uma Lógica de Predicados 'reduzida'. Supomos que o símbolo da identidade '=' não faz parte da linguagem de objeto (e, portanto, não existem fórmulas do tipo $t_1 = t_2$).

Definição 1.36 (Universo e estrutura de Herbrand) *Sejam Σ uma assinatura e $\varphi \in Fm(\Sigma)$ uma sentença em forma de Skolem. Supomos que todos os símbolos de Σ ocorram em φ. O universo de Herbrand $D(\varphi)$ de φ é o menor conjunto que contém os símbolos de constantes de φ*[5] *e é fechado sob a condição seguinte: Se f é um símbolo de função que ocorre em φ e $t_1, ..., t_n \in D(\varphi)$, então $f(t_1, ..., t_n) \in D(\varphi)$.*
Uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ é dita estrutura de Herbrand para φ se o universo M de $\mathcal{M}$ é $D(\varphi)$ e para cada símbolo de função f que ocorre em φ (ou seja, para cada $f \in \mathcal{F}$ de Σ), com $ar(f) = n$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in M = D(\varphi)$ temos que $f^{\mathcal{M}}(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ...t_n)$. As interpretações dos símbolos de relações são arbitrárias.

Exemplo 1.37 *Sejam*

$$\varphi = \forall x \forall y (P(x) \to Q(f(x, y), g(y)))$$
$$\psi = \forall x \forall y \forall z ((P(x) \vee P(f(x))) \to (Q(f(c), x) \wedge P(c))).$$

A sentença φ não contém símbolos de constantes. Então temos que escolher um novo símbolo de constante, p. ex.: a, e obtemos

$$D(\varphi) = \{a, f(a, a), g(a), f(g(a), a), g(f(a, a)), g(f(a, g(a)), f(g(a), a), ...\}.$$

No caso da sentença ψ não precisamos introduzir nenhum novo símbolo de constante, temos

$$D(\psi) = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), ...\} = \{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

[5] Se φ não contem símbolos de constantes, então selecionamos um novo símbolo de constante, digamos: a, e consideramos a assinatura Σ estendida por a.

Uma estrutura de Herbrand para φ é dada por uma Σ-estrutura $\mathcal{M}$ com $\Sigma = (a, f, g, P, Q)$[6] *e $\mathcal{M} = (D(\varphi), a^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}})$, onde*

$$\begin{aligned} &a^{\mathcal{M}} = a, \\ &f^{\mathcal{M}}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2), \\ &g^{\mathcal{M}}(t) = g(t) \end{aligned}$$

para quaisquer termos $t, t_1, t_2 \in D(\varphi)$. Os predicados $P^{\mathcal{M}} \subseteq D(\varphi)$ e $Q^{\mathcal{M}} \subseteq D(\varphi) \times D(\varphi)$ são definidos de forma arbitrária. Então, para uma interpretação $I = (\mathcal{M}, \gamma)$, onde $\gamma \in D(\varphi)^V$ é qualquer valoração, temos que $I(a) = a^{\mathcal{M}} = a$, $I(f(t)) = f^{\mathcal{M}}(I(t)) = f(t)$ e $I(g(t_1, t_2)) = g^{\mathcal{M}}(I(t_1), I(t_2)) = g(t_1, t_2)$. Isto é, cada termo t sem variáveis é interpretado por si mesmo: $I(t) = t^{\mathcal{M}} = t \in M = D(\varphi)$.

O universo de Herbrand $D(\varphi)$ é dado por todos os termos que não contêm variáveis e que podem ser construidos a partir dos símbolos não-lógicos ocorrendo em φ (eventualmente com um extra símbolo de constante, caso que φ não contenha símbolos de constantes). Segue que $D(\varphi)$ é contavelmente infinito se pelo menos um símbolo de função de aridade ≥ 1 ocorre em φ. Desta forma, a interpretação dos símbolos de funções e constantes numa estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ é unicamente determinada: se f é símbolo de função de aridade n ocorrendo em φ, então a aplicação da função $f^{\mathcal{M}}$ para termos $t_1, ..., t_n \in D(\varphi)$ é simplesmente o termo $f(t_1, ..., t_n) \in D(\varphi)$. Porém, a definição da estrutura de Herbrand não diz nada a respeito da interpretação dos símbolos de relação. De fato, os símbolos de relação podem ser interpretados de forma arbitrária. Dependendo desta interpretação, uma estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ para uma sentença φ pode ser modelo de φ ou pode não ser modelo de φ. Dizemos que uma estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ para φ é um *modelo de Herbrand* de φ se $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Exemplo 1.38 *Consideramos a sentença φ e a estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ com universo $M := D(\varphi)$ do Exemplo 1.37 anterior. Se $P^{\mathcal{M}} = \varnothing$, então $\mathcal{M} \vDash \varphi$, independentemente da interpretação do símbolo de relação Q. Se $Q^{\mathcal{M}}(t_1, t_2) :\Leftrightarrow t_1$ é o termo $f(t_3, t_4)$ e t_2 é o termo $g(t_4)$, para quaisquer $t_3, t_4 \in M = D(\varphi)$, então também $\mathcal{M} \vDash \varphi$, independentemente da definição do predicado $P^{\mathcal{M}}$. Agora definimos $P^{\mathcal{M}}(t) :\Leftrightarrow t$ é o termo a, e $Q^{\mathcal{M}}(t_1, t_2) :\Leftrightarrow t_1$ é o termo $f(t_3, t_4)$ e t_2 é o termo $g(t_4)$ para quaisquer $t_3, t_4 \in M$ com $t_3 \neq a$. Então $\mathcal{M} \nvDash \varphi$ já que $\mathcal{M} \vDash P(a)$ e $\mathcal{M} \nvDash Q(f(a, t), g(t))$, para qualquer termo t sem variáveis.*

Teorema 1.39 *Seja φ uma sentença em forma de Skolem. Então φ é satisfatível sse φ possui um modelo de Herbrand.*

[6] Relembre que aplicamos notações simplificadas para assinaturas.

Demonstração. A volta do Teorema é trivial: se φ possui um modelo (de Herbrand) então φ é satisfatível por definição. Supomos que φ seja satisfatível, ou seja, $\mathcal{A} \vDash \varphi$ para alguma estrutura $\mathcal{A}$. Se φ não tem símbolos de constantes, então escolhemos um novo símbolo a e definimos $a^{\mathcal{A}} := m \in A$, onde m é algum elemento arbitrário do universo de $\mathcal{A}$ (isso não altera a propriedade de $\mathcal{A}$ ser modelo de φ). Construimos um modelo de Herbrand $\mathcal{M}$ para φ. O universo M está determinado por $D(\varphi)$. Falta apenas determinar ainda a interpretação dos símbolos de relações em $\mathcal{M}$. Para qualquer símbolo de relação R de aridade n que ocorre em φ definimos para quaisquer $t_1, ..., t_n \in D(\varphi)$: $R^{\mathcal{M}}(t_1, ..., t_n) :\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(I(t_1), ..., I(t_n))$, onde $I = (\mathcal{A}, \beta)$, β qualquer valoração $\beta \colon V \to A$. Note que a definição particular de β é irrelevante já que os termos não contêm variáveis. Isto justifica escrever $t_i^{\mathcal{A}} := I(t_i)$. Então: $R^{\mathcal{M}}(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, ..., t_n^{\mathcal{A}})$.
Agora mostramos a afirmação por indução no número n dos quantificadores (que são todos universais) que ocorrem em φ. No caso da base $n = 0$, φ é uma fórmula formada apenas por fórmulas atômicas do tipo $R(t_1, .., t_m)$, $\bot$, $\top$ e conectivos proposicionais $\neg, \vee, \wedge, \to$. Agora segue por indução na construção de φ que $\mathcal{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi$.[7] No passo indutivo supomos que a afirmação seja verdadeira para todas as sentenças (em forma de Skolem) com n quantificadores e φ tenha $n + 1$ quantificadores e $\varphi = \forall x \chi$. Logo, χ tem $n - 1$ quantificadores. Note que não podemos aplicar a hipótese da indução diretamente a χ já que essa fórmula não é mais sentença. Como $\mathcal{A} \vDash \varphi$, temos que para qualquer $m \in A$: $I = (\mathcal{A}, \beta_x^m) \vDash \chi$ (de novo, a escolha particular de β é irrelevante já que x é a única variável livre de χ). Em particular, para aqueles $m \in A$ com $m = I(t) = t^{\mathcal{A}}$ e $t \in D(\varphi)$ temos que $I = (\mathcal{A}, \beta_x^m) \vDash \chi$. Pelo Lema de Substituição, $I = (\mathcal{A}, \beta) \vDash \chi_x^t$ para qualquer $t \in D(\varphi)$. Isto é, $\mathcal{A} \vDash \chi_x^t$ para todo $t \in D(\varphi)$; note que χ_x^t é sentença para qualquer $t \in D(\varphi)$. Agora podemos aplicar a hipótese da indução que dá $\mathcal{M} \vDash \chi_x^t$ para todos os $t \in D(\varphi)$. Novamente pelo Lema de Substituição, $(\mathcal{M}, \gamma_x^t) \vDash \chi$ para todos os $t \in M = D(\varphi)$, onde $\gamma \colon V \to M$ é qualquer valoração. Aqui aproveitamos do fato que a interpretação de $t \in Tm(\Sigma)$ na estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ é o próprio termo t: $t^{\mathcal{M}} = t \in M$. Logo, $\mathcal{M} \vDash \forall x \chi$, isto é, $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Q.E.D.

Relembre que o objetivo da Teoria de Herbrand é reduzir (em certo sentido) problemas de decisão da Lógica de Predicados para problemas que podem ser tratados com métodos da Lógica Proposicional. A seguir listamos aquelas transformações de fórmulas que são relevantes para esta abordagem. Note que as transformações 1.–4. preservam a satisfatibilidade (insatisfatibilidade) das fórmulas envolvidas. Seja $\varphi \in Fm(\Sigma)$ qualquer fórmula (sem identidade).

[7] Isto é, para qualquer subfórmula ψ de φ segue indutivamente: $\mathcal{A} \vDash \psi \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi$. Em particular obtemos: $\mathcal{M} \vDash \varphi$, já que $\mathcal{A} \vDash \varphi$ por hipótese.

1. Ache uma forma limpa φ_1 de φ tal que $\varphi_1 \equiv \varphi$ (conforme Lema 1.24).
2. Sejam $fvar(\varphi_1) = \{x_1, ..., x_n\}$. Considere a sentença $\varphi_2 = \exists x_1 ... \exists x_n \varphi_1$. Então φ_2 é satisfatível sse φ_1 é satisfatível, conforme Lema 1.25.
3. Ache uma forma prenexa φ_3 de φ_2 tal que $\varphi_3 \equiv \varphi_2$, conforme Lema 1.28.
4. Gere uma forma de Skolem φ_4 de φ_3, conforme algoritmo apresentado em Definição 1.31. Então φ_4 é satisfatível sse φ_3 é satisfatível, conforme Teorema 1.33
5. φ_4 tem a forma $\forall y_1 ... \forall y_n \psi$ onde ψ é uma fórmula sem quantificadores, chamada de mátrix de φ_4. Note que ψ é formada apenas por fórmulas atômicas do tipo $R(t_1, ..., t_n)$, $\perp$ e $\top$ e os conectivos proposicionais $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$. As fórmulas $\perp$ e $\top$ ainda podemos substituir por fórmulas equivalentes (isto é, por uma contradição, tautologica, respectivamente) que contém apenas $\neg, \vee, \wedge$. Então podemos achar a FNC e FND de ψ conforme definidas na Lógica Proposicional. Aqui consideramos as súbfórmulas atômicas $R(t_1, ..., t_n)$ como variáveis de proposição.

Exemplo 1.40 *(a) Seja* $\varphi = P(x) \rightarrow \exists x(R(x, y) \wedge \forall y Q(y, c))$.
1. $\varphi_1 = P(x) \rightarrow \exists z(R(z, y) \wedge \forall u Q(u, c))$ *está limpa*
2. $\varphi_2 = \exists x \exists y(P(x) \rightarrow \exists z(R(z, y) \wedge \forall u Q(u, c)))$ *é uma sentença, isto é, fórmula sem variáveis livres.*
3. Conforme Observação 1.29, obtemos uma forma limpa e prenexa φ_3*:*

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv \exists x \exists y \exists z(P(x) \rightarrow (R(z, y) \wedge \forall u Q(u, c))) \\ &\equiv \exists x \exists y \exists z \forall u(P(x) \rightarrow (R(z, y) \wedge Q(u, c))) = \varphi_3. \end{aligned}$$

4. $\varphi_4 = \forall u(P(a) \rightarrow (R(c, b) \wedge Q(u, c)))$ *é forma de Skolem de* φ_3.
5. $P(a) \rightarrow (R(c, b) \wedge Q(u, c))$ *é a matrix de* φ_4*. As variáveis que ocorrem na fórmula (neste caso: apenas* u*) podem ser substituidas por termos sem variáveis de um universo de Herbrand. Os resultados dessas substituições são sentenças. A idéia da Teoria de Herbrand é interpretar tais sentenças (sem quantificadores e sem identidade) como fórmulas da Lógica Proposicional onde as súbfórmulas atômicas* $P(a)$*,* $R(c, b)$ *e* $Q(t, c)$ *(*t *um termo sem variáveis) são interpretadas como 'variáveis proposicionais' da Lógica Proposicional. A FNC daquela matrix é:* $(\neg P(a) \vee R(c, b)) \wedge (\neg P(a) \vee Q(u, c))$ *com conjunto de 'cláusulas'* $\{\{\neg P(a), R(c, b)\}, \{\neg P(a), Q(u, c)\}\}$

(b) Seja $\varphi = \forall x \exists y(P(x, c) \vee R(f(c), y) \rightarrow \exists x P(x, y))$.
1. $\varphi_1 = \forall x \exists y(P(x, c) \vee R(f(c), y) \rightarrow \exists z P(z, y))$ *está limpa.*
2. $\varphi_2 = \varphi_1$ *é sentença.*
3. $\varphi_3 = \forall x \exists y \exists z(P(x, c) \vee R(f(c), y) \rightarrow P(z, y))$ *está limpa e em forma prenexa.*
4. $\varphi_4 = \forall x(P(x, c) \vee R(f(c), g(x)) \rightarrow P(h(x), g(x)))$ *é forma de Skolem de* φ_3.
5. $(P(x, c) \vee R(f(c), g(x))) \rightarrow P(h(x), g(x))$ *é a matrix de* φ_4*. Interpretada*

como fórmula da Lógica Proposicional, podemos achar a FNC com correspondente conjunto de cláusulas da mesma.

Corolário 1.41 (Teorema de Löwenheim-Skolem) *Qualquer fórmula satisfatível possui um modelo contável (ou seja, um modelo com universo enumerável).*

Demonstração. Sabemos que qualquer fórmula satisfatível φ pode ser transformada em uma sentença satisfatível φ' que está em forma de Skolem. Vimos que essas transformações são de tal forma que os modelos de φ' também são modelos de φ, isto é, $\varphi \Vdash \varphi'$ (Teorema 1.33). Como φ' é satisfatível, φ' tem um modelo de Herbrand que também é modelo de φ (Teorema 1.39). O universo desse modelo é $D(\varphi')$, um conjunto de termos (sem variáveis). Este conjunto é contável (pois o conjunto dos strings finitos sobre um alfabeto finito é sempre contável). Q.E.D.

Definição 1.42 (Expansão de Herbrand) *Seja $\varphi = \forall y_1 ... \forall y_n \psi$ uma sentença em forma de Skolem. A expansão de Herbrand $E(\varphi)$ é definida como $E(\varphi) := \{\psi^{t_1...t_n}_{y_1...y_n} \mid t_1, ..., t_n \in D(\varphi)\}$.*

A expansão de Herbrand $E(\varphi)$, para $\varphi = \forall y_1 ... \forall y_n \psi$, é dada por todas as fórmulas que resultam por todas as substituições possíveis de variáveis livres em ψ por elementos de $D(\varphi)$. Note que os elementos de $E(\varphi)$ ou são sentenças atômicas da forma $R(t_1, ..., t_m)$ ou são sentenças mais complexas construidas por sentenças atômicas e conectivos proposicionais, como por exemplo $R(a, f(c)) \vee \neg P(c)$. As sentenças atômicas $R(t_1, ..., t_m)$ podem ser vistas como 'variáveis' da Lógica Proposicional. Atribuindo valores-verdade a essas 'variáveis' podemos calcular os valores-verdade das sentenças complexas que ocorrem em $E(\varphi)$ conforme a semântica dos conectivos proposicionais da Lógica Proposicional. Desta forma, as sentenças de $E(\varphi)$ podem ser vistas como fórmulas da Lógica Proposicional e interpretadas semanticamente como na Lógica Proposicional por valores-verdade.

Exemplo 1.43 *(a) Seja $\varphi = \neg\forall x P(x, y) \to \neg\exists x R(x, c)$.*
1. $\varphi_1 = \neg\forall x P(x, y) \to \neg\exists z R(z, c)$ está limpa, $\varphi_1 \equiv \varphi$.
2. $\varphi_2 = \exists y(\neg\forall x P(x, y) \to \neg\exists z R(z, c))$ é uma sentença (limpa), φ_2 é satisfatível sse φ_1 é satisfatível.
3. $\varphi_2 \equiv \exists y(\exists x \neg P(x, y) \to \forall z \neg R(z, c)) \equiv \exists y \forall z \exists x(\neg P(x, y) \to \neg R(z, c)) = \varphi_3$. φ_3 está em forma prenexa, $\varphi_3 \equiv \varphi_2$.
4. $\varphi_4 = \forall z(\neg P(f(z), a) \to \neg R(z, c))$ está em forma de Skolem, φ_4 é satisfatível sse φ_3 é satisfatível.
5. $\neg P(f(z), a) \to \neg R(z, c)$ é a matrix de φ_4.
Então o universo de Herbrand para φ_4 é o conjunto

$D(\varphi_4) = \{c, a, f(c), f(a), f(f(c)), f(f(a)), ...\}$,
e a expansão de Herbrand de φ_4 é
$E(\varphi_4) = \{\neg P(f(t), a) \to \neg R(t, c) \mid t \in D(\varphi_4)\}$.

(b) Seja $\varphi = P(x) \vee \forall x(R(f(c), x) \to \neg\forall y P(y))$.
1. $\varphi_1 = P(x) \vee \forall z(R(f(c), z) \to \neg\forall y P(y))$ está limpa.
2. $\varphi_2 = \exists x(P(x) \vee \forall z(R(f(c), z) \to \neg\forall y P(y)))$ é uma sentença limpa.
3. $\varphi_2 \equiv \exists x\forall z(P(x) \vee (R(f(c), z) \to \exists y\neg P(y)))$
$\equiv \exists x\forall z\exists y(P(x) \vee (R(f(c), z) \to \neg P(y))) = \varphi_3$ está em forma prenexa.
3. $\varphi_4 = \forall z(P(a) \vee (R(f(c), z) \to \neg P(g(z))))$ está em forma de Skolem.
4. $P(a) \vee (R(f(c), z) \to \neg P(g(z)))$ é a matrix de φ_4.
O universo de Herbrand para φ_4 é
$D(\varphi_4) = \{a, c, f(a), g(a), f(c), g(c), f(g(c)), g(f(a)), ...\}$. Exercício: Apresente elementos da expansão de Herbrand $E(\varphi_4)$.

Teorema 1.44 (Teorema de Gödel-Herbrand-Skolem) *Seja φ uma sentença em forma de Skolem. φ é satisfatível sse o conjunto de sentenças $E(\varphi)$ é satisfatível no sentido da Lógica Proposicional, onde consideramos sentenças atômicas como variáveis proposicionais.*

Demonstração. Segundo Teorema 1.39 basta mostrar que φ tem um modelo de Herbrand sse $E(\varphi)$ é satisfatível no sentido da Lógica Proposicional. Seja $\varphi = \forall y_1 ... \forall y_n \psi$ e seja $\mathcal{M}$ uma estrutura de Herbrand para φ, e β seja qualquer valoração. Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \varphi \Leftrightarrow\ & \text{para todos os } t_1, ..., t_n \in D(\varphi) : (\mathcal{M}, \beta^{t_1 ... t_n}_{y_1 ... y_n}) \vDash \psi \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todos os } t_1, ..., t_n \in D(\varphi) : (\mathcal{M}, \beta) \vDash \psi^{t_1 ... t_n}_{y_1 ... y_n}, \text{ Lema da Substituição} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todas as sentenças } \chi \in E(\varphi) : \mathcal{M} \vDash \chi \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{M} \vDash E(\varphi)
\end{aligned}$$

Então, se $\mathcal{M} \vDash \varphi$, podemos definir uma valoração v da Lógica Proposicional por: $v(R(t_1, ..., t_n)) = 1 :\Leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n)$, para qualquer fórmula atômica $R(t_1, ..., t_n)$. Fórmulas complexas então recebem um valor-verdade conforme a semântica dos conectivos proposicionais $\neg, \vee, \wedge, \to$. Relembre que $E(\varphi)$ contém apenas as sentenças $\psi^{t_1 ... t_n}_{y_1 ... y_n}$, onde $t_1, ..., t_n \in D(\varphi)$ são termos sem variáveis. Cada uma dessas sentenças é vista como uma fórmula da Lógica Propisicional onde as 'variáveis' são subfórmulas atômicas do tipo $R(t_1, ..., t_n)$. Então segue das equivalências acima que $E(\varphi)$ é satisfeito por v no sentido da Lógica Proposicional: $v(\chi) = 1$ para toda $\chi \in E(\varphi)$.

Por outro lado, se $E(\varphi)$ é satisfeito por uma valoração da Lógica Proposicional que atribui valores-verdade às sentenças em $E(\varphi)$ (considerando as subsentenças atômicas como variáveis proposicionais), então podemos interpretar os símbolos de relações R da assinatura numa possível estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ definindo:
$R^{\mathcal{M}}(t_1, ..., t_n) :\Leftrightarrow v(R(t_1, ..., t_n)) = 1$, para $t_1, ..., t_n \in D(\varphi)$. Isto resulta numa estrutura de Herbrand $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \chi$ para toda $\chi \in E(\varphi)$. Logo, $\mathcal{M} \vDash E(\varphi)$ e portanto $\mathcal{M} \vDash \varphi$ conforme mostrado acima. Q.E.D.

Teorema 1.45 (Teorema de Herbrand) *Seja φ uma sentença em forma de Skolem. φ é insatisfatível (na Lógica de Predicados) sse existe um subconjunto finito de $E(\varphi)$ que é insatisfatível no sentido da Lógica Proposicional.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, φ é insatisfatível sse $E(\varphi)$ é insatisfatível no sentido da Lógica Proposicional. Na Lógica Proposicional vimos o Teorema da Compacidade (consequência do Teorema da Completude) que diz que um conjunto é satisfatível sse qualquer subconjunto finito é satisfatível. Logo, φ é insatisfatível sse $E(\varphi)$ é insatisfatível no sentido da Lógica Proposicional sse existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq E(\varphi)$ tal que Δ é insatisfatível no sentido da Lógica Proposicional. Q.E.D.

Como o conjunto $E(\varphi)$ sempre é contável, podemos enumerar todos os seus elementos por $E(\varphi) = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$. Consideramos o algoritmo seguinte:

INPUT: φ sentença em forma de Skolem (toda fórmula pode ser transformada em tal forma tal que a a propriedade da (não-) satisfatibilidade é preservada).
$n := 0$. $E(\varphi) = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$.
REPEAT $n := n + 1$; UNTIL $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$ é insatisfatível (isso pode ser testado via tabela-verdade, p. ex.).
OUTPUT: “insatisfatível”

Pelo Teorema anterior, o algoritmo termina sse a entrada φ é insatisfatível. Se φ é satisfatível, o algoritmo nunca termina. Isto é, o algoritmo semi-decide o problema da insatisfatibilidade. (Um algoritmo ia decidir o problema da insatisfatibilidade se ele terminasse para qualquer entrada φ com a devida resposta “insatisfatível”ou “satisfatível”). Tal algoritmo não pode ser programado. O problema é indecidível ou não-solucionável. Aliás, existem mais problemas não-solucionáveis (cardinalidade incontável) do que solucionáveis (cardinalidade contável)).

Sabemos que uma fórmula é válida sse sua negação é insatisfatível. Então, podemos construir um algoritmo que recebe uma sentença, forma a negação e a forma de Skolem, e aplica o algoritmo acima. Isso resulta num algoritmo que semi-decide o problema da validade.

Teorema 1.46 *O problema da insatisfatibilidade na Lógica de Predicados é semi-decidível. O problema da validade na Lógica de Predicados é semi-decidível.*

Combinando os dois algoritmos acima junto com um algoritmo que testa satisfatibilidade em modelos finitos (sucessivamente testando universos de cardinalidade $n = 1, 2, 3, ...$) podemos obter um algoritmo que termina exatamente para sentenças φ que são insatisfatíveis, válidas ou satisfatíveis em algum modelo finito (os três algoritmos correm em paralelo). Porém, o algoritmo não termina se a entrada φ for uma sentença não-válida, insatisfatível em modelos finitos, mas satisfatível em algum modelo infinito. De fato, o problema da satisfatibilidade na Lógica de Predicados nem é semi-decidível (e muito menos decidível). Outros problemas de (semi-) decisão são estudados na disciplina Teoria da Computação.

As apresentações de alguns dos assuntos desta seção baseiam-se no livro de Uwe Schöning: Logic for Computer Scientists.