- Consequência Lógica ✓
- Árvore sintática ✓
- Satisfatibilidade ✓
- Ciclo de implicações. ✓

$sub(\varphi) = \{\varphi\}$, se φ for atômica

$sub(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup sub(\varphi)$

Fm é o menor conjunto que satisfaz:

1) $V \cup \{\top, \bot\} \subseteq Fm$;

2) Se $\varphi, \psi \in Fm$, então $(\varphi \wedge \psi) \in Fm$, $(\varphi \vee \psi) \in Fm$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in Fm$ e $\neg\varphi \in Fm$.

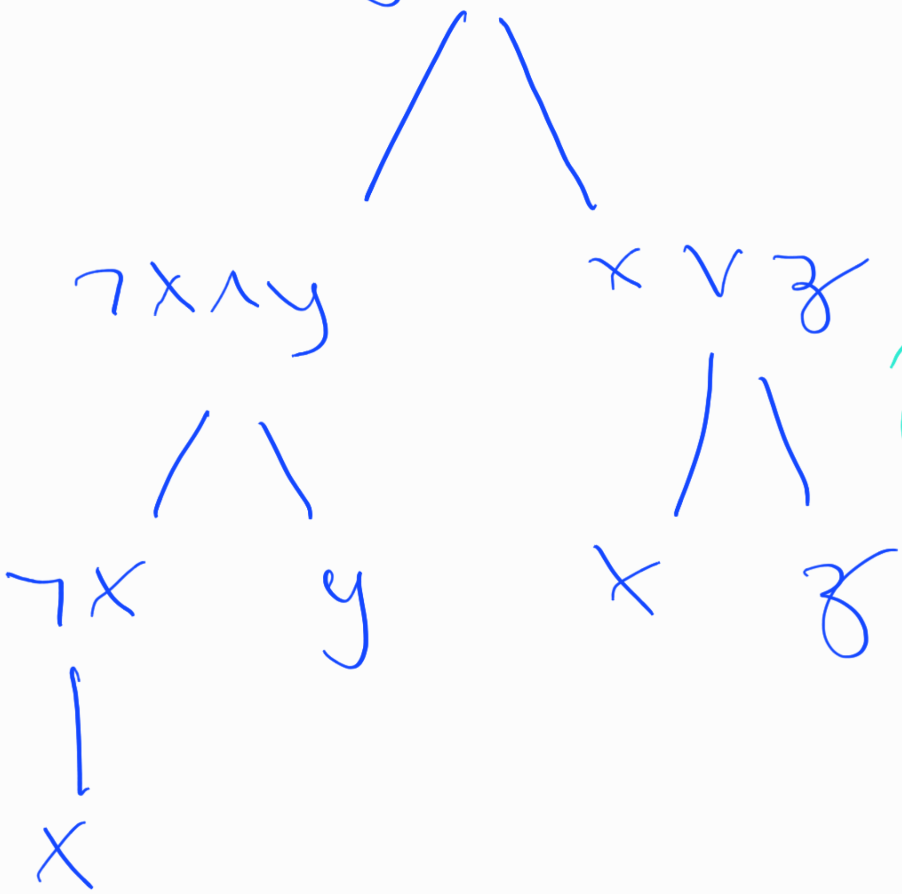
Toda fórmula em 1) é chamada atômica.

Se $\psi = \neg\varphi$, para alguma $\varphi \in Fm$, então

$$sub(\psi) = \{\neg\varphi\} \cup sub(\varphi)$$

$\neg, \wedge, \vee, \to$

$\varphi = \neg x \wedge y \to x \vee z$



$sub(\varphi \to \psi) = \{\varphi \to \psi\} \cup sub(\varphi) \cup sub(\psi)$

$sub(\varphi) = \{\varphi, \neg x \wedge y, x \vee z, \neg x, y, x, z\}.$

$sub(\neg x \wedge y \to x \vee z) = \{\neg x \wedge y \to x \vee z\} \cup$

$\cup\, sub(\neg x \wedge y) \cup sub(x \vee z) =$

$= \{\neg x \wedge y \to x \vee z\} \cup \{\neg x \wedge y\} \cup sub(\neg x)$

$\cup\, sub(y) \cup \{x \vee z\} \cup sub(x) \cup sub(z) =$

$= \{\neg x \wedge y \to x \vee z,\ \neg x \wedge y\} \cup \{\neg x\} \cup$

$sub(x) \cup \{y\} \cup \{x \vee z\} \cup \{x\} \cup \{z\} =$

$= \{\neg x \wedge y \to x \vee z,\ \neg x \wedge y,\ \neg x\} \cup \{x\}$

$\cup \{y,\ x \vee z,\ x,\ z\} =$

$= \{\neg x \wedge y \to x \vee z,\ \neg x \wedge y,\ \neg x,\ x,$

$y,\ x \vee z,\ z\}.$

$(\; , \;) \; , \; \wedge , \; \vee , \; \neg , \; \rightarrow , \; x_0 , \; x_1 , \; \ldots ,$

$\top , \; \perp$

$x_0 \qquad x_1 \qquad < , \qquad y$

$\top \qquad , \qquad \perp$

$x_0 \wedge x_1 \qquad \underline{(x_0 \wedge \top)} \wedge \underline{\perp}$

$sub(\neg x \rightarrow z) = \{\neg x \rightarrow z\} \cup sub(\neg x) \cup$
$\cup\, sub(z) = \{\neg x \rightarrow z\} \cup \{\neg x\} \cup sub(x)$
$\cup \{z\} = \{\neg x \rightarrow z, \neg x\} \cup \{x\} \cup \{z\} =$
$= \{\neg x \rightarrow z, \neg x, x, z\}.$

$$\begin{array}{c} \neg x \\ | \\ x \end{array} \qquad sub(\neg x) = \{\neg x, x\}$$

Demonstre que $A \iff B$.

1) $A \implies B$

(. . . .)

2) $B \implies A$

(. . . .)

Demonstre que A, B e C são equivalentes.

1) $A \implies B$

. . . .

2) $B \implies C$

. . . .

3) $C \implies A$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C \arrow[ur, Rightarrow] & & B \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

$A \iff B$ $\quad$ $A \iff C$

$B \iff C$

$\varphi \quad \psi \quad \chi \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma$

$\Phi \quad \Psi \quad X \quad A \quad B \quad \Gamma$

1) Φ é insatisfatível, i.e., $Mod(\Phi) = \emptyset$.

$1 \Rightarrow 2$

Se Φ é insatisfatível, então ...

Logo, ______ .

$2 \Rightarrow 3$

Suponha ---- . ____ . Logo ----

Concluímos ---- .

$3 \Rightarrow 1$

Vamos mostrar que, para todo

$$n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} + 1.}_{A(n)} :=$$

Base: $A(0)$ ✓

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1.$$

$$2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

H.I. Suponha $A(n)$ ✓

Ou seja, estamos supondo $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

P.I. (Objetivo: se $A(n)$, então $A(n+1)$.)

$$A(n) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Por H.I., $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Veja que $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) + 2^{n+1} =$

$\overset{H.I.}{=} \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} = 2\left(2^{n+1}\right) - 1 =$

$= 2^{(n+1)+1} - 1$. Logo, $\underline{\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1}$. $\blacksquare$

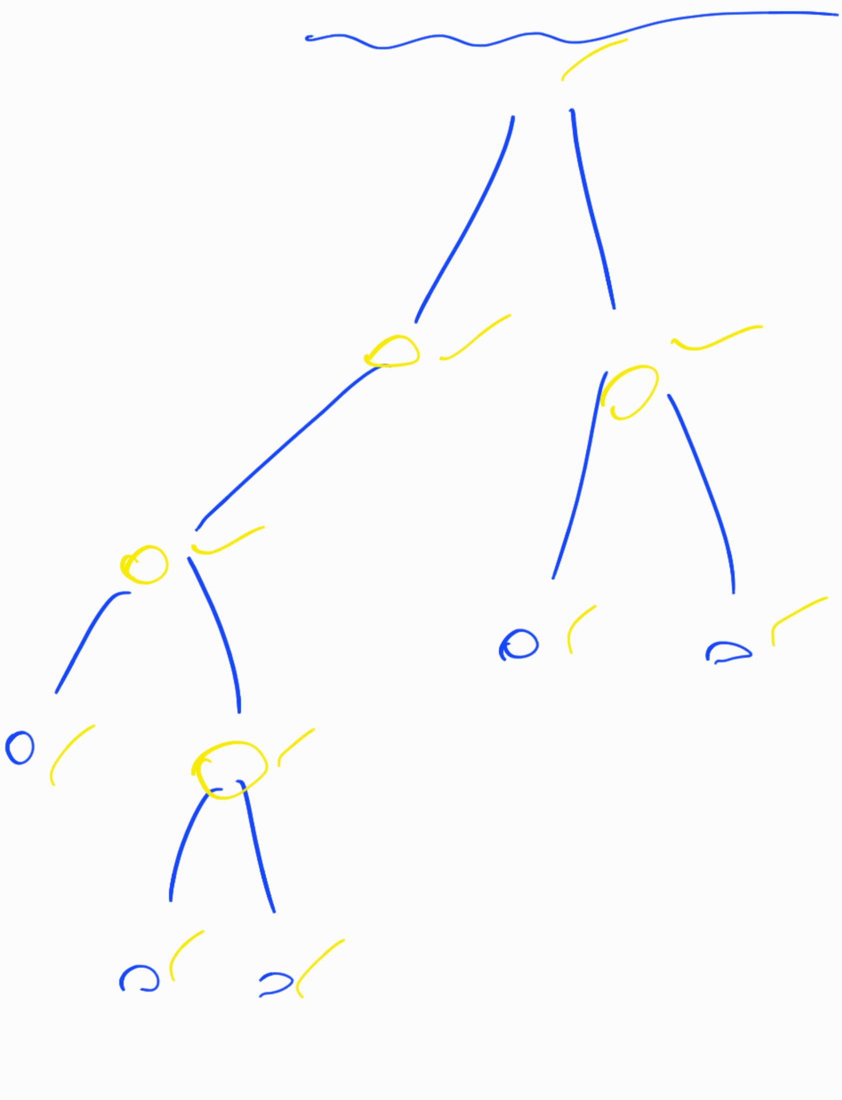
$A(n+1)$

Concluímos $A(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$A(\varphi)$

$A(\varphi)$ e $A(\psi)$, então

$A(\neg\varphi)$, $A(\varphi \to \psi)$, $A(\varphi \land \psi)$, $A(\varphi \lor \psi)$



Relação da Satisfatibilidade

$\vDash \subseteq 2^V \times Fm$ t. q.

$$\underbrace{v \vDash \varphi :\Longleftrightarrow}_{\text{definição}} v(\varphi) = 1.$$

$$v^*(\top) = 1 \qquad v^*(\bot) = 0$$

$$v^*(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{se } v^*(\varphi) = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1, & \text{se } v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\boxed{v^* : Fm \longrightarrow \{0,1\}}$$

$$\boxed{v : V \longrightarrow \{0,1\}}$$

Consequência lógica

$\Vdash \subseteq Pow(Fm) \times Fm$ t.q. $\Phi \Vdash \psi :\Longleftrightarrow \underline{Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\psi\})}$

toda $v \vDash \Phi$ também satisfaz ψ

"ψ é consequência lógica de Φ"

$Mod(\Phi) = \{v \in 2^V : \underline{v \vDash \Phi}\}$

para toda $\varphi \in \Phi$, $v \vDash \varphi$

<u>Prove</u>: $\Phi \Vdash \varphi$ sse o conjunto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.