Objetivo:

Amostra — Probabilidade / — generalizações — População

inferência indutiva

Inferência!: { Estimação Pontual / Estimação Intervalar / Teste de Hipóteses /

Estimação Pontual: **Aproximar** parâmetro por estimativa. Ex.: $\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \approx \mu \\ \hat{\sigma}^2 \approx \sigma^2 \end{cases}$

Notação: Colocamos "^" para indicar que o estimativo é uma aproximação do parâmetro!

$\hat{\mu} \approx \bar{x}$ média da população

~~tão perto de $\bar{x}$~~ ? O que é perto?

Tabela 1: Encontrar o valor do parâmetro dos modelos de probabilidade.
Seja $x_1, \ldots, x_m$ os valores observados de uma variável quantitativa X em uma amostra, então:

Amostra	Distribuição	Parâmetros	Estimador
$x_1, \ldots, x_m$	$U_D[j,k]$ $f(x) = \frac{1}{k-j+1}, \quad x = j, \ldots, k$	j k	$\hat{j} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $\hat{k} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$
$x_1, \ldots, x_m$	$b(n, p)$ $f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$	p n conhecido	$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{n \cdot m}$
$x_1, \ldots, x_m$	Bernoulli(p) $f(x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$	p	$\hat{p} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$
$x_1, \ldots, x_m$	Poison(λ) $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots$ λ: nº médio de ocorrências no intervalo na popl.	λ	$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$
$x_1, \ldots, x_m$	$U[a, b]$ $f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b]$	a b	$\hat{a} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $\hat{b} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$
$x_1, \ldots, x_m$	Exponencial(α) $f(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \quad x \geq 0$	α $\frac{1}{\alpha} = \mu$	$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \bar{x}$ $\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{m}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}$
$x_1, \ldots, x_m$	Normal(μ, σ^2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ, σ^2	$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + (x_2 - \hat{\mu})^2 + \cdots + (x_m - \hat{\mu})^2}{m-1}$

^: indica uma aproximação do parâmetro $\hat{\lambda} = \bar{x}$

A aproximação tá boa?

Intervalo de Confiança: Encontrar $\hat{a}$ e $\hat{b}$ tal que $\hat{a} \leq \mu \leq \hat{b}$ com alguma probabilidade γ.

σ^2, p, λ

Distribuição Normal: $N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 conhecido)

Desvio Padrão / Proporção

Vamos começar com distribuição Amostral.

Amostras de tamanho n

População $N(\mu, \sigma^2)$, μ? σ^2 conhecido

Amostra 1 → $y_1, y_2, \ldots, y_n$: $\bar{y} = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$

Amostra 2 → $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

⋮

Amostra K → $z_1, z_2, \ldots, z_n$: $\bar{z} = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$

→ K Médias diferentes

Abstração: Essas K médias são realizações de uma variável aleatória, e representamos essa variável aleatória por $\bar{X}$.

Teorema do Limite Central: $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Teorema Central do Limite

Exemplo:

Tabela 1: Nota dos 30 alunos na primeira prova.

5.80	7.27	7.04	6.83	7.64	7.11	7.51	7.30	6.89	6.30
5.60	8.80	7.05	6.13	5.42	6.24	8.54	5.74	5.43	5.95
6.82	5.73	7.84	5.90	7.80	5.48	8.59	5.76	3.90	7.10

Teorema do Limite Central: O modelo de probabilidade adequado para médias é Normal!

Média da população = Média dos 30 alunos! → $\mu = 6,37$

Tabela 2: Dez amostras com cinco alunos provenientes dos 30 alunos da Tabela 1.

Amostras	Notas dos cinco indivíduos da amostra de Heloísa					Média
Amostra 1	6,83	7,30	6,89	7,51	3,90	6,49
Amostra 2	5,76	6,13	8,59	6,89	6,82	6,84
Amostra 3	5,80	5,48	6,13	6,82	6,24	6,09
Amostra 4	8,59	5,73	5,80	7,10	6,83	6,81
Amostra 5	6,82	6,30	6,13	7,10	8,80	7,03
Amostra 6	7,51	8,59	5,73	3,90	6,82	6,51
Amostra 7	5,95	6,89	5,73	3,90	7,30	5,95
Amostra 8	8,59	5,74	6,30	7,10	6,24	6,79
Amostra 9	6,83	7,80	7,51	6,89	5,95	7,00
Amostra 10	5,43	7,80	6,89	5,80	7,30	6,64

Figura 3: Histograma das médias de amostras com cinco alunos dos alunos da tabela 1, e o modelo de probabilidade segundo o Teorema Central do Limite (curva azul).

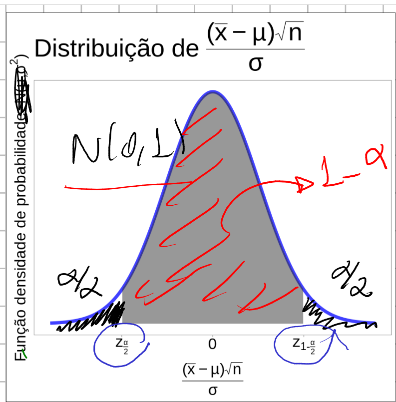
Amágica !

Note que $\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$, ou seja, $= Z$

TCL (-TLC)

$$\boxed{\bar{X} \sim N(\mu;\ \sigma^2/n)}$$

$$\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$



$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$P(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

$P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$

Então $P\left(z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

↳ conheço!

$z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ $\quad \hat{a} \quad \hat{b}$

$$P\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\bar{X} \leq -\mu \leq z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\bar{X}\right) = P\left(\underbrace{-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{X}}_{\hat{a}} \leq \mu \leq \underbrace{z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{X}}_{\hat{b}}\right) = 1-\alpha$$

Encontremos nosso $\hat{a}$ e $\hat{b}$!

fornecido!

$1-\alpha \geq 0{,}90$

Notação: $IC(\mu; 1-\alpha) = \left(-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{X};\ z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{X}\right)$.

ATENÇÃO À INTERPRETAÇÃO

Tabela 3: Intervalos de confiança e amostras de uma população com distribuição normal com média populacional $\mu = 1,75$ e desvio padrão $\sigma = 0,1$.

μ		Amostra					a	b	$a < \mu < b$?
1,75	Amostra 1	2,050	1,909	1,893	1,858	1,651	1,785	1,960	Não
	Amostra 2	1,667	1,909	1,958	1,771	2,028	1,779	1,954	Nao
	Amostra 3	1,835	1,905	1,995	1,805	1,820	1,784	1,960	Não
σ	Amostra 4	1,824	1,870	1,965	1,637	1,711	1,714	1,889	Sim
0,1	Amostra 5	1,773	1,796	1,895	1,872	1,812	1,742	1,917	Sim
	Amostra 6	1,741	1,885	1,896	1,629	1,664	1,675	1,851	Sim

$N(1{,}75;\ 0{,}1^2)$

$1{,}785 \leq \cancel{1{,}75} \leq 1{,}960$

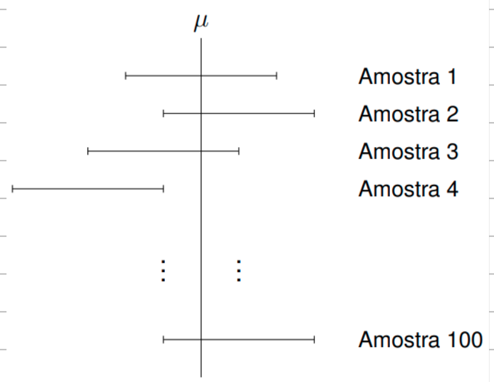
μ pode ou não satisfazer $-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{x} \leq \mu \leq z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{x}$!

O importante é que $(1-\alpha)\%$ dos intervalos de confiança vão conter a média populacional.

Desvio Padrão

proporção

Figura 1: Interpretação do coeficiente de confiança.



$\frac{\gamma}{1-\alpha} =$ coeficiente de confiança

↳ Proporção de amostras que produzem intervalos de confiança corretos!

4. Por analogia com produtos similares, o tempo de reação de um novo medicamento tem distribuição normal com desvio padrão igual a 2 minutos (a média é desconhecida). Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos): 2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2. Obtenha um intervalo de confiança para o tempo médio de reação. Use como coeficiente de confiança $\gamma = 96\%$.

$\alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04$ $\quad 1-\alpha/2 = 1-0{,}02 = 0{,}98$

Solução: $\sigma = 2$ min; $n = 20$; $1-\alpha = 0{,}96 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}96+1}{2} = 0{,}98$

$z_{0{,}98} = 2{,}05$; $\bar{x} = \frac{2{,}9+3{,}4+3{,}5+\dots+5{,}5+6{,}2}{20} = 4{,}745$

$$IC(\mu; 96\%) = \left(-z_{0{,}98}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{x}\,;\, z_{0{,}98}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{x}\right) = \left(-2{,}05\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}+4{,}745\,;\,2{,}05\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}+4{,}745\right)$$

$IC(\mu; 96\%) = (3{,}83; 5{,}66)$.

Em 96% das amostras, a média populacional satisfaz $3{,}83 \leq \mu \leq 5{,}66$.

No jargão de estatística: com coeficiente de confiança 96%, o tempo médio de reação está entre 3,83 min e 5,66 min. [redacted]

$\hat{a} \leq \mu \leq \hat{b}$ – com coeficiente de confiança $1-\alpha = \gamma$

$\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Distribuição Normal: $N(\mu, \sigma^2)$ – não conhecemos σ^2

População: $N(\mu, \sigma^2)$
σ^2 desconhecido

Amostras

Amostra 1 $\rightarrow x_1, \dots, x_n$: $t_1 = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{S}$

Amostra 2 $\rightarrow y_1, \dots, y_n$: $t_2 = \frac{(\bar{y}-\mu)\sqrt{n}}{S}$

Amostra k $\rightarrow z_1, \dots, z_n$: $t_k = \frac{(\bar{z}-\mu)\sqrt{n}}{S}$

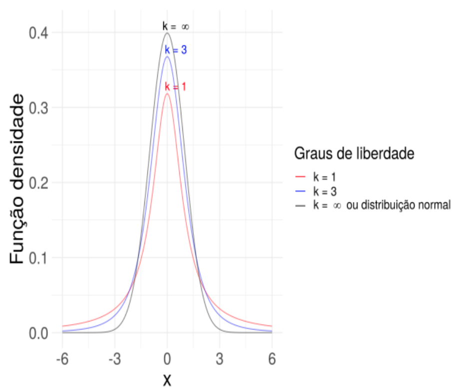
$\rightarrow$ k valores diferentes!

$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$; $S = \sqrt{S^2}$

Abstração: Esses k valores são observados uma variável aleatória t_{n-1}.

Notação: $\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \sim t_{n-1}$. (Nova distribuição) t-Student//

Figura 3: Distribuição t-Student e normal.



- Valores concentrados em torno do zero
- Intervalos longe do zero são pouco prováveis
- Intervalos longe de zero p/ t-Student são mais prováveis do que $N(0,1)$.

Função Densidade de Probabilidade: $f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}$, $\nu = n-1$.

NÃO TEM PRIMITIVA!!! $\rightarrow$ { Métodos Numéricos / Tabela t

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \rightarrow$ Sem resolução numérica

$t_{\alpha/2, n-1} = -t_{1-\alpha/2, n-1}$

$P(t_{n-1} \leq t_{\frac{p}{\alpha/2}, n-1}) = \frac{p}{\alpha/2}$ / $t_{1-\alpha/2, n-1}$

A mágica!

Note que $t_{\frac{\alpha}{2};n-1} = -t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$

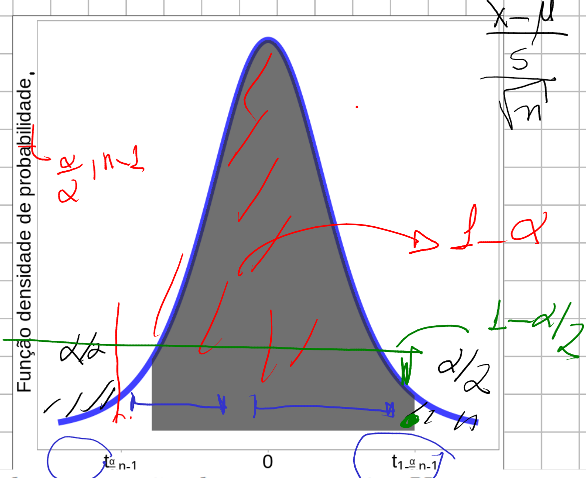
$\hat{a} \leq \mu \leq \hat{b}$

$$P\left(t_{\alpha/2;n-1} \leq \overbrace{\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}}^{t_{n-1}} \leq t_{1-\alpha/2;n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\underbrace{-t_{1-\alpha/2;n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}}_{\hat{a}} \leq \mu \leq \underbrace{t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}}_{\hat{b}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC(\mu; 1-\alpha) = \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{1-\alpha/2;n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$



18. Uma máquina produz hastes de metal usadas em sistema de suspensão de automóveis. Uma amostra aleatória de 15 rodas foi coletada, e o diâmetro é mensurado. Os dados (em milímetros) estão na Tabela 2. Assuma a normalidade do diâmetros das hastes de metal. Construa um intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$ para o diâmetro das hastes de metal.

$1-\alpha = 0,99$

$\alpha = 0,01$

$\alpha/2 = 0,005$

$1-\alpha/2 = 0,995$

8,24	8,21	8,23
8,25	8,26	8,23
8,20	8,26	8,19
8,23	8,20	8,28
8,24	8,25	8,24

Tabela 2: Hastes de metal usadas em sistema de suspensão de automóveis.

Solução: $\bar{x} = 8.234$; $s = 0.03$; $n = 15$; $\gamma = 0,99$; $1-\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\gamma}{2} = 0,995$.

$z_{0,995} = 2,977$

$$IC(\mu; 95\%) = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2,n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\alpha/2;n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(8,234 - 2,977\cdot\frac{0,03}{\sqrt{15}}; 8,234 + 2,977\cdot\frac{0,03}{\sqrt{15}}\right)$$

$$= (8,21; 8,26)$$

$1-\alpha = 0,97$
$\alpha = 0,03$
$\alpha/2 = 0,015$
$1-\alpha/2 = 0,985$

Com coeficiente de confiança 99%, a média do diâmetro das hastes de metal está entre 8,21 e 8,26 milímetros.

Distribuição Normal: $N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 desconhecido)

População: $N(\mu, \sigma^2)$
μ – desconhecido
σ^2 – desconhecido

Amostras

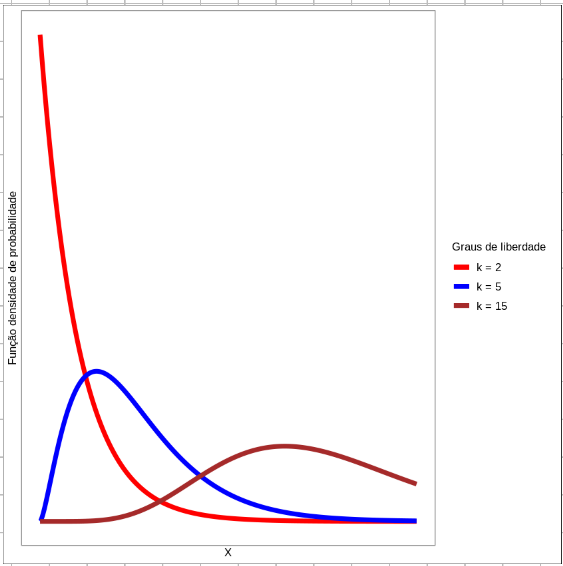
Amostra 1 → $x_1, \ldots, x_n$: $\chi^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{\sigma^2(n-1)}$

Amostra 2 → $y_1, \ldots, y_n$: $\chi^2 = \frac{(y_1-\bar{y})^2 + \cdots + (y_n-\bar{y})^2}{\sigma^2(n-1)}$

Amostra K → $z_1, \ldots, z_n$: $\chi^2 = \frac{(z_1-\bar{z})^2 + \cdots + (z_n-\bar{z})^2}{\sigma^2(n-1)}$

→ K valores diferentes.

Abstração: Esses K valores são observados de uma variável aleatória χ^2_{n-1}.



$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$, $k = n-1$.

• Intervalos perto do zero têm maiores chances!

Notação: $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

• $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\alpha/2;\,n-1}\right) = \alpha/2$

• $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}\right) = 1 - \alpha/2$

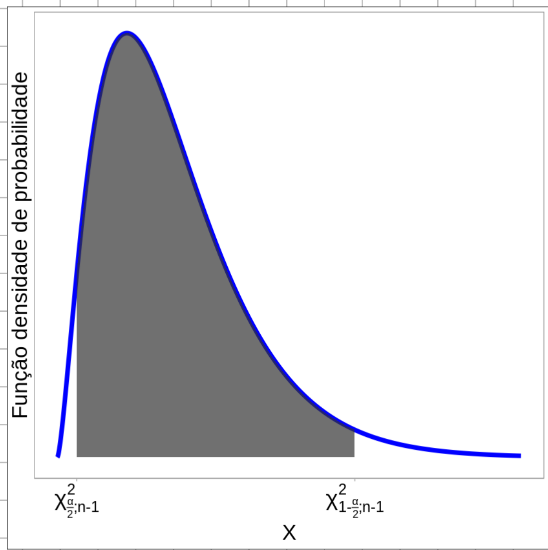
• Não tem primitiva $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tabela} \\ \text{métodos numéricos} \end{array} \right.$

A mágica!

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2;\,n-1} \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}\right) =$$

$$P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC(\sigma^2;\gamma) = \left(\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}} ; \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}}\right)$$



21. Um estudo com o objetivo de estudar o nível de composição de aminoácido essencial (Lysine) de farejo de soja está na Tabela 4 (g/kg). Assuma que o nível de composição de aminoácido essencial (Lysine) de farejo de soja tem distribuição normal. Construa um intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$ para σ^2.

22,20	20,90	27,00	26,50	25,60
24,70	26,00	24,80	23,80	23,90

Tabela 4: Nível de aminoácido (Lysine) de farejo de soja.

Solução: $S^2 = 3,66$, $n = 10$; $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\gamma}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \\ \frac{1-\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} = 0,005 \end{array} \right.$ $\Bigg|$ $\begin{array}{l} \chi^2_{0,995} = 23,59 \\ \chi^2_{0,005} = 1,73 \end{array}$

$$IC(\sigma^2, 99\%) = \left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}} ; \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}}\right) = \left(\frac{9\cdot 3,66}{23,59} ; \frac{9\cdot 3,66}{1,73}\right)$$

$$= (1,40 ; 19,04)$$

Com coeficiente de confiança 99%, o desvio padrão do nível de potássio está entre 1,40 e 19,04.

Distribuição Bernoulli: $X \sim Bernoulli(p)$.

População: Bernoulli(p)

p: Probabilidade de Sucesso

~~Amostras~~

Amostra 1 → $x_1, \ldots, x_n$: $\frac{(\bar{x}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$

Amostra 2 → $y_1, \ldots, y_n$: $\frac{(\bar{y}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$

Amostra K → $z_1, \ldots, z_n$: $\frac{(\bar{z}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$

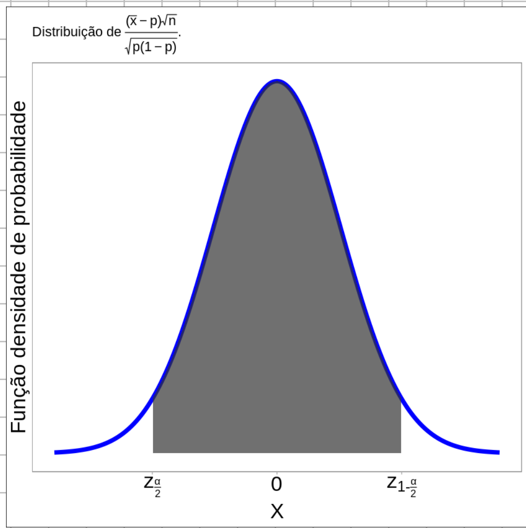
k valores diferentes

Abstração: Esses k valores são observações de uma variável aleatória N(0,1)

A mágica!

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \bar{X} \leq p \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \bar{X}\right) = 1-\alpha$$

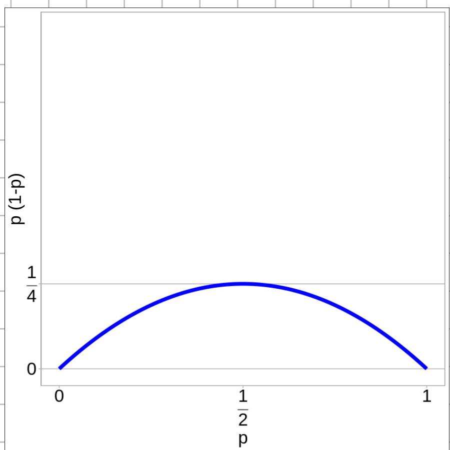


$\bar{x} = \hat{p}$

$$IC(p; 1-\alpha) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \bar{X}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \bar{X}\right)$$

Não conhecemos p!

Solução:



- $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

- $\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2}$ e $\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} + \bar{X} \leq \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} + \bar{X}$

- $-\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} \leq -\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$ e $-\frac{z_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + \bar{X} \leq -\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} + \bar{X}$

Logo, $IC(p; 1-\alpha) = \left[-z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} + \bar{X}; z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} + \bar{X}\right]$.

22. A fração de circuitos integrados defeituosos produzidos em um processo de fotolitografia está sob análise. Uma amostra aleatória de 300 circuitos foram testadas e descobrimos que 13 circuitos estavam defeituosos. Construa um intervalo de confiança a fração de circuitos defeituosos com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Solução: $n = 300$; $p = \frac{13}{300} = 0{,}04$; $1-\alpha = 0{,}95$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$.

$z_{0,975} = 1{,}96$.

$$IC(p; 95\%) = \left[-\frac{1{,}96}{2\sqrt{300}} + 0{,}04; \frac{1{,}96}{2\sqrt{300}} + 0{,}04\right] = \left[-0{,}02; 0{,}1\right] = \left[0; 0{,}1\right]$$

Com coeficiente de confiança 95%, a proporção de circuitos defeituosos é no máximo 10%.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

↳ Fenômeno Aleatório e Probabilidade

- ω_1 é resultado do Fenômeno Aleatório $\Rightarrow X(\omega_1) = x_1$

x_1 é uma realização ou observação de X.

Amostra 1, Amostra 2, Amostra K

$\underbrace{\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{z}}_{\text{k médias diferentes}}$: são realizações de $\bar{X} : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$

↳ p/ algum espaço amostral e p/ algum fenômeno aleatório

$\bar{X}$ (X maiúsculo c/ barra em cima)

- ω_1 resultado de F.A. tal que $\bar{X}(\omega_1) = \bar{x}$
- ω_2 resultado de F.A. tal que $\bar{X}(\omega_2) = \bar{y}$

$\bar{X}$ é uma variável aleatória contínua E $\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n)$

↳ Teorema Central do Limite

População $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 conhecida μ desconhecida

$\xrightarrow{\text{Amostra 1}}$ $x_1, \ldots, x_n \rightarrow \bar{x}$

$\xrightarrow{\text{Amostra 2}}$ $y_1, \ldots, y_n \rightarrow \bar{y}$

$\xrightarrow{\text{Amostra K}}$ $z_1, \ldots, z_n \rightarrow \bar{z}$

Amostras de mesmo tamanho n

k médias diferentes

Teorema Central do Limite:

Existe $\bar{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- ω_1 resultado do fenômeno com $\bar{X}(\omega_1) = \bar{x}$
- $\omega_2 \in \Omega$ com $\bar{X}(\omega_2) = \bar{y}$
- ⋮
- $\omega_k \in \Omega$ com $\bar{X}(\omega_k) = \bar{z}$

Além disso, $\begin{cases} \bar{X} \text{ é uma variável aleatória contínua} \\ \bar{X} \sim N\left(\mu; \dfrac{\sigma^2}{n}\right) \end{cases}$

$X \sim N(\mu; \sigma^2)$

- Não sabemos a $\overbrace{\text{média da população}}^{\mu}$
- Não sabemos a $\underbrace{\text{variância da população}}_{\sigma^2}$.

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

coeficiente de confiança

$\underbrace{\text{Achar } \hat{a} \text{ e } \hat{b}}_{\text{usando amostra}}$ tal que $\hat{a} \leq \mu \leq \hat{b}$ com "alguma prob" $\gamma = 1-\alpha$

Amostras de tamanho n

$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{Amostra 1}} x_1, \dots, x_n, \quad t_1 = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{s}$

$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{Amostra 2}} y_1, \dots, y_n, \quad t_2 = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s}\sqrt{n}$

$\vdots$

$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{Amostra K}} z_1, \dots, z_n, \quad t_K = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s}\sqrt{n}$

Substituir σ por S em $\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. $S = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n-1}}$

Revisão de variável aleatória

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

↳ Fenômeno Aleatório

- $\omega_1 \in \Omega, \quad X(\omega_1) = x_1$
- $\omega_2 \in \Omega, \quad X(\omega_2) = x_2$

$\vdots$

- $\omega_k \in \Omega, \quad X(\omega_k) = x_k$

$x_1, \dots, x_k$ são valores observados de X

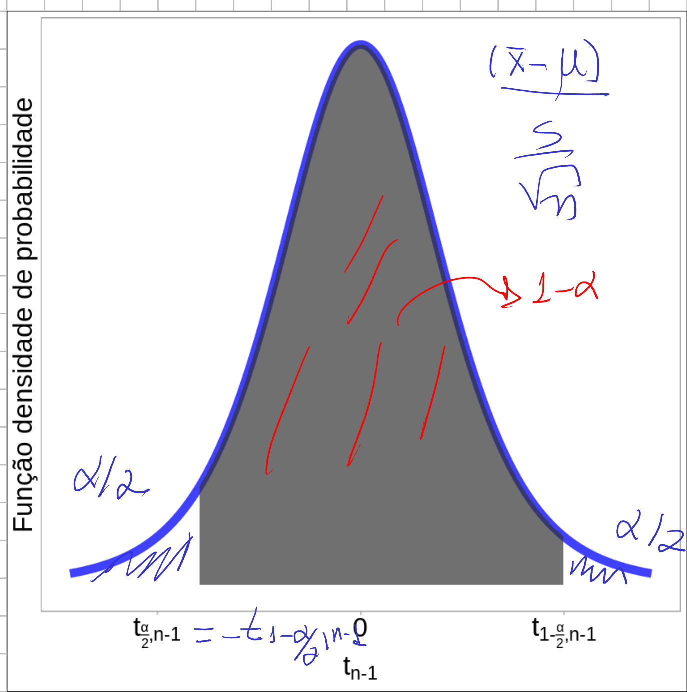
$t_1, \dots, t_K$ valores diferentes de diversas amostras

$\exists$ uma variável aleatória contínua Y

Y tem $\underline{\text{distribuição t-Student}}$

novidade!

$$\frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$



Pela simetria em torno do zero

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\Big(\underbrace{-t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}}_{a} \leq \mu \leq \underbrace{t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X}}_{b}\Big) = 1-\alpha$$

coeficiente de confiança

$1-\alpha$ das amostras satisfazem $a \leq \mu \leq b$.

Com coeficiente de confiança $1-\alpha$, $a \leq \mu \leq b$.