UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Segunda unidade – 27/05/2015

1. Encontre, usando o Teorema Chinês do Resto, o mínimo número positivo cujo último algarismo é

- 2 na representação na base 3,
- A na representação na base 11,
- C na representação na base 13,

onde os algarismos nas bases 11 e 13 são, respectivamente, $0, 1, \ldots, 9, A$ e $0, 1, \ldots, 9, A, B, C$.

2. Para transferir 77 litros de um dado líquido posso usar ou um par de recipientes de 2 e 13 litros ou um par de 4 e 11 litros. Qual par é mais eficiente em termos de número total de enchimentos dos recipientes? Justifique a resposta mostrando todo o procedimento.

3. Para cada iten, diga, justificando a resposta, a qual número entre 0 e $m - 1$ é congruente o número a dado.

a. $m = 9$, $a = 777$.

b. $m = 11$, $a = 7897$.

c. $m = 19$, $a = 8420$.

4. Usando os critérios de divisibilidade, verifique, para cada iten, se a é divisível por n.

a. $n = 3$, $a = 10^{75} + 728$.

b. $n = 11$, $a = 10^{42} - 1$.

c. $n = 7$, $a = 2420$.

Soluções.

1. O último algarismo de um número n em uma dada base b é o resto da divisão de n por b, e então o único número entre 0 e $b-1$ ao qual n é congruente módulo b. Logo, o problema dado é equivalente a encontrar a mínima solução positiva do seguinte sistema de equações congruenciais:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 10 \pmod{11} \\ x \equiv 12 \pmod{13} \end{cases}.$$

Para aplicar o Teorema Chinês do Resto, precisamos, primeiro, calcular m, m'_1, m'_2, m'_3:

$$\begin{aligned} m &= 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429, \\ m'_1 &= 11 \cdot 13 = 143, \\ m'_2 &= 3 \cdot 13 = 39, \\ m'_3 &= 3 \cdot 11 = 33. \end{aligned}$$

Agora precisamos achar uma solução particular para cada uma das equações seguintes:

$$\begin{aligned} 143x &\equiv 1 \pmod{3}, \\ 39x &\equiv 1 \pmod{11}, \\ 33x &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Com poucas contas, vamos obter, respectivamente, as soluções $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 2$. Daí, obtemos uma solução particular do sistema, dada por:

$$c = \sum_{i=1}^{3} b_i m'_i c_i = 2 \cdot 143 \cdot (-1) + 10 \cdot 39 \cdot 2 + 12 \cdot 33 \cdot 2 = 1286.$$

O conjunto das soluções do sistema é, portanto,

$$S = \{1286 + 429n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vamos caraterizar, agora, as soluções positivas em função de n:

$$1286 + 429n > 0 \text{ se, e somente se, } n > -\frac{1286}{429} \cong -2,99$$

e então se, e somente se, $n \geq -2$. Logo, como $1286 + 429n$ é uma função estritamente crescente de n, temos que $1286 + 429 \cdot (-2) = 428$ é a mínima solução positiva do sistema, e então é a solução do nosso problema.

2. O problema pode ser formalizado na maneira seguinte: temos que solucionar as equações diofantinas

$$2x + 13y = 77, \tag{1}$$

$$4x + 11y = 77, \tag{2}$$

encontrar as soluções não negativas de ambas e somar os números de cada um desses par ao fim de encontrar o menor resultado.

As equações diofantinas acima têm soluções particulares, respectivamente, $(-462, 77)$ a eq. (1), e $(231, -77)$ a eq. (2); então os conjuntos de soluções de (1) e (2) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(-462 - 13k, 77 + 2k) : k \in \mathbb{Z}\}, \\ S_2 &= \{(231 - 11k, -77 + 4k) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Encontrando as soluções não negativas de (1):

$$\begin{cases} -462 - 13k \geq 0 \\ 77 + 2k \geq 0 \end{cases}$$

O sistema acima é verificado por $-38,5 \leq k \leq -35,5$ e então pelos inteiros $-36, -37$ e -38. Os elementos de S_1 correspondentes são $(6, 5)$, $(19, 3)$ e $(32, 1)$ e isso implica que, usando os recipientes de 2 e 13 litros, o mínimo número de enchimentos que teremos que fazer é $6 + 5 = 11$.

Encontrando as soluções não negativas de (2):

$$\begin{cases} 231 - 11k \geq 0 \\ -77 + 4k \geq 0 \end{cases}$$

O sistema acima é verificado por $19,25 \leq k \leq 21$ e então pelos inteiros 20 e 21. Os elementos de S_2 correspondentes são $(11, 3)$ e $(0, 7)$ e isso implica que, usando os recipientes de 4 e 11 litros, o mínimo número de enchimentos que teremos que fazer é 7. Logo, a maneira mais eficiente de transferir o líquido é de escolher o segundo par de recipientes e usar apenas o recipiente de 11 litros 7 vézes.

3. **a.** Na congruência módulo 9, vale o seguinte:

$$777 = 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 7 \equiv 7 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 7 \equiv 21 \equiv 3.$$

b. Na congruência módulo 11, vale:

$$\begin{aligned} &7897 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7 \equiv \\ &\equiv 7 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 7 \equiv \\ &\equiv -7 + 8 - 9 + 7 \equiv -1 \equiv 10. \end{aligned}$$

c. Na congruência módulo 19, vale:

$$\begin{aligned} 8420 &= 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = \\ &= 2^3 \cdot 10^3 + 2^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = \\ &= 20^3 + 20^2 + 20 \equiv 1^3 + 1^2 + 1 \equiv 3. \end{aligned}$$

4. **a.** O número $10^{75} + 728$ tem 76 algarismos, 72 dos quais iguais a zero. Pelo critério de divisibilidade por 3, um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 3. Neste caso, a soma dos algarismos é $1 + 7 + 2 + 8 = 18 = 3 \cdot 6$. Portanto $10^75 + 728$ é divisível por 3.

b. O número $10^{42} - 1$ tem 42 algarismos, todos iguais a 9. Pelo critério de divisibilidade por 11, um número é divisível por 11 se, e somente se, a soma de seus algarismos pares menos a soma de seus algarismos impares é um múltiplo de 11. Neste caso, tal diferença tem como resultado 0, e então o número é divisível por 11.

c. 7 não divide 2420, pois, pelo crítério de divisibilidade por 7, temos que

$$7 \mid 2420 \text{ sse } 7 \mid 242 + 0 \cdot 5 = 242 \text{ sse } 7 \mid 24 + 2 \cdot 5 = 34,$$

mas 34 não é múltiplo de 7.