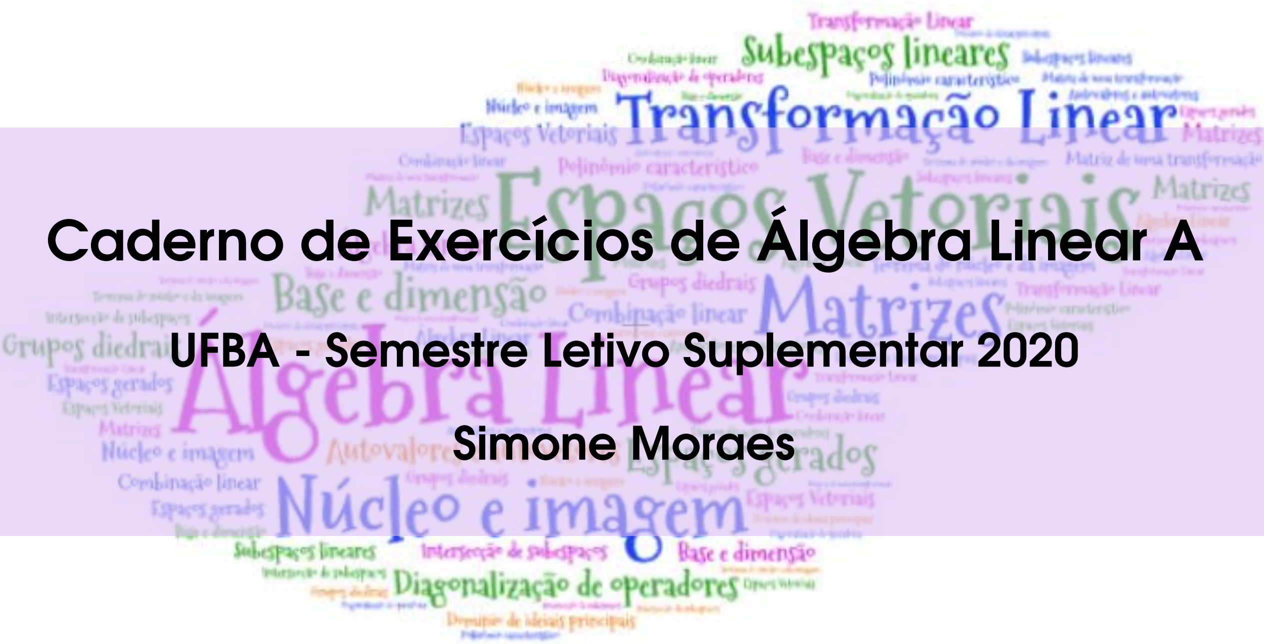
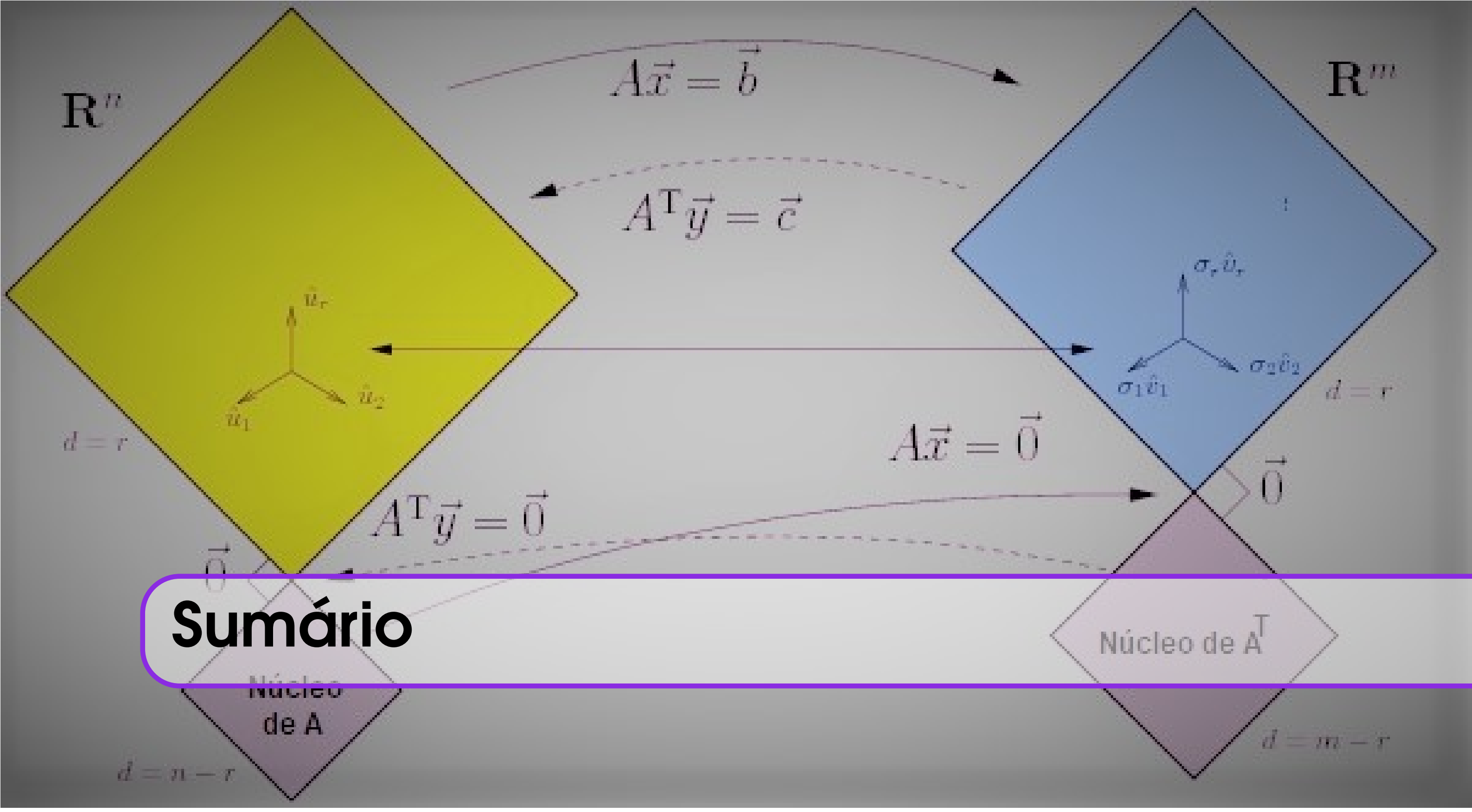
Caderno de Exercícios de Álgebra Linear A

UFBA - Semestre Letivo Suplementar 2020

Simone Moraes





$\mathbf{R}^n$
$A\vec{x} = \vec{b}$
$\mathbf{R}^m$
$A^{\mathrm{T}}\vec{y} = \vec{c}$
$\sigma_r \hat{v}_r$
$\sigma_1 \hat{v}_1$
$\sigma_2 \hat{v}_2$
$d = r$
$\hat{u}_r$
$\hat{u}_1$
$\hat{u}_2$
$d = r$
$A\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{0}$
$A^{\mathrm{T}}\vec{y} = \vec{0}$
$\vec{0}$
Núcleo de A^T
Núcleo de A
$d = n - r$
$d = m - r$

Sumário

Matrizes e Sistemas Lineares

1. Matrizes

1.1 Definição de Matrizes

1. As matrizes A, B, C, D e E tem ordens 4×3, 4×5, 3×5, 2×5 e 3×5, respectivamente. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e a ordem de cada uma:

   (a) $AE+B^T$; (b) $C(D^T+B)$; (c) $AC+B$; (d) $E^T(CB)$.

   Solução:

   (a) AE tem ordem 4×5, mas não é possível somar com B^T que tem ordem 5×4, distintas.

   (b) Não é possível somar $D^T_{5\times 2}$ e $B_{4\times 5}$ pois têm ordens distintas.

   (c) $\left(A_{4\times 3}\cdot C_{3\times 5}\right)_{4\times 5}+B_{4\times 5}$ tem ordem 4×5;

   (d) Não é possível multiplicar C por B, pois o número de colunas de C é igual 5 que é diferente do número de colunas de B, que é igual a 4.

2. Sejam A, B, C e D matrizes tais que AB^T de ordem 5×3 e que $(C^T+D)B$ de ordem 4×6.

   Determine a ordem de cada uma destas matrizes.

   Solução:

   AB^T que tem ordem $5\times 3 \Longrightarrow A_{5\times k}$ e $B^T_{k\times 3} \Longrightarrow B_{3\times k}$.

   Como $(C^T+D)B$ de ordem $4\times 6 \Longrightarrow C^T$ e D têm ordem $4\times l$ e $B_{l\times 6}$.

   Logo, $B_{3\times 6}$, $A_{5\times 6}$, C^T e D são de ordem 4×3 e portanto $C_{3\times 4}$.

3. Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, determine:

   (a) A ordem de A;

   (b) Os elementos a_{23}, a_{35} e a_{43}.

Solução:

(a) A matriz A tem ordem 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas.

(b) $a_{23}=11$, $a_{35}=3$ e $a_{43}=-4$, pois são os elementos localizados, respectivamente, 2ª linha e 3ª coluna; 3ª linha e 5ª coluna e 4ª linha e 3ª coluna.

4. Determine a matriz quadrada, $A=(a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i-3j, & \text{se } i<j \\ i^2+2j, & \text{se } i=j \\ -3i+4j, & \text{se } i>j \end{cases}.$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2+2\times 1 & 2\times 1-3\times 2 & 2\times 1-3\times 3 & 2\times 1-3\times 4 \\ -3\times 2+4\times 1 & 2^2+2\times 2 & 2\times 2-3\times 3 & 2\times 2-3\times 4 \\ -3\times 3+4\times 1 & -3\times 3+4\times 2 & 3^2+2\times 3 & 2\times 3-3\times 4 \\ -3\times 4+4\times 1 & -3\times 4+4\times 2 & -3\times 4+4\times 3 & 4^2+2\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 & -10 \\ -2 & 8 & -5 & -8 \\ -5 & -1 & 15 & -6 \\ -8 & -4 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

5. Determine números reais x, y, z e t tais que $\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y &= 3 \\ t &= -1 \\ z-t &= 0 \\ y+2z &= 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= -1 \\ z=t &= -1 \\ y=3-2z &= 5 \\ x=\dfrac{3-y}{2} &= -1 \end{cases}$$

6. (a) A **matriz de Hilbert** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $H_n=[h_{ij}]$ definida por: $h_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$, determine a matriz de Hilbert para $n=4$.

(b) A **matriz de Pascal** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $P_n=[p_{ij}]$ definida por: $p_{ij}=\dfrac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$, determine a matriz de Pascal para $n=5$.

Solução:

(a) $$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \frac{1}{1+3-1} & \frac{1}{1+4-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \frac{1}{2+3-1} & \frac{1}{2+4-1} \\ \frac{1}{3+1-1} & \frac{1}{3+2-1} & \frac{1}{3+3-1} & \frac{1}{3+4-1} \\ \frac{1}{4+1-1} & \frac{1}{4+2-1} & \frac{1}{4+3-1} & \frac{1}{4+4-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

é a matriz de Hilbert para $n=4$.

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{(1+1-2)!}{(1-1)!(1-1)!} & \frac{(1+2-2)!}{(1-1)!(2-1)!} & \frac{(1+3-2)!}{(1-1)!(3-1)!} & \frac{(1+4-2)!}{(1-1)!(4-1)!} & \frac{(1+5-2)!}{(1-1)!(5-1)!} \\ \frac{(2+1-2)!}{(2-1)!(1-1)!} & \frac{(2+2-2)!}{(2-1)!(2-1)!} & \frac{(2+3-2)!}{(2-1)!(3-1)!} & \frac{(2+4-2)!}{(2-1)!(4-1)!} & \frac{(2+5-2)!}{(2-1)!(5-1)!} \\ \frac{(3+1-2)!}{(3-1)!(1-1)!} & \frac{(3+2-2)!}{(3-1)!(2-1)!} & \frac{(3+3-2)!}{(3-1)!(3-1)!} & \frac{(3+4-2)!}{(3-1)!(4-1)!} & \frac{(3+5-2)!}{(3-1)!(5-1)!} \\ \frac{(4+1-2)!}{(4-1)!(1-1)!} & \frac{(4+2-2)!}{(4-1)!(2-1)!} & \frac{(4+3-2)!}{(4-1)!(3-1)!} & \frac{(4+4-2)!}{(4-1)!(4-1)!} & \frac{(4+5-2)!}{(4-1)!(5-1)!} \\ \frac{(5+1-2)!}{(5-1)!(1-1)!} & \frac{(5+2-2)!}{(5-1)!(2-1)!} & \frac{(5+3-2)!}{(5-1)!(3-1)!} & \frac{(5+4-2)!}{(5-1)!(4-1)!} & \frac{(5+5-2)!}{(5-1)!(5-1)!} \end{bmatrix}$$

(b)

$$= \begin{bmatrix} \frac{0!}{0!0!} & \frac{1!}{0!1!} & \frac{2!}{0!2!} & \frac{3!}{0!3!} & \frac{4!}{0!4!} \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{2!}{1!1!} & \frac{3!}{1!2!} & \frac{4!}{1!3!} & \frac{5!}{1!4!} \\ \frac{2!}{2!0!} & \frac{3!}{2!1!} & \frac{4!}{2!2!} & \frac{5!}{2!3!} & \frac{6!}{2!4!} \\ \frac{3!}{3!0!} & \frac{4!}{3!1!} & \frac{5!}{3!2!} & \frac{6!}{3!3!} & \frac{7!}{3!4!} \\ \frac{4!}{4!0!} & \frac{5!}{4!1!} & \frac{6!}{4!2!} & \frac{7!}{4!3!} & \frac{8!}{4!4!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 10 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Pascal para $n = 5$.

1.2 Operações com Matrizes

1. Determine números reais x e y tais que $\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x^3 - x & y^2 + 3y \\ y^2 + 4y & x^2 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} x^3 - x & = & 0 \\ y^2 + 3y & = & 4 \\ y^2 + 4y & = & 5 \\ x^2 + 2x & = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(x^2 - x) & = & 0 \\ y & = & 1 \\ (x+1)^2 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 1 \end{array} \right. .$$

2. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A \cdot B$ e $D = B \cdot A$, determine os elementos c_{32} e d_{43}.

Solução:

$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} = 1\times 3 + 2\times 1 + (-1)\times 2 + 5\times 3 = 3+2-2+15 = 18;$

$d_{43} = b_{41}a_{13} + b_{42}a_{23} + b_{43}a_{33} = 4\times 3 + 3\times 4 + 1\times(-1) = 12+12-1 = 23.$

3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine A^2; A^3; A^{31}; A^{42}.

Solução:

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2+(-1)\times 3 & 2\times(-1)+(-1)\times(-2) \\ 3\times 2+(-2)\times 3 & 3\times(-1)+(-2)\times(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, $A^3 = A^2\cdot A = I_2\cdot A = A$.

De modo geral, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ temos: $A^k = \begin{cases} I_2 & \text{se} \quad k \text{ é par} \\ A & \text{se} \quad k \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Consequentemente, $A^{31} = A$ e $A^{42} = I_2$.

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível:

(a) $4E-2D$; (b) $2A^T + C$; (c) $\left(2E^T - 3D^T\right)^T$; (d) $\left(BA^T - 2C\right)^T$;
(e) $(-AC)^T + 5D^T$; (f) $B^T\left(CC^T - A^TA\right)$; (g) $D^TE^T - (ED)^T$.

Solução:

(a) $$4E-2D = 4\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 \\ -4 & 4 & 8 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $$2A^T + C = 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(c) $$(2E^T - 3D^T)^T = 2E - 3D = 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

(d) $$(BA^T - 2C)^T = AB^T - 2C^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

(e) $(-AC)^T + 5D^T = -C^TA^T + 5D^T = -\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + 5\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 12 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}.$$

(f) $B^T(CC^T - A^TA) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}.$$

(g) $D^TE^T - (ED)^T = D^TE^T - D^TE^T = 0_{3\times 3}$.

5. Uma matriz A em $M_n(\mathbb{K})$ é chamada idempotente se $A^2 = A$, mostre que:

   (a) Se $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ são tais que $A \cdot B = A$ e $B \cdot A = B$, então A e B são idempotentes.

   (b) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ é idempotente.

Solução:

(a) $A^2 = A \cdot A \overset{AB=A}{=} (AB) \cdot (AB) = A(BA)B \overset{BA=B}{=} (AB)B \overset{AB=A}{=} AB = A$, logo A é idempotente.

Analogamente mostramos que B é idempotente.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, portanto é idempotente.

6. Determine, se possível:

   (a) Números reais x e y tais que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ comutam.

   (b) Todas as matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) As matrizes A e B comutam se, e somente se, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 1 \\ x+y & = & 1 \\ 1+2y & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{2} \\ y & = & -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$$

(b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+c &= a \\ b+d &= a+b \\ c+d &= d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ a &= d \end{cases}.$$

Logo, as matrizes que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

7. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $A + A^T$ e $A \cdot A^T$.

Solução:

Observemos que a matriz A é simétrica, pois $A = A^T$, logo

$$A + A^T = A + A = 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot A^T = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 & 8 \\ 20 & 29 & 11 \\ 8 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$, se $A \cdot B = B \cdot A$, mostre que:
   (a) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;
   (b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
   (c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

Solução:

(a) $(A \pm B)^2 = (A \pm B) \cdot (A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 \pm 2AB + B^2$.

(b) $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 - B^2$.

(c)
$$\begin{aligned} (A - B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 + A^2B + AB^2 - BA^2 - BAB - B^3 \\ &= A^3 + A(AB) + (AB)B - (BA)A - (BA)B - B^3 \\ &\overset{AB=BA}{=} A^3 + A(AB) + (AB)B - (AB)A - (AB)B - B^3 = A^3 - B^3. \end{aligned}$$

1.3 Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais

1. Determine, em cada um dos casos abaixo, números reais x, y e z tais que a matriz A seja simétrica.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ x & 1 \end{bmatrix} \iff x = 4.$$

(b) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 & y-2 \\ x+3 & -5 & 2z \\ -10 & -8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+3 = 15 \\ y-2 = -10 \\ 2z = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -8 \\ z = -4 \end{cases}.$$

(c) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & y+x \\ x^2+3 & -9 & z+3x \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2+3 = 7 \\ y+x = -5 \\ z+3x = 4 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow \begin{cases} x=2, \quad y=-7, \quad z=-2 \\ \text{ou} \\ x=-2, \quad y=-3, \quad z=10 \end{cases}.$$

2. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em simétrica e anti-simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A, \text{ logo } A \text{ é anti-simétrica.}$$

Se B fosse matriz simétrica teríamos $b_{ij} = b_{ji}$, para todos i e j, mas $b_{12} = 1-i \neq 1+i = b_{21}$, portanto B não é simétrica.

Se B fosse matriz anti-simétrica teríamos $b_{ij} = -b_{ji}$, para todos i e j, em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $b_{11} = 1 \neq 0$, portanto B não é anti-simétrica.

$$C^T = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix} = C, \text{ portanto } C \text{ é simétrica.}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} = D, \text{ portanto } D \text{ é simétrica.}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 0 & -2+i & 3 \\ 2-i & 0 & -i \\ -3 & i & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix} = -E, \text{ portanto } E \text{ é anti-simétrica.}$$

Se F fosse matriz simétrica teríamos $f_{ij} = f_{ji}$, para todos i e j, mas $f_{13} = -3+6i \neq 3+6i = b_{31}$, portanto F não é simétrica.

Se F fosse matriz anti-simétrica teríamos $f_{ij} = -f_{ji}$, para todos i e j, em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $f_{22} = 20i \neq 0$, portanto F não é anti-simétrica.

3. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{K})$, com $n > 1$ e α e β escalares em $\mathbb{K}$, mostre que:
   (a) $A + A^T$ é simétrica e $A - A^T$ é anti-simétrica.
   (b) Se A e B são simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
   (c) Se A e B são anti-simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
   (d) Se A e B são simétricas, então $A \cdot B$ é simétrica se, e somente se, A e B comutam.

Solução:

(a) $(A + A^T)^T \overset{T_2}{=} A^T + (A^T)^T \overset{T_1}{=} A^T + A = A + A^T$, portanto $A + A^T$ é simétrica.

$(A - A^T)^T \overset{T_2}{=} A^T - (A^T)^T \overset{T_1}{=} A^T - A = -(A - A^T)$, portanto $A - A^T$ é anti-simétrica.

(b) $(\alpha A + \beta B)^T \overset{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \overset{A,\ B \text{ simét.}}{=} \alpha A + \beta B$, portanto $\alpha A + \beta B$ é simétrica.

(c) $(\alpha A + \beta B)^T \overset{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \overset{A,\ B \text{ anti-sim.}}{=} \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B)$, portanto $\alpha A + \beta B$ é anti-simétrica.

(d) Se $A \cdot B$ é simétrica, então $(A \cdot B)^T = A \cdot B$, mas $(A \cdot B)^T \overset{T_4}{=} B^T \cdot A^T \overset{A,\ B \text{ simét.}}{=} B \cdot A$, logo $A \cdot B = B \cdot A$.

Reciprocamente, se A e B são simétricas e comutam, então $(A \cdot B)^T \overset{T_4}{=} B^T \cdot A^T \overset{A,\ B \text{ simét.}}{=} B \cdot A = A \cdot B$, ou seja, $A \cdot B$ é simétrica

4. Determine, se possível, números reais x e y de modo que a matriz A seja ortogonal, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

(b) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}(y + x) \\ \sqrt{2}(y + x) & 2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas, como $x \in \mathbb{R}$ a equação $2 + x^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = -1$ não tem solução.

Portanto, não existem x e y números reais tal que a matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ seja ortogonal.

5. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Solução:

$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, portanto A é ortogonal.

$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \\ & \end{bmatrix} \neq I_2$, portanto B não é matriz ortogonal.

$$C \cdot C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}+\frac{8}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{8}{9}+\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, C é matriz ortogonal.

$$\begin{aligned} D \cdot D^T &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, D é matriz ortogonal.

6. Sejam A e B em $M_n(\mathbb{R})$, mostre que se A e B são ortogonais, então $A \cdot B$ também o é.

Solução:

Suponhamos que A e B em $M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, logo:

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T \stackrel{T_4}{=} (A \cdot B) \cdot (B^T \cdot A^T) \stackrel{M_2}{=} A \cdot (B \cdot B^T) \cdot A^T \stackrel{B \text{ é ortog.}}{=} A \cdot A^T \stackrel{A \text{ é ortog.}}{=} I_n.$$

7. Dado θ número real considere a matriz $T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

   (a) Dados θ e ϕ em $\mathbb{R}$, mostre que $T_\theta \cdot T_\phi = T_{\theta+\phi}$.

   (b) Calcule $T_{(-\theta)}$.

   (c) Mostre que para todo número θ a matriz T_θ é ortogonal.

Solução:

(a) Sejam θ e ϕ números reais, então:

$$\begin{aligned} T_\theta \cdot T_\phi &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} = T_{\theta+\phi} \end{aligned}$$

(b) Dado $\theta \in \mathbb{R}$, então:

$$T_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(c) Seja θ um número real qualquer, então:

$$\begin{aligned} T_\theta \cdot T_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, T_θ é matriz ortogonal.

8. Em $M_2(\mathbb{R})$ determine todas as matrizes que são simultaneamente:
   (a) Simétricas e ortogonais.
   (b) Anti-simétricas e ortogonais.

Solução:

(a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é simétrica se, e somente se,

$$A = A^T \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow b = c.$$

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se,

$$A \cdot A^T = I_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ b(a+d) & = & 0 \\ b^2+d^2 & = & 1 \end{array} \right. .$$

Como a e b são números reais tais que $a^2+b^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \cos\theta \\ b & = & \sin\theta \end{array} \right.$ e como $b(a+d) = 0$ segue ainda que $b = 0$ ou $a = -d$.

Mas, temos também $b^2+d^2 = 1$, então existe $\phi \in [0, 2\pi)$ tal que $\left\{ \begin{array}{rcl} d & = & \cos\phi \\ b & = & \sin\phi \end{array} \right.$, assim temos: $\left\{ \begin{array}{rcccl} a & = & \cos\theta & = & -\cos\phi = -d \\ b & = & \sin\theta & = & \sin\phi \end{array} \right. \Longrightarrow \phi = \pi - \theta$, pois

$$\begin{array}{rcl} b & = & \sin\phi & = & \sin(\pi-\theta) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\theta - \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\sin\theta = \sin\theta \\ d & = & \cos\phi & = & \cos(\pi-\theta) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\theta + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\theta = -\cos\theta = -a. \end{array}$$

Logo, as matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ que são simétricas e ortogonais simultaneamente são do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é anti-simétrica, então $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff b^2 = 1 \iff b = 1 \text{ ou } b = -1.$$

Logo, as únicas matrizes reais quadradas de ordem 2 que são simultaneamente anti-simétricas e ortogonais são

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4 Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais

1. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em hermitiana e anti-hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

Vimos no exercício 2 da Seção 1.3 que:

- A é matriz real anti-simétrica, logo $A = -A^T = -\overline{A}^T = -A^*$, portanto A é anti-hermitiana.
- C é matriz complexa simétrica, logo $C = C^T$.

  Porém $C \neq C^* = \overline{C}^T$, ou seja, C não é hermitiana, por exemplo

  $$c_{12} = 3+2i \neq \overline{c_{21}} = \overline{3+2i} = 3-2i.$$

  A matriz C tampouco é anti-hermitiana, pois $C = C^T \neq -C^* = -\overline{C}^T$, por exemplo

  $$c_{23} = 8+2i \neq -\overline{c_{32}} = -\overline{8+2i} = -(8-3i) = -8+2i.$$

- D é matriz real simétrica, logo $D = D^T = \overline{D}^T = D^*$, portanto D é hermitiana.

- E é matriz complexa anti-simétrica, logo $E = -E^T$.

  Porém, $E \neq -E^* = -\overline{E}^T$, ou seja, E não é anti-hermitiana, por exemplo,

  $$-\overline{e_{21}} = \overline{-2+i} = -(-2-i) = 2+i \neq 2-i = e_{12}.$$

  A matriz E tampouco é hermitiana, pois $E \neq E^* = \overline{E}^T$, por exemplo

  $$\overline{e_{12}} = \overline{2-i} = 2+i \neq -2+i = e_{21}.$$

$$B^* = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 10 & -5i \\ 2 & 5i & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, a matriz B é hermitiana.

$$\begin{aligned} F^* &= \overline{\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} -3i & i & -3-6i \\ i & -20i & 1-\sqrt{5}i \\ 3-6i & -1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -3i & i & 3-6i \\ i & -20i & -1-\sqrt{5}i \\ -3-6i & 1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -F. \end{aligned}$$

Logo, a matriz F é anti-hermitiana.

2. Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$, mostre que:
   (a) Se A é matriz real e simétrica (ou anti-simétrica), então A é matriz normal.
   (b) Se A é matriz hermitiana (ou anti-hermitiana), então A é matriz normal.
   (c) As matrizes $A+\overline{A}^T$ e $A\cdot\overline{A}^T$ são matrizes hermitianas.

   Solução:

   (a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, se A é simétrica, então $A^T = A$, logo

   $$A\cdot A^T \overset{A \text{ simét.}}{=} A\cdot A \overset{A \text{ simét.}}{=} A^T\cdot A.$$

   Agora, se A é anti-simétrica, então:

   $$A\cdot A^T \overset{A \text{ anti-sim.}}{=} A\cdot(-A) = (-A)\cdot A = \overset{A \text{ anti-sim.}}{=} A^T\cdot A.$$

   Logo, se A é matriz real simétrica ou anti-simétrica, então A é matriz normal.

   (b) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, se A é hermitiana $A^ast = A$, então:

   $$A\cdot A^ast \overset{A \text{ herm.}}{=} A\cdot A \overset{A \text{ herm.}}{=} A^*\cdot A.$$

   Já se A é anti-hermitiana, então $A^ast = -A$ e temos:

   $$A\cdot A^ast \overset{A \text{ anti-herm.}}{=} A\cdot(-A) = (-A)\cdot A = \overset{A \text{ anti-herm.}}{=} A^*\cdot A.$$

   Logo, se A é matriz complexa hermitiana ou anti-hermitiana, então A é matriz normal complexa.

   (c) Observemos que $A+\overline{A}^T = A+A^*$ e

   $$(A+A^*)^* = (A+\overline{A}^T)^* = \overline{A+\overline{A}^T}^T = \left(\overline{A}+\overline{\overline{A}^T}\right)^T = (\overline{A}+A^T)^T = \overline{A}^T + (A^T)^T = \overline{A}^T + A = A^* + A.$$

   Portanto, $A+\overline{A}^T$ é matriz hermitiana.

   $$(A\cdot A^*)^* = (A\cdot\overline{A}^T)^* = \overline{A\cdot\overline{A}^T}^T = \left(\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}^T}\right)^T = (\overline{A}\cdot A^T)^T = (A^T)^T\cdot\overline{A}^T = A\cdot\overline{A}^T = A\cdot A^*.$$

   Portanto, $A\cdot\overline{A}^T$ também é matriz hermitiana

3. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em normais e unitárias:

$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Analogamente mostramos que $A^* \cdot A = I_2$.

Portanto, a matriz A é normal e unitária.

$$\begin{aligned} B \cdot B^* &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1-i \\ -1+i & 3+i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix} \neq I_2. \end{aligned}$$

Logo, B não é matriz unitária.

Como $B^* \cdot B = \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix}$, segue que B é matriz normal complexa.

$$C * C^* = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5i \\ -5i & 13 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Mas $C^* \cdot C = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \neq C \cdot C^*$, portanto C também não é normal.

1.5 Determinante

1. Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a -3.
   (a) Calcule o determinante da matriz P dada por $P = 4A^{-1}A^T$, P é invertível?
   (b) Calcule o determinante da matriz B obtida de A após serem realizadas as seguintes operações: $L_3 \leftrightarrow L_2$; $L_1 \rightarrow L_1 + 2L_5$; $L_4 \rightarrow -3L_4$.

Solução:

(a) $\det P = \det(4A^{-1}A^T) = 4^5 \ \det A^{-1} \det A^T = 1.024 \ \dfrac{1}{\det A} \det A = 1.024.$

(b) Como $\det P \neq 0$, segue que P é invertível.

(c) Ao efetuar a operação elementar $L_3 \leftrightarrow L_2$ o sinal do determinante é alterado, ao efetuar a operação $L_1 \to L_1 + 2L_5$ o determinante não se altera e ao efetuar $L_4 \to -3L_4$ o determinante deve ser multiplicado por -3 a operação elementar, portanto

$$\det B = (-1) \times (-3) \times \det A = 3 \times (-3) = -9.$$

2. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Teorema de Laplace (usando cofatores de uma linha ou de uma coluna de A).

(b) Usando operações elementares sobre as linhas de A.

Solução:

(a)
$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\text{pela 2ª linha}}{=} -(-1)\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\left[4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&= (9+2) + 4(5-6) - 3\big(4(8-3) + 5(4-6) + 2(1-4)\big) \\
&= 11 - 4 - 3(20 - 10 - 6) = 7 - 12 = -5.
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 + 2L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 + 5L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} \overset{L_3 \to \frac{1}{10}L_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} L_4 \to L_4 + 45L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$, pelas operações elementares temos:

$$-\frac{1}{2} = (-1)(-1)\frac{1}{10}\det A \iff \det A = -\frac{10}{2} = -5.$$

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$ utilizando as operações elementares sobre as linhas de A;

(b) $\det A^T$; (c) $\det A^2$; (d) $\det A^{-1}$; (e) $\det(-A)$; (f) $\det(3AA^T)$.

Solução:

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 6L_1 \\ L_4 \to L_4 - 5L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -23 & 9 & -19 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \; L_3 \to L_3 - L_2 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 + 7L_2 \\ L_4 \to L_4 - 22L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & -83 & 165 \end{bmatrix} \; L_4 \to \frac{83}{25}L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{vmatrix} = -58$, pelas operações elementares temos:

$$-58 = (-1)\det A \iff \det A = 58.$$

(b) $\det A^T = \det A = 58$.

(c) $\det A^2 = (\det A)^2 = 58^2 = 3.364$.

(d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{58}$.

(e) $\det(-A) = (-1)^4\, 58 = 58$.

(f) $\det(3AA^T) = 3^4 \det A \det A^T = 3^4 58^2 = 272.484$.

4. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{pela 3ª linha}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} 3 \times (4-45) = 4 \times (-41) = -123.$

(b)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{pela 3ª linha}}{=} -(-1)\begin{vmatrix} 1+a & c \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= c + (1+a) + b = 1 + a + b + c.
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix} \; L_3 \to L_3 - 2L_2 &= \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 0 & c-3 & 2-2c^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{pela 3ª linha}}{=} -(c-3)\begin{vmatrix} c & 3 \\ 2 & c^2 \end{vmatrix} + (2-2c^2)\begin{vmatrix} c & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (3-c)(c^3-6) + (2-2c^2)(c+8) \\
&= -c^4 + 3c^3 + 6c - 18 + 2c + 16 - 2c^3 - 16c^2 \\
&= c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2.
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_5 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{matrix} &= (-1)\times(-1) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 5 \times 2 \times (-1) \times (-4) \times (-3) = -120.
\end{aligned}$$

5. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0;$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16;$

(c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$

Solução:

(a) $$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x(x+1)(2x1) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{ou} \\ x+1 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x-1 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$$

(b) $$\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \Longleftrightarrow 5\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ x-1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2x+3 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Longleftrightarrow 5\big(4(x-2) - 3(x-1)\big) - (8 - 3(2x+3)) = 16$$

$$\Longleftrightarrow 5(x-5) + 1 + 6x = 16 \Longleftrightarrow 5x - 25 + 1 + 6x = 16$$

$$\Longleftrightarrow 11x = 40 \Longleftrightarrow x = \frac{40}{11}.$$

(c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} \iff x(1-x)+3 = \begin{vmatrix} x & -6 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\iff -x^2+x+3 = x(x-5)+18+(-3)(6-x)$$
$$\iff -x^2+x+3 = x^2-5x+18+-18+3x$$
$$\iff 2x^2-3x+3=0 \iff x = \frac{3\pm\sqrt{9+24}}{4} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

6. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\det(xI - A) = 0$.

Solução:

$$\det(xI-A)=0 \Leftrightarrow \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & -2 & -3 \\ 2 & x-3 & -2 \\ 4 & -2 & x-5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x+2)\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff (x+2)(x-3)(x-5)-4(x+2)+4(x-5)+16+12+12(x-3)=0$$
$$\iff (x+2)(x-3)(x-5)-4x-8+4x-20+16+12+12x-36=0$$
$$\iff (x+2)(x-3)(x-5)+12x-36=0 \iff (x-3)\big((x+2)(x-5)+12\big)=0$$
$$\iff (x-3)(x^2-3x-10+12)=0 \iff (x-3)(x^2-3x+2)=0$$
$$\iff \begin{matrix} x-3=0 \\ \text{ou} \\ x^2-3x+2=0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=1 \\ \text{ou} \\ x=2. \end{cases}$$

7. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Generalize o resultado para uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i+j \le n$.

Solução:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{14} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = a_{14}\times(-a_{23})\times\begin{bmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \\ &= a_{14}\times(-a_{23})\times(-a_{32}\times a_{41}) = a_{14}\times a_{23}\times a_{32}\times a_{41}, \end{aligned}$$

ou seja, se A é matriz quadrada de ordem 4 com $a_{ij} = 0$ sempre que $i+j \le 4$, então $\det A$ é o produto dos elementos da diagonal secundária.

Observemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = (-a_{13}) \times \left[\begin{array}{cc} 0 & a_{22} \\ a_{31} & a_{42} \end{array}\right] = (-a_{13}) \times (-a_{22} \times a_{31}) = a_{13} \times a_{22} \times a_{31}.$$

Logo, a generalização deste é resultado é: se A é matriz quadrada de ordem n, com $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$ e $n > 4$, então $\det A$ é o produto dos elementos da diagonal secundária, mas os elementos da diagonal secundária de A são os elementos A_{ij} tal que $i + j = n + 1$, logo temos:

$$\det A = a_{1n} \times a_{2(n-1)} \times \cdots \times a_{(n-1)2} \times \cdots \times a_{n1} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,(n+1)-i}.$$

8. Diz-se que uma matriz A é semelhante à matriz B quando existe uma matriz invertível P tal que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.
   (a) Mostre que se A é uma matriz semelhante a B, então B é semelhante a A.
   (b) Mostre que se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.
   (c) Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

Solução:

(a) $B = PAP^{-1} \iff P^{-1}BP = P^{-1}(PAP^{-1})P \iff P^{-1}BP = (P^{-1}P)A(P^{-1}P) = A$.
Logo, $A = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$, ou seja, B é semelhante a A.

(b) Suponhamos que $B = PAP^{-1}$ e $C = QBQ^{-1}$, então

$$C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1},$$

portanto A é semelhante a C.

(c) $\det B = \det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det P \det A \dfrac{1}{\det P} = \det A$.

1.6 Matriz Inversa

1. Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis, em caso afirmativo determine as inversas.

$$A = \left[\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{array}\right]; \qquad B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Solução:

Como $\det A = 30 - 24 = 6 \neq 0$, segue que A é invertível.

Vimos que para $A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$ com $\det A \neq 0$ a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left[\begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array}\right].$$

Logo, no nosso caso temos $A^{-1} = \dfrac{1}{6} \cdot \left[\begin{array}{cc} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{array}\right]$.

Como $\det B = 2 \neq 0$, então B é invertível, vamos determinar B^{-1} efetuando operações sobre as linhas de B e de I_3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \; L_2 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}.$$

Portanto, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os valores de a para que a matriz seja invertível em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Vimos que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = a - 4 - (2a-2) + 4 - 1 = -a + 1.$

Logo, $\det A \neq 0 \iff -a+1 \neq 0 \iff a \neq 1$.

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq 1$.

(b)
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 0 & a-4 & a-4 \end{vmatrix} \\ &= -(a-4)\begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (a-4)\begin{vmatrix} a+3 & 7 \\ -1 & a-5 \end{vmatrix} \\ &= (a-4)(6(a+3) - 6 + (a+3)(a-5) + 7) \\ &= (a-4)(6a + 18 + a^2 - 2a - 15 + 1) \\ &= (a-4)(a^2 + 4a + 4) = (a-4)(a+2)^2. \end{aligned}$$

Logo, $\det A \neq 0 \iff (a-4)(a+2)^2 \neq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} a-4 \neq 0 \\ \text{ou} \\ (a+2)^2 \neq 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a \neq 4 \\ \text{ou} \\ a \neq -2 \end{array} \right.$.

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq -2$ ou $a \neq 4$.

3. Sejam A, B e C matrizes invertíveis em $M_n(\mathbb{K})$, encontre a expressão da matriz X, nos seguintes casos:

(a) $AB^TX = C$; (b) $AB + CX = I_n$; (c) $(CB)^{-1}AX = I_n$; (d) $(AB)^TXC = I_n$.

Solução:

(a) Multiplicando a igualdade $AB^TX = C$ por A^{-1} à esquerda obtemos $B^TX = A^{-1}C$, multiplicando esta igualdade por $(B^T)^{-1}$ à esquerda obtemos $\boxed{X = (B^T)^{-1}A^{-1}C.}$

(b) Somando o oposto de AB na igualdade $AB+CX = I_n$ obtemos $CX = I_n - AB$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à esquerda obtemos $\boxed{X = C^{-1}(I_n - AB).}$

(c) Multiplicando a igualdade $(CB)^{-1}AX = I_n$ por CB à esquerda obtemos $AX = CB$, multiplicando esta igualdade por A^{-1} à esquerda obtemos $\boxed{X = A^{-1}CB.}$

(d) Multiplicando a igualdade $(AB)^TXC = I_n$ por $\left((AB)^T\right)^{-1}$ à esquerda obtemos $XC = \left((AB)^T\right)^{-1}$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à direita obtemos $\boxed{X = \left((AB)^T\right)^{-1}C^{-1}.}$

4. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz diagonal com $a_{11},\ a_{22}, \cdots,\ a_{nn}$ todos não nulos, determine A^{-1}, a inversa de A, se existir.

Solução:

Como $a_{11},\ a_{22}, \cdots,\ a_{nn}$ são todos não nulos, então $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$, logo existe A^{-1}.

Mas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

5. Em cada caso verifique se A é invertível; determine cof$A$, a matriz co-fatora de A, e A^{-1}, a matriz inversa de A, se esta existir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) Lembrando que a matriz cofatora de A, $\mathrm{cof}(A) = [\mathrm{cof}(a_{ij})]$, com $\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ e A_{ij} a matriz obtida de A retirando a i-ésima linha e j-ésima coluna, por exemplo

$$\mathrm{cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6+21 = 27,$$

$$\mathrm{cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-18) = 19.$$

Com cálculos análogos aos acima concluímos que $\operatorname{cof}(A)=\begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$, como $\det A = 152 \neq 0$, então existe A^{-1} e vimos que:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj}(A)=\frac{1}{\det A}\cdot(\operatorname{cof}(A))^T.$$

Logo,

$$A^{-1}=\frac{1}{152}\begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{1}{8} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

(b) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\operatorname{cof}(A)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\,\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, como $\det A = 1 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1}=\big(\operatorname{cof}(A)\big)^T=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\,\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\operatorname{cof}(A)=\begin{bmatrix} \frac{2}{18} & 2 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ -\frac{4}{18} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, como $\det A = \frac{1}{6} \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1}=6\begin{bmatrix} \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 2 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -2 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\operatorname{cof}(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & -72 & 60 & 128 \\ 18 & 36 & -39 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$, como $\det A = 72 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & -72 & 36 & 0 \\ 12 & 60 & -39 & 0 \\ 16 & 128 & -106 & 24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{24} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{53}{36} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Mostre que se A é invertível e $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$.

Solução:

$$AB = AC \overset{\text{existe } A^{-1}}{\Longrightarrow} A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Longleftrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Longleftrightarrow I \cdot B = I \cdot C \Longleftrightarrow B = C.$$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) A^{-1}; (c) B^{-1}; (d) $(AB)^{-1}$.

Solução:

Sabemos que o determinante de uma matriz quadrada triangular é o produto dos elementos da diagonal principal, logo $\det A = \det B = 24$.

(a) Portanto, $\det(AB) = \det A \det B = 24^2 = 576$.

(b) Determinemos A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \; L_4 \to \tfrac{1}{3}L_4 \quad \sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 2L_4 \\ L_2 \to L_2 - 4L_4 \\ L_3 \to L_3 + 2L_4 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; L_3 \to \tfrac{1}{4}L_3 \quad \sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; L_2 \to \tfrac{1}{2}L_2 \quad \sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 5L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Analogamente, obtemos $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

(d)

$$
\begin{aligned}
(AB)^{-1} &= B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{17}{24} & \frac{31}{36} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{3} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & -\frac{35}{12} & \frac{55}{18} \\ -\frac{25}{24} & -\frac{67}{24} & -\frac{119}{48} & \frac{187}{72} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, mostre que:
   (a) Se A satisfaz a igualdade $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.
   (b) Se A é tal que $A^{n+1} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$.

   Solução:

   (a) Primeiro observemos que

   $$A^2 - 3A + I = 0 \iff A(A - 3I) = -I \iff A(3I - A) = I.$$

   Portanto, A é invertível e $A^{-1} = 3I - A$.

   (b) Basta mostrar que $(I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^n) = I$.

   Mas,

   $$\begin{aligned} (I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^n) &= I + A + A^2 + \ldots + A^n - A - A^2 - \ldots - A^n - A^{n+1} \\ &= I - A^{n+1} \overset{A^{n+1}=0}{=} I. \end{aligned}$$

9. Supondo que A e B são matrizes quadradas de ordem n invertíveis, prove as seguintes igualdades:
   (a) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.
   (b) $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$.
   (c) $(A + BB^T)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^TA^{-1}B)^{-1}$.

   Solução:

   (a) $A(A+B)^{-1}B = \left(B^{-1}(A+B)A^{-1}\right)^{-1} = \left(B^{-1}AA^{-1} + B^{-1}BA^{-1}\right)^{-1} = \left(B^{-1} + A^{-1}\right)^{-1}$.

   (b) $(I + AB)^{-1}A = \left(A^{-1}(I + AB)\right)^{-1} = \left(A^{-1} + A^{-1}AB\right)^{-1} = \left(A^{-1} + B\right)^{-1}$
   $= \left((I + BA)A^{-1}\right)^{-1} = A(I + BA)^{-1}$.

   (c) $A^{-1}B(I + B^TA^{-1}B)^{-1} = \left((I + B^TA^{-1}B)B^{-1}A\right)^{-1} = \left(B^{-1}A + B^T\right)^{-1}$
   $= \left(B^{-1}(A + BB^T)\right)^{-1} = (A + BB^T)^{-1}B$.

10. Mostre que:

(a) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

(b) Se A é invertível, então adj$A$ é invertível e $(\text{adj}A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, A = \text{adj}(A^{-1})$.

(c) Se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$.

Solução:

(a) A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$

$$\iff (\det A)^2 \neq 0 \iff \det A \cdot \det A \neq 0 \overset{\det A^T = \det A}{\iff} \det A^T \cdot \det A \neq 0$$

$$\overset{\det B \det C = \det(BC)}{\iff} \det(A^TA) \neq 0.$$

Portanto, A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

(b) Sabemos que se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}A.$$

Logo, multiplicando a igualdade acima por $(\text{adj}A)^{-1}$ à direita obtemos:

$$A^{-1}(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\, I_n.$$

Agora multiplicando a última igualdade por A à esquerda obtemos:

$$(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\, A.$$

(c) Pelo item anterior temos $(\text{adj}A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, A$, então

$$\det\left((\text{adj}A)^{-1}\right) = \det\left(\frac{1}{\det A}\, A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\right)^n \det A = \frac{1}{(\det A)^n}\,\det A = \frac{1}{(\det A)^{n-1}}.$$

Como $\det(\text{adj}A) = \dfrac{1}{\det\left((\text{adj}A)^{-1}\right)} = (\det A)^{n-1}$.

11. Determine A^{-1}, se existir, utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz, em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) Como $\det A = 12+2 = 14 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_2:

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \; L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{3}L_1 \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \; L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \; L_2 \longrightarrow \tfrac{3}{14}L_2 \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array} \; L_1 \longrightarrow L_1 + \tfrac{1}{3}L_2$$

$$\sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-10)-(12-4)+3(20-4) = 32 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \; \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \; \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \longrightarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \; L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 - 3L_3$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \; L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_1 \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(c) Como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1)+(1-0) = 1 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \; \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \; \begin{array}{l} \\ \\ -L_3 \longrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \; \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \; L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \quad \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(d) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(2-12)-(8+12)-4(-8-2) = -20-20+40 = 0,$
portanto A não invertível e não existe A^{-1}.

(e) Como $\det A = 1 \neq 0$, pois A é matriz triangular e o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Determinemos a inversa de A efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_2 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 - 4L_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to L_4 - 2L_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Considere as seguintes matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre a expressão de X tal que $BAX = C$.

(b) Determine, caso exista, a inversa da matriz X do item acima.

Solução:

(a) Multiplicando a igualdade $BAX = C$ por $(BA)^{-1}$ à esquerda obtemos $X = (BA)^{-1}C$.

(b) Como as matrizes A, B e C são invertíveis segue que $(BA)^{-1}$ é invertível e também $X = (BA)^{-1}C$.

Além disso, $X^{-1} = \left((BA)^{-1}C\right)^{-1} = C^{-1}BA$.

No exercício 11 (c) temos: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e com cálculos simples concluímos que $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

1.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

1. (   ) Se a soma de matrizes $A \cdot B + B \cdot A$ está definida, então as matrizes A e B têm a mesma ordem.
2. (   ) Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então A não é invertível.
3. (   ) Se A é invertível de ordem n e $A \cdot B_{n\times m} = 0_{n\times m}$, então B é a matriz nula de ordem $n \times m$.
4. (   ) A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.
5. (   ) Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^4 = 0$, então $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.
6. (   ) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2\det A$.
7. (   ) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(I_n + A) = 1 + \det A$.
8. (   ) Não existe matriz quadrada real A para a qual $\det(A \cdot A^T) = -1$.
9. (   ) Se $\det(A^T \cdot A) = 4$, então $\det A = 2$.
10. (   ) $\det(A + B) = \det A + \det B$.
11. (   ) Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det A = -\dfrac{1}{2}$, então $\det\left(-2A^2A^T \cdot A^{-1}\right) = -4$.
12. (   ) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, com $n > 1$, então $\det(-A) = -\det A$.
13. (   ) Toda matriz diagonal é invertível.
14. (   ) Dadas A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então $\left(I + A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} \cdot A^{-1} = \left(A + B^T\right)^{-1}$.
15. (   ) Se A^{100} é invertível, então $3A$ também o é.
16. (   ) Se A é uma matriz anti-simétrica, então a matriz A^k é anti-simétrica para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
17. (   ) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então A é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
18. (   ) Toda matriz complexa simétrica é uma matriz normal.
19. (   ) Se A é uma matriz real simétrica, então A é matriz normal.
20. (   ) O conjugado da soma de duas matrizes simétricas é uma matriz normal.
21. (   ) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

22. ( ) A soma de matrizes reais hermitianas é uma matriz simétrica.
23. ( ) A transposta do produto de matrizes ortogonais é o produto de suas inversas.
24. ( ) A soma de matrizes idempotentes é uma matriz idempotente.
25. ( ) Se A e B matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AB = A$ e $BA = B$, então A e B são matrizes idempotentes.
26. ( ) A soma de duas matrizes hermitianas é uma matriz normal.
27. ( ) O traço de uma matriz quadrada é igual ao traço de sua transposta.
28. ( ) O traço de uma matriz ortogonal é igual ao traço de sua inversa.
29. ( ) O traço de uma matriz quadrada complexa é igual ao traço de sua conjugada transposta.
30. ( ) O conjugado do traço de uma matriz hermitiana é igual ao traço da matriz.

Solução:

1. (V) Dizer que a diferença de matrizes $AB - BA$ está definida, é equivalente a dizer que AB e BA têm a mesma ordem.
Já que estão definidos os produtos AB e BA, então o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, ou seja, A e B são matrizes de ordens $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente.
Consequentemente, $(AB)_{n\times n}$ e $(BA)_{m\times m}$.
Portanto, AB e BA têm a mesma ordem se, e somente se, $m = n$, ou seja, se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem.

2. (V) Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então
$$\det(A\cdot A^T) = 0 \overset{\det(BC)=\det B \det C}{\iff} \det A \cdot \det A^T = 0 \overset{\det A^T = \det A}{\iff} (\det A)^2 = 0 \iff \det A = 0.$$
Portanto, A não é invertível.

3. (V) Se A é invertível e $A \cdot B = 0$, então multiplicando por A^{-1} à esquerda obtemos $A^{-1}\cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0_{n\times m} \iff B = 0_{n\times m}$, ou seja, B é a matriz nula $n \times m$.

4. (F) As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ são invertíveis, pois $\det A = \det B = -6 \neq 0$, porém $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ que não é uma matriz invertível.

5. (V) De fato, $(I_n + A + A^2 + A^3)\cdot(I_n - A) = I_n + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 \overset{A^4=0}{=} I_n$, consequentemente, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.

6. (F) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2^n \det A \overset{n\geq 2}{\geq} 2 \det A$ e a igualdade só ocorre se $\det A = 0$, logo tomando A tal que $\det A \neq 0$ a igualdade não se verifica.

7. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $1 + \det A = 1 + 3 = 4$, porém $\det(I_3 + A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 1 + 3$.

8. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \overset{\det A \in \mathbb{R}}{\geq 0}$.
Portanto, não existe matriz quadrada real A tal que $\det(A\cdot A^T) = -1$.

9. (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = 4 \Longleftrightarrow \det A \cdot \det A^T = 4$

$$\Longleftrightarrow (\det A)^2 = 4 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \det A = 2 \\ \text{ou} \\ \det A = -2 \end{array} \right. .$$

10. (F) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

    Logo, $\det(A+B) = 10 \neq 5 = 2 + 3 = \det A + \det B$.

11. (F) Pois,

$$\begin{aligned} \det\left(-2A^2A^T \cdot A^{-1} \right) &\overset{*}{=} (-2)^4 \cdot \det(A^2) \cdot \det A^T \cdot \det A^{-1} \\ &\overset{**}{=} 16 \cdot \left(\det A\right)^2 \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = 16 \cdot \left(\det A\right)^2 \\ &= 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4 \neq -4. \end{aligned}$$

    $*$ $\det(kA) = k^n \det A$ e $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

    $**$ $(\det A)^k = \det A^k$, $\det A^T = \det A$ e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

12. (F) Se A é uma matriz quadrada invertível de ordem n, com n número par, então:

$$\det(-A) = (-1)^n \det A \overset{n \text{ é par}}{=} \det A \overset{\det A \neq 0}{\neq} -\det A.$$

13. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então A é matriz diagonal, mas $\det A = 0$ e portanto A não é invertível.

14. (V) Se estão em A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então A e B são invertíveis e:

$$\left(I + A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} \cdot A^{-1} = \left(A \cdot \left(I + A^{-1} \cdot B^T\right)\right)^{-1} = \left(A + A \cdot A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} = (A + B^T)^{-1}.$$

15. (V) Se A^{100} é invertível, então $\det(A^{100}) \neq 0 \Longleftrightarrow (\det A)^{100} \neq 0 \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

    Como $\det(3A) = 3^n \underbrace{\det A}_{\neq 0} \neq 0$, consequentemente $3A$ é matriz invertível.

16. (F) Pois, A é uma matriz quadrada anti-simétrica, se, e somente se, $A = -A^T$.

    Logo, dado $k \in \mathbb{N}^*$, então $A^k = (-A^T)^k = (-1)^k (A^T)^k = (-1)^k (A^k)^T$.

    Portanto, se k é ímpar temos $A^k = -(A^k)^T$ e A^k é anti-simétrica, mas se k é par temos $A^k = (A^k)^T$ e A^k é simétrica e não anti-simétrica.

17. (V) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz qualquer, então podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A + A^T - A^T\right) = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{anti-simétrica}}.$$

18. (F) Se A é simétrica, então $A = A^T$, portanto $A \cdot A^* = A \cdot \overline{A}^T = A \cdot \overline{A^T} \overset{A^T = A}{=} A \cdot \overline{A}$, analogamente $A^* \cdot A == \overline{A} \cdot A$.

Por exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, no entanto

$$A \cdot A^* = A \cdot \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1+i & 2i \\ 1+i & 4 & 1-i \\ -2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A^* \cdot A = \overline{A} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1-i & -2i \\ -1+i & 4 & 1+i \\ i & 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A \cdot A^* \neq A^* \cdot A$ e A não é matriz complexa normal.

19. (V) Se A é uma matriz real simétrica, então $A = A^T$, logo $A \cdot A^T = A \cdot A = A^T \cdot A$ e A é matriz real normal.

20. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 0 & i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}$ são simétricas e $\overline{A+B} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$, como vimos no item 18 esta matriz não é normal.

21. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes reais simétricas, porém o elemento $ab_{12} = 8 \neq 7 = ba_{12}$, logo $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A \neq A \cdot B$, portanto $A \cdot B$ não é simétrica.

22. (V) Se A é matriz real hermitiana, então $A = A^* = \overline{A}^T \overset{A \in M_n(\mathbb{R})}{=} A^T$, portanto A é simétrica e a soma de matrizes reais simétricas é uma matriz simétrica.

De fato, se $A^T = A$ e $B^T = B$, matrizes de mesma ordem, então $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$.

23. (F) Sejam A e B matrizes ortogonais em $M_n(\mathbb{R})$, então $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$, logo $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B^{-1} \cdot A^{-1}$ é o produto das inversas de B e A, porém como o produto de matrizes não é comutativo, em geral $(A \cdot B)^T \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$.

24. (F) A matriz $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ é idempotente, no entanto $I_n + I_n = 2I_n$ não é idempotente, pois $(2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n$.

25. (V) De fato,

$$A^2 = A \cdot A = (AB) \cdot (AB) = Aa \cdot (BA) \cdot B = A \cdot B \cdot B = (AB) \cdot B = A \cdot B = A,$$

$$B^2 = B \cdot B = (BA) \cdot (BA) = B \cdot (AB) \cdot A = B \cdot A \cdot A = (BA) \cdot A = B \cdot A = B.,$$

Portanto,A e B são matrizes idempotentes.

26. (V) Sejam A e B matrizes hermitianas, então $A^* = A$ e $B^*B = B$, logo:

$$(A+B)\cdot(A+B)^* = (A+B)\cdot(B^*+A^*) = AB^* + BB^* + AA^* + BA^* \underset{A^*=A\ B^*=B}{=} AB + B^2 + A^2 + BA = (A+B)^2.$$

Analogamente, $(A+B)^*\cdot(A+B) = (A+B)^2$.

Portanto, $A+B$ é uma matriz normal.

27. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então a diagonal principal de A é igual à diagonal principal de A^T, como

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr}(A^T).$$

28. (V) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então $A^{-1} = A^T$, logo $\operatorname{tr}(A^{-1}) = \operatorname{tr}(A^T) \overset{item27}{=} \operatorname{tr}(A)$.

29. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{bmatrix}$, então $\operatorname{tr}(A) = 1+i+2+i+3-i = 6+i$ e $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix}$, logo $\operatorname{tr}(A^*) = 1-i+2-i+3+i = 6-i$, portanto $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(A^*)$.

30. (V) Seja A uma matriz hermitiana, então $\overline{\operatorname{tr}(A)} = \operatorname{tr}(\overline{A}) = \operatorname{tr}(\overline{A}^T) = \operatorname{tr}(A^*) = \operatorname{tr}(A)$.

1.8 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

Observação: Nesta seção, dada uma matriz A vamos indicar por $p(A)$ o posto de A e $n(A)$ a nulidade de A.

1. Encontre a forma escalonada reduzida (forma escada) das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 - 2L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \to -\tfrac{1}{6}L_2$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 - 4L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 + 2L_1 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 + L_3$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- $$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \\ \\ L_2 \to \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 - 2L_1 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \to \frac{1}{5}L_2$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 + 3L_2 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$.

- Como $\det E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6+8) + 3(6-2) - 14 + 12 = -2 \neq 0$, segue que a forma reduzida de E é a matriz identidade I_3.

2. Verifique, se possível, para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ as matrizes abaixo são linhas equivalentes à matriz identidade I_3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Uma matriz A quadrada de ordem n termo forma reduzida a matriz identidade I_n se, e somente se, $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5-1) + m(2+5) = -12 + 7m.$$

Logo, $\det A \neq 0 \iff -12 + 7m \neq 0 \iff m \neq \dfrac{12}{7}$.

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} \\ &= m(2-m)-2(4-2)+m(2m-2) = 2m-m^2-4+2m^2-2m = m^2-4.\end{aligned}$$

Logo, $\det B \neq 0 \iff m^2-4 \neq 0 \iff m^2 \neq 4 \iff m \neq 2$ e $m \neq -2$.

3. Determine o posto e a nulidade de cada uma das seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

- Pelo item (a) do exercício 1 $p(A) = 3$ e $n(A) = 1$.
- A matriz B está na forma escalonada e não tem linhas nulas, logo $n(B) =$ número de linhas de $B = 2$, consequentemente $n(B) =$ número de linhas de $B - p(B) = 4 - 2 = 2$.
- $\det C = 2 \neq 0$, logo $p(C) =$ número de linhas de $C = 2$ e $n(C) = 0$.
- A forma escalona de D é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(D) = 2$ e $n(D) = 0$.
- A forma escalona de E é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(E) = 3$ e $n(E) = 0$.

4. Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições em cada um dos seguintes casos:

(a) $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$; (b) $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$;

(c) $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$; (d) $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 2$;

(e) $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$; (f) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$;

(g) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$.

Solução:

(a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ é tal que $p(A) = 2$.

(b) Dada $A_{m\times n}$ vimos que $p(A) \leq min\{m,n\}$, logo se $A_{3\times 2}$, então $p(A) \leq min\{3,2\} = 2$, portanto não há matriz $A_{3\times 2}$ com $p(A) = 3$.

(c) Pelo mesmo argumento do item anterior não há matriz $A_{2\times 4}$ com $p(A) = 3$.

(d) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ é tal que $n(A) = 2$.

(e) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.

(f) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.

5. Dada a matriz $B_{m\times n}$, determine a matriz N, linha forma reduzida de B (forma escada) e a matriz invertível M, de ordem m, tal que $N = M \cdot B$, em cada um dos seguintes casos:

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 0 \\ 1+i & \dfrac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

Solução:
Para determinar as matrizes N e M basta efetuar operações elementares, simultaneamente, na matriz B e na matriz identidade I_m até B estar forma escalonada reduzida.

(a)

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}.$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(b)

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & \dfrac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1+i & \dfrac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - (1+i)L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(5+i) & -\dfrac{1+i}{2} & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \longrightarrow -\frac{1}{5+i}L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{3+2i}{26} & 1\dfrac{-5+i}{26} \end{array}.$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1-\dfrac{i}{2} & 0 \\ 1+i & \dfrac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{3+2i}{26} & 1\dfrac{-5+i}{26} \end{bmatrix}$.

2. Sistemas Lineares

2.1 Resolução de Sistemas Lineares

1. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 4 \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & -7 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$,

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \\ 4x & - & 7y & = & 2 \end{array}\right.$, (d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3t & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8t & = & 10 \end{array}\right.$.

2. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado seja compatível.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} -4x & + & 3y & = & 2 \\ 5x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & k \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} a_1 & + & 2a_2 & = & -1 \\ -3a_1 & + & 4a_2 & = & k \\ 2a_1 & - & a_2 & = & -7 \end{array}\right.$.

3. Determine os valores de a e b que tornam o sistema linear $S:\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & a \\ x & + & y & = & b \\ 5x & + & 3y & = & 5a+2b \\ x & + & 2y & = & a+b-1 \end{array}\right.$ compatível e determinado.

4. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 2y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}\right.$.

5. Resolva os seguintes sistemas utilizando a **Regra de Cramer**:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 7 \\ 3x & + & 5y & = & 1 \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & = & 8 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right.$.

6. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, tais que o sistema linear dado tenha:

   (i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

   (a) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 22x - y = k \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases}$,

   (c) $\begin{cases} 2x - 2y + kz = 2 \\ 2x - y + kz = 3 \\ x - ky + z = 0 \end{cases}$, (d) $\begin{cases} x + kz = -2 \\ x - y - 2z = k \\ x + ky + 4z = -5 \end{cases}$,

   (e) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$, (f) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$,

   (g) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$, (h) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$.

7. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial:

   (a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$.

8. Determine os valores reais de a e b para que o sistema linear $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$ tenha: (a) uma única solução; (b) infinitas soluções; (c) nenhuma solução:

9. Determine a solução do sistema linear $S : \begin{cases} 2x - (1-i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases}$, no conjunto dos números complexos.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$, encontre os valores reais de λ para os quais o sistema homogêneo $AX = 0$ admite apenas a solução trivial.

11. Sejam

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determine, se possível, a inversa de A.

    (b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1, 2, 3$.

12. Determine a condição que os números reais a, b e c devem satisfazer para que, em cada um dos casos abaixo, o sistema dado tenha solução.

    (a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$,

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & a \\ 2x & + & 3y & - & z & = & b \\ 3x & + & y & + & 2z & = & b \end{array}\right.$, (d) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & a \\ x & + & y & = & b \\ 5x & + & 3y & = & 5a+2b \\ x & + & 2y & = & a+b-1 \end{array}\right.$,

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & a \\ -3x & + & 4y & = & b \\ 2x & - & y & = & c \end{array}\right.$, (f) $\left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & 3b & = & x \\ 2a & - & b & = & y \\ -2a & + & b & = & z \\ 3a & + & b & = & t \end{array}\right.$.

13. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right.$. Mostre que:
    (a) se $ad-bc \neq 0$, então o sistema tem uma única solução, dada por
    $$x = \frac{de-bf}{ad-bc} \text{ e } y = \frac{af-ce}{ad-bc};$$
    (b) se $ad-bc=0$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$, então o sistema não tem solução.
    (c) se $ad-bc=0$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$, então o sistema tem infinitas soluções.

14. Dado o sistema linear $S: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$.
    (a) Verifique que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ e $z_1 = -1$ é uma solução de S;
    (b) Verifique que $x_2 = -2$, $y_1 = 2$ e $z_1 = 2$ também é uma solução de S;
    (c) É verdade que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$ é uma solução de S?
    (d) É verdade que $3x$, $3y$ e $3z$, onde x, y e z são como no item (c), é uma solução de S?
    (e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

15. Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método do Escalonamento**. Classifique-os.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$, (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 9 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 13 \end{array}\right.$,

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = & 4 \\ 5x & + & 3y & + & 4z & = & -10 \end{array}\right.$, (d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 6y & - & 8z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$,

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & & & + & w & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & - & 3t & + & w & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & & & - & w & = & 0 \\ & & & & z & + & t & + & w & = & 0 \end{array}\right.$, (f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & 4 \end{array}\right.$,

(g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & & & = & 1 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \\ 5x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$, (h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 7y & - & 7z & = & 5 \end{array}\right.$,

(i) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$, (j) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 11 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$,

(k) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - 2y + z + t = 2 \end{cases}$, (l) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$,

(m) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ 2x - 3y - 4z = 15 \\ 3x + 4y + 5z = -8 \end{cases}$, (n) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$,

(o) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$, (p) $\begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$,

(q) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 5y = -8 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$, (r) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$,

(s) $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$, (t) $\begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0 \\ 4x - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$,

(u) $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$, (v) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases}$,

(x) $\begin{cases} x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14 \\ 2x + 6y + z - 2t + 5w = -2 \\ x + 3y - z + 2w = -1 \end{cases}$.

16. Determine k, nos seguintes casos, de acordo com o que se pede.

   (a) De modo que o sistema linear

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = k \end{cases},$$

   admita solução.

   (b) De modo que o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_3 = 0 \end{cases},$$

   tenha uma solução distinta da solução trivial.

   (c) Que torne o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 + kx_4 = 9 \end{cases},$$

   incompatível.

17. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

   (a) ( ) Se o sistema linear $AX = 0$ admite as soluções X_1 e X_2, então também admite $k_1X_1 + k_2X_2$ como solução, quaisquer que sejam os números reais k_1 e k_2.

   (b) ( ) Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $AX = 0$ tenha somente a solução trivial é que $\det A \neq 0$.

   (c) ( ) Um sistema linear homogêneo admite a solução trivial.

   (d) ( ) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $AX = 0$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = 0$.

   (e) ( ) Se C é uma matriz invertível tal que $CA = CB$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $BX = b$ são equivalentes.

   (f) ( ) Se A é uma matriz tal que $A^TA = A$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $A^2X = b$ são equivalentes.

2.1.1 Aplicações de Sistemas Lineares

18. Uma refinaria de petróleo processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo de baixo teor necessita de 5 minutos no setor de mistura e 4 minutos no setor de refinaria; já o petróleo com alto teor são necessários 4 minutos no setor de mistura e 2 minutos no setor de refinaria. Se o setor de mistura está disponível por 3 horas, e o setor de refinaria por 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de combustível devem ser processadas de modo que os dois setores não fiquem ociosos?

19. Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: o normal e o especial. Para produzir uma tonelada de plástico normal são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico especial são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?

20. Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento no alimento C encontramos 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?

21. Um cooperativa produz três tipos de ração: X, Y e Z, utilizando farelo de soja, gordura animal e milho. Cada quilograma da ração A contém 100 g de farelo de soja e 200 g de milho e não contém gordura animal; cada quilograma da ração B contém 300 g de farelo de soja, 100 g de gordura animal e 400 g de milho; cada quilograma da ração C contém 200 g de farelo de soja, 200 g de gordura animal e 100 g de milho.

   Sabendo que a disponibilidade destes produtos na cooperativa nos meses de abril, maio e junho foi dada como na tabela abaixo. Pede-se para determinar qual a quantidade de cada tipo de ração foi produzido em cada um destes meses.

Quant./ Mês (em tonelada)	Farelo de Soja	Gordura Animal	Milho
Abril	1	1,5	2
Maio	1,3	2	1,6
Junho	1	1,4	1,8

22. Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela abaixo.

Alimento	Bactéria I	Bactéria II	Bactéria III
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Determine quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento.

23. Num torneio de triatlon as competições: nado, corrida e ciclismo foram pontuadas com pesos x, y e z, respectivamente. A tabela abaixo apresenta a pontuação dos quatro primeiros colocados em cada categoria e sua respectiva classificação final.

	Nado	Corrida	Ciclismo	Classificação Geral
Atleta 1	7,5	9	9	8,4
Atleta 2	8	7	9	8
Atleta 3	9	7,5	8,5	7,9
Atleta 4	7,5	8	8	7,8

O terceiro atleta alegou que se as classificações dos 1, 2 e 4 atletas estivessem corretas, então sua classificação estaria incorreta. Sabendo que a classificação geral foi obtida pela média ponderada da pontuação de cada uma das competições e supondo que o terceiro atleta está correto determine:

(a) o peso de cada competição;

(b) a classificação do terceiro candidato.

24. No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos supermercados pagarei $R\$31,00$. Determine x, y e z.

25. Uma firma fabrica dois produtos: A e B. Cada um deles passa por duas máquinas: I e II. Para se fabricar uma unidade de A gasta-se $1h$ da máquina I e $1,5h$ da máquina II. Cada unidade de B gasta $3h$ de I e $2h$ de II. Quantas unidades de cada produto poderão ser fabricadas em um mês se, por motivos técnicos, I só funciona 300 horas e II só 250 horas por mês?

26. Dois metais x e y são obtidos de dois tipos de minérios I e II. De $100Kg$ de I se obtém 3 gramas de x e 5 gramas de y e de $100Kg$ de II obtém-se 4 gramas de x e $2,5$ gramas de y. Quantos quilos de minério de cada tipo serão necessários para se obter 72 gramas de x e 95 gramas de y, usando-se simultaneamente os dois minérios?

27. Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira perde para cada um dos outros dois a mesma quantia que cada um deles tinha no início do jogo. Na segunda rodada, a segunda pessoa perde para cada um dos outros a mesma quantia que eles tinham no final da 1a rodada. Na terceira rodada, o 1 e o 2 jogadores ganham do 3 a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui $R\$24,00$. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?

28. Uma indústria produz três produtos, A, B e C, utilizando dois tipos de insumos, X e Y. Para a manufatura de cada quilo de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y; para cada quilo de B, 1 grama do insumo X e 1 grama do insumo Y e, para cada quilo de C, 1 grama do insumo X e 4 gramas do insumo Y. O preço da venda do quilo de cada um dos produtos A, B e C é de $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$5,00$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A, B e C manufaturada com 1 quilo de X e 2 quilos de Y, essa indústria arrecadou $R\$2500,00$. Determine quantos quilos de cada um dos produtos A, B e C foram vendidos.

29. Cada ração contém as seguintes unidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G).

	P	C	G
(1)	1	0	2
(2)	3	1	4
(3)	2	2	1

Se as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G) que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo, qual a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês?

Quant./mês	P	C	G
Dezembro	15	10	14
Janeiro	13	5	17