Matemática Discreta II — 2020.1
Março de 2020 — UFBA
Professor Andreas

Primeira lista de exercícios
(Números Naturais e Inteiros, Divisibilidade, Algoritmo de Euclides, Mdc, Números Primos, Equações Diofantinas, Congruências e Teorema chinês)

"*As revoluções são as locomotivas da história.*"
(Karl Marx, filósofo e escritor, 1818 - 1883)

1. Mostre que para naturais $n, m \in \mathbb{N}$ temos que
   (a) $S(n) = 1 + n$,
   (b) $n + m = m + n$.
   (Dica: Faça uma prova por indução conforme feito em aula.)

2. Mostre que vale o lei do cancelamento em respeito da adição para os números naturais,i.e.,
$$\text{para quaisquer } k, m, n \in \mathbb{N}, \quad m + k = n + k \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

3. Mostre (por indução) que o produto $m \cdot n$ definida por recursão em aula, está definido para todo par de números naturais.

4. Mostre que
   (a) $1 \cdot m = m = m \cdot 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Use indução em m.
   (b) O elemento neutro 1 da multiplicação é único.

5. Mostre que a multiplicação de naturais é associativa.

6. (a) Sejam a, b inteiros tais que $a < b$. Mostre que $-b < -a$.
   (b) Definimos o **valor absoluto** de um número inteiro a, $|a|$, como sendo
$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq a \\ -a & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   Mostre que
   (i) $0 \leq |a|$ e $|a| = 0$ sse $a = 0$.
   (ii) $-|a| \leq a \leq |a|$.

7. * Seja $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$.
   Considerando o produto Cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos a seguinte relação r $\langle a, b \rangle \; r \; \langle c, d \rangle$ sse $ad = bc$.
   (a) Mostre que r é uma relação de equivalência.
   (b)* Seja $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/r$. Defina $\langle a, b \rangle/r + \langle c, d \rangle/r := \langle ad + bc, bd \rangle/r$. Mostre que esta definição é independente dos representantes, isto é,
   se $\langle a, b \rangle/r = \langle a', b' \rangle/r$ e $\langle c, d \rangle/r = \langle c', d' \rangle/r$ então, $\langle a, b \rangle/r + \langle c, d \rangle/r = \langle a', b' \rangle/r + \langle c', d' \rangle/r$.

8. Mostre que:
(a) $\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.
(b) Seja x um inteiro positivo não nulo, então: $(1+x)^n > 1+nx, \ \forall n \geq 2$.
(c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$. Observe que por 11. (b), $\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ é natural!

9. Sejam a, b, c números inteiros. Mostre que
(a) Se $a|b$ então, $(-a)|b$, $a|(-b)$ e $(-a)|(-b)$.
(b) Se $c \neq 0$ então, $a|b$ se, e somente se, $ac|bc$.

10. Usando o algoritmo da divisão mostre que:
(a) O quadrado de um inteiro é da forma $3k$ ou $3k+1$.
(b) O quadrado de um inteiro é da forma $4k$ ou $4k+1$.
(c) De três inteiros consecutivos, um é múltiplo de 3.

11. (a) Mostre para um inteiro $a \in \mathbb{Z}$ que $4 \not| \ (a^2+2)$.
(b) Mostre que para todo $n \geq 1$, $6|n(n+1)(2n+1)$.
Observe que no ítem (b) pode-se fazer uma prova por indução como também uma prova sem usar o príncipio da indução fazendo uso do teorema de Euclides mostrando que 2 e 3 são divisores do termo $n(n+1)(2n+1)$. Se possível faça as duas!

12. Escreva:
(a) 1472 em base 5.
(b) 218 em base 2.
(c) $(1235)_6$ em base 10.
(d) $(2356)_7$ em base 8.
(e) $(21)_3$ em base 12.

13. Mostre as seguintes critérios de divisibilidade. Seja b um inteiro positivo cuja expressão na base 10 é dada por
$$b = r_n 10^n + r_{n-1}10^{n-1} + \ldots + r_1 10 + r_0$$
(a) $2|b$ sse $2|r_0$.
(b) $3|b$ sse $3|(r_0 + \ldots + r_n)$.

14. Sejam a, b e c inteiros não nulos. Mostre que
(a) Se $a|b$ e $mdc(b,c) = 1$, então $mdc(a,c) = 1$.
(b) $mdc(a,c) = mdc(b,c) = 1$ sse $mdc(ab,c) = 1$.
(c) Sejam a e b relativamente primos e c tal que $a|c$ e $b|c$, então $ab|c$.

15. Sejam p um primo e a, b inteiros não nulos. Mostre que se $p \not| a$, então $mdc(a,p) = 1$.

16. Use o algoritmo de Euclides para obter os números r e s satisfazendo:
(a) $mdc(56,72) = 56r + 72s$.
(b) $mdc(24,138) = 24r + 138s$.
(c) $mdc(119,272) = 119r + 272s$.

17. Mostre que existe um número infinito de primos. (Dica: Suponha que existe número finito $p_1, \ldots, p_n$ de primos e considere o natural $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. A partir daí conclua uma contradição.)

18. Seja p um primo e $a, b \in \mathbb{Z}$.
Mostre que: Se $p|ab$ então, $p|a$ ou $p|b$.
Generalize este resultado para um produto de a_i's quaisquer, isto é, se $p|a_1 \cdots a_n$ então, $p|a_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

19. Seja n um inteiro positivo. Mostre que é possível obter n inteiros consecutivos tais que nenhum deles seja primo.

20. Demonstre que a fatoração em primos do teorema fundamental da aritmética é única. (Suponha que tenhamos duas fatorações de um natural em primos. Aí use o exercício 15 para mostrar que estas fatorações são a menos de permutação de primos iguais.)

21. Resolva as seguintes equações diofantinas
    (a) $2x + 3y = 9$.
    (b) $3x + 5y = 47$.
    (c) $47x + 29y = 999$.

22. Determine todas as soluções nos inteiros positivos das seguintes equações
    (a) $54x + 21y = 906$.
    (b) $123x + 360y = 99$.

23. Determine todos os múltiplos positivos de 11 e de 9 cuja soma é 270.

24. (a) A que número entre 0 e 6 é congruente módulo 7 o produto $11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$?
    (b) A que número entre 0 e 3 é congruente módulo 4 a soma $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{19}$?

25. Sejam a, b, r inteiros e s um inteiro não nulo. Mostre que
$$a \equiv_r b \quad \text{sse} \quad as \equiv_{rs} bs.$$

26. Seja a um interiro. Mostre que
    (a) a^2 é congruente a 0, 1 ou 4 módulo 8.
    (b) Se $2 \not| a$ e $3 \not| a$, então $a^2 \equiv_{24} 1$.

27. Determine o resto das divisões
    (a) de 2^{50} por 7.
    (b) de 41^{65} por 7.

28. Use congruências para verificar
    (a) $89|(2^{44} - 1)$.
    (b) $97|(2^{48} - 1)$.

29. Resolva as seguintes congruências:

    (a) $25x \equiv_{29} 15$, (b) $5x \equiv_{26} 2$, (c) $140x \equiv_{301} 133$.

30. Resolva os seguintes sistemas através do uso do teorema chinês do resto:

    (a) $\begin{cases} x \equiv_3 1 \\ x \equiv_7 3 \\ x \equiv_5 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv_3 2 \\ x \equiv_5 3 \\ x \equiv_7 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x \equiv_6 5 \\ x \equiv_{11} 4 \\ x \equiv_7 3 \end{cases}$

31. Determine três inteiros *consecutivos* tais que um deles é divisível por um quadrado perfeito. Dica: Observe que um quadrado perfeito é da forma b^2 para algum $b \geq 2$. Tome três inteiros consecutivos e considere os quadrados 2^2, 3^2 e 5^2. Enuncie um sistema de congruências e resolva pelo teorema chinês dos restos.

32. Seja dada uma cesta de ovos. Encontre o menor número possível de ovos tal que acontece o seguinte:
    Se retiramos dois ovos por vez, então sobra um. Se retiramos 3 a 3 e 5 a 5, sempre sobra um ovo. Agora tirando 7 a 7, então sobra nenhum. Dica: Descubra um sistema de congruências e resolva.

33. Filmes interessantes para todos os tempos (também em tempos sombrios):

    (a) Filme intitulado *A Onda*, disponível em youtube.
    (b) Filme intitulado *A democracia em vertigem*, documentário indicado ao prêmio *Oscar*, disponível em Netflix.

34. Livros interessantes para todos os tempos (também em tempos sombrios):

    (a) Karl Marx & Friedrich Engels: *O manifesto do partido comunista*. edipro, 1998.
    (b) Sérgio Haddad: *O educador - Um perfil de Paulo Freire*. Editora todavida, 2019.
    (c) Mário Magalhães: *Sobre lutas e lágrimas - Uma biografia de 2018*, Editora Record, 2019.
    (d) Mário Magalhães: *Marighella. O guerrilheiro que incendiou o mundo*, Companhia das Letras, 2012.
    (e) Antônio Callado: *Bar Don Juan*, Editora Civilização Brasileira, 1972.
    (f) Antônio Callado: *Quarup*, Editora José Olympio, 1967.