Agenda

Representação Numérica Digital

Um número é representado, seja em uma calculadora ou em computador, atráves de impulsos elétricos que indicam dois estados: 0 ou 1. Sendo assim, um número é digitalmente armazenado a partir da representação binária (base 2).

A base decimal (base 10), que é a base que mais utilizada atualmente, possui representação infinita. Contudo, para seu armazenamento digital no computador, o número decimal é convertido para uma representação finita da base binária, o que pode introduzir erros no processo de reconversão para a base decimal.

Agenda

Conversão da Base 2 para a Base 10

Um número pode ser convertido da base 2 para a base 10 a partir do produto de cada digito binário por uma potência de 2 correspondente (sistema posicional).

Exemplos

$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11_{10}$
$10{,}1_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 2,5_{10}$

Conversão da Base 10 para a Base 2

Um número inteiro pode ser convertido da base 10 para a base 2 a partir das divisões sucessivas do número por 2, até que o último quociente seja 1. O número binário será formado pela concatenação do último quociente com os restos das divisões no sentido inverso ao que foram obtidos.

Exemplos

$$\begin{array}{rrrrr} 18 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{2-2} 0 & 9 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{3-3} & 1 & 4 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{4-4} & & 0 & 2 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{5-5} & & & 0 & 1 \end{array}$$

$$18_{10} = 10010_2$$

Conversão da Base 10 para a Base 2

Um número fracionário pode ser convertido da base 10 para a base 2 a partir de multiplicações sucessivas por 2 até que a parte fracionária do último produto seja 0. O número binário será formado pela concatenação da parte inteira dos primeiros dígitos resultantes de cada multiplicação.

Exemplo

$$0,1875 \cdot 2 = \mathbf{0},3750$$
$$0,3750 \cdot 2 = \mathbf{0},750$$
$$0,75 \cdot 2 = \mathbf{1},50 - 1,00$$
$$0,5 \cdot 2 = \mathbf{1},00$$

$$0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2$$

Agenda

Representação Digital

Assumindo-se que um número pode ser representado da seguinte forma:

$$\pm(,d_1 d_2 ... d_t) \times \beta^e$$

onde:
β é a base em que a máquina opera;
t é o número de dígitos na mantissa; $0 \leq d_j \leq (\beta - 1), j = 1, ..., t, d_1 \neq 0$;
e é o expoente no intervalo [l, u];

É possível representar um número na base $\beta = 2$, $t = 10$, $e \in [-15, 15]$, a partir do seguinte esquema de representação com 16 bits:

X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Sinal da Mantissa Valor da Mantissa Sinal do Expoente Valor do Expoente

Dado o número 25_{10}, como representá-lo numa máquina digital de configuração $\beta = 2$, $t = 10$, $e \in [-15, 15]$?

$$\begin{array}{lllll}
25 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{2-2}
1 & 12 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{3-3}
 & 0 & 6 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{4-4}
 & & 0 & 3 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{5-5}
 & & & 1 & 1
\end{array}$$

$$25_{10} = 11001_2 = 0,11001 \cdot 2^5 = 0,11001 \cdot 2^{101}$$

Dessa forma, o valor 25_{10}, equivalente ao produto $0,11001 \cdot 2^{101}$ na base 2, pode ser armazenado na máquina em questão da seguinte forma:

0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Exemplo de Representação Digital

Dado o número 25_{10}, como representá-lo numa máquina digital de configuração $\beta = 10$, $t = 5$, $e \in [-9, 9]$?

$$25_{10} = 0,25 \cdot 10^2$$

0	2	5	0	0	0	0	2

Agenda

Erros Numéricos na Representação Digital

Considere o maior valor V passível de representação na máquina de configuração $\beta = 2$, $t = 10$, $e \in [-15, 15]$:

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Correspondente ao valor, na base decimal:

$$0,1111111111 \cdot 2^{1111} = 32736_{10}$$

Analogamente, o menor valor na base decimal seria:

$$-0,1111111111 \cdot 2^{1111} = -32736_{10}$$

Overflow

Para qualquer valor x, tal que $|x| > V$, a maquiná acusará **overflow**, por x exceder o valor máximo de representação da máquina.

Erros Numéricos na Representação Digital

Considere agora v, o menor valor positivo não-nulo passível de representação na máquina de 16 bits do exemplo anterior:

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Correspondente ao valor, na base decimal:

$$0,1 \cdot 2^{-1111} = 0,1 \cdot 2^{-15} = 1 \cdot 2^{-16} = 0,000015259_{10}$$

Underflow

Para qualquer valor x, tal que $|x| < v$, a maquiná acusará **underflow**, por x ser menor que o valor mínimo passível de representação pela máquina.

O valor decimal subsequente a este seria:

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Correspondente ao valor, na base decimal:

$$0,1000000001 \cdot 2^{-1111} = 0,1000000001 \cdot 2^{-15} = 1,000000001 \cdot 2^{-16}$$

Como representar o número $0,00001527_{10}$ numa máquina digital de configuração $\beta = 2,\ t = 10,\ e \in [-15, 15]$?

Considerando que $0,000015259_{10}$ e $0,000015289_{10}$ são os valores mais próximos passíveis de representação digital pela máquina anterior, têm-se que:

$$EA_1 = x - \overline{x}_1 = 0,00001527 - 0,000015259 = 0,11 \cdot 10^{-7}$$
$$EA_2 = x - \overline{x}_2 = 0,00001527 - 0,000015289 = -0,19 \cdot 10^{-7}$$

Comparando-se os módulos de $|EA_1|$ e $|EA_2|$, o número $0,00001527_{10}$ será arredondado para valor $0,000015259_{10}$, que é o que provê menor erro absoluto a este na máquina digital.

Erros Numéricos na Representação Digital

Como representar o número $0,1_{10}$ na máquina do exemplo anterior?

$$0,1_{10} = 0,000110011..._2 = 0,1100110011... \cdot 2^{-3} = 0,1100110011... \cdot 2^{-11}$$

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1

$$0,1100110011 \cdot 2^{-11} = 0,0001100110011_2$$
$$= 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} = 0,099976_{10}$$
$$= 0,0625 + 0,03125 + 0,00390625 + 0,001953125 + 0,000244140625 + 0,0001220703125$$

$$0,1_{10} \neq 0,099976_{10}$$

$$EA = x - \overline{x} = 0.1 - 0,099976 = 0,24 \cdot 10^{-4}$$

A precisão P de uma máquina digital é dada por:

$$P \leq \frac{1}{\beta^t}$$

Já o número de elementos N do conjunto de números que podem ser representados pela máquina é:

$$N = 2 \cdot (\beta - 1)(u - l + 1) \cdot \beta^{t-1} + 1$$

Erros Numéricos na Representação Digital

Dessa forma, a máquina digital de configuração $\beta = 2$, $t = 10$, $e \in [-15, 15]$ possui as seguintes características:

- Maior valor passível de representação: 32726_{10};
- Menor valor passível de representação: -32726_{10};
- Menor valor não-nulo passível de representação: $0{,}000015259_{10}$;
- Próximo valor não-nulo passível de representação: $0{,}000015289_{10}$;
- Precisão $\leq \frac{1}{\beta^t} \approx 10^{-3}$

Erros Numéricos na Representação Digital

Já para a máquina digital de configuração $\beta = 10$, $t = 5$, $e \in [-9, 9]$, podemos concluir que:

- Maior valor passível de representação: $0,99999 \cdot 10^9$;
- Menor valor positivo passível de representação: $0,1 \cdot 10^{-9}$;
- A representação do valor $0,5 \cdot 10^{-10}$ gera **underflow**;
- A representação do valor $0,5 \cdot 10^{10}$ gera **overflow**;
- Números passíveis de representação
  $2 \cdot (10 - 1)(9 + 9 + 1) \cdot 10^4 + 1 \approx 0,342 \cdot 10^7$

Referências

1. Capítulo 1 - BARROSO, L. et al. **Cálculo Numérico (com Aplicações)**. São Paulo: Editora Harbra, 1987.
2. Capítulo 1 - RUGGIERO, M. et LOPES, V. **Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Ed. McGraw-Hill, 1988.
3. Capítulo 2 - UFRGS. **Livro colaborativo de Cálculo Numérico**. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/