MATA51: Teoria da Computação

Semestre 2021.1

Prof. Laís Nascimento

Alberto Lucas e Renata Ribeiro

Lista de Exercícios 7 - História da Computação, Modelos de Computação e Teorema de Incompletude de Godel

---

1. **O problema da parada é um problema indecidível, pois ele constitui uma linguagem RE não recursiva. Será que o problema da parada pode ser decidido com o lambda-cálculo? Justifique a sua resposta.**

   Basicamente, uma função no lambda cálculo é equivalente a uma máquina de Turing. A "parada" de uma máquina de Turing é equivalente ao termo do lambda cálculo correspondente reduzindo à sua "forma normal". Assim, se não é possível decidir o problema da parada por máquina de Turing, é óbvio que não é possível dividí-lo por lambda cálculo.

2. **Se eu desenvolvo um algoritmo para um dado problema X, é possível desenvolver uma função mi-recursiva para esse mesmo problema? Por que?**

   Sim. Como existe um algoritmo para o problema X, significa que esse problema é computável. Desse modo, um conjunto A é computável, sse sua função característica

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

   é recursiva. A classe de funções recursivas (às vezes referida como funções μ-recursivas) é a menor classe que contém todas as funções constantes, função sucessora, e função projeção. A classe é fechada sob substituição, recursão primitiva e minimização.

   Sabemos que toda linguagem computável é RE e que toda linguagem recursiva é RE (por Hierarquia de Chomsky). Então, sim, toda função computável é recursiva com respeito as definições dadas acima.

3. **Enuncie e explique os teoremas da incompletude de Godel.**

   Os teoremas da incompletude de Godel estão entre os resultados mais importantes da lógica moderna. Godel estabeleceu dois teoremas da incompletude diferentes, embora relacionados, geralmente chamados de primeiro teorema da incompletude e o segundo teorema da incompletude. O primeiro teorema pode ser afirmado como segue:

Primeiro teorema da incompletude

Qualquer sistema formal consistente F dentro do qual uma certa quantidade de aritmética elementar pode ser realizada está incompleta; ou seja, existem declarações da linguagem de F que não pode ser provado nem refutado em F.

O teorema de Godel não se limita a afirmar que tais declarações existem: o método da prova de Godel produz explicitamente uma sentença particular que não é demonstrável nem refutável em F; a declaração "indecidível" pode ser encontrada mecanicamente a partir de uma especificação de F. A frase em questão é uma declaração relativamente simples da teoria dos números, uma frase aritmética puramente universal. Um mal-entendido comum é interpretar o primeiro teorema de Godel como mostrando que há verdades que não podem ser provadas. Isso é, entretanto, incorreto, pois o teorema da incompletude não trata da probabilidade em nenhum sentido absoluto, mas apenas da derivabilidade em algum sistema formal particular ou outro. Para qualquer declaração A improvável em um sistema formal particular F , existem, trivialmente, outros sistemas formais em que A é provável (pegue A como um axioma). Por outro lado, existe o sistema axioma padrão extremamente poderoso da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (denotado como ZF, ou, com o axioma de escolha, ZFC, o que é mais do que suficiente para a derivação de todas as matemáticas comuns. Agora, existem, pelo primeiro teorema de Godel, verdades aritméticas que não são prováveis mesmo em ZFC. Prová-los exigiria, portanto, um sistema formal que incorpora métodos que vão além do ZFC. Há, portanto, um sentido em que tais verdades não podem ser provadas usando os métodos matemáticos "comuns" e axiomas de hoje, nem podem ser provadas de uma forma que os matemáticos hoje considerariam não problemática e conclusiva.

Segundo teorema da incompletude

Para qualquer sistema consistente F dentro do qual uma certa quantidade de aritmética elementar pode ser realizada, a consistência de F não pode ser provado em F em si.

No caso do segundo teorema, F deve conter um pouco mais de aritmética do que no caso do primeiro teorema, que se mantém em condições muito fracas. É importante notar que este resultado, como o primeiro teorema da incompletude, é um teorema sobre probabilidade formal, ou derivabilidade (que é sempre relativa a algum sistema formal; neste caso, para F em si). Não diz nada sobre se, para uma teoria particular T satisfazendo as condições do teorema, a afirmação "T é consistente" pode ser provado no sentido de ser mostrado como verdadeiro por um argumento conclusivo, ou por uma prova geralmente aceitável para os matemáticos. Para muitas teorias, isso é perfeitamente possível.

4. **Explique o impacto dos teoremas da incompletude de Godel (1931) sobre o programa de Hilbert (1928).**

A matemática no início do século XX era positivista e acreditava-se que seria possível encontrar um conjunto de axiomas completo e consistente para toda matemática. O segundo problema de Hilbert consiste na ideia de provar que a aritmética é consistente. Os teoremas da incompletude de Godel são largamente aceitos como uma resposta negativa a este problema. Pela definição informal:

a. qualquer teoria axiomática RE e capaz de expressar aritmética elementar não pode ser, ao mesmo tempo, consistente e completa;
b. para qualquer teoria formal RE T que inclui verdades aritméticas básicas e também certas verdades da teoria da prova, se T inclui uma informação de sua própria consistência, então T é inconsistente.

Um sistema é **consistente** e não é possível deduzir contradições a partir de seus axiomas. Um sistema é **completo** se é possível deduzir todas as fórmulas verdadeiras a partir de seus axiomas. Uma teoria axiomática é uma teoria baseada em um conjunto de axiomas a partir dos quais são deduzidos teoremas utilizando procedimentos bem definidos.

Em síntese, Godel provou que, **se a aritmética é consistente, então ela é incompleta**.

5. **Como relacionar os teoremas da incompletude de Godel (1931) com os trabalhos posteriores de Turing, Kleene e Church sobre modelos de computação.**

Os problemas da incompletude de Godel possibilitaram o desenvolvimento de duas provas importantes para a computação. Church e Turing, com a tese Church-Turing, demonstraram que não existe nenhum algoritmo capaz de provar se "uma proposição qualquer faz ou não parte de uma teoria". Stephen Cole Kleene (1947) mostrou que se a aritmética fosse consistente e completa isto forçaria o problema da parada a ser decidível, o que implica em uma contradição.

6. **Por que a Tese de Church é uma tese científica, mas não é matemática?**

   Apesar de a Tese de Church ser considerada verdadeira, essa afirmação é apenas circunstancial e se alguém construísse um dispositivo que (confiavelmente) calculasse uma função que não pode ser calculada por nenhuma máquina de Turing, isso refutaria a tese de Church-Turing porque estabeleceria a existência de uma função efetivamente calculável que não é computável por uma máquina de Turing

Referências

MARCOLINO, Anderson da Silva, **Teoremas da Incompletude de Godel**. Slides Share, 2012. Disponível em:<https://pt.slideshare.net/helioh6/teoremas-da-incompletude-de-gdel>. Acesso em 02 jun. 2021.

GODEL’S INCOMPLETENESS THEOREMS. Stanford, 2020. Disponível em <https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/>. Acesso em: 02 de jun. 2021.

SOLVE EVERY PROBLEM WITH RECURSION. Disponível em:<https://cs.stackexchange.com/questions/88612/solve-every-problem-with-recursion>. Acesso em: 02 jun. 2021.

MONTEIRO, Sonia. **Conceitos Elementares da Teoria da Computação (Módulo 2 - 2.1)**. Disponível em:<https://www.cin.ufpe.br/~tbl2/pesq/trabalho1lnccword.pdf>. Acesso: 02 jun. 2021.