Departamento de Ciência da Computação
Teoria dos Grafos – Gabarito da Lista 1 – 2019.1
Professor: Roberto Freitas Parente

Exercício 1. *Utilizando indução em k, prove que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.*

Demonstração. Passo base: Seja k=0, temos do lado esquerdo $2^0 = 1$ e do lado direito $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$, logo é válido para $k = 0$. Considere agora que vale para $k-1$. Temos então que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k$ pela hipótese de indução. Isso equivale a $2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. □

Exercício 2. *Imagine uma jarra contem um certo número de bolas brancas e pretas. Suponha também que você tem um suprimento ilimitado de bolas brancas fora da jarra. Agora repita o seguinte procedimento enquanto ele fizer sentido: Retire duas bolas da jarra, se as duas tiverem a mesma cor coloque uma bola branca na jarra; se as duas tiverem cores diferentes, coloque uma bola preta na jarra. Qual a cor da última bola a sobrar na jarra? Prove sua resposta.*

Demonstração. A lógica está na paridade das bolas pretas. Existem três casos possíveis:

1. Sorteia-se duas brancas, e perde-se uma branca;
2. Sorteia-se duas bolas pretas, ganha uma branca e perdem-se as duas pretas;
3. Sorteia-se uma branca e uma preta, e perde uma branca.

Perceba que só é possível perder as bolas pretas em pares, outra observação pertinente é que você tem um número finito de bolas, então o jogo sempre termina.

Primeiro, suponha que você tem um número par de bolas pretas. Então você não pode terminar com uma bola preta, pois isso só aconteceria se em alguma jogada você perdesse somente uma bola preta, mas isso é impossível, pois só perdemos as bolas pretas em pares. Logo, o jogo tem que terminar com uma branca.

Agora suponha que você tem um número ímpar de bolas pretas dentro da jarra, então você não pode terminar com uma bola branca, pois isso só seria possível se em alguma jogada você perdesse somente uma bola preta. □

Exercício 3. *Seja a um número positivo qualquer. Afirmo que pare todo inteiro positivo n tem-se*

$$a^n - 1 = 1$$

Eis a prova (indução em n): Se $n = 1$ então $a^{n-1} = a^0 = 1$ e portanto a afirmação está correta nesse caso. Agora tome $n > 1$ e suponha, a título de hipótese de indução que, $a^{k-1} = 1$ quando $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Temos então

$$a^{n-1} = a^{n-2}a^1 = a^{n-2}\frac{a^{n-2}}{a^{n-3}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto a afirmação está correta para todo inteiro positivo n. Onde está o erro da prova?

Demonstração. O erro da prova está no segmento $a^{n-2} \cdot a^1 = a^{n-2} \cdot \frac{a^{n-2}}{a^{n-3}}$, pois quando coloco a^{n-3} no denominador, perco a possibilidade de n ser igual a 2 e assim a hipótese não vale. Logo, a indução deixa de ser válida. □

Exercício 4. *Afirmo que para todo número inteiro positivo n tem-se que*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Segue a prova por indução em n: Para $n = 1$ o resultado segue. Tome $n > 1$ e suponha, por hipótese de indução que, $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n-1}$. Teremos então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} &= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. Observe que para $n = 6$ o resultado é falso. Onde está o erro da prova?

Demonstração. Observe que a base está errada, pois para $n = 1$ temos que o somatório iria de 1 até 0, ou seja, é 0 do lado esquerdo.

□

Exercício 5. *Defina de forma precisa os seguintes conceitos:*

- *Subgrafo H de um grafo G induzido por um conjunto $X \subseteq V(G)$;*
  Seja$V(H) = X$, temos $E(H) = \{xy\colon x, y \in X \text{ e } xy \in E(G)\}$.
- *Grau de um vértice;*
  Seja u um vertices de G, temos $N(u) = \{v\colon uv \in E(G)\}$. O grau de u em G é denotado por $d_G(u) = |N(u)|$.
- *Graus mínimo, máximo e médio de um grafo;*
  Seja $d_G(u)$ o grau do vértice u em G, temos como segue.
  - *Grau máximo: $\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$;*
  - *Grau mínimo: $\delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\}$; e*
  - *Grau médio: $\bar{d}(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)/n$.*
- *Grafo completo com n vértices;*
  O grafo completo com conjunto de vértices $V(G)$ é o grafo que contém tem todas as arestas, i.e., para todo $u, v \in V(G)$ temos $uv \in E(G)$.
- *Grafo bipartido com partição (X, Y).*
  O grafo bipartido com partição (X, Y): toda aresta $uv \in E(G)$ conecta vértice de partes diferentes, ou seja, temos ou $u \in X$ e $v \in Y$ ou $u \in Y$ e $v \in X$.
- *Passeio, trilha, caminho e circuito. $\Delta(P)$, $\delta(C)$ e $\Delta(C)$?*
  - *Passeio: é uma sequência $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{k-1} v_k$ onde $e_i = \{v_i v_{i+1}\}$;*
  - *Trilha: é um passeio sem repetição de arestas;*
  - *Caminho: é um passeio (ou trilha) sem repetição de vértices;*
  - *Circuito: é uma trilha tal que o primeiro e o último vértices são iguais.*

  Lembrando que P é nomeclatura para um grafo caminho e C para um grafo que é um ciclo, então temos $\Delta(P) = 2$, $\delta(C) = \Delta(C) = 2$.

Exercício 6. *Desenhe todos os grafos não-isomorfos com n vértices para todo $0 \leq n \leq 4$ (Por exemplo, para n = 2, você deve desenhar 2 grafos.)*

Demonstração. Basta verificar quais grafos não são isomorfos. Para $n = 1$ temos apenas um. para $n = 2$ temos dois. Para $n = 3$ temos 3 e para $n = 4$ temos 11. Os desenhos podem ser encontrados no seguinte endereço: `http://www.graphclasses.org/smallgraphs.html#nodes4` □

Exercício 7. *Seja $G = (V, A)$ um grafo com $|V| \geq 2$. Prove que se $|E| \geq |V| + 1$, então G possui um vértice com grau pelo menos 3.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que todos os vértices têm grau no máximo 2. A soma dos graus dos vértices de G é dada por $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Pela hipótese do enunciado, temos que $2|E| \geq 2|V| + 2$. Por outro lado, se todos os vértices têm grau no máximo 2, então $\sum_{v \in V} d(v) \leq 2|V|$, o que caracteriza uma contradição, pois teríamos $2|V| + 2 \leq 2|V|$. Portanto, existe um vértice grau pelo menos 3 em tal grafo. □

Exercício 8. *Prove que ou um grafo ou seu complemento é conexo.*

Demonstração. Um grafo é dito conexo se, e somente se, tem exatamente uma componente conexa. Suponha que G não é conexo, então precisamos mostrar que $\bar{G} = (V, \bar{E})$ é conexo. Observe que como G não é conexo, então G tem pelo menos duas componentes conexas. Para isso, basta mostrarmos que todo par de vértices u, v, $u \neq v$, está na mesma componente conexa em $\bar{G}$. Dito isso, podemos analisar os seguintes casos:

- se $(u, v) \notin E$: Ambos estarão na mesma componente em $\bar{G}$, já que $(u, v) \in \bar{E}$.
- Se $(u, v) \in E$: Então u, v estão na mesma componente conexa em G. Como existem pelo menos duas componentes conexas, então existe um w em uma componente conexa diferente. Observe que $(u, w), (v, w) \in \bar{E}$. Portanto, existe um caminho uwv, implicando que u, v estão na mesma componente conexa em $\bar{G}$. □

Exercício 9. *Prove que se $G = (V, E)$ é um grafo conexo de ordem n, então $|E| \geq n - 1$.*

Demonstração. Provaremos por indução em $|V| = n$. Para $n = 1, 2$ podemos checar diretamente. Seja G um grafo conexo com n vértices e v um vértice de G. Faça $G' = G - v$. Observe que só podemos utilizar a hipótese de indução se G' for conexo. Entretanto podemos escolher v de forma que G' seja conexo (a abaixo). Desta forma, sendo G' conexo, pela hipótese de indução temos que $|E(G')| \geq |V'| - 1 = n - 2$. Como G é conexo, então existe $k \geq 1$ aresta em G que conecta v à vértices de G'. Desta forma, $m = |E(G')| + k \geq n - 2 + k \geq n - 1$.

□

Afirmação: *Para todo grafo conexo G, existe um vértice v tal que $G \setminus v$ é conexo.*

Demonstração. Seja $P = v_1, \ldots, v_k$ o maior caminho em G. Certamente os vizinhos de v_1 estão todos em P, então $G \setminus V_1$ é conexo.

□

Exercício 10. *Prove que um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém um ciclo ímpar.*

Demonstração. IDA ($\Rightarrow$): Pela definição de grafo bipartido todo caminho em G deve alternar entre as partes da bipartição. Para retornar ao vértice inicial do caminho é necessário uma quantidade par de arestas entre as partes, ou seja, não existe ciclo ímpar em G.

VOLTA($\Leftarrow$):Escolha um vértice x de G. Defina o conjunto V_i os vértices que estão a uma distância i do vértice x e coloque x em V_0. Se G é conexo, todos os vértices já estão em algum conjunto V_i. Se G é desconexo, pegue um vértice y não alcançado por x e faça o mesmo procedimento. Repita até que todos os vértices estejam em algum conjunto V_i. Como G não contém ciclo ímpar, então todo conjunto V_i é um conjunto independente, caso contrário formaria um ciclo ímpar C_{2i+1} com um vértice de V_0. Ademais, dados V_i e V_j, se i e j têm a mesma paridade então não contém arestas entre os conjuntos, caso contrário formaria um ciclo ímpar C_{i+j+1}. Seja k o menor inteiro onde $V_{2k+1} = \emptyset$, faça

$$X = \bigcup_{i=0}^{k} V_{2i} \qquad \text{e} \qquad Y = \bigcup_{i=0}^{k} V_{2i+1}.$$

Como X e Y são dois conjuntos indendentes disjuntos e $X \cup Y = V(G)$, temos que G é bipartido. $\square$