Problemas e Linguagens

profa. Laís do Nascimento Salvador
E-mail: laisns@ufba.br

Problema

- **O que é um Problema?**
  - **É uma pergunta de caráter geral a ser respondida.**
  - **Um problema tem vários parâmetros, cujos valores são variáveis.**
  - **Um problema é descrito através de:**
    - **Uma descrição geral de todos os seus parâmetros, e**
    - **Um enunciado de quais propriedades a resposta, ou solução, deve satisfazer.**

Problema de Decisão

Problemas de decisão são aqueles que admitem apenas duas respostas: Sim/Não (0/1).

Problemas e Linguagens

- **Um problema de decisão particulamente útil na área de computação:**
  - **Uma dada string pertence ou não a uma linguagem?**

O que é uma string?

O que é uma linguagem?

Conceitos Básicos

Alfabetos, palavras e linguagens formais

- O estudo dos alfabetos e linguagens formais procura especificar formalmente, em termos matemáticos, os dados que são processados pelo computador.

- Estes dados estão na forma de cadeias de símbolos (strings)

Conceitos Básicos

- **Def. 1. Alfabeto ou Vocabulário:** É um conjunto não vazio finito de símbolos.

- **Exemplos:**
  - Σ_1 **= { 0, 1 },** particularmente útil – alfabeto binário**;**
  - Σ_2**= { if, then, else, while, ... }**
  - Σ_3 **= { a, b, c, d }**
  - Σ_4 = {**a, b, c, ...z**}, alfabeto romano ;

Conceitos Básicos

- **Def. 2. Cadeia (String), Palavra:** Seqüência finita de símbolos (do alfabeto) justapostos.

  w = 000101 é uma cadeia do alfabeto Σ_1;

  u = abcab é uma cadeia do alfabeto Σ_3;

  v = if then else else else é uma cadeia do alfabeto Σ_2;

Cadeia Vazia

a letra grega **ε** representa uma cadeia/palavra especial chamada cadeia vazia.

Conceitos Básicos

- **Def. 3. Fechamento de um Alfabeto (Σ^*):**
  Fechamento de um alfabeto Σ é dado por.

  $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots \cup \Sigma^n$, ou seja, $n \to \infty$

  é o conjunto de todas as cadeias de qualquer comprimento sobre o alfabeto Σ.

  Exemplo: Seja o alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$

  $\Sigma^* = \{ \varepsilon$, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb, ... $\}$

Conceitos Básicos

- **Def. 4. Fechamento Positivo de um Alfabeto (Σ^+):** Fechamento positivo de um alfabeto Σ

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots \cup \Sigma^n \text{ , } n \to \infty$$

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{ \varepsilon \}$$

Exemplo: Seja $\Sigma = \{ a, b \}$

$\Sigma^+ = \{$a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb, ... $\}$

Conceiteos Básicos

- **Def. 5. Tamanho ou Comprimento de Cadeia:** É o número de símbolos de uma dada cadeia.

Notação: | cadeia |

| 000101 | = 6 (alfabeto Σ_1);

| ε | = 0;

| abcab | = 5 (alfabeto Σ_3);

| if then else else else | = 5 (alfabeto Σ_2).

Conceitos Básicos

- **Def. 6. Prefixo** de uma palavra - qualquer seqüência de símbolos inicial da palavra.

- **Def. 7. Sufixo** de uma palavra - qualquer seqüência de símbolos final da palavra

  – Prefixos(abcb) = {ε, a, ab, abc, abcb}

  – Sufixos(abcb) = {ε, b, cb, bcb, abcb}

Conceitos Básicos

- **Def. 8. Subpalavra** ou **subcadeia**: qualquer seqüência de símbolos contígua da palavra.
  - Obs: Qualquer prefixo ou sufixo de uma palavra é uma subpalavra.

Exemplo:

- Podemos definir Subpalavras(abcb) = Prefixos(abcb) ∪ Sufixos (abcb) ∪ {bc, c}

Conceitos Básicos

- **Def. 9. Concatenação de Cadeias:** é uma operação binária que associa a cada par de palavras uma palavra formada pela justaposição da primeira com a segunda. Uma concatenação é denotada pela justaposição dos símbolos que representam as palavras componentes.
  - Símbolo do operador de concatenação: .
  - Quando não existir dúvida então pode-se suprimir o .

Exemplos:

seja x = 010 , y = 11 e z = ε, então:

xy = 01011, yx = 11010,

zz = ε,

xyz = (xz)y = x(zy) = 01011

zyz = 11

Conceitos Básicos

- **Def. 10. Concatenação de Cadeias (cont):** Esta operação segue as seguintes propriedades:

  Sejam x, y, z cadeias,

  a. Associatividade: $x\,(yz) = (xy)z$

  b. Elemento neutro: $\varepsilon\, x = x = x\, \varepsilon$

Observe também que:

(i) se $x = yz$, então $|x| = |y| + |z|$

(ii) a operação de concatenação não é comutativa

Conceitos Básicos

- **Def. 11. Concatenação sucessiva:** Para cada n natural e para cada palavra ω, define-se indutivamente ω^n:

- caso 1: $\omega \neq \varepsilon$
  - $\omega^0 = \varepsilon$
  - $\omega^n = \omega^{n-1}\, \omega$, para $n > 0$

- caso 2: $\omega = \varepsilon$
  - $\omega^n = \varepsilon$, para $n > 0$
  - ω^n é indefinida para $n = 0$

Exemplos

Seja a cadeia $\omega = abc$

- $\omega^3 = abcabcabc$
- $\omega^1 = abc$
- $\omega^0 = \varepsilon$

Seja a cadeia $\omega = a$

- $\omega^3 = aaa$
- $\omega^1 = a$

Exemplos

$\Sigma = \{ a, b, c\}$ é um alfabeto

$\omega = abcb$ é uma cadeia sobre Σ

$|\omega| = |abcb| = 4$

$|\varepsilon| = 0$

Prefixos(ω) = $\{\varepsilon, a, ab, abc, abcb\}$

Sufixos(ω) = $\{\varepsilon, b, cb, bcb, abcb\}$

$\Sigma = \{ a, b\}$ então $\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, bb, aaa, ...\}$ e

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, ...\}$

Conceitos Básicos

- **Def. 12. Linguagem formal:** Uma linguagem formal L é um conjunto de palavras sobre um alfabeto Σ.

Uma linguagem formal L sobre um alfabeto Σ é um subconjunto de Σ^*:

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Conceitos Básicos

Uma linguagem é um conjunto do tipo:

– $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ tem a propriedade } P\}$

Exemplo:

$\Sigma = \{0,1\}$

$L\text{-}Imp = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ representa um número ímpar}\}$

Exemplos

Exemplos de linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

1. conjunto vazio: φ
2. $\{\varepsilon\}$

   Obs: $\varphi \neq \{\varepsilon\}$

   – $\varphi \rightarrow$ nenhum elemento

   – $\{\varepsilon\} \rightarrow$ 1 elemento
3. Conjunto das palavras sobre Σ com tamanho menor ou igual a 2.

   – $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega| \leq 2 \}$

   – $L = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb\}$

   – L é finita

Exemplos

4. Conjunto dos palíndromos sobre Σ (exemplo de linguagem infinita)

- $L = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, aaaa, ...\}$

  Palavra palíndromo: mesma leitura da esquerda para a direita e vice-versa.

5. $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega$ possui aaa como subpalavra$\}$

6. $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega$ possui um número par de a´s e um número par de b´s$\}$

7. $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega| = 8 \}$

Questões

O que podemos afirmar sobre uma linguagem de programação X (Java, C, Python):

- Ela é uma linguagem formal?
- Caso afirmativo, sobre que alfabeto ela é definida?
- X é finita ou infinita?
- Como representar X?

Representação de linguagens

- Questão central em Linguagens Formais: Representação de linguagens da Hierrquia de Chomsky por especificações finitas.
- Linguagem finita: enumeração exaustiva de todas as cadeias.
- Linguagem infinita -- podemos tentar representá-la através de:
  - Gramáticas
  - Reconhecedores ou Autômatos

Autômatos e Linguagens Formais

SÍMBOLO - elemento básico da linguagem

ALFABETO - conjunto de símbolos

CADEIA - concatenação arbitrária de símbolos do alfabeto

SENTENÇA - cadeia pertencente à linguagem

LINGUAGEM - conjunto de todas as sentenças

GRAMÁTICA - enumeração ou conjunto de leis de formação

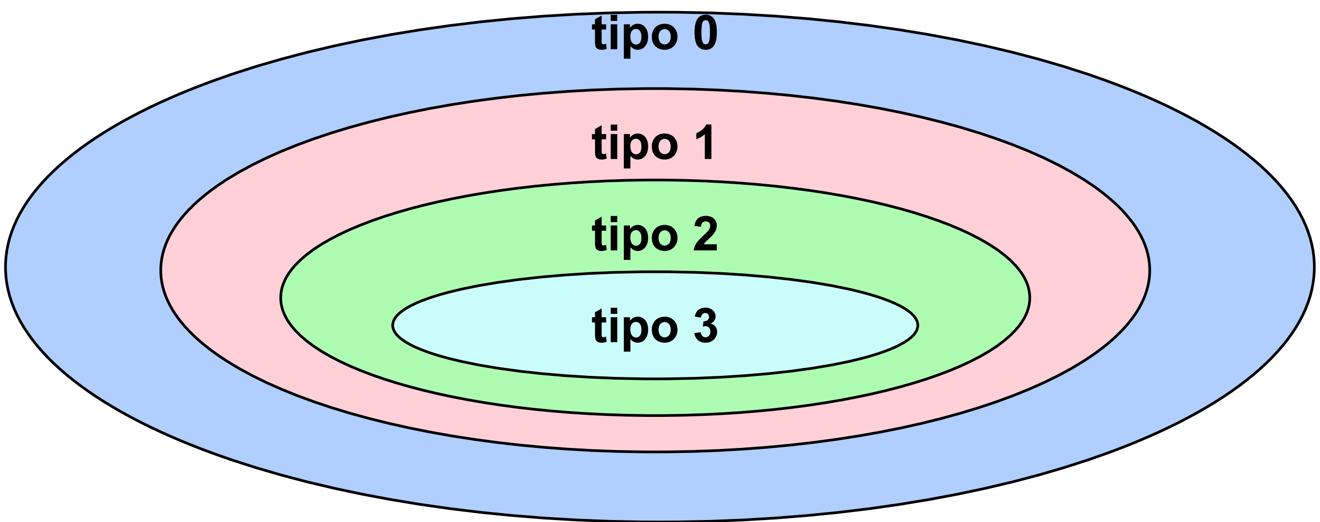
DERIVAÇÃO - obtenção de sentenças usando gramáticas

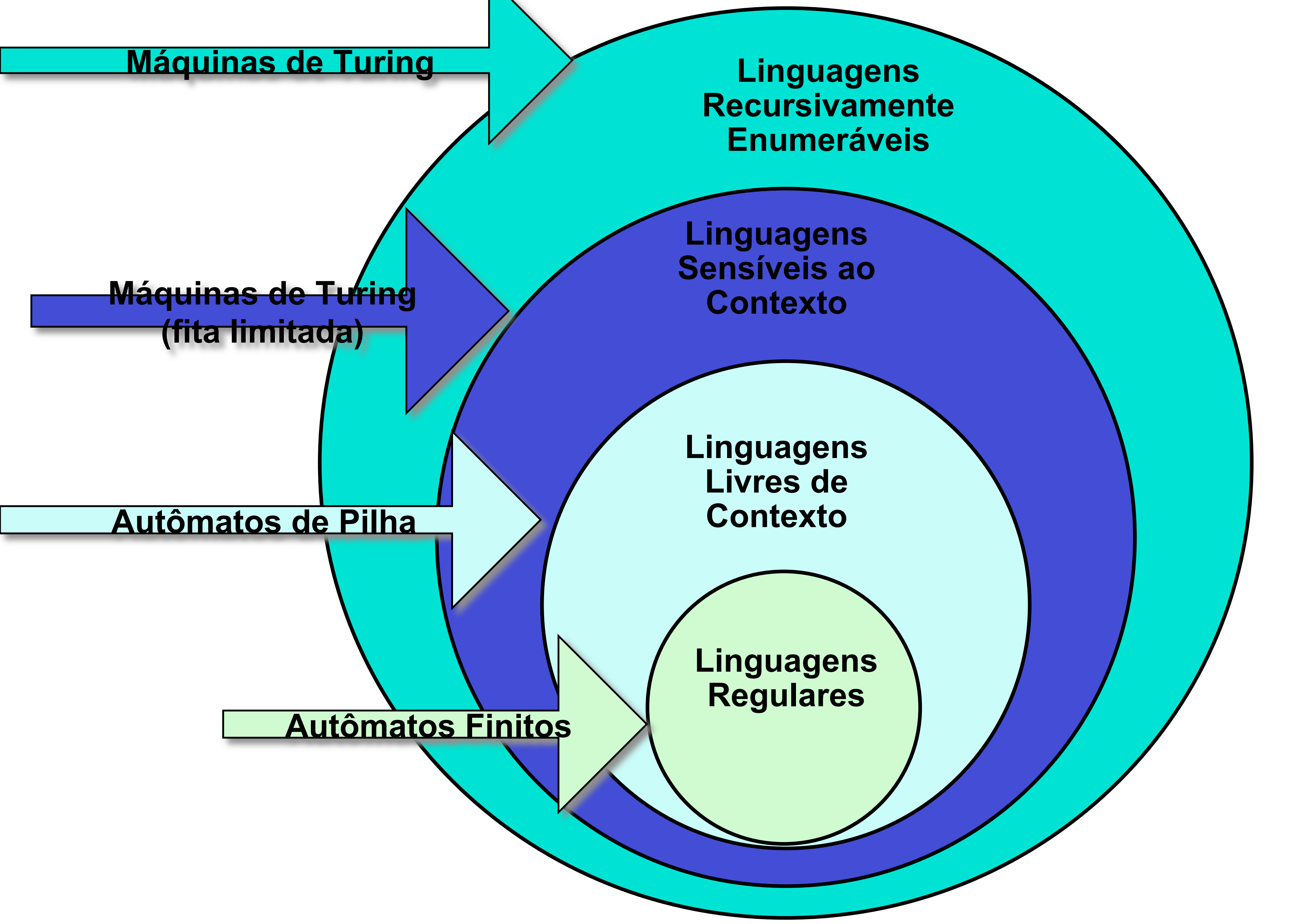
RECONHECEDORES - dispositivo de aceitação de sentenças

RECONHECIMENTO - processo de aceitação das sentenças da linguagem

Hierarquia de Chomsky

- Tipo 0 - Gramáticas irrestritas
  - geram linguagens estruturadas em frases
- Tipo 1 - Gramáticas sensíveis ao contexto
  - geram linguagens sensíveis ao contexto
- Tipo 2 - Gramáticas livres de contexto
  - geram linguagens livres de contexto
- Tipo 3 - Gramáticas lineares
  - geram linguagens regulares





Máquinas de Turing
Linguagens Recursivamente Enumeráveis
Máquinas de Turing (fita limitada)
Linguagens Sensíveis ao Contexto
Autômatos de Pilha
Linguagens Livres de Contexto
Autômatos Finitos
Linguagens Regulares

Referências

- *Linguagens Formais e Autômatos*. Paulo Blauth Menezes. Editora Sagra Luzzatto. Série Livros Didáticos – Instituto de Informática da UFRGS.