Capítulo 1

Série de potências

Brook Taylor

Brook Taylor *nasceu em* 18 *agosto de* 1685 *em Edmonton, Middlesex, Inglaterra e faleceu em* 29 *de dezembro de* 1731 *em Somerset House, Londres, Inglaterra.*

Taylor teve uma excelente educação em casa antes de entrar no College Brook St John's de Cambridge em 03 *de abril de* 1703*, nessa época ele tinha uma boa base em clássicos da matemática. Em Cambridge Taylor envolveu altamente com a matemática.*

Graduou-se com um Bacharel em Direito em 1709*, mas nessa época ele já havia escrito um primeiro artigo importante de matemática (em* 1708*) embora não fosse publicado até* 1714*.*

Sabe-se algo dos detalhes do pensamento de Taylor a respeito de vários problemas matemáticos a partir de cartas que trocou com Machin e Keill nos últimos anos de graduação.

Adicionou a matemática um novo ramo agora chamado o "Cálculo das Diferenças Finitas", inventou a integração por partes, e descobriu a célebre fórmula conhecida como a expansão de Taylor, de qual a importância permaneceu não reconhecida até 1772 *quando Lagrange proclamou isto como o princípio básico do cálculo diferencial.*

Em 1708 *Taylor encontrou uma solução para o problema do centro de oscilação, sendo que isso foi inédito até* 1714*, resultando em uma disputa de prioridade com Johann Bernoulli.*

Em 03 *de abril de* 1712*, Taylor foi eleito membro da Royal Society. Foi uma eleição baseada mais nas experiências que Machin (matemático e astrônomo), Keill (matemático) e outros sabiam a respeito de Taylor. Por exemplo, Taylor escreveu em* 1712 *para Machin sobre uma solução para um problema de Kepler sobre a segunda lei do movimento planetário.*

Também em 1712*, Taylor foi nomeado para o comitê criado para se pronunciar sobre o pedido de Newton ou Leibnitz ter inventado o Cálculo. De* 14 *de janeiro de* 1714 *até* 21 *de outubro de* 1718 *Taylor foi secretário da Royal Society.*

Comenta-se de um experimento de Taylor em 1715 *para a descoberta das leis da atração magnética e um método não provado para aproximar as raízes de uma equação, dando um novo método para logaritmos computacionais (*1717*). Taylor desenvolveu em* 1715 *os princípios fundamentais da perspectiva em Perspectivas Lineares (*1715*) junto com os " Novos Princípios da Perspectiva Linear".*

1.1 Séries de números reais

Seja $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathbb{N}^+$ o conjunto dos números naturais, onde $\mathbb{N}^+$ subconjunto dos números naturais é definido por:

$$\mathbb{N}^+ = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots \}$$

Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ uma sequência de números reais, a partir de ela podemos obter os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1;\\
&s_2 = a_1 + a_2;\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3;\\
&\quad\vdots\\
&s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1};\\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Destas somas podemos obter outra sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, chamada "*série*" como podemos observar seus elementos são somas parciais de elementos da sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.

Quando o índice n seja o maior possível (por exemplo, $n \to +\infty$), escrevemos o termo geral da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ como a soma de uma quantidade indeterminada de elementos da forma a_i onde $i \in \mathbb{N}^+$.

A notação que permite exprimir esta soma é: $\quad s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k.$

Por se tratar $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ de uma sequência de números reais, todo o estudado para sequências numéricas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ podemos aplicar a nossa série $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$; por exemplo, limitação, monotonia, convergência entre outros.

Logo, a série $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ é limitada, se existe constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $|s_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$ isto é $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq C.$

A série $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ é convergente, se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right] = S$, para algum $S \in \mathbb{R}$ fixo e único.

Assim, podemos dizer que existem séries convergentes e séries divergentes. O objetivo deste capítulo é aprender a distinguir umas das outras.

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ de números reais, a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + \ldots$$

será representada simbolicamente por $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$.

Agoura, temos que estabelecer condições sobre a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ para que a soma infinita $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ tenha como resultado um valor numérico. Se isto acontecer dizemos que a soma infinita converge.

Estas somas infinitas são denominadas "*séries infinitas*" ou simplesmente séries.

Definição 1.1. *Série convergente.*

Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente, quando a sequência* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *de suas somas parciais for convergente.*

Neste caso, a soma da série é o limite da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, isto é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = S \tag{1.1}$$

Quando uma série não converge, ela é denominada "*série divergente*".

Estamos trabalhando com os índices $n \in \mathbb{N}^+$, os elementos das séries podemos escrever $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ ou $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ e entenderemos que a variação do índice n é de zero (ou outro número natural quando indicado) até $+\infty$.

Exemplo 1.1.

- *Se* $a_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, *a série gerada pela sequência* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *é convergente, sua soma é zero; isto é* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 0$.
- *Se* $b_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, *a série gerada pela sequência* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *é divergente, sua soma é indeterminada; na verdade* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$
- *Se* $a_n = (-1)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, *então a série gerada pela sequência* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *é divergente, a soma de todos seus termos é indeterminada; isto é* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} = 1$ *ou* 0.

  Pela unicidade do limite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$, *concluímos que essa soma não existe.*

Por definição, uma "*série geométrica*" é da forma $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$, onde o número r é denominado "*razão da série*", e o número constante **a** é seu coeficiente.

Exemplo 1.2.

Estudar a série geométrica.

Solução.

Pela propriedade do somatório podemos escrever $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha r^{n-1} = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$, de onde:

$$s_n = \alpha \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = \alpha \left[\frac{1-r^n}{1-r} \right] \tag{1.2}$$

Quando $|r| < 1$, sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, tomando o limite em (1.2) quando $n \to +\infty$ tem-se: $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{\alpha}{1-r} = S$.

Isto é, $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{\alpha}{1-r}$ converge quando $|r| < 1$.

É imediato que, para o caso $|r| \geq 1$ a série diverge.

Por definição uma "*série harmônica*" é da forma $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exemplo 1.3. *Série harmônica*.

Determine se a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ *converge.*

Solução.

Esta série representa o termo n-*ésimo* de uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, onde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Consideremos duas subsequências de s_n: $s_m = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{m}$ e

$$s_{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}$$

Suponha que $s_m \to L$ quando $m \to +\infty$, então tem-se que $s_{2m} \to L$ quando $m \to +\infty$, segue assim $(s_{2m} - s_m) \to 0$ quando $m \to +\infty$. Porém,

$$s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

de onde $\lim\limits_{m\to+\infty} (s_{2m} - s_m) \geq \dfrac{1}{2} \neq 0$, caso o limite existisse.

Portanto, a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Por definição, uma "*série p*" é da forma $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$, onde $p \in (0, +\infty)$ é uma constante fixa. Esta série também é conhecida como Série de Dirichelet (ou de Riemann).

Mostra-se que a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{1.3}$$

converge se $p > 1$, e diverge se $0 \leq p \leq 1$.

Observação 1.1.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ *é denominada série de encaixe devido à natureza do seus termos:*

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) + \cdots$$

A sequência de suas somas parciais $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$*, vem dado pela expressão:*

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \tag{1.4}$$

Se a sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *convergir para um número* L*, segue que* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *converge para* $b_1 - L$*.*

Exemplo 1.4.

Verificar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$ *converge.*

Com efeito, observe que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$, logo;

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$ converge.

Exemplo 1.5.

Determine se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ *converge.*

Solução.

Observe que, podemos escrever $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}[\mathrm{Ln}n - \mathrm{Ln}(n+1)]$.

Logo, $\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Ln}\Big(\dfrac{k}{k+1}\Big) = \text{Ln}1 - \text{Ln}(n+1)$ então

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\text{Ln}\Big(\frac{k}{k+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}[\text{Ln}1 - \text{Ln}(n+1)] = 0 - \infty = -\infty$$

Portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\text{Ln}\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)$ diverge. ■

A propriedade a seguir fornece uma condição necessária, mas não suficiente para que uma série numérica seja convergente.

Propriedade 1.1. *Critério do n-ésimo termo.*

Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergente, então:*

i) *A sequência* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ *de somas parciais é limitada.*

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Demonstração. **i)**

Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então existe em $L \in \mathbb{R}$ tal que limite $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = L$, logo sendo $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ uma sequência convergente, ela é limitada.

Demonstração. **ii)**

Denotando por $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ a sequência de somas parciais da série, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ temos que $a_n = s_n - s_{n-1}$ e admitindo que a série é convergente, resulta que a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge para um certo número L, o mesmo ocorrendo com a subsequência $\{s_{n-1}\}$, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = L - L = 0$$

Exemplo 1.6.

Verificar que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{2n^2+3n}$ *diverge.*

Solução.

Observe que o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Logo pelo critério do n-ésimo termo a série diverge. ■

Esta última propriedade nos leva a um primeiro teste para saber a respeito da divergência de uma série, e justifica a seguinte propriedade.

Propriedade 1.2.

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *ou não existe, então a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.7.

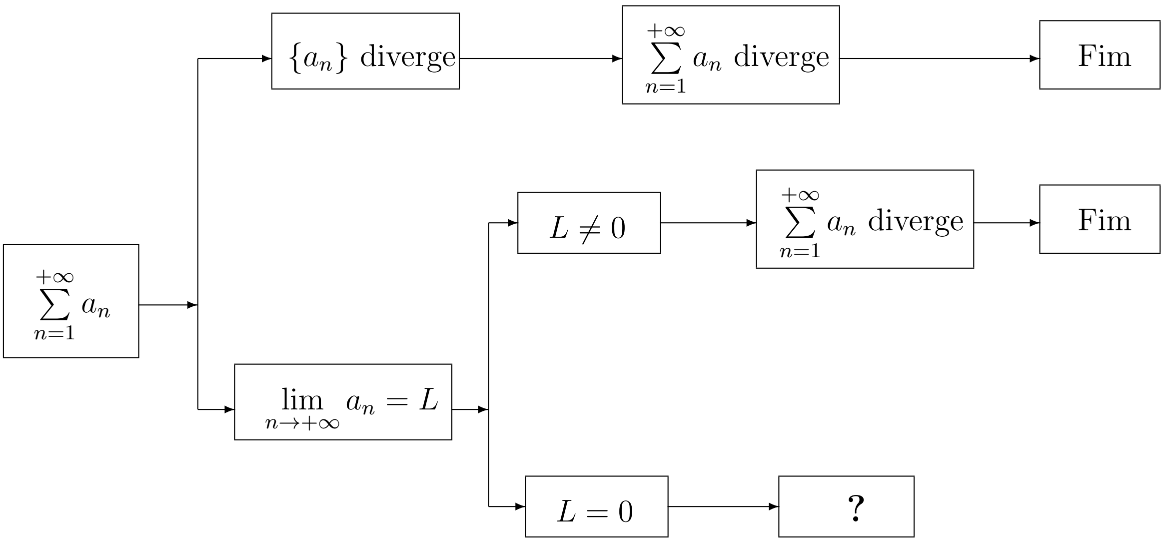
1. *As séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n+1}$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ *ambas são divergentes.*

Com efeito, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$.

2. *As séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-n}{3n+4}$ *ambas são divergentes.*

Observe que, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \neq 0$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{3n+4} \neq 0$.

A *Propriedade* (1.2) constitui-se nosso primeiro *critério de convergência*, para séries. Ao analisar a convergência de uma série, em primeiro lugar observamos a convergência de seu primeiro termo geral s_n. O seguinte diagrama orienta a respeito da Propriedade (1.2).



A condição $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ não dá informação sobre a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ sendo necessária uma análise adicional para determinar se a série converge ou diverge.

Observação 1.2.

Suponha que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *seja convergente; isto é* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$ *existe. Então é correto afirmar que:*

$\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n - S)$ *existe se e somente se,* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$ *existe.* ■

Deduzimos assim, que podemos omitir um número finito de termos (entre os primeiros) de uma série infinita sem afetar sua convergência.

Como no caso das sequências numéricas, o acréscimo ou a omissão de um número finito de termos não altera a convergência de uma série, podendo alterar o valor de sua soma.

Exemplo 1.8.

A seguinte tabela ilustra algumas situações:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$	**situação**
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^n}{n^2}$	$+\infty$	divergente
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{3n+5}$	$\dfrac{1}{3}$	divergente
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\text{Ln}n}{n^2}$	0	indefinida

Propriedade 1.3.

Se as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diferem apenas em seus primeiros termos em uma quantidade finita, então ambas são convergentes ou ambas são divergentes.*

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Ainda mais, uma consequência da *Propriedade* (1.3), temos que para cada número $k \in \mathbb{N}^+$, as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Exemplo 1.9.

As séries $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ *e* $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \dfrac{1}{n-8}$ *ambas são divergentes, entanto as séries* $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *e* $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{1}{(n-8)^2}$ *ambas são convergentes.*

Propriedade 1.4.

Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries numéricas e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) *Se as séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são convergentes, então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha\cdot a_n$ *também convergem.*

(b) *Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e convergente e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente, a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *diverge.*

(c) *Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente e* $\beta \neq 0$, *então a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \beta \cdot a_n$ *é também divergente.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Observação 1.3.

Quando as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são ambas divergentes, a Propriedade* (1.4) *não dá informação a respeito da convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Exemplo 1.10.

- *As séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-1}{n}$ *são ambas divergentes, entanto que a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{-1}{n}\right]$ *converge.*
- *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{n^2+n} + \dfrac{3}{4^{n-1}}\right]$ *é convergente, enquanto as séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{4^{n-1}}$ *são convergentes.*

Propriedade 1.5. *Condição de Cauchy.*

Seja $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *uma sequência de números reais, a série* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *é convergente se, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 > 0$ *tal que* $|s_m - s_n| < \varepsilon$ *sempre que* $m,\ n > n_0$.

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Existem casos onde a série têm seus termos decrescentes, então podemos utilizar a seguinte propriedade.

Propriedade 1.6.

Suponhamos temos uma série de termo geral a_n *de modo que* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$; *logo:*

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge se e somente se, a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ *também converge.*

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.11.

Verificar que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*

Solução.

Tem-se que $a_n = \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$, então podemos obter $a_{2^n} = \dfrac{1}{(2^n)^2}$.

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \dfrac{1}{(2^n)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \left[\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} \right] = 1.$

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ também converge. ■

Uma série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ onde cada termo a_n é maior ou igual do que zero é denominada *série de termos positivos.*

Propriedade 1.7.

Seja $\{a_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *uma sequência com* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$*. Então a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, a sequência de somas parciais* $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *é limitada.*

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.12.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *é convergente.*

Observe que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$.

Como $s_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$, *tem-se que* $s_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$.

Sendo os termos positivos, e a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *limitada, então série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *é convergente.*

Definição 1.2. *Série dominada.*

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é dominada pela série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *quando* $a_n \leq b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

Nesse caso $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é a série dominada e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é a série dominante.

Exemplo 1.13.

i) *A série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ *é "dominante" e a série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^p}, \quad p > 2$ *é "dominada"*

ii) *A série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \sqrt{n}$ *é "dominante" e a série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \operatorname{sen}(n^2)$ *é "dominada"*

Observação 1.4.

Para séries de termos positivos, os seguintes fatos são imediatos:

1. *A sequência* s_n *de somas parciais é monótona crescente.*

2. *Se a série* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *é dominada pela série* $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$*, as respectivas séries de somas parciais* $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *e* $\{t_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ *satisfazem a relação* $s_n \leq t_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

Estes fatos junto com a *Propriedade* (1.7) estabelecem o seguinte critério de convergência conhecido como

1.1.1 Critérios de convergência das séries numéricas

Propriedade 1.8. *Critério de comparação.*

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos:*

i) *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge e* $a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$*, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também converge.*

ii) *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge e* $a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$*, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também diverge.*

Como as afirmações **i)** e **ii)** são equivalentes, é suficiente demonstrar apenas uma delas.

A demonstração é exercício para o leitor. ∎

Definição 1.3. *Série absolutamente convergente.*

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *for convergente.*

Observe, se $a_n \geq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+ \quad \Rightarrow \quad |a_n| = a_n$, assim, a série é $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente. Para o caso de alguns termos a_n positivos e negativos, a convergência e a convergência absoluta não é a mesma.

Exemplo 1.14.

Toda série convergente, cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Em particular quando $-1 < r < 1$, *a série geométrica* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n$ *é absolutamente convergente, pois* $|r^n| = |r|^n$, *com* $0 \leq |r| < 1$.

Observação 1.5.

Os elementos de uma série absolutamente convergente, podem ser reordenados sem afetar a convergência ou a soma da série.

Por exemplo a série $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} - \dfrac{1}{243} + \dfrac{1}{729} - \dfrac{1}{2187} \cdots$ converge absolutamente.

O reordenamento $1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{729} + \cdots - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{243} - \dfrac{1}{2187} - \cdots$ também converge e tem a mesma soma que a original.

Propriedade 1.9.

Se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, então ela é convergente e:*

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Este resultado é consequência do fato que $0 \leq x + |x| \leq 2|x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.15.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

Observe que $\left| \dfrac{(-1)^n}{n^2} \right| = \dfrac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$.

Como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, segue-se que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

Propriedade 1.10.

Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries absolutamente convergentes, então:*

i) *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *é absolutamente convergente.*

ii) *O produto* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ *das séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é absolutamente convergente, e:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)$$

A demonstração é exercício para o leitor. ■

O critério de convergência a seguir, embora não seja conclusivo em alguns casos, constitui-se como o mais importante teste de convergência para séries numéricas, não apenas do ponto de vista técnico, mais também como nas aplicações às "*Séries de Potências*".

Propriedade 1.11. *Critério de comparação.*

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tais que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries e* $|a_n| \leq K|b_n|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$, $\quad K > 0$:

i) *Se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é absolutamente convergente, então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também é absolutamente convergente.*

ii) *Se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *não é absolutamente convergente, então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *não é absolutamente convergente.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.16.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$ *é absolutamente convergente.*

É imediato que $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen} n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$. *Como a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *é absolutamente convergente, pela Propriedade* (1.11), *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$ *é absolutamente convergente.*

Definição 1.4.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é simplesmente convergente, se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for divergente.*

Definição 1.5.

Uma série se diz alternada, se for da forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *ou* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ *com* $a_n \geq 0$

Exemplo 1.17.

A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ *é simplesmente convergente.*

Propriedade 1.12.

Uma série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *é absolutamente convergente, se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *for convergente.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 1.13. *Critério de Leibniz*

Seja a série alternada $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *uma série de termos alternados, com* $a_n \geq 0$, *que satisfaz as condições:* **i)** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente.* ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Então a série S *é convergente e diz-se simplesmente convergente.*

Caso contrário é divergente. A demonstração é exercício para o leitor.

Propriedade 1.14. *Critério D'Alembert's*[1].

Seja $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$ *e suponhamos que* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \in \mathbb{R}$.

i) *Se* $r < 1$, *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *é absolutamente convergente.*

ii) *Se* $r > 1$, *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *diverge.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.18.

- *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p^n}{n!}$ *é absolutamente convergente, para todo* $p \in \mathbb{R}$.

  Com efeito, se $p = 0$ *é imediato.*

  Sejam $p \neq 0$ *e* $a_n = \dfrac{p^n}{n!}$ *para* $n \in \mathbb{N}^+$, *então:* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{p^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{p^n}\right| = \dfrac{|p|}{n+1}$.

[1]Também conhecido como *Critério da razão*.

Calculando o limite, $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|p|}{n+1} = 0.$

Portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n!}$ *é absolutamente convergente.*

- *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n!)}{n!}$ *é absolutamente convergente.*

Com efeito, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(n!)}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Pelo critério de comparação (Propriedade (1.11)*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n!)}{n!}$ *converge absolutamente.*

Propriedade 1.15. *Critério de Cauchy*[2]*.*

Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$.

i) *Se* $r < 1$, *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

ii) *Se* $r > 1$, *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.19.

Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n-(-1)^n}$ *é convergente.*

Solução.

Usando o critério de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} 3^{-1}\cdot 3^{-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

concluímos que a série é convergente.

Pelo critério de D'Alembert nada se pode concluir. Com efeito

$$\frac{3^{-(n+1)-(-1)^{(n+1)}}}{3^{-n-(-1)^n}} = 3^{-n-1-(-1)^{n+1}+n-(-1)^n} = \begin{cases} 3, & \text{se} \quad n \quad \text{par} \\ 3^{-3}, & \text{se} \quad n \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

Exemplo 1.20.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n$ *converge absolutamente se* $|a| < 1$, *e é divergente se* $|a| > 1$.

[2]Também conhecido como *Critério da raiz*

$\frac{1}{n} \log n$

$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

$p>0$

Com efeito, $\sqrt[n]{|n^p a^n|} = (\sqrt[n]{n})^p |a|$ *para* $n \in \mathbb{N}^+$, *de onde* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^p a^n|} = |a|$.

Se $|a| < 1$ *pelo critério de Cauchy, a série é absolutamente convergente.*

Se $|a| > 1$ *a série diverge.*

Propriedade 1.16. *Critério da integral.*

Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e suponhamos que* f *seja não negativa e monótona decrescente; isto é:*

(a) $f(x) \geq 0, \ \forall\, x \geq 1$. **(b)** $f(x) \geq f(y)$, *sempre que* $1 \leq x \leq y$.

Nessas condições a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é convergente se, e somente se, a integral* $\int\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *for convergente.*

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Além de dar informação relativa à convergência de uma série, o critério da integral pode ser usado para calcular a soma da série.

Exemplo 1.21.

A função $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *atende as condições da propriedade no intervalo* $[1, +\infty)$.

De fato, nesse intervalo a função $f(x)$ *é claramente contínua e não negativa e como sua derivada* $f'(x) = \dfrac{-3}{x^4}$ *é negativa para todo* $x \geq 1$, *então* $f(x)$ *é decrescente.*

A integral imprópria $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx = \dfrac{1}{2}$ *é convergente, por conseguinte a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ *converge.*

Observação 1.6.

Quando utilizamos o critério da integral, o valor da integral imprópria não é necessáriamente igual ao valor da soma da série, no caso de esta convergir.

Propriedade 1.17.

Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e suponhamos que* $f(x)$ *seja não negativa e monótona decrescente. Se a integral imprópria* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *converge, então a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *converge, e:*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 1.22.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ *converge se* $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$.

1.1.2 Sumário dos Critérios para Séries de Números.

Critério	**Série**	**Converge**	**Diverge**	**Comentário**
do *n-ésimo* termo	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$		$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$	O critério não pode ser usado para provar convergência
da série geométrica	$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n$	$\|r\| < 1$	$\|r\| \geq 1$	quando converge, sua soma: $S = \dfrac{a}{1-r}$
para séries p	$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$	$p > 1$	$p \leq 1$	
Propriedade (1.4)	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$		se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$
Propriedade (1.4)	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$	se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \not< +\infty$
Propriedade (1.6)	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$		se $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < +\infty$
para séries telescópicas	$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$		soma: $S = b_1 - L$
de comparação $(a_n,\ b_n > 0)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	se, $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$	se, $0 \leq b_n \leq a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \not< \infty$	
da integral (f contínua, positiva e decrescente)	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{+\infty} f(x)dx < \infty$	$\int_1^{+\infty} f(x)dx \not< \infty$	resto: $0 < R_N < \int_N^{+\infty} f(x)dx$
dos limites da comparação $(a_n,\ b_n > 0)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \not< +\infty$	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ caso $L = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$
de Raabe	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$k > 1$	$k < 1$	$k = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right]$
de D'Alembert's ou da razão	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$ absolutamente	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1$	inconclusivo se: $\lim_{n\to+\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = 1$
de Cauchy ou da raiz	$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$ absolutamente	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$	inconclusivo se: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 1$
de Leibnitz ou para séries alternadas	$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$		Resto: $\|R_N\| \leq a_{N+1}$

Propriedade 1.18. *Critério de comparação no limite.*

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos e seja* $L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

i) *Se $L > 0$, então as séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

ii) *Se $L = 0$ e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge, então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também converge.*

iii) *Se $L = \infty$ e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge, então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também diverge.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 1.23.

Determine se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$ *converge ou diverge.*

Solução.

Seja $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ e consideremos $b_n = \dfrac{1}{2^n}$; sabe-se que a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ é convergente $(r = \dfrac{1}{2} < 1)$.

Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2}{n}\right]^n = 0.$

Pela parte **ii)** da *Propriedade* (1.18) segue que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ é convergente.

1.2 Séries de funções

As linguagens de programação de computadores fornecem certas funções tais como seno, cosseno, logaritmo, exponencial, etc.

No entanto, muitas vezes não temos a função pré-definida e recorremos ao desenvolvimento em série de potências para fazer nossos cálculos.

Na seção anterior estudamos séries de números da forma $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ onde cada a_n é um número real. Em analogia a essas séries podemos estudar séries de funções da forma $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$ onde os $a_n(x)$ são funções. Um exemplo típico desta classe de séries é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \cdots$$

Evidentemente quando substituímos um valor para x, por exemplo, $x = 2$, retornamos ao estudo da série numérica.