Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações
Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

4

Transformações Lineares

Conteúdo

4.1 Transformações do Plano no Plano

Exemplo 4.1.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, e um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixo. A transformação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; \lambda\,(x,\,y) \end{array}$$

é uma contração para $|\,\lambda\,| \,<\, 1$*. Quando* $|\,\lambda\,| \,>\, 1$*, dizemos que* T *é uma expansão.*

Exemplo 4.1.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. A transformação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (x,\,-y) \end{array}$$

é a reflexão em torno do eixo–ox.

Exemplo 4.1.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. A transformação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (-x,\,-y) \end{array}$$

é a reflexão em torno da origem.

Exemplo 4.1.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. Dado um elemento* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, a transformação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (x\,,\,y) \;+\; (a\,,\,b) \end{array}$$

é uma translação.

Exemplo 4.1.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. A transformação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (\,x\cos(\theta) \,-\, y\sin(\theta)\,,\, x\sin(\theta) \,+\, y\cos(\theta)\,) \end{array}$$

é uma rotação de um ângulo θ *no sentido anti–horário.*

4.2 Transformação Linear

Definição 4.2.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T uma aplicação de V em W. Dizemos que T é uma* ***Transformação Linear*** *se possui as seguintes propriedades:*

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *para todo* $u, v \in V$.

(b) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ *para todo* $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Das duas propriedades de transformação linear, obtemos facilmente que

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

para todo $u, v \in V$ e todos escalares $a, b \in \mathbb{F}$. Por indução, obtemos uma relação mais geral

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(u_j)$$

para quaisquer elementos $u_1, \cdots, u_n \in V$ e quaisquer escalares $\alpha_j, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.

Finalmente, fazendo $\lambda = 0$ na propriedade *(b)*, tem–se $T(0_V) = 0_W$.

Exemplo 4.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Vamos definir a seguinte transformação linear $T(v) = v$ para todo $v \in V$, que é a transformação identidade, denotada por I_V.*

Exemplo 4.2.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Vamos definir a seguinte transformação linear $T(v) = 0_V$ para todo $v \in V$, que é a transformação nula.*

Exemplo 4.2.3 *Dado um elemento $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ fixo, porem arbitrário, vamos definir a seguinte transformação linear*

$$\begin{aligned} T : \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{aligned}$$

A transformação linear T é o produto escalar entre o elemento x e o elemento c.

Exemplo 4.2.4 *Seja V um espaço vetorial real. Considerando um escalar $\lambda \in I\!R$ fixo, porem arbitrário, definimos a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longrightarrow & T(v) \, = \, \lambda v \end{array}$$

A transformação linear T é uma ***contração*** *para $|\lambda| < 1$. Quando $|\lambda| > 1$, dizemos que a transformação linear T é uma* ***expansão***.

Exemplo 4.2.5 *Considerando os espaços vetoriais reais $\mathcal{C}([a,b])$ e $\mathcal{C}^1([a,b])$, definimos a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^1([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & f & \longrightarrow & T(f) \, = \, f' \end{array}$$

com $T(f)(x) = f'(x) \quad ; \quad x \in [a,b]$.

Exemplo 4.2.6 *Considerando os espaços vetoriais reais $\mathcal{C}([a,b])$ e $\mathcal{C}^1([a,b])$, definimos a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1([a,b]) \\ & f & \longrightarrow & g \, = \, T(f) \end{array}$$

com $g(x) = T(f)(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad ; \quad x \in [a,b]$.

Exemplo 4.2.7 *Considere os espaços vetoriais reais $I\!R^m$ e $I\!R^n$. Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in I\!M_{m \times n}(I\!R)$, definimos a transformação linear associada a matriz A da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccl} T_A: & I\!R^n & \longrightarrow & I\!R^m \\ & x & \longrightarrow & y \, = \, T_A(x) \end{array}$$

onde

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \qquad \textit{para} \qquad i = 1, \cdots, m$$

é a i–ésima componente do elemento $y = (y_1, \cdots, y_m)$.

Teorema 4.2.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $I\!F$, com $dim(V)$ igual a n, $\beta = \{ v_1 \,, \cdots \,, v_n \}$ uma base ordenada para V e $w_1 \,, \cdots \,, w_n$ elementos arbitrários de W. Então, existe uma única transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que*

$$T(v_j) \;=\; w_j \qquad \textit{para} \qquad j \;=\; 1, \,\cdots\,, \, n\,.$$

Demonstração – Inicialmente vamos mostrar que existe pelo menos uma transformação linear T com $T(v_j) \;=\; w_j$. Dado um elemento $u \in V$, sabemos que u é escrito de modo único como:

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i \, v_i \,.$$

Para este elemento u, vamos definir uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ da forma:

$$T(u) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i \, w_i \,.$$

Temos que T é uma transformação bem definida. Pela definição, fica evidente que $T(v_i) \;=\; w_i$. Para mostrar que T é uma transformação linear, sejam $\lambda \in I\!F$ e um elemento $v \in V$ escrito de modo único como:

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i \, v_i \,.$$

Assim, temos que

$$T(u \,+\, \lambda v) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (\, c_i \,+\, \lambda b_i \,)\, w_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i \, w_i \,+\, \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i \, w_i \;=\; T(u) \,+\, \lambda\, T(v)\,.$$

mostrando que a aplicação T é linear.

Finalmente vamos mostrar a unicidade da transformação linear T. Para isso, supomos que existe uma outra transformação linear $P : V \longrightarrow W$ tal que

$$P(v_j) \;=\; w_j \qquad \text{para} \qquad j = 1, \,\cdots\,, \, n\,.$$

Desse modo, temos que

$$P(u) \;=\; P\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, v_i \right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i \, P(v_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i \, w_i \,.$$

Logo, P é exatamente a regra da transformação linear T definida acima. Portanto, provamos a unicidade da transformação linear T, o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 4.2.8 *A aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T(1,0) \,=\, 1 - x \qquad e \qquad T(0,1) \,=\, 1 - x^2$$

define uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Estamos considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a base canônica

$$\beta \,=\, \{\,(1,0),\,(0,1)\,\}\,.$$

Assim, dado um elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, podemos representa–lo de modo único como:

$$(a,b) \,=\, a(1,0) \,+\, b(0,1)\,.$$

Desse modo, temos que

$$T(a,b) \,=\, aT(1,0) \,+\, bT(0,1) \,=\, a(1 - x) \,+\, b(1 - x^2)\,.$$

Portanto, obtemos explicitamente a transformação linear T

$$T(a,b) \,=\, (a + b) - ax - bx^2 \qquad \text{para todo} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Exemplo 4.2.9 *A aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T(1,1) \,=\, x \qquad e \qquad T(-1,1) \,=\, x - x^3$$

define uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Estamos considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a base ordenada

$$\gamma \,=\, \{\,(1,1),\,(-1,1)\,\}\,.$$

Assim, dado um elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, podemos representa–lo de modo único como:

$$(a,b) \,=\, \frac{a+b}{2}\,(1,1) \,+\, \frac{b-a}{2}\,(-1,1)\,.$$

Desse modo, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$T(a,b) \,=\, \frac{a+b}{2}\,T(1,1) \,+\, \frac{b-a}{2}\,T(-1,1) \,=\, \frac{a+b}{2}\,x \,+\, \frac{b-a}{2}\,(x - x^3)\,.$$

obtendo explicitamente a transformação linear T, dada por:

$$T(a,b) \,=\, bx \,+\, \frac{a-b}{2}x^3\,.$$

Exercícios

Exercício 4.1 *Determine a transformação linear* T *do plano no plano que representa uma rotação anti–horária de* $\dfrac{\pi}{4}$ *seguida por uma dilatação de* $\sqrt{2}$.

Exercício 4.2 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x, y) = (x, -y).$$

Seja K *um triângulo de vértices* $A = (-1, 4)$, $B = (3, 1)$ *e* $C = (2, 6)$. *Faça a representação gráfica da imagem de* K *pela transformação* T.

Exercício 4.3 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *associada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere o círculo $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1 \}$. *Faça a representação gráfica da imagem do círculo* S *pela transformação linear* T.

Exercício 4.4 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x, y) = (2x - y, -x + 2y).$$

Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = 3(x, y) \}$$

$$U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = (x, y) \}$$

Exercício 4.5 *Determine a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 1) \quad , \quad T(1, 0, 1) = (1, 1, 1) \quad e \quad T(0, -1, 1) = (1, 1, 0).$$

Exercício 4.6 *Determine a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T(1, 1) = x^2 - 1 \quad e \quad T(1, -1) = x^3 + 1.$$

Exercício 4.7 *Determine a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$T(1, 0, 0) = 1 - x, \quad T(0, 1, 0) = 1 + x \quad e \quad T(0, 0, 1) = 1 - x^2.$$

Exercício 4.8 *Determine a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(1, 0, 0) = (1, 0), \quad T(0, 1, 0) = (1, -1) \quad e \quad T(0, 0, 1) = (0, 1).$$

4.3 Núcleo e Imagem

Definição 4.3.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T uma transformação linear de V em W. O conjunto*

$$Im(T) = \{ w \in W \ / \ w = T(v) \quad \textit{para algum} \quad v \in V \}$$

*é denominado **imagem** da transformação T.*

Teorema 4.3.1 *O conjunto $Im(T) \subset W$ é um subespaço vetorial de W.*

Demonstração – Sabemos que $T(0_V) = 0_W$. Assim, $0_W \in Im(T)$.

Agora, tomando $T(u)$, $T(v) \in Im(T)$, tem-se que

$$T(u) + T(v) = T(u + v)$$

como $u + v \in V$ e $T(u + v) \in W$, temos que $T(u) + T(v) \in Im(T)$.

Finalmente, tomando $T(u) \in Im(T)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que

$$\lambda T(u) = T(\lambda u)$$

como $\lambda u \in V$ e $T(\lambda u) \in W$, obtemos que $\lambda T(u) \in Im(T)$. ■

Definição 4.3.2 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T uma transformação linear de V em W. O conjunto*

$$Ker(T) = \{ v \in V \ / \ T(v) = 0_W \}$$

*é denominado **núcleo** da transformação T.*

Teorema 4.3.2 *O conjunto $Ker(T) \subset V$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração – Sabemos que $T(0_V) = 0_W$. Assim, $0_V \in Ker(T)$.

Agora, tomando u, $v \in Ker(T)$, temos que

$$T(u) + T(v) = T(u + v) = 0_W .$$

Logo, $u + v \in Ker(T)$.

Finalmente, tomando $u \in Ker(T)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = 0_W .$$

Logo, $\lambda u \in Ker(T)$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 4.3.1 *Determinar o núcleo da transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = 3x + 2y \end{array}$$

Resposta: $\boxed{T(x,y) = 3x + 2y = 0 \implies y = -\frac{3}{2}x}$

Exemplo 4.3.2 *Determinar o núcleo da transformação diferenciação*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^1([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & u & \longrightarrow & T(u) = u' \end{array}$$

Note que $T(u)(x) = u'(x)$ *para* $x \in [a,b]$.

Resposta: $\boxed{T(u)(x) = u'(x) = 0 \implies Ker(T) = [1] = \mathcal{P}_0(\mathbb{R})}$

Exemplo 4.3.3 *Determinar o núcleo da transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^2([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & u & \longrightarrow & T(u) = u'' \end{array}$$

Note que $T(u)(x) = u''(x)$ *para* $x \in [a,b]$.

Resposta: $\boxed{T(u)(x) = u''(x) = 0 \implies Ker(T) = [1, x] = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})}$

Exemplo 4.3.4 *Determinar o núcleo da transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^2([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & u & \longrightarrow & T(u) = u'' + u \end{array}$$

Note que $T(u)(x) = u''(x) + u(x)$ *para* $x \in [a,b]$.

Resposta: $\boxed{T(u)(x) = u''(x) + u(x) = 0 \implies Ker(T) = [\sin(x), \cos(x)]}$

Exemplo 4.3.5 *Determinar o núcleo da transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^2([a,b]) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b]) \\ & u & \longrightarrow & T(u) = -u'' + u \end{array}$$

Note que $T(u)(x) = -u''(x) + u(x)$ *para* $x \in [a,b]$.

Resposta: $\boxed{T(u)(x) = -u''(x) + u(x) = 0 \implies Ker(T) = [\exp(x), \exp(-x)]}$

Exemplo 4.3.6 *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (x - 3y + 5z\,,\ -x + 4y - z) \end{array}$$

Determine os subespaços $Im(T)$ *e* $Ker(T)$, *e* $dim(Im(T))$.

A transformação T pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(x,y,z) = x(1,-1) + y(-3,4) + z(5,-1) \quad , \quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, temos que $Im(T) = [(1,-1)\,,\,(-3,4)\,,\,(5,-1)]$. Podemos verificar facilmente que $\{\,(1,-1),\ (-3,4)\,\}$ é uma base para $Im(T)$. Logo, $dim(Im(T)) = 2$.

O núcleo da transformação T é o conjunto solução do sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\ -x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Assim, temos que $Ker(T) = [(-17,-4,1)]$. Logo, $dim(Ker(T)) = 1$.

Exemplo 4.3.7 *Dado o elemento* $c = (1,-1,2) \in \mathbb{R}^3$. *O núcleo da transformação linear* T *definida pelo produto escalar entre os elementos* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *e o elemento fixo* c, *veja o Exemplo 4.2.3, é dado por:*

$$Ker(T) = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ T(x,y,z) = x - y + 2z = 0\,\}\,,$$

isto é, $Ker(T)$ *é um plano contido em* $\mathbb{R}^3$. *Assim, temos que* $dim(\,Ker(T)\,) = 2$. *Note que a* $Im(T) = \mathbb{R}$. *Logo,* $dim(\,Im(T)\,) = 1$.

Exemplo 4.3.8 *Considere a transformação linear* $T : I\!R^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(I\!R)$ *definida por:*

$$T(1,0,1) = 2 + x^2 + x^3 \quad , \quad T(0,1,0) = 1 + x^2 \quad e \quad T(0,0,1) = x^2 - x^3 \, .$$

(a) Calcule $T(a,b,c)$ *para a transformação linear* T.

(b) Determine uma base para o subespaço $Im(T)$.

Podemos verificar facilmente que o conjunto

$$\gamma = \{ (1,0,1) \, , \, (0,1,0) \, , \, (0,0,1) \}$$

é uma base para o espaço vetorial $I\!R^3$. Desse modo, tomando um elemento genérico $(a,b,c) \in I\!R^3$ vamos fazer sua representação em relação à base γ, isto é,

$$(a,b,c) = c_1(1,0,1) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) \, ,$$

obtendo $c_1 = a \quad , \quad c_2 = b \quad$ e $\quad c_3 = c - a$. Desse modo, temos que

$$(a,b,c) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + (c-a)(0,0,1) \, .$$

(a) Portanto, podemos escrever a transformação linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(a,b,c) &= a\,T(1,0,1) + b\,T(0,1,0) + (c-a)\,T(0,0,1) \\ &= a(\, 2 + x^2 + x^3 \,) + b(\, 1 + x^2 \,) + (c-a)(\, x^2 - x^3 \,) \\ &= a(\, 2 + 2x^3 \,) + b(\, 1 + x^2 \,) + c(\, x^2 - x^3 \,) \end{aligned}$$

Assim, determinamos explicitamente a expressão da transformação linear T dada por:

$$T(a,b,c) = a(\, 2 + 2x^3 \,) + b(\, 1 + x^2 \,) + c(\, x^2 - x^3 \,)$$

para todo $(a,b,c) \in I\!R^3$.

(b) Considerando $T(a,b,c)$, sabemos que

$$Im(T) = [2 + 2x^3 \, , \, 1 + x^2 \, , \, x^2 - x^3] \, .$$

Assim, a partir do sistema de geradores vamos determinar uma base para o subespaço $Im(T)$. Para isso, construímos a matriz A cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos elementos do sistema de geradores em relação à base canônica de $\mathcal{P}_3(I\!R)$, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \, .$$

Em seguida, efetuamos o escalonamento da matriz A, obtendo uma matriz $\widehat{A}$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, dada por:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Portanto, podemos concluir que

$$\{ 2 + 2x^3 , 1 + x^2 \}$$

é uma base para o subespaço $Im(T)$.

Exercícios

Exercício 4.9 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por:*

$$T(x,y,z) \;=\; (\; x - y - z \;,\; 2z - x \;)\,.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.10 *Seja* $U \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *o subespaço das matrizes diagonais. Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow U$ *definida por:*

$$T(a \;+\; bx \;+\; cx^2) \;=\; \begin{bmatrix} a - b + 2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a + b & 0 \\ 0 & 0 & -a - 2b + 2c \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.11 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$T(p)(x) \;=\; p'(x) \;+\; \int_0^x p(t)dt\,.$$

Determine $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.12 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$T(p)(x) \;=\; p'(x) \;+\; xp(x)\,.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.13 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$T(p(x)) \;=\; -p''(x) \;+\; p(x)\,.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.14 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$T(p(x)) \;=\; p''(x) \;+\; p(x)\,.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

Exercício 4.15 *Considere a transformação linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$T(p(x)) \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)dx \;\;+\;\; p'(0)\,.$$

Determine uma base para $Ker(T)$ *e uma base para* $Im(T)$*.*

4.4 Posto e Nulidade

Definição 4.4.1 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *uma transformação linear de* V *em* W. *Definimos*

(a) *O* ***Posto*** *de* T, *que denotamos por* $posto(T)$, *como sendo a dimensão da imagem de* T, *isto é,* $posto(T) = dim(\,Im(T)\,)$.

(b) *A* ***Nulidade*** *de* T, *que denotamos por* $Null(T)$, *como sendo a dimensão do núcleo de* T, *isto é,* $Null(T) = dim(\,Ker(T)\,)$.

Definição 4.4.2 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *uma aplicação de* V *em* W. *Dizemos que* T *é uma aplicação* ***injetora*** *se, e somente se, para* $u, v \in V$, *com* $u \neq v$ *tem–se que* $T(u) \neq T(v)$. *De modo equivalente,* T *é* ***injetora*** *se, e somente se, para* $u, v \in V$, *com* $T(u) = T(v)$ *implica que* $u = v$.

Definição 4.4.3 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *uma aplicação de* V *em* W. *Dizemos que* T *é uma aplicação* ***sobrejetora*** *se, e somente se,* $Im(T) = W$, *isto é, para todo* $w \in W$, *existe* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$.

Teorema 4.4.1 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *uma transformação linear de* V *em* W. *Então,* T *é uma aplicação injetora se, e somente se,* $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Por hipótese temos que T é injetora, isto é, $T(u) = T(v)$ implica que $u = v$. Vamos mostrar que $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$.

Seja $u \in Ker(T)$, isto é, $T(u) = 0_W$. Como $T(0_V) = 0_W$, temos que $T(u) = T(0_V)$. Pelo fato de T ser injetora, devemos ter $u = 0_V$. Logo, $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$.

($\Longleftarrow$) Por hipótese temos que $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$. Vamos mostrar que T é injetora. Para isso, tomamos $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Assim, temos que

$$T(u) - T(v) = T(u - v) = 0_W \,.$$

Como $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$, obtemos

$$(u - v) \in Ker(T) \implies u - v = 0_V \implies u = v \,.$$

Logo, T é injetora, o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.4.2 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $dim(V) = n$, e $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear. Então,*

$$dim(\,Ker(T)\,) \;+\; dim(\,Im(T)\,) \;=\; dim(\,V\,)\,.$$

Demonstração – Seja $\{\, v_1 \,,\, \cdots \,,\, v_m \,\}$ uma base para $Ker(T)$, com $m \leq n$. Assim, esse conjunto faz parte de uma base para V. Desse modo, existem elementos $v_{m+1} \,,\, \cdots \,,\, v_n$ em V tais que $\{\, v_1 \,,\, \cdots \,,\, v_m \,,\, v_{m+1} \,,\, \cdots \,,\, v_n \,\}$ seja uma base para V. Vamos mostrar que $\{\, T(v_{m+1}) \,,\, \cdots \,,\, T(v_n) \,\}$ é uma base para $Im(T)$.

Inicialmente vamos mostrar que $Im(T) = [\, T(v_{m+1}) \,,\, \cdots \,,\, T(v_n) \,]$. Seja $w \in Im(T)$, isto é, $w = T(u)$ para algum $u \in V$. Assim, como $u \in V$, tem–se que

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i\, v_i \;+\; \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, v_i \,.$$

Logo, $w = T(u)$ é representado na forma:

$$w \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i\, T(v_i) \;+\; \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, T(v_i) \;=\; \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, T(v_i)\,,$$

uma vez que $T(v_1) = T(v_2) = \cdots = T(v_m) = 0_W$.

Devemos mostrar que $\{\, T(v_{m+1}) \,,\, \cdots \,,\, T(v_n) \,\}$ é linearmente independente em $Im(T)$.

Suponhamos que existam escalares $c_{m+1} \,,\, \cdots \,,\, c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\sum_{i=m+1}^{n} c_i\, T(v_i) \;=\; 0_W \qquad \Longleftrightarrow \qquad T\left(\sum_{i=m+1}^{n} c_i\, v_i \right) \;=\; T(v) \;=\; 0_W \,.$$

Desse modo, o elemento $v \in Ker(T)$, que é definido por:

$$v \;=\; \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, v_i \,, \tag{4.1}$$

pode também ser representado da seguinte forma:

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{m} b_i\, v_i \,, \tag{4.2}$$

uma vez que $\{\, v_1 \,,\, \cdots \,,\, v_m \,\}$ é uma base para $Ker(T)$. Subtraindo (4.1) de (4.2), obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\, v_i \;-\; \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, v_i \;=\; 0_V \,,$$

como $\{ v_1 , \cdots , v_m , v_{m+1} , \cdots , v_n \}$ é linearmente independente em V, isso implica que

$$b_1 = \cdots = b_m = c_{m+1} = \cdots = c_n = 0 .$$

Assim, provamos que $\{ T(v_{m+1}) , \cdots , T(v_n) \}$ é linearmente independente em $Im(T)$. Logo, temos que $dim(Im(T)) = n - m$ e $dim(Ker(T)) = m$.

Portanto, provamos que

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = n = dim(V) ,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.4.3 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $dim(V) = n$, e $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é injetora.

(b) Seja $\{ v_1 , \cdots , v_m \}$ linearmente independente em V. Então,

$$\{ T(v_1) , \cdots , T(v_m) \}$$

é linearmente independente em $Im(T)$.

(c) $dim(Im(T)) = n$.

(d) Seja $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base para V. Então, $\{ T(v_1) , \cdots , T(v_n) \}$ é uma base para $Im(T)$.

Demonstração

Vamos mostrar que *(a)* $\Longrightarrow$ *(b)*. Tomando uma combinação linear nula

$$0_W = \sum_{i=1}^{m} c_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i \right)$$

e considerando a hipótese que T é injetora, pelo Teorema 4.4.1, temos que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0_V .$$

Como $\{ v_1 , \cdots , v_m \}$ é linearmente independente em V, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0 .$$

Portanto, $\{ T(v_1) , \cdots , T(v_m) \}$ é linearmente independente em $Im(T)$.

Vamos mostrar que *(b)* $\Longrightarrow$ *(c)*. Seja $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base para V. Assim, temos que $\{ T(v_1) , \cdots , T(v_n) \}$ é linearmente independente em $Im(T)$. Desse modo, temos que $dim(Im(T)) \geq n$. Pelo Teorema 4.4.2, temos que $dim(Im(T)) \leq n$. Portanto, obtemos $dim(Im(T)) = n$.

Vamos mostrar que *(c)* $\Longrightarrow$ *(d)*. Seja $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base para V. Considerando um elemento $w \in Im(T)$, isto é, $w = T(u)$ para algum $u \in V$. Como $u \in V$, temos que

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \quad \Longrightarrow \quad w = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i)$$

Como $dim(Im(T)) = n$, temos que $\{ T(v_1) , \cdots , T(v_n) \}$ é uma base para $Im(T)$.

Finalmente, vamos mostrar que *(d)* $\Longrightarrow$ *(a)*. Seja $\{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base para V. Tomando $u \in V$, temos que

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \quad \Longrightarrow \quad T(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i)$$

Se $T(u) = 0_W$, isto é, $u \in Ker(T)$, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \,,$$

pois $\{ T(v_1), \cdots , T(v_n) \}$ é linearmente independente. Logo, $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Pelo Teorema 4.4.1, temos que T é injetora, o que completa a demonstração. ■

Corolário 4.4.1 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Se $dim(V) = dim(W)$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Corolário 4.4.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se $dim(V) = dim(W)$, então T leva base em base.*

Demonstração – Seja $\{ v_1, \cdots , v_n \}$ uma base para V. Pelo Teorema 4.4.3, temos que $\{ T(v_1), \cdots , T(v_n) \}$ é linearmente independente em W. Como $dim(V) = dim(W)$, obtemos que $\{ T(v_1), \cdots , T(v_n) \}$ é uma base para W. ■

Definição 4.4.4 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $I\!F$ e T uma aplicação de V em W. Dizemos que T é uma aplicação* ***bijetora*** *se, e somente se, T é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*

Exemplo 4.4.1 *Considere a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = -x + y + 2z\,. \end{array}$$

Determine $Ker(T)$, $Null(T) = dim(Ker(T))$, $Im(T)$ e $posto(T) = dim(Im(T))$.

O núcleo da transformação T são os elementos $(x,y,z) \in I\!R^3$ que satisfazem a equação

$$T(x,y,z) = -x + y + 2z = 0\,.$$

Assim, temos que $Ker(T) = [(1,1,0),(2,0,1)]$. Podemos verificar facilmente que $dim(Ker(T)) = 2$. Portanto, pelo Teorema 4.4.2, tem–se que $dim(Im(T)) = 1$. Logo, como $Im(T) \subset I\!R$, temos que $Im(T) = I\!R$.

Exemplo 4.4.2 *A transformação linear definida da forma:*

$$\begin{array}{rccl} T: & I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (2x - y,\, x + y) \end{array}$$

é uma transformação linear injetora.

O núcleo da transformação linear T é conjunto solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $x = 0$ e $y = 0$.

Desse modo, temos que $Ker(T) = \{ 0_{I\!R^2} \}$. Assim, provamos que a transformação linear T é injetora.

Exemplo 4.4.3 *Determine o núcleo e a imagem do operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{P}_3(I\!R) & \longrightarrow & \mathcal{P}_3(I\!R) \\ & p(x) & \longrightarrow & T(p(x)) = x^2\,p''(x) \end{array}$$

Resposta: $\boxed{Ker(T) = \mathcal{P}_1(I\!R) \quad \text{e} \quad Im(T) = [x^2, x^3]}$

Exemplo 4.4.4 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x,y,z,t) \;=\; (x - 2y + t \,,\, 2x + y - z \,,\, 5y - z - 2t) \,.$$

(a) Determine uma base para o subespaço $Ker(T)$.

(b) Determine uma base para o subespaço $Im(T)$.

(c) Determine uma base γ *para o* $\mathbb{R}^4$ *contendo uma base de* $Ker(T)$.

Todo elemento $(x,y,z,t) \in Ker(T)$ satisfaz o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 5y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

Colocando na forma matricial e escalonando, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que a solução do sistema linear homogêneo é dado por:

$$x \;=\; \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}t \qquad \text{e} \qquad y \;=\; \frac{1}{5}z + \frac{2}{5}t \,.$$

Dessa forma, temos que todo elemento $(x,y,z,t) \in Ker(T)$ é escrito da forma:

$$(x,y,z,t) \;=\; z\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 1\right) \qquad \text{para} \qquad z,\, t \in \mathbb{R} \,.$$

Como os elementos

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0\right) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 1\right)$$

são claramente linearmente independentes, temos que

$$\{\, (2,-1,5,0) \,,\, (-1,2,0,5) \,\}$$

é uma base de $Ker(T)$. Assim, $dim(Ker(T)) = 2$. Logo, $dim(Im(T)) = 2$.

Sabemos que $Im(T)$ é gerado pela imagem dos elementos de uma base do domínio pela transformação linear T. Desse modo, considerando a base canônica para $\mathbb{R}^4$, temos que $Im(T)$ é gerado pelos seguintes elementos:

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= (1,2,0) \\ T(0,1,0,0) &= (-2,1,5) \\ T(0,0,1,0) &= (0,-1,-1) \\ T(0,0,0,1) &= (1,0,-2) \end{aligned}$$

Como a dimensão da imagem é 2, podemos escolher quaisquer dois desses elementos que sejam linearmente independentes, isto é,

$$Im(T) \;=\; [(1,2,0),(-2,1,5),(0,-1,-1),(1,0,-2)] = [(1,2,0),(0,-1,-1)]\,.$$

Assim, temos $\{\,(1,2,0),\,(0,-1,-1)\,\}$ é uma base do subespaço $Im(T)$.

Para obter a base γ de $I\!R^4$ temos que acrescentar mais dois elementos a base de $Ker(T)$, de maneira a termos 4 elementos linearmente independentes no $I\!R^4$. Escolhemos então

$$\gamma \;=\; \{\,(2,-1,5,0)\,,\,(-1,2,0,5)\,,\,(1,0,0,0)\,,\,(0,1,0,0)\,\}\,.$$

Quando calculamos T na base canônica de $I\!R^4$, já vimos que os elementos

$$e_1 \;=\; (1,0,0,0) \qquad \text{e} \qquad e_2 \;=\; (0,1,0,0)$$

não estavam no subespaço $Ker(T)$, sendo portanto uma boa escolha. Além disso, a equação

$$a_1(2,-1,5,0) \;+\; a_2(-1,2,0,5) \;+\; a_3(1,0,0,0) \;+\; a_4(0,1,0,0) \;=\; (0,0,0,0)$$

da origem ao sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a_1 & - & a_2 & + & 5a_3 & & & = & 0 \\ -a_1 & + & 2a_2 & & & + & 5a_4 & = & 0 \\ a_1 & & & & & & & = & 0 \\ & & a_2 & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja única solução é $a_1 \;=\; 0,\; a_2 \;=\; 0,\; a_3 \;=\; 0,\; a_4 = 0$.

Logo, γ é um conjunto de 4 elementos do $I\!R^4$ que é linearmente independente. Como $I\!R^4$ tem dimensão 4, resulta que γ é uma base do $I\!R^4$ e contém a base de $Ker(T)$, conforme foi pedido.

Exemplo 4.4.5 *Seja* T *um operador linear sobre* $I\!R^3$ *tal que*

$$T(1,0,0) \;=\; (1,1,1) \quad , \quad T(0,1,0) \;=\; (1,-2,1) \quad e \quad T(0,0,1) \;=\; (1,0,-1)$$

Mostre que T *é um operador linear bijetor.*

Para isso basta mostrar que $dim(Im(T)) \;=\; 3$, onde

$$Im(T) \;=\; [(1,1,1),\,(1,-2,1),\,(1,0,-1)]\,.$$

Assim, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que $dim(Ker(T)) \;=\; 0$, isto é, $Ker(T) \;=\; \{\, 0_{I\!R^3} \,\}$. Portanto, T é um operador injetor e sobrejetor, isto é, T é um operador bijetor.

Exemplo 4.4.6 *A transformação linear definida da forma:*

$$\begin{aligned} T: \quad I\!R^2 \quad &\longrightarrow \quad I\!R^3 \\ (x,y) \quad &\longrightarrow \quad T(x,y) = (x\,-\,y,\; x,\; x\,+\,y) \end{aligned}$$

não é uma transformação linear bijetora.

Podemos verificar facilmente que T é injetora, isto é, $Ker(T) \;=\; \{\, 0_{I\!R^2} \,\}$, e utilizando o Teorema do núcleo e da imagem, obtemos que $dim(Im(T)) \;=\; 2$. Logo, $Im(T) \;\neq\; I\!R^3$. Portanto, T não é sobrejetora. Assim, T não é bijetora.

Exemplo 4.4.7 *Mostre que não existem transformações lineares* $T : I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$*, com* $m < n$*, que são bijetoras.*

Considerando $Ker(T) \;=\; \{\, 0_{I\!R^m} \,\}$, isto é, $dim(Ker(T)) \;=\; 0$, e utilizando o Teorema do núcleo e da imagem, obtemos $dim(Im(T)) \;=\; m \;<\; n$. Logo, $Im(T) \;\neq\; I\!R^n$. Portanto, T não é sobrejetora. Assim, podemos concluir que não existem transformações lineares bijetoras nestas condições.

Exemplo 4.4.8 *Determine uma transformação linear*

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

tal que $Im(T) = [(1,1,2,1),(2,1,0,1)]$.

Podemos verificar facilmente que $dim(\,Im(T)\,) = 2$. Logo, $dim(\,Ker(T)\,) = 1$. Assim, tomando a base canônica para o $\mathbb{R}^3$, podemos definir uma transformação linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,1,0) &= (1,1,2,1) \\ T(0,0,1) &= (2,1,0,1) \end{aligned}$$

Desse modo, dado um elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= (y + 2z\,,\, y + z\,,\, 2y\,,\, y + z) \end{aligned}$$

Note que esse problema possui infinitas soluções, pois sua resolução depende da escolha de uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, e também da escolha do subespaço $Ker(T)$.

Exemplo 4.4.9 *Determine uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* $dim(\,Ker(T)\,) = 1$.

Como $dim(Ker(T)) = 1$, devemos ter que $dim(Im(T)) = 2$. Assim, escolhendo a base canônica para o $\mathbb{R}^3$, podemos definir uma transformação linear T da seguinte forma:

$$T(1,0,0) = 0 \quad , \quad T(0,1,0) = x \qquad \text{e} \qquad T(0,0,1) = x^2 \,,$$

onde $Im(T) = [x\,,\,x^2]$. Logo, T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Desse modo, dado um elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$T(a,b,c) = aT(1,0,0) + bT(0,1,0) + cT(0,0,1) = bx + cx^2 \,.$$

Note que esse problema possui infinitas soluções, pois sua resolução depende da escolha de uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, e também da escolha do subespaço $Im(T)$, através da escolha de uma base.

Exemplo 4.4.10 *Determine um operador linear*

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

tal que $Ker(T) = [(1,0,1,0),(0,1,0,1)]$.

Podemos verificar facilmente que $dim(Ker(T)) = 2$. Assim, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que $dim(Im(T)) = 2$. Agora vamos escolher uma base para o $\mathbb{R}^4$, contendo a base do núcleo do operador T, da seguinte forma:

$$\gamma = \{ (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \} .$$

Desse modo, podemos definir um operador linear T da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(1,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,1,0,1) &= (0,0,0,0) \\ T(0,1,0,0) &= (1,0,0,0) \\ T(0,0,1,0) &= (0,1,0,0) \end{aligned}$$

onde $Im(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$.

Finalmente, considerando um elemento $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vamos fazer sua representação em relação à base γ

$$(x,y,z,t) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,1) + c(0,1,0,0) + d(0,0,1,0)$$

obtendo

$$a = x \quad , \quad b = t \quad , \quad c = y - t \qquad \text{e} \qquad d = z$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= xT(1,0,1,0) + tT(0,1,0,1) + (y-t)T(0,1,0,0) + zT(0,0,1,0) \\ &= (y-t)(1,0,0,0) + z(0,1,0,0) \\ &= (y-t,z,0,0) \end{aligned}$$

Note que esse problema possui infinitas soluções, pois sua resolução depende da maneira como completamos a base do subespaço $Ker(T)$ para obter uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, e também de como escolhemos o subespaço $Im(T)$, através da escolha de uma base.

Exercícios

Exercício 4.16 *Determine uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$Ker(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \} .$$

Exercício 4.17 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^3$ *definidos por:*

$$\begin{aligned} U &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \} \\ W &= [(1, 0, 1), \ (0, -1, 1)] \end{aligned}$$

Determine um operador linear T *sobre* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $Im(T) = U$ *e* $Ker(T) = U \cap W$.

Exercício 4.18 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por:*

$$T(2, 1) = (3, 0, 2) \qquad e \qquad T(1, 2) = (1, 1, 0) .$$

Determine uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $Ker(P) = Im(T)$.

Exercício 4.19 *Verifique se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.*

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *que é injetora.*

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *que é sobrejetora.*

(c) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *que é bijetora.*

Exercício 4.20 *Sejam* $u, \ v \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $\beta = \{ u, \ v \}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$. *Considere uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *para* $n \geq 2$. *Mostre que somente uma das seguintes alternativas se verifica:*

(a) $\{ T(u), \ T(v) \}$ *é linearmente independente.*

(b) $dim(Im(T)) = 1$.

(c) $Im(T) = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$.

Exercício 4.21 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita, com* $dim(V) = n$, *e* $T : V \longrightarrow V$ *uma transformação linear tal que* $Im(T) = Ker(T)$. *Mostre que* n *é par. Considerando* $V = \mathbb{R}^4$, *dê exemplo de uma transformação linear com essas propriedades.*

Exercício 4.22 *Determine uma transformação linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:*

(a) O elemento $p(x) = (1 + x^2) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = 1 \notin Ker(T)$.

(c) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$.

Exercício 4.23 *Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear*

$$T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) O elemento $p(x) = (1 + x) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = x \notin Ker(T)$.

(c) $Im(T) = [(1, 1, 1)]$.

Exercício 4.24 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear não–nula. Se* $dim(Ker(T)) = 2$, *determine as possíveis dimensões de* V. *Se* T *é sobrejetora, qual a dimensão de* V *? Considerando* $V = \mathbb{R}^3$, *dê exemplo de uma transformação linear com essas propriedades, se possível.*

Exercício 4.25 *Considere* U, V *e* W *espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam* $T : U \longrightarrow V$ *e* $P : V \longrightarrow W$ *transformações Lineares. Mostre que*

(a) se T *e* P *são injetoras, então* $dim(U) \leq dim(V) \leq dim(W)$.

(b) se T *e* P *são sobrejetoras, então* $dim(U) \geq dim(V) \geq dim(W)$.

4.5 Espaços Vetoriais Isomorfos

Definição 4.5.1 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ bijetora, isto é, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, é denominada um* ***isomorfismo*** *de V em W. Quando existe um isomorfismo de V em W, dizemos que eles são* ***isomorfos****, ou que V é* ***isomorfo*** *a W. Um isomorfismo $T : V \longrightarrow V$ é denominado um* ***automorfismo*** *de V.*

Pelo resultado do Teorema 4.4.2, podemos observar que espaços isomorfos devem ter a mesma dimensão. Desse modo, pelo Corolário 4.4.2, um isomorfismo leva base em base. Assim, do ponto de vista da Álgebra Linear, espaços isomorfos são considerados idênticos, mesmo que os elementos e as operações definidas nesses espaços sejam bem diferentes.

Seja $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo, isto é, T é uma transformação linear bijetora. Então, para cada elemento $w \in W$ podemos fazer a associação $T(v) \longrightarrow w$ para um único elemento $v \in V$. Desse modo, temos uma nova aplicação de W em V, tendo em vista que não teremos $T(v_1) = T(v_2)$ com $v_1 \neq v_2$, uma vez que T é injetora.

Essa nova aplicação, que vamos denotar por T^{-1}, $T^{-1} : W \longrightarrow V$ é denominada **aplicação inversa** de T. Desse modo, temos que

$$T^{-1}(T(v)) = v \quad \text{e} \quad T(T^{-1}(w)) = w \quad \text{para todo} \quad v \in V \quad \text{e} \quad w \in W .$$

Na seção 4.7 vamos estudar com mais detalhes as transformações inversas e teremos a oportunidade de mostrar que a aplicação inversa de uma transformação linear também é linear. Além disso, mostraremos que se T é um isomorfismo, então T^{-1} também é um isomorfismo denominado **isomorfismo inverso**.

Exemplo 4.5.1 *Considere V o subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definido da seguinte forma:*

$$V = \left\{ A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \end{bmatrix} \ , \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Construa um isomorfismo de V em $\mathbb{R}^3$.

Podemos verificar facilmente que $dim(V) = 3$ e que os elementos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base ordenada para V. Desse modo, a aplicação $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(A) = (a, a+b, c)$ é um isomorfismo. Note que T leva a base ordenada $\gamma = \{ A_1 , A_2 , A_3 \}$ de V na base ordenada $\beta = \{ (1,1,0) , (0,1,0) , (0,0,1) \}$ do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.5.2 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *definida por* $T(a, b) = a + (a + b)x$. *Podemos verificar facilmente que* T *é um isomorfismo e que o isomorfismo inverso* T^{-1} *de* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é definido por* $T^{-1}(a + bx) = (a, b - a)$. *Assim, os espaços vetoriais* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *são isomorfos.*

Teorema 4.5.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, *com* $dim(V) = n$. *Então,* V *é isomorfo ao espaço vetorial* $\mathbb{F}^n$.

Demonstração – Seja $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base ordenada para V. Vamos definir uma aplicação T de V em $\mathbb{F}^n$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T : \ V &\longrightarrow \mathbb{F}^n \\ u &\longrightarrow T(u) = (c_1, \cdots, c_n) \end{aligned}$$

onde $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$ são as coordenadas do elemento u com relação à base β.

Podemos verificar facilmente que T é uma transformação linear. Pelo Teorema 3.7.1, temos que T é uma transformação linear injetora e pelo Teorema do núcleo e da imagem obtemos que $Im(T) = \mathbb{F}^n$. Logo, T é sobrejetora. Portanto, T é uma transformação linear bijetora, o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.5.2 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Então,* V *e* W *são isomorfos se, e somente se,* $dim(V) = dim(W)$.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Seja $T : V \longrightarrow W$ um isomorfismo, isto é, $Ker(T) = \{ 0_V \}$ e $Im(T) = W$. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \implies dim(V) = dim(W)$$

($\Longleftarrow$) Sejam $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base para V e $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_n \}$ uma base para W. Vamos definir uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ da seguinte forma:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, w_i \,,$$

onde estamos definindo $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \cdots, n$.

Podemos verificar facilmente que $Ker(T) = \{ 0_V \}$. De fato, considere um elemento $v \in Ker(T)$ que é escrito de modo único como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \qquad \Longrightarrow \qquad T(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = 0_W ,$$

como $\{ w_1 , \cdots , w_n \}$ é linearmente independente, implica em

$$c_1 = \cdots = c_n = 0 .$$

Portanto, provamos que T é uma transformação injetora.

Finalmente, pelo Teorema do núcleo e da imagem, tem–se que

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \quad \Longrightarrow \quad dim(Im(T)) = n .$$

Assim, $Im(T) = W$. Logo, T é uma transformação sobrejetora.

Portanto, mostramos que T é um isomorfismo de V em W. ■

Exemplo 4.5.3 *Em muita situações identificamos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o espaço vetorial das matrizes reais de ordem $n \times 1$. Esta identificação é feita, muitas vezes, sem que façamos alguma referência ao fato que esses espaços vetoriais sejam isomorfos. Uma ilustração muito simples dessa idéia, é quando estamos trabalhando com* ***espaço solução*** *de um* ***sistema linear homogêneo****, veja Teorema 2.9.8, considerando a representação matricial para sistemas lineares. Desse modo, existe um isomorfismo evidente entre o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial real $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, definido da seguinte forma:*

$$(x_1 , \cdots , x_i , \cdots , x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) .$$

Assim, sempre que conveniente vamos fazer a identificação do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ com o espaço vetorial real $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, em geral, por simplicidade de notação.

Exemplo 4.5.4 *De modo análogo ao Exemplo 4.5.3, podemos construir um isomorfismo entre o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ e o espaço vetorial complexo $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, uma vez que $dim(\mathbb{C}^n) = dim(\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})) = n$. Assim, sempre que conveniente vamos fazer a identificação do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ com o espaço vetorial complexo $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, em geral, por simplicidade de notação.*

Exemplo 4.5.5 *Considerando* $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real, do Exemplo 3.6.13, sabemos que o conjunto* $\gamma = \{ z_1, z_2, z_3, z_4 \}$, *onde*

$$z_1 = (1,0) \quad , \quad z_2 = (i,0) \quad , \quad z_3 = (0,1) \quad e \quad z_4 = (0,i) \; ,$$

é uma base ordenada para $\mathbb{C}^2$. *Logo, temos que* $dim(\mathbb{C}^2) = 4$. *Considere agora o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *com a base canônica* $\beta = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$, *onde*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,0) \\ e_3 &= (0,0,1,0) \\ e_4 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 4.5.2, podemos definir um isomorfismo T *de* $\mathbb{C}^2$ *em* $\mathbb{R}^4$ *da seguinte forma:*

$$T(z_i) = e_i \qquad para \qquad i = 1, \cdots, 4 \, .$$

Desse modo, a expressão explicita de $T(z,w)$ *é dada por:*

$$T(z,w) = (a\,,\,b\,,\,c\,,\,d) \; ,$$

onde $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ *é escrito como*

$$(z,w) = (a + ib\,,\,c + id) = az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 \; ,$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *pois todo elemento de* $\mathbb{C}^2$ *é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de* γ.

De fato, note que $T(z,w)$ *pode ser escrito da forma:*

$$\begin{aligned} T(z,w) &= T(az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4) \\ &= aT(z_1) + bT(z_2) + cT(z_3) + dT(z_4) \\ &= ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 \\ &= (a\,,\,b\,,\,c\,,\,d) \end{aligned}$$

o que completa a construção do isomorfismo T.

Assim, mostramos que $\mathbb{C}^2$ *como um espaço vetorial real é isomorfo ao espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$.

Exercícios

Exercício 4.26 *Mostre que o operador linear T sobre $I\!R^3$ definido por:*

$$T(x,y,z) = (x - 2y\,,\, z\,,\, x+y)$$

é um isomorfismo de $I\!R^3$.

Exercício 4.27 *Mostre que a transformação linear $T : I\!R^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(I\!R)$ definida por:*

$$T(a,b,c) = (a - b) + (c - a)x + (b + c)x^2$$

é um isomorfismo de $I\!R^3$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Exercício 4.28 *Mostre que o espaço vetorial real $I\!R^2$ é isomorfo ao subespaço S do espaço vetorial real $I\!R^3$ definido por:*

$$S = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x - y + 2z = 0 \},$$

exibindo um isomorfismo T de $I\!R^2$ em S.

Exercício 4.29 *Mostre que o espaço vetorial real $I\!R^2$ é isomorfo a qualquer subespaço S do espaço vetorial real $I\!R^3$ tal que $dim(S) = 2$, exibindo um isomorfismo T de $I\!R^2$ em S.*

Exercício 4.30 *Mostre que o espaço vetorial real $I\!R^3$ é isomorfo ao subespaço S do espaço vetorial real $I\!M_2(I\!R)$ definido por:*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \ / \ a,\, b,\, c \in I\!R \right\},$$

exibindo um isomorfismo T de $I\!R^3$ em S.

Exercício 4.31 *Seja V um espaço vetorial real, com $dim(V) \geq 3$. Mostre que o espaço vetorial real $I\!R^3$ é isomorfo a qualquer subespaço S do espaço vetorial V tal que $dim(S) = 3$, exibindo um isomorfismo T de $I\!R^3$ em S.*

Exercício 4.32 *Mostre que o espaço vetorial real $I\!R^3$ é isomorfo ao espaço vetorial real $I\!M_{3\times 1}(I\!R)$, exibindo um isomorfismo T de $I\!R^3$ em $I\!M_{3\times 1}(I\!R)$.*

Exercício 4.33 *Mostre que $\mathbb{C}^2$ como um espaço vetorial real é isomorfo ao espaço vetorial real $I\!M_2(I\!R)$, exibindo um isomorfismo T de $\mathbb{C}^2$ em $I\!M_2(I\!R)$.*

4.6 Álgebra das Transformações Lineares

Definição 4.6.1 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Denotamos por* $L(V, W)$ *o conjunto de todas as transformações lineares de* V *em* W, *isto é,*

$$L(V, W) \;=\; \{\, T : V \longrightarrow W \;\;/\;\; T \text{ é uma transformação linear} \,\}\,.$$

Definição 4.6.2 *Dadas as transformações lineares* $T,\ P \;\in\; L(V, W)$. *Definimos a* **adição de transformações** $T \,+\, P : V \longrightarrow W$ *da seguinte forma:*

$$(\,T \,+\, P\,)(v) \;=\; T(v) \,+\, P(v) \qquad ; \qquad \forall\, v \,\in\, V\,.$$

A aplicação assim definida é também uma transformação linear.

Definição 4.6.3 *Dada a transformação linear* $T \;\in\; L(V, W)$ *e o escalar* $\lambda \;\in\; \mathbb{F}$. *Definimos a* **multiplicação de uma transformação por um escalar** $\lambda T : V \longrightarrow W$ *da seguinte forma:*

$$(\,\lambda T\,)(v) \;=\; \lambda T(v) \qquad ; \qquad \forall\, v \,\in\, V\,.$$

A aplicação assim definida é também uma transformação linear.

Teorema 4.6.1 $L(V, W)$ *é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *com relação as operações de adição de transformações lineares e multiplicação por escalar definidas acima.*

Demonstração

Inicialmente, devemos mostrar que a operação de adição tem as seguintes propriedades:

(A_1) Comutatividade. $T \,+\, P \,=\, P \,+\, T \quad ; \quad \forall\; T,\, P \,\in\, L(V, W)\,.$

(A_2) Associatividade. $T \,+\, (P \,+\, S) \,=\, (T \,+\, P) \,+\, S \quad ; \quad \forall\; T,\, P,\, S \,\in\, L(V, W)\,.$

(A_3) Elemento Neutro. A transformação linear nula $O_L : V \longrightarrow W$ é tal que

$$T \,+\, O_L \,=\, T \quad ; \quad \forall\; T \,\in\, L(V, W)\,,$$

isto é, $O_L(v) \,=\, 0_W$ para todo $v \in V$.

(A_4) Elemento Simétrico. Para toda transformação linear $T \;\in\; L(V, W)$ existe a transformação $(-T) \,\in\, L(V, W)$ tal que $T \,+\, (-T) \,=\, O_L\,.$

Finalmente, devemos mostrar que a operação de multiplicação por escalar tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade. $(\alpha\,\beta)\,T \;=\; \alpha\,(\beta\,T) \;;\; \forall\; T \,\in\, L(V,W) \;$ e $\;\forall\; \alpha,\, \beta \,\in\, \mathbb{F}\,.$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos.
$\alpha\,(T \,+\, S) \;=\; \alpha\,T \,+\, \alpha\,S \;;\; \forall\; T,\, S \,\in\, L(V,W) \;$ e $\;\forall\; \alpha \,\in\, \mathbb{F}\,.$

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar.
$(\alpha \,+\, \beta)\,T \;=\; \alpha\,T \,+\, \beta\,T \;;\; \forall\; T \,\in\, L(V,W) \;$ e $\;\forall\; \alpha,\, \beta \,\in\, \mathbb{F}.$

(M_4) Elemento Identidade. $1_{\mathbb{F}}\,T \;=\; T \;;\; \forall\; T \,\in\, L(V,W).$

As provas das propriedades acima podem ficar a cargo do leitor. □

Teorema 4.6.2 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, com dimensões n e m, respectivamente. Então, o espaço vetorial $L(V,W)$ tem dimensão finita e $\dim(\,L(V,W)\,) \,=\, nm$.*

Demonstração – A demonstração pode ser vista na referência [12]. □

Definição 4.6.4 *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. Considere as transformações lineares $T : U \longrightarrow V$ e $P : V \longrightarrow W$. Definimos a composição das transformações P e T, que denotamos por $S \,=\, P \circ T : U \longrightarrow W$, da seguinte forma:*

$$S(u) \;=\; (\; P \circ T \;)(u) \;=\; P(\; T(u) \;) \,\in\, W \qquad ; \qquad \forall\; u \,\in\, U\,.$$

Teorema 4.6.3 *A aplicação $S \,=\, P \circ T$ é uma transformação linear de U em W.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Definição 4.6.5 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um* ***operador linear*** *sobre V é uma transformação linear de V em V.*

Definição 4.6.6 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Denotamos por $L(V)$ o conjunto de todos os operadores lineares sobre V, isto é,*

$$L(V) \;=\; \{\, T : V \longrightarrow V \;\;/\;\; T \text{ é um operador linear} \,\}\,.$$

Pelo Teorema 4.6.1, temos que $L(V)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de operadores e multiplicação por escalar definidas para transformações lineares.

Exemplo 4.6.1 *Considere as transformações lineares* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:* $T(x,y) = x - 3y$ *e* $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:* $P(x) = 4x$. *Determine, se possível, as seguintes aplicações* $T + P$, $T \circ P$ *e* $P \circ T$.

Note que as aplicações $T + P$ e $T \circ P$ não estão definidas. Assim, podemos definir somente a aplicação $P \circ T$ que é dada por:

$$(P \circ T)(x,y) = P(T(x,y)) = P(x - 3y) = 4x - 12y\,.$$

Exemplo 4.6.2 *Sejam* P *e* T *operadores lineares sobre* $\mathbb{R}^2$ *definidos por:*

$$T(x,y) = (2x, x - y) \qquad e \qquad P(x,y) = (x + y, 4x)\,.$$

Determine os seguintes operadores $P + T$, $P \circ T$ *e* $T \circ P$.

Neste caso, todas as aplicações estão definidas. Assim, temos que

- $(T + P)(x,y) = T(x,y) + P(x,y) = (3x + y, 5x - y)\,.$

- $(P \circ T)(x,y) = P(T(x,y)) = P(2x, x - y) = (3x - y, 8x)\,.$

- $(T \circ P)(x,y) = T(P(x,y)) = P(x + y, 4x) = (2x + 2y, y - 3x)\,.$

Definição 4.6.7 *No espaço vetorial* $L(U)$ *podemos definir a operação* ***potenciação*** *para expoentes naturais de um operador* $T \in L(U)$ *da seguinte forma:*

$$T^0 = I \quad , \quad T^1 = T \quad , \quad T^2 = T \circ T \quad e \quad T^n = T \circ T^{n-1} \qquad para \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Definição 4.6.8 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador linear sobre* V. *Dizemos que* T *é um* ***operador idempotente*** *se* $T^2 = T$, *isto é,*

$$(T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(v) \qquad para\ todo \qquad v \in V\,.$$

Exemplo 4.6.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$. *O operador linear de projeção sobre o plano* xy

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (x,y,0) \end{array}$$

é um operador idempotente.

Definição 4.6.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Dizemos que T é um* ***operador auto–reflexivo*** *se $T^2 = I$, isto é,*

$$(T \circ T)(v) \;=\; T(T(v)) \;=\; v \qquad \text{para todo} \qquad v \in V\,.$$

Exemplo 4.6.4 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. O operador linear de reflexão em torno do eixo–ox*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (x,\,-y) \end{array}$$

é um operador auto–reflexivo.

Definição 4.6.10 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Dizemos que T é um* ***operador nilpotente*** *se $T^n = 0$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, isto é,*

$$(T \circ T^{n-1})(v) \;=\; T(T^{n-1}(v)) \;=\; 0_V \qquad \text{para todo} \qquad v \in V\,.$$

Exemplo 4.6.5 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e o operação de derivação D sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é, $D(p(x)) = p'(x)$ para $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Podemos verificar facilmente que D é um operador nilpotente.*

4.7 Transformação Inversa

Definição 4.7.1 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $T : V \longrightarrow W$ *uma transformação linear. A aplicação* $L : Im(T) \subset W \longrightarrow V$ *é denominada* ***inversa a esquerda*** *da transformação linear* T *se*

$$(L \circ T)(u) \,=\, u \qquad ; \qquad \forall \; u \,\in\, V \,,$$

isto é, $L \circ T$ *é a transformação identidade em* V.

A transformação $R : Im(T) \subset W \longrightarrow V$ *é denominada* ***inversa a direita*** *de* T *se*

$$(T \circ R)(w) \,=\, w \qquad ; \qquad \forall \; w \,\in\, Im(T) \,,$$

isto é, $T \circ R$ *é a transformação identidade em* $Im(T)$.

Teorema 4.7.1 *Considere os espaços vetoriais* V *e* W *de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Seja* $T : V \longrightarrow W$ *uma transformação linear que possui inversa a esquerda* L. *Então,* L *é também inversa a direita de* T. *Além disso,* L *é única.*

Demonstração – Primeiramente devemos observar que, pela Definição 4.7.1, tanto a inversa a esquerda quanto a inversa a direita estão definidas em $Im(T) \subset W$.

Vamos mostrar que L é única. Suponhamos que T possui duas inversas a esquerda L_1 e L_2, isto é, para todo $u \in V$ tem–se que

$$(L_1 \circ T)(u) \,=\, u \qquad \text{e} \qquad (L_2 \circ T)(u) \,=\, u \,.$$

Temos que $L_1(w) = u$ e $L_2(w) = u$ para $w \in Im(T)$. Desse modo,

$$L_1(w) \;-\; L_2(w) \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad (\, L_1 \,-\, L_2 \,)(w) \,=\, 0_V \quad ; \quad w \,\in\, Im(T) \,.$$

Logo, $L_1 = L_2$, o que prova a unicidade de L.

Agora vamos mostrar que L é também a inversa a direita de T. Seja $w \in Im(T)$. Assim, basta mostrar que $(T \circ L)(w) = w$.

Como $w \in Im(T)$, temos que $w = T(u)$ para algum $u \in V$. Como L é a inversa a esquerda de T, tem–se que

$$u \;=\; L(T(u)) \;=\; L(w) \quad\Longrightarrow\quad T(u) \;=\; T(L(w)) \,.$$

Portanto, $T(L(w)) = (T \circ L)(w) = w$, uma vez que $w = T(u)$. Assim, provamos que L é a inversa a direita de T, o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 4.7.1 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x) \;=\; (x,\, 2x)\,.$$

Primeiramente vamos observar que o subespaço $Im(T) \;=\; [(1,2)]$. *Logo, todo elemento* $(x,y) \in Im(T)$ *é da forma* $(x, 2x)$. *Além disso, a transformação linear* T *é **injetora**.*

*Temos que a **inversa a esquerda*** $L : Im(T) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$L(x,y) \;=\; \frac{x}{3} \;+\; \frac{y}{3}\,.$$

Assim, temos que $(L \circ T)(x) \;=\; x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

*A **inversa a direita*** $R : Im(T) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$R(x,y) \;=\; \frac{x}{3} \;+\; \frac{y}{3}\,.$$

Assim, temos que $(T \circ R)(x,y) \;=\; (x,y)$ *para todo* $(x,y) \in Im(T) \;\subset\; \mathbb{R}^2$.

Desse modo, apresentamos um excelente exemplo para o Teorema 4.7.1, mostrando que a existência e unicidade da inversa a esquerda implica na existência e unicidade da inversa a direita e que são iguais.

Exemplo 4.7.2 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$T(x,y) \;=\; x \;+\; y\,.$$

Primeiramente vamos observar que a transformação linear T *não é injetora, pois*

$$Ker(T) \;=\; \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; x \;=\; -y\,\}\,.$$

Logo, $dim(\,Ker(T)\,) \;=\; 1$, *o que implica na* $Im(T) \;=\; \mathbb{R}$, *pelo Teorema do núcleo e da imagem.*

A transformação T *não possui **inversa a esquerda**, entretanto, podemos apresentar vários exemplos de **inversa a direita**. Desse modo, podemos tomar como exemplos de **inversa a direita*** $R : Im(T) \;=\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *as seguintes transformações:*

$$R(x) \;=\; \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) \qquad e \qquad R(x) \;=\; \left(\frac{2x}{3}, \frac{x}{3}\right)\,.$$

Assim, temos que $(T \circ R)(x) \;=\; x$ *para todo* $x \;\in\; Im(T) \;=\; \mathbb{R}$.

Desse modo, apresentamos um exemplo onde a não existência da inversa a esquerda implica na não unicidade da inversa a direita.

Exemplo 4.7.3 *Considere a transformação linear* $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T_A(x, y) \;=\; (x + y,\, 2x + y)\,,$$

associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Primeiramente vamos observar que a transformação linear T_A *é* ***injetora****. Além disso, pelo Teorema do núcleo e da imagem, podemos concluir que* $Im(T_A) = \mathbb{R}^2$*. Logo,* T *é um isomorfismo.*

Temos que a ***inversa a esquerda*** $L : Im(T_A) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é a transformação linear*

$$L(x, y) \;=\; (-x + y,\, 2x - y)$$

associada à matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Assim, temos que $(L \circ T)(x, y) = (T \circ L)(x, y) = (x, y)$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.7.4 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x, y) \;=\; (x + y,\, y - x,\, x + 3y)\,.$$

Note que a transformação linear T *é* ***injetora*** *e que o subespaço* $Im(T)$ *tem como uma base o conjunto* $\{\,(1, -1, 1),\, (1, 1, 3)\,\}$.

Temos que a ***inversa a esquerda*** $L : Im(T) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é definida por:*

$$L(x, y, z) \;=\; \left(\frac{-3x - 3y + 2z}{2},\, \frac{x + y}{2} \right)\,.$$

Assim, temos que $(L \circ T)(x, y) = (x, y)$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Além disso, temos que* $(T \circ L)(x, y, z) = (x, y, z)$ *para todo* $(x, y, z) \in Im(T)$.

Desse modo, desenvolvemos dois exemplos como ilustração do Teorema 4.7.2, sobre a existência da inversa a esquerda, que vamos apresentar a seguir.

Teorema 4.7.2 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *uma transformação linear de* V *em* W*. Então,* T *possui inversa a esquerda se, e somente se,* T *é injetora.*

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ Seja $L : Im(T) \longrightarrow V$ a inversa a esquerda de T. Sejam $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$. Assim, temos que

$$u = L(T(u)) = L(T(v)) = v$$

Logo, T é injetora.

$(\Longleftarrow)$ Por hipótese temos T injetora. Seja $w \in Im(T)$, isto é, $w = T(u)$ para um único $u \in V$. Assim, definimos a transformação $L : Im(T) \longrightarrow V$ da seguinte forma $L(w) = u$ tal que $T(u) = w$. Logo, L é a inversa a esquerda de T, o que completa a demonstração. ∎

Definição 4.7.2 *Seja* $T : V \longrightarrow W$ *uma transformação linear injetora. A única transformação inversa a esquerda de* T*, que também é a transformação inversa a direita, é denotada por* T^{-1}*. Dizemos que a transformação* T *é* ***invertível****, e chamamos a transformação* $T^{-1} : Im(T) \subset W \longrightarrow V$ *de* ***transformação inversa*** *de* T*.*

Teorema 4.7.3 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $T : V \longrightarrow W$ *um isomorfismo. Então,* $T^{-1} : W \longrightarrow V$ *é uma transformação linear.*

Demonstração – Sejam $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Queremos mostrar que

$$T^{-1}(\lambda w_1 + w_2) = \lambda T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) .$$

Sejam $u_1 = T^{-1}(w_1)$ e $u_2 = T^{-1}(w_2)$, isto é, u_1 e u_2 são os únicos elementos em V tais que $T(u_1) = w_1$ e $T(u_2) = w_2$.

Como T é uma transformação linear, temos que

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2) = \lambda w_1 + w_2 .$$

Desse modo, $\lambda u_1 + u_2$ é o único elemento em V que é levado pela transformação linear T no elemento $\lambda w_1 + w_2$ em W. Portanto

$$T^{-1}(\lambda w_1 + w_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) ,$$

provando que T^{-1} é uma transformação linear. ∎

Proposição 4.7.1 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais de dimensão finitas sobre o corpo* F *e* T *um isomorfismo de* V *em* W. *Então,* $T^{-1} : W \longrightarrow V$ *é também um isomorfismo.*

Demonstração – Pelo Teorema 4.7.3, sabemos que T^{-1} é uma transformação linear. Assim, temos devemos mostrar que T^{-1} é bijetora.

Sejam $w_1, w_2 \in W$ tais que $T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_2) = v$. Desse modo, temos $T(v) = w_1$ e $T(v) = w_2$. Logo, $w_1 = w_2$, pois T é uma aplicação. Portanto, T^{-1} é injetora.

Para mostrar que T^{-1} é sobrejetora basta observar que $Ker(T^{-1}) = \{ 0_W \}$, pois T^{-1} é injetora, e aplicar o Teorema do núcleo e da imagem,

$$dim(Ker(T^{-1})) \; + \; dim(Im(T^{-1})) \; = \; dim(W) \, ,$$

obtendo que $dim(Im(T^{-1})) = dim(W) = dim(V)$, pois V e W são isomorfos. Assim, $Im(T^{-1}) = V$, o que completa a demonstração. ■

Sejam V e U espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$. Podemos observar que V é isomorfo a V, pois o operador identidade I_V é um isomorfismo de V em V.

Além disso, se V é isomorfo a U por meio de um isomorfismo T, então U é isomorfo a V por meio do isomorfismo inverso T^{-1}.

Exemplo 4.7.5 *Considere* V, U *e* W *espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Sejam* $T : V \longrightarrow U$ *um isomorfismo, isto é,* V *é isomorfo a* U, *e* $P : U \longrightarrow W$ *um isomorfismo, isto é,* U *é isomorfo a* W. *Podemos verificar facilmente que* $P \circ T : V \longrightarrow W$ *é um isomorfismo, isto é,* V *é isomorfo a* W.

Primeiramente observamos que $dim(V) = dim(U)$ e $dim(U) = dim(W)$, pois são isomorfos. Logo, $dim(V) = dim(W)$. Além disso, sabemos que $Ker(T) = \{ 0_V \}$ e que $Ker(P) = \{ 0_U \}$. Assim, basta mostrar que $Ker(P \circ T) = \{ 0_V \}$.

Tomando um elemento $v \in Ker(P \circ T)$, isto é,

$$(P \circ T)(v) \; = \; P(T(v)) \; = \; 0_W \quad \Longrightarrow \quad T(v) \; = \; 0_U \quad \Longrightarrow \quad v \; = \; 0_V \, .$$

Logo, mostramos que $Ker(P \circ T) = \{ 0_V \}$.

Finalmente, podemos concluir que o **isomorfismo** é uma **relação de equivalência** sobre a classe dos espaços vetoriais de mesma dimensão.

Exemplo 4.7.6 *Considere* $T \in L(\mathbb{R}^2)$ *definido por:*

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

Mostre que T *é um isomorfismo, e determine o isomorfismo inverso.*

Inicialmente vamos mostrar que T é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$. Para isso, basta mostrar que $Ker(T) = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$, e em seguida utilizar o Teorema do núcleo e da imagem para mostrar que $Im(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é um operador sobrejetor. Assim, provamos que T é um operador bijetor.

Para determinar o núcleo do operador T, temos que encontrar os elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(x, y) = (x + y, x - y) = (0, 0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Podemos verificar facilmente que o sistema linear homogêneo acima possui somente a solução trivial $x = y = 0$. Logo, $Ker(T) = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$.

Finalmente, vamos determinar o isomorfismo inverso. Dado um elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supomos que $T^{-1}(x, y) = (a, b)$, então $(x, y) = T(a, b)$. Assim, obtemos o sistema linear

$$(x, y) = (a + b, a - b) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$$

que possui uma única solução

$$a = \frac{x + y}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{x - y}{2}.$$

Desse modo, temos que o isomorfismo inverso T^{-1} é definido por:

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.7.7 *Considere* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *a transformação linear tal que*

$$T(1,-1) \;=\; 2 + x \qquad e \qquad T(0,1) \;=\; x - 1\,.$$

Mostre que T *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$*, e determine o isomorfismo inverso* T^{-1} *de* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^2$*.*

Podemos verificar facilmente que $\gamma = \{ (1,-1), (0,1) \}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$. Para isso, basta mostrar que γ é linearmente independente.

Considere a combinação linear nula

$$a(1,-1) \;+\; b(0,1) \;=\; (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 0 \\ -a \;+\; b \;=\; 0 \end{cases}.$$

Assim, obtemos $a = b = 0$. Logo, γ é linearmente independente em $\mathbb{R}^2$.

Vamos tomar um elemento genérico $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e representa–lo com relação à base ordenada γ, isto é, vamos representa–lo através da combinação linear

$$(a,b) \;=\; c(1,-1) \;+\; d(0,1) \;=\; (c, -c+d)\,.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c = a \\ -c \;+\; d \;=\; b \end{cases}$$

que possui uma única solução $c = a$ e $d = a + b$.

Desse modo, temos que o elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é escrito de modo único como:

$$(a,b) \;=\; a(1,-1) \;+\; (a+b)(0,1)\,.$$

Finalmente, fazendo

$$\begin{aligned} T(a,b) &= aT(1,-1) \;+\; (a+b)T(0,1) \\ &= a(2+x) \;+\; (a+b)(x-1) \\ &= (a - b) \;+\; (2a + b)x \end{aligned}$$

obtemos a transformação linear T dada por:

$$T(a,b) \;=\; (a - b) \;+\; (2a + b)x$$

para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Para mostrar que T é um isomorfismo, basta mostrar que $Ker(T) = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$. Assim, considerando um elemento $(a,b) \in Ker(T)$, temos que

$$T(a,b) = (a - b) + (2a + b)x = 0_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = 0$. Logo, T é um isomorfismo.

Vamos encontrar o isomorfismo inverso. Dado um elemento $p(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, supomos que $T^{-1}(a + bx) = (c,d)$. Assim, temos que $T(c,d) = a + bx$, isto é,

$$(c - d) + (2c + d)x = a + bx ,$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c - d = a \\ 2c + d = b \end{cases}$$

que possui uma única solução

$$c = \frac{a+b}{3} \qquad \text{e} \qquad d = \frac{b-2a}{3} .$$

Portanto, temos que o isomorfismo inverso T^{-1} é dado por:

$$T^{-1}(a + bx) = \left(\frac{a+b}{3} , \frac{b-2a}{3} \right) ,$$

para todo $p(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.7.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, T e P operadores lineares sobre V tais que $T \circ P = P \circ T$. Então,*

$$Ker(T) + Ker(P) \subset Ker(T \circ P) = Ker(P \circ T) .$$

Considerando $v \in Ker(T) + Ker(P)$, isto é, $v = u + w$ com $u \in Ker(T)$ e $w \in Ker(P)$. Vamos mostrar que $v \in Ker(T \circ P)$.

Para isso, vamos avaliar $(T \circ P)(u + w)$

$$\begin{aligned}(T \circ P)(u + w) &= (T \circ P)(u) + (T \circ P)(w) \\ &= T(P(u)) + T(P(w)) = T(P(u)) + T(0_V) = (T \circ P)(u) \\ &= (P \circ T)(u) = P(T(u)) = P(0_V) = 0_V\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $v \in Ker(T \circ P) = Ker(P \circ T)$, o que completa a nossa prova.

Exemplo 4.7.9 *O operador linear* $T \in L(\mathbb{R}^3)$ *dado por:*

$$T(x, y, z) = (x - y,\, 2y,\, y + z)$$

é invertível e T^{-1} *é dado por:* $T^{-1}(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(2x + y,\, y,\, 2z - y)$.

Para mostrar que T é um operador invertível, basta mostrar que T é um operador bijetor, isto é, T é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$. Para isso, vamos determinar o núcleo do operador T, isto é, vamos encontrar os elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$T(x, y, z) = (x - y,\, 2y,\, y + z) = (0, 0, 0) \quad \Longrightarrow \quad Ker(T) = \{\, (0, 0, 0) \,\}.$$

Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem temos que $Im(T) = \mathbb{R}^3$. Logo, T é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, supomos que $T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$, então $(x, y, z) = T(a, b, c)$. Assim, obtemos o sistema linear

$$(x, y, z) = (a - b,\, 2b,\, b + c) \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & & & = & x \\ & & 2b & & & = & y \\ & & b & + & c & = & z \end{array}\right.$$

que possui uma única solução

$$a = x + \frac{y}{2} \quad , \quad b = \frac{y}{2} \qquad \text{e} \qquad c = z - \frac{y}{2}\,.$$

Desse modo, temos que o automorfismo inverso T^{-1} é definido por:

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(2x + y\,,\, y\,,\, 2z - y)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.7.10 *Seja $T \in L(V)$ um operador linear tal que $T^2 - T + I = 0$. Então, T é um operador invertível e $T^{-1} = I - T$.*

Tomando a hipótese, temos que

$$T^2 - T + I = 0 \iff (T - I)T + I = 0 \iff (I - T)T = I\,.$$

Assim, mostramos que T é invertível, e que o automorfismo inverso é $T^{-1} = I - T$.

Exemplo 4.7.11 *Considere a transformação linear de derivação*

$$\begin{aligned} D: \ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ p(x) &\longrightarrow D(p(x)) = p'(x) \end{aligned}$$

e a transformação linear de integração

$$\begin{aligned} T: \ \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ p(x) &\longrightarrow T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt\,. \end{aligned}$$

Mostre que $D \circ T$ é o operador identidade sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e que $T \circ D$ é diferente do operador identidade sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine o núcleo e a imagem do operador $T \circ D$.

Inicialmente vamos determinar o operador $T \circ D$ sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$(T \circ D)(p)(x) = T(D(p))(x) = \int_0^x p'(t)dt = p(x) - p(0)\,.$$

Logo, $(T \circ D)(p)(x) \neq p(x)$.

Podemos verificar facilmente que $Im(T \circ D) = [x, x^2, x^3]$ e $Ker(T \circ D) = [1]$.

Finalmente, vamos determinar o operador $D \circ T$ sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Utilizando o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo ([2] página 202), obtemos

$$(D \circ T)(p)(x) = D(T(p))(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x p(t)dt = p(x)\,.$$

Logo, $D \circ T$ é o operador identidade sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.7.12 *Considere os seguintes operadores lineares sobre o espaço vetorial* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$D(p(x)) = p'(x) \qquad e \qquad T(p(x)) = xp(x)\,.$$

Podemos verificar facilmente que o operador $D \circ T - T \circ D$ *é o operador identidade sobre* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$*, isto é,* $(D \circ T - T \circ D)(p(x)) = p(x)$*.*

Para uma simples verificação considere o polinômio $p(x) = 2 + 3x - 4x^2 + 6x^3$*.*

Exemplo 4.7.13 *A transformação linear* $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por:*

$$T(a + bx) = (a,\, a + b)$$

é um isomorfismo e o isomorfismo inverso $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *é dado por:*

$$T^{-1}(c, d) = c + (d - c)x\,.$$

Exemplo 4.7.14 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador idempotente sobre* V*. Então,* $V = Ker(T) \oplus Im(T)$*.*

Inicialmente vamos provar que

$$Ker(T) \cap Im(T) = \{\, 0_V \,\}\,.$$

Para isso, consideramos um elemento $v \in Ker(T) \cap Im(T)$, isto é, $T(v) = 0_V$ e $v \in Im(T)$. Assim, existe um elemento $u \in V$ tal que $v = T(u)$.

Tomando $T(v)$, obtemos

$$0_V = T(v) = T(T(u)) = T^2(u) = T(u)\,.$$

Como $v = T(u)$, temos que $v = 0_V$. Assim, provamos que

$$Ker(T) \cap Im(T) = \{\, 0_V \,\}\,.$$

Finalmente, vamos mostrar que $V = Ker(T) + Im(T)$. Dado um elemento $v \in V$, vamos mostrar que $v = u + w$ com $u \in Ker(T)$ e $w \in Im(T)$.

Tomando $w = T(v) \in Im(T)$ e $u = v - w$. Vamos mostrar que $u \in Ker(T)$. De fato, fazendo

$$T(u) = T(v - w) = T(v) - T(w) = T(v) - T^2(v) = T(v) - T(v) = 0_V\,.$$

Logo, temos que $u = (\, v - T(v)\,) \in Ker(T)$, o que completa a nossa prova.

Exemplo 4.7.15 *Considere* $T : I\!R^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(I\!R)$ *a transformação linear tal que*

$$T(1,1) \,=\, 1 \,-\, x \qquad e \qquad T(1,-1) \,=\, 1 \,+\, 3x \,.$$

Mostre que T *é um isomorfismo de* $I\!R^2$ *em* $\mathcal{P}_1(I\!R)$. *Determine explicitamente a expressão do isomorfismo inverso* $T^{-1}(a_0 \,+\, a_1 x)$.

Vamos mostrar que T é um isomorfismo mostrando que $\{\,(1,1)\,,\,(1,-1)\,\}$ é uma base de $I\!R^2$, e que $\{\,1-x\,,\,1+3x\,\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Dessa forma teremos que T leva base em base, demonstrando que T é um isomorfismo. Como $I\!R^2$ e $\mathcal{P}_1(I\!R)$ tem dimensão 2, basta mostrar que esses dois conjuntos são linearmente independente, pois cada um deles tem 2 elementos.

Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto

$$\gamma \,=\, \{\,(1,1)\,,\,(1,-1)\,\}$$

é linearmente independente. Para isso, consideramos a equação

$$a(1,1) \,+\, b(1,-1) \,=\, 0$$

que resulta no sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a \,+\, b \,=\, 0 \\ a \,-\, b \,=\, 0 \end{cases}$$

com matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que possui determinante não–nulo. Logo invertível. Assim, o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial $a \,=\, 0$ e $b \,=\, 0$, mostrando que os elementos do conjunto γ são linearmente independentes.

Para com conjunto $\alpha \,=\, \{\,1-x\,,\,1+3x\,\}$ procedemos da mesma maneira. A equação

$$a(1 \,-\, x) \,+\, b(1 \,+\, 3x) \,=\, 0$$

da origem ao sistema homogêneo

$$\begin{cases} a \,+\, b \,=\, 0 \\ -a \,+\, 3b \,=\, 0 \end{cases}$$

com matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

que possui determinante não–nulo. Logo invertível. Assim, o sistema homogêneo possui somente a solução trivial $a = 0$ e $b = 0$, mostrando que os elementos do conjunto α são linearmente independentes. Portanto, mostramos que a transformação linear T é um isomorfismo.

Vamos agora determinar o isomorfismo inverso. Já sabemos que

$$T^{-1}(1-x) = (1,1) \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(1+3x) = (1,-1) \, .$$

Inicialmente, vamos escrever um polinômio genérico $p(x) = a_0 + a_1 x$ na base

$$\alpha = \{ 1-x \, , \, 1+3x \} \, ,$$

isto é,

$$p(x) = a_0 + a_1 x = m(1-x) + n(1+3x) \, .$$

Assim, podemos escrever o isomorfismo inverso T^{-1} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T^{-1}(a_0 + a_1 x) &= T^{-1}(m(1-x) + n(1+3x)) \\ &= mT^{-1}(1-x) + nT^{-1}(1+3x) \\ &= m(1,1) + n(1,-1) = (m+n \, , \, m-n) \end{aligned}$$

Como

$$m(1-x) + n(1+3x) = (m+n) + (-m+3n)x \, ,$$

obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} m + n = a_0 \\ -m + 3n = a_1 \end{cases}$$

que possui uma única solução

$$m = \frac{3a_0 - a_1}{4} \qquad \text{e} \qquad n = \frac{a_0 + a_1}{4} \, .$$

Desse modo, obtemos

$$m + n = a_0 \qquad \text{e} \qquad m - n = \frac{a_0 - a_1}{2} \, ,$$

e podemos concluir

$$T^{-1}(a_0 + a_1 x) = \left(a_0 \, , \, \frac{a_0 - a_1}{2} \right) \, .$$

Exemplo 4.7.16 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador linear sobre* V*. Então,* T *é um operador idempotente se, e somente se,* $I - T$ *é um operador idempotente.*

Inicialmente fazendo uso da hipótese $T^2 = T$, obtemos

$$(I - T)^2 = I - 2T + T^2 = I - T$$

Logo, $I - T$ é um operador idempotente.

Finalmente, fazendo uso da hipótese que $I - T$ é um operador idempotente, obtemos

$$I - T = (I - T)^2 = I - 2T + T^2$$

Logo, $T^2 = T$, isto é, T é um operador idempotente, o que completa a nossa prova.

Uma aplicação direta dos resultados do Exemplo 4.7.14 e do Exemplo 4.7.16, será feita quando da apresentação de **projeção ortogonal** em subespaço de dimensão finita, que vamos estudar com todo detalhe na seção 5.15.

Exercícios

Exercício 4.34 *Determine o operador linear* $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *que representa a reflexão em torno da reta* $y = -x$*, utilizando conceitos de geometria analítica. Mostre que* T *é um operador auto–reflexivo.*

Exercício 4.35 *Determine o operador linear* $P : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *que representa a projeção no plano* $S = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$*, utilizando conceitos de geometria analítica. Mostre que* P *é um operador idempotente.*

Exercício 4.36 *Seja* $T \in L(I\!R^2)$ *tal que* $T(1, 0) = (2, 1)$ *e* $T(0, 1) = (1, 4)$*.*

(a) Determine $T(2, 4)$*.*

(b) Determine o elemento $(x, y) \in I\!R^2$ *tal que* $T(x, y) = (2, 3)$*.*

(c) Mostre que T *é um automorfismo de* $I\!R^2$*.*

Exercício 4.37 *Seja* $T \in L(I\!R^3)$ *tal que*

$$T(1,0,0) \ = \ (1,1,1) \quad , \quad T(0,1,0) \ = \ (1,0,1) \quad e \quad T(0,1,2) \ = \ (0,0,4) \, .$$

T *é um automorfismo de* $I\!R^3$ *? Em caso afirmativo, determine o automorfismo inverso.*

Exercício 4.38 *Dado o elemento* $q(x) = 3 + x \in \mathcal{P}_1(I\!R)$*. Considere o operador linear* T *sobre* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *definido por:* $T(p)(x) = q(x)p'(x) + 2p(x)$ *e a transformação linear* $P : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$ *definida por:* $P(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$*. Determine a transformação linear* $P \circ T$ *e verifique se é um isomorfismo de* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *em* $I\!R^3$*.*

Exercício 4.39 *Considere a transformação linear* $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ *definida por:*

$$T(x,y) \ = \ (2x \, , \, x - y \, , \, y)$$

e a transformação linear $P : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ *definida por:*

$$P(x,y,z) \ = \ (y - z \, , \, z - x) \, .$$

(a) Determine a transformação linear $P \circ T$ *e uma base para o subespaço* $Ker(P \circ T)$*.*

(b) Determine a transformação linear $T \circ P$ *e uma base para o subespaço* $Im(T \circ P)$*.*

(c) Verifique se $T \circ P$ *é um automorfismo de* $I\!R^3$*. Em caso afirmativo, determine o automorfismo inverso.*

4.8 Representação Matricial

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$. Vamos considerar $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base ordenada para V e $\gamma = \{ w_1 , \cdots , w_m \}$ uma base ordenada para W. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, pelo Teorema 4.2.1, sabemos que T fica bem determinada pelo seu efeito sobre os elementos da base β de V. Assim, cada elemento $T(v_j) \in W$ pode ser escrito de modo único da forma:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \, w_i \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots , n ,$$

onde os escalares $t_{1j} , \cdots , t_{mj} \in \mathbb{F}$ são as coordenadas do elemento $T(v_j)$ com relação à base ordenada γ de W. Desse modo, a transformação linear T fica bem determinada pela matriz $m \times n$ cuja j–ésima coluna são as coordenadas do elemento $T(v_j)$ com relação à base ordenada γ de W. Vamos denotar essa matriz por $[T]_\gamma^\beta = [t_{ij}]$, que é a representação matricial da transformação linear T com relação à base ordenada β de V e a base ordenada γ de W.

Teorema 4.8.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$, β uma base ordenada para V, γ uma base ordenada para W e T uma transformação linear de V em W. Então, para todo $v \in V$ temos que*

$$[T(v)]_\gamma = [T]_\gamma^\beta \, [v]_\beta \, .$$

Demonstração – Considere o elemento $v \in V$, que é escrito de modo único na forma:

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j \, v_j \, .$$

Assim, temos que

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \, w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \, c_j \right) w_i \, ,$$

onde

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \, c_j$$

é a i–ésima coordenada do elemento $T(v) \in W$ com relação a base ordenada γ, que é o produto da i–ésima linha da matriz $[T]_\gamma^\beta$ pelo vetor coordenada $[v]_\beta$ do elemento $v \in V$ com relação a base ordenada β. Portanto, mostramos que

$$[T(v)]_\gamma = [T]_\gamma^\beta \, [v]_\beta \, ,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.8.2 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$*,* β *uma base ordenada para* V*,* γ *uma base ordenada para* W*,* T *e* P *transformações lineares de* V *em* W*. Então,*

(a) $[T + P]_{\gamma}^{\beta} = [T]_{\gamma}^{\beta} + [P]_{\gamma}^{\beta}$.

(b) $[\lambda T]_{\gamma}^{\beta} = \lambda [T]_{\gamma}^{\beta}$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Demonstração – Sejam $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ e $\gamma = \{ w_1 , \cdots , w_m \}$ bases ordenadas para V e W, respectivamente.

Pelo Teorema 4.8.1, sabemos que existem escalares a_{ij} e b_{ij}, para $i = 1, \cdots , n$ e $j = 1, \cdots , m$, tais que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{e} \qquad P(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$$

para $j = 1, \cdots , n$. Assim, $[T]_{\gamma}^{\beta} = A = [a_{ij}]$ e $[P]_{\gamma}^{\beta} = B = [b_{ij}]$.

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} (T + P)(v_j) &= T(v_j) + P(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) w_i \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $[T + P]_{\gamma}^{\beta} = [T]_{\gamma}^{\beta} + [P]_{\gamma}^{\beta}$.

Finalmente, temos que

$$(\lambda T)(v_j) = \lambda T(v_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij}) w_i .$$

Assim, provamos que $[\lambda T]_{\gamma}^{\beta} = \lambda [T]_{\gamma}^{\beta}$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 4.8.1 *Considerando o espaço vetorial V de dimensão finita sobre o corpo $I\!F$, e a transformação identidade $I_V : V \longrightarrow V$, onde o domínio está com a base ordenada β e contra–domínio está com a base ordenada γ, podemos verificar facilmente que*

$$[I_V]_\gamma^\beta \;=\; [I]_\gamma^\beta \,.$$

Assim, justifica a notação $[I]_\gamma^\beta$ para a matriz de mudança da base β para a base γ.

Teorema 4.8.3 *Considere U, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre o corpo $I\!F$, com as respectivas bases γ , β e α. Sejam $T : U \longrightarrow V$ e $P : V \longrightarrow W$ transformações lineares. Então, a matriz da transformação linear $S = P \circ T : U \longrightarrow W$ é dada por:*

$$[P \circ T]_\alpha^\gamma \;=\; [P]_\alpha^\beta \, [T]_\beta^\gamma$$

Demonstração – A prova é feita aplicando o Teorema 4.8.1 na transformação linear $S = P \circ T$, e utilizando também o resultado do Teorema 2.1.9. □

Corolário 4.8.1 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finitas sobre o corpo $I\!F$, β uma base ordenada para V, γ uma base ordenada para W e T um isomorfismo de V em W. Então, $[T^{-1}]_\beta^\gamma = (\,[T]_\gamma^\beta\,)^{-1}$.*

Demonstração – Aplicando o resultado Teorema 4.8.3, e considerando a transformação identidade I_V sobre V e a transformação identidade I_W sobre W, obtemos

$$[I_V]_\beta^\beta \;=\; [T^{-1} \circ T]_\beta^\beta \;=\; [T^{-1}]_\beta^\gamma \, [T]_\gamma^\beta$$

$$[I_W]_\gamma^\gamma \;=\; [T \circ T^{-1}]_\gamma^\gamma \;=\; [T]_\gamma^\beta \, [T^{-1}]_\beta^\gamma$$

onde $[I_V]_\beta^\beta = [I_W]_\gamma^\gamma = I_n$ é a matriz identidade de ordem n, com

$$dim(V) \;=\; dim(W) \;=\; n \,,$$

o que completa a demonstração. ■

Corolário 4.8.2 *Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão sobre o corpo $I\!F$, β uma base ordenada para V, γ uma base ordenada para W e T uma transformação linear de V em W. Então, T é um isomorfismo se, e somente se, $[T]_\gamma^\beta$ é uma matriz não–singular.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 4.8.2 *Considere os espaços vetoriais* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{R}^2$ *com as respectivas bases canônicas* $\gamma = \{ 1 , x \}$ *e* $\beta = \{ (1,0), \ (0,1) \}$. *Para a transformação linear* T *de* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(a + bx) = (a , a + b) ,$$

temos que

$$[T]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad [T^{-1}]^{\beta}_{\gamma} = ([T]^{\gamma}_{\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Podemos verificar facilmente que $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *é definido por:*

$$T^{-1}(c,d) = c + (d - c)x ,$$

como vimos no Exemplo 4.7.13.

Exemplo 4.8.3 *Considere a transformação linear*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow T(x,y) = (3x + y, \, x + 3y) \end{aligned}$$

Determine a representação matricial de T *com relação à base canônica do* $\mathbb{R}^2$.

Utilizando a notação $[T]^{\beta}_{\beta} = [t_{ij}]$, temos que

$$T(1,0) = (3,1) = t_{11}(1,0) + t_{21}(0,1)$$

$$T(0,1) = (1,3) = t_{12}(1,0) + t_{22}(0,1)$$

Portanto, obtemos

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 4.8.4 *Considere a transformação linear*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow T(x,y) = (3x + y, \, x + 3y) \end{aligned}$$

Determine a representação matricial da transformação linear T *com relação à base ordenada* γ *do* $\mathbb{R}^2$ *dada por:*

$$\gamma = \{ (1, 1) , (-1, 1) \} .$$

Utilizando a notação $[T]_\gamma^\gamma = [t_{ij}]$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(1,1) &= (4,4) = t_{11}(1,1) + t_{21}(-1,1) \\
T(-1,1) &= (-2,2) = t_{12}(1,1) + t_{22}(-1,1)
\end{aligned}
$$

Assim, temos que obter a solução dos seguintes sistemas lineares

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.
$$

Portanto, obtemos

$$
[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Exemplo 4.8.5 *Considere a transformação linear*

$$
\begin{aligned}
T: \ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\
p(x) &\longrightarrow T(p(x)) = p'(x)
\end{aligned}
$$

Determine a matriz $[T]_\gamma^\beta$, *onde* $\beta = \{\ 1,\ x,\ x^2,\ x^3\ \}$ *é a base canônica de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *e* $\gamma = \{\ 1,\ x,\ x^2\ \}$ *é a base canônica de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Resposta: $\boxed{[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$

Exemplo 4.8.6 *Considere a transformação linear*

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y,z) &\longrightarrow T(x,y,z) = (2x+y-z,\ 3x-2y+4z)
\end{aligned}
$$

Determine $[T]_\gamma^\beta$, *onde* β *é a base canônica de* $\mathbb{R}^3$ *e* γ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^2$.

Resposta: $\boxed{[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}}$

Exemplo 4.8.7 *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (2x + y - z \, , \, 3x - 2y + 4z) \end{array}$$

Determine a representação matricial de T *com relação às bases*

$$\beta = \{ (1,\,1,\,1) \, , \, (1,\,1,\,0) \, , \, (1,\,0,\,0) \} \quad do \quad \mathbb{R}^3$$

$$\gamma = \{ (1,\,3) \, , \, (1,\,4) \} \quad do \quad \mathbb{R}^2.$$

Resposta: $\boxed{[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}}$

Exemplo 4.8.8 *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (3x + z \, , \, -2x + y \, , \, -x + 2y + 4z) \end{array}$$

Determine a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$, *onde* β *é a base canônica do* $\mathbb{R}^3$.

Resposta: $\boxed{[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$

Exemplo 4.8.9 *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & T(x,y,z) = (3x + z \, , \, -2x + y \, , \, -x + 2y + 4z) \end{array}$$

Determine a representação matricial da transformação linear T *com relação à base ordenada* γ *do* $\mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$\gamma = \{ (1,\,0,\,1) \, , \, (-1,\,2,\,1) \, , \, (2,\,1,\,1) \} \, .$$

Resposta: $\boxed{[T]^{\gamma}_{\gamma} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17 & 35 & 22 \\ -3 & 15 & -6 \\ -2 & -14 & 0 \end{bmatrix}}$

Exemplo 4.8.10 *Considere a transformação linear*

$$\begin{array}{rcccl} T: & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \\ & p & \longrightarrow & q & = T(p) \end{array}$$

com

$$q(x) \;=\; T(p(x)) \;=\; \int_0^x p(t)dt\,.$$

Determine a matriz $[T]_\gamma^\beta$, *onde* $\beta = \{1,\, x,\, x^2\}$ *é a base canônica de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *e* $\gamma = \{\, 1,\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$ *é a base canônica de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Dado o elemento $p(x) \;=\; 2\,x^2 + x$, *determine as coordenadas de* $q(x) \;=\; T(p(x))$ *com relação à base canônica* γ.

Resposta: $$[T]_\gamma^\beta \;=\; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad [q]_\gamma \;=\; [T]_\gamma^\beta\,[p]_\beta \;=\; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.8.11 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \;=\; \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *com a base canônica* $\beta \;=\; \{\, A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4 \,\}$, *onde*

$$A_1 \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_4 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz $[T]_\beta^\beta$. *Mostre que* T *é um automorfismo de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Resposta: $$[T]_\beta^\beta \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.8.12 *Sejam V um espaço vetorial real e $\beta = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ uma base ordenada para V. Determine um operador linear T sobre V tal que $T(v_1) = v_2$ e que deixa fixos todos os elementos do subespaço $W \subset V$ definido da seguinte forma:*

$$W = \{ x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 \in V \ / \ x - y + z = 0 \quad para \quad x,\, y,\, z \in I\!R \} .$$

Determine a matriz $[T]_\beta^\beta$. T é um automorfismo (isomorfismo) de V ?

Inicialmente, vamos determinar uma base para o subespaço W. Utilizando a condição $x - y + z = 0$, obtemos $x = y - z$. Logo, todo elemento $w \in W$ é escrito como

$$w = y\,(v_1 + v_2) + z\,(v_3 - v_1) \qquad \text{para} \qquad y,\, z \in I\!R .$$

Portanto, $\{ (v_1 + v_2), (v_3 - v_1) \}$ é uma base para o subespaço W. Impondo a condição que o operador T deixa fixos os elemento de W e que $T(v_1) = v_2$, tem–se que

$$v_1 + v_2 = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = v_2 + T(v_2) \Longrightarrow T(v_2) = v_1$$

$$v_3 - v_1 = T(v_3 - v_1) = T(v_3) - T(v_1) = T(v_3) - v_2 \Longrightarrow T(v_3) = v_3 - v_1 + v_2$$

Portanto, obtemos que a matriz do operador T com relação à base β é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Vamos verificar se T é um automorfismo de V. Para isso, determinamos

$$Ker(T) = \{ v = x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 \in V \ / \ T(v) = 0_V \} .$$

Podemos observar que o operador T é escrito da forma:

$$T(v) = x\,T(v_1) + y\,T(v_2) + z\,T(v_3) = x\,v_2 + y\,v_1 + z\,(v_3 - v_1 + v_2) .$$

Assim, impondo que o elemento $v = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \in Ker(T)$, isto é,

$$T(v) = (b - c)\,v_1 + (a + c)\,v_2 + c\,v_3 = 0_V ,$$

obtemos $a = b = c = 0$, uma vez que $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ é linearmente independente.

Portanto, $Ker(T) = \{ 0_V \}$, isto é, T é um operador injetor. Utilizando o Teorema do núcleo e da imagem, obtemos $dim(Im(T)) = dim(V)$. Logo, $Im(T) = V$, isto é, T é um operador sobrejetor. Portanto, T é um automorfismo de V.

Exemplo 4.8.13 *Sejam T um operador linear sobre $I\!R^4$, $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ uma base ordenada para o espaço vetorial real $I\!R^4$ e o subespaço $S = [v_1, v_2, v_3]$.*

(a) Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e $T(v_4) = v_1 + v_3$, determine $[T]_\gamma^\gamma$.

(b) Sabendo que

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$ é a base canônica de $I\!R^4$, determine $[T(e_1)]_\gamma$.

Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e que $T(v_4) = v_1 + v_3$, obtemos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= v_1 &&= 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\ T(v_2) &= v_2 &&= 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\ T(v_3) &= v_3 &&= 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \\ T(v_4) &= v_1 + v_3 &&= 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conhecemos as matrizes $[I]_\gamma^\beta$ e $[T]_\gamma^\gamma$, para encontrar $[T(e_1)]_\gamma$, vamos determinar inicialmente $[e_1]_\gamma$ da seguinte forma:

$$[e_1]_\gamma = [I]_\gamma^\beta \, [e_1]_\beta \iff [e_1]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, calculamos

$$[T(e_1)]_\gamma = [T]_\gamma^\gamma \, [e_1]_\gamma \iff [T(e_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução.

Exemplo 4.8.14 *Considere o operador linear* $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$T(p(x)) \;=\; p(x) \;+\; (1 + x)p'(x)\,.$$

Verifique se T *é um automorfismo de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*, e determine a matriz* $[T]_\beta^\beta$*, onde* β *é a base canônica de* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*.*

Vamos verificar se o operador T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, devemos determinar o subespaço $Ker(T)$, isto é,

$$Ker(T) \;=\; \{\, p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;/\; T(p(x)) \;=\; 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \,\}\,.$$

Tomando um elemento genérico $p(x) \;=\; a \,+\, bx \,+\, cx^2 \,+\, dx^3$, vamos impor a condição que $p(x) \in Ker(T)$, isto é,

$$\begin{aligned} T(p(x)) \;&=\; (\, a \,+\, bx \,+\, cx^2 \,+\, dx^3\,) \;+\; (\,1 \,+\, x\,)(\,b \,+\, 2cx \,+\, 3dx^2\,) \;=\; 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \\ &=\; (\,a \,+\, b\,) \;+\; (\,2b \,+\, 2c\,)x \;+\; (\,3c \,+\, 3d\,)x^2 \;+\; 4dx^3 \;=\; 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

o que nos leva a um sistema linear homogêneo que possui somente a solução trivial

$$a \;=\; b \;=\; c \;=\; d \;=\; 0\,.$$

Assim, mostramos que $Ker(T) \;=\; \{\, 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \,\}$, isto é, T é um operador injetor.

Pelo Teorema do núcleo e da imagem, sabemos que $Im(T) \;=\; \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é, T é um operador sobrejetor. Portanto, mostramos que T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Finalmente, vamos determinar a representação matricial do operador T com relação à base canônica $\beta \;=\; \{\, 1,\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned} T(1) \;&=\; 1 \\ T(x) \;&=\; 1 \,+\, 2x \\ T(x^2) \;&=\; 2x \,+\, 3x^2 \\ T(x^3) \;&=\; 3x^2 \,+\, 4x^3 \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$[T]_\beta^\beta \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\,,$$

o que completa a resolução.

Exemplo 4.8.15 *Considere uma matriz* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Definimos a transformação linear* T_A *de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$ *associada à matriz* $A = [a_{ij}]$ *da seguinte forma:*

$$y = T_A(x) \qquad \textit{para todo} \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,,$$

onde a i–ésima componente do elemento $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ *é dada por:*

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, m \,.$$

Podemos verificar que a matriz $[T_A]_\gamma^\beta = A$, *onde* β *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$ *e* γ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^m$. *Assim,* $[T_A(x)]_\gamma = [T_A]_\gamma^\beta\, [x]_\beta = A[x]_\beta$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 4.8.1 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e a transformação linear* T_A *de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$, *associada à matriz* A. *Definimos o* ***posto*** *da matriz* A, *que denotamos por* $posto(A)$, *como sendo a dimensão da imagem de* T_A, *isto é,* $posto(A) = dim(\,Im(T_A)\,)$.

Exemplo 4.8.16 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e a transformação linear* T_A *de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$ *associada à matriz* A. *Podemos verificar facilmente que o* $posto(A)$ *é igual ao número de colunas de* A *que são linearmente independentes em* $\mathbb{R}^m$, *tendo em vista que a* $Im(T_A)$ *é o subespaço gerado pelas colunas da matriz* A. *Sendo assim, denotando a matriz* $A = [v_1 \cdots v_j \cdots v_n]$, *onde* $v_j \in \mathbb{R}^m$ *é a j–ésima coluna de* A, *temos que todo elemento* $y \in Im(T_A)$ *é escrito como:*

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j\, v_j \,.$$

Exemplo 4.8.17 *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determine a transformação linear T_A *associada à matriz* A *e o* $posto(A)$.

Exemplo 4.8.18 *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determine a transformação linear T_A *associada à matriz* A *e o* $posto(A)$.

Na seção 8.10 apresentamos um estudo mais detalhado sobre os resultados envolvendo o **posto de A**, mostrando que a Definição 2.6.3 e a Definição 4.8.1 são compatíveis. A seguir apresentamos alguns resultados importantes sobre o posto de uma matriz.

Teorema 4.8.4 *Sejam* $A \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$, $T_A : I\!R^n \longrightarrow I\!R^m$ *a transformação linear associada à matriz* A, $Q \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz invertível,* $T_Q : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ *a transformação linear associada à matriz* Q*, e* $T_{AQ} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^m$ *a transformação linear associada à matriz* AQ*. Então,*

$$Im(T_{AQ}) \;=\; Im(T_A \circ T_Q) \;=\; Im(T_A)\,.$$

Demonstração – Como Q é uma matriz invertível, do Teorema 3.7.2, provamos que $Im(T_Q) = I\!R^n$, isto é, todo elemento $y \in I\!R^n$ pode ser escrito como $y = T_Q(x)$ para algum $x \in I\!R^n$. Além disso, do Teorema 2.9.7, temos que $Ker(T_Q) = \{\, 0_{I\!R^n} \,\}$. Portanto, mostramos que T_Q é bijetora. Desse modo, temos que todo elemento $z \in Im(T_{AQ})$ é representado da forma:

$$z \;=\; T_{AQ}(x) \;=\; (T_A \circ T_Q)(x) \;=\; T_A(T_Q(x)) \;=\; T_A(y)\,,$$

onde $y = T_Q(x)$, para algum $x \in I\!R^n$, o que completa a demonstração. ■

Corolário 4.8.3 *Sejam* $A \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$ *e* $Q \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz invertível. Então,*

$$posto(AQ) \;=\; posto(A)\,.$$

Demonstração – A prova segue imediata da Definição 4.8.1 e do Teorema 4.8.4. □

Exemplo 4.8.19 *Considere a matriz* $A \in I\!M_{4\times 3}(I\!R)$ *e* $Q \in I\!M_3(I\!R)$ *uma matriz invertível dadas por:*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad Q \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as transformações lineares T_A, T_Q *e* T_{AQ}.

(b) Verifique que $posto(AQ) = posto(A)$.

Teorema 4.8.5 *Sejam* $A \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$ *e* $P \in I\!M_m(I\!R)$ *uma matriz invertível. Então,*

$$posto(PA) \;=\; posto(A)\,.$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exercícios

Exercício 4.40 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (x \,-\, y \,+\, z\,,\, -x \,+\, 2z)\,.$$

Determine $[T]^{\gamma}_{\beta}$, *onde* γ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^3$ *e* β *é a base canônica de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4.41 *Considere o operador linear* T *sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (x \,-\, y \,+\, z\,,\, x \,+\, y \,+\, 2z\,,\, x \,+\, 2y \,+\, z)\,.$$

Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$, *onde* β *é a base canônica de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.42 *Considere o operador linear* T *sobre* $\mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$T(x,y) \,=\, (x \,+\, 2y\,,\, 2x \,+\, 4y)\,.$$

Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$, $[T]^{\beta}_{\alpha}$, $[T]^{\alpha}_{\beta}$ *e* $[T]^{\gamma}_{\alpha}$, *onde as base* β, α *e* γ *são dadas por:*

$$\beta \,=\, \{\, (1,0)\,,\, (0,1)\,\} \quad , \quad \alpha \,=\, \{\, (1,-1)\,,\, (0,1)\,\} \qquad e \qquad \gamma \,=\, \{\, (1,-1)\,,\, (1,1)\,\}\,.$$

Exercício 4.43 *Considere o operador linear* T *sobre* $\mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (\, x+2y+z \,,\, 2x-y \,,\, 2y+z\,)\,.$$

Determine as matrizes $[T]^{\beta}_{\beta}$, $[T]^{\gamma}_{\beta}$ *e* $[T]^{\beta}_{\gamma}$, *onde as bases* β *e* γ *são dadas por:*

$$\beta \,=\, \{\, (1,0,0)\,,\, (0,1,0)\,,\, (0,0,1)\,\} \qquad e \qquad \gamma \,=\, \{\, (1,0,1)\,,\, (0,1,1)\,,\, (0,0,1)\,\}\,.$$

Exercício 4.44 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (x \,+\, y \,-\, z\,,\, 2x \,-\, y \,+\, 2z)\,.$$

Determine a matriz $[T]^{\gamma}_{\beta}$, *onde as bases* β *e* γ *são dadas por:*

$$\gamma \,=\, \{\, (1,0,-1)\,,\, (0,1,1)\,,\, (1,1,0)\,\} \qquad e \qquad \beta \,=\, \{\, (1,-1)\,,\, (0,1)\,\}\,.$$

Exercício 4.45 *Seja U um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear $T : U \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por: $T(p(x)) = p'(x) + (x+1)p(0)$. Seja*

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textit{onde} \qquad \beta = \{\, x - x^2 + x^3,\, 1 + x + x^2 \,\}\,.$$

(a) Determine $[p(x)]_\beta$ sabendo que $[T(p(x))]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) Se $\gamma = \{\, x+2,\, p_1(x),\, p_2(x) \,\}$, determine $3p_1(x) + 3p_2(x)$.

Exercício 4.46 *Mostre que a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por: $T(p(x)) = (p(-1),\, p(0),\, p(1))$ é bijetora. Determine a matriz $[T]_\beta^\gamma$, onde γ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.*

Exercício 4.47 *Mostre que o operador linear T sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$T(x,y,z) = (x - y,\, 2y,\, y + z)$$

é invertível e determine o isomorfismo inverso T^{-1}, utilizando a matriz $[T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.48 *Considere o operador linear T sobre $\mathbb{R}^2$ definido por:*

$$T(x,y) = (x - 2y,\, -2x + y)\,.$$

(a) Determine a matriz $[T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{\, (1,1),\, (1,-1) \,\}$.

(b) Determine o isomorfismo inverso T^{-1}, se possível.

Exercício 4.49 *Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz invertível dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $posto(PA) = posto(A)$.

Exercício 4.50 *Sejam $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ e $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Mostre que $posto(PAQ) = posto(A)$.*

Exercício 4.51 *Sejam* $A \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$ *e* $H \in I\!M_m(I\!R)$ *uma matriz elementar de linha. Mostre que* $posto(HA) = posto(A)$. ***Sugestão:*** *faça uso do Teorema 2.7.4.*

Exercício 4.52 *Sejam* $A \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$ *e* $K \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz elementar de coluna. Mostre que* $posto(AK) = posto(A)$. ***Sugestão:*** *faça uso do Teorema 2.7.5.*

Exercício 4.53 *Considere a transformação linear* $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ *tal que*

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde β *é a base canônica de* $I\!R^2$ *e* $\gamma = \{\, (1,0,1),\, (-1,0,1),\, (0,1,0)\,\}$.

(a) Determine $T(1,0)$ *e* $T(0,1)$.

(b) Determine uma base para $Im(T)$.

(c) A transformação T *é injetora ?*

Exercício 4.54 *Seja* $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *o operador linear definido por:*

$$T(x,y) = (3x - 2y\,,\, -2x + 3y)\,.$$

(a) Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$U_1 = \{\, (x,y) \in I\!R^2 \ / \ T(x,y) = 5(x,y)\,\}$$
$$U_2 = \{\, (x,y) \in I\!R^2 \ / \ T(x,y) = (x,y)\,\}$$

(b) Mostre que o conjunto $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, *onde* β_1 *é uma base para* U_1 *e* β_2 *é uma base para* U_2, *é uma base para* $I\!R^2$ *e determine* $[T]^{\beta}_{\beta}$.

Exercício 4.55 *Sejam* T *um operador linear sobre* $I\!R^4$, $\gamma = \{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4\,\}$ *uma base ordenada para o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *e o subespaço* $S = [v_1,\, v_2,\, v_3]$.

(a) Sabendo que $T(v) = v$ *para todo* $v \in S$ *e* $T(v_4) = v_1 + v_3$, *determine* $[T]^{\gamma}_{\gamma}$.

(b) Sabendo que

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{\, e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4\,\}$ *é a base canônica de* $I\!R^4$, *determine* $[T(e_1)]_{\gamma}$.

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[20] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[21] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.