8

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

A maioria das relações que ocorrem na física, economia e, de modo geral, na natureza é traduzida por funções de duas, três e mais variáveis reais; daí a conveniência de um estudo detalhado de tais funções.

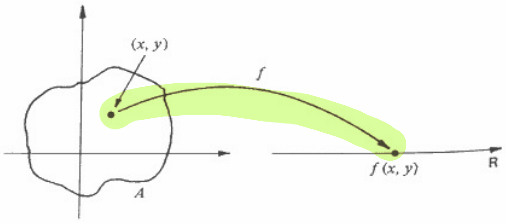
Neste capítulo e nos seguintes daremos ênfase ao estudo das funções reais de duas variáveis reais, e o leitor não terá dificuldade em generalizar os resultados para funções de mais de duas variáveis, já que não há diferenças importantes.

8.1. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f: A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f. O conjunto

$$Im\, f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f. As palavras *aplicação* e *transformação* são sinônimas de função.



f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$

Por simplificação, deixaremos, muitas vezes, de especificar o domínio, ficando implícito, então, que se trata do "maior" subconjunto do $\mathbb{R}^2$ para o qual faz sentido a regra em questão.

EXEMPLO 1. Seja f a função de duas variáveis reais a valores reais dada por $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, com $x \neq y$, isto é: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$. Esta função transforma o par (x, y) no número real $\dfrac{x+y}{x-y}$.

EXEMPLO 2. Seja f a função do exemplo anterior. Calcule

a) $f(2, 3)$ b) $f(a + b, a - b)$

Solução

a) $f(2, 3) = \dfrac{2+3}{2-3} = -5.$

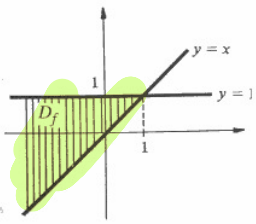
b) $f(a + b, a - b) = \dfrac{a + b + a - b}{a + b - (a - b)} = \dfrac{a}{b}.$

EXEMPLO 3. Represente graficamente o domínio da função f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}.$$

Solução

O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y), com $y - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \text{ e } y \leq 1\}$.



EXEMPLO 4. Seja f a função dada por

$$(x, y) \mapsto z \text{ onde } z = 5x^2y - 3x.$$

O valor de f em (x, y) é $z = f(x, y) = 5x^2y - 3x$. Na equação acima, x e y estão sendo vistas como *variáveis independentes* e z como *variável dependente*. Observe que o domínio de f é o $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 5. Represente graficamente o domínio da função $w = f(u, v)$ dada por

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, \; w \geq 0.$$

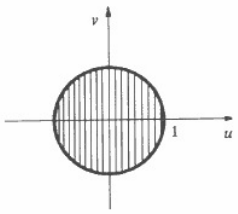
Solução

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, \; w \geq 0 \Rightarrow w = \sqrt{1 - u^2 - v^2}.$$

Assim, f é a função dada por $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$. Seu domínio é o conjunto de todos (u, v), com $1 - u^2 - v^2 \geq 0$.

$$1 - u^2 - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leq 1.$$

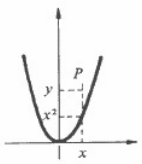
O domínio de f é o círculo de raio 1 e centro na origem.



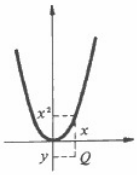
EXEMPLO 6. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por $z = \sqrt{y - x^2}$.

Solução

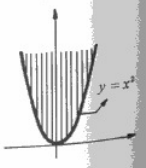
$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}; \; y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2.$$



$P = (x, y)$ pertence a D_f, pois $y > x^2$.



$Q = (x, y)$ não pertence a D_f, pois $y < x^2$.



A região hachurada representa o domínio de f

EXEMPLO 7. (*Função polinomial*). Uma *função polinomial* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n$$

onde p é um natural fixo e os a_{mn} são números reais dados; a soma é estendida a todas as soluções (m, n), m e n naturais, da inequação $m + n \leq p$.

a) $f(x, y) = 3x^3y^2 - \frac{1}{3}xy + \sqrt{2}$ é uma função polinomial.

b) $f(x, y) = ax + by + c$, onde a, b, c são reais dados, é uma função polinomial; tal função denomina-se *função afim*.

EXEMPLO 8. (*Função linear*). Toda função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by$$

onde a, b são reais dados, denomina-se *função linear*. Toda função linear é uma função afim.

EXEMPLO 9. (*Função racional*). Toda função f dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

onde p e q são funções polinomiais, denomina-se *função racional*. O domínio de f é o conjunto $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) \neq 0\}$.

a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ é uma função racional. Seu domínio é: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

b) $g(x, y) = \dfrac{x^2 - 3xy + 1}{x^2y^2 + 1}$ é uma função racional; $D_g = \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 10. (*Função homogênea*). Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, denomina-se *função homogênea de grau* λ se

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$$

para todo $t > 0$ e para todo $(x, y) \in A$ tais que $(tx, ty) \in A$.

a) $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ é homogênea de grau 2. De fato,

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2 + 5(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(3x^2 + 5xy + y^2)$$

ou seja,

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

b) $f(x, y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$ é homogênea de grau -1.

De fato,

$$f(tx, ty) = \frac{txe^{\frac{x}{y}}}{t^2(x^2 + y^2)} = t^{-1} f(x, y).$$

c) $f(x, y) = 2x + y + 5$ não é homogênea. (Por quê?)

Exercícios 8.1

1. Seja $f(x, y) = 3x + 2y$. Calcule

a) $f(1, -1)$ b) $f(a, x)$

c) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ d) $\dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + 2y}$.

a) Determine o domínio.
b) Calcule $f(2u + v, v - u)$.

3. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por

a) $x + y - 1 + z^2 = 0,\ z \geq 0$ b) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

c) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$ d) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

e) $z^2 + 4 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$ f) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

g) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0$ h) $z = \dfrac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$?

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função linear. Sabendo que $f(1, 0) = 2$ e $f(0, 1) = 3$, calcule $f(x, y)$.

5. Verifique se a função é homogênea. Em caso afirmativo, determine o grau de homogeneidade.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

c) $f(x, y) = 5x^3y + x^4 + 3$ d) $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$

6. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja homogênea do grau 2 e $f(a, b) = a$ para todo (a, b), com $a^2 + b^2 = 1$. Calcule

?

a) $f(4\sqrt{3}, 4)$ b) $f(0, 3)$ c) $f(x, y), (x, y) \neq (0, 0)$

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea e suponha que $f(a, b) = 0$ para todo (a, b), com $a^2 + b^2 = 1$. Mostre que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

8. Seja $g : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ uma função dada. Prove que existe uma única função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, homogênea de grau $\lambda \neq 0$, tal que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi[$, $f(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = g(\alpha)$. (Observação: o Exerc. 8 nos diz que uma função homogênea fica completamente determinada quando se conhecem os valores que ela assume sobre os pontos de uma circunferência de centro na origem.)

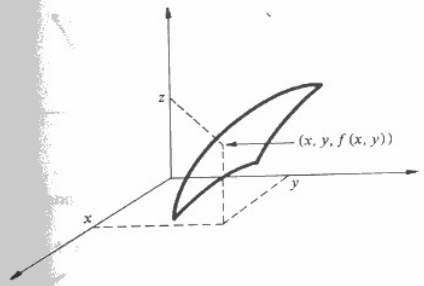
8.2. Gráfico e Curvas de Nível

Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, uma função real de duas variáveis reais. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in A\}$$

denomina-se *gráfico* de f.

Munindo-se o espaço de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$, quando (x, y) percorre o domínio de f.

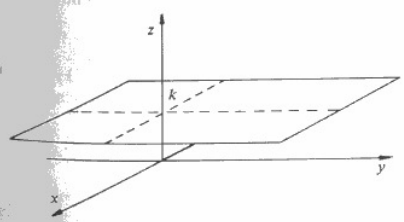


A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis não é tarefa fácil. Em vista disso, quando se pretende ter uma visão geométrica da função, lança-se mão de suas *curvas de nível*, cuja representação geométrica é sempre mais fácil de ser obtida do que o gráfico da função.

Sejam $z = f(x, y)$ uma função e $c \in Im\, f$. O conjunto de todos os pontos (x, y) de D_f tais que $f(x, y) = c$ denomina-se *curva de nível de* f correspondente *ao nível* $z = c$. Assim, f é *constante* sobre cada curva de nível.

O gráfico de f é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f, portanto, do $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 1. O gráfico da função constante $f(x, y) = k$ é um plano paralelo ao plano xy.



EXEMPLO 2. O gráfico da função linear dada por $z = 2x + y$ é um plano passando pela origem e normal ao vetor $\vec{n} = (2, 1, -1)$:

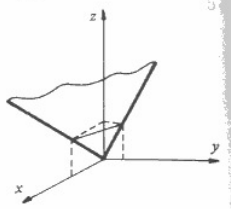
Ler

$$z = 2x + y \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow (2, 1, -1) \cdot [(x, y, z) - (0, 0, 0)] = 0.$$

Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x. \end{cases}$$

Observe que $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$



é uma reta situada no plano yz, enquanto $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$ está situada no plano xz.

EXEMPLO 3. O gráfico da função afim f dada por $z = ax + by + c$ é um plano normal ao vetor $\vec{n} = (a, b, -1)$. Tal plano é determinado pelas retas

Ler

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = by + c \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = ax + c. \end{cases}$$

EXEMPLO 4. Desenhe as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

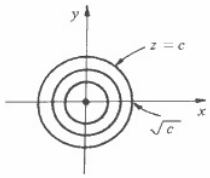
Solução

Observamos, inicialmente, que a imagem de f é o conjunto de todos os reais $z \geq 0$. Seja, então, $c \geq 0$. A curva de nível correspondente a $z = c$ é

Ler

$$f(x, y) = c \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = c.$$

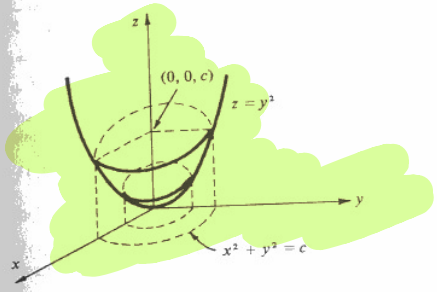
Assim, as curvas de nível ($c > 0$) são circunferências concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível $x^2 + y^2 = c$ a função assume sempre o mesmo valor c. A curva de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0)$.



EXEMPLO 5. Esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução

A interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz. Por outro lado, a interseção do gráfico de f com o plano $z = c$ ($c > 0$) é a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ de centro no eixo Oz e localizada no plano $z = c$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo Oz, a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$. (Por quê?)



O gráfico de f é um *parabolóide de rotação*. Observe que a curva de nível $f(x, y) = c$ nada mais é que a projeção no plano xy da interseção do gráfico de f com o plano $z = c$.

Observação. O gráfico da função dada por $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ ($a > 0$ e $b > 0$) é uma superfície denominada *parabolóide elíptico*. Se $a = b$, temos o *parabolóide de rotação*.

EXEMPLO 6. Seja f a função dada por $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

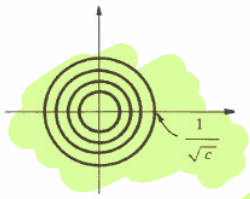
a) Determine o domínio e a imagem.
b) Desenhe as curvas de nível.
c) Esboce o gráfico.

Solução

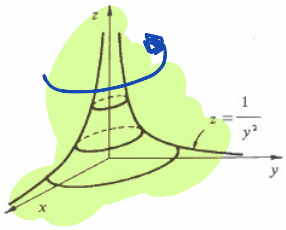
a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $Im\, f = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$.
b) A curva de nível correspondente a $z = c$ ($c > 0$) é

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{c}.$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem. Quando c tende a $+\infty$, o raio tende a zero. Por outro lado, quando c tende a zero, o raio tende a $+\infty$.



c) O plano $x = 0$ intercepta o gráfico de f segundo a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$. Para cada $c \geq 0$, o plano $z = c$ intercepta o gráfico de f segundo a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{c} \end{cases}$. O gráfico de f é obtido, então, girando em torno do eixo Oz, a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$.



EXEMPLO 7. Considere a função f dada por $z = \dfrac{y}{x-1}$.

a) Determine o domínio e a imagem.
b) Desenhe as curvas de nível.

Ler

Solução

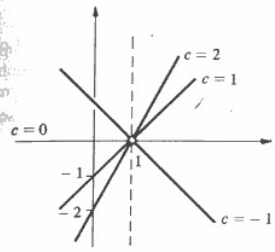
a) O domínio é o conjunto de todos (x, y), com $x \neq 1$. De $f(2, y) = y$, para todo y, segue que a imagem de f é $\mathbb{R}$. Assim

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\} \quad \text{e} \quad Im\, f = \mathbb{R}.$$

b) Para cada c real, a curva de nível correspondente a $z = c$ é

$$c = \frac{y}{x-1} \quad \text{ou} \quad y = c\,(x-1)\ (x \neq 1).$$

Cada curva de nível de f é então uma reta que passa pelo ponto $(1, 0)$ e "furada" neste ponto. Como é o gráfico de f? (*Sugestão*: pegue cada curva de nível de f e coloque-a na altura $z = c$ respectiva.)



Sejam $z = f(x, y)$ uma função e A um subconjunto de D_f. Seja $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* (resp. *valor mínimo*) de f em A se para todo $(x, y) \in A$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \ (\text{resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Diremos, então, que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo* de f em A (resp. *ponto de mínimo*).

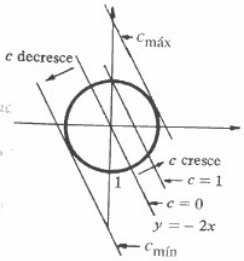
EXEMPLO 8. Sejam $f(x, y) = 2x + y$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 1$. Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A.

Ler

Solução

Para cada c real, a curva de nível de f correspondente a $z = c$ é a reta

① $$c = 2x + y.$$



Indicando por $c_{máx}$ o valor máximo de f em A, a reta ① para $z = c_{máx}$ deve ser tangente à circunferência. (Por quê?) Da mesma forma, para $z = c_{mín}$ a reta ① deve ser tangente à

circunferência. Vamos então determinar c para que a reta ① seja tangente à circunferência. Devemos determinar c de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = c \end{cases}$$

tenha solução única. Substituindo $y = c - 2x$ em $x^2 + y^2 = 1$ obtemos

$$x^2 + (c - 2x)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad 5x^2 - 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Para que o sistema tenha solução única, o discriminante deve ser igual a zero:

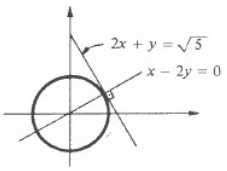
$$16c^2 - 20(c^2 - 1) = 0$$

ou seja,

$$c = \pm\sqrt{5}.$$

Assim, $\sqrt{5}$ é o valor máximo de f em A e $-\sqrt{5}$ o valor mínimo. Vamos, agora, determinar os pontos de máximo e de mínimo. O ponto de máximo é o ponto em que a reta $2x + y = \sqrt{5}$ tangencia a circunferência. Tal ponto é a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = \sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$



onde $x - 2y = 0$ é a reta que passa pela origem e é perpendicular a $2x + y = \sqrt{5}$. O ponto de máximo é: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Deixamos a seu cargo verificar que $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mínimo.

O próximo exemplo será utilizado posteriormente.

EXEMPLO 9. Seja $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Desenhe as curvas de nível de f.
b) Determine a imagem de f.

Ler

Solução

a) Se $c = 0$, $\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Para $c \neq 0$,

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = c \Leftrightarrow 2xy^2 = cx^2 + cy^4 \Leftrightarrow cx^2 - 2xy^2 + cy^4 = 0.$$

Resolvendo em x obtemos

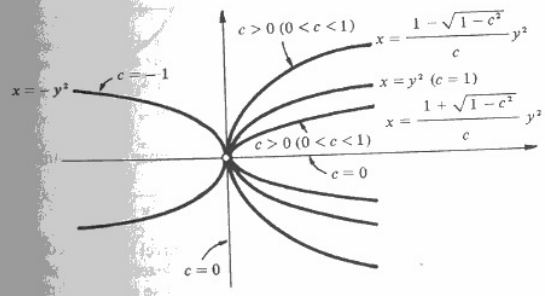
$$x = \frac{2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - 4c^2y^4}}{2c} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2. \ (-1 \leq c \leq 1, c \neq 0).$$

De passagem, observamos que a imagem de f é o intervalo $[-1, 1]$. (Por quê?) O valor máximo de f é 1 e é atingido em todos os pontos, diferentes de $(0, 0)$, da parábola $x = y^2$ $(c = 1)$. A curva de nível correspondente a $c \neq 0$, $-1 < c < 1$, é constituída de todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ que pertencem ou a

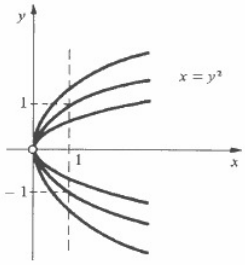
$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2$$

ou a

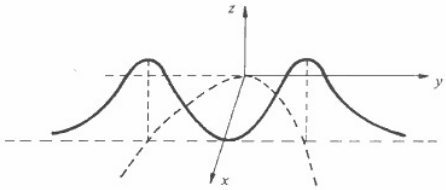
$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2.$$



Observe que, à medida que c vai se aproximando de zero, a parábola de "fora", $x = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2$, vai "abrindo" cada vez mais, enquanto $x = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2$ vai "fechando" cada vez mais. O valor mínimo de f é -1 e é atingido em todos os pontos, diferentes de $(0, 0)$, da parábola $x = -y^2$. Para ajudá-lo a visualizar o gráfico, vamos estudar, com auxílio das curvas de nível, a variação de f sobre a reta $x = 1$; o que vamos fazer, então, é estudar a variação de $f(1, y)$ quando y varia em $\mathbb{R}$: quando y varia de -1 a 0, $f(1, y)$ decresce, passando do valor 1 em $(1, -1)$ para o valor 0 em $(1, 0)$; quando y varia de 0 a 1, $f(1, y)$ cresce, passando do valor 0 em $(1, 0)$ para o valor 1 em $(1, 1)$; $f(1, y)$ é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$. Observe que $f(1, y)$ tende a zero para $y \to +\infty$ ou $y \to -\infty$.



A próxima figura mostra a interseção do gráfico de f com o plano $x = 1$. Sugerimos ao leitor desenhar a interseção do gráfico de f com o plano $x = x_0$, onde $x_0 \neq 0$ é um real qualquer.



Deu para ter uma idéia do gráfico de f? Desafio: tente desenhar ou fazer uma maquete do gráfico.

b) $Im\, f = [-1, 1]$.

Para finalizar, observamos que a denominação curva de nível varia de acordo com o que a função f representa. Por exemplo: se f é uma distribuição de temperatura plana, ($f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y)) as curvas de nível denominam-se *isotermas* (pontos de mesma temperatura); se f é a energia potencial de um certo campo de forças bidimensional, as curvas de nível denominam-se *curvas eqüipotenciais* etc.

Exercícios 8.2

1. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = x + 3y$

c) $z = 4x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

e) $z = x + y + 1$

f) $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

g) $f(x, y) = x^2$, $-1 \leq x \leq 0$ e $y \geq 0$

h) $f(x, y) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$

i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $z = (x - y)^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$

l) $z = f(x, y)$ dada por $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

m) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $x^2 + y^2 < 1$

n) $z = \text{arctg}\,(x^2 + y^2)$

o) $f(x, y) = x$, $x \geq 0$

p) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$

q) $f(x, y) = \text{sen}\, x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$

r) $f(x, y) = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

2. Desenhe as curvas de nível e determine a imagem:

a) $f(x, y) = x - 2y$

b) $z = \dfrac{y}{x - 2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

d) $z = \dfrac{x}{y - 1}$

e) $z = xy$

f) $f(x, y) = x^2 - y^2$

g) $z = 4x^2 + y^2$

h) $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

i) $z = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

j) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

3. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

4. Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A; determine, também, os pontos em que estes valores são atingidos.

a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3$ e $A = \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = xy$ e $A = \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.

(*Sugestão.* Observe que $g(y) = f(1 - 2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, fornece os valores de f sobre a reta $x + 2y = 1$.)

f) $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $A = \mathbb{R}^2$.

g) $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$.

5. Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A, bem como os pontos em que estes valores são atingidos.

a) $f(x, y) = 2x + y + 3$ e A o conjunto de todo (x, y) tais que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 2$.

b) $f(x, y) = x + y$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 7$, $2x + y \leq 5$ e $y \geq x - 1$.

c) $f(x, y) = \dfrac{y}{x - 1}$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $-1 \leq x \leq 0$ e $1 \leq y \leq 2$.

d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x + 1}$ e A o círculo $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

6. Um ponto P descreve uma curva sobre a superfície $z = xy$ de modo que a sua projeção Q sobre o plano xy descreve a curva $x = 5 - t$, $y = t^2 + 3$ e $z = 0$. Determine as alturas máxima e mínima (em relação ao plano xy) quando t percorre o intervalo $[0, 4]$.

7. Um ponto P descreve uma curva sobre o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ de modo que a sua projeção Q sobre o plano xy descreve a reta $x + y = 1$. Determine o ponto da curva que se encontra mais próximo do plano xy. (Desenhe a trajetória descrita por P.)

8. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$. Desenhe a imagem da curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ onde $x = R\cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$ e $z = f(x(t), y(t))$ $(R > 0)$. Como é o gráfico de f?

9. Mesmo exercício que o anterior para a função $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

10. Sejam $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (at, bt, f(at, bt))$. Desenhe a imagem de γ sendo

    a) $a = 0$ e $b = 1$. *b)* $a = 1$ e $b = 1$.

    c) $a = 1$ e $b = 0$. *d)* $a = -1$ e $b = 1$.

11. Como é o gráfico de $f(x, y) = xy$?

12. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy: $T(x, y)$ é a temperatura, que podemos supor em °C, no ponto (x, y).

    a) Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de 36°C.
    b) Determine o ponto de mais baixa temperatura da reta $x + y = 1$.

13. Suponha que $T(x, y) = 2x + y$ (°C) represente uma distribuição de temperatura no plano xy.

    a) Desenhe as isotermas correspondentes às temperaturas: 0°C, 3°C e -1°C.
    b) Raciocinando geometricamente, determine os pontos de mais alta e mais baixa temperatura do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

14. Duas curvas de nível podem interceptar-se? Justifique.

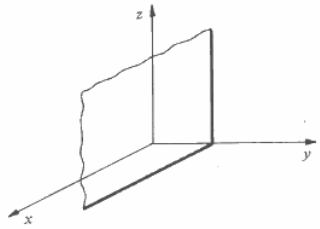
8.3. Funções de Três Variáveis Reais a Valores Reais. Superfícies de Nível

Uma função de três variáveis reais a valores reais, definida em $A \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa, a cada terna ordenada $(x, y, z) \in A$, um único número real $w = f(x, y, z)$. O gráfico de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in A\}.$$

O gráfico de f é então um subconjunto do $\mathbb{R}^4$, não nos sendo possível, portanto, representá-lo geometricamente. Para se ter uma visão geométrica de tal função, podemos nos valer de suas *superfícies de nível*. Seja $c \in Im\, f$ o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in A$ tais que $f(x, y, z) = c$ denomina-se *superfície de nível* correspondente *ao nível* $w = c$.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y, z) = y$. Para cada real c, a superfície de nível correspondente a $w = c$ é o plano $y = c$.



EXEMPLO 2. As superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ são superfícies esféricas de centro na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

A superfície de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$.

Exercícios 8.3

1. Represente geometricamente o domínio da função dada.

   a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ *b)* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z}$

   c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x - y - z}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$

   d) $w = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$ *e)* $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

2. Desenhe a superfície de nível correspondente a $c = 1$.

   a) $f(x, y, z) = x$ *b)* $f(x, y, z) = z$

   c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ *d)* $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$

3. Duas superfícies de nível de uma função f podem interceptar-se? Justifique.

9

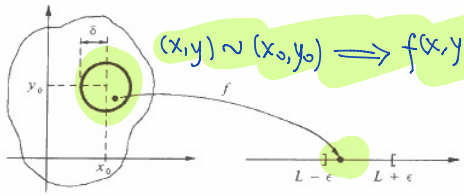
LIMITE E CONTINUIDADE

9.1. LIMITE

Esta seção é quase que uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite de funções de uma variável real, razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios.

Definição. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Definimos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo} \\ (x,y) \in D_f, \\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \end{cases}$$



$(x,y) \sim (x_0,y_0) \Longrightarrow f(x,y) \sim L$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ significa: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x,y)$ permanece em $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ quando (x,y), $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, varia na bola aberta de centro (x_0,y_0) e raio δ.

Observação. De agora em diante, sempre que falarmos que f tem limite em (x_0,y_0), fica implícito que (x_0,y_0) é ponto de acumulação de D_f.

EXEMPLO 1. Se $f(x,y) = k$ é uma função constante, então, para todo (x_0,y_0) em $\mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

Ler

Solução

$|f(x,y) - k| = |k - k| = 0$; assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

EXEMPLO 2. Se $f(x,y) = x$, para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

Ler

Solução

Para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$, $|x - x_0| \leq \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$. (Verifique.)

Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon$ vem:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$$

ou seja,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - x_0| < \epsilon.$$

Logo,

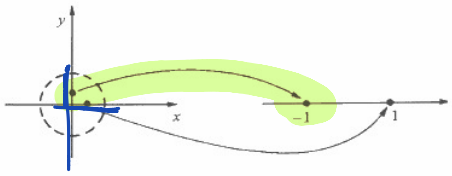
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

EXEMPLO 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tem limite em $(0,0)$? Justifique.

Solução

Ler

Inicialmente, vejamos como se comportam os valores $f(x,y)$ para (x,y) próximo de $(0,0)$. Sobre o eixo $0x$ temos: $f(x,0) = 1$, $x \neq 0$. Sobre o eixo $0y$, $f(0,y) = -1$, $y \neq 0$.



O estudo anterior nos mostra que não existe número L tal que $f(x, y)$ permaneça próximo de L para (x, y) próximo de $(0, 0)$; este fato indica-nos que f não deve ter limite em $(0, 0)$ e não tem mesmo, pois, qualquer que seja L, tomando-se $\epsilon = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$\text{se } L \leq 0, |f(x, 0) - L| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \neq 0;$$

$$\text{se } L > 0, |f(0, y) - L| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } y \neq 0.$$

Ler

Assim, para todo real L, a afirmação

$$\text{“}\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, (x, y) \in D_f, 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon\text{”}$$

é falsa.

Quando tivermos que provar que determinados limites não existem, o próximo exemplo poderá nos ajudar.

EXEMPLO 4. Suponha que $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$. Seja γ uma curva em $\mathbb{R}^2$, contínua em t_0, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e, para $t \neq t_0$, $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ com $\gamma(t) \in D_f$. Prove que

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Ler

Solução

De $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

① $$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Sendo γ contínua em t_0, para todo $\delta_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \delta_1$$

e, portanto, tendo em vista $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ para $t \neq t_0$,

② $$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow 0 < \|\gamma(t) - (x_0, y_0)\| < \delta_1.$$

De ① e ② segue

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \epsilon$$

ou seja,

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Observação. Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas nas condições do Exemplo 4. Segue do exemplo anterior que se ocorrer

③ $$\lim_{t \to t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2$$

com $L_1 \neq L_2$, então, $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá se um dos limites em ③ não existir.

Vejamos como provar que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe (Exemplo 3) utilizando a observação acima. Sejam $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$. Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Temos

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo, $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Observamos que continuam válidas para funções de duas variáveis reais a valores reais as seguintes propriedades dos limites cujas demonstrações são exatamente iguais às que fizemos para funções de uma variável real (reveja o Cap. 3 do Vol. 1).

1. (**Teorema do confronto.**) Se $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ para $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ e se

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L = \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} h(x, y)$$

então

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(x, y) = L.$$

2. Se $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$ e se $|g(x, y)| \leq M$ para $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$, onde $r > 0$ e $M > 0$ são reais fixos, então

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \overset{0}{f(x, y)}\ \overset{\text{limitada}}{g(x, y)} = 0$$

3. $$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} |f(x, y)| = 0.$$

4. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} [f(x, y) - L] = 0.$

5. $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{(h,\,k)\to(0,\,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = L.$

6. Se $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L_1$ e $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} g(x, y) = L_2$, então,

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2.$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} k f(x, y) = kL_1.$ (k constante)

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y)\, g(x, y) = L_1 L_2.$

d) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

7. (**Conservação do sinal.**) Se $\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L$, $L > 0$, então existirá $\delta > 0$, tal que, para todo $(x, y) \in D_f$,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow f(x, y) > 0.$$

EXEMPLO 5. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Solução

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

$\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} x = 0$ e $\left|\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq 1$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Assim,

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \overset{0}{x} \cdot \overset{\text{limitada}}{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} = 0.$$

EXEMPLO 6. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Solução

Ler

Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ e tomemos $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2 + t^2} = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

CUIDADO: $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ não é limitada!

Exercícios 9.1

1. Calcule, caso exista.

a) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy(x - y)}{x^4 + y^4}$

f) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x + y}{x - y}$

g) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{y - x^3}$

h) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 - y^2}$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ (veja Exemplo 9 — Seç. 8.2).

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

b) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$.

(Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ existe? Por quê?

3. Sejam γ_1 e γ_2 curvas satisfazendo as condições do Exemplo 4. A afirmação:

"$\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)) = L \Rightarrow \lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L$"

é falsa ou verdadeira? Justifique.

4. Calcule $\lim\limits_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \dfrac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - 2xh - k}{\|(h, k)\|}$, onde $f(x, y) = x^2 + y$.

5. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(h,\,k)\to(0,\,0)} \dfrac{f(h, k)}{\|(h, k)\|}$, onde f é dada por $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

6. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ e $\lim_{u\to a} g(u) = L$, com g não-definida em a e $Im\, f \subset D_g$. Prove que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Prove, ainda, que o resultado acima continua válido se supusermos g definida em a, com g contínua em a.

7. Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

Calcule $\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2-1}$.

9.2. CONTINUIDADE

Definição. Seja f uma função de duas variáveis reais a valores reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$, com (x_0, y_0) ponto de acumulação de D_f. Definimos:

$$f \text{ contínua em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Se f for contínua em todos os pontos de um subconjunto A de D_f, diremos que f é *contínua em A*. Diremos, simplesmente, que f é *contínua* se o for em todos os pontos de seu domínio.

EXEMPLO 1. A função constante $f(x,y) = k$ é contínua, pois,

Ler

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = k = f(x_0, y_0)$$

para todo (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$. (veja Exemplo 1 — Seç. 9.1.)

EXEMPLO 2. A função $f(x,y) = x$ é contínua, pois,

Ler

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0 = f(x_0, y_0)$$

para todo (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$. (Veja Exemplo 2 — Seç. 9.1.)

EXEMPLO 3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

Solução

Tomando-se $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ vem,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, e, portanto, f não é contínua em $(0,0)$.

O próximo teorema nos diz que se $g(u)$ e $f(x,y)$ forem contínuas e se $Im\, f \subset D_g$, então a função composta $h(x,y) = g(f(x,y))$ também o será.

Teorema 1. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $Im\, f \subset D_g$. Se f for contínua em (x_0, y_0) e g contínua em $f(x_0, y_0)$, então a composta $h(x,y) = g(f(x,y))$ será contínua em (x_0, y_0).

Demonstração

Como $g(u)$ é contínua em $f(x_0, y_0)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

① $$|u - f(x_0, y_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon.$$

Sendo f contínua em (x_0, y_0), para o $\delta_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que

② $$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1.$$

De ① e ② resulta,

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \Rightarrow |g(f(x,y)) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon;$$

logo, $h(x,y) = g(f(x,y))$ é contínua em (x_0, y_0). ■

Como conseqüência deste teorema, segue que se $g(x)$ for contínua, então a função h dada por $h(x,y) = g(x)$ também será contínua. De fato, sendo $f(x,y) = x$, teremos $h(x,y) = g(f(x,y))$, com g e f contínuas.

EXEMPLO 4. $h(x,y) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, pois $g(x) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 5. Sendo $f(x,y)$ contínua, as compostas $\operatorname{sen} f(x,y)$, $\cos f(x,y)$, $[f(x,y)]^2$ etc. também serão.

Teorema 2. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva tais que $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in I$. Se γ for contínua em $t_0 \in I$ e f contínua em $\gamma(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ será contínua em t_0.

Demonstração

Fica a cargo do leitor.

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ contínuas em (x_0, y_0) e seja k uma constante. Segue das propriedades dos limites que $f + g$, $k f$ e $f \cdot g$ são, também, contínuas em (x_0, y_0). Além disso, se $g(x_0, y_0) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ será, também, contínua em (x_0, y_0).

EXEMPLO 4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

Solução

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a propriedade relativa a quociente de funções contínuas, pois, x^3 e $x^2 + y^2$ são contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nestes pontos. Para estudar f com relação à continuidade no ponto $(0, 0)$ precisamos primeiro ver o que acontece com o limite de f neste ponto.

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

$\left(\text{Observe que } \lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} x = 0 \text{ e } \left|\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq 1 \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).\right)$ Assim

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Conclusão: f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Sejam agora, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g, h : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ três funções tais que $(g(x, y), h(x, y)) \in A$, para todo $(x, y) \in B$. Sem nenhuma dificuldade, demonstra-se que se g e h forem contínuas em (x_0, y_0) e f contínua em $(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$, então a composta $f(g(x, y), h(x, y))$ será, também, contínua em (x_0, y_0). Este resultado, bem como os teoremas 1 e 2, são casos particulares de um teorema mais geral sobre continuidade de funções compostas, que não enunciaremos aqui.

Exercícios 9.2

1. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a) $f(x, y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b) $f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

c) $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - 3y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right)} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$

2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

3. Prove que se f for contínua em (x_0, y_0) e se $f(x_0, y_0) > 0$, então existirá $r > 0$ tal que $f(x, y) > 0$ para $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$.

4. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em A, existe uma curva contínua $\gamma : [a, b] \to A$ tal que $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1, y_1)$. Prove que se f for contínua em A e se $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$, então existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = m$.

(*Sugestão.* Aplique o teorema do valor intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.)

5. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, uma função contínua e seja c um número real dado. Prove que o conjunto $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) < c\}$ é aberto.

6. Dizemos que a seqüência de pontos $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ *converge* a $(\bar{x}, \bar{y})$ se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \epsilon.$$

Suponha que $f(x, y)$ seja contínua em $(\bar{x}, \bar{y})$, que $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ convirja para $(\bar{x}, \bar{y})$ e que $(x_n, y_n) \in D_f$ para todo $n \geq 0$. Prove que a seqüência dada por $a_n = f(x_n, y_n)$ converge para $f(\bar{x}, \bar{y})$.

7. Suponha f contínua no retângulo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ \bar{\alpha} \leq y \leq \bar{\beta}\}$. Prove que f é limitada neste retângulo. (*f limitada* em A significa que existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ em A.)

(*Sugestão.* Suponha, por absurdo, que f não seja limitada em A. Então, existirá (x_1, y_1) em A tal que $|f(x_1, y_1)| > 1$. Tomando-se o ponto médio de cada lado, divida o retângulo A em 4 retângulos iguais; em um deles, batizado A_2, f não será limitada, logo existirá $(x_2, y_2) \in A_2$ tal que $|f(x_2, y_2)| > 2$ etc.)

8. **(Teorema de Weierstrass).** Seja f como no Exercício 7. Prove que f assume em A valor máximo e valor mínimo.

(*Sugestão.* Veja Apêndice A2.4 — Volume 1.)