Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 28/03/2019

Técnicas de Demonstração - "Demonstração Direta"

TEOREMA: $P \Rightarrow Q$

DEMONSTRAÇÃO DIRETA: Assume-se a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q; utilizando os resultados conhecidos.

EXEMPLO.1:

"Se um inteiro é divisível por 6, então é divisível por 3."

AFIRMAÇÃO: $(\forall x)(x$ é divisível por $6 \Rightarrow x$ é divisível por $3)$; com o domínio de interpretação sendo os inteiros, temos x um inteiro arbitrário; ou seja, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

PROVAR: x é divisível por $6 \Rightarrow x$ é divisível por 3.

- HIPÓTESE: x é inteiro e é divisível por 6.
- TESE: x é divisível por 3.

Técnicas de Demonstração - "Demonstração Direta"

PROVAR: x é divisível por 6 $\Rightarrow$ x é divisível por 3.

- HIPÓTESE: x é inteiro e é divisível por 6.
- TESE: x é divisível por 3.

1. Por hipótese x é divisível por 6; utilizando a definição de DIVISIBILIDADE temos que existe um inteiro k tal que $x = k.6$;
2. Agora, utilizamos o RESULTADO NUMÉRICO que o inteiro 6 é múltiplo de 3, isto é, $6 = 2.3$;
3. Substituindo (2) em (1) ficamos com $x = k.(2.3)$;
4. Aplicando a PROPRIEDADE ASSOCIATIVA do conjunto dos números inteiros em (3): $x = (k.2).3$;
5. Em (4), pela PROPRIEDADE DO PRODUTO entre números inteiros, temos que $(k.2)$ resulta num número inteiro;
6. Pelo resultado (5) podemos definir o inteiro $a := (k.2)$e, aplicando a DEFINIÇÃO DE DIVISIBILIDADE por 3 obtemos $x = a.3$.
7. CONCLUSÃO: x é divisível por 3.

EXEMPLO.2:

"O produto de dois inteiros pares é par."

AFIRMAÇÃO: $(\forall x, y)(x$ e y pares $\Rightarrow x.y$ é par $)$;
com o domínio de interpretação sendo o conjunto dos inteiros: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.
PROVAR: x, y são números inteiros pares $\Rightarrow x.y$ é par.

- HIPÓTESE: x, y são números inteiros e são números pares.
- TESE: $x.y$ é um inteiro par.

Técnicas de Demonstração - "Demonstração Direta"

- HIPÓTESE: x, y são números inteiros e são números pares.
- TESE: $x.y$ é um inteiro par.

1. Por hipótese x e y são inteiros pares.
2. Aplicando a definição de NÚMEROS PARES em (1), temos que; x e y são divisíveis por 2.
3. Em (2), utilizando a definição de DIVISIBILIDADE por 2 obtemos as igualdades: $x = 2.m$ e $y = 2.n$, para algum inteiro m e n.
4. Efetuando o produto dos inteiros x e y; e substituindo o resultado obtido em (3): $x.y = (2.m)(2.n)$
5. Aplicando a PROPRIEDADE ASSOCIATIVA do conjunto dos inteiros em (4), temos; $x.y = 2.(2mn)$
6. Pela PROPRIEDADE DO PRODUTO dos números inteiros, deduzimos em (5) que $(2mn)$ é um inteiro.
7. Portanto, de (6) existe um inteiro $k = 2mn$ tal que o produto $x.y = 2.k$.
8. Desta forma, em (7) por DEFINIÇÃO DE DIVISIBILIDADE: 2 divide $x.y$.
9. De (8), por DEFINIÇÃO DE NÚMEROS PARES, concluimos que $x.y$ é também um inteiro par.

Demonstração por CONTRAPOSIÇÃO:
"$P \Rightarrow Q$ é um teorema então a contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$ também o é."
Assim, vamos assumir a HIPÓTESE $\neg Q$ como verdadeira e deduzir a TESE $\neg P$.

EXEMPLO.3:
"Se um inteiro é divisível por 6, então é divisível por 3."

CONTRAPOSITIVA: *"Se um inteiro não é divisível por* 3*, então não é divisível por* 6."

- HIPÓTESE: "x não é divisível por 3".
- TESE: "x não é divisível por 6"

- HIPÓTESE: "x não é divisível por 3".
- TESE: "x não é divisível por 6"

1. Por hipótese x não é divisível por 3; utilizando a definição de DIVISIBILIDADE temos que para qualquer inteiro k; $x \neq k.3$.
2. Pelo resultado em (1), iremos definir $k = 2.a$, para a um inteiro qualquer, ficamos com $x \neq (2a).3$
3. Aplicando a PROPRIEDADE ASSOCIATIVA do conjunto dos números inteiros em (2), obtemos $x \neq (2.3).a$;
4. Agora, utilizando em (3) o RESULTADO NUMÉRICO que o inteiro $6 = 2.3$; temos $x \neq 6.a$
5. Aplicando em (4) a DEFINIÇÃO DE DIVISIBILIDADE, deduzimos que 6 não divide x.
6. CONCLUSÃO: x não é divisível por 6.

EXEMPLO.4:

"O produto xy é ímpar se, e somente se, x e y são inteiros ímpares."

PROVAR:

($\Rightarrow$) *Se o produto xy é ímpar então x e y são inteiros ímpares.*

($\Leftarrow$) *Se x e y são inteiros ímpares então o produto xy é ímpar.*

PROVA DIRETA: ($\Leftarrow$)

- HIPÓTESE: x e y são números inteiros e são ímpares.
- TESE: $x.y$ é um inteiro ímpar.

1. Por hipótese x e y são inteiros ímpares.
2. Aplicando a definição de NÚMEROS ÍMPARES em (1), temos que existe um inteiro m e um inteiro n; tais que $x = 2n + 1$ e $y = 2m + 1$.
3. Substituindo o resultado obtido em (2) no produto dos inteiros x e y: $x.y = (2n + 1)(2m + 1)$
4. Utilizando a PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA dos números inteiros em (3), obtemos; $x.y = (2n + 1)(2m + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1$
5. De (4) vamos definir o inteiro $k := 4mn + 2n + 2m$.
6. Em (5), podemos reescrever o inteiro k, colocando o número 2 em evidência; visto que todas as parcelas do inteiro k são divisíveis por 2: $k := 2(2mn + n + m)$
7. Em (6) definimos um inteiro $a := 2mn + n + m$ o que resulta em $k = 2a$.
8. Substituindo (7) em (4) chegamos ao resultado que o produto $x.y = 2a + 1$.
9. De (8), pela definição de números ímpares, temos que o produto $x.y$ é ímpar.

PROVA POR CONTRAPOSIÇÃO: ($\Rightarrow$) *Se x não é ímpar ou y não é ímpar então o produto xy não é ímpar*.

- HIPÓTESE: x não é ímpar ou y não é ímpar.
- TESE: o produto xy não é ímpar.

Observação.1: Por definição dos números inteiros, se um inteiro não é ímpar, ele é par. Portanto, neste caso, podemos reescrever a HIPÓTESE como segue: “x é par ou y é par” e a TESE: “O produto xy é par”.
Observação.2: Considerando que na HIPÓTESE temos o conectivo lógico OU, devemos considerar na “prova” os três casos possíveis: *Caso.1*: “x é par e y é par”; *Caso.2*: “x é par e y é ímpar”; e *Caso.3*: “x é ímpar e y é par”.

Caso.1: HIPÓTESE: "x é par e y é par".

1. Por hipótese x e y são inteiros pares.
2. Aplicando a definição de NÚMEROS PARES em (1), temos que; x e y são divisíveis por 2.
3. Em (2), utilizando a definição de DIVISIBILIDADE por 2 obtemos as igualdades: $x = 2.m$ e $y = 2.n$, para algum m e n inteiros.
4. Efetuando o produto dos inteiros x e y; e substituindo o resultado obtido em (3): $x.y = (2.m)(2.n)$
5. Aplicando a PROPRIEDADE ASSOCIATIVA do conjunto dos inteiros em (4), temos; $x.y = 2.(2mn)$
6. Por PROPRIEDADE DO PRODUTO dos números inteiros, deduzimos em (5) que $(2mn)$ é um inteiro.
7. Portanto, de (6) existe um inteiro $k = 2mn$ tal que o produto $x.y = 2.k$.
8. Desta forma, em (7) por DEFINIÇÃO DE DIVISIBILIDADE: 2 divide $x.y$.
9. De (8), por DEFINIÇÃO DE NÚMEROS PARES, concluimos que $x.y$ é também um inteiro par.

Caso.2: HIPÓTESE: "x é par e y é ímpar".

1. Por hipótese x é um inteiro par e y é um inteiro ímpar.
2. Aplicando a definição de NÚMEROS PARES E ÍMPARES em (1), temos que; $x = 2.m$ e $y = 2.n + 1$, para algum m e n inteiros.
3. Efetuando o produto dos inteiros x e y; e substituindo o resultado obtido em (2): $x.y = (2m)(2n + 1)$
4. Aplicando a PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA do conjunto dos inteiros em (3), temos; $x.y = 4mn + 2m$
5. No resultado do produto $x.y$ em (4) podemos colocar o número 2 em evidência visto que as parcelas da soma são ambas múltiplos deste número: $x.y = 2(2mn + m)$.
6. Definindo em (5) o inteiro $k := 2mn + m$ e substituindo na expressão do produto: $x.y = 2k$.
7. Aplicando a definição de divisibilidade por 2 no conjunto dos inteiros, chegamos à conclusão de (6) que o produto $x.y$ é divisível por 2.
8. De acordo com o resultado obtido em (7) podemos aplicar a definição de números pares, deduzindo que $x.y$ é também um inteiro par.

Caso.3: HIPÓTESE: "x é ímpar e y é par".

1. Por hipótese x é um inteiro ímpar e y é um inteiro par.
2. Aplicando a definição de NÚMEROS PARES E ÍMPARES em (1), temos que; $x = 2.m + 1$ e $y = 2.n$, para algum m e n inteiros.
3. Efetuando o produto dos inteiros x e y; e substituindo o resultado obtido em (2): $x.y = (2m + 1)(2n)$
4. Aplicando a PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA do conjunto dos inteiros em (3), temos; $x.y = 4mn + 2n$
5. No resultado do produto $x.y$ em (4) podemos colocar o número 2 em evidência visto que as parcelas da soma são ambas múltiplos deste número: $x.y = 2(2mn + n)$.
6. Definindo em (5) o inteiro $k := 2mn + n$ e substituindo na expressão do produto: $x.y = 2k$.
7. Aplicando a definição de divisibilidade por 2 no conjunto dos inteiros, chegamos à conclusão por (6) que o produto $x.y$ é divisível por 2.
8. De acordo com o resultado obtido em (7) podemos aplicar a definição de números pares, deduzindo que $x.y$ é também um inteiro par.

Técnicas de Demonstração - "CONTRADIÇÃO (ou **Absurdo**)"

Demonstração por CONTRADIÇÃO:
Considerando a seguinte equivalência:

$$P \to Q \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q) \to F$$

- Se $P \to Q$ é um teorema, é suficiente mostrar $P \wedge (\neg Q) \to F$.
- Então, assumimos que tanto a HIPÓTESE P quanto à negação da TESE $\neg Q$ são "*verdadeiras*"; e chegamos a algumas CONTRADIÇÕES.

EXEMPLO:

"*Se um inteiro é divisível por 6, então é divisível por 3.*"

Afirmação por Absurdo:
"*Um inteiro é divisível por* 6, *e não é divisível por* 3."
HIPÓTESE: x é divisível por 6 e x não é divisível por 3.
TESE: F

Técnicas de Demonstração - "CONTRADIÇÃO (ou **Absurdo**)"

Demonstração por CONTRADIÇÃO:

Considerando a HIPÓTESE: x é divisível por 6 E x não é divisível por 3.

1. Por hipótese x não é divisível por 3; utilizando a definição de DIVISIBILIDADE temos que para qualquer inteiro k; $x \neq k.3$.
2. Pelo resultado em (1), iremos definir $k = 2.a$, para a um inteiro qualquer, ficamos com $x \neq (2a).3$
3. Aplicando a PROPRIEDADE ASSOCIATIVA do conjunto dos números inteiros em (2), obtemos $x \neq (2.3).a$;
4. Agora, utilizando em (3) o RESULTADO NUMÉRICO que o inteiro $6 = 2.3$; temos $x \neq 6.a$
5. Aplicando em (4) a DEFINIÇÃO DE DIVISIBILIDADE, deduzimos que 6 não divide x.
6. Por hipótese temos que 6 divide x.
7. Por (5) e (6) temos que "6 não divide x" E "6 divide x" o que resulta numa FALSIDADE, isto é, chegamos numa CONTRADIÇÃO.
8. CONCLUSÃO: x é divisível por 6 e por 3.

Vamos considerar a seguinte afirmação da Teoria dos Números :
Seja a um número natural. Se a^2 *é par então a é par.*
Mostre este resultado utilizando as seguintes técnicas de demonstração:

- Prova por CONTRAPOSIÇÃO; e
- Prova por CONTRADIÇÃO (Absurdo)

Seja a um número natural. Se a^2 é par então a é par.

$$P \Rightarrow Q$$

onde,
P : a^2 é par;
Q : a é par.

- **Prova por** Contraposição:
  "Seja a um número natural. Se a não é par então a^2 não é par."
- **Prova por** Contradição**(Absurdo)**:
  Seja a um número natural. a^2 é par e a não é par.

Prova por Contraposição:
Considerando a hipótese: Seja a um número natural. Se a não é par então a^2 não é par.

1. Por hipótese a é um natural ímpar.
2. Aplicando a definição de números ímpares em (1), temos que; $a = 2.x + 1$; para x natural qualquer.
3. Efetuando a potência "a elevado a 2" e substituindo no resultado obtido em (2), obtemos; $a^2 = (2x + 1)^2 = (2x + 1).(2x + 1)$
4. Aplicando a propriedade distributiva do conjunto dos naturais em (3), temos; $a^2 = (2x + 1).(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1$
5. Do resultado da potenciação em (4), vamos definir o natural $k := 4x^2 + 4x = 2(2x^2 + 2x)$ e, em seguida, o natural $y := 2x^2 + 2x$. Substituindo em k; temos $k = 2y$.
6. Substituindo o natural k em (4), encontramos $a^2 = 2y + 1$.
7. Aplicando a definição de número natural ímpar em (6), deduzimos que a^2 também é um natural ímpar, ou seja, a^2 não é par.

Prova por Contradição**(Absurdo)**:

1. Por hipótese: Dado a um número natural. a^2 é par E a não é par.
2. Pela hipótese (1), a é um natural ímpar.
3. Aplicando a definição de números ímpares em (2), temos que; $a = 2.x + 1$; para x natural qualquer.
4. Efetuando a potência "a elevado a 2" e substituindo no resultado obtido em (3): $a^2 = (2x + 1)^2 = (2x + 1).(2x + 1)$
5. Aplicando a propriedade distributiva do conjunto dos naturais em (4), temos; $a^2 = (2x + 1).(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1$
6. Do resultado da potenciação em (5), vamos definir o natural $k := 4x^2 + 4x = 2(2x^2 + 2x)$ e, em seguida, o natural $y := 2x^2 + 2x$. Substituindo em k; temos $k = 2y$.
7. Substituindo o natural k em (5), encontramos $a^2 = 2y + 1$.
8. Aplicando a definição de número natural ímpar em (7), deduzimos que a^2 também é um natural ímpar, ou seja, a^2 não é par.
9. Pela hipótese em (1) "a^2 é par" e pela afirmação (8) "a^2 não é par". Chegamos numa contradição. Logo, "Se a^2 é par então a é par, para qualquer a natural."

Observações:
Em matemática queremos ter a certeza *matemática* de que alguma afirmação P vale.
Para tal, é necessário elaborarmos uma DEMONSTRAÇÃO (ou PROVA) matemática utilizando uma ou mais das técnicas de demonstração: "**Prova direta**", "**Prova por Contraposição**", "**Prova por Absurdo**".
Todavia, em alguns casos, não temos a certeza que a afirmação P vale e também, não conseguimos demonstrá-la.
Nestes casos, podemos procurar um *exemplo* mostrando que a afirmação não é válida, isto é, procuramos um CONTRA-EXEMPLO.
O papel do CONTRA-EXEMPLO é sempre "*refutar*" a afirmação; ou seja, "*se tivermos pelo menos um exemplo mostrando que a afirmação não é satisfeita*", então "a afirmação não pode mais ser demonstrada".

Consideremos, por exemplo, a seguinte afirmação P:
"*Todo múltiplo de um número inteiro ímpar é par*."
Tomando um CONTRA-EXEMPLO:
O número inteiro 3 é ímpar e $3 = 2(1) + 1$.
Verificando os múltiplos de 3: $3^2 = 9 = 2(4) + 1$;
logo, 9 é múltiplo de 3 e não é par.
Concluimos que "o múltiplo de um número inteiro ímpar pode não ser par"; Ou seja,
REFUTAMOS a afirmação P com o CONTRA-EXEMPLO.

Seja a afirmação:
A soma de dois inteiros pares é par.
Mostre este resultado utilizando as seguintes técnicas de demonstração:

- Prova por CONTRAPOSIÇÃO; e
- Prova por CONTRADIÇÃO (Absurdo)

Vamos converter a afirmação:
Se x e y são inteiros pares então $x + y$ é par.
utilizando as seguintes técnicas de demonstração:

- Prova por CONTRAPOSIÇÃO:
  "Dados os inteiros x e y, Se $x + y$ não é par então não é verdade que x e y são pares."
  é equivalente afirmar:
  "Dados os inteiros x e y, Se $x + y$ não é par então x ou y não são pares."
- Prova por CONTRADIÇÃO (Absurdo):
  "x e y são inteiros pares e $x + y$ não é par."