Lista de exercícios adicionais - Cálculo B - Unidade II - MATA03 - 2019.2

Limite e Continuidade

1. Calcule o limite, caso exista, ou mostre que não existe:

[a.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[b.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

[c.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$

[d.] $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$

[e.] $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$

[f.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$

[g.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

[h.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

[i.] $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

[j.] $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$

[k.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

[l.] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$

[m.] $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$

2. Determine o conjunto dos pontos de continuidade e justifique a sua resposta.

[a.] $f(x,y)=\sqrt{6-2x^2-3y^2}$

[b.] $f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$

[c.] $f(x,y)=\dfrac{e^x+e^y}{e^{xy}-1}$

[d.] $f(x,y)=\dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

[e.] $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}\ , & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

[f.] $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ , & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1\ , & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

[g.] $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\dfrac{1}{r^2-1}\right)} \ , & \text{se } r < 1 \ \text{ onde } r = \|(x,y)\| \\ 0 \ , & \text{se } r \geqslant 1 \end{cases}$

3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

4. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) \ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ m \ , & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Verifique se existe algum valor de m para o qual a função seja contínua no ponto $(0,0)$.

Derivadas

5. Determine as derivadas parciais das funções abaixo:

   [a.] $f(x,y) = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

   [b.] $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

   [c.] $z = \dfrac{x \sin y}{\cos(x^2+y^2)}$

   [d.] $w = \dfrac{xy}{\cos(x+z)} - \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

6. Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciávl e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

7. Considere a função $z = x \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

8. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para as funções abaixo:

   [a.] $f(x,y) = \int_2^{x^2+y^2} e^{-t^2} \, dt$

   [b.] $f(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} \, dt$.

   [c.] $f(x,y) = \int_{x+y}^{x^2-y^2} 1 + e^t \, dt$

   [d.] $f(x,y) = x \int_y^x \sin(t^2) \, dt$

9. Determine uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 - 2y\cos(xy) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8xy - 2x\cos(xy) + 8 \end{cases}$$

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(3) = 4$. Seja

$$g(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^4} f(t)dt.$$

Calcule: a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

11. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(3) = 4$.
Seja $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$.
Calcule: a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

12. Prove, usando a definição, que a função $f(x, y) = xy$ é diferenciável.

13. Seja $f(x, y) = 3x^2 + 2\sin(\frac{x}{y^2}) + y^3(1 - e^x)$. Calcule $f_x(2, 3)$, $f_x(0, 1)$, $f_y(1, 1)$ e $f_y(-1, -1)$.

14. Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem das seguintes funções:
    [a.] $z = 4xy - 3x^2y^3$
    [b.] $z = x\cos(2x + 3y)$
    [c.] $z = \dfrac{4x - 2y^2}{4xy}$
    [d.] $z = e^{xy} \cdot \sin(x + y) + xy^2$
    [e.] $z = \arctan(xy) - e^{-x+y}$

15. Determine o conjunto dos pontos em que cada função dada é diferenciável.
    [a.] $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
    [b.] $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

16. Determine as equações do plano tangente e reta normal ao gráfico da função dada, no ponto em questão.
    [a.] $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$ em $(2, 2, f(2, 2))$.
    [b.] $f(x, y) = \arctan(x - 2y)$ em $\left(2, \dfrac{1}{2}, f\left(2, \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

17. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

18. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Mstre que todos os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

19. Calcule a diferencial das funções:

    [a.] $z = x \arctan(x+2y)$

    [b.] $u = e^{s^2-t^2}$

20. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. Calcule:

    [a.] A diferencial de z no ponto $(1,8)$.

    [b.] Um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

    [c.] Um valor aproximado para a variação Δz em z, quando passamos de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

21. Um dos catetos de um triângulo retângulo é $x = 3\ cm$ e o outro é $y = 4\ cm$. Calcule um valor aproximado para a variação Δz na hipotenusa z, quando x aumenta $0,01\ cm$ e y decresce $0,1\ cm$.

22. Calcule o vetor gradiente das seguintes funções:

    [a.] $f(x,y) = 2^{x-y}$

    [b.] $f(x,y,z) = z \cdot \arctan \dfrac{x}{y}$

Regra da Cadeia e Funções Implícitas

23. Supondo f diferenciável e que para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

24. Sejam f e g funções diferenciáveis tais que, para todo (x,y) no domínio de g, $f(x,y,g(x,y)) = 0$. Suponha que $g(1,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,3)$.

25. A equação $x^2y + \sin y = x$ define implicitamente alguma função $y = y(x)$? Se sim, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

26. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

27. Determine a equação da reta tangente à curva de nível $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

28. Determine as equações do plano tangente e reta normal à superfície dada, no ponto dado:

    [a.] $2xyz = 3$ em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$

    [b.] $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$

29. Determine um plano que passe pelos pontos $(5, 0, 1)$ e $(1, 0, 3)$ e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

30. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ (ou seja, na direção do vetor $\vec{v} = (3, 4)$) e igual à -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule

    [a.] $\nabla f(1, 1)$

    [b.] $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

Gabarito

1. [a.] 0 [b.] Não existe [c.] Não existe [d.] e [e.] 0
   [f.] Não existe [g.] 2 [h.] 0 [i.] Não existe [j.] Não existe
   [k.] 0 [l.] 0 [m.] $\dfrac{\pi \ln 4}{2}$

2. [a.] $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} \leqslant 1\}$
   [b.] $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$
   [c.] $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$
   [d.] $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1 \text{ e } x \neq y\}$
   [e.] $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
   [f.] $\mathbb{R}^2$
   [g.] $\mathbb{R}^2$

3. Sim. Pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

4. $m = 0$ faz f ser contínua em $(0, 0)$.

5. [a.] $f_x(x, y) = \dfrac{2x^3}{1 + x^2 + y^2} + 2x \ln(1 + x^2 + y^2)$ e $f_y(x, y) = \dfrac{2yx^2}{1 + x^2 + y^2}$
   [b.] $f_x(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $y \neq 0$ e $f_y(x, y) = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}$, $y \neq 0$
   [c.] $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\sin y[\cos(x^2 + y^2) + 2x^2 \sin(x^2 + y^2)]}{\cos^2(x^2 + y^2)}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x \cos y \cos(x^2 + y^2) + 2xy \sin y \sin(x^2 + y^2)}{\cos^2(x^2 + y^2)}$
   [d.] $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{y \cos(x + z) + xy \sin(x + z)}{\cos^2(x + z)} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x}{\cos(x + z)} - \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$
   $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{xy \sin(x + z)}{\cos^2(x + z)} - \dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$

6. $g_x(1, 1) = 4$ e $g_y(1, 1) = -4$

7. (Só para verificar a igualdade) encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e substituir na expressão e verificar a igualdade.

8. Usar teorema fundamental do cálculo (+ Regra da Cadeia de uma variável quando necessário).
   [a.] $f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)^2}$ e $f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)^2}$
   [b.] $f_x(x, y) = -2xe^{-x^4}$ e $f_y(x, y) = 2ye^{-y^4}$
   [c.] $f_x(x, y) = 2x(1 + e^{x^2-y^2}) - (1 + e^{x+y})$ e $f_y(x, y) = -2y(1 + e^{x^2-y^2}) - (1 + e^{x+y})$
   [d.] $f_x(x, y) = x \sin(x^2) + \int_y^x \sin(t^2)\, dt$ e $f_y(x, y) = -x \sin(y^2)$

9. $4xy^2 - 2 \sin(xy) + 8y$ ($+K$ uma constante qualquer)

10. [a.] 4 [b.] 8 [c.] 16

11. [a.] 8 [b.] 8 [c.] 8

12. Mostrar que a função é diferenciável em todo seu domínio. Fixado x e y calcule suas derivadas parciais e mostre que "aquele" limite é 0 (usando a notação h e k, com h e k tendendo a zero).

13. $f_x(2, 3) = 18 + \dfrac{2 \cos(2/9)}{9} - 27e^2$; $f_x(0, 1) = 1$;
    $f_y(1, 1) = -4 \cos(1) + 3(1 - e)$; $f_y(-1, -1) = -4 \cos(1) + 3(1 - \dfrac{1}{e})$

14. [a.] $f_{xx}(x,y) = -6y^3 \quad ; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4 - 18xy^2 \quad ; \quad f_{yy}(x,y) = -18x^2y$

[b.] $f_{xx}(x,y) = -4x\cos(2x+3y) - 4\sin(2x+3y)$;

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6x\cos(2x+3y) - 2\sin(2x+3y)$;

$f_{yy}(x,y) = -6x\cos(2x+3y)$

[c.] $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{y}{x^3},\ x,y \neq 0 \quad ; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{1}{2x^2},\ x,y \neq 0 \quad ; \quad f_{yy}(x,y) = \dfrac{1}{y^3},\ x,y \neq 0$

[d.] $f_{xx}(x,y) = (y^2-1)e^{xy}\sin(x+y) + 2ye^{xy}\cos(x+y)$;

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = xye^{xy}\sin(x+y) + (x+y)e^{xy}\cos(x+y) + 2y$;

$f_{yy}(x,y) = (x^2-1)e^{xy}\sin(x+y) + 2xe^{xy}\cos(x+y) + 2x$

[e.] $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} - e^{y-x} \quad ; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} + e^{y-x}$;

$f_{yy}(x,y) = -\dfrac{2yx^3}{(1+x^2y^2)^2} - e^{y-x}$

15. [a.] $\mathbb{R}^2$ [b.] $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

16. [a.] Plano tangente: $z = 9x - 8y$; Reta normal : $(x,y,z) = (2,2,2) + \lambda(9,-8,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

[b.] Plano tangente: $z = \dfrac{x}{2} - y + \dfrac{\pi-2}{4}$; Reta normal : $(x,y,z) = (2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}) + \lambda(\frac{1}{2}, -1, -1)\ \lambda \in \mathbb{R}$

17. $z = \dfrac{x}{2} + 3y - \dfrac{3}{2}$

18. Encontrar plano tangente genérico e substituir $(0,0,0)$ no lugar de (x,y,z).

19. [a.] $dz = \left(\dfrac{x}{1+(x+2y)^2} + \arctan(x+2y)\right)dx + \dfrac{2x}{1+(x+2y)^2}dy$

[b.] $dz = (-2t \cdot e^{s^2-t^2})\ dt + (2s \cdot e^{s^2-t^2})\ ds$

20. [a.] $dz = \dfrac{dx}{2} + \dfrac{dy}{12}$

[b.] $z \simeq 2,9967$

[c.] $\Delta z \simeq -0,049167$

21. $\Delta z \simeq -0,074$

22. [a.] $\nabla f(x,y) = (2^{x-y}\ln 2,\ -2^{x-y}\ln 2)$

[b.] $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{x^2+y^2}, -\dfrac{xz}{x^2+y^2}, \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$

23. Usar regra da cadeia.

24. $2x + 5y + 10z - 37 = 0$

25. Sim. Usar teorema das funções implícitas considerando algum ponto em que a derivada parcial em y da equação nesse ponto é diferente de 0. Calcular também a derivada.

26. Pode ser a reta tangente $2x + y = 3$ ou $2x + y = -3$.

27. $4x + y - 3 = 0$

28. [a.] Reta tangente: $6x + 3y + z - 9 = 0$; Reta normal: $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, 1, 3) + \lambda(6,3,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

[b.] Reta tangente: $x - y + 4z - 4 = 0$; Reta normal: $(x,y,z) = (2,2,1) + \lambda(1,-1,4),\ \lambda \in \mathbb{R}$

29. Pode ser o plano tangente $x + 2y + 2z - 7 = 0$ ou $x - 2y + 2z - 7 = 0$.

30. [a.] $\nabla f(1,1) = (1,3)$

[b.] $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2\sqrt{2}$