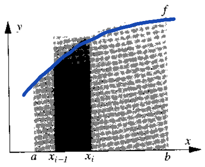
Na aula foi ministrado apenas o conteúdo marcado.

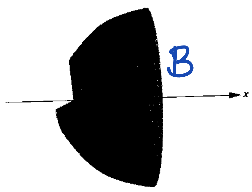
13

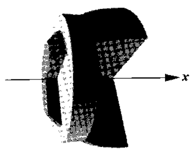
MAIS ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL. COORDENADAS POLARES

13.1. VOLUME DE SÓLIDO OBTIDO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO x, DE UM CONJUNTO A

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o *volume* V de B.







Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i, < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e, respectivamente, $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ pontos de mínimo e de máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Na figura acima, $\bar{c}_i = x_{i-1}$ e $\bar{\bar{c}}_i = x_i$. Temos:

$\pi\,[f(\bar{c}_i)]^2\,\Delta x_i =$ volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{c}_i)$ (cilindro de "dentro")

$\pi[f(\bar{\bar{c}}_i)]^2\,\Delta x_i =$ volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{\bar{c}}_i)$ (cilindro de "fora").

Uma boa definição para o volume de V deverá implicar

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \pi\,[f(\bar{c}_i)]^2\,\Delta x_i \leqslant \text{volume} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f(\bar{\bar{c}}_i)]^2\,\Delta x_i}$$

para toda partição P de $[a, b]$. Para máx $\Delta x_i \to 0$, as somas de Riemann que comparecem nas desigualdades tendem a $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$; nada mais natural, então, do que definir o *volume* V de B por

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

ou

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2\,dx, \text{ onde } y = f(x)}$$

EXEMPLO 1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$ $(r > 0)$.

Solução Ler todo.

$x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$, é um semicírculo de raio r. Pela rotação deste semicírculo em torno do eixo x, obtemos uma esfera de raio r. Temos:

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2, y \geqslant 0 \iff y = \sqrt{r^2 - x^2}, \ -r \leqslant x \leqslant r.$$

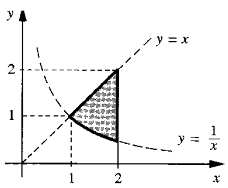
Segue que o volume pedido é

$$\text{volume} = \pi \int_{-r}^{r} y^2\,dx = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$
$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx$$
$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad \blacksquare$$

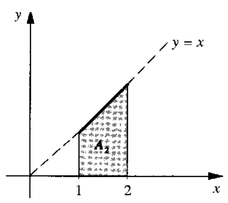
EXEMPLO 2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.

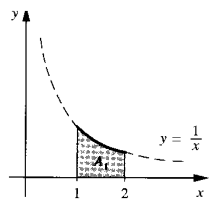
Ler todo.

Solução



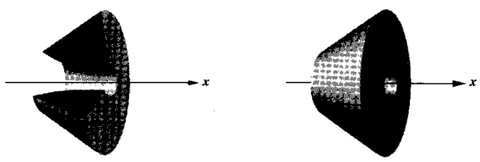
O que queremos é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto hachurado. O volume V pedido é igual a $V_2 - V_1$ onde V_2 e V_1 são, respectivamente, os volumes obtidos pela rotação, em torno do eixo x, dos conjuntos A_2 e A_1 hachurados.





$$V_2 = \pi \int_1^2 x^2\, dx = \frac{7\pi}{3} \quad \text{e} \quad V_1 = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Deste modo, o volume V pedido é: $V = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$.



■

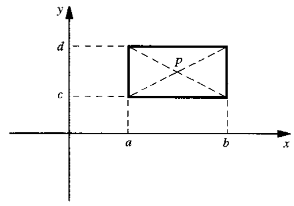
O próximo exemplo é um caso particular do teorema de Papus (Papus de Alexandria, IV século d.C.) para volume de sólido obtido pela rotação, em torno de um eixo, de uma figura plana que não intercepta o eixo. Tal teorema nos diz que, sob determinadas condições, o volume do sólido obtido pela rotação, em torno de um eixo, de uma figura plana que não intercepta tal eixo é igual ao **produto da área da figura pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro (ou centro de massa) da figura.** (Veja Exercício 3, Seção 13.9.)

EXEMPLO 3. Considere um retângulo situado no semiplano $y \geqslant 0$ e com um lado paralelo ao eixo x. Seja P a interseção das diagonais. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x é igual ao ***produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo ponto P.***

Solução

Consideremos o retângulo

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{e} \quad 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d$$



O volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, deste retângulo é

$$V = \pi \int_a^b d^2 dx - \pi \int_a^b c^2 dx$$

ou seja,

$$V = \pi (d^2 - c^2)(b - a)$$

e, portanto,

$$V = 2\pi \frac{d + c}{2} (d - c)(b - a)$$

onde $2\pi \frac{d+c}{2}$ é o comprimento da circunferência gerada pelo ponto P e $(d - c)(b - a)$ é a área do retângulo. (Observe que o resultado expresso neste exemplo continua válido se as expressões "semiplano $y \geqslant 0$" e "em torno do eixo x" forem substituídas, respectivamente, por "semiplano $x \geqslant 0$" e "em torno do eixo y".) ■

Antes de prosseguirmos, vamos destacar o 2.º Teorema Fundamental do Cálculo (ou simplesmente Teorema Fundamental do Cálculo) cuja prova é deixada para o Vol. 2. Seja g

uma função **contínua** em um intervalo I e a um ponto de I, a fixo. Assim, para cada x em I, $\int_a^x g(x)dx$ existe. Podemos então considerar a função que a cada x em I associa o número $\int_a^x g(x)dx$. Pois bem, o 2.º Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que $\int_a^x g(x)dx$ é uma primitiva de $g(x)$ em I. Vejamos como podemos nos convencer desse fato. Conforme veremos no Vol. 2, sendo g contínua em I, existirá G tal que, para todo x em I, $G'(x) = g(x)$. Pelo 1.º Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_a^x g(x)dx = G(x) - G(a)$, daí, e lembrando que $G(a)$ é constante, resulta, para todo x em I,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(x)dx = \frac{d}{dx}[G(x) - G(a)] = g(x)$$

e, portanto,

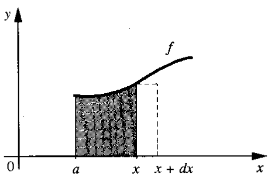
$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x g(x)dx = g(x).}$$

Agora, podemos prosseguir.

Seja $f(x) \geqslant 0$ e contínua em $[a, b]$; para cada x em $[a, b]$,

$$V(x) = \pi\int_a^x [f(x)]^2\, dx$$

é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto hachurado.



Sendo f contínua em $[a, b]$, $\pi\,[f(x)]^2$ também será contínua neste intervalo. Daí, pelo 2.º Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x \pi[f(x)]^2\, dx = \pi[f(x)]^2.$$

Assim, $dV = \pi\,[f(x)]^2\, dx$, ou seja $\pi\,[f(x)]^2\, dx$ nada mais é do que a *diferencial* do volume $V(x)$. Observe que a diferencial $dV = \pi[f(x)]^2\, dx$ é o volume do cilindro gerado, na rotação em torno do eixo x, pelo retângulo de base dx e altura $f(x)$; dV é um valor aproximado para a variação ΔV em V correspondente à variação dx em x. Então, o volume do sólido de revolução, em torno do eixo x, do conjunto $\{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ é obtido calculando-se a integral da *diferencial do volume* para x variando de a até b.

Exercícios 13.1

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que

Lista

a) $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $0 \leqslant y \leqslant x$.

b) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ e $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^2}$.

c) $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

d) $2x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $y \geqslant 0$.

e) $y \geqslant 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ e $x^2 - y^2 \geqslant 1$.

f) $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 3$.

g) $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

h) $0 \leqslant y \leqslant x$ e $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

i) $y \geqslant x^2$ e $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

j) $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ e $y \geqslant 0$.

l) $\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1$ e $1 \leqslant x \leqslant 2$.

m) $x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 1$.

2. (*Teorema de Papus para a elipse.*) Considere o conjunto A de todos os pontos (x, y) tais que

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} \leqslant 1 \quad (a > 0 \text{ e } b > 0)$$

e situado no semiplano $y \geqslant 0$. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A é igual ao produto da área da elipse pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo centro (α, β) desta elipse.

3. Considere um triângulo isósceles situado no semiplano $y \geqslant 0$ e com base paralela ao eixo x. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação deste triângulo, em torno do eixo x, é igual ao produto da área deste triângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro do triângulo.

13.2. Volume de Sólido Obtido pela Rotação, em Torno do Eixo y, de um Conjunto A

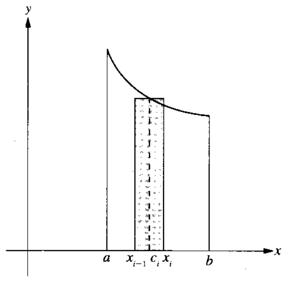
Suponha $f(x) \geqslant 0$ e contínua em $[a, b]$, com $a > 0$. Seja A o conjunto do plano de todos os pares (x, y) tais que $a \leqslant x \leqslant b$ e $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A. Nosso objetivo, a seguir, é mostrar que é razoável tomar para volume de B o número

① $$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx}$$

ou

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b xy dx, \text{ onde } y = f(x)}$$

Seja P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e seja c_i o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$.



Seja R_i o retângulo $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ e $0 \leqslant y \leqslant f(c_i)$. Pelo teorema de Papus para retângulo, o volume do sólido gerado pela rotação do retângulo R_i, em torno do eixo y, é

$$\boxed{2\pi c_i f(c_i)\, \Delta x_i} \qquad \text{(Confira.)}$$

Deste modo, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi\, c_i\, f(c_i) \Delta x_i$$

é um valor aproximado para o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A. Por outro lado, pelo fato de f ser contínua, tem-se

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, c_i\, f(c_i)\, \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx$$

Logo, é razoável tomar ① para volume de B. Veremos no Vol. 3 que esta nossa atitude é correta. (Para uma prova de ①, num caso particular, veja Exercício 3 desta seção.)

EXEMPLO 1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos (x, y) tais que

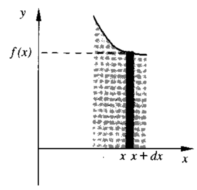
Ler todo.

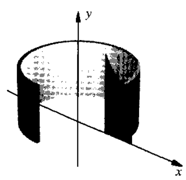
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant x - x^3.$$

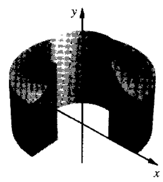
Solução

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\, dx = \frac{2}{15}. \qquad ■$$

Já sabemos que $dV = 2\pi\, xf(x)dx$ é a diferencial de $V(x) = 2\pi \int_a^x xf(x)dx$. Agora, observe que $f(x)dx$ é a área do retângulo de altura $f(x)$ e base dx e, para dx suficientemente pequeno, $2\pi x$ é aproximadamente o comprimento da circunferência gerada pelo baricentro do retângulo mencionado e daí, pelo teorema de Papus para retângulos, $2\pi\, xf(x)dx$ é aproximadamente o volume do ***invólucro cilíndrico*** obtido pela rotação, em torno do eixo y, de tal retângulo.

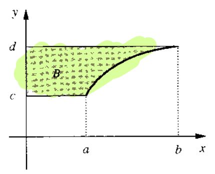


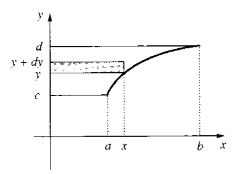




O volume obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A é então a integral dessa diferencial, para x variando de a até b, ou seja, $V = 2\pi \int_a^b xy dx$, onde $y = f(x)$. Este método de determinar volume é às vezes denominado ***método dos invólucros cilíndricos*** ou ***método das cascas.***

Vejamos, agora, uma outra fórmula, que é do mesmo tipo daquela da seção anterior, para calcular volume de sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, de um conjunto que não intercepta tal eixo. Seja então B o conjunto: $B = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d \text{ e } y \geqslant f(x)\}$, onde f é suposta contínua e estritamente crescente (ou estritamente decrescente) em $[a, b]$, com $a \geqslant 0, f(a) = c$ e $f(b) = d$.





Como $y = f(x)$ é contínua e estritamente crescente em $[a, b]$, então é inversível, com inversa $x = g(y)$ contínua em $[c, d]$, onde $c = f(a)$, $d = f(b)$ e $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. Raciocinando como na seção anterior, o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto B é

$$\boxed{\text{volume} = \pi \int_c^d x^2 \, dy, \text{ onde } x = g(y)}$$

Observe que $\pi x^2 dy$ é o volume do cilindro obtido pela rotação, em torno do eixo y, do retângulo de base x e altura dy. (Veja figura acima.)

EXEMPLO 2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $x^2 \leqslant y \leqslant 4$, $x \geqslant 0$.

Ler todo.

Solução

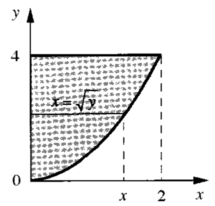
Temos: $y = x^2, x \geqslant 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$.

Segue que

$$\text{Volume} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 \, dy.$$

E, portanto,

$$\text{Volume} = \pi \int_0^4 y \, dy = 8\pi.$$



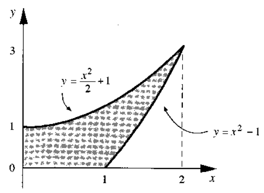
■

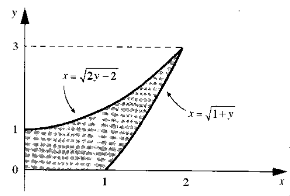
Observação. Este volume poderia, também, ter sido calculado utilizando-se a fórmula anterior. Neste caso, o volume pedido seria a *diferença* entre o volume gerado pela rotação, em torno do eixo y, do retângulo $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ e o volume gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto $0 \leqslant x \leqslant 2$ e $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, onde $f(x) = x^2$. Ou seja,

$$\text{volume} = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x f(x) dx = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x^3 \, dx = 8\pi.$$

EXEMPLO 3. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x^2}{2} + 1$ e $y \geqslant x^2 - 1$.

Solução





1.º PROCESSO (Utilizando a primeira fórmula.)

Ler todo.

$$\text{volume} = 2\pi \int_0^2 x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx - 2\pi \int_1^2 x(x^2 - 1) dx.$$

E, portanto, volume $= \dfrac{7\pi}{2}$.

2.º PROCESSO (Utilizando a segunda fórmula.)

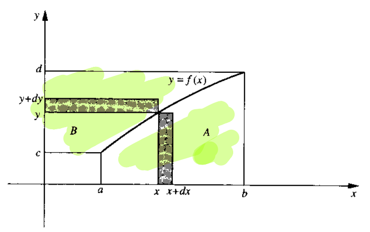
Ler todo.

$$\frac{x^2}{2} + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = 2y - 2 \text{ e } x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1$$

Então

$$\text{volume} = \pi \int_0^3 (y + 1) dy - \pi \int_1^3 (2y - 2) dy = \frac{7\pi}{2}.$$ ■

Para encerrar a seção, vamos resumir num quadro o que aprendemos nesta seção e na anterior.



$A = \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ e $B = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, y \geqslant f(x)\}$

I) $\pi \int_a^b y^2\, dx =$ volume gerado por A na rotação em torno do eixo x.($y = f(x)$)

II) $\pi \int_c^d x^2\, dy =$ volume gerado por B na rotação em torno do eixo y.($x = g(y)$)

III) $2\pi \int_a^b xy\, dx =$ volume gerado por A na rotação em torno do eixo y.($y = f(x)$)

IV) $2\pi \int_c^d yx\, dy =$ volume gerado por B na rotação em torno do eixo x.($x = g(y)$)

Exercícios 13.2

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os (x, y) tais que
a) $1 \leqslant x \leqslant e$ e $0 \leqslant y \leqslant \ln x$.
b) $0 \leqslant x \leqslant 8$ e $0 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{x}$.
c) $1 \leqslant x \leqslant 2$ e $0 \leqslant y \leqslant x^2 - 1$.
d) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x$.
e) $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arc\,tg} x$.
f) $1 \leqslant x \leqslant 4$ e $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.
g) $y^2 \leqslant 2x - x^2, y \geqslant 0$.
h) $0 \leqslant x \leqslant 2, y \geqslant \sqrt{x-1}$ e $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

Lista

2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os (x, y) tais que
a) $0 \leqslant x \leqslant 6, 0 \leqslant y \leqslant 2$ e $y \geqslant \sqrt{x-2}$.
b) $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant -x + 6, x \geqslant 0$.
c) $0 \leqslant x \leqslant e, 0 \leqslant y \leqslant 2$ e $y \geqslant \ln x$.
d) $y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$.
e) $0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant x^2 + 1$.

3. (*Volume de sólido de revolução em torno do eixo y.*) Suponha f estritamente crescente e com derivada contínua em $[a, b]$, $a \geqslant 0$ e $f(a) = 0$. Seja $g:[0, f(b)] \to [a, b]$ a função inversa de f.
a) Verifique que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \text{ é igual a } \pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2\, dy.$$

b) Mostre que

$$\pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2\, dy = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx$$

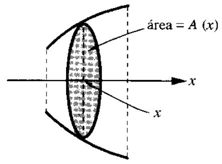
(*Sugestão*: Faça a mudança de variável $y = f(x)$ e depois integre por partes.)
c) Conclua que o volume mencionado em *a* é

$$\boxed{\text{volume} = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx}$$

13.3. Volume de um Sólido Qualquer

Vimos no parágrafo anterior que $\pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ é a fórmula que nos fornece o volume do *sólido de revolução* obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Observe que

$$A(x) = \pi [f(x)]^2$$



é a área da *interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abscissa x*. Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma

$$\boxed{\text{volume} = \int_a^b A(x)\, dx}$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja x um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a x, que interceptam o eixo x em $x = a$ e em $x = b$. Seja $A(x)$ a área da interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abscissa x. Suponhamos que a função $A(x)$ seja integrável em $[a, b]$. Definimos, então, o volume do sólido por

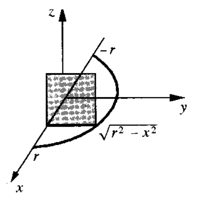
$$\boxed{\text{volume} = \int_a^b A(x)\, dx}$$

EXEMPLO. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Solução

$$A(x) = (\sqrt{r^2 - x^2})^2.$$

$$\text{volume} = \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



ou seja

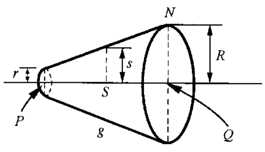
$$\text{volume} = 2\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{4r^3}{3}.$$ ■

Exercícios 13.3

1. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos eqüiláteros.
2. Calcule o volume do sólido cuja base é a região $4x^2 + y^2 \leqslant 1$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são semicírculos.
3. Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.
4. Calcule o volume do sólido cuja base é um triângulo eqüilátero de lado l e cujas secções perpendiculares a um dos lados são quadrados.

13.4. ÁREA DE SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Sabe-se da geometria que a área lateral de um tronco de cone circular reto, de geratriz g, raio da base maior R e raio da base menor r, é igual à área do trapézio de altura g, base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$:



$$\text{área lateral do tronco} = \pi(R + r)\, g$$

Sendo S o ponto médio do segmento PQ.

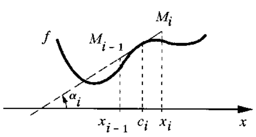
$$s = \frac{R + r}{2}, \text{ daí } \pi\,(R + r)\, g = 2\pi sg.$$

$$\boxed{\text{área lateral do tronco de cone} = 2\pi sg}$$

Observe que a área da superfície gerada pela rotação da geratriz, em torno do eixo PQ, é igual ao produto do comprimento g desta geratriz pelo comprimento $2\pi s$ da circunferência gerada pelo ponto médio da geratriz. Este resultado é um caso particular do Teorema de Papus para superfícies de revolução. (Veja Exercício 9, Seção 13.9.)

Vamos, agora, estender o conceito de área para superfície obtida pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função f, com derivada contínua e $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$.

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Na figura, $f'(c_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$; o segmento $M_{i-1}M_i$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(c_i, f(c_i))$. Então

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = |\sec \alpha_i|\, \Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i.$$

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do segmento $M_{i-1}M_i$ (observe que tal superfície nada mais é do que a superfície lateral de um tronco de cone de geratriz $\overline{M_{i-1}M_i}$) é:

$$2\pi f(c_i)\,\overline{M_{i-1}M_i} = 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

e se Δx_i for suficientemente pequeno esta área será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do trecho do gráfico entre as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$. Observe que trocando $f(c_i)$ por c_i na igualdade acima, $2\pi c_i\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\,\Delta x_i$ será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo y, do trecho do gráfico acima mencionado.

Como a função $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ é contínua em $[a, b]$, teremos

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Definimos a *área* A_x da superfície obtida pela rotação do gráfico de f, em torno do eixo x, por

$$\boxed{A_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

De forma análoga, a *área* A_y da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y, do gráfico de f será

$$\boxed{A_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \text{ onde } y = f(x).}$$

EXEMPLO 1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Solução

$$\text{área} = 2\pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = \cos x;\ du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ x = 0;\ u = 1 \\ x = \pi;\ u = -1. \end{array}}$$

$$= 2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}\,(-\,du) \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = \operatorname{tg}\theta;\ du = \sec^2\theta\,d\theta \\ u = -1;\ \theta = -\frac{\pi}{4} \\ u = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}}$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta.$$

Integrando por partes:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta\sec\theta\,d\theta = \Big[\operatorname{tg}\theta\sec\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sec^3\theta - \sec\theta\right]d\theta.$$

Daí

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = 2\sqrt{2} + \Big[\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

ou seja,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1).$$

Portanto, área $= 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$. ■

EXEMPLO 2. Determine a área da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y, do gráfico de $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Solução

De $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$, vem

$$A_y = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}[2\sqrt{2}-1].$$

■

Exercícios 13.4

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função dada.

   a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

   b) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$ $(R > 0)$

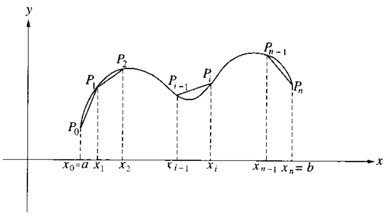
   c) $y = x^2$, $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$

   d) $y = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$

13.5. Comprimento de Gráfico de Função

Seja $y = f(x)$ com derivada contínua em $[a, b]$ e seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Indicando por $L(P)$ o comprimento da poligonal de vértices $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots n$, temos

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$



onde $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ é o comprimento do lado de vértices P_{i-1} e P_i. Pelo teorema do valor médio, para cada i, $i = 1, 2, \ldots n$, existe c_i, $x_{i-1} < c_i < x_i$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i, \text{ onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Segue que

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\,\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i.$$

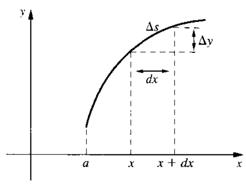
Daí, para máx Δx_i tendendo a zero, $L(P)$ tenderá para $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Nada mais natural, então, do que definir o *comprimento* do gráfico de f, ou da *curva* $y = f(x)$, por

$$\boxed{\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Nosso objetivo a seguir é interpretar geometricamente a diferencial $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$. Seja, então, $s = s(x)$, $x \in [a, b]$, o comprimento do trecho do gráfico de extremidades $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Sejam Δs e Δy as variações em s e y correspondentes à variação dx em x, com $dx > 0$. Para dx suficientemente pequeno, $\Delta y \approx dy$ e

$\Delta^2 s \approx d^2 x + \Delta^2 y$, ou seja,

$$\Delta s \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



EXEMPLO. Calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Solução

De $\dfrac{dy}{dx} = x$, segue que o comprimento é: $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$. Fazendo a mudança de variável $x = \operatorname{tg} u$, vem

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\operatorname{tg} u)^2}\, \sec^2 u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u\, du.$$

De $\int \sec^3 u\, du = \dfrac{1}{2}\sec u \operatorname{tg} u + \dfrac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + k$ (verifique), resulta

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

■

Exercícios 13.5

1. Calcule o comprimento do gráfico da função dada.

a) $y = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

b) $y = \dfrac{4}{3} x + 3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

c) $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$

d) $y = \sqrt{x}$, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}$

e) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

f) $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

2. Quantos metros de chapa de ferro são necessários para construir um arco AB, de forma parabólica, sendo A e B simétricos com relação ao eixo de simetria da parábola e com as seguintes dimensões: 2 m a distância de A a B e 1 m a do vértice ao segmento AB.

13.6. Comprimento de Curva Dada em Forma Paramétrica

Por uma *curva* em $\mathbb{R}^2$ entendemos uma função que a cada t pertencente a um intervalo I associa um ponto $(x(t), y(t))$ em $\mathbb{R}^2$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções definidas em I. Dizemos que

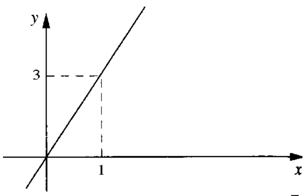
$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

são as *equações paramétricas* da curva. Por abuso de linguagem, vamos nos referir ao *lugar geométrico* descrito pelo ponto $(x(t), y(t))$, quando t percorre o intervalo I, como sendo a *curva* de equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

EXEMPLO 1. Desenhe a curva dada em forma paramétrica por $x = t$, $y = 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

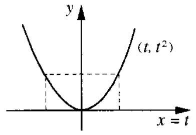
Solução

$x = t$, $y = 3t \Rightarrow y = 3x$. Quando t percorre $\mathbb{R}$, o ponto $(t, 3t)$ descreve a reta $y = 3x$.



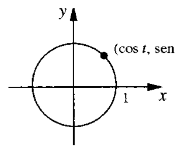
■

EXEMPLO 2. Seja a curva de equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, t em $\mathbb{R}$. Quando t varia em $\mathbb{R}$, o ponto (t, t^2) descreve a parábola $y = x^2$.



■

EXEMPLO 3. Seja a curva de equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$. Quando t varia em $[0, 2\pi]$, o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ descreve a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

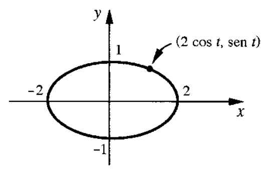


■

EXEMPLO 4. Desenhe a curva dada em forma paramétrica por $x = 2\cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



Assim, para cada $t \in [0, 2\pi]$ o ponto $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$ pertence à elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Por outro lado, para cada (x, y) na elipse, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \text{(por quê?)}$$

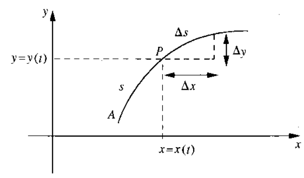
Assim, quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, o ponto $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$ descreve a elipse. ■

Nosso objetivo a seguir é estabelecer a fórmula para o cálculo do comprimento de uma curva dada em forma paramétrica. A fórmula será estabelecida a partir de considerações geométricas, e deixamos o tratamento rigoroso do assunto para o Vol. 2.

Suponhamos que $s = s(t)$, $t \in [a, b]$, seja o comprimento do trecho da curva de extremidades $A = (x(a), y(a))$ e $P(t) = (x(t)\, y(t))$, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são supostas de classe C^1. Sejam Δx, Δy e Δs as variações em x, y e s correspondentes à variação Δt em t, com $\Delta t > 0$. Para Δt suficientemente pequeno, vemos, pela figura, que

$\Delta^2 s \approx \Delta^2 x + \Delta^2 y$ e, portanto,

$$\Delta s \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\ \Delta t.$$



É razoável, então, esperar que a diferencial da função $s = s(t)$ seja

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt.$$

Definimos então o comprimento da curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, com $x = x(t)$ e $y = y(t)$ de classe C^1 em $[a, b]$, por

$$\boxed{\text{comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt}$$

Observação. O gráfico da função $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, pode ser dado em forma paramétrica por $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. Segue que a fórmula para o comprimento do gráfico de uma função é um caso particular desta.

EXEMPLO 5. Calcule o comprimento da circunferência de raio $R > 0$.

Solução Ler todo.

Uma parametrização para a circunferência de raio R e com centro na origem é: $x = R \cos t$ e $y = R$ sen t, com $t \in [0, 2\pi]$. De $\frac{dx}{dt} = -R \operatorname{sen} t$ e $\frac{dy}{dt} = R \cos t$, segue

$$\text{comprimento} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \operatorname{sen} t)^2 + (R \cos t)^2}\ dt.$$

Portanto, comprimento $= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\ dt = 2\pi R$. ■

EXEMPLO 6. As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano são

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

a) Quais as posições da partícula nos instantes $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \pi$?
b) Qual a trajetória descrita pela partícula?
c) Qual a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$?

Solução

a) No instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $(0, 0)$, em $t = \frac{\pi}{2}$ na posição $(1, 1)$ e, no instante $t = \pi$, novamente na posição $(0, 0)$.

b) $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow y = x^2$. Segue que a partícula, de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2}$, descreve o arco da parábola de extremidades $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e no sentido de $(0, 0)$ para $(1, 1)$. De $t = \frac{\pi}{2}$ a $t = \pi$ descreve o mesmo arco só que em sentido contrário.

c) A distância d percorrida entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$ é dada por

$$d = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t + (2 \operatorname{sen} t \cos t)^2}\ dt$$

ou seja

$$d = 2\int_0^{\pi/2} |\cos t| \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen}^2 t}\ dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen}^2 t}\ dt.$$

Observe que as distâncias percorridas entre os instantes $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$ é a mesma que de $t = \frac{\pi}{2}$ a $t = \pi$. Observe ainda que $|\cos t| = \cos t$, para $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Fazendo a mudança de variável $u = 2 \operatorname{sen} t$ teremos $du = 2 \cos t\ dt$, $u = 0$ para $t = 0$ $u = 2$ para $t = \frac{\pi}{2}$. Assim, $d = \int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\ du$. Fazendo, agora, $u = \operatorname{tg} \theta$, teremos

$$d = \int_0^{\text{arc tg } 2} \sec^3 \theta\ d\theta = \frac{1}{2}[\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|]_0^{\text{arc tg } 2}.$$

Como $\theta = \text{arc tg } 2 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 2$ e $\sec \theta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{5}$, resulta que a distância percorrida pela partícula é $d = \frac{1}{2}[2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})]$. ■

Exercícios 13.6

1. Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica. Lista

a) $x = 2t + 1$ e $y = t - 1$, $1 \leqslant t \leqslant 2$
b) $x = 3t$ e $y = 2t^{\frac{3}{2}}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
c) $x = 1 - \cos t$ e $y = t - \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$
d) $x = \frac{t^2}{2}$ e $y = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
e) $x = e^t \cos t$ e $y = e^t \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

2. Uma partícula desloca no plano com equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Sabe-se que, para todo t, $\frac{dx}{dt} = 2\ (\text{cm/s})$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -2(\text{cm/s}^2)$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 4\ (\text{cm/s})$. Sabe-se, ainda,