Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULAS - 30/04/2019 e 02/05/2019

Definição: (Relação de Ordem Parcial)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO $\mathcal{R}$ em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL (ou PARCIALMENTE ORDENADA) se, e somente se, $\mathcal{R}$ é *reflexiva*, *anti-simétrica* e *transitiva*, simultaneamente.
Notação: $\preccurlyeq$
Dizemos ainda que A é um CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO (**POSET**) pela relação $\mathcal{R}$.
Notação: $(A, \preccurlyeq)$

Observação: $\forall x, y \in A; x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$.
Exemplos: As relações definidas abaixo são *reflexivas*, *anti-simétricas* e *transitivas*; isto é, são RELAÇÕES DE ORDEM PARCIAL.

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mid x \mid y\}$
3. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.
   $\mathcal{T} = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid x \subseteq y\}$

Relação - Ordem Parcial

Observação: O termo PARCIAL é utilizado porque nem todos os elementos do conjunto A estão relacionados, isto é, pode haver pares ordenados **incomparáveis**.
Se todos os pares ordenados são **comparáveis**; ou seja, A é reflexiva, anti-simétrica, transitiva e conectada, simultaneamente, dizemos que a relação é de ORDEM TOTAL (ou ORDEM LINEAR); e A é dito ser TOTALMENTE ORDENADO (ou ORDENADO LINEARMENTE); ou ainda, dizemos que A é uma "CADEIA".
Exemplos:

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$; $(A, \leq)$ é um POSET totalmente ordenado, pois podemos comparar todos os seus elementos.
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mid x \mid y\}$; $(A, \mid)$ é um POSET mas **não** é totalmente ordenado. Nem todos os elementos estão relacionados.

Relação de Ordem - Diagrama de Hasse

Definição: (Diagrama de Hasse)

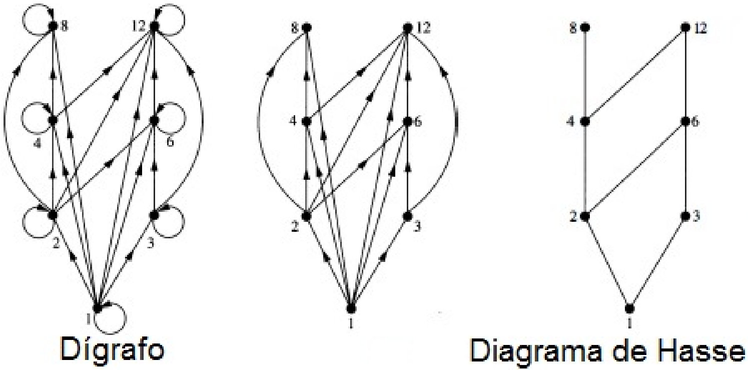
Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja a RELAÇÃO finita $\mathcal{R}$ em A; tais que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL e A um POSET.

Podemos representar esta relação por um DIAGRAMA DE HASSE.

O diagrama é construído a partir do dígrafo que representa a relação do seguinte modo:

1. Eliminamos todos os *laços*(loops) do dígrafo, ou seja, todos os arcos que representam os pares ordenados $\langle x_i, x_i \rangle \in \mathcal{R}$.
2. Eliminamos todos os arcos que representam a transitividade entre os pares ordenados; $\langle x_i, x_j \rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle x_j, x_k \rangle \in \mathcal{R}$, excluimos o arco $\langle x_i, x_k \rangle \in \mathcal{R}$.
3. Eliminamos todas as setas dos arcos direcionados.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \mid y\}$;
$(A, \mid)$ é um POSET parcialmente ordenado.



Exemplos: Seja $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T} = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid x \subseteq y\}$

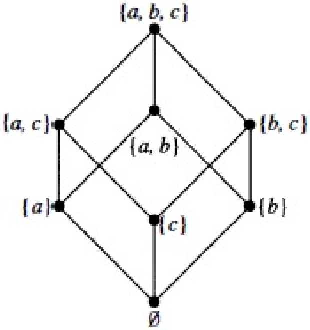


Diagrama de Hasse de

$(\{a,b,c\}, \subseteq)$

Conjunto Parcialmente Ordenado - Elementos Minimal e Maximal

Definição:(ELEMENTO MINIMAL)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, um ELEMENTO MINIMAL de A é qualquer elemento $y \in A$ tal que $\forall a \in A, a\mathcal{R}y \Rightarrow a = y$; isto é, $a \preccurlyeq y \Rightarrow a = y$.

Definição:(ELEMENTO MAXIMAL)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, um ELEMENTO MAXIMAL de A é qualquer elemento $x \in A$ tal que $\forall a \in A, x\mathcal{R}a \Rightarrow a = x$; isto é, $x \preccurlyeq a \Rightarrow a = x$.

Observação: Notamos que não existe elemento *maior* que um elemento maximal, nem há elemento *menor* que um elemento minimal. Todavia, podemos ter mais de um elemento minimal(ou maximal).

Conjunto Parcialmente Ordenado - Elementos Minimal e Maximal

Exemplos:

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid x \leq y\}$
   elemento MINIMAL$= 1$; e, elemento MAXIMAL: não tem.
2. Sejam o conjunto $[0,1] \subset \mathbb{R}$, e $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle \in [0,1] \times [0,1] \mid x \leq y\}$
   elemento MINIMAL$= 0$; e, elemento MAXIMAL $= 1$.
3. $\mathcal{T} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$,
   elemento MINIMAL$=$ não tem; e, elemento MAXIMAL: não tem.
4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação
   $\mathcal{R} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle\}$,
   elemento MINIMAL$= \{1, 2, 5\}$ (observe que não existem pares tais que $\langle a, 2\rangle ; a \neq 2$ para podermos comparar a precedência; o mesmo ocorre para o 1 e 5); e, elemento MAXIMAL $= \{4, 6\}$.

Conjunto Parcialmente Ordenado - Elementos Minimal e Maximal

Exemplo: Sejam $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\mathcal{V} = \{\langle x, y\rangle \in A \mid x \mid y\} =$
$\{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 10\rangle, \langle 2, 12\rangle, \langle 2, 20\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 12\rangle, \langle 4, 20\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 5, 10\rangle,$
$\langle 5, 20\rangle, \langle 5, 25\rangle, \langle 10, 10\rangle, \langle 10, 20\rangle, \langle 12, 12\rangle, \langle 20, 20\rangle, \langle 25, 25\rangle\}$.

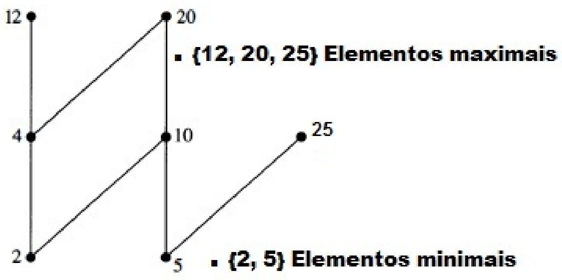


Diagrama de Hasse

Conjunto Parcialmente Ordenado - Mínimo e Máximo

Definição: (MÍNIMO)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, dizemos que o ELEMENTO MÍNIMO de A é o elemento c tal que $\forall x \in A, c\mathcal{R}x$; isto é, $c \preccurlyeq x$ (ou seja, todos os elementos de A são *sucessores* ou iguais ao c).

Definição: (MÁXIMO)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Se A for um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\mathcal{R}$, dizemos que o ELEMENTO MÁXIMO de A é o elemento b tal que $\forall x \in A, x\mathcal{R}b$; isto é, $x \preccurlyeq b$ (ou seja, todos os elementos de A são *precedentes* ou iguais ao b).

Observação: Se existe apenas um elemento maximal então este será o máximo de A; e se existe apenas um elemento minimal então este será o mínimo de A.

Conjunto Parcialmente Ordenado - Máximo e Mínimo

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, e seja $\mathcal{P}(A)$ um conjunto com os elementos ordenados por inclusão $\subseteq$:
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ Então, o subconjunto de A: $\{0, 1, 2\}$ é um **elemento máximo** do conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$ pois nenhum outro o contém; e, ele contém todos os outros. Enquanto que, o conjunto $\emptyset$ é um elemento **mínimo** pois todos os outros o contém; e, ele não contém outro conjunto diferente dele.

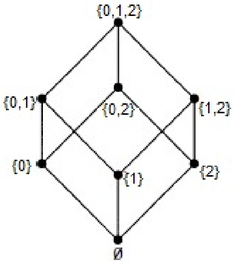


Diagrama de Hasse de
$(P(\{0,1,2\}), \subseteq)$

Conjunto Parcialmente Ordenado - Minorante e Majorante

Definição: (Minorante)

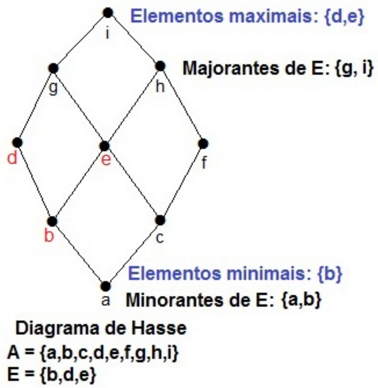
Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preccurlyeq$; e seja $E \neq \emptyset; E \subseteq A$ dizemos que um ELEMENTO MINORANTE (ou COTA INFERIOR) de E é o elemento $\alpha \in A$ tal que $\forall x \in E; \alpha \preccurlyeq x$ (Ou seja, qualquer elemento $\alpha \in A$ tal que todos os elementos de E são *sucessores* ou iguais ao α).

Definição: (Majorante)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preccurlyeq$; e seja $E \neq \emptyset; E \subseteq A$ dizemos que um ELEMENTO MAJORANTE (ou COTA SUPERIOR) de E é o elemento $\beta \in A$ tal que $\forall x \in E; x \preccurlyeq \beta$ (Ou seja, qualquer elemento $\beta \in A$ tal que todos os elementos de E são *precedentes* ou iguais ao β).

Conjunto Parcialmente Ordenado - Minorante e Majorante

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, d, e\}$.



Observação: O conjunto E não tem *máximo* e o *mínimo* é o elemento b.

Conjunto Parcialmente Ordenado - Ínfimo e Supremo

Definição: (Ínfimo)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preccurlyeq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$, denotamos por $inf(E)$ e denominamos ÍNFIMO (ou limitante inferior, ou maior cota inferior) de E o elemento $\epsilon \in A$ tal que ϵ é o *maior* de todos os minorantes de E (ou seja, todos os minorantes de E são *precedentes* ou iguais ao ϵ).

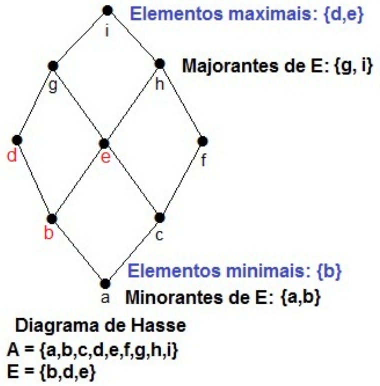
Definição: (Supremo)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO pela relação $\preccurlyeq$; e seja $E \neq \emptyset$; $E \subseteq A$, denotamos por $sup(E)$ e denominamos SUPREMO (ou limitante superior ou menor cota superior) de E o elemento $s \in A$ tal que s é o *menor* de todos os majorantes de E (ou seja, todos os majorantes de E são *sucessores* ou iguais ao s).

Observação: Se o ínfimo ou o supremo de E existe, então eles são únicos.

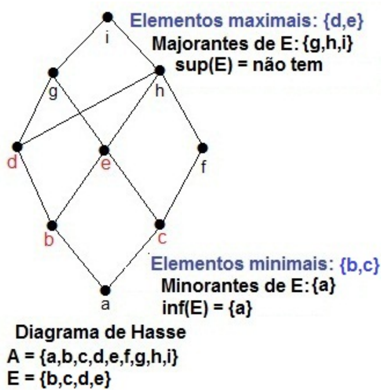
Conjunto Parcialmente Ordenado - Ínfimo e Supremo

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, d, e\}$.



Observação: Neste exemplo, $sup(E) = g$ e $inf(E) = b$.

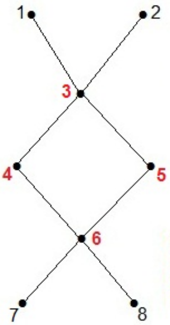
Exemplo: Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{b, c, d, e\}$.



Observação: Neste exemplo, $sup(E) =$**Não tem** e $inf(E) = a$.

Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{3, 4, 5, 6\}$.



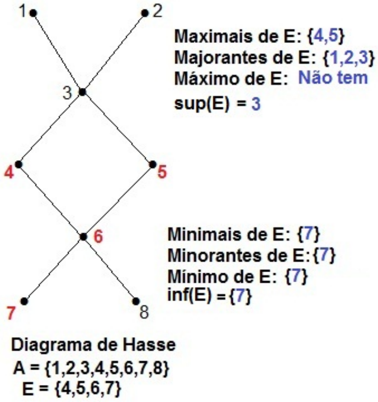
Maximais de E: {3}
Majorantes de E:{1,2,3}
Máximo de E: {3}
sup(E) = 3

Minimais de E: {6}
Minorantes de E: {6,7,8}
Mínimo de E: {6}
inf(E) = 6

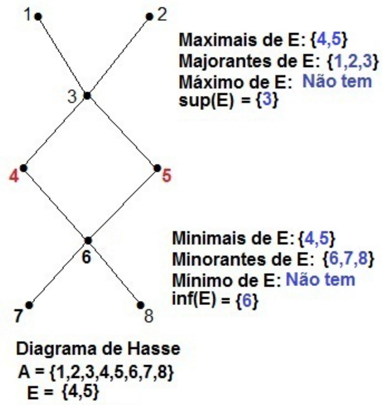
Diagrama de Hasse
A = {1,2,3,4,5,6,7,8}
E = {3,4,5,6}

Conjunto Parcialmente Ordenado

Exemplo: Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{4, 5, 6, 7\}$.



Exemplo: Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ parcialmente ordenado pela relação, $\mathcal{R}$ apresentada no Diagrama de Hasse abaixo; e seja $E = \{4, 5\}$.

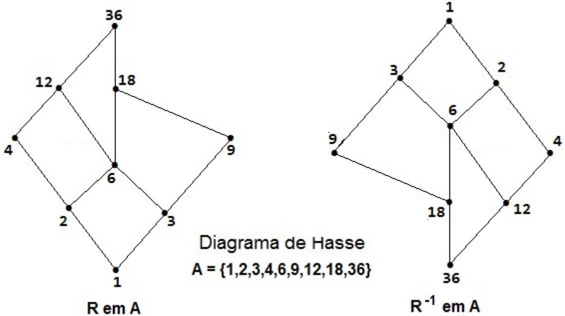


Relação de Ordem Parcial - Relação Inversa

Teorema: (Relação Inversa - Ordem Parcial)

Sejam $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e $\mathcal{R}$ em A uma relação de ordem parcial. Então, $\mathcal{R}^{-1}$ é uma RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL em A; ou seja, $\mathcal{R}^{-1}$ é *reflexiva*, *anti-simétrica* e *transitiva*, simultaneamente.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ o conjunto dos divisores positivos de 36 parcialmente ordenado por $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \mid y\}$ então, $\mathcal{R}^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in A \times A \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$



Definição:(Relação de Ordem Estrita)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ um conjunto PARCIALMENTE ORDENADO. Dizemos que a relação $\prec$ em A é uma relação de ORDEM ESTRITA se, e somente se,
$\forall x, y \in A; x \prec y \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y) \wedge \neg(x = y)$.
lê-se: $x \prec y$; "x PRECEDE ESTRITAMENTE y".

Observação: A relação de ORDEM ESTRITA é irreflexiva.

Definição:(Relação de Ordem Lexcográfica)

Sejam $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ conjuntos PARCIALMENTE ORDENADOS e $\prec^A$ e $\prec^B$ suas relações de ordem estrita.
Dizemos que a relação de ordem $\prec$ é uma relação de ORDEM LEXICOGRÁFICA(ou "DICIONÁRIO") sobre $A \times B$ se, e somente se,
$(\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B)(\langle a_1, b_1 \rangle \prec \langle a_2, b_2 \rangle) \Rightarrow (a_1 \prec^A a_2) \vee$
$((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \prec^B b_2))$.

Ordenamento Lexicográfico

Observação:
A Relação de Ordem Lexcográfica pode ser estendida no produto cartesiano de n conjuntos parcialmente ordenados:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\mathcal{U});$$

onde, $\prec^{A_1}, \prec^{A_2}, \ldots, \prec^{A_n}$ são suas relações de ordem estrita.
Esta relação $\prec$ é uma relação de ordem lexicográfica sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se, e somente se,
$(\forall \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle, \left\langle a_1^{'}, a_2^{'}, \ldots, a_n^{'}\right\rangle \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n);$
$(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \prec \left\langle a_1^{'}, a_2^{'}, \ldots, a_n^{'}\right\rangle) \Rightarrow (a_1 \prec^{A_1} a_1^{'}) \vee$
$((a_1 = a_1^{'}) \wedge (a_2 \prec^{A_2} a_2^{'})) \vee \cdots \vee ((a_1 = a_1^{'}, \ldots, a_{n-1} = a_{n-1}^{'}) \wedge (a_n \prec^{A_n} a_n^{'})).$

Ordenamento Lexicográfico

Exemplos: Seja o conjunto do alfabeto comum, ordenado na forma usual: $A = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$.
Então, neste caso, o produto cartesiano: $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ \ vezes}$ pode representar o conjunto de todas as palavras de comprimento n.
Ao definirmos uma relação de ordem lexicográfica em A^n (ou seja, uma relação n-ária) como sendo a "ordem de precedência das palavras numa lista de ordem alfabética"; temos uma palavra $p_1 \prec p_2$.
Por exemplo, as palavras;
$p_1 = \langle l, i, v, r, e\rangle$ e $p_2 = \langle l, i, v, r, o\rangle$; *livre* $\prec$ *livro*
$p_1 = \langle f, i, r, m, a\rangle$ e $p_2 = \langle f, o, r, m, a\rangle$; *firme* $\prec$ *forma*
$p_1 = \langle b, a, r, r, o\rangle$ e $p_2 = \langle c, a, r, r, o\rangle$; *barro* $\prec$ *carro*