p, q proposições

$\{0, 1\}$ valores de verdade

$\neg p, \; p \to q, \; p \wedge q, \; p \vee q$

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \to q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ (conectivos)

$=$ (predicado binário)

$\forall, \exists$ (quantificadores)

símbolos lógicos

s (símbolo funcional unário)

0 (constante)

símbolos próprios da PA

$($, $)$ parênteses e variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x, y, z, \ldots)$

Termos:

(1) Toda variável e toda constante são termos.

(2) Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e f é um símbolo funcional n-ário, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

(3) Todos os termos são obtidos por meio de uma quantidade finita de aplicações de (1) e (2).

Termos da PA: $0, x_1, x_2, \ldots, s(0), s(x_1), s(x_2), \ldots, ss(0), ss(x_1) \ldots$

Fórmulas atômicas.

Para todo predicado n-ário P, dados os termos $t_1, \dots, t_n$, $P(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula atômica e todas as fórmulas atômicas são deste tipo.

F. at. da PA : $t_1 = t_2$ com t_1 e t_2 termos.

Fórmulas:

(1) Toda fórmula atômica é uma fórmula.

(2) Sejam φ, ψ fórmulas e seja x uma variável "livre" (ou seja, não previamente quantificada). Então todas as seguintes são fórmulas:

$$\varphi \to \psi,\ \neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \forall x\, \varphi,\ \exists x\, \varphi.$$

(3) Todas as fórmulas são obtidas aplicando (1) e (2) uma quantidade finita de vezes.

Ex.

$$\forall x\, \exists y\, \big((s(x) = y) \rightarrow (z = x \vee z = y) \big)$$

$\downarrow$ (2) duas vezes: $\forall x$, $\exists y$

$$(s(x) = y) \rightarrow (z = x \vee z = y)$$

$\downarrow$ (2)

$\underbrace{s(x) = y}_{\text{fórm. at.}}$ e $z = x \vee z = y$

$\downarrow$ (2)

$\underbrace{z = x}_{\text{f.a.}}$ e $\underbrace{z = y}_{\text{f.a}}$

__Ex.__

$$\exists x \left(z = s(x) \to x \right)$$

não é uma fórmula!

$$\Big\downarrow (2) \quad \exists x$$

$$z = s(x) \to x$$

$$\Big\downarrow (2)$$

$\underbrace{z = s(x)}_{\text{f.a.}}$ e x não é fórmula

Linguagem, fórmulas.

Axiomas próprios de PA

(PA1) $\forall x \neg(s(x) = 0)$ (zero não é sucessor de ninguém)

(PA2) $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \to x = y)$ (números diferentes têm sucessores diferentes)

(PA3) Para toda fórmula $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ na variável livre x e nas variáveis vinculadas $x_1, \ldots, x_n$, vale:

$$\left(\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \left(\forall x \left(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(s(x), x_1, \ldots, x_n)\right)\right)\right) \to$$

$$\to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{(princípio de indução)}$$

Seja P uma propriedade sobre os números (dep. de uma variável)

$$\Big(\underbrace{P(0)}_{\text{vale para zero}} \wedge \big(\underbrace{\forall x \,(P(x) \to P(s(x)))}_{\text{a validade passa ao sucessor}}\big)\Big) \overset{\text{então}}{\to} \underbrace{\forall x\, P(x)}_{\text{vale para todos}}$$

cai a primeira peça

cada peça é perto da seguinte de maneira que, se ela cair, a seguinte também cai

caem todos

Sejam $+$ e $\cdot$ dois símbolos funcionais binários

(S1) $\forall x\,(x + 0 = x)$

(S2) $\forall x\, \forall y\,(x + s(y) = s(x+y))$

(P1) $\forall x\,(x \cdot 0 = 0)$

(P2) $\forall x\, \forall y\,(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$

Teorema da PA: $\forall x \forall y \forall z \left((x+y)+z = x+(y+z) \right)$

Indução em z, ou seja, vou provar os seguintes:

Base de indução: $\forall x \forall y \left((x+y)+0 = x+(y+0) \right)$

Passo de indução: $\forall x \forall y \left(\left((x+y)+z = x+(y+z) \right) \to \left((x+y)+s(z) = x+(y+s(z)) \right) \right)$

Base: $(x+y)+0 \overset{(S1)}{=} x+y \overset{(S1)}{=} x+(y+0)$

Passo: Hp.: $(x+y)+z = x+(y+z)$

Tese: $(x+y)+s(z) = x+(y+s(z))$

$$(x+y)+s(z) \stackrel{(S2)}{=} s((x+y)+z) \stackrel{HP}{=} s(x+(y+z)) \stackrel{(S2)}{=}$$

$$= x+s(y+z) \stackrel{(S2)}{=} x+(y+s(z))$$

Pelo axioma (PA3), vale: $\forall x \forall y \forall z\, ((x+y)+z = x+(y+z))$.

<u>Teorema</u> $\forall x \left(x = 0 \lor \exists y \left(x = s(y) \right) \right)$

Base: $0 = 0 \lor \exists y \left(0 = s(y) \right)$ ✓ óbvio

Passo: $\left(x = 0 \lor \exists y \left(x = s(y) \right) \right) \rightarrow \left(s(x) = 0 \lor \underbrace{\exists y \left(s(x) = s(y) \right)} \right)$

$s(x) = s(x)$

é verificada com $y = x$.