Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

São equações da forma

(1.1) $$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

onde $x^{(n)}(t)$ indica a n-ésima derivada de $x(t)$.

A EDO (1.1) é chamada de linear quando se apresenta como:

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)\, y = F(t)$$

onde $a_k(t)$ são funções e $y^{(n)} = y^{(n)}(t)$.

EDO linear de 1ª ordem

São as equações

(1.2) $$a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = g(t) \iff y' + p(t)\, y = f(t)$$

onde $p(t) = a_2(t)/a_1(t)$ e $f(t) = g(t)/a_1(t)$.

Uma solução de (1.2) é uma função $y(t)$ que satisfaz (1.2). Solução geral é o conjunto de todas as soluções.

Solução geral de (1.2)

(1.3) $$y(t) = e^{-h}\left(\int e^{h} f(t)\, dt + c\right)$$

onde $h(t) = \int p(t)\, dt$ (fixe uma primitiva).

Fator integrante: chamamos $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ de fator integrante. O nome vem da seguinte técnica para se provar (1.3). Ao multiplicar ambos os lados de $y' + p(t)y = f(t)$ por $\mu(t)$ obtemos

$$\mu(t)y'(t) + \underbrace{p(t)\mu(t)}_{\mu'(t)}y(t) = \mu(t)f(t)$$

$$\mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = \mu(t)f(t) \iff [\mu(t)y(t)]' = \mu(t)f(t)$$

Integrando de ambos os lados: $\mu(t)y(t) = \int \mu(t)f(t)\,dt + c$. Como $\mu(t) = e^{h(t)}$

$$e^{h}y(t) = \int e^{h}f(t)\,dt + c)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-h}\left(\int e^{h}f(t)\,dt + c\right)$$

o que demonstra (1.3).

Exemplo: encontre a solução geral da equação

$$y' + 2t\,y = t.$$

Temos de (1.3), $h = \int 2t\,dt = t^2$ e

$$y(t) = e^{-h}\left(\int e^{h}t\,dt + c\right) = e^{-t^2}\left(\int e^{t^2}t\,dt + c\right)$$

$$= e^{-t^2}\left(\tfrac{1}{2}e^{t^2} + c\right) = \frac{1}{2} + c\,e^{-t^2}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo de problema de valor inicial (PVI). Encontre a solução de

$$\text{PVI} \begin{cases} x\,y'(x) - 3\,y(x) = x^4\cos(x) \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$h = \int p(x)dx = \int(-3/x)dx = -3\log(x)$ com $x > 0$. Logo, $\mu(x) = e^{h} = x^{-3}$.

$$y(x) = x^3\left(\int x^{-3}\,x^3\cos(x)\,dx + c\right)$$

$$= x^3\left(\operatorname{sen}(x) + c\right) = x^3\operatorname{sen}(x) + cx^3.$$

Condição inicial: $y(2\pi)=0 \Longrightarrow c=0$. Portanto, a solução é

$$y = x^3 \operatorname{sen}(x) \qquad \text{(solução do PVI.)} \qquad \blacksquare$$

Equação separável: é toda equação da forma

$$h(y)\cdot y' = f(x)$$

A solução geral é dada pela integração de ambos os lados

$$\int h(y(x))\cdot y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx \iff \int h(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

Exemplo: Encontre a solução geral de

$$x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

Temos

$$x^2 y' = (1-x^2) + y^2(1-x^2) = (1-x^2)(1+y^2)$$

$$\left(\frac{1}{1+y^2}\right)y' = \frac{1-x^2}{x^2} \Longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg}(y) = -x^{-1} - x + c$$

$$\Longrightarrow y = \operatorname{tg}\left(\frac{-1}{x} - x + c\right). \qquad \blacksquare$$

Método de substituição. Se aplica à equações da forma

$$y' = F(ax+by+c) \qquad \text{faça } v(x) = ax+by+c$$

Como $v'(x) = a + b\,y'(x) = a + b\,F(v)$, obtém-se a equação separável

$$\frac{v'-a}{b} = F(v) \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = bF(v) + a$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{bF(v)+a}\,dv = \int dx.$$

Exemplo: $y' = (x+y+3)^2$.

Temos $v = x+y+3$. $\quad v' = 1 + y' = 1 + v^2$. $\quad \int \frac{1}{1+v^2}\, dv = \int dx$

$$\operatorname{arctg}(v) = x + c \implies v(x) = \operatorname{tg}(x+c)$$

$$\implies y(x) = -3 - x + \operatorname{tg}(x+c)$$

(solução geral). $\blacksquare$

Equações homogêneas são da forma

$$y' = f(y/x)$$

Esta equação pode ser resolvida usando a substituição $v = \frac{y}{x}$. Isso funciona pois $x \cdot v = y \Rightarrow v + xv' = y' \Rightarrow v + x \cdot v' = f(v)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v'}{f(v) - v} = \frac{1}{x} \qquad \text{(equação separável)}$$

Exemplo (equação homogênea)

$$2xy \cdot y' = 4x^2 + 3y^2$$

Solução:

$$y' = \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \qquad \text{faça } v = \frac{y}{x}.$$

$$x \cdot v = y \Rightarrow v + x \cdot v' = y' \Rightarrow v + x \cdot v' = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v.$$

- $xv' = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v - v = \frac{2}{v} + \frac{1}{2}v = \frac{4+v^2}{2v}.$

$$\int \frac{2v}{4+v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}.$$

Faça $u = 4 + v^2$ na integral.

$du = 2v\,dv.$

$$\int \frac{du}{u} = \log(4+v^2)$$

$$\log(4+v^2) = \log|x| + c.$$

Como $v = \frac{y}{x}$, $\log(4 + y^2/x^2) = \log|x| + c.$

Forma implícita da solução.

Equação de Bernoulli.

$$y' + p(x)y = y^n f(x).$$

Para resolver, faça a substituição $v = y^{1-n}$. De fato, $v' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$.

Multiplicando a equação por y^{-n} obtemos

$$y^{-n}y' + p(x)\, y^{1-n} = f(x) \Rightarrow \frac{v'}{(1-n)} + p(x)v = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$v' + (1-n)p(x)v = (1-n)f(x)$$

equação linear.

Deste modo, a substituição reduz à uma equação linear, que já sabemos resolver.

Exemplo: $2xy \cdot y' = 4x^2 + 3y^2$.

Temos: $y' = \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy} \Rightarrow y' - \frac{3}{2x}y = 2xy^{-1}$

Bernoulli $n = -1$. $v = y^{1-n} = y^2$.

Logo, $v' = 2yy'$. Muliplicando a equação por y e substituindo, vem

$$v' - \frac{3}{x}v = 4x.$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\log|x|} = |x|^{-3} = x^{-3} \quad (\text{se } x > 0).$$

A solução geral é

$$v = e^{-h}\left(\int e^h f(x)\,dx + c\right) \qquad h = -3\log|x|$$

$$= x^3\left(\int x^{-3} \cdot 4x\, dx + c\right) = x^3(-4x^{-1} + c) = -4x^2 + cx^3.$$

Como $v = y^2$, temos $y^2 = -4x^2 + cx^3$. (Forma implícita da solução)

Equação de Ricatti.

(1) $$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x).$$

Se y_0 for uma solução particular de (1) então todas as outras soluções $y(x)$ são encontradas pela substituição

$$y - y_0 = \frac{1}{v}.$$

Antes de ver porque isso funciona <u>sempre</u>, vejamos um exemplo.

<u>Exemplo</u> (Equação de Ricatti). $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$.

$y_0 = x$ é solução. $y - x = \frac{1}{v} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{v^2}v'$

$$\Downarrow$$

$$1 - \frac{1}{v^2}v' = 1 + x^2 - 2x\left(\frac{1}{v} + x\right) + \left(\frac{1}{v} + x\right)^2$$

$$= 1 + x^2 - \frac{2x}{v} - 2x^2 + \frac{1}{v^2} + x^2 + \frac{2x}{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow v' = -1.$$

$$\therefore v = -x + c \Rightarrow y = x + \frac{1}{x-c}.$$

solução geral

<u>Caso geral</u>: Se y e y_0 forem solução de $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$, então $z = y - y_0$ é solução de

$$z' + (P + 2yQ)z - Qz^2 = 0$$

equação de Bernoulli

Fazendo $v = z^{1-n} = z^{-1}$, encontramos uma equação linear em v. Isso mostra porque $y - y_0 = \frac{1}{v}$ resolve a equação de Ricatti.

Equações Exatas. São equações da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \iff M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

onde $\nabla F = (M, N)$, ou seja, $F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = M$ e $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = N$. Se $M_y = N_x$ no plano, sabemos que existe F tal que $\nabla F = (M,N)$. Se a equação for exata então a solução geral (dada de forma implícita) é

$$F(x,y) = C.$$

Vejamos porque:

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \Longrightarrow \int \big(M(x,y(x)) + N(x,y(x))\,y'(x)\big)dx = C$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d}{dx} F(x,y(x))\,dx = C$$

$$\Downarrow$$

$$F_x + F_y \cdot y' = 0 \Longleftarrow \frac{d}{dx} F(x,y(x)) = 0 \Longleftarrow F(x,y) = C$$

Exemplo: $\underbrace{(\cos x + \log y)}_{M}\,dx + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + e^y\right)}_{N}\,dy = 0$

$N_x = 1/y$, $M_y = 1/y \Longrightarrow$ equação é exata e existe $F(x,y)$ tal que $\nabla F = (M,N)$.

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (\cos(x) + \log(y))\,dx = \operatorname{sen}(x) + x\log(y) + g(y).$$

$$F_y = N \Longrightarrow \quad (\operatorname{sen}(x) + x\log(y) + g(y))' = N$$

$$\Longrightarrow x\frac{1}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + e^y \quad \Longrightarrow g'(y) = e^y \Longrightarrow g(y) = e^y.$$

$$\therefore\ F(x,y) = \operatorname{sen}(x) + x\log(y) + e^y = c$$

solução

Fator integrante para equações exatas. É usado quando

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \underline{\text{não}}\ \text{é exata}$$

MAS: $\dfrac{N_x - M_y}{M} = f(y)$ é função apenas de y OU

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = g(x)$ é função de x.

Neste caso, basta multiplicar $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ por $\mu(y) = e^{\int f(y)\,dy}$ ou $\mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}$ que a equação

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

torna-se exata (verifique).

Exemplo: $\underbrace{(4x^2 + 3\cos(y))}_{M}\,dx - \underbrace{x\operatorname{sen}(y)}_{N}\,dy = 0$

$$M_y = -3\operatorname{sen}(y) \quad \text{e} \quad N_x = -\operatorname{sen}(y).$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-3\operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(y)}{-x\operatorname{sen}(y)} = \frac{-2\operatorname{sen}(y)}{-x\operatorname{sen}(y)} = \frac{2}{x}.$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\log(x)} = x^2$$

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \iff x^2(4x^2 + 3\cos(y))\,dx - x^2 x\operatorname{sen} y\,dy = 0$$

$$F_y = -x^3\operatorname{sen}(y) \Rightarrow F(x,y) = x^3\cos(y) + g(x)$$

$$F_x = 4x^4 + 3x^2\cos(y) \Rightarrow 3x^2\cos(y) + g'(x) = 4x^4 + 3x^2\cos(y)$$

$$g'(x) = 4x^4 \Rightarrow g(x) = \frac{4x^5}{5}.$$

<u>Conclusão</u>: $F(x,y) = x^3\cos(y) + \frac{4x^5}{5} + c = 0$

solução geral

Fim do curso