Exercício 2 - Teoria dos Grafos

João Lucas Lima de Melo

November 2022

Exercício 6: Seja G um grafo 2k-regular conexo onde $k \geq 1$. Logo, todos os vértices possuem grau par.

Um grafo G é euleriano se, e somente se, todos os vértices possuem grau par. Logo, G é um grafo euleriano, possuindo uma trilha euleriana fechada.

Podemos construir um grafo G' através da divisão de todos os vértices $v \in V(G)$ em v' e v'' (abstrações para vértices de entrada e de saída em um grafo direcionado, respectivamente) e reconstruindo as arestas de tal forma que uma aresta uv em G seja representada em G' por $u'v''$.

Pela construção de G', onde consideramos a construção das arestas de um u' a um v'', foram iteradas k arestas de cada vértice. Além disso, os vértices de G' estão particionados em dois conjuntos X e Y tais que representam abstrações de vértices de entrada e saída de um direcionamento, respectivamente. Portanto, G' é k-regular bipartido.

Pelo exercício 5, temos que G' possui k emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Ao retornar todos os vértices v', v'' de G' em um único vértice v e reconstruindo suas arestas, retornamos ao grafo G. Podemos mapear todos os k emparelhamentos perfeitos em G' em k 2-fatores de G.

Exercício 7:
1. Pelo teorema de Konig-Egrváry, um grafo G bipartido possui cardinalidade de um emparelhamento máximo igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de G.

Dado um grafo bipartido G, um dado vértice $v \in V(G)$ pode ser adjacente a, no máximo, $\Delta(G)$ arestas. A quantidade mínima de vértices cobertos em um emparelhamento pode ser expressa por $e(G)/\Delta(G)$.

Uma vez que a cardinalidade da cobertura mínima de G é dada por $e(G)/\Delta(G)$, pelo teorema de Konig-Egrváry, temos que este é também o tamanho da cardinalidade do emparelhamento máximo M sobre G.

2.

Seja $K_{n,n}$ um grafo bipartido completo com n vértices em ambas as partições. Todo subgrafo G' de $K_{n,n}$ terá, no máximo, n arestas adjacentes.

Pelo item anterior, temos que o tamanho do emparelhamento de um grafo bipartido G é, pelo menos, $e(G)/\Delta(G)$.

Suponhamos que G' tenha mais que $k-1$ arestas. O tamanho do emparelhamento de G' pode ser expresso por $(k-1).(n+1)/n = k$, tal que $e(G) \geq (k-1).(n+1)$. Portanto, pelo item anterior, segue que G' possui emparelhamento de tamanho ao menos k.

Exercício 8:
Um grafo G é k-conexo se, e somente se, entre qualquer par de vértices existem k caminhos dois a dois internamente disjuntos nos vértices.

Seja G um grafo conexo com pelo menos quatro vértices. Construiremos G' a partir da adição de uma aresta entre u, v, para quaisquer vértices $u, v \in V(G)$ sempre que $d_G(u, v) = 2$.

Uma vez que G' é construído através da adição de arestas em G, sendo G conexo, G' também o é.

Sejam x, y dois vértices em G. Sendo G conexo, há um caminho $v_1, v_2, ..., v_k$ entre x, y. Pela construção de G', o caminho $v_1, v_2, ..., v_k$ entre x, y em G também existe em G'.

Como em G' há ainda uma aresta para todo par de vértices u, v onde $d_G(u, v) = 2$, há dois u,v-caminhos internamente disjuntos em G'.

Para dois vértices quaisquer $x, y \in V(G)$ onde $d_G(x, y) \neq 2$, podemos considerar uma análise para um vértice y a uma distância par de x e y' a uma distância ímpar de x.

Para y vértice a uma distância par de x, há um caminho dado por $v_1, v_2, ..., v_k$, em função da conectividade de G que foi herdada em G'. Há um outro caminho dado pelas arestas adicionadas em G', de tal forma que é considerada as arestas xv_2, v_2v_4 até um certo $v_{2i}y$. Portanto, para x, y a uma distância par, há dois x,y-caminhos internamente disjuntos.

Para y vértice a uma distância ímpar de x, há um caminho dado por $v_1, v_2, ..., v_k$, em função da conectividade de G que foi herdada em G'. Outro caminho pode ser cosntruído através da abordagem para dois vértices a uma distância par, de tal forma que seja consideradas arestas xv_2, v_2v_4 até um certo $v_{2(i-1)}v_{2i}$, onde v_{2i} seja sucessor de y. Construído o caminho de x ao sucessor de y, basta incorporar à ele a aresta $v_{2i}y$. Portanto, para x, y a uma distância ímpar, há dois x,y-caminhos internamente disjuntos.

Logo, como para todo par de vértices em G' conexo há dois caminhos dois a dois internamente disjuntos, segue que G' é 2-conexo.