1. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sempre que $p > 1$ e diverge se $0 \leq p \leq 1$.

2. Demonstre a condição de Cauchy: Se $\{s_n\}_{\in \mathbb{N}^+}$ é uma sequência de números reais, a série $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ é convergente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $|s_m - s_n| < \varepsilon$ sempre que $m,\ n > n_0$.

3. Determine a convergência das séries: **1.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9\sqrt{n} - 1}{n^2 + 3, n}$

   2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\text{Ln}(n+1)}$

4. Suponhamos temos uma série de termo geral a_n de modo que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Demonstre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ também converge.

5. Verificar que o produto infinito $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ com $a_n > 0$ converge sempre $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

6. Demonstre que se $\{a_n\}_{\in \mathbb{N}^+}$ é uma sequência com $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{\in \mathbb{N}^+}$ é limitada.

7. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre o seguinte:

   1. Se as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são convergentes, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n$ também convergem.

   2. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e convergente e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

   3. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente e $\beta \neq 0$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \beta \cdot a_n$ é também divergente.

8. Critério de comparação: Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Demonstre o seguinte:

1. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

2. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e $a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também diverge.

9. Demonstre que, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente e: $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

10. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries absolutamente convergentes, demonstre o seguinte:

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente.

2. O produto $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente, e:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)$$

11. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tais que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries e $|a_n| \leq K|b_n|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+, \quad K > 0$:

1. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é absolutamente convergente.

2. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é absolutamente convergente.

12. Demonstre que uma série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é absolutamente convergente, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente.

13. Critério de Leibniz: Seja a série alternada $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ uma série de termos alternados, com $a_n \geq 0$. Demonstre que esta série que satisfaz as condições:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ é decrescente. **2.** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

14. Critério D'Alembert's: Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$ e suponhamos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \in \mathbb{R}$. Demonstre o seguinte:

1. Se $r < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

2. Se $r > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

15. Critério de Cauchy: Suponhamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$. Demonstre o seguinte:

1. Se $r < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

2. Se $r > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

16. Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponhamos que f seja não negativa e monótona decrescente; isto é:

1. $f(x) \geq 0, \ \forall\, x \geq 1.$ **2.** $f(x) \geq f(y)$, sempre que $1 \leq x \leq y$.

Nessas condições, demonstre que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente se e somente se, a integral $\int\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ for convergente.

17. Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponhamos que $f(x)$ seja não negativa e monótona decrescente. Demonstre que se a integral $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge, e: $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx.$

18. Critério de comparação no limite: Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos e seja $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Se $L > 0$, então as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

2. Se $L = 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.