

## INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Teoria dos Grafos

Professor: Roberto Freitas Parente

**Entrega:** PDF somente pelo Moodle – Preferencialmente L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**Última atualização:** 14 de setembro de 2022

**Exercício 1** (Entrega: 30 de agosto). Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $A \subseteq [n]$  é livre de soma se para todo  $x, y \in A$  temos que  $x + y \notin A$ . Prove que se  $A \subseteq [n]$  é livre de soma, então  $|A| \leq \lceil n/2 \rceil$ .

- *Dica:* Suponha que  $|A| > \lceil n/2 \rceil$ . Seja  $m = \max A$  e  $B = \{m - a : a \in A\} \setminus \{0\}$ . Chegue na contradição!

**Exercício 2** (Entrega: 06 de setembro). Uma aresta é uma aresta de corte se, e somente se, ela não pertence a um ciclo.

**Exercício 3** (Entrega: 06 de setembro). Prove que todo  $(u, v)$ -passeio contém um  $(u, v)$ -caminho.

**Exercício 4** (Entrega: 20 de setembro). Seja  $v$  um vértice de corte de um grafo simples  $G$ . Prove que  $\bar{G} - v$  é conexo.

**Exercício 5** (Entrega: 22 de setembro). Procure nas referências as definições de “circuito euleriano” em digrafos (seção 1.4 do Livro do Douglas West). Ademais, seja  $d^+(v)$  o **grau de saída** de  $v$  e  $d^-(v)$  o **grau de entrada** de  $v$  (ver definição formal nas referências). Por fim, prove que um digrafo  $D$  é euleriano se, e somente se,  $d_D^+(v) = d_D^-(v)$  para todo vértice  $v$  e o grafo subjacente de  $D$  contém apenas uma componente conexa não trivial.

**Exercício 6** (Entrega: 22 de setembro). Considere um sistema de tráfego aéreo com  $k$  linhas aéreas. Suponha que (i) todo serviço direto entre duas cidades é considerado de ida e volta; (ii) Todo par de cidade tem um serviço direto em pelo menos uma linha aérea. Suponha que também que toda linha aérea não pode esconder um ciclo ímpar de cidades. Em termos de  $k$ , qual é a quantidade máxima de cidades no sistema?

**Dica:** Modele o problema como grafos e utilize resultados visto em sala.