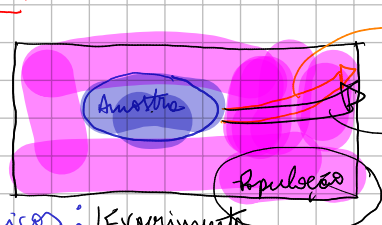


Probabilidade:

Motivação:



Indução / Inferência Indutiva
Desejamos controlar o erro usando probabilidade.

Processo de Generalização: Tem erro!

Conceitos Básicos:

Experimento
Observamento
procedimento que não conseguimos prever o resultado com antecedência.

Medir e Controlar o erro!

Probabilidade

Fenômeno Aleatório:

EX.: Lançamento de um dado.

Superfícies possíveis sobre o pop.
(Se for o de dois nós é fenômeno aleatório / fenômeno determinístico)

Espaco Amostral:

Conjunto de todos os resultados possíveis. Notação: Ω .

EX.: $\Omega = \{\text{face 1, face 2, face 3, face 4, face 5, face 6}\}$

Fenômeno aleatório.

Eventos:

Subconjunto de Ω . Notação: letras maiúsculas do alfabeto latino.

EX.: $A = \{\text{face par}\} = \{\text{face 2, face 4, face 6}\}$

Exemplo:

Fenômeno Aleatório: Lançamento de uma moeda;

Espaco Amostral: $\Omega = \{\text{cara, cora}\}$;

Evento: $A = \{\text{cara}\}$

Probabilidade:

Achar um número que indica a plausibilidade de um evento ser resultado do fenômeno aleatório.

Notação: $P(A)$.

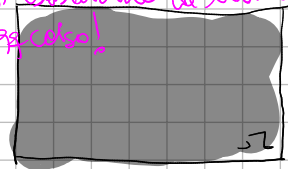
Quanto acreditamos que um ponto de Ω será resultado do fenômeno aleatório!

Axiomas de Probabilidade:

1) $P(A) \in [0, 1]$ (Axiomas de Kolmogorov)

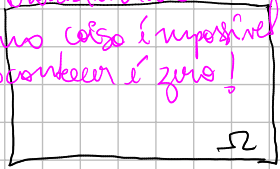
2) $P(\Omega) = 1$

Probabilidade de acontecer algo certo!

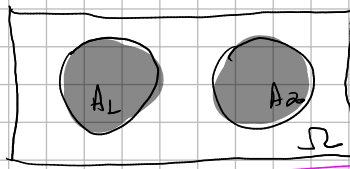


$P(\emptyset) = 0$

Probabilidade de uma coisa impossível acontecer é zero!



3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
disjuntos



\emptyset é o evento impossível.

$\emptyset = \{\text{face que é par e ímpar}\} = \{\}$

Cálculo de Probabilidade:

(Princípio da Equiprobabilidade.) Se Ω é finito, e se cada ponto é igualmente provável de ser resultado do fenômeno aleatório.

Nesse caso:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

EX: Fenômeno aleatório: lançar dado 1
 $A = \{\text{face par}\} = \{\text{face 2, face 4, face 6}\}$
 $n(\Omega) = 6$; $n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = 3/6 = 0,5$

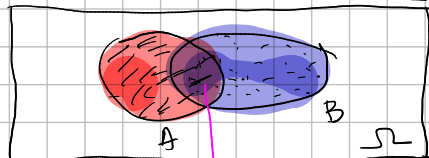
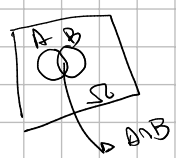
em que $n(A)$ é o número de pontos de A e $n(\Omega)$ é o nº de pontos de Ω .

Propriedades:

(Consequências dos Axiomas de Kolmogorov)

Regra da Adição

(União = "ou os dois"). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



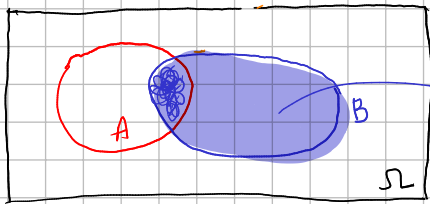
$$\frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} = P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional:

$P(A|B)$: probabilidade de um ponto de A ser resultado do fenômeno aleatório se eu sei de antemão que o resultado do fenômeno aleatório está em B .

$P(A|B)$: Em estatística, falamos probabilidade de A dado B .



$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \cdot 1 = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B) \cdot n(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→ resultado de fenômeno aleatório não ajuda a saber se algum ponto de A será resultado do fenômeno aleatório.

Ex: $B = \{\text{foce por}\}$ / $A = \{\text{foce 2}\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Como calcular $P(A|B)$: $\begin{cases} \cdot P(B) > 0, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ \cdot P(B) = 0, P(A|B) = P(A) \end{cases}$ (Por conveniência) (Semelhante $0^0 = 1$)

Independência: Conhecer que um ponto de B é resultado do fenômeno aleatório não ajuda a saber se algum ponto de A será resultado do fenômeno aleatório.

$\cdot P(A|B) = P(A)$ | $B = \Omega$ | $P(A|B) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$ | $P(A|B) = P(A|B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Regra da Multiplicação: $\begin{cases} \cdot P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \checkmark \\ \cdot P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \checkmark \end{cases}$ | $\cdot P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (A e B são independentes)

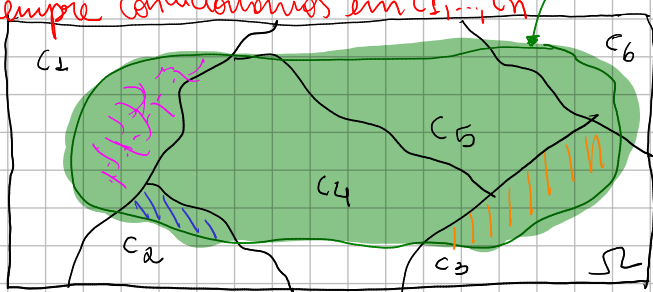
Teorema da Probabilidade Total: C_1, \dots, C_n ; $C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$; $C_1 \cup \dots \cup C_n = \Omega$. Chamamos C_1, \dots, C_n de **partição de Ω** .

Sempre condicionados em C_1, \dots, C_n

$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + P(A \cap C_3) + \dots + P(A \cap C_n)$

$= P(A|C_1)P(C_1) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)$ (Regra da Multiplicação)

Queremos A!



Ex: $\begin{cases} P(A|C_1), P(A|C_2), \dots, P(A|C_n) \\ P(C_1), \dots, P(C_n) \end{cases}$

$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)$

Teorema de Bayes: C_1, \dots, C_n uma partição de Ω .

Sabemos calcular $\begin{cases} P(A|C_1), \dots, P(A|C_n) \\ P(C_1), \dots, P(C_n) \end{cases}$

Estadística Bayesiana

Interpretação: C_1, \dots, C_n : causa / A: efeito

Exemplo 1: C_1, \dots, C_n | A

Dorcas | Sintomas | Prevalência Min. Saúde. | literatura médica

Paciente com sintomas A → Queremos a probabilidade do paciente ter a dorcas: $P(C_1|A), P(C_2|A), \dots, P(C_n|A)$

Exemplo 2: C_1, \dots, C_n | A

Defeitos na peça C_i | componentes | probabilidade de peça C_i quebrar | Especificação do fabricante

Máquina com componentes A → Queremos a probabilidade do paciente da peça C_1 quebrar: $P(C_1|A), \dots, P(C_{100}|A)$ / $P(C_2|A) = 0,9$

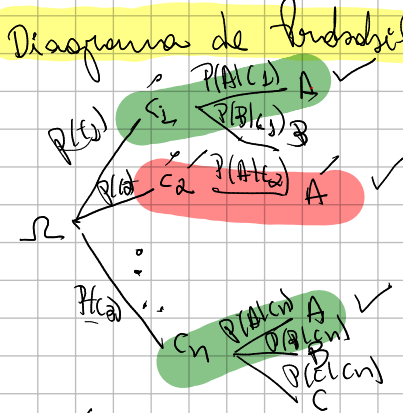
Como calcular $P(C_i|A)$:

$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i)}{P(A)} = \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)}$

→ Regra da Multiplicação

Sempre condicionados na partição!

Diagrama de Probabilidades: $\{C_1, \dots, C_n\}$ - partições de Ω



(Sempre condiciona na partição)

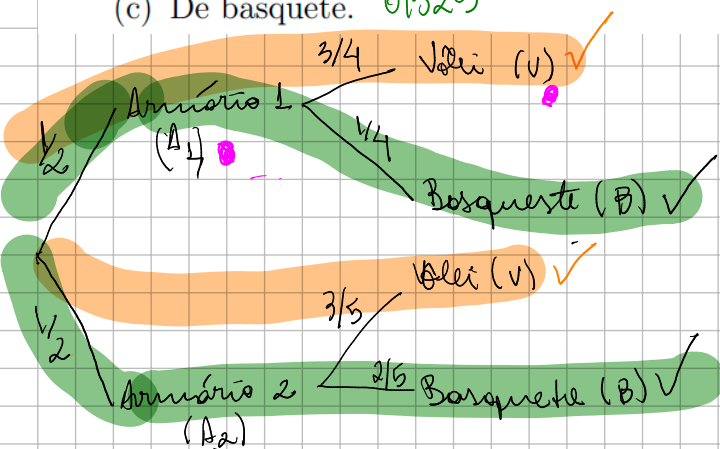
(Partição sem primeiro neste diagrama)

$$P(C_2|A) = \frac{P(A|C_2)P(C_2)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) + \dots + P(A|C_n)P(C_n)}$$

10. Dois armários guardam as bolas de voleibol e basquete. O armário 1 tem 3 bolas de voleibol e 1 de basquete, enquanto 2 tem 3 bolas de voleibol e 2 de basquete. Escolhendo-se, ao acaso, um armário e, em seguida, um de suas bolsas, calcule a probabilidade dela ser:

↳ equi probabilidade

- (a) De voleibol, sabendo-se que o armário 1 foi escolhido; $3/4$
 (b) De basquete, sabendo-se que o armário 2 foi escolhido; $2/5$
 (c) De basquete. $0,325$



$$c) P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$P(A_1|V) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = 0,253125$$

$$a) P(V|A_1) = 3/4$$

$$b) P(B|A_2) = 2/5$$

$$c) P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0,325$$

Bônus: $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 0,384615385$

A é independente de B \Leftrightarrow B é independente de A

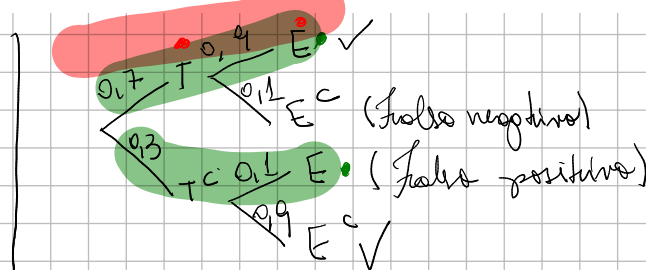
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad | \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \quad \square$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ → Regra da Multiplicação!

A e B são independentes.

7. Um médico desconfia que um paciente tem tumor no abdômen, pois isto ocorreu em 70% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultra-som detectará com probabilidade de 0,9. Entretanto, se ele não tiver o tumor, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade 0,1. Se o exame detectou um tumor, qual é a probabilidade do paciente tê-lo de fato?

$T = \{ \text{Vc tem tumor} \}$
 $P(T) = 0,7; P(T^c) = 0,3$
 $E = \{ \text{Exame detecta doença} \}$



$$P(\overset{\bullet}{T} | \overset{\bullet}{E}) = \frac{0,9 \cdot 0,7}{0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3} = 0,954545455 \approx 0,95$$