Lista 3.

1) Seja $f(x,y) = 3x + 2y$. Calcule:

a) $f(1,-1)$ b) $f(a,x)$ c) $\dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$

d) $\dfrac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$

2) Seja $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+2y}$.

a) Determine o domínio.

b) Calcule $f(2u+v, v-u)$.

3) Represente graficamente o domínio da função $z = f(x,y)$ dada por

a) $x + y - 1 + z^2 = 0$, $z \geq 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

c) $z = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{2x-y}$.

d) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

e) $z^2 + 4 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

f) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

g) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

h) $z = \dfrac{x-y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$

4) Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. b) $f(x,y) = x + 3y$

c) $z = 4x^2 + y^2$ d) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ e) $z = x + y + 1$

f) $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ g) $f(x,y) = x^2$, $-1 \leq x \leq 0$ e $y \geq 0$

h) $f(x,y) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$.   i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $z = (x - y)^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.   l) $z = f(x,y)$ dada por $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ $x^2 + y^2 < 1$ n) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$

o) $f(x,y) = x$, $x \geq 0$ p) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$

q) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$ r) $f(x,y) = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

5) Desenhe as curvas de nível e determine a imagem:

a) $f(x,y) = x - 2y$ b) $z = \dfrac{y}{x - 2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

d) $z = \dfrac{x}{y - 1}$ e) $z = xy$ f) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

g) $z = 4x^2 + y^2$ h) $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

i) $z = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ j) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

6) Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função

$$f(x,y) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

7) Represente geometricamente o domínio da função dada.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ b) $f(x,y,z) = \sqrt{1-z}$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x-y-z}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$

d) $w = \sqrt{1-|x|-|y|-|z|}$ e) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

8) Desenhe a superfície de nível correspondente a $c = 1$.

a) $f(x,y,z) = x$ b) $f(x,y,z) = z$

c) $f(x,y,z) = x^2+y^2$ d) $f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2$

9) Duas superfícies de nível de uma função f podem interceptar-se? Justifique.

10) Calcule, caso exista:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$ f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$ h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

11) Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2+b^2>0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

b) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$.

(Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Porquê?

12) Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b) $f(x,y) = \sqrt{6-2x^2-3y^2}$

c) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1-x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)} & \text{se } r<1 \quad \text{onde } r=\|(x,y)\| \\ 0 & \text{se } r\geq 1 \end{cases}$

13) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.