Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 09/04/2019

Definição: (Par Ordenado)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Denominamos Par Ordenado, e indicamos por $\langle a, b\rangle$ todos os pares tais que $a \in A$ e $b \in B$, respeitando a ordem que os elementos a e b aparecem; ou seja, a é o primeiro elemento do par e b é o segundo.

Observação.1: Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.
Então, em geral, $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$.
Observação.2: Sejam os conjuntos $A, B, C, D \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então:
$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow (a = c) e (b = d); a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$.

DEFINIÇÃO: (Produto Cartesiano)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que o conjunto $A \times B := \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$ é o PRODUTO CARTESIANO (ou PRODUTO CRUZADO) entre os conjuntos A e B ; ou seja, $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados $\langle a, b\rangle$ com $a \in A$ e $b \in B$.

Exemplos:

Sejam $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{4, 5\}$. Então;

$A \times B := \{\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$

$B \times A := \{\langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 5, 1\rangle \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$

OBSERVAÇÃO.3: Seja o conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

D]: Sabemos que $A \times \emptyset := \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ e } b \in \emptyset\}$; porém, o conjunto $\emptyset$ não possui elementos, então não existe o elemento b em $\emptyset$; portanto $A \times \emptyset = \emptyset$.

OBSERVAÇÃO.4: Sejam os conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então,

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

DEFINIÇÃO: (Relações)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO (binária) de A para B(ou de A em B) se, e somente se, $\mathcal{R} \subseteq A \times B := \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
Podemos denotar por $x\mathcal{R}y$ o par $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$
(lê-se: *x está $\mathcal{R}$-relacionado a y*)

OBSERVAÇÃO.5: Seja o conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma ENDORELAÇÃO ou (Auto-relação) em A se, e somente se, $\mathcal{R} \subseteq A \times A := \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$.

DEFINIÇÃO: (Domínio e Imagem)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em $A \times B$. Dizemos que;

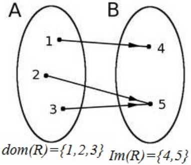
(i) O DOMÍNIO DE $\mathcal{R}$ é o conjunto;
$Dom(\mathcal{R}) := \{x \in A \mid \langle x, y \rangle \in \mathcal{R} \text{ para algum } y \in B\}$.

(ii) A IMAGEM DE $\mathcal{R}$ é o conjunto;
$Im(\mathcal{R}) := \{y \in B \mid \langle x, y \rangle \in \mathcal{R} \text{ para algum } x \in A\}$.

OBSERVAÇÃO.5: Os conjuntos $Dom(\mathcal{R})$ e $Im(\mathcal{R})$ são subconjuntos de A e B, respectivamente; ou seja, $Dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $Im(\mathcal{R}) \subseteq B$; onde B é o CONTRA-DOMÍNIO da relação.

Exemplo.1:

Sejam $A := \{1, 2, 3\}$ e $B := \{4, 5\}$.
Então; $A \times B := \{\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$
e seja, a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times B$; $\quad \mathcal{R} := \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$
Pela representação no diagrama, temos:



Exemplo.2:

Seja $A := \{1, 2, 3\}$, Então;
$A \times A := \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
e seja, a relação $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; tal que,
$\mathcal{R} := \{\langle x, y\rangle \mid x > y\} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$
Neste caso, o conjunto domínio $Dom(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$ e o conjunto imagem $Im(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$.

Relações - Propriedades

DEFINIÇÃO.1: (Relação Reflexiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO REFLEXIVA se, e somente se, $\forall x \in A; \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$; ou seja, $\nexists x$ tal que $x \in A$ e $\langle x, x\rangle \notin \mathcal{R}$.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\mid\; x = y\}$

DEFINIÇÃO.2: (Relação Irreflexiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO IRREFLEXIVA se, e somente se, $\forall x \in A; \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$; ou seja, $\nexists x$ tal que $x \in A$ e $\langle x, x \rangle \in \mathcal{R}$.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ x \neq \mathrm{y}\}$

Observação:

Uma relação $\mathcal{R}$ *reflexiva* não pode ser ao mesmo tempo *irreflexiva*. Todavia, se uma relação $\mathcal{R}$ não for *reflexiva* não podemos afirmar que esta é *irreflexiva*; do mesmo modo, se uma relação $\mathcal{R}$ não for *irreflexiva* não podemos afirmar que esta é *reflexiva*.

DEFINIÇÃO.3: (Relação Simétrica)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO SIMÉTRICA se, e somente se, $\forall x, y \in A; \langle x, y \rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \mathcal{R}$; ou seja,
$\nexists x, y$ tais que $x, y \in A$ e $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x \rangle \notin \mathcal{R}$.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\mid\; x = y\}$
Observação:
Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:
$\mathcal{R} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ "reflexiva e simétrica" ;
$\mathcal{S} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ "reflexiva e assimétrica" ;
$\mathcal{T} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ "irreflexiva e simétrica".

DEFINIÇÃO.4: (Relação Anti-Simétrica)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA se, e somente se, $\forall x, y \in A; \langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$; ou seja,
$\nexists x, y$ tais que $x, y \in A$ e $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$ e $x \neq y$.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$
Observação:
Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:
$\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ "reflexiva, simétrica e anti-simétrica" ;
$\mathcal{S} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "reflexiva, assimétrica e anti-simétrica" ;
$\mathcal{T} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "irreflexiva, simétrica e não é anti-simétrica".

Relações - Propriedades

Observação:

Os termos "**simétrico**" e "**anti-simétrico**" não são opostos. Porém, o termo "**assimétrico**" é oposto ao "**simétrico**". Então, uma relação $\mathcal{R}$ simétrica pode ser anti-simétrica, mas não pode ser assimétrica.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ x = y\}$
Neste caso, $\mathcal{R}$ é *simétrica* e *anti-simétrica* ao mesmo tempo.

DEFINIÇÃO.5: (Relação Transitiva)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO TRANSITIVA se, e somente se, $\forall x, y, z \in A$; $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$; ou seja, $\nexists x, y, z$ tais que $x, y, z \in A$ e $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle x, z\rangle \notin \mathcal{R}$.

Exemplo: $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ | \ x = y\}$

Observação:

Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:

$\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ "reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva" ;

$\mathcal{S} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "reflexiva, assimétrica, anti-simétrica e transitiva." ;

$\mathcal{T} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "irreflexiva, simétrica, não é anti-simétrica e nem transitiva".

$\mathcal{L} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "reflexiva, simétrica, não é anti-simétrica e é transitiva".

$\mathcal{O} = \{\langle 2, 1\rangle\}$ "irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica e transitiva".

DEFINIÇÃO.6: (Relação Conectada)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO CONECTADA(LINEAR OU TOTAL) se, e somente se,
$\forall x, y \in A; \langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ ou $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$; ou seja,
$\nexists x, y$ tais que $x, y \in A$ e $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.

Exemplos: Seja $A = \{1, 2\}$ e as seguintes relações em A:
$\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ "reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva e não é conectada";
$\mathcal{S} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "reflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva e é conectada." ;
$\mathcal{T} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "irreflexiva, simétrica, não é anti-simétrica, nem transitiva e nem é conectada.".
$\mathcal{L} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ "reflexiva, simétrica, não é anti-simétrica, é transitiva e conectada".
$\mathcal{O} = \{\langle 2, 1\rangle\}$ "irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva e não é conectada".

DEFINIÇÃO.7: (Relação de Equivalência)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA se, e somente se, $\mathcal{R}$ é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

Exemplos:

1. RELAÇÃO DE IGUALDADE
   $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$
2. RELAÇÃO IDENTIDADE
   $\Delta_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}; X$ é um conjunto não vazio.
   $\Delta_{\mathbb{N}} = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$
3. RELAÇÃO UNIVERSAL
   $\nabla_X = X \times X; X$ é um conjunto não vazio.
   $\nabla_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Observação:

Seja o conjunto $A \neq \emptyset$ e consideremos $\mathcal{R} = \emptyset$ uma relação **vazia** em A; visto que $\emptyset \subseteq A \times A$.
Podemos então dizer que $\mathcal{R}$ é uma relação *simétrica*, *anti-simétrica*, *transitiva* e *irreflexiva*, mas $\mathcal{R}$ não é *conectada* e nem *reflexiva*, consequentemente, também não é *relação de equivalência*.

Exercícios: Verifique as relações binárias nos itens abaixo e classifique-as em *reflexivas*, *irreflexivas*, *simétricas*, *assimétricas*, *anti-simétricas*, *transitivas*, *conectadas*, *equivalências*.

1. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par } \}$.
2. Sejam $A = \mathbb{N}^*$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } y\}$.
3. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\}$.