Emparelhamento

Definições:

.emparelhamento: conjunto de arestas simples sem vértices em comum em um dado grafo *G*
.emparelhamento perfeito: todos os vértices de um grafo *G* são saturados por um emparelhamento *M*
.vértices saturados: vértices incidentes sobre as arestas em um emparelhamento *M*
.vértices insaturados: vértices que não são incidentes sobre as arestas de um emparelhamento
.emparelhamento maximal: emparelhamento que não pode ser enlargecido pelo acréscimo de arestas
.emparelhamento máximo: emparelhamento com o maior número possível de arestas
.caminho M-alternante: caminho que alterna entre arestas dentro e fora do emparelhamento
.caminho M-aumentante: caminho m-alternante cujos vértices das extremidades são insaturados
.diferença simétrica: diferença simétrica entre grafos *G* e *H* é o grafo *F* com o mesmo conjunto de vértices $V(G) = V(H)$ onde $E(F) = (E(G) - E(H)) \cup (E(H) - E(G))$.
.cobertura de vértices: conjunto $Q \subseteq V(G)$ que contém pelo menos uma extremidade de todas as arestas. os vértices em *Q* cobrem as arestas $E(G)$
.numero de independencia: quantidade máxima de um conjunto independente de vértices de um dado grafo *G*
.cobertura de arestas: conjunto *L* de arestas de um dado grafo *G* tal que todo vértice de *G* seja incidente a alguma aresta de *L*
.tamanho máximo de um conjunto independente: α(G)
.tamanho máximo de um emparelhamento: α'(G)
.tamanho mínimo de cobertura de vértices: β(G)
.tamanho mínimo de cobertura de arestas: β'(G)
.fator: um subgrafo gerador de um dado grafo *G*
.k-fator: um subgrafo k-regular gerador de um dado grafo *G*

Corolários:

.para $k > 0$, todo grafo bipartido k-regular possui um emparelhamento perfeito
.todo vértice possui grau k, uma vez que *G* é bipartido k-regular. então, contando as arestas das bipartições, $k|X| = k|Y|$, então $|X| = |Y|$. Isso satisfaz a condição de Hall, há um emparelhamento saturando ambos. *M* satura tanto *X* quanto *Y*, sendo um emparelhamento perfeito.

.[konig] se *G* é um grafo bipartido sem vértices isolados, então $\alpha(G) = \beta'(G)$
.segue do resultado de [gallai] e $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$

Lemas:

.toda componente de uma diferença simétrica entre dois emparelhamentos é um caminho ou um ciclo par
.todo vertice da diferença simétrica *F* possui, no máximo, duas arestas. Daí, $\Delta(F) \leq 2$. Logo, toda componente de F contém um ciclo ou um caminho.

.todo ciclo ou caminho alterna entre arestas de M - M' e M' - M. Portanto, todo ciclo possui tamanho par

.em um grafo G, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto independente sse seu complemento S' é uma cobertura de vértices, e portanto $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$
.sendo S conj. indp. então todas as arestas são incidentes a pelo menos um vértice de S'.
.se S' cobre todas as arestas, não há arestas entre os vértices de S.
.então todo conj. indep. máximo é complementar a uma cobertura de vértice, onde vale $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

Teoremas:

.[berge] um emparelhamento M em um grafo G é um emparelhamento máximo em G sse G não possui um caminho M-aumentante
contrapositiva (G tem emparelhamento maior que M sse G possui M-aumentante).
ida: definição
volta: supor um M' maior que M em G e contruir um M-aumentante. Construir $F = M \Delta$ M' e observar que:

F possui ciclos pares
$|M'| > |M|$, então F tem mais arestas de M' do que de M. Isso só pode acontecer se há um caminho que comece e termine por uma aresta de M', configurando um M-aumentante.

.[hall] um X,Y-bigrafo G possui um emparelhamento que satura X sse $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$
ida: se M satura X, claro que vale a condição de hall senão haveria vértices insaturados
volta:
contrapositiva (M é máximo e não satura X então há $S \subseteq$ X tal que $|N(S)| < |S|$).
.selecionar um vértice u insaturado por M.
.selecionar vértices alcancáveis por u usando caminhos M-alternantes. S serão esses vértices na partição insaturada X e T os seus vizinhos em Y. u pertence a S.
.o caminho M-alternante alcanca os vértices em T por arestas fora de M e retorna aos vértices de S pelas arestas em M. M cobre T e $S - \{u\}$, já que não há M-aumentante e , além disso, $|T| = |S - \{u\}|$.
.provar agora que $T = N(S)$. para isso, supor que um $y \in Y - T$ tem um vizinho em S. vy está fora do emparelhamento já que u é insaturado e todos os outros vértices de S já estão saturados e ligados a vértices em T. Nesse caso, $T = N(S)$, o que leva à observar que $|N(S)| = |T| = |S| - 1$ (o - 1 vem do fato de que u pertence a S mas não tem vizinho em T, pois é insaturado) $< |S|$.

.[konig-egervary] se G é um grafo bipartido, então o tamanho máximo de um emparelhamento em G é igual a quantidade mínima de uma cobertura de vértices de G
.vértices distintos precisam ser usados para cobrir arestas de um emparelhamento, então $|Q| \geq |M|$ onde Q é cobertura de vértices.
.provar a igualdade construindo um emparelhamento de tamanho $|Q|$.
.particionar Q por $R = Q \cap X$ (vértices em X da cobertura) e $T = Q \cap Y$ (vértices em Y da cobertura).
.construir H e H' subgrafos induzidos por $R \cup (Y - T)$ e $T (X - R)$. eles são disjuntos entre si.
.$R \cup T$ é uma cobertura de vértice, então não há arestas entre $Y - T$ (vizinhos de R) e $X - R$ (vizinhos de T).

.considerar um $S \subseteq R$ e $NH(S)$ contido em $Y - T$. Se $|NH(S)| < |S|$, então podemos substituir S por seus vizinhos na cobertura Q para conseguir uma cobertura ainda menor, já que as arestas de S também estão em seus vizinhos.
.Q então satisfaz a condição de Hall e possui um emparelhamento que satura R. O mesmo raciocínio se aplica a H'. Portanto, $|Q|$ é igual à soma dos tamanhos dos emparelhamentos sobre H e H'.

.[gallai] se G é um grafo sem vértices isolados, então $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$

Conectividade

Definições:

.conjunto separador (corte de vértices): conjunto $S \subseteq V(G)$ de um grafo G tal que G - S possui mais de um componente
.conectividade de um grafo: tamanho mínimo de um corte de vértices S tal que G - S é desconexo ou possui um vértice, denotado por $k(G)$
.grafo k-conexo: grafo cuja conectividade seja pelo menos k
.conjunto desconectante: conjunto $F \subseteq E(G)$ de um dado grafo G tal que G - F possui mais que uma componente
.grafo k-aresta-conexo: grafo cujo todos conjuntos desconectantes possuem ao menos k arestas
.conectividade em arestas: tamanho minimo do conjunto desconectante, denotado por $k'(G)$
.corte de arestas: conjunto de arestas da forma *[S, S' (complemento de S)]* onde $S \subsetneq V(G)$ é um subconjunto não vazio e S' denota $V(G)$ - S
.caminhos internamente disjuntos: caminhos que não possuem vértices internos em comum
.subdivisão de uma aresta: operação de substituir uma aresta uv por um caminho u,w,v
.x,y-separador (x,y-corte): um conjunto $S \subseteq V(G) - \{x,y\}$ onde G - S não possua um x,y-caminho
.κ(x,y): tamanho mínimo de um x,y-corte
.λ(x,y): tamanho máximo do conjunto dos x,y-caminhos internamente disjuntos

Corolários:

.se G é um grafo simples e *[S, S' (complemento de S)]* $< \delta(G)$ para algum $S \subsetneq V(G)$ não vazio, então $|S| > \delta(G)$
.por proposição, $\delta(G) >$ *somatório(d(v) em S)* $- 2e(G[S])$. Usando $d(v) \geq \delta(G)$ e $2e(G[S]) \leq |S|\ (|S| - 1)$ implica em $\delta(G) > |S|\delta(G) - |S|(S - 1)$.
.a conclusão anterior requer $|S| > 1$. Manipulamos a inequação e encontramos $|S| > \delta(G)$

.se G é 2-conexo, então o grafo G' obtido subdividindo uma aresta de G é 2-conexo
.construir G' pela adição de um vértice w em uma aresta uv em G.
.sendo G 2-conexo, quaisquer duas arestas estão sobre um mesmo ciclo.
.escolher duas arestas e e f em G' que também estejam em G. Nesse caso, elas estão em um ciclo em G, assim como em G' a não ser que usem a aresta modificada uv.
.caso as arestas escolhidas passem por uv, basta incorporar ao ciclo um uv-caminho em G' pelas possíveis arestas wu ou wv.

Proposições:

.se S é um conjunto de vértices em um grafo G, então $|[S, S' (complemento\ de\ S)]| = |\sum_{v \in S} d(v)| - 2E(G[S])$

.uma aresta em $G[S]$ contribui em 2 ao somatório de graus de vértices v em S enquanto arestas em $[S, S']$ contribuem em um à soma. Como isso contabiliza todas as contribuições, obtemos $|\sum_{v \in S} d(v)| = |[S, S' \textit{(complemento de } S)]| + 2E(G[S])$

Lemas:

.[expansão] se G é um grafo k-conexo, e um G' é obtido por G pela adição de um novo vértice y com ao menos k vizinhos em G, então G' é k-conexo
.provar que um conjunto separador S de G' deve ter tamanho ao menos k
.se $y \in S$, então $S - \{y\}$ separa G, então $|S| \geq k + 1$.
.se $y \notin S$ e $N(y) \subseteq S$, então $|S| \geq k$. Caso contrário, y e $N(y) - S$ estariam sobre um mesmo componente de $G' - S$

Teoremas:

.[harary] $k(Hk,n) = k$, e portanto a quantidade mínima de arestas em um grafo k-conexo com n vértices é *teto(kn/2)*
.organizar o grafo como proposto por harary é importante para a visualização da estrutura usada nessa prova
.sendo k-conexo, δ(G) = k. Para $S \subseteq V(G)$ onde $|S| < k$, $G - S$ é conexo por definição de k-conexividade.
.escolher $u,v \in V(G) - S$. há dois u,v-caminhos no grafo circular, um sentido horário (onde A denota o conjunto dos vértices internos desse caminho) e um anti-horário (onde B “ “ “).
.já que $|S| < k$, o princípio da casa dos pombos implica que A ou B possui menos que $k/2$ vértices.
.como todos os vértices possui arestas para os próximos $k/2$ vértices em uma dada direção, remover menos que $k/2$ não remove o caminho daquela direção (horario ou anti-horário).
.portanto, podemos achar o u,v-caminho em $G - S$ por A ou B tal que S tenha menos que $k/2$ arestas. Sendo n vértices no total, o total mínimo de arestas é teto($kn/2$).

.[whitney] se G é um grafo simples, então $k(G) \leq k'(G) \leq \delta(G)$
.arestas incidentes a um vértice v de grau mínimo formam um corte de aresta. portanto, $k'(G) \leq \delta(G)$
.observar que $k(G) \leq n(G) - 1$
.escolher o menor corte de aresta possível $[S, S' \textit{(complemento de } S)]$.
.caso onde todo vértice de S incide sobre S':
$|[S, S']| = |S||S'| \geq n(G) - 1 \geq k(G)$.
manipular as inequações e chegar ao resultado.
.caso onde exista um vértice em S que não incida sobre S':
escolher x em S e y em S' tal que não exista xy.
construir $T = NS'(x)$ (todos os vizinhos de x em S') unido a todos os vértices em $S - \{x\}$ com vizinhos em S'.
todo x,y-caminho passa pelos vértices em T, fazendo dele um conjunto separador.
além disso, as arestas de x a $T \cap S'$ e vértices de $T \cap S$ a S' compõem $|T|$ distintas arestas $[S, S']$. Portanto, $k'(G) = |[S, S']| \geq |T| \geq k(G)$.

.se G é um grafo 3-regular, então $k(G) = k'(G)$

.seja S um corte de vértice mínimo onde $|S| = k(G)$. $k(G) \leq k'(G)$ sempre. É preciso mostrar apenas um corte de aresta de tamanho $|S|$
.construir um $G - S$, resultando nas componentes H e H'
.sendo S corte de vértice mínimo, todo v em S possui um vizinho em H e H'
.sendo G 3-regular, todo v em S não pode possuir duas arestas para ambas componentes
.removemos uma aresta de todo v em S para H e H', de tal forma que v só possua um vizinho. dessa forma, removemos $|S|$ arestas.
.se houver um $v1$ e $v2$ com arestas entre si, removemos arestas deles à mesma componente para manter a desconexão e a cardinalidade de arestas removidas.

.[whitney] um grafo G que contenha ao menos 3 vértices é 2-conexo sse cada par $u,v \in V(G)$ existe u,v-caminhos internamente disjuntos.
.**ida**: se existe dois caminhos internamente disjuntos para quaisquer u,v do grafo, remover um deles ainda garante que exista outro caminho. Logo, o grafo é 2-conexo.
.**volta**: indução em $d(u,v)$.
.para base $d(u,v) = 1$, $G - uv$ ainda é conexo uma vez que $k'(G) \geq k(G) \geq 2$. Um u,v-caminho de $G - uv$ é internamente disjunto em G do u,v-caminho formado pela aresta uv.
.passo indutivo $d(u,v) = k > 1$. Selecionar um vértice w imediatamente anterior a v no u,v-caminho. $d(u,w) = k - 1$, então aplicamos a hipótese de indução onde há dois u,w-caminhos internamente disjuntos P e Q.
.se $v \in V(P) \cup V(Q)$:
    encontramos os caminhos disjuntos.
.caso contrário:
    observar que $G - w$ ainda é conexo e contém um u,v-caminho R.
    se R não passa por P ou Q, encontrado os caminhos disjuntos.
    caso contrario, selecionar um vértice z antes de v pertencente a $P \cup Q$ e assumimos que pertenca a P.
    usamos o u,z-caminho (em P) e o z,v-caminho (em R) e construímos um u,v-caminho internamente disjunto a $Q \cup wv$.

.para um grafo G com ao menos três vértices, as seguintes condições são equivalentes (e caracterizam um grafo 2-conexo):

a. G é conexo e não possui vértice de corte
b. para todo x,y em $V(G)$, há x,y-caminhos internamente disjuntos
c. para todo x,y em $V(G)$, há um ciclo sobre x e y
d. $\delta(G) \geq 1$ e todo par de arestas em G estão sobre um ciclo comum

.a ⇔ b: provado anteriormente
.b ⇔ c: se há um ciclo sobre x,y então há caminhos internamente disjuntos
.d ⇒ c: $\delta(G) \geq 1$ implica que não há vertices isolados. Aplicamos a última parte de d am arestas incidentes sobre dois vértices x,y. Se houver apenas uma das arestas, aplicamos sobre um terceiro vértice.
    .considerar duas arestas uv e xy.
    .adicionar em G um vértice w com vizinhança $\{u,v\}$ e um vértice z com vizinhança $\{x,y\}$. O grafo resultante G', pelo teorema da expansão, é também 2-conexo.
    .w e z agora estão sobre um ciclo comum em G' que contém os caminhos u,w,v e x,z,y.
    .substituindo os caminhos u,w,v e x,z,y pelas arestas uv e xy implica na construção de um ciclo usando xy e uv em G.

.[menger] se x,y são vértices de um grafo G e xy não pertence a $E(G)$, então o tamanho mínimo de um x,y-corte é igual à quantidade máxima de x,y-caminhos internamente disjuntos

.um x,y-corte precisa conter um vértice interno de cada caminho em um conjunto dois a dois internamente disjuntos de x,y-caminhos. Esses vértices precisam ser distintos, portanto, $k(x,y) \geq \lambda(x,y)$.

.basta provar a igualdade. Uso de indução em $n(G)$. Para a base $n(G) = 2$, xy não pertence a $e(G)$ o que implica $k(x,y) = \lambda(x,y) = 0$.

.passo de indução para $n(G) > 2$. Seja $k = kG(x, y)$. O objetivo é construir k x,y-caminhos dois a dois internamente disjuntos.

.caso onde G possui um x,y-corte mínimo S outro que não seja $N(x)$ ou $N(y)$:

.para obter os k caminhos desejados, combinaremos x,S-caminhos e S,y-caminhos obtidos pela hipótese de indução.

.seja $V1$ o conjunto de vértices de x,S-caminhos e $V2$ conjunto de vértices de S,y-caminhos.

.sendo S um x,y-corte minimal, todos os vértices de S estão sobre um x,y-caminho. Portanto, $S \subseteq V1 \cap V2$.Além disso, $S = V(G1) \cap V(G2)$.

.formar $H1$ pela adição a $G[V1]$ um vértice y' com arestas em S.

.formar $H2$ pela adição a $G[V2]$ um vértice x' com arestas em S.

.todo x,y-caminho em G começa com um x,S-caminho (contido em $H1$), então todo x,y'-corte em $H1$ é um x,y-corte em G. Portanto, $kH1(x,y') = k$, bem como $kH2(x',y) = k$.

.como $V1$ omite $N(y) - S$ e $V2$ omite $N(x) - S$, tanto $H1$ quanto $H2$ são menores que G. Aplicamos então a hipótese de indução.

.como $V1 \cap V2 = S$, deletar y' dos k caminhos em $H1$ e x' dos k caminhos em $H2$ implica no desejado x,S-caminhos e S,y-caminhos em G que combinados formam k x,y-caminhos internamente disjuntos.

.caso onde G possui um x,y-corte mínimo S que seja $N(x)$ ou $N(y)$:

//a fazer

Planaridade

Definições:

.curva: a imagem de um mapeamento contínuo de [0,1] para R^2
.curva poligonal: curva composta por um segmento de linha finito. é uma u,v-curva se começa em *u* e termina em *v*
.desenho: uma função *f* definida em *V(G) U E(G)* que atribui os vértices a pontos distintos do plano e uma aresta com extremidades *uv* a um f(u),f(v)-curva
.cruzamento: um ponto em $f(e) \cap f(e')$ que não é uma extremidade em comum
.grafo planar: cujo desenho não possui cruzamentos
.incorporação planar: desenho de um grafo planar
.grafo plano: um desenho de um grafo planar
.curva fechada: se o primeiro e o último ponto são iguais
.curva simples: se não existe ponto repetido com a possível exceção de que o primeiro seja o último
.conjunto aberto: conjunto $U \subseteq R^2$ tal que para todo *p* em *U* todos os pontos a uma pequena distância de *p* pertencem a *U*
.região: é um conjunto aberto *U* contendo uma u,v-curva para todo par *u,v* em *U*
.faces: regiões maximais do plano que não contém pontos usados no desenho de um grafo plano
.grafo dual: grafo plano cujos vértices correspondem às faces de um grafo plano *G*. as arestas de *G** correspondem às arestas de *G* da seguinte forma: se *e* é uma aresta em *G* com face *X* de um lado e *Y* de outro, as extremidades da aresta dual *e** são os vértices *x,y* que representam as faces *X* e *Y* de *G*
.tamanho de uma face: tamanho do passeio fechado em *G* ao redor da face
.grafo planar maximal: grafo planar simples que não é um subgrafo de outro grafo planar
.triangulação: grafo simples plano onde toda fronteira de uma face é um 3-ciclo

Proposições:

.K_5 e $K_{3,3}$ não podem ser desenhados sem cruzamentos
.pensar que só se pode colocar cordas dentro ou fora de curvas fechadas
.perceber que em ambos os casos haverá mais de uma corda dentro e/ou fora de uma curva fechada, hacendo um conflito

.se $l(F_i)$ denota o tamanho da face F_i em um grafo plano *G*, então $2e(G) = \Sigma l(F_i)$
.os tamanhos das faces são os graus dos vértices duais. uma vez que $e(G) = e(G^*)$, segue pela fórmula de soma de degraus

.para um grafo plano simples *G* com *n* vértices, as seguintes informações são equivalentes:

a. *G* possui $3n - 6$ arestas
b. *G* é uma triangulação
c. *G* é um grafo plano maximal

.a ⇔ b: pelo teorema demonstrado, isso só acontece se $n(G) >= 3$. Se $2e = 3f$ acontece é porque toda face é um 3-ciclo
.b ⇔ c: há uma face que é maior que um 3-ciclo sse existe uma forma de adicionar uma aresta ao desenho e obter um grafo plano simples maior

.se um grafo G possui um subgrafo que é uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ então G não é planar
.todo subgrafo de um grafo planar é planar, basta mostrar que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.
.subdividindo arestas não afetam a planaridade, as curvas de uma incorporação de uma subdivisão de G podem ser usadas para obter uma incorporação de G e vice-versa.

Teoremas:

.[restricted jordan curve theorem] uma curva poligonal fechada C consistindo de finitos segmentos particiona o plano em exatas duas faces, cada uma tendo C como fronteira

.as seguintes informações são equivalentes pra um dado grafo plano G:

a. G é bipartido
b. toda face em G possui tamanho par
c. o grafo dual G^* é euleriano

.a ⇒ b: uma fronteira de face é um passeio fechado. Todo passeio ímpar contém um ciclo ímpar. Grafos bipartidos são livres de ciclos ímpares, logo toda face em G tem tamanho par
.b ⇒ a: como G não possui cruzamentos, um ciclo C consiste de uma curva simples fechada cuja face interna definimos por F. Toda região de G é definida dentro ou fora de F. Se somamos o tamanho das regiões dentro de F temos um número par, o que implica em uma quantidade par de arestas em C. Como o ciclo só pode ser par, então G é bipartido.
.b ⇔ c: o grafo dual G^* é conexo e todos os graus dos seus vértices são o tamanho das faces de G

.[euler] se um grafo plano conexo G possui exatamente n vértices, e arestas e f faces, então $n - e + f = 2$
.indução. Na base para $n = 1$, G so possui loops, onde cada loop divide o espaço em duas faces. Se $e = 0$, então há uma face apenas e vale a fórmula. Caso contrário, cada aresta adicionada adiciona também uma face, o que garante ainda a fórmula.
.Caso para $n > 1$. G é conexo e podemos procurar uma aresta que não seja um loop. Removemos essa aresta resultando em um grafo G' com uma face a menos. A fórmula vale.

.se G é um grafo planar simples com ao menos três vértices, então $e(G) \leq 3n(G) - 6$. Além disso, se G é livre de tirângulos, então $e(G) \leq 2n(G) - 6$
.toda fronteira de face de um grafo simples contém pelo menos três arestas se $n(G) \geq 3$.
.seja {fi} a lista dos tamanhos das faces, isso implica $2e = somatorio(fi) \geq 3f$. Substituindo o resultado na fórmula de euler, segue a inequação
.se G é livre de triangulo, então $2e = somatorio(fi) \geq 4f$. Segue o raciocinio anterior

.[kuratowski] um grafo é planar sse não possui uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$