Lista de exercícios

Fábio Braga, João Lucas Lima, Luca Argolo, Thiago Vieira

November 17, 2021

Questão 1.

Questão 2. Seja Σ uma assinatura e $Fm(\Sigma)$ o conjunto das Σ-fórmulas sobre a assinatura.

Por definição, sendo $\varphi \in Fm$, o conjunto $sub(\varphi)$ das subfórmulas de φ é definido recursivamente por:
i)$sub(\varphi) = \{\varphi\}$, se φ é atômica.
ii)$sub(\varphi) = sub(\psi) \cup \{\varphi\}$, se $\varphi = \neg\varphi$
iii)$sub(\varphi) = sub(\psi) \cup sub(\chi) \cup \{\varphi\}$, se $\varphi = (\psi \Box \chi), \Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Podemos estender a definição de subfórmulas para $Fm(\Sigma)$ da forma:
i)$sub(\Sigma) = \{\Sigma\}$, se ar é atômica.
ii)$sub(\Sigma) = sub(\Delta) \cup \{\Sigma\}$, se $ar = \neg ar$
iii)$sub(\Sigma) = sub(\Delta) \cup sub(\Psi) \cup \{\Sigma\}$, se $= (\Delta \Box \Psi), \Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Questão 3.

Questão 4.

Questão 5. .
$\varphi =$ alunos de computação
$\chi =$ aluno de lógica
$\psi =$ aluno de matemática
$\varepsilon =$ aluno de física
$a =$ alfredo
$c =$ clara

$\forall\chi(\varphi \vee \psi)$
$\exists\psi\neg\chi$
$\forall\varepsilon\psi$
$a\varepsilon \wedge c\varphi$

Questão 6. Dado $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$, I = (Ω, γ) uma interpretação de uma assinatura apropriada que contém todos os símbolos não-lógicos que ocorrem em φ, e ω um universo de Ω. Mostraremos então que $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

I $\models \neg\exists x\varphi$
$\Leftrightarrow$ I $\not\models \exists x\varphi$
$\Leftrightarrow$ não existem elementos $w \in \omega$ tal que $I_x^m \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ existem elementos $w \in \omega$ tal que $I_x^m \not\models \varphi$
$\Leftrightarrow$ existem elementos $w \in \omega$ tal que $I_x^m \models \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ para todo elemento $w \in \omega$ temos que $I_x^m \models \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ I $\models \forall x\neg\varphi$

Portanto, como queríamos demonstrar, temos $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

Se tomarmos como base uma setença, fica bastante intuitivo que esta afirmação faz sentido. Por exemplo, "Não existem animais na Terra que sejam dragões" é equivalente a "Todo animal na terra é não-dragão".