Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática

MAT A07 - Álgebra Linear A
Aula 10
Corpo, Espaços Vetorias, Subespaços Vetoriais
Respostas dos Exercícios

Professora: Isamara C. Alves

Data: 15/10/2020

Subespaços Vetoriais

Exercícios

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$, com a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função $\}$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Verifique se $\mathcal{C}([a, b])$ é um espaço vetorial real.

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$, com a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função $\}$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Verifique se $\mathcal{C}([a,b])$ é um espaço vetorial real.
2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$, com a operação de adição de elementos e a operação de multiplicação por escalar definidas em $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função $\}$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Verifique se $\mathcal{C}([a,b])$ é um espaço vetorial real.
2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
3. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.
   Mostre que $Z = \mathcal{V} \times \mathcal{U} = \{(v,u)/v \in \mathcal{V}$ e $u \in \mathcal{U}\}$ munido das seguintes operações:
   (i) $(v_1, u_1) + (v_2, u_2) = (v_1 + v_2, u_1 + u_2)$
   (ii) $\lambda(v,u) = (\lambda v, \lambda u), \lambda \in \mathbb{K}$

   é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, 1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, 1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, 1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$.
7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.

Verifique nos itens abaixo, se $\mathcal{W}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$
2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0, 1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$.
7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.

Subespaços Vetoriais

Exercícios - Respostas

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a, b]); (f + g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f + g) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

Subespaços Vetoriais

Exercícios - Respostas

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a, b]); (f + g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f + g) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

   1.1 $\forall f, g \in C([a, b]); (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

   1.2 $\forall f, g, h \in C([a, b]); (f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$

   1.3 $\exists f_0 \in C([a, b]) \mid \forall f \in C([a, b]); (f + f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

   1.4 $\exists - f(x) \in C([a, b]) \mid \forall f \in C([a, b]); (f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
      1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

      1.4 $\exists - f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Subespaços Vetoriais

Exercícios - Respostas

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
      1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
      1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

   1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

   1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

   1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

   1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

   1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$

   1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]);$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
      1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
      1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$
      1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda \beta f)(x) = (\lambda \beta) f(x) = (\beta \lambda) f(x) = (\beta \lambda f)(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   - (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
     - 1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
     - 1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
     - 1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
     - 1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   - (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
     - 1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$
     - 1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda\beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta\lambda f)(x)$
     - 1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]);$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

   1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

   1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

   1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

   1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

   1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda+\beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$

   1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda\beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta\lambda f)(x)$

   1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

   1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

   1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f + (g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

   1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f + f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

   1.4 $\exists - f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

   1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$

   1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda \beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta \lambda f)(x)$

   1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$

   1.4 $\lambda = 1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f(x)$

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
      1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
      1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$
      1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda \beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta \lambda f)(x)$
      1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$
      1.4 $\lambda = 1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f(x)$
      $\lambda = -1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = -f(x)$;

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:

   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

   1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

   1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$

   1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$

   1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$

   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

   1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$

   1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda\beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta\lambda f)(x)$

   1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$

   1.4 $\lambda = 1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f(x)$
   $\lambda = -1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = -f(x)$;
   $\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f_0(x)$.

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
      1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
      1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
      1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
      1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
      1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda + \beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$
      1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda \beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta\lambda f)(x)$
      1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$
      1.4 $\lambda = 1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f(x)$
      $\lambda = -1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = -f(x)$;
      $\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f_0(x)$.
      Assim, por (i) e (ii) concluimos que $C([a,b])$ é um espaço vetorial real.

1. Seja o conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é uma função contínua $\}$. Verificando a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar:
   (i) $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow (f+g) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
   1.1 $\forall f, g \in C([a,b]); (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$
   1.2 $\forall f, g, h \in C([a,b]); (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) = ((f+g)+h)(x)$
   1.3 $\exists f_0 \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x)$
   1.4 $\exists -f(x) \in C([a,b]) \mid \forall f \in C([a,b]); (f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = f_0(x)$
   (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \Longrightarrow (\lambda f) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
   1.1 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda+\beta) f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$
   1.2 $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; \forall f \in C([a,b]); (\lambda\beta f)(x) = (\lambda\beta) f(x) = (\beta\lambda) f(x) = (\beta\lambda f)(x)$
   1.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f, g \in C([a,b]); (\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$
   1.4 $\lambda = 1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f(x)$
   $\lambda = -1 \Rightarrow (\lambda f)(x) = -f(x)$;
   $\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda f)(x) = f_0(x)$.
   Assim, por (i) e (ii) concluimos que $C([a,b])$ é um espaço vetorial real.

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva :

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow$

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$;

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois;

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real. Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois; se $\lambda \leq 0, \beta \leq 0$

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois; se $\lambda \leq 0, \beta \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \leq 0$

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois; se $\lambda \leq 0, \beta \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \notin \mathcal{V}$.

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois; se $\lambda \leq 0, \beta \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \notin \mathcal{V}$.
   Logo, com este contra-exemplo provamos que $(V, +, .)$ não é um espaço vetorial real com a adição e produto definidos.

2. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Definido com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$: Verique se $(\mathcal{V}, +, .)$ é um espaço vetorial real.
   Analisando se $\mathcal{V}$ é fechado na multiplicação por escalar, notamos que por exemplo, na propriedade distributiva : $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$; não podemos garantir que $(\lambda + \beta)x \in \mathcal{V}$ pois; se $\lambda \leq 0, \beta \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \leq 0 \Rightarrow (\lambda + \beta)x \notin \mathcal{V}$.
   Logo, com este contra-exemplo provamos que $(V, +, .)$ não é um espaço vetorial real com a adição e produto definidos.

3. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.
Mostre que $Z = \mathcal{V} \times \mathcal{U} = \{(v, u)/v \in \mathcal{V} \text{ e } u \in \mathcal{U}\}$ munido das seguintes operações:

   (i) $(v_1, u_1) + (v_2, u_2) = (v_1 + v_2, u_1 + u_2)$
   (ii) $\lambda(v, u) = (\lambda v, \lambda u), \lambda \in \mathbb{K}$

   é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.
   "Verificar as oito propriedades!"

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \implies tr(A) = tr(B) = 0$; e,

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) =$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) =$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 =$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) =$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) =$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda .0$

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda.0 = 0; \lambda A \in \mathcal{W}$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda.0 = 0; \lambda A \in \mathcal{W}$.

   Logo, por (i) e (ii), temos que $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$

   Verificando as propriedades:

   (i) $\forall A, B \in W \Longrightarrow tr(A) = tr(B) = 0$; e,
   $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow A + B \in \mathcal{W}$;

   (ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda .0 = 0; \lambda A \in \mathcal{W}$.

   Logo, por (i) e (ii), temos que $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.
3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.

Subespaços Vetoriais

Exercícios - Respostas

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.

3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $C([a, b])$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.

3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $C([a, b])$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $f_0(a) = 0 \notin \mathcal{W}$.

2. Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $(0, 0) \notin W$ já que $0 - 2.(0) \neq 1$.

3. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) | f(a) = 1\}$.
   $\mathcal{W}$ não é um subespaço vetorial de $C([a, b])$.
   Tomando como contra-exemplo o vetor nulo: $f_0(a) = 0 \notin \mathcal{W}$.

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0$ e

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0$ e $p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

 (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
 $(p+q)^{'}(1) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
   $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
   $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e, $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
   $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

   (ii) $(\alpha p)(t) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e, $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;
   (ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t))$;

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   - (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e, $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;
   - (ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}$;

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0$ e $p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

(i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
$(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

(ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

(i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
$(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

(ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
   $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

   (ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) = \alpha(0) = 0$; e,

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

(i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
$(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

(ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) = \alpha(0) = 0$; e,
$\alpha(p^{'}(1)) =$

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

(i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
$(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;

(ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) = \alpha(0) = 0$; e,
$\alpha(p^{'}(1)) = \alpha(0) = 0 \Longrightarrow$;

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
$\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,

   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e,
   $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;
   (ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) = \alpha(0) = 0$; e,
   $\alpha(p^{'}(1)) = \alpha(0) = 0 \Longrightarrow; (\alpha p)(t) \in \mathcal{W}$.

4. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) | p(-1) = 0 \text{ e } p^{'}(1) = 0\}$.
   $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$ pois,
   (i) $\forall p(t), q(t) \in W \Longrightarrow (p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$; e, $(p+q)^{'}(1) = p^{'}(1) + q^{'}(1) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow p + q \in \mathcal{W}$;
   (ii) $(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)); \forall p(t) \in \mathcal{W}; \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha(p(-1)) = \alpha(0) = 0$; e, $\alpha(p^{'}(1)) = \alpha(0) = 0 \Longrightarrow; (\alpha p)(t) \in \mathcal{W}$.

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois;

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois; $\int_{-1}^{1} \alpha f(x)dx =$

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois; $\int_{-1}^{1} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois; $\int_{-1}^{1} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$ para $\alpha \geq 0$.

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.
   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois; $\int_{-1}^{1} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$ para $\alpha \geq 0$.
   Porém, $\alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$ para $\alpha < 0$.

5. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{C}([0,1])$ e $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0\}$.

   não é um subespaço vetorial de $C([0,1])$ pois; $\int_{-1}^{1} \alpha f(x)dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$ para $\alpha \geq 0$.
   Porém, $\alpha \int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$ para $\alpha < 0$.

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$.

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$.

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) +$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e

   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) +$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e

   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que
   - (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e
   - (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) = (\lambda \int_{-1}^{1} p(t)dt)$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e
   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) = (\lambda \int_{-1}^{1} p(t)dt) + \lambda p^{'}(0) =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e

   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) = (\lambda \int_{-1}^{1} p(t)dt) + \lambda p^{'}(0) = \lambda(\int_{-1}^{1} p(t)dt + p^{'}(0)) =$

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e

   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) = (\lambda \int_{-1}^{1} p(t)dt) + \lambda p^{'}(0) = \lambda(\int_{-1}^{1} p(t)dt + p^{'}(0)) = \lambda(0) = 0$.

6. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) = 0\}$. é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pois, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall p, q \in \mathcal{W}$, temos que

   (i) $(\int_{-1}^{1}(p+q)(t)dt) + (p+q)^{'}(0) = (\int_{-1}^{1} p(t)dt) + p^{'}(0) + (\int_{-1}^{1} q(t)dt) + q^{'}(0) = 0 + 0 = 0$; e

   (ii) $(\int_{-1}^{1}(\lambda p)(t)dt) + (\lambda p)^{'}(0) = (\lambda \int_{-1}^{1} p(t)dt) + \lambda p^{'}(0) = \lambda(\int_{-1}^{1} p(t)dt + p^{'}(0)) = \lambda(0) = 0.$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t +$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;
   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
(ii) $\alpha A =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;
   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;
   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t$;

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;
   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A+B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;
   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A+B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

   Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

   Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
(ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
(ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
$\alpha A =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A+B})^t$; porém,
(ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
$\alpha A = \alpha(\overline{A})^t =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

   Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
   $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t =$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

(i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
(ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
$\alpha A = \alpha(\overline{A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t = (\overline{\alpha A})^t$

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A + B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

   Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
   $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t = (\overline{\alpha A})^t \Rightarrow \mathcal{W}$ é um subespaço Real.

7. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | A = (\overline{A})^t\}$.
   não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$, pois;

   (i) $A + B = (\overline{A})^t + (\overline{B})^t = (\overline{A+B})^t$; porém,
   (ii) $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t \neq (\overline{\alpha A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t; \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

   Observe que se o corpo fosse $\mathbb{R}$, teríamos $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{\alpha} \Rightarrow$
   $\alpha A = \alpha(\overline{A})^t = \overline{\alpha}(\overline{A})^t = (\overline{\alpha A})^t \Rightarrow \mathcal{W}$ é um subespaço Real.