Respostas - 1^a LISTA EXERCÍCIO

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$

3. (a) A é uma matriz simétrica.
   (b) B é uma matriz anti-simétrica.
   (c) C não é simétrica e nem anti-simétrica.
   (d) D não é simétrica e nem anti-simétrica.
   (e) E é uma matriz simétrica.
   (f) F é uma matriz anti-simétrica.

4. Como hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = A + A^t$ e $C = A - A^t$; e como tese: $B = B^t$ e $C^t = -C$. Assim, considerando a hipótese e as propriedades :
   $(1)(A+B)^t = A^t + B^t$, $(2)(A^t)^t = A$, $(3)A+B = B+A$, $(4)\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \alpha \in \mathbb{C}$; temos que:
   $B^t = (A + A^t)^t \stackrel{(1)}{=} A^t + (A^t)^t \stackrel{(2)}{=} A^t + A \stackrel{(3)}{=} A + A^t = B$, ou seja, $B^t = B$; logo, B é uma matriz simétrica.
   Do mesmo modo, $C^t = (A - A^t)^t \stackrel{(1)}{=} A^t - (A^t)^t \stackrel{(2)}{=} A^t - A \stackrel{(3)}{=} -A + A^t \stackrel{(4)}{=} -(A - A^t) = -C$, ou seja, $C^t = -C$; logo, C é uma matriz anti-simétrica.

5. Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$ (ou $A = -A^t$); e como tese: A é uma matriz normal, ou seja, $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A$. Assim, considerando a hipótese e as propriedades : $(1) A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{A} = A$, $(2) \alpha\beta(A.B) = \alpha A.\beta B; \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$; temos que:
   (i) para $A = A^t$: $A.\overline{A}^t \overset{(1)}{=} A.A^t = A^t.A \overset{(1)}{=} \overline{A}^t.A$; e,
   (ii) para $A = -A^t$: $A.\overline{A}^t \overset{(1)}{=} A.A^t = -A^t.-A \overset{(2)}{=} A^t.A \overset{(1)}{=} \overline{A}^t.A$;
   logo, por (i) e (ii), A é uma matriz normal.

---

6. Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = \overline{A}^t$ (ou $A = -\overline{A}^t$); e como tese: A é uma matriz normal, ou seja, $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A$. Assim, considerando a hipótese e a propriedade : $(1)\alpha\beta(A.B) = \alpha A.\beta B; \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$; temos que:
   (i) para $A = \overline{A}^t$: $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A$; e,
   (ii) para $A = -\overline{A}^t$: $A.\overline{A}^t = -\overline{A}^t.-A \overset{(1)}{=} \overline{A}^t.A$;
   logo, por (i) e (ii), A é uma matriz normal.

---

7. Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C = A + \overline{A}^t$ e $D = A.\overline{A}^t$; e como tese: C e D são matrizes hermitianas, ou seja, $C = \overline{C}^t$ e $D = \overline{D}^t$. Assim, considerando a hipótese e as propriedades :
   $(1)\overline{A}^t = \overline{(A^t)}, (2)\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}, (3)\overline{\overline{A}} = A, (4)(A+B)^t = A^t + B^t, (5)(A^t)^t = A, (6)A + B = B + A, (7)\overline{(A.B)} = \overline{A}.\overline{B}, (8)(A.B)^t = B^t.A^t$; temos que:
   (i) $\overline{C}^t \overset{(1)}{=} \overline{(C^t)} = \overline{((A+\overline{A}^t)^t)} \overset{(4)}{=} \overline{(A^t + (\overline{A}^t)^t)} \overset{(5)}{=} \overline{(A^t + \overline{A})} \overset{(2)}{=} \overline{(A^t)} + \overline{\overline{A}} \overset{(3)}{=} \overline{(A^t)} + A \overset{(6)}{=} A + \overline{(A^t)} = C$; e,
   (ii) $\overline{D}^t \overset{(1)}{=} \overline{(D^t)} = \overline{((A.\overline{A}^t)^t)} \overset{(8)}{=} \overline{((\overline{A}^t)^t.A^t)} \overset{(5)}{=} \overline{(\overline{A}.A^t)} \overset{(7)}{=} \overline{\overline{A}}.\overline{(A^t)} \overset{(3)}{=} A.\overline{(A^t)} = D$;
   logo, por (i) e (ii), C e D são matrizes hermitianas.

---

8. (a) A não é hermitiana, não é anti-hermitiana e nem normal.
   (b) B não é hermitiana, não é anti-hermitiana e nem normal.
   (c) C é uma matriz complexa anti-hermitiana e normal.
   (d) D é uma matriz complexa hermitiana e normal.
   (e) E é uma matriz real simétrica e normal.
   (f) F é uma matriz real anti-simétrica e normal.

9. Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; e como tese: $tr(\overline{A}^t) = \overline{tr(A)}$. Pela hipótese e utilizando as propriedades do traço de uma matriz:
$(1) tr(\overline{A}) = \overline{tr(A)}, (2) tr(A^t) = tr(A)$; temos que: $tr(\overline{A}^t) \stackrel{(1)}{=} \overline{(tr(A^t))} \stackrel{(2)}{=} \overline{tr(A)}$.

---

10. Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que A é invertível. Pela definição de matrizes invertíveis: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n \quad (1)$.
Por tese: $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.
Assim, considerando a hipótese e as propriedades $(2)\overline{(A.B)} = \overline{A}.\overline{B}, (3)\overline{I_n} = I_n$; vamos aplicar o conjugado em (1) :
$\overline{(A.A^{-1})} = \overline{(A^{-1}.A)} = \overline{(I_n)} \stackrel{(2),(3)}{\Longrightarrow} (\overline{A}).\overline{(A^{-1})} = \overline{(A^{-1})}.(\overline{A}) = I_n \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \overline{(A)}^{-1} = \overline{(A^{-1})}$; ou seja, as matrizes $(\overline{A})$ e $\overline{(A^{-1})}$ comutam e o produto resultante é a matriz $I_n \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} (\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

---

11. Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tais que A e B são invertíveis e ainda, $A^{-1} = A^t; B^{-1} = B^t \quad (1)$.
Tese: $(AB)^{-1} = (AB)^t$.
Propriedades: $(2)(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}, (3)(A.B)^t = B^t.A^t$.
Considerando as hipóteses(1) e aplicando as propriedades$(2), (3)$ acima temos que:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$; logo, o produto (AB) é uma matriz ortogonal.

---

12. Para A ser ortogonal, consideramos que $A^{-1} = A^t$. Pela definição de matrizes invertíveis: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$; substituindo: $A.A^t = A^t.A = I_n$; aplicando neste caso particular para $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \text{x} \\ \text{y} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$; obtemos
$A.A^t = \begin{bmatrix} x^2+2 & \sqrt{2}y+\sqrt{2}x \\ \sqrt{2}y+\sqrt{2}x & y^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; pela igualdade de matrizes:
$x^2 + 2 = 1$; $y^2 + 2 = 1$; e $\sqrt{2}y + \sqrt{2}x = 0 \Rightarrow \quad x = \pm i; \quad y = \pm i; \quad x = -y$; desta forma, podemos afirmar que não existem $x, y \in \mathbb{R}$ para que a matriz A seja ortogonal.

---

13. Por hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tais que $A^2 = A$ e $B = I_n - A$.

Tese: (i) $B^2 = B$ e (ii) $AB = BA = \mathrm{O}_n$.

Propriedades: $(2) A.(B+C) = A.B + A.C, (3) A_n.I_n = A_n, (4)(I_n)^2 = I_n, (5)(\alpha.A).(\beta.B) = (\alpha.\beta).A.B; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, (6)(\alpha+\beta).A = (\alpha.A) + (\beta.A); \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Então, vamos utilizar a definição de potenciação para a matriz B, as hipóteses e as propriedades definidas acima: (i) $B^2 = B.B = (I_n - A).(I_n - A) = (I_n)^2 - I_n.A - A.I_n + (-A)^2 = I_n - A - A + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$; logo, $B^2 = B$.

(ii) $AB = A.(I_n - A) = A.I_n - A.A = A - A^2 = A - A = \mathrm{O}_n$; do mesmo modo, $BA = (I_n - A)A = I_n.A - A.A = A - A^2 = A - A = \mathrm{O}_n$, assim, provamos que A comuta com B e resulta na matriz nula O_n de mesma ordem.

---

14. As matrizes A e B são IDEMPOTENTES, porém C não o é.

---

15. As matrizes A e B são AUTOREFLEXIVAS, porém C não o é.

---

16. (F) Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = A^t$; e como tese: A é uma matriz normal, ou seja, $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A$. Assim, considerando a hipótese; vamos supor que $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A \Longrightarrow A.\overline{A} = \overline{A}.A \Longrightarrow (F)$ pois não podemos afirmar que $A = \overline{A}$; logo, A não é uma matriz normal.

(V) Por hipótese temos que: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$; e como tese: A é uma matriz normal, ou seja, $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A$. Considerando a hipótese e a propriedade $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{A} = A$; vamos supor que $A.\overline{A}^t = \overline{A}^t.A \Longrightarrow A.\overline{A} = \overline{A}.A \Longrightarrow A.A = A.A \Longrightarrow A^2 = A^2$; logo, A é uma matriz normal.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A = A^t$ e $B = B^t$;

Tese: $\overline{(A+B)^t}.\overline{(A+B)} = \overline{(A+B)}.\overline{(A+B)^t}$.

Aplicando as propriedades (1) $\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t$;

(2) $\overline{\overline{(A+B)}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$; e fazendo $C = \overline{(A+B)}$ e $\overline{C}^t = \overline{\overline{(A+B)^t}}$; temos, $\overline{C}^t.C = \overline{\overline{(A+B)^t}}.\overline{(A+B)} = (\overline{\overline{A^t}} + \overline{\overline{B^t}}).\overline{(A^t+B^t)} = (A^t + B^t).(\overline{A}^t + \overline{B}^t) = (A + B).\overline{(A+B)}^t = \overline{C}.C^t$.

$C.\overline{C}^t = \overline{(A+B)}.\overline{(A+B)^t} = \overline{(A^t+B^t)}.(\overline{\overline{A^t}}+\overline{\overline{B^t}}) = (\overline{A}^t+\overline{B}^t).(A^t+B^t) = \overline{(A+B)}^t.(A+B) = C^t.\overline{C}$.

Concluimos que a igualdade é uma falsidade, ou ainda, podemos verificar se $C^t.\overline{C} = \overline{C}.C^t \Longrightarrow (\overline{A}^t+\overline{B}^t).(A+B) = (A+B).(\overline{A}^t+\overline{B}^t) \Longrightarrow \overline{A}^t.A+\overline{A}^t.B+\overline{B}^t.A+\overline{B}^t.B = A.\overline{A}^t+A.\overline{B}^t+B.\overline{A}^t+B.\overline{B}^t \Longrightarrow \overline{A}.A+\overline{A}.B+\overline{B}.A+\overline{B}.B = A.\overline{A}+A.\overline{B}+B.\overline{A}+B.\overline{B} \Longrightarrow (F)$.

Observe que esta afirmação seria verdadeira se as matrizes fossem reais; pois, teríamos as identidades $\overline{A} = A$ e $\overline{B} = B$ o que resultaria na igualdade : $\overline{A}.A+\overline{A}.B+\overline{B}.A+\overline{B}.B = A.\overline{A}+A.\overline{B}+B.\overline{A}+B.\overline{B} \Longrightarrow A.A+A.B+B.A+B.B = A.A+A.B+B.A+B.B \Longrightarrow A^2+A.B+B.A+B^2 = A^2+A.B+B.A+B^2 \Longrightarrow (V)$

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A = A^t$ e $B = B^t$.

Tese: $(AB)^t = (AB)$.

Assumindo uma matriz $C = A.B$ devemos provar que C é uma matriz simétrica.

Então, aplicando as propriedades de transposta do produto de matrizes, obtemos; $C^t = (A.B)^t = B^t.A^t = B.A \neq C$; logo, o produto de matrizes simétricas não é uma matriz simétrica.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; tais que $A = \overline{A}^t$ e $B = \overline{B}^t$.

Tese: $(A+B)^t = (A+B)$.

Assumindo uma matriz $C = A+B$ devemos provar que C é uma matriz simétrica.

Então, utilizando a hipótese e as seguintes propriedades: $(1)(A^t)^t = A, (2)(A+B)^t = A^t+B^t, (3) A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{A} = A$; temos que, $C^t = (A+B)^t = A^t+B^t = (\overline{A}^t)^t+(\overline{B}^t)^t = \overline{A}+\overline{B} = A+B = C$; logo, a soma de matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; tais que $A = -A^t$ e $B = -B^t$.

Tese: $C = -C^t$ onde $C = (A+\alpha B); \alpha \in \mathbb{R}$.

Então, utilizando a hipótese e as seguintes propriedades: $(1)(A^t)^t = A, (2)(A+B)^t = A^t+B^t, (3)(\alpha.\beta)A = \alpha(\beta A)$; temos que, $-C^t = -(A+\alpha B)^t = -(-A^t-\alpha B^t)^t = -((-A^t)^t-(\alpha B^t)^t) = -(-A-\alpha B) = A+\alpha B = C$; logo, C é uma matriz anti-simétrica.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; tais que $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$.

Tese: $(A.B)^{-1} = (A.B)^t$.

Assumindo uma matriz $C = A.B$ devemos provar que C é uma matriz ortogonal.

Então, aplicando as propriedades de transposta e inversa do produto de matrizes, obtemos; $C^t = (A.B)^t = B^t.A^t = B^{-1}.A^{-1} = (A.B)^{-1} = C^{-1}$; logo, o produto também é uma matriz ortogonal.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$.

Tese: $(A.B)^{-1} = (A.B)^t$.

Assumindo uma matriz $C = A.B$ devemos provar que C é uma matriz ortogonal.

Então, aplicando as propriedades de transposta e inversa do produto de matrizes, obtemos; $C^t = (A.B)^t = B^t.A^t = B^{-1}.A^{-1} = (A.B)^{-1} = C^{-1}$; logo, o produto também é uma matriz ortogonal.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$.

Tese: $(A.B)^t = (A^{-1}.B^{-1})$.

Então, aplicando as propriedades de transposta e inversa do produto de matrizes, obtemos; $(A.B)^t = B^t.A^t = B^{-1}.A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$.

Tese: $(A.B)^{-1} = (A.B)^t$.

Assumindo uma matriz $C = A.B$ devemos provar que C é uma matriz ortogonal.

Então, aplicando as propriedades de transposta e inversa do produto de matrizes, obtemos; $C^t = (A.B)^t = B^t.A^t = B^{-1}.A^{-1} = (A.B)^{-1} = C^{-1}$; logo, o produto também é uma matriz ortogonal.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A^2 = A, B^2 = B$.

Tese: $(A + B) = (A + B)^2$.

por definição de produto e da propriedade distributiva entre matrizes:

$(A + B)^2 = (A + B).(A + B) = A^2 + A.B + B.A + B^2$, como $A^2 = A, B^2 = B$, temos que $(A + B)^2 = A + A.B + B.A + B \neq (A + B)$; pois não podemos afirmar que $A.B = B.A = \mathrm{O}_n$. Logo, a afirmação é falsa.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A^2 = A, B^2 = B$.

Tese: $(A.B) = (A.B)^2$.

aplicando a definição de produto entre matrizes, vamos supor que:

$(A.B) = (A.B)^2 \Longrightarrow A^2.B^2 = (A.B).(A.B) \Longrightarrow A^2.B^2 = (A^2.B^2).(A^2.B^2) \Longrightarrow A^2.B^2 = (A^2.B^2)^2 \Longrightarrow (F)$. Logo, chegamos numa contradição.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A = -\overline{A}^t$ e $B = -\overline{B}^t$;

Tese: $(A.B)^t = \overline{(A.B)}$.

Aplicando as propriedades (1) $(A.B)^t = B^t.A^t$; (2) $\overline{(\overline{A})} = A$; e, (3) $(\alpha A).(\beta B) = \alpha.\beta(AB)$; e supondo que,

$(A.B)^t = \overline{(A.B)} \Longrightarrow B^t.A^t = \overline{A}.\overline{B} \Longrightarrow \overline{B^t.A^t} = \overline{\overline{A}.\overline{B}} \Longrightarrow \overline{B^t}.\overline{A^t} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} \Longrightarrow -B. - A = A.B \Longrightarrow B.A = A.B \Longrightarrow (F)$. Logo, chegamos numa contradição.

(V) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tais que $A = \overline{A}^t$ e $B = \overline{B}^t$;

Tese: $(A + B).\overline{(A + B)}^t = \overline{(A + B)}^t.(A + B)$.

Aplicando as propriedades (1) $(A+B)^t = A^t+B^t$; (2) $\overline{(A + B)} = \overline{A}+\overline{B}$; (3) $(\alpha A).(\beta B) = \alpha.\beta(AB)$; e assumindo a matriz $C = A + B$, fazemos;

$C.\overline{C}^t = (A+B).\overline{(A + B)}^t = (\overline{A}^t+\overline{B}^t).(\overline{A}^t+\overline{B}^t) = \overline{(A^t + B^t)}.(A+B) = \overline{(A + B)}^t.(A+B) = \overline{C}^t.C \Longrightarrow C$ é uma matriz normal.

(V) ver exercício (7) resolvido.

(F) Hipótese: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

Tese: $tr(A) = tr(\overline{A}^t)$.

temos por propriedades do traço de uma matriz que $tr(A) = tr(A^t)$ e $tr(\overline{A}) = \overline{tr(A)}$, assim; $tr(\overline{A^t}) = \overline{tr(A^t)} = \overline{tr(A)} \neq tr(A)$, pois A é matriz complexa. Logo, a afirmação é falsa.

(V) Hipótese: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tal que $A^t = A^{-1}$.

Tese: $tr(A) = tr(A^{-1})$;

temos por propriedade do traço de uma matriz que $tr(A) = tr(A^t)$.

Agora, utilizando a hipótese e a propriedade do traço da matriz transposta, obtemos; $tr(A) = tr(A^t) = tr(A^{-1})$, pois A é matriz ortogonal. Logo, a afirmação é verdadeira.

(V) Hipótese: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Tese: $tr(A) = tr(A^t)$.

temos por definição do traço de uma matriz que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$; e, por definição da transposta de uma matriz, os seus elementos são obtidos $a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j$. Então, para $i = j$, os elementos destas duas matrizes são iguais ($a_{ii} = a_{ii}; \forall i$). Deste modo, o cálculo do traço da matriz transposta utilizará os mesmos escalares da diagonal principal da matriz A. Por conseguinte, $tr(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$.

(V) Hipótese: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; tal que $A = A^t$

Tese: $tr(A) = tr(\overline{A}^t)$.

por hipótese temos que; $tr(A) = tr(A^t)$ mas, A sendo uma matriz real assume a propriedade: $A = \overline{A} \Longrightarrow tr(A) = tr(A^t) = tr(\overline{A^t})$. Logo, a afirmação é verdadeira.

(V) Hipótese: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; tal que $A = \overline{A}^t$ (1)

Tese: $\overline{tr(A)} = tr(A)$.

Considerando as propriedades do traço de uma matriz: (2) $tr(A) = tr(A^t)$; (3) $tr(\overline{A}) = \overline{tr(A)}$; vamos mostrar a tese: $tr(A) \overset{(1)}{=} tr(\overline{A}^t) \overset{(3)}{=} \overline{tr(A^t)} \overset{(2)}{=} \overline{tr(A)}$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

(F) Hipótese: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

Tese: $tr(A^t + \alpha(B^{-1}AB)) = 2\alpha tr(A)$.

Considerando as seguintes propriedades entre matrizes e do traço de uma matriz (1) $tr(A^t) = tr(A)$; (2) $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$; (3) $tr(AB) = tr(BA)$; (4) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A),\ \alpha \in \mathbb{C}$; (5) $A.(B.C) = (A.B).C$; (6) $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$; (7) $A.I_n = A$; obtemos

$tr(A^t + \alpha(B^{-1}AB)) \overset{(2)}{=} tr(A^t) + tr(\alpha(B^{-1}AB)) \overset{(1),(4),(5)}{=} tr(A) + \alpha(tr((B^{-1}A).B)) \overset{(3)}{=} tr(A) + \alpha(tr(B.(B^{-1}A))) \overset{(5)}{=} tr(A) + \alpha(tr((B.B^{-1})A)) \overset{(6),(7)}{=} tr(A) + \alpha(tr(A)) = (1+\alpha)(tr(A)) \neq 2\alpha tr(A)$.