UFBa - IME - DMAT —- Álgebra Linear I(MATA07) - Profa: Isamara
4ª LISTA de EXERCÍCIOS - Espaços Vetoriais

---

1. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{C}^3$: $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+z=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y=0 \text{ e } z=0\}$. Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $\mathbb{C}^3$: $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$, e $W_1 + W_2$.

---

2. Considere os seguintes subespaços de $P_2(\mathbb{C})$: $W_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C}) \mid a_0 = a_1\}$, $W_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C}) \mid a_2 = 0\}$. Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $P_2(\mathbb{C})$: $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$, e $W_1 + W_2$.

---

3. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z+w=0\}$. Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$: $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$, e $W_1 + W_2$.

---

4. Considere os seguintes subespaços de $M_3(\mathbb{C})$: $W_1 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0; \forall i \neq j\}$, $W_2 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = a_{ji}; \forall i,j\}$, e $W_3 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = -a_{ji}; \forall i,j\}$. Determine os subconjuntos e verifique se são subespaços vetoriais do $M_3(\mathbb{C})$: $W_1 \cap W_2 \cap W_3$, $W_1 \cup W_2 \cup W_3$, e $W_1 + W_2 + W_3$.

---

5. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que, $\mathcal{W}_1 = \{u = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z=y \text{ e } w=0\}$; e, $\mathcal{W}_2 = [e_1, 3e_3 + e_4]$.
(Responda os itens abaixo justificando suas respostas.)
   (a) Verifique se $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determine uma base e a dimensão para os seguintes subespaços: $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
   (c) Verifique se $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.
   (d) Determine um subespaço $\mathcal{W}$ tal que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}$.

---

6. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ um espaço vetorial de dimensão finita e; sejam $\mathcal{W}_1 = [e_1 + e_4, 3e_2]$ e $\mathcal{W}_2 = [2e_1 - e_3]$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
(Responda os itens abaixo justificando suas respostas.)
   (a) Determine uma base ordenada $\beta_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$, diferente da base canônica, para o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$; utilizando uma base do subespaço $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
   (b) Ache a matriz mudança da base canônica do $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ para a base $\beta_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$ encontrada no item (a).
   (c) Determine as coordenadas do vetor $u = e_1 + 3e_2 - e_3 + 4e_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$ utilizando a matriz do item (b).

---

7. Considere os seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [e_1, e_2 + e_3, e_4]; \quad e \quad W_2 = [2e_1, 3e_4].$$

   (a) Determine, se possível, a DIMENSÃO de cada um dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$:
      (i) $W_1 \cup W_2$
      (ii) $W_1 \cap W_2$
      (iii) $W_1 + W_2$
   (b) Verifique se o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ é SOMA DIRETA dos subespaços W_1 e W_2.

---

8. Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, e as seguintes bases ordenadas:
$\beta_{\mathbb{R}^4} = \{e_1 + 2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$ e, $\beta'_{\mathbb{R}^4}$ a base canônica.

   (a) Determine a MATRIZ MUDANÇA DA BASE $\beta'_{\mathbb{R}^4}$ para a base $\beta_{\mathbb{R}^4}$: $[I]^{\beta'_{\mathbb{R}^4}}_{\beta_{\mathbb{R}^4}}$.
   (b) Determine a MATRIZ DAS COORDENADAS do vetor $v = 3e_1 + e_2 - 4e_4 \in \mathbb{R}^4$ em relação à base $\beta_{\mathbb{R}^4}$, utilizando a matriz $[I]^{\beta'_{\mathbb{R}^4}}_{\beta_{\mathbb{R}^4}}$.

---

9. Considere os seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \;\; e \;\; y - 2z = 0\}; \quad e \quad W_2 = [(1, 0, 1)].$$

   (a) Determine, se possível, a DIMENSÃO de cada um dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$:
      (i) $W_1 \cup W_2$
      (ii) $W_1 \cap W_2$
      (iii) $W_1 + W_2$
   (b) Verifique se o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ é SOMA DIRETA dos subespaços W_1 e W_2.

---

10. Sejam o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ de dimensão finita, e as bases ordenadas:
$\beta_{P_3(\mathbb{R})} = \{1 + 2t, -t^3, 1, 2t^2\}$; e $\beta'_{P_3(\mathbb{R})}$ a base canônica.

   (a) Determine a MATRIZ MUDANÇA DA BASE $\beta'_{P_3(\mathbb{R})}$ para a base $\beta_{P_3(\mathbb{R})}$: $[I]^{\beta'_{P_3(\mathbb{R})}}_{\beta_{P_3(\mathbb{R})}}$.
   (b) Determine a MATRIZ DAS COORDENADAS do vetor $p(t) = 3 + t - 4t^3 \in P_3(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta_{P_3(\mathbb{R})}$, utilizando a matriz $[I]^{\beta'_{P_3(\mathbb{R})}}_{\beta_{P_3(\mathbb{R})}}$.

---

11. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{C}^3$: $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y = 0$ e $z = 0\}$. Verifique se $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$.

---

12. Considere os seguintes subespaços de $M_3(\mathbb{C})$: $W_1 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{ij} = 0; \forall i \neq j\}$, $W_2 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j\}$, e $W_3 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j\}$. Verifique se $M_3(\mathbb{C}) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

---

13. Considere os seguintes subespaços de $P_2(\mathbb{C})$: $W_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C})/a_0 = a_1\}$, $W_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C})/a_2 = 0\}$. Verifique se $P_2(\mathbb{C}) = W_1 \oplus W_2$.

---

14. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4/x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\}$. Determine um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

---

15. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{C})$: $W_1 = \{A \in M_2(\mathbb{C})/a_{ij} = 0; \forall i \neq j\}$. Determine um subespaço W_2 de $M_2(\mathbb{C})$ tal que $M_2(\mathbb{C}) = W_1 \oplus W_2$.

---

16. Considere o seguinte subespaço de $P_2(\mathbb{C})$: $W_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C})/a_1 + a_2 = 0\}$. Determine um subespaço W_2 de $P_2(\mathbb{C})$ tal que $P_2(\mathbb{C}) = W_1 \oplus W_2$.

---

17. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4/x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\}$. Determine um conjunto de geradores para o subespaço W.

---

18. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{C})$: $W = \{A \in M_2(\mathbb{C})/a_{ij} = 0; \forall i \neq j\}$. Determine um conjunto de geradores para o subespaço W.

---

19. Considere o seguinte subespaço de $P_3(\mathbb{R})$: $W = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R})/a_0 + 3a_2 = 0\}$. Determine um conjunto de geradores para o subespaço W.

---

20. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{C}_3$: $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}_3/x + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}_3/x + y = 0 \text{ e } z = 0\}$. Determine um conjunto de geradores para cada subespaço: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

---

21. Considere o seguinte subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$: $W = \{A \in M_2(\mathbb{R})/A = A^t \text{ e } tr(A) = 0\}$. Mostre que W é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$; e determine um conjunto de geradores para o subespaço W.

---

22. Considerando os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$: $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4/x + y - z + w = 0 \text{ e } z - w = 0\}$; $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4/x + y + z = 0\}$. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

---

23. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$: $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x - 4y + 6z = 0\}$; $W_2 = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)]$. Determine um conjunto de geradores para cada um dos subespaços: $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.

---

24. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores de $S = \{(1, 0, 1, 2), (2, -1, 1, 3), (-1, 1, 0, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ contendo uma base do subespaço W.

---

25. Considere o sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y + z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ x + 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Mostre que o conjunto solução S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e determine uma base para esse subespaço.

(b) Dado o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$, determine o subespaço $W \cap S$ e uma base para esse subespaço.

(c) Determine o subespaço vetorial $W + S$ e uma base para esse subespaço.

---

26. Sejam o espaço vetorial $V = \mathbb{C}^3$ e, $W_1 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x - y - z = 0\}$, $W_2 = [(1, 2, 1)]$ subespaços de V.

    (a) Identifique uma base para os subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (b) Determine a dimensão dos subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (c) $V = W_1 \oplus W_2$?

---

27. Sejam o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e, $W_1 = [(-1, 1, -1), (1, 2, 1)]$, $W_2 = [(2, 2, 1), (1, 1, -1)]$ subespaços de V.

    (a) Identifique uma base para os subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (b) Determine a dimensão dos subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (c) $V = W_1 \oplus W_2$?

---

28. Sejam o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ e, $W_1 = [e_2 - e_4, e_1 + e_2 + e_3]$, $W_2 = [e_1, e_2 + e_3]$ subespaços de V.

    (a) Identifique uma base para os subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (b) Determine a dimensão dos subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (c) $V = W_1 \oplus W_2$?

---

29. Sejam o espaço vetorial $V = P_2(\mathbb{R})$ e, $W_1 = [e_1 + e_2 + e_3]$, $W_2 = [e_1, e_2 - e_3]$ subespaços de V.

    (a) Identifique uma base para os subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (b) Determine a dimensão dos subespaços: $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, e $W_1 + W_2$.

    (c) $V = W_1 \oplus W_2$?

---

30. Seja $\mathbb{C}^2$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathcal{K}$.

    (a) Verifique se o conjunto $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \subset \mathbb{C}^2$, é uma base para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathcal{K} = \mathbb{C}$.

    (b) Verifique se o conjunto $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \subset \mathbb{C}^2$, é uma base para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.

---

31. Sejam os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: $W_1 = [(1,0,0)], W_2 = [(1,1,0),(0,1,1)]$. Verifique se $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

---

32. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Determine uma base para este espaço contendo elementos do conjunto $S = \{(1,0,-2,2),(1,2,-2,1)\}$.

---

33. Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ sobre o corpo $\mathcal{K}$. Determine uma base para $\mathbb{C}^3$ nos itens abaixo:

    (a) Considere $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, e os elementos do conjunto $S = \{(1,0,-2),(1,2,1)\}$.

    (b) Considere $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, e os elementos do conjunto $S = \{(1,0,-2),(1,2,1),(0,0,i)\}$.

---

34. Sejam V um espaço vetorial real, com $dim(V) = 9$, W_1 e W_2 subespaços de V tais que $dim(W_1) = 6$ e $dim(W_2) = 5$. Mostre que $2 \leq dim(W_1 \cap W_2) \leq 5$.

---

35. Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto $S = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$ seja uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

---

36. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $P_2(\mathbb{R})$: $W_1 = \{p(t) = a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R})/a - 2c = 0\}$ e $W_2 = [1-t, t-t^2]$. Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2$ e a $dim(W_1 + W_2)$.

---

37. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e a base $\beta_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,1)(1,0,1),(1,0,-1)\}$. Determine as coordenadas do vetor $u = (3,1,6) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base $\beta_{\mathbb{R}^3}$.

---

38. Seja $\beta_{P_2(\mathbb{R})} = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ uma base ordenada do espaço vetorial real $P_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas do vetor $p(t) = 2 + 4t + t^2$ em relação à base $\beta_{P_2(\mathbb{R})}$.

---

39. Considere o espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$ com a base ordenada $\beta_{M_2(\mathbb{R})} = \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4\}$. Determine o vetor de coordenadas $[A]_{\beta_{M_2(\mathbb{R})}}$ da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ dada por: $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

---

40. Sejam $\beta_{P_2(\mathbb{R})} = \{t, 1+t, 1-t^2\}$ e $\gamma_{P_2(\mathbb{R})} = \{e_1, e_2, e_3\}$ bases ordenadas do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$. Seja $p(t) = 2 + 4t + t^2 \in P_2(\mathbb{R})$. Determine $[p(t)]_{\beta_{P_2(\mathbb{R})}}$ e $[p(t)]_{\gamma_{P_2(\mathbb{R})}}$ usando as matrizes mudança de base: $[I]_\gamma^\beta$ e $[I]_\beta^\gamma$.

41. Considere a matriz mudança de base $[I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encontre:

    (a) $[v]_\beta$ onde $[v]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $[v]_\gamma$ onde $[v]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

42. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial qualquer de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$ ou $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$

( ) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se, $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ ou $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$

( ) $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial então está definida em $\mathcal{V}$ a soma e a multiplicação entre seus vetores, satisfazendo às propriedades: comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento simétrico.

( ) O próprio espaço vetorial $\mathcal{V}$ e o subespaço $\{\emptyset\}$ são os chamados subespaços vetoriais triviais de $\mathcal{V}$.

---

43. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
( ) $\beta_{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2} = \{0\}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$
( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$
( ) $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ e $dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$
( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

---

44. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; então, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se,
( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$
( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$
( ) $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$
( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{V}$
( ) N.R.A.

---

45. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$. Então,
( ) $\beta_{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2} = \{0\}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$
( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$
( ) $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ e $dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$
( ) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ e $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$
( ) N.R.A.

---

46. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial qualquer de dimensão finita sobre um corpo $\mathcal{K}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; tais que $dim(\mathcal{W}_1) = 2$ e $dim(\mathcal{W}_2) = 3$. Então,
( ) $dim(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = 5$
( ) $0 \leq dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \leq 2$
( ) $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$
( ) $5 \leq dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) \leq dim(\mathcal{V})$
( ) N.R.A.

---

47. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{W}_1 = [1 + t^2, 3t]$ e $\mathcal{W}_2 = [2t - t^2]$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
Responda os itens abaixo justificando suas respostas.

(a) Verifique se $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é soma direta de $\mathcal{W}_1$ com $\mathcal{W}_2$.

(b) Determine uma base ordenada para $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, onde esta base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$ seja diferente da base canônica.

(c) Determine a matriz mudança da base canônica do $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ para a base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$.

(d) Determine as coordenadas do vetor $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$ utilizando a matriz do item (c).

---

48. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$ e sejam $\mathcal{W}_1 = [1 + t^2, 3t]$ e $\mathcal{W}_2 = [2t - t^2]$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$.
Responda os itens abaixo justificando suas respostas.

(a) Verifique se $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ é soma direta de $\mathcal{W}_1$ com $\mathcal{W}_2$.

(b) Determine uma base ordenada para $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, onde esta base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$ seja diferente da base canônica.

(c) Determine a matriz mudança da base canônica do $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ para a base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$.

(d) Determine as coordenadas do vetor $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2(\mathbb{C})$ em relação à base $\beta_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2}$ utilizando a matriz do item (c).

---

49. Seja $\mathcal{V} = \mathbb{C}^4$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$ e sejam $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$; então, $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se, e somente se,

( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$

( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$

( ) $dim(\mathcal{W}_1) + dim(\mathcal{W}_2) = dim(\mathcal{V})$

( ) $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{V}$

( ) N.R.A.