Lista de exercícios do Módulo II
(cai na prova 2)

1) Usando a definição de função diferenciável, verifique se

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{e} \quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

são diferenciáveis em $(0,0)$.

2) Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de

$$f(x,y)=xe^{x^2-y^2}$$

em $(2,2,f(2,2))$.

3) Determine o plano que seja paralelo à $z=2x+3y$ e tangente ao gráfico de

$$f(x,y)=x^2+xy.$$

4) Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura 0,03 m. As medidas internas são: altura $=2m$ e raio da base $=1m$. A caixa é sem tampa. Calcule o valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

5) Suponha que, para todo x, $f(3x,x^3)=\operatorname{arctg} x$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)=2$

(b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1,f(3,1))$.

6) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2+xy+y^2=7$ e paralela à reta

$$4x+5y=17.$$

7) Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2+3y^2+2z^2=11/6$

e paralelo ao plano $x+y+z=10$.

8) Calcule a derivada direcional de $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ no ponto $(2,2)$ e na direção de $\vec{v}=(1,2)$.

9) Admita que $T(x,y)=16-x^2-y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano (x,y). Determine uma parametrização descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura

10) Calcule o volume do conjunto dado.

a) $0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq 1,\quad 0\leq z\leq x+2y$.

b) $0\leq x\leq 2,\quad 1\leq y\leq 2,\quad 0\leq z\leq \sqrt{xy}$

11) Calcule $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ sendo dados:

(a) $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+y^2}$ e B é o retângulo $0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq 1$.

(b) $f(x,y)=(\cos 2y)\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}$ e B sendo o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,\pi/2)$ e $(\pi/2,\pi/2)$.

(c) $f(x,y)=\dfrac{y}{x+y^2}$ e B é o conjunto dos (x,y) tais que $1\leq x\leq 4,\quad 0\leq y\leq \sqrt{x}$.

12) Calcule o volume do conjunto dado:

(a) $x^2+4y^2\leq 4$ e $x+y\leq z\leq x+y+1$.

(b) $x\leq z\leq 1-y^2$ e $x\geq 0$.

13) Calcule:

(a) $\iint_B \text{sen}(4x^2+y^2)\,dx\,dy$ onde B é o conjunto $4x^2+y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

(b) $\iint_B (2x+y)\cos(x-y)\,dx\,dy$ onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3}, \pi/3)$, $(\frac{2\pi}{3}, -\pi/3)$ e $(\pi/3, -\frac{2\pi}{3})$.

14) Passe para coordenadas polares e calcule:

(a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

(b) $\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ $(a>0)$.

15) Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0$ e $b>0)$.

16) Sejam $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1+x^2 \leq y \leq 2+x^2,\ x \geq 0$ e $y \geq x+x^2\}$ e

$B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq v\leq 2,\ v\geq u$ e $u\geq 0\}$.

(a) Verifique que $B=\varphi(A)$ onde $(u,v)=\varphi(x,y)$, com $u=x$ e $v=y-x^2$

(b) Verifique que a área de A é igual à área de B.