Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 11/04/2019

Exercícios: Verifique as relações binárias nos itens abaixo e classifique-as em *reflexivas*, *irreflexivas*, *simétricas*, *assimétricas*, *anti-simétricas*, *transitivas*, *conectadas*, *equivalências*.

1. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x + y$ é par $\}$.
2. Sejam $A = \mathbb{N}^*$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ \mid \ x$ divide $y\}$.
3. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x = y^2\}$.

(1) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par } \} \Rightarrow x + y = 2k; k \in \mathbb{N}$

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ é reflexiva; pois $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + x = 2x \Rightarrow \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R}$ não é irreflexiva.
- Simétrica: $\mathcal{R}$ é simétrica e, consequentemente não é assimétrica. $x + y = 2k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow y + x = 2k$ (pela propriedade comutativa da soma no conjunto dos naturais); assim, $\forall x, y \in \mathbb{N}, \langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$.
- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica; pois, $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$ e $x \neq y$.
- Transitiva: $\mathcal{R}$ é transitiva.
  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}; \langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow x + y = 2k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2k - y;$ (1) e
  $\langle y, z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow y + z = 2m; m \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 2m - y;$ (2), Efetuando $x + z$, utilizando (1) e (2);
  $x + z = 2k - y + 2m - y = 2k + 2m - 2y = 2(k + m - y)$; fazendo:
  $n = (k + m - y) \in \mathbb{N} \Rightarrow x + z = 2n; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$.
- Conectada: $\mathcal{R}$ não é conectada; pois, para $x = 2a$ e $y = 2b+1; a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y = 2a+2b+1 = 2(a+b)+1; (a+b) \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y$ é ímpar.
  Portanto, $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.
- Equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(2) Sejam $A = \mathbb{N}^*$ e
$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ \mid \ x \ \textit{divide} \ y\} \Rightarrow x \mid y \Rightarrow y = kx; k \in \mathbb{N}^*$

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ é reflexiva; pois $\forall x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = 1.x; 1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R}$ não é irreflexiva.
- Simétrica: $\mathcal{R}$ não é simétrica e, consequentemente é assimétrica. $y = kx; k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = y/k \Rightarrow y \not| x \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$; assim, $\exists x, y \in \mathbb{N}^*$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.
- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ é anti-simétrica; pois, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$; ou seja, $y = kx; k \in \mathbb{N}^*$ para $x = y \Rightarrow x = kx; k = 1 \Rightarrow x \mid x$.
- Transitiva: $\mathcal{R}$ é transitiva. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow y = kx; k \in \mathbb{N}^*;$ (1) e $\langle y, z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow z = my; m \in \mathbb{N}^*;$ (2), substituindo (1) em (2); $z = m(kx) \Rightarrow z = (mk)x; (mk) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \mid z \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$.
- Conectada: $\mathcal{R}$ não é conectada; pois, $\exists x, y \in \mathbb{N}^*$ tais que $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$. Tomemos como contra-exemplo um número natural primo que, por definição, possui apenas os divisores “1” e ele próprio.
- Equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Relações - Propriedades - Exercícios (Respostas)

(3) Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$;

- Reflexiva: $\mathcal{R}$ não é reflexiva; pois $\forall x > 1; x \neq x^2$; assim, $\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x, x\rangle \notin \mathcal{R}$. Contudo, $\mathcal{R}$ também não é irreflexiva; $\exists x \in \mathbb{N}; \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$.
- Simétrica: $\mathcal{R}$ não é simétrica e, consequentemente é assimétrica.
  $x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y \neq x^2 \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$; assim,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.
- Anti-simétrica: $\mathcal{R}$ é anti-simétrica; pois,
  $\forall x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$.
- Transitiva: $\mathcal{R}$ não é transitiva.
  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$; (1) e
  $\langle y, z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow y = z^2$; (2). Substituindo (1) em (2);
  $\pm\sqrt{x} = z^2 \Rightarrow (\pm\sqrt{x})^2 = (z^2)^2 \Rightarrow x = z^4 \Rightarrow \langle x, z\rangle \notin \mathcal{R}$.
- Conectada: $\mathcal{R}$ não é conectada; pois,
  $\exists x, y \in \mathbb{N}$ tais que, $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}$ e $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.
  Nestes casos, podemos tomar como contra-exemplo o número natural primo que por propriedade não é o quadrado de nenhum outro número natural.
- Equivalência: $\mathcal{R}$ não é reflexiva, não é simétrica e nem transitiva; logo, $\mathcal{R}$ não é uma relação de equivalência.

Exercícios: Seja $A = \{1, 2\}$. Verifique as relações binárias abaixo definidas em A, e justifique cada classificação.

(1) $\mathcal{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

- reflexiva: $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$,
- simétrica:$\langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R}; \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R}$;
- anti-simétrica: $\langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R} e \langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow 1 = 1$,

$\langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R} e \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow 2 = 2$,

- transitiva:
  $\langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R} e \langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle 1, 1\rangle \in \mathcal{R}; \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R} e \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle 2, 2\rangle \in \mathcal{R}$,
- não é conectada: $\langle 1, 2\rangle \notin \mathcal{R} e \langle 2, 1\rangle \notin \mathcal{R}$;
- é de equivalência: $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

(2) $\mathcal{S} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

- reflexiva: $\forall x \in A, \langle x,x\rangle \in \mathcal{S}$,
- assimétrica: pois não é simétrica ($\langle 1,2\rangle \in \mathcal{S}$ mas, $\langle 2,1\rangle \notin \mathcal{S}$),
- anti-simétrica: por definição, temos que verificar o antecedente na condicional $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{S}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{S}$ mas, $\langle 2,1\rangle \notin \mathcal{S}$; logo, satisfaz à definição ;
- transitiva: $\langle 1,1\rangle \in \mathcal{S}$ e $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle 1,2\rangle \in \mathcal{S}$ e $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{S}$ e $\langle 2,2\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle 1,2\rangle \in \mathcal{S}$,
- conectada: pois $\forall x, y \in A; \langle x,y\rangle \in \mathcal{S}$ ou $\langle y,x\rangle \in \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S}$ não é de equivalência porque não é simétrica.

(3) $\mathcal{T} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

- irreflexiva: $\forall x \in A; \langle x,x\rangle \notin \mathcal{T}$,
- simétrica: $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{T} \Rightarrow \langle 2,1\rangle \in \mathcal{T}$,
- não é anti-simétrica: pois, $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{T}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{T}$ porém $1 \neq 2$,
- não é transitiva: pois, $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{T}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{T}$, mas $\langle 1,1\rangle \notin \mathcal{T}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{T}$ e $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{T}$, mas $\langle 2,2\rangle \notin \mathcal{T}$
- não é conectada: pois $\exists x, y \in A; \langle x,y\rangle \notin \mathcal{T}$ e $\langle y,x\rangle \notin \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ não é de equivalência pois não é reflexiva e nem transitiva.

(4) $\mathcal{L} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

- reflexiva: $\forall x \in A; \langle x,x\rangle \in \mathcal{L}$,
- simétrica: $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{L} \Rightarrow \langle 2,1\rangle \in \mathcal{L}$,
- não é anti-simétrica: pois, $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{L}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{L}$ porém $1 \neq 2$,
- transitiva: $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{L}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{L} \Rightarrow \langle 1,1\rangle \in \mathcal{L}$ e $\langle 2,1\rangle \in \mathcal{L}$ e $\langle 1,2\rangle \in \mathcal{L} \Rightarrow \langle 2,2\rangle \in \mathcal{L}$
- conectada: $\forall x, y \in A; \langle x,y\rangle \in \mathcal{L}$ ou $\langle y,x\rangle \in \mathcal{L}$.
- $\mathcal{L}$ é de equivalência pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

(5) $\mathcal{O} = \{\langle 2, 1\rangle\}$

- irreflexiva: $\forall x \in A; \langle x, x\rangle \notin \mathcal{O}$,
- assimétrica: pois $\langle 2, 1\rangle \in \mathcal{O}$ mas, $\langle 1, 2\rangle \notin \mathcal{O}$,
- anti-simétrica: pois, $\langle 2, 1\rangle \in \mathcal{O}$ e $\langle 1, 2\rangle \notin \mathcal{O}$ então não precisamos ter a tese: $1 = 2$,
- transitiva: $\langle 2, 1\rangle \in \mathcal{O}$ e $\langle 1, 2\rangle \notin \mathcal{O}$ logo, não precisamos ter : $\langle 2, 2\rangle \in \mathcal{O}$,
- não é conectada: pois os pares $\langle 1, 1\rangle \notin \mathcal{O}$ e $\langle 2, 2\rangle \notin \mathcal{O}$.
- $\mathcal{O}$ não é de equivalência pois não é reflexiva e nem simétrica.

Exercícios: Verifique as relações binárias nos itens abaixo e classifique-as em *reflexivas*, *irreflexivas*, *simétricas*, *assimétricas*, *anti-simétricas*, *transitivas*, *conectadas*, *equivalências*.

1. Sejam $A =$ Conjunto dos Alunos de MATA42 sentados na sala 207 do PAFI; e
   $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ senta na mesma fila de } y\}$.
2. Sejam $A =$ Conjunto dos Moradores do bairro Ondina; e
   $\mathcal{T} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ mora ao lado de } y\}$.
3. Sejam $A =$ Conjunto dos funcionários da empresa XYZ; e
   $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ trabalha mais horas que } y\}$.

1. Sejam $A =$ Conjunto dos Alunos de MATA42 sentados na sala 207 do PAFI; e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ senta na mesma fila de } y\}$.
   $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica, transitiva, equivalência.
   $\mathcal{R}$ não é : irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, conectada.
2. Sejam $A =$ Conjunto dos Moradores do bairro Ondina; e $\mathcal{T} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ mora ao lado de } y\}$.
   $\mathcal{T}$ é irreflexiva, simétrica.
   $\mathcal{T}$ não é: reflexiva, assimétrica, anti-simétrica, conectada, transitiva, equivalência.
3. Sejam $A =$ Conjunto dos funcionários da empresa XYZ; e $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \textit{ trabalha mais horas que } y\}$.
   $\mathcal{S}$ é irreflexiva, assimétrica, anti-simétrica, transitiva.
   $\mathcal{S}$ não é reflexiva, simétrica, conectada, equivalência.

Observação: R é uma relação assimétrica em A se, e somente se, $(\exists x, y \in A)(\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R})$, ou seja, se existir pelo menos um par ordenado $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ e o seu inverso $\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$.
Enquanto que, R é uma relação anti-simétrica em A se, e somente se, $(\forall x, y \in A)((\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}) \wedge (\langle y, x\rangle \in \mathcal{R})) \Rightarrow x = y$
$\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)(x \neq y) \Rightarrow ((\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}) \vee (\langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}))$. Portanto, Se R é uma relação assimétrica em A não podemos concluir que R é anti-simétrica.

DEFINIÇÃO: (Relação Inversa ou Relação Dual ou Relação Oposta)

Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO de A para B. Então, a RELAÇÃO INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$ de $\mathcal{R}$ é uma RELAÇÃO de B para A tal que $y\mathcal{R}^{-1}x$ se, e somente se, $x\mathcal{R}y$, ou seja,
$\mathcal{R}^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \mathcal{R}\} \subseteq B \times A$.
Notação: $\mathcal{R}^{-1}$ ou $\widetilde{\mathcal{R}}$

Exemplo:

1. Seja $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$ então,
   $\mathcal{R}^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$.
2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x = y + 1\} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle \langle 4, 3\rangle \langle 5, 4\rangle \langle 6, 5\rangle \langle 7, 6\rangle\}$ então,
   $\mathcal{R}^{-1} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \langle 3, 4\rangle \langle 4, 5\rangle \langle 5, 6\rangle \langle 6, 7\rangle\}$
   $\mathcal{R}^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in A \times A \mid y = x - 1\}$.

LEMA:

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ RELAÇÕES em A. Então,

1. $\tilde{\tilde{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$
2. $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$

D]:

1. $\tilde{\tilde{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$
   Por definição, temos que $y\mathcal{R}^{-1}x$ se, e somente se, $x\mathcal{R}y$;
   do mesmo modo, se quisermos a inversa da inversa;
   $x(\mathcal{R}^{-1})^{-1}y$ se, e somente se, $y\mathcal{R}^{-1}x$;
   logo, $x(\mathcal{R}^{-1})^{-1}y = x\mathcal{R}y$.
2. $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$
   Neste caso, temos que provar: $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$, e
   $\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

D]: $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$

Vamos mostrar que: (i) $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$, e

(ii) $\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

(i) $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$.

$\langle y, x\rangle \in \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ então $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ ou $\langle x, y\rangle \in \mathcal{S}$.

$\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{R}}$ ou $\langle x, y\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{S}} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$.

Logo, $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} \subseteq \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$.

(ii) $\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

$\langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{R}}$ ou $\langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{S}}$.

$\langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{R}} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ ou $\langle y, x\rangle \in \tilde{\mathcal{S}} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$

$\Rightarrow \langle y, x\rangle \in \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$. Logo, $\tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

Assim, por (i) e (ii) temos que $\widetilde{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{R}} \cup \tilde{\mathcal{S}}$.

Exercícios:

1. Seja $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ x \text{ divide } y\}$. Determine a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$.
   então,
   $\mathcal{R}^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \mid \ y \text{ é múltiplo de } x\}$.
2. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \ \mid \ x \leq y\}$.
   Determine a relação $\mathcal{R}$ e a sua inversa $\mathcal{R}^{-1}$.

Resposta:

$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \ \mid \ x \leq y\} =$
$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle \langle 1, 3\rangle \langle 2, 2\rangle \langle 2, 3\rangle \langle 3, 3\rangle\}$
$\mathcal{R}^{-1} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle \langle 3, 1\rangle \langle 2, 2\rangle \langle 3, 2\rangle \langle 3, 3\rangle\}$
$\mathcal{R}^{-1} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \ \mid \ x \geq y\}$.

Relação Complementar

Definição: (Relação Complementar)

Seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Denotamos por $\overline{\mathcal{R}}$ e denominamos RELAÇÃO COMPLEMENTAR de $\mathcal{R}$ a seguinte relação em A:
$\overline{\mathcal{R}} := \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \notin \mathcal{R}\}$.
Observação: $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$

Exemplo:

1. Seja $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$ em $\mathbb{N}$ então,
   $\overline{\mathcal{R}} = \{\langle x, y\rangle \mid x \geq y\}$
2. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ divide } y\}$ em $\mathbb{N}$ então,
   $\overline{\mathcal{R}} = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ não divide } y\}$

Relações - Composição

DEFINIÇÃO: (Relação Composta)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ RELAÇÕES em A. Indicamos por $\mathcal{S}o\mathcal{R}$ e denominamos COMPOSIÇÃO DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ a seguinte relação: $\mathcal{S}o\mathcal{R} := \{\langle x, z\rangle \mid x, z \in A \wedge \exists y \in A\ (\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{S})\}$.

Exemplo:

1. Sejam as relações $\mathcal{R} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ e
   $\mathcal{S} = \{\langle 4, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ então,
   $\mathcal{S}o\mathcal{R} := \{\langle 1, 5\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$;
   $\mathcal{R}o\mathcal{S} := \{\langle 4, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle\}$;
   $\mathcal{R}o\mathcal{R} := \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$;
   $\mathcal{S}o\mathcal{S} := \{\langle 4, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$.

DEFINIÇÃO: (Relação - Potência)

Seja $A \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, e seja $\mathcal{R}$ uma RELAÇÃO em A. Indicamos por $\mathcal{R}^m; m \in \mathbb{N}^*$ e denominamos m -ésima POTÊNCIA DA RELAÇÃO $\mathcal{R}$ a seguinte relação: $\mathcal{R}^m := \mathcal{R}o\mathcal{R}^{m-1}; m > 1$ e $\mathcal{R}^1 := \mathcal{R}$.

Exemplo: Sejam $A := \{x, y, z\}$ e as relações em A;

1. $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle z, y\rangle\}$; então, $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}o\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle\}$;
   $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}o\mathcal{R}^2 = \emptyset$; assim, $\forall m \geq 3, \mathcal{R}^m = \emptyset$.
2. $\mathcal{S} = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle\}$,
   $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}o\mathcal{S} = \{\langle x, z\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, y\rangle\} = \mathcal{S}^{-1}$;
   $\mathcal{S}^3 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^2 = \{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle z, z\rangle\} = \Delta_A$;
   $\mathcal{S}^4 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^3 = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle\} = \mathcal{S}$;
   $\mathcal{S}^5 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^4 = \mathcal{S}^2$; $\mathcal{S}^6 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^5 = \mathcal{S}^3$; $\mathcal{S}^7 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^6 = \mathcal{S}^4$;
   $\mathcal{S}^8 = \mathcal{S}o\mathcal{S}^7 = \mathcal{S}^2; \cdots$
   Observação: Neste caso, notemos que as potências da relação $\mathcal{S}$ repetem-se em um ciclo para $m \geq 5$.