Teoria da Computabilidade

Subseção 2

Problema da Aceitação por MT's

seção 4.2

Introdução à Teoria da Computação. Michael Sipser. Thomson Learning, 2007.

Introdução

- Objetivo:
  - Provar que existe um problema específico que é algoritmicamente insolúvel.
- Um dos mais importantes teoremas da Teoria da Computação.
- Teorema demonstra que computadores são limitados sob certos aspectos.
- Que tipo de problema é insolúvel com o auxílio de um computador?
  - Problemas ininteligíveis e com formulações altamente complexas?
  - Não, problemas comuns podem ser insolúveis por computadores.

Exemplo de problema insolúvel por computador

- Dados:
  - Programa de computador.
  - Especificação precisa do que o programa supostamente realiza.
- Objetivo:
  - Verificar se o programa realmente realiza o especificado.
  - Verificar se o programa está correto.

- Se programa e especificação são objetos matematicamente precisos, então é possível automatizar o processo de verificação por meio de um novo programa de computador?
  - NÃO. Este problema é insolúvel por computador!

Problema da aceitação de uma cadeia w por uma mT M

Como escrever esse problema em forma de uma linguagem?

Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Codificações de todos as mTs juntamente com as cadeias que as mTs aceitam.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Testar se <M,w> pertence à linguagem LMT equivale a testar se a mt M aceita a cadeia w.

- Máquina de Turing M_{10} que **reconhece** $\mathcal{L}_{MT}$.
  - M_{10} simula a máquina M com a cadeia w.
  - Se M entra no estado de aceitação, M_{10} *aceita*. Se M entra no estado de rejeição, M_{10} *rejeita*.
- Porque M_{10} não decide a linguagem $\mathcal{L}_{MT}$?
  - Se M cicla com a cadeia w, M_{10} cicla com a entrada $\langle M, w\rangle$.
  - Se M_{10} pudesse determinar que M não pára com w, ela poderia *rejeitar*.
  - Um algoritmo não pode determinar tal coisa!

Lembrando que:

LDFA ={<A,w> I A é um DFA que aceita a cadeia w}

LGLC ={<G,w> I G é uma GLC que gera a cadeia w}

são decidíveis

Problema da Aceitação por MT's

LMT é a linguagem reconhecida pela máquina U,
LMT é conhecida como Linguagem de Aceitação ou
Linguagem Universal

- M_{10} é uma Máquina de Turing Universal.
  - *UTM – Universal Turing Machine*.
  - Máquina de Turing capaz de simular qualquer outra a partir de sua descrição.
  - As UTM exerceram importante papel no estimulo ao desenvolvimento de computadores que armazenam programas na memória principal.

Problema da Aceitação por MT's

Método da Diagonalização

- Georg Cantor, 1873.
- Problema da medição do tamanho de conjuntos infinitos.
  - Dados dois conjuntos infinitos, os dois são de mesmo tamanho ou um deles é maior que o outro?
  - Ex: $P = \{n = 2.k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ e $S = \{s \mid s \in \{0, 1\}^*\}$.
- Cantor $\Rightarrow$ dois conjuntos finitos tem o mesmo tamanho se os elementos de um conjunto podem ser "emparelhados" com os elementos do outro conjunto.
  - Método compara os tamanhos sem recorrer à contagem dos elementos.
  - Idéia pode ser extendida para conjuntos infinitos.

▸ Método da Diagonalização

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

- Algumas linguagens não são decidíveis e nem mesmo Turing-reconhecíveis.
  - O conjunto de linguagens não é contavelmente infinito.
  - O conjunto de máquinas de Turing é contavelmente infinito.
- Como uma máquina de Turing reconhece apenas uma linguagem, alguma linguagem não é reconhecida por nenhuma máquina de Turing.

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Teorema 3.11

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Esquema da prova.

1. Mostrar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contavelmente infinito.
2. Mostrar que o conjunto de todas as linguagens não é contavelmente infinito.
3. Portanto, não há uma correspondência entre o conjunto de todas as linguagens e o conjunto de todas as máquinas de Turing.
4. Conclusão: algumas linguagens não são reconhecidas por nenhuma máquina de Turing!!!

Atividade
Por que problemas indecidíveis tem que existir?
Texto do Hopcroft

$\square$

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Lema 3.12

1. *O conjunto de todas as máquinas de Turing é contavelmente infinito.*

Demonstração.

- Para qualquer alfabeto Σ, ▸ Σ^* é contavelmente infinito.
  - Existe um número finito de cadeias de cada comprimento.
  - Listar elemento por ordem de tamanho: cadeias de tamanho 0, as tamanho 1, as de tamanho 2, etc.
  - Corresponder as cadeias da lista com os elementos de $\mathbb{N}$.
- Uma máquina M pode ser codificada na cadeia $\langle M \rangle$.
- Excluir da lista as cadeias que não são codificações de máquinas de Turing.
- Corresponder as demais cadeias com os elementos de $\mathbb{N}$.

$\square$

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Lema 3.13

2. *O conjunto Λ de todas as linguagens não é contavelmente infinito.*

Demonstração.

- O conjunto $\mathcal{B}$ de todas as sequências binárias infinitas não é contavelmente infinito.
  - Prova por diagonalização similar à prova do Teorema 6.9.
- Λ é o conjunto de todas as linguagens.
- Mostrar que existe uma correspondência entre Λ e $\mathcal{B}$.

$\square$

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Lema 3.13

2. *O conjunto Λ de todas as linguagens não é contavelmente infinito.*

Demonstração.

- Mostrar que existe uma correspondência entre Λ e $\mathcal{B}$:
  - $\Sigma^* = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$.
  - Cada $\mathcal{L} \in \Lambda$ corresponde a uma única sequência de $\mathcal{B}$.
  - Sequência característica $\chi_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$: $\chi_{\mathcal{L}_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } s_i \in \mathcal{L}, \\ 0 & \text{se } s_i \notin \mathcal{L}. \end{cases}$

□

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Lema 3.13

2. *O conjunto Λ de todas as linguagens não é contavelmente infinito.*

Demonstração.

- Mostrar que existe uma correspondência entre Λ e $\mathcal{B}$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
\Sigma & = & \{ & a & , & b & \} \\
\Sigma^* & = & \{ & \varepsilon & , & a & , & b & , & aa & , & ab & , & ba & , & bb & , & aaa & , & aab & , & \cdots & \} \\
\mathcal{L} & = & \{ & & & a & , & & & aa & , & ab & , & & & & & aaa & , & aab & , & \cdots & \} \\
\chi_{\mathcal{L}} & = & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & \cdots
\end{array}
$$

$\square$

Linguagens que não são Turing-reconhecíveis

Lema 3.13

2. *O conjunto Λ de todas as linguagens não é contavelmente infinito.*

Demonstração.

- Mostrar que existe uma correspondência entre Λ e $\mathcal{B}$:
  - Função $f : \Lambda \to \mathcal{B}$ é bijetora.
    - $f(\mathcal{L})$ é a sequência característica de $\mathcal{L}$.
  - Como $\mathcal{B}$ não é contavelmente infinito, Λ também não o é.

$\square$

Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- Supor que $\mathcal{L}_{MT}$ é decidível.
- Existe uma máquina de Turing H que decide $\mathcal{L}_{MT}$, onde:

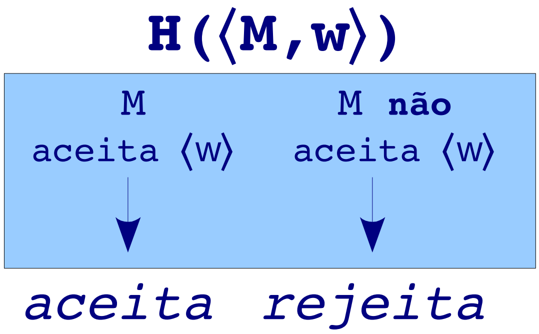
$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} aceita & \text{se } M \text{ aceita } w, \\ rejeita & \text{se } M \text{ não aceita } w. \end{cases}$$

Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10
A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.



Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10
A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- Construir máquina D que usa H como subrotina:
  - D chama H para determinar o que M faz quando sua entrada é a própria codificação $\langle M\rangle$.
  - Resposta da máquina D será o oposto da obtida com H.
- Funcionamento da máquina D:
  1. D chama máquina H com entrada $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.
  2. Se H aceita, D *rejeita*. Se H rejeita, D *aceita*.

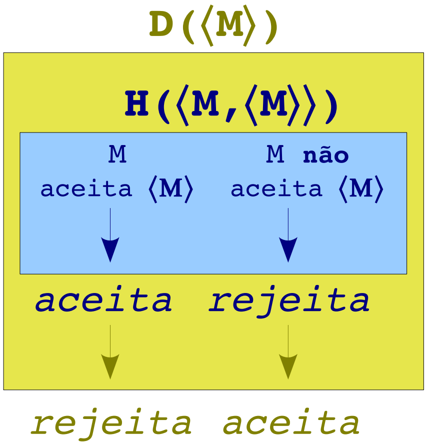
Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.



Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10
A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- Funcionamento da máquina D:
  1. D chama máquina H com entrada $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.
  2. Se H aceita, D *rejeita*. Se H rejeita, D *aceita*.
- Resumo da máquina D:

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} aceita & \text{se } M \text{ não aceita } \langle M\rangle, \\ rejeita & \text{se } M \text{ aceita } \langle M\rangle. \end{cases}$$

Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- O que acontece quando D é chamado com sua própria codificação $\langle D\rangle$?

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} aceita & \text{se } D \text{ não aceita } \langle D\rangle, \\ rejeita & \text{se } D \text{ aceita } \langle D\rangle. \end{cases} \qquad \rightarrow\!|\!\leftarrow$$

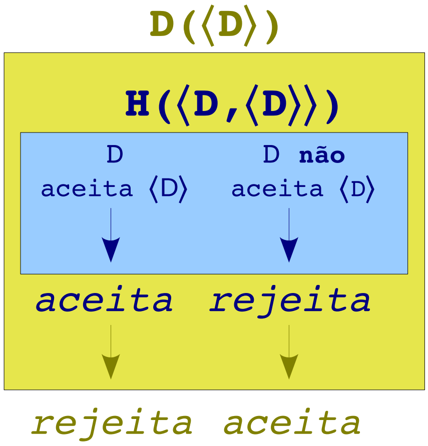
Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.



Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- O que acontece quando D é chamado com sua própria codificação $\langle D\rangle$?

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} aceita & \text{se } D \text{ não aceita } \langle D\rangle, \\ rejeita & \text{se } D \text{ aceita } \langle D\rangle. \end{cases} \qquad \rightarrow\mid\leftarrow$$

- Revisão:
  - H aceita $\langle M, w\rangle$ exatamente quanto M aceita w.
  - D rejeita $\langle M\rangle$ exatamente quanto M aceita $\langle M\rangle$.
  - D rejeita $\langle D\rangle$ exatamente quanto D aceita $\langle D\rangle$. $\rightarrow\mid\leftarrow$

Problema da Aceitação por MT's

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.10

A linguagem $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Demonstração.

- Não importa o que D faça, ela é forçada a fazer o oposto! (Contradição)
- As máquinas de Turing D e H não podem existir!
- Portanto, $\mathcal{L}_{MT}$ não é decidível.

Problema da Aceitação por MT's

Onde é usado o argumento da diagonalização?

- Tabela do comportamento de H e D:
  - Posição $[i, j]$ é *aceita* se M_i aceita $\langle M_j \rangle$.
  - Posição $[i, j]$ em branco se M_i rejeita $\langle M_j \rangle$ ou cicla.
- Exemplo:

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceita*		*aceita*		
M_2	*aceita*	*aceita*	*aceita*	*aceita*	
M_3					$\cdots$
M_4	*aceita*	*aceita*			
$\vdots$			$\vdots$		

Problema da Aceitação por MT's

Onde é usado o argumento da diagonalização?

- Resultado de H com entradas da tabela anterior:
  - Posição $[i, j]$ é o valor de H com entrada $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$.
- Ex.: se M_3 não aceita $\langle M_2 \rangle$, posição $[i, j]$ é $rejeita$ pois H rejeita entrada $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	$aceita$	$rejeita$	$aceita$	$rejeita$	
M_2	$aceita$	$aceita$	$aceita$	$aceita$	
M_3	$rejeita$	$rejeita$	$rejeita$	$rejeita$	$\cdots$
M_4	$aceita$	$aceita$	$rejeita$	$rejeita$	
$\vdots$			$\vdots$		

Problema da Aceitação por MT's

Onde é usado o argumento da diagonalização?

- D ocorre na lista $M_1, M_2, \ldots$ das máquinas de Turing.
- D computa o oposto das entradas na diagonal principal da matriz.
  - Contradição ocorre na posição marcada com $\boxed{\textbf{?}}$
  - Conteúdo da posição deve ser o oposto de si próprio.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle D \rangle$	$\cdots$
M_1	**aceita**	*rejeita*	*aceita*	*rejeita*		*aceita*	
M_2	*aceita*	**aceita**	*aceita*	*aceita*		*aceita*	
M_3	*rejeita*	*rejeita*	**rejeita**	*rejeita*	$\cdots$	*rejeita*	$\cdots$
M_4	*aceita*	*aceita*	*rejeita*	**rejeita**		*aceita*	
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		
D	*rejeita*	*rejeita*	*aceita*	*aceita*		$\boxed{\textbf{?}}$	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

Linguagem Co-Turing-reconhecível

Definição 3.14

- Complemento de uma linguagem $\mathcal{L}$:
  - Conjunto de cadeias que não pertencem a $\mathcal{L}$:
    $$\overline{\mathcal{L}} = \{s \mid s \in \Sigma^*,\ \mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \text{ e } s \notin \mathcal{L}\}.$$

Definição 3.15

- Linguagem **Co-Turing-reconhecível**:
  - Linguagem cujo complemento é Turing-reconhecível.

Linguagem Co-Turing-reconhecível

Teorema 3.16

Uma linguagem é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e Co-Turing-reconhecivel (ela e seu complemento são Turing-reconhecíveis).

Demonstração ($\Longrightarrow$).

- Se A é decidível, então A é Turing-reconhecível.
- Se A é Turing-reconhecível, então $\overline{A}$ é Turing-reconhecível.

$\square$

Linguagem Co-Turing-reconhecível

Teorema 3.16

Uma linguagem é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e Co-Turing-reconhecivel (ela e seu complemento são Turing-reconhecíveis).

Demonstração ($\Longleftarrow$).

- Máquina de Turing M_1 reconhece A.
- Máquina de Turing M_2 reconhece $\overline{A}$.
- Máquina de Turing M que decide A:
  1. Executar, em paralelo, máquinas M_1 e M_2 com entrada w.
  2. Se M_1 aceita, M `aceita`. Se M_2 aceita, M `rejeita`.

Obs. Equivale a máquina M com 2 fitas, uma para simular M_1 e outra para simular M_2. Neste caso, M simula uma passo de cada máquina e pára quando uma delas aceita.

□

Linguagem Co-Turing-reconhecível

Teorema 3.16

Uma linguagem é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e Co-Turing-reconhecivel (ela e seu complemento são Turing-reconhecíveis).

Demonstração ($\Longleftarrow$).

- Máquina de Turing M decide A:
  - Dada uma cadeia w, $w \in A$ ou $w \in \overline{A}$.
  - M_1 ou M_2 tem que aceitar w.
  - Como M pára quando M_1 ou M_2 aceita, M sempre pára.
  - M aceita todas as cadeias em A e rejeita as demais.
  - Logo, M decide A, ou seja, A é decidível.

$\square$

Uma linguagem que não é Turing-reconhecível

$\mathcal{L}_{MT} = \{\langle M, w \rangle \mid$ Máquina de Turing M aceita a cadeia $w\}$.

Teorema 3.17
A linguagem $\overline{\mathcal{L}_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

Demonstração.

- $\mathcal{L}_{MT}$ é Turing-reconhecível.
- Se $\overline{\mathcal{L}_{MT}}$ fosse Turing-reconhecível, $\mathcal{L}_{MT}$ seria decidível.
- Portanto, $\overline{\mathcal{L}_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

□