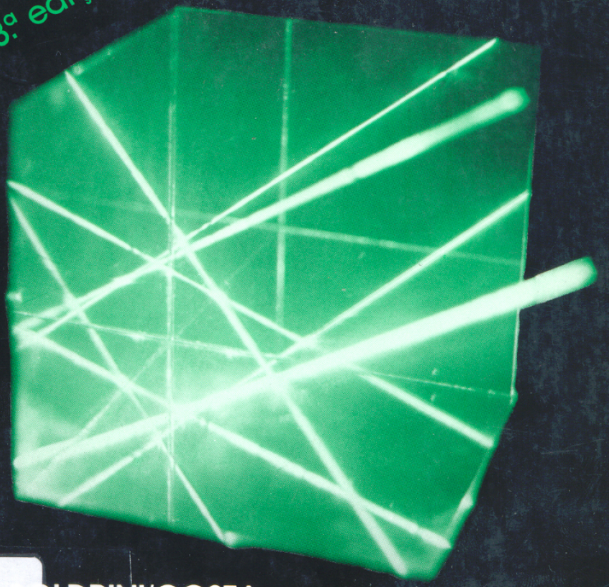
ÁLGEBRA LINEAR

3.ª edição



BOLDRINI/COSTA
FIGUEIREDO/WETZLER

HARBRA

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

A383
3. ed.

Álgebra linear / José Luiz Boldrini ... [et al.]. – 3. ed. –
São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.
Bibliografia.
1. Álgebra linear I. Boldrini, José Luís.

80-0969

17. CDD-512.897
18. -512.5

Índices para catálogo sistemático:
1. Álgebra linear 512.897 (17.) 512.5 (18.)

ÁLGEBRA

3ª edição

ampliada e revist

JOSÉ LUIZ BOLDRINI
SUELI I. RODRIGUES COSTA
VERA LÚCIA FIGUEIREDO
HENRY G. WETZLER

Depto. de Matemática da
Universidade Estadual de Campinas -

editora HARBRA ltda.

Class. 512.5
A394
3.ed.
Registro 14433 102454
Data 18 / 07 / 2006
Livraria DO TOOM
R$ 46,33
OBRA: 51280

Estante 512.5 / A394 / 3.ED.
Obra 51280 C. Tecnol.
Registro 0102454
Reg Int. 14333

Direção Geral: Julio E. Emöd
Supervisão Editorial: Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial: Maria Elizabeth Santo
Composição e Artes: AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos: Ferrari Studio e Artes Gráficas Ltda.
Capa: Maria Paula Santo
Impressão e Acabamento: Donnelley Cochrane Gráfica Editora do Brasil Ltda.

Fotografia da Capa: Néstor E. Massa

A fotografia da capa ilustra a seção 5.5. Para obtê-la, utilizou-se o laser de argônio do Departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física da UNICAMP-SP.

ÁLGEBRA LINEAR – 3ª edição
Copyright © 1986 por **editora HARBRA ltda.**
Copyright © 1984, 1980, 1978 por Editora Harper & Row do Brasil Ltda.

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana – 04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 571-1122. Fax: (011) 575-6876
Vendas: (011) 549-2244 e 571-0276. Fax: (011) 571-9777

Reservados todos os direitos. É terminantemente proibido reproduzir esta obra, total ou parcialmente, por quaisquer meios, sem a permissão expressa dos editores.

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

CONTEÚDO

Prefácio à terceira edição

CAPÍTULO 1 MATRIZES 1

1.1 Introdução **1**
1.2 Tipos especiais de matrizes **3**
1.3 Operações com matrizes **5**
1.4 Exercícios **11**
*1.5 Processos aleatórios: cadeias de Markov **14**
*1.6 Exercícios **26**
1.7 Respostas **28**

CAPÍTULO 2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEA

2.1 Introdução **29**
2.2 Sistemas e matrizes **33**
2.3 Operações elementares **35**
2.4 Forma escada **37**
2.5 Soluções de um sistema de equações lineares
2.6 Exercícios **49**
2.7 Demonstrações **60**

CAPÍTULO 3 DETERMINANTE E MATRIZ INVE

3.1 Introdução **64**
3.2 Conceitos preliminares **65**
3.3 Determinante **66**
3.4 Desenvolvimento de Laplace **69**
3.5 Matriz adjunta – matriz inversa **72**
3.6 Regra de Cramer **77**
3.7 Cálculo do posto de uma matriz através de
*3.8 Matrizes elementares
Um processo de inversão de matrizes **82**
*3.9 Procedimento para a inversão de matrizes **86**
3.10 Exercícios **90**

CAPÍTULO 4 ESPAÇO VETORIAL 97

4.1 Vetores no plano e no espaço 97
4.2 Espaços vetoriais 103
4.3 Subespaços vetoriais 105
4.4 Combinação linear 112
4.5 Dependência e independência linear 114
4.6 Base de um espaço vetorial 116
4.7 Mudança de base 123
4.8 Exercícios 129
4.9 Respostas 135

CAPÍTULO 5 TRANSFORMAÇÕES LINEARES 142

5.1 Introdução 142
5.2 Transformações do plano no plano 147
5.3 Conceitos e teoremas 150
5.4 Aplicações lineares e matrizes 157
*5.5 Aplicações à óptica 167
5.6 Exercícios 171

CAPÍTULO 6 AUTOVALORES E AUTOVETORES 178

6.1 Introdução 178
6.2 Polinômio característico 185
6.3 Exercícios 194

CAPÍTULO 7 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES 199

7.1 Base de autovetores 199
7.2 Polinômio minimal 206
*7.3 Diagonalização simultânea de dois operadores 210
7.4 Forma de Jordan 211
7.5 Exercícios 213

CAPÍTULO 8 PRODUTO INTERNO 219

8.1 Introdução 219
8.2 Coeficientes de Fourier 225
8.3 Norma 226
8.4 Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt
8.5 Complemento ortogonal 234
8.6 Espaços vetoriais complexos – produto interno
8.7 Produto interno e estatística 236
*8.8 O ajuste de curvas e o método dos mínimos q
8.9 Exercícios 247

CAPÍTULO 9 TIPOS ESPECIAIS DE OPERADORES

9.1 Introdução 253
9.2 Operadores auto-adjuntos e ortogonais 258
9.3 Diagonalização de operadores auto-adjuntos e o operadores ortogonais 261
9.4 Exercícios 264

CAPÍTULO 10 FORMAS LINEARES, BILINEARES

10.1 Formas lineares 269
10.2 Formas bilineares 270
10.3 Matriz de uma forma bilinear 272
10.4 Forma bilinear simétrica 274
10.5 Formas quadráticas 274
10.6 Diagonalização da forma quadrática 277
10.7 Exercícios 278

CAPÍTULO 11 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS E Q

11.1 Introdução 285
11.2 Retas no plano 287

11.3 Planos no espaço 288
11.4 Cônicas no plano 289
11.5 Quádricas em R^3 298
11.6 Exercícios 305
*11.7 Propriedades geométricas das cônicas 308

CAPÍTULO 12 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES 316

12.1 Introdução 316
12.2 Equações diferenciais 317
12.3 Resolução de sistemas de n equações lineares homogêneas de 1ª ordem e coeficientes constantes 327
12.4 Exercícios 346

CAPÍTULO 13 PROCESSOS ITERATIVOS E ÁLGEBRA LINEAR 332

13.1 Introdução 332
13.2 Seqüências de matrizes 333
13.3 Resolução de sistemas lineares – processo iterativo 337
13.4 Método de Jacobi 344
13.5 Processo de Gauss-Seidel 345
13.6 Estimativa de erro 345
13.7 Exercícios 348

CAPÍTULO 14 CONJUNTOS CONVEXOS E PROGRAMAÇÃO LINEAR 350

14.1 Introdução 350
14.2 Conjuntos convexos 351
14.3 Introdução à programação linear (PL) 362
*14.4 Exercícios 371
14.5 Método simplex 374
14.6 Exercícios 398
14.7 Respostas 402

Bibliografia geral 406
Índice remissivo 407

PREFÁCIO À TERCEIRA EDIÇÃ

Este livro teve como origem o texto de um curso
oferecido para alunos de Engenharia, Física, Matemática
da Universidade Estadual de Campinas. O programa foi
que seria o único curso de Álgebra Linear que a maioria
Por isso, procuramos englobar os assuntos que seriam in
estes alunos seguissem posteriormente. Ele foi ministrad
segundo semestre que é seqüência de um curso, também
Analítica.

Os pré-requisitos para a leitura deste texto são os
normalmente vistos até o curso Colegial. A partir destes,
desenvolvemos razoavelmente os conceitos básicos de Ál
sempre indicar aos alunos as fontes às quais eles podem
seus conhecimentos.

Alunos que cursam pela primeira vez esta disciplin
julgam-na muito abstrata e não vêem como podem utiliz
E, normalmente, muitos cursos terminam sem que se mo
aplicação concreta de tudo o que aprenderam.

Procuramos, então, dar aos tópicos uma abordagen

1. Conseguir uma exposição da matéria, de tal for
colocada no *uso* dos conceitos. Neste sentido, optamos p
que estes sejam introduzidos, na medida do possível, den
onde surja a necessidade de sua apresentação. Algumas d
na forma de exercícios, o que permite uma maior fluênci
ao aluno desenvolvê-las dentro do seu raciocínio lógico.

2. Encaminhar os conceitos para a solução de prob
já tenham sentido dificuldade. Desta forma, é convenient
capítulos (Cap. 11: *Classificação de Cônicas e Quádricas*;
Sistemas de Equações Diferenciais; Cap. 13: *Processos Ite*
Convexos e Programação Linear), como chave, ou seja, u
os diversos conceitos apresentados no livro. Na busca das
problemas que colocamos nestes capítulos recorremos à
incorporados em um curso tradicional de Álgebra Linear
vetorial, autovalores e autovetores, diagonalização de ope
os alunos possam perceber a inter-relação entre eles e a ap
dos mesmos.

Dentro desta perspectiva, poderíamos sugerir algumas seqüências para o desenvolvimento de um curso de Álgebra Linear:

1. Capítulos 1 a 11;
2. Capítulos 1 a 8 e 12;
3. Capítulos 1 a 8 e 13;
4. Capítulos 1 a 8 e 14.

Uma outra sugestão é a de que o conteúdo deste livro seja desenvolvido, como já vem sendo feito, em disciplinas que integrem os tradicionais cursos de Cálculo, Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

Quanto aos aspectos didáticos, gostaríamos de ressaltar que os exercícios são importantes inclusive como extensão de cada capítulo. O conteúdo foi elaborado de modo a se enquadrar em diversos programas, podendo-se deixar de estudar as seções assinaladas com asterisco sem prejuízo do entendimento dos tópicos abordados. Por exemplo, seções como Cadeia de Markov (seção 1.5) e Ajuste de Curvas (8.8), que são tópicos especiais, podem ou não ser incluídas de acordo com o interesse de cada aluno, grupo ou classe.

Nesta terceira edição, a antiga seção 4.9 foi ampliada e transformada no atual Capítulo 14: Conjuntos Convexos e Programação Linear. A relativa simplicidade deste assunto e seu grande número de aplicações práticas são responsáveis por sua difusão e interesse nos últimos anos. Anexamos a este novo capítulo uma seção de autoria do Prof. Antonio Carlos Moretti, que descreve o algoritmo do método simplex para programação linear e indica as etapas para a programação por microcomputadores deste método.

A nossa experiência, assim como a de outros professores, tem mostrado que o núcleo de um curso introdutório de Álgebra Linear e, portanto, o deste livro, corresponde à matéria exposta nos Capítulos de 1 a 8, podendo ser excluídas as seções 7.2 a 7.4, dependendo dos objetivos a atingir. Recomendamos especial atenção aos capítulos introdutórios, principalmente ao que trata de Sistemas Lineares, e que fornecerão a base técnica indispensável para a boa compreensão dos demais capítulos, além de conterem em si métodos fundamentais aplicáveis a muitas situações. Acreditamos que as seções e capítulos alternativos permitam opções para trabalhar com os conceitos de Álgebra Linear em diferentes áreas.

Queremos agradecer a todas as pessoas que leram e utilizaram o livro, enviando sugestões, e de modo especial aos professores Antonio Carlos Gilli Martins e João Frederico C. A. Meyer.

Os Autores

1

MATRIZES

1.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre r
aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos d
ciais, não apenas porque eles "ordenam e simplificam"
bém porque fornecem novos métodos de resolução.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos d
lunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referente
de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na

	Altura (m)	*Peso (kg)*
Pessoa 1	1,70	70
Pessoa 2	1,75	60
Pessoa 3	1,60	52
Pessoa 4	1,81	72

Ao abstraírmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Observe que em um problema em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente indispensável.

Outros exemplos de matrizes são:

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz **A** (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $\mathbf{A}_{m \times n}$. Também são utilizadas outras notações para matriz, além de colchetes, como parênteses ou duas barras. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Não obstante, neste livro as matrizes aparecerão sempre entre colchetes.

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é -4, isto é, $a_{13} = -4$, Ainda neste exemplo, temos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

1.1.1 Definição: Duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]_m$ iguais, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se elas têm o mesmo número de linha $= s$), e todos os seus elementos correspondentes são

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen } 90 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.2 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natu têm propriedades que as diferenciam de uma matriz tipos de matrizes aparecem freqüentemente na prática mes especiais.

Consideremos uma matriz com m linhas e n co $\mathbf{A}_{m \times n}$:

1.2.1 Matriz Quadrada é aquela cujo número de colunas ($m = n$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

No caso de matrizes quadradas $\mathbf{A}_{m \times m}$, costumamos de ordem m.

1.2.2 Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, par

Exemplos:

$$\mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriz-Coluna é aquela que possui uma ú

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analogamente, temos:

1.2.4 Matriz-Linha é aquela onde $m = 1$.

Exemplos: $[3 \quad 0 \quad -1]$ e $[0 \quad 0]$

1.2.5 Matriz Diagonal é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Um exemplo importante de matriz diagonal vem a seguir.

1.2.6 Matriz Identidade Quadrada é aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplos:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.7 Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

1.2.8 Matriz Triangular Inferior é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.9 Matriz Simétrica é aquela onde $m = n$ (

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ b & e \\ c & f \\ d & g \end{bmatrix}$$

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a p
xão" da parte inferior, em relação à diagonal.

1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidad
rações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que de
em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em milhares de toneladas)

	soja	feijão
Região A	3000	200
Região B	700	350
Região C	1000	100

Produção de grãos (em milhares de toneladas)

	soja	feijão
Região A	5000	50
Região B	2000	100
Região C	2000	100

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção p
nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os e
tes das duas tabelas anteriores:

$$\begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Podemos considerar agora a seguinte situação. Existem muitos incentivos para se incrementar a produção, condições climáticas favoráveis etc., de tal forma que a previsão para a safra do terceiro ano será o triplo da produção do primeiro. Assim, a matriz de estimativa de produção deste último será:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{soja} & \text{feijão} & \text{arroz} & \text{milho} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9000 & 600 & 1200 & 1800 \\ 2100 & 1050 & 2100 & 300 \\ 3000 & 300 & 1500 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Região A} \\ \text{Região B} \\ \text{Região C} \end{array}$$

Acabamos de efetuar, neste exemplo, duas operações com matrizes: soma e multiplicação por um número, que serão definidas formalmente, a seguir.

1.3.1 Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Isto é,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que, pela forma com que foi definida, a adição de matrizes tem as mesmas propriedades que a adição de números reais.

Propriedades: Dadas as matrizes **A**, **B** e **C** de mesma

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade)
ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
iii) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula $m \times n$.

Poderá ser usada a notação $\mathbf{0}_{m \times n}$ para a matriz nula confusão com o número zero.

A operação que definiremos a seguir é a multip por um número (real ou complexo), também chamada lar.

1.3.2 Multiplicação por Escalar: Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_m$ definimos uma nova matriz

$$k \cdot \mathbf{A} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas matrizes **A** e **B** de mesma ordem k_2, temos:

i) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
ii) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
iii) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o número z $\mathbf{A}$, teremos a matriz nula.
iv) $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$

Às vezes, é conveniente considerarmos as linhas colunas de uma nova matriz.

1.3.3 Transposição: Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ outra matriz $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colun $\mathbf{A}'$ é denominada *transposta* de **A**.

1.3.4 Exemplos

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Observe a matriz **B** acima.)

ii) $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.

iv) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, onde k é qualquer escalar.

Antes de definir uma outra operação, a multiplicação de matrizes, vejamos um exemplo do que pode ocorrer na prática.

Suponhamos que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Alimento I} \\ \text{Alimento II} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo":

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o "produto":

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto é, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de B e 2 de C.

Outro problema que poderemos considerar em relaçã
o seguinte:

Se o custo dos alimentos depender somente do seu
soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e
1,5, 3 e 5 u.c.p., quanto pagaríamos pela porção de alimen
mente?

$$(**) \quad \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$= [30(1{,}5) + 15(3) + 2(5)$$
$$= [100]$$

Ou seja, pagaríamos 100 u.c.p.

Observamos que nos "produtos" de matrizes efetu
um dos elementos da matriz-resultado é obtido a partir
matriz e uma coluna da segunda. Além disso, com relação
volvidas, temos:

Em (*) $\quad [\ ]_{1\times 2} \cdot [\ ]_{2\times 3} = [\ ]_{1\times 3}$

Em (**) $\quad [\ ]_{1\times 3} \cdot [\ ]_{3\times 1} = [\ ]_{1\times 1}$

O exemplo anterior esboça uma definição de multipl
quando **A** é uma matriz linha. Esta noção de produto
caso mais geral, e os elementos da matriz-produto serão ob
tos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos
da segunda matriz. Por exemplo,

Sejam

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e $$\mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A matriz-produto **AB** é a matriz 2 X 2 definida

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{2} \end{bmatrix}$$

Agora, passemos para a definição geral.

1.3.5 Multiplicação de Matrizes: Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos $\mathbf{AB} = [c_{uv}]_{m \times p}$

onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \dots + a_{un} b_{nv}$$

Observações:

i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{l \times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz-resultado $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ será de ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

1.3.6 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira é diferente do número de linhas da segunda.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Propriedades:

i) Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (podendo mesmo um dos outro não).

Exemplo:

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note, ainda, que $\mathbf{AB} = 0$, sem que $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes

ii) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (Isto justifica o nome da matriz i

iii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esque lação à soma)

iv) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direit relação à soma)

v) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade)

vi) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (Observe a ordem!)

vii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

1.4 EXERCÍCIOS

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix}$$

Encontre:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$
e) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$
f) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$
g) $-\mathbf{A}$
h) $-\mathbf{D}$

2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, então $x =$ _____.

3. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, então $\mathbf{A} - \mathbf{A}' =$ _____.

4. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}'$ é _____.

5. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal, então $\mathbf{A}' =$ _____.

6. Verdadeiro ou falso?
   a) $(-\mathbf{A})' = -(\mathbf{A}')$
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{B}' + \mathbf{A}'$
   c) Se $\mathbf{AB} = 0$, então $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
   d) $(k_1\mathbf{A})(k_2\mathbf{B}) = (k_1k_2)\mathbf{AB}$
   e) $(-\mathbf{A})(-\mathbf{B}) = -(\mathbf{AB})$
   f) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes simétricas, então $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
   g) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$.
   h) Se podemos efetuar o produto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada.

7. Se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 =$ _____.

8. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^2$ é _____.

9 Ache x, y, z, w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$.

11. Suponha que $\mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ onde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.
   a) $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?
   b) Se existir uma matriz $\mathbf{Y}$, tal que $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, então $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?

12. Explique por que, em geral, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

13. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,
   a) Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = 0$, $\mathbf{AC} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{CA} = \mathbf{C}$.
   b) Use os resultados de (*a*) para mostrar que $\mathbf{A}$
   $= (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$.

14. Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache $\mathbf{B}$, de modo que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$

15. Um construtor tem contratos para construir 3 estil
terrâneo e colonial. A quantidade de material empre
dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro
Moderno	5	20	16
Mediterrâneo	7	18	12
Colonial	6	25	8

(Qualquer semelhança dos números com a realid
   a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moder
   respectivamente, quantas unidades de cada m
   b) Suponha agora que os preços por unidade de fer
   jolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p.
   de cada tipo de casa?
   c) Qual o custo total do material empregado?

16. Uma rede de comunicação tem cinco locais com t
distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz aba
estação i pode transmitir diretamente à estação j,
transmissão da estação i não alcança a estação j. C
principal é nula significando que uma estação não
para si mesma.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o significado da matriz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$?

Seja $\mathbf{A}^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum_{k=1}^{5}$

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{3}$
que a estação 4 transmite para a estação 2 através
pela estação 3, embora não exista uma transmissão

a) Calcule $\mathbf{A}^2$.
b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?
c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz $\mathbf{A}^2$ representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".
d) Qual o significado das matrizes $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$?
e) Se $\mathbf{A}$ fosse simétrica, o que significaria?

17. Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz $\mathbf{A}$ abaixo é a probabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j, quando comprar um carro novo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Para} \\ & \begin{array}{ccc} \mathrm{J} & \mathrm{P} & \mathrm{U} \end{array} \\ \text{De} \begin{array}{c} \mathrm{J} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{U} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os termos da diagonal dão a probabilidade a_{ii} de se comprar um carro novo da mesma marca.

$\mathbf{A}^2$ representa as probabilidades de se mudar de uma marca para outra depois de duas compras. Você pode verificar isto a partir dos conceitos básicos de probabilidade (consulte 1.5) e produto de matrizes.

Calcule $\mathbf{A}^2$ e interprete.

18. Tente descobrir outras situações concretas que possam ser analisadas de modo similar ao de cada um dos problemas 15, 16 e 17.

* 1.5 PROCESSOS ALEATÓRIOS: CADEIAS DE MARKOV

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma seqüência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. (Suporemos nesta secção um conhecimento mínimo sobre probabilidades.) No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo será chamado *processo de Markov* e uma seqüência de estados seguindo este processo será denominada uma *cadeia de Markov*. Evidentemente, ao se supor tal restrição estaremos simplificando, talvez demasiadamente, uma vez que as probabilidades podem se modificar com o tempo
informação que obtivermos com este modelo já nos ser
uma previsão do comportamento de certos fenômenos.

Suponhamos, por exemplo, que, em uma determin
que se chover bastante durante um ano, a probabilidad
no ano seguinte é $\frac{1}{4}$, e que a probabilidade de que faç
se houver seca em um ano, no ano seguinte a probabili
chuva suficiente será a mesma, e igual a $\frac{1}{2}$. Suponhamos
(o que não ocorre na prática, embora possamos usar co
indicador da situação), que estas probabilidades não mu
tempo. Os estados possíveis para este processo são: chu

Podemos ter, então, as seguintes seqüências de aco
probabilidades):

Assim, sabendo que no primeiro ano houve seca,
chova bastante no terceiro ano é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
anos aumenta, as contas se tornam mais complicadas e,
dos em previsões a longo prazo sobre o clima da região
um outro procedimento. Isto pode ser feito se introduz
das probabilidades de transição, e a de *vetor de probab*
probabilidades de transição é obtida da tabela de proba
to na i-ésima linha e j-ésima coluna indica a probabilida
mo para o i-ésimo estado.

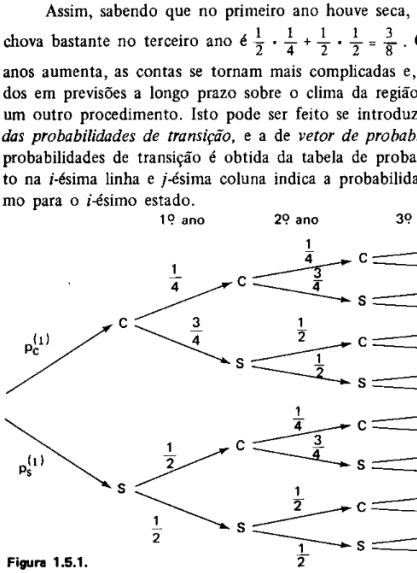


Figura 1.5.1.

$$\begin{array}{c|cc} & C & S \\ \hline C & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ S & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

O vetor de probabilidades é a matriz

$$\begin{bmatrix} p_c^{(n)} \\ p_s^{(n)} \end{bmatrix}$$

cuja primeira linha dá a probabilidade de que haja chuva no n-ésimo ano e a segunda linha dá a probabilidade de que haja seca no n-ésimo ano.

Analisando a árvore de probabilidades vemos que

$$p_c^{(2)} = \frac{1}{4} p_c^{(1)} + \frac{1}{2} p_s^{(1)}$$

$$p_s^{(2)} = \frac{3}{4} p_c^{(1)} + \frac{1}{2} p_s^{(1)}$$

Observamos que $\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} p_c^{(1)} + \frac{1}{2} p_s^{(1)} \\ \frac{3}{4} p_c^{(1)} + \frac{1}{2} p_s^{(1)} \end{bmatrix}$

e portanto

$$\begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

O mesmo ocorre do segundo para o terceiro ano, deste para o quarto etc. Temos, então, a seqüência:

$$\underset{1^{\underline{o}}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{2^{\underline{o}}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix}} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{3^{\underline{o}}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(3)} \\ p_s^{(3)} \end{bmatrix}} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^2 \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{\text{n-ésimo ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(n)} \\ p_s^{(n)} \end{bmatrix}} = \mathbf{T}^n \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

Portanto, o comportamento do clima desta região a lo
aumenta) poderá ser previsto se soubermos que os
$n = 1, 2, \ldots$ se aproximam dos elementos de uma m

$p_c^{(n)} \longrightarrow p_1$ e $p_s^{(n)} \longrightarrow p_2$ quando $n \longrightarrow \infty$

com

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

(Tal previsão é importante, pois se chegarmos, por ex
$p_s^{(n)} \to 1$ quando $n \to \infty$, a longo prazo a região se to

Se $\mathbf{T}^n$ não se aproxima de uma matriz $\mathbf{P}$, entã
nhuma previsão a longo prazo, pois o processo se m
passo. Assim, um dos problemas que devemos resolv
sobre a matriz $\mathbf{T}$ das probabilidades de transição, pa
aproximem de uma determinada matriz. Antes de re
formalizar a situação anterior.

1.5.1 Definição: Um *processo aleatório de Mar*
de assumir estados $a_1, a_2, \ldots, a_r$, de tal modo que a
de um estado a_j para um estado a_i seja p_{ij} (um núm
e a_i).

A *matriz das probabilidades de transição (matriz est*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}$$

(Observe que $p_{ij} \geqslant 0$, e que a soma de cada coluna

O *vetor de probabilidades* é aquele cuja i-ésima
de ocorrência do estado a_i após n transações:

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix}$$

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior vemos que, após n passos,

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^n \cdot \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Previsões a Longo Prazo: Para podermos fazer previsões a longo prazo, a matriz **T** deve cumprir certas condições. Assim, introduzimos a definição a seguir.

1.5.3 Definição: Uma matriz das probabilidades de transição é *regular* se alguma de suas potências tem todos os elementos não nulos.

A importância da matriz regular para as previsões a longo prazo é dada pelo teorema abaixo:

1.5.4 Teorema: Se a matriz $\mathbf{T}_{r \times r}$ das probabilidades de transição é regular, então:

i) As potências $\mathbf{T}^n$ aproximam-se de uma matriz **P**, no sentido de que cada elemento de $\mathbf{T}^n$ aproxima-se do elemento correspondente em **P**.

ii) Todas as colunas de **P** são iguais, sendo dadas por um vetor-coluna

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix}$$

com $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_r > 0$.

iii) Para qualquer vetor de probabilidades inicial

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{bmatrix}$$

o vetor de probabilidades $\mathbf{T}^n\mathbf{V}_1$ aproxima-se de **V** (dado no item anterior).

iv) O vetor **V** é o único vetor que satisfaz $\mathbf{V} = \mathbf{TV}$.

O que este teorema nos diz é que se a matriz da
sição é regular, então é possível fazer previsão a longo
de das probabilidades iniciais $\mathbf{V}_1$. Além disso, o item (
achar as probabilidades depois de um longo prazo. O p
encontrar o vetor "final" de probabilidades, usando o
procura de autovetor associado ao autovalor um da ma
minações que veremos no Capítulo 6. Não faremos a p
que isto nos desviará demais de nossos objetivos.

1.5.5 Exemplos

Exemplo 1: No problema sobre previsão de clima
do na introdução,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é regular pois sua primeira potência, isto é, ela mesma
tos estritamente positivos; e assim podemos concluir,
quaisquer que sejam as probabilidades iniciais, as proba
são dadas por:

$$\begin{bmatrix} p_c \\ p_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c \\ p_s \end{bmatrix}$$

ou $\begin{cases} p_c = \frac{1}{4}\, p_c + \frac{1}{2}\, p_s \\ p_s = \frac{3}{4}\, p_c + \frac{1}{2}\, p_s \end{cases}$

ou $\begin{cases} 2p_s = 3p_c \\ 2p_s = 3p_c \end{cases} \Longrightarrow p_s = \frac{3}{2}\, p_c$

Como devemos ter $p_c + p_s = 1$ (que é a probabilidade
$= 1$ ou $p_c = \frac{2}{5}$ e, portanto, $p_s = \frac{3}{5}$. Assim, a longo p
um ano de chuva é $\frac{2}{5}$, enquanto que a probabilidade
(dentro das hipóteses simplificadoras), e portanto a reg
aridez.

Exemplo 2: Suponhamos que em uma determinada região, a cada ano três por cento da população rural migra para as cidades, enquanto que apenas um por cento da população urbana migra para o meio rural. Se todas as demais condições permanecerem estáveis, as condições políticas não mudarem, e estas porcentagens de migração continuarem as mesmas, qual deve ser a relação entre as populações urbana e rural desta região a longo prazo?

Como três por cento da população rural migra para o meio urbano, a probabilidade de migração do meio rural para o meio urbano é 0,03, enquanto que a probabilidade de não migração é 0,97. Como um por cento da população urbana migra para o meio rural a probabilidade de migração do meio urbano para o rural é 0,01 e a de não migração é 0,99. Denotando por U o meio urbano e por R o meio rural, temos a matriz das probabilidades de transição:

	R	U
R	0,97	0,01
U	0,03	0,99

Como a matriz é regular, a longo prazo as probabilidades p_R, de viver no meio rural, e p_U, de viver no meio urbano, devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}03 & 0{,}99 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_R \\ p_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_R \\ p_U \end{bmatrix}$$

donde $p_U = 3p_R$ e, como devemos ter $p_U + p_R = 1$, temos $p_R = 0{,}25$ e $p_U = 0{,}75$. Ou seja, a longo prazo, e se não houver modificações nas tendências de migração, teremos 25% da população no meio rural e 75% da população no meio urbano.

Exemplo 3: Observa-se experimentalmente que, em condições naturais e sem ser submetida à pesca industrial, a quantidade de uma certa espécie de peixes varia da seguinte forma: se em um determinado ano a população diminuiu, a probabilidade de que diminua ainda mais no ano seguinte é de 0,6 e, se em um determinado ano a população aumenta, a probabilidade de que diminua no ano seguinte é de apenas 0,3. Entretanto, observa-se que sendo submetida à pesca industrial, quando a população aumenta num determinado ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte se altera para 0,5, enquanto que se a população diminui num ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte continua sendo de 0,6. Deseja-se saber como, a l
dustrial estará afetando os peixes dessa espécie, para ver
a intensidade de pesca ou se, ao contrário, é possível a

Os estados deste processo são: diminuição da popu
da população (A). Então, sem haver pesca industrial, a
de transição é

	D	A
D	0,6	0,3
A	0,4	0,7

Como é uma matriz regular, as probabilidades p_D da po
da população aumentar a longo prazo são dadas por

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix}$$

que, sendo resolvida (lembrando que $p_D + p_A = 1$), for

Portanto, como a probabilidade de a população aumenta
ções naturais, a espécie tem a sobrevivência razoavelmen
pesca industrial, a matriz se altera para

	D	A
D	0,6	0,5
A	0,4	0,5

Como é uma matriz regular, a longo prazo p_D e p_A são

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix}$$

Assim, temos $p_D = \frac{5}{9}$ e $p_A = \frac{4}{9}$. Como a probabilidade
nuir é maior, se a espécie for submetida à pesca industr
será ameaçada e, portanto, a pesca deve ser diminuída.

Exemplo 4: Duas substâncias distintas estão em co
sódio entre si. Sabe-se (por dedução teórica, ou experin
de sódio do meio (1) tem probabilidade 0,7 de passar
que um íon de sódio que esteja no meio (2) tem proba
ao meio (1). Colocando-se dois moles de sódio no meio

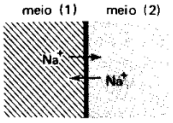


Figura 1.5.2

centrações de sódio em cada um dos meios, após um longo período de tempo?

Os estados deste processo são: o íon está no meio (1) e o íon está no meio (2). A matriz de probabilidades de transição é:

	meio (1)	meio (2)
meio (1)	0,3	0,1
meio (2)	0,7	0,9

Sejam p_1 e p_2 as probabilidades de estar no meio (1) e (2), respectivamente. Então, inicialmente, quando todo o sódio foi colocado no meio (1), $p_1^{(1)} = 1$ e $p_2^{(1)} = 0$. Como a matriz de probabilidades é regular, a longo prazo as probabilidades não dependem das probabilidades iniciais, e devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo (lembrando sempre que $p_1 + p_2 = 1$), temos $p_1 = \frac{1}{8}$ e $p_2 = \frac{7}{8}$.

Logo, as concentrações finais em cada meio são $\frac{1}{8} \cdot 2 = 0{,}25$ moles no meio (1) e $\frac{7}{8} \cdot 2 = 1{,}75$ moles no meio (2).

1.5.6 Previsões em Genética: Com pequenas modificações das idéias usadas nos processos de Markov, podemos estudar vários problemas genéticos. Sabemos que o tipo mais simples de transmissão de herança genética é efetuado através de pares de genes, os quais podem ser ambos dominantes, recessivos, ou um dominante e outro recessivo. Chamemos G o gene dominante e g o gene recessivo. Um indivíduo será chamado dominante se tiver genes GG, híbrido se tiver genes Gg, e recessivo, caso os genes sejam gg. Um indivíduo herda os genes ao acaso, um deles de seu pai e o outro de sua mãe. Assim, nos vários tipos de cruzamento, temos probabilidades distintas de transmissão de herança genética. No caso de cruzamento de indivíduos dominantes teremos somente filhos de genótipos dominantes.

GG cruzado com GG → GG com pr
→ Gg com pr
→ gg com pr

No caso de cruzamento de indivíduos recessivos

gg cruzado com gg → GG com proba
→ Gg com proba
→ gg com proba

No caso do cruzamento de um indivíduo dominant

GG cruzado com gg → GG com prob
→ Gg com prob
→ gg com prob

No caso do cruzamento de um indivíduo dominant

GG cruzado com Gg → GG com prob
→ Gg com prob
→ gg com prob

No caso recessivo e híbrido, temos:

gg cruzado com Gg → GG com proba
→ Gg com proba
→ gg com proba

E finalmente, no caso de dois indivíduos híbrid

Gg cruzado com Gg → GG com proba
→ Gg com prob
→ gg com proba

Denotando por d, dominante, r, recessivo e h, híbrid
mentos por $d \times d$, $d \times r$ etc., colocando as probabi
mos montar a seguinte matriz T:

	$d \times d$	$r \times r$	$d \times r$	$d \times h$	r
d	1	0	0	0,5	
h	0	0	1	0,5	0
r	0	1	0	0	0

Além disso, numa população numerosa composta por uma porcentagem $p_d^{(1)}$ de indivíduos de características dominantes, $p_h^{(1)}$ de indivíduos híbridos e $p_r^{(1)}$ de indivíduos de características recessivas, a probabilidade de cruzamento de genes de um indivíduo dominante com outro dominante é $p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$. Se quizermos calcular a probabilidade de um cruzamento onde um dos indivíduos é dominante e o outro é híbrido, temos que somar $p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$ (considerando que o primeiro é dominante e o segundo é híbrido) a $p_h^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$. Assim, a probabilidade é de $2p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$. Os outros casos seguem o mesmo raciocínio e temos então:

Cruzamento	Probabilidade
$d \times d$	$p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$
$r \times r$	$p_r^{(1)} \cdot p_r^{(1)}$
$d \times r$	$2\,p_d^{(1)} \cdot p_r^{(1)}$
$d \times h$	$2\,p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$
$r \times h$	$2\,p_r^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$
$h \times h$	$p_h^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$

(Estamos supondo que a característica genética analisada seja tal que não interfira no cruzamento natural.)

Então, podemos ter as porcentagens de indivíduos dominantes, $p_d^{(2)}$, de indivíduos híbridos, $p_h^{(2)}$, e de indivíduos recessivos, $p_r^{(2)}$, da segunda geração, multiplicando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} p_d^{(2)} \\ p_h^{(2)} \\ p_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)} \\ p_r^{(1)} \cdot p_r^{(1)} \\ 2p_d^{(1)} \cdot p_r^{(1)} \\ 2p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \\ 2p_r^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \\ p_h^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \end{bmatrix}$$

Supondo que não haja novo cruzamento de indivíduos da primeira geração (o que, em geral, ocorre com populações de insetos etc.), uma vez obtidas as porcentagens de indivíduos da segunda geração, podemos obter as porcentagens da terceira geração, multiplicando novamente a matriz **T** pelos novos da-

dos, e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos o p geração. Evidentemente, os cálculos tornam-se demorad facilmente, se usarmos calculadoras. Este tipo de análi mais talvez), mas é importante em muitos campos, co se ter uma idéia da propagação da resistência genética da resistência de insetos a tipos de inseticidas etc.

Exemplo: Aplica-se um certo tipo de inseticida para se combater uma determinada espécie de insetos. ca-se que, dos poucos insetos sobreviventes, 60% eram e os outros 40% não o eram (e haviam sobrevivido po que o ciclo de vida desses insetos é de um ano e que uma vez em cada geração. Além disso, ficou comprova inseticida é uma característica dominante e que o inse novamente. Tendo estes dados em mente, perguntamos de insetos resistentes ao inseticida após dois anos?

Como a resistência é uma característica dominan podem ter genótipo *GG* ou *Gg* na relação 1 : 2, e assi tentes são dominantes e 40% são híbridos. Temos, po = 0,4 e $p_r^{(1)}$ = 0,4 e assim, a distribuição da porcenta ano é dada por

$$\begin{bmatrix} p_d^{(2)} \\ p_h^{(2)} \\ p_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot$$

ou seja, $p_d^{(2)}$ = 0,16, $p_h^{(2)}$ = 0,48 e $p_r^{(2)}$ = 0,36. Após ção de insetos será dada por

$$\begin{bmatrix} p_d^{(3)} \\ p_h^{(3)} \\ p_r^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

ou seja, $p_d^{(3)}$ = 0,16, $p_h^{(3)}$ = 0,48 e $p_r^{(3)}$ = 0,36. Assim centagem dos insetos resistentes ao inseticida será $p_d^{(3)}$ = 0,64, ou seja, 64% da população é resistente. Dessa

uma nova aplicação de inseticida, não será conveniente aplicar o mesmo tipo, pois ele matará no máximo 36% do insetos.

Observe que a distribuição dos insetos quanto ao genótipo *GG*, *Gg* ou *gg* permaneceu a mesma na segunda e terceira gerações. ($p_d^{(2)} = p_d^{(3)} = 0{,}16$ $p_h^{(2)} = p_h^{(3)} = 0{,}48$ e $p_r^{(2)} = p_r^{(3)} = 0{,}36$.)

Calcule as probabilidades para a quarta geração de insetos (depois de três anos). O resultado que você obteve não é uma casualidade. Existe uma "lei genética" muito conhecida, que estabelece sob condições ideais que depois da segunda geração, a distribuição entre os genótipos permanece a mesma. Assim, se partirmos de uma população onde a formação inicial é dada por freqüências $p_d^{(1)} = u$, $p_h^{(1)} = v$ e $p_r^{(1)} = w$, temos:

Genótipo	*Geração inicial*	*Gerações seguintes*
GG	u	$(u + \frac{v}{2})^2$
Gg	v	$2(u + \frac{v}{2})(w + \frac{v}{2})$
gg	w	$(w + \frac{v}{2})^2$

Você pode mostrar esta relação através do produto de matrizes.

No "modelo genético" considerado neste parágrafo, é assumida uma situação-padrão: não existe migração, os encontros são ao acaso, não ocorrem mutações nem seleção, os dois sexos aparecem sempre em quantidades iguais.

Esta relação de estabilidade genética aqui apresentada foi mostrada independentemente, pelo matemático G. H. Hardy e o genético W. Weinberg em 1908.

* 1.6 EXERCÍCIOS

1. Suponha que um corretor da Bolsa de Valores faça um pedido para comprar ações na segunda-feira, como segue: 400 quotas de ação A, 500 quotas da ação B e 600 quotas da ação C. As ações A, B e C custam por quota Cr$ 500,00, Cr$ 400,00 e Cr$ 250,00, respectivamente.

   a) Encontre o custo total de ações, usando multiplicação de matrizes.

   b) Qual será o ganho ou a perda quando as ações for mais tarde se as ações A, B e C custam Cr$ 600,0 Cr$ 300,00 por quota, respectivamente?

2. É observado que as probabilidades de um time de fut empatar uma partida depois de conseguir uma vitória tivamente; e depois de ser derrotado são $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{2}{5}$ depois de empatar são $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{5}$, respectivamente. S nem piorar, conseguirá mais vitórias que derrotas a lo

3. Numa pesquisa procura-se estabelecer uma correlação laridade de pais e filhos. Estabelecendo as letras **P** pa curso primário, S para o curso secundário e U para o probabilidade de um filho pertencer a um destes grup po em que o pai está é dada pela matriz

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & S & U \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ S \\ U \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

   Qual é a probabilidade de um neto de um indivíduo secundário ser um universitário?

4. Numa cidade industrial, os dados sobre a qualidade d como satisfatório (S) e insatisfatório (I). Assuma que, S, a probabilidade de se ter S no dia seguinte é de $\frac{2}{5}$ trado I, tem-se $\frac{1}{5}$ de probabilidade de ocorrer S no di

   a) Qual é a probabilidade do quarto dia ser S, se o p

   b) O que se pode dizer a longo prazo sobre a probab S ou I?

5. Numa ilha maravilhosa verificou-se que a cor azul occ genótipo *aa*, e não ocorre em *Aa* e *AA*. Suponha que boletas azuis seja $\frac{1}{4}$. Depois de algumas gerações, qua das borboletas não azuis, mas capazes de ter filhotes

1.7 RESPOSTAS

1.7.1 Respostas de 1.4

2. $x = 1$
4. Triangular inferior
6. *a*) V; *b*) V, *c*) F; *d*) V; *e*) F; *f*) F; *g*) F; *h*) V
8. Triangular superior
12. Porque em geral o produto de matrizes não é comutativo.
15. *a*) [146 526 260 158 388]

    b) $\begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$

    c) Cr$ 11.736,00

16. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0{,}59 & 0{,}28 & 0{,}13 \\ 0{,}44 & 0{,}39 & 0{,}17 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0{,}16 \end{bmatrix}$

1.7.2 Respostas de 1.6

2. As probabilidades de ganhar, perder ou empatar, a longo prazo, são aproximadamente iguais a 1/3, sendo a probabilidade de ganhar ligeiramente maior.
3. A probabilidade é 1/3.
4. *a*) 31/125

   b) A longo prazo, a probabilidade de termos dias satisfatórios é 1/4 e de termos dias insatisfatórios é 3/4.

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*; Editora Polígono, São Paulo, 1970.

[2] Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

[3] SMSG; *Matemática: Curso Colegial*, vol. 3; Yale University Press, New Haven, 1965.

[4] Campbell, H. G.; *Linear Algebra with Applications*; Meredith Corporation, New York, 1971.

2

SISTEMAS DE EQUA
LINEARES

2.1 INTRODUÇÃO

Na natureza, as coisas estão sempre mudando, se tran
no, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua exi
e dominar estes processos de mudança. Um dos méto
descrever estas transformações foi o de procurar nesta
tante durante a mudança. Por exemplo, sabemos que
com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O). Mas,
de oxigênio precisamos? Esta é uma mudança que po
te modo: x moléculas de H_2 reagem com y moléculas
léculas de H_2O, ou esquematicamente:

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O.$$

O que permanece constante nessa mudança? Co
modificados, o número de átomos de cada elemento
ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento
para o hidrogênio devemos ter $2x = 2z$, e para o oxig
as nossas incógnitas x, y e z devem satisfazer as equa

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se conseguirmos descobrir quais são os números x, y, z que satisfazem simultaneamente estas relações, teremos aprendido um pouco mais sobre como se comporta a natureza.

Este procedimento que consiste em identificarmos o que permanece constante na mudança, leva a um sistema de equações que precisa ser resolvido e, em muitos casos, as equações envolvidas são lineares (como no exemplo anterior da reação de H_2 com O_2). Evidentemente, você já sabe um pouco como resolver este tipo de sistema, mas quando o número de equações se torna muito grande, ou temos menos equações do que incógnitas (como no caso anterior), podem surgir muitas dúvidas, até mesmo sobre a existência ou não de solução para o sistema.

Por outro lado, em sistemas que apresentam mais do que uma solução é necessário ter-se uma forma clara de se expressar todas elas. Por exemplo, no sistema anterior você pode encontrar duas soluções distintas para (x, y, z) (faça isto!), mas só o terá resolvido se conseguir expressar o conjunto de todas as soluções. Por isso, nosso objetivo neste capítulo é estudar um método para a resolução de sistemas lineares em geral. A técnica que será utilizada pode não ser a melhor no caso de sistemas muito simples, mas tem a vantagem de poder ser aplicada sempre e ser facilmente mecanizada. É particularmente útil em sistemas com grande número de incógnitas onde o uso de calculadoras é inevitável. Em síntese, este método consiste em substituir o sistema inicial por sistemas cada vez mais simples, sempre "equivalentes" ao original.

Comecemos com o seguinte exemplo. (Para efeito de visualização, colocaremos ao lado de cada sistema uma matriz a ele associada.)

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

1º Passo: Eliminamos x_1 das equações (2) e (3). Para isto, multiplicamos a equação (1) por -2 e somamos a equação obtida com a equação (2), obtendo uma nova equação (2'). Da mesma maneira produziremos a equação (3'), obtida ao multiplicarmos a equação (1) por -1, somando esta nova equação à equação (3). Isto resulta no seguinte sistema:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3') \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

2º Passo: Tornamos o coeficiente de x_2 da equação (
multiplicamos a equação (2') por -1/3. O sistema resu

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases}$$

3º Passo: Eliminamos x_2 das equações (1'') e (3''). P
equação (2'') por -4 e somamos a esta a equação (1'
neira análoga obtemos (3'''), multiplicando a equação
esta nova equação a equação (3'').

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''') \\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''') \end{cases}$$

4º Passo: Tornamos o coeficiente de x_3 na equação (
multiplicamos a equação (3''') por -3. Isto resulta no

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv}) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv}) \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3^{iv}) \end{cases}$$

5º Passo: Eliminamos x_3 das duas primeiras equações
mos a equação (3^{iv}) por -1/3 e somamos a esta nova
De modo análogo, multiplicamos a equação (3^{iv}) por
ção somamos a equação (2^{iv}). Sistema resultante:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Assim, cada sistema foi obtido a partir do sistema anterior, por "operações" que preservaram as igualdades. Por isto, cada terna (x_1, x_2, x_3) que é solução do sistema I, também será solução dos sistemas seguintes. Deste modo, uma vez encontradas as soluções do sistema VI, as soluções do sistema I, se existirem devem estar entre estas, isto é, *toda solução do sistema I também é solução do sistema VI.*

O ponto fundamental deste procedimento é que as etapas são todas reversíveis. Por exemplo, partindo do sistema II podemos obter o sistema I, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(1) &= (1')\\ (2) &= 2\cdot(1') + (2')\\ (3) &= (1') + (3')\end{aligned}$$

(Com esta notação estamos querendo indicar que, por exemplo, a segunda linha (2) do sistema I é obtida multiplicando-se por dois a primeira linha (1') do sistema II e somando-se a segunda linha (2') do sistema II, isto é, $(2) = 2\cdot(1') + (2')$.)

De modo análogo, você pode obter o sistema V a partir de VI, IV a partir de V, III a partir de IV e II a partir de III. Usando o mesmo argumento anterior, podemos dizer que *toda solução de VI também é solução de I.* A partir das duas afirmações destacadas acima concluímos que os sistemas I, II, III, IV, V e VI têm as mesmas soluções e, portanto, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$, que é a solução de VI, é a única solução do sistema inicial I. (Você pode verificar por substituição direta, que esta é uma solução, mas apenas como garantia de que não erramos nos cálculos.)

Podemos afirmar que no exemplo anterior os sistemas I, II, III, IV, V e VI são *equivalentes* segundo a definição dada a seguir.

Observe que, no exemplo anterior, as únicas operações que efetuamos são dos seguintes tipos:

i) Multiplicar uma equação por um número diferente de zero.
ii) Adicionar a equação a outra.

Existe ainda uma outra operação que às vezes precisaremos efetuar neste procedimento, e ela também é reversível.

iii) Permutar duas equações.

Por exemplo, no sistema:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 & (1)\\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 & (2)\\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 & (3)\end{cases}$$

nosso primeiro passo seria permutar as equações (1) e (2
coeficiente de x_1 diferente de zero na primeira equação.

Estas operações num sistema produzem sempre sist
conjunto-solução, como vimos no exemplo anterior. Uma
deste fato, usando matrizes elementares, será vista em 3.
matrizes para apresentar uma maneira organizada de reso
ções, seguindo a idéia do exemplo anterior. Antes, porém
alguns conceitos.

2.2 SISTEMAS E MATRIZES

2.2.1 Conceitos

Um sistema de equações lineares com m equações e n in
de equações do tipo:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b\end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, números reais (ou com

Uma *solução* do sistema (*) é uma n-upla de núme
que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são *equivalentes*
solução de qualquer um dos sistemas também é solução

2.2.2 Sistemas e Matrizes

Podemos escrever o sistema (*) numa forma matri

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ xn\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

ou $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a matriz das incógnitas e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos *matriz ampliada do sistema.* Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. Observe que no exemplo dado em 2.1, ao lado de cada sistema, escrevemos sua matriz ampliada. Assim, no sistema dado:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

temos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Em termos de matrizes ampliadas, na resolução do sistema, partimos de

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

e chegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que é a matriz ampliada do sistema VI

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

através de operações equivalentes às efetuadas nas equ
que serão definidas a seguir são as operações elementa
uma matriz.

2.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES

São três as operações elementares sobre as linhas de

i) Permuta das *i*-ésima e *j*-ésima linhas. ($L_i \longleftrightarrow L_j$

Exemplo: $L_2 \longrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar nã

Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Substituição da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha m
nha. ($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se **A** e **B** são matrizes $m \times n$, dizemos que **B** *é linha equivalente* a **A**, se **B** for obtida de **A** através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de **A**. Notações: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pois}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -1L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já comentamos em 2.1 que as operações com linhas de um sistema produzem outro sistema equivalente ao inicial. Em termos de matrizes, podemos enunciar este resultado como:

2.3.1 Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

(A demonstração deste teorema, usando-se matrizes elementares, está em 3.8.5.)

Como vimos, o processo utilizado para se resolver sistemas por "eliminação de incógnitas" corresponde a passar a matriz ampliada do sistema inicial para matrizes-linha equivalentes a esta, até que cheguemos a uma matriz conveniente que indique a solução do sistema original. Você pode observar em 2.2. que a matriz final (associada ao sistema VI) tem uma forma especial. Ela é um exemplo do que chamaremos *matriz-linha reduzida à forma escada*. O método que apresentamos aqui consiste em obter por linha-redução estas matrizes, por meio das quais chegamos à solução do sistema de uma forma explícita.

Um outro método, conhecido como o Método de Gauss, reduz por linha-equivalência a matriz ampliada do sistema a uma matriz "triangular". (Você terá a oportunidade de resolver sistemas por este método, que é muito usado por suas vantagens computacionais, no Exercício 17 de 2.6. Não perca!)

2.4 FORMA ESCADA

2.4.1 Definição: Uma matriz $m \times n$ *é linha rea*

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não
b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não todos os seus outros elementos iguais a zero.
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
d) Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k$

Esta última condição impõe a forma escada à

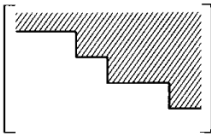


Figura 2.4.1

Isto é, o número de zeros precedendo o primeir uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem som ver.

2.4.2 Exemplos

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a fo condição n

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a forma primeira e a qu

Exemplo 3: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Não sa terceir

Exemplo 4: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ É a fo condiç

2.4.3 Teorema: Toda matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Para a demonstração, veja a secção 2.7. Este teorema permite-nos definir os conceitos abaixo que serão relacionados a seguir com o número real de equações e o número de soluções de um sistema.

2.4.4 Definição: Dada uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$, seja $\mathbf{B}_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a **A**. O *posto* de **A**, denotado por p, é o número de linhas não nulas de **B**. A *nulidade* de **A** é o número $n - p$.

Observamos que dada uma matriz **A** qualquer, para achar seu posto necessitamos encontrar primeiro sua matriz-linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de **A**. A nulidade é a diferença entre colunas de **A** e o posto.

2.4.5 Exemplos

Exemplo 1: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de **A**, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

O posto de **A** é 3 e a nulidade de **A** é $4 - 3 = 1$.
Observação: Se interpretarmos a matriz **A** dada acima como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz-linha reduzida à forma escada é linha equiva
o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma s

Exemplo 2: Desejamos encontrar o posto e a nu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações matriciais:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto de **B** é 2, e a nulidade é 1. Repare que a ma

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

tem o mesmo posto e nulidade que **B**.

Reinterpretando as matrizes acima como sistemas de equações, diremos que o sistema de quatro equações associado à matriz inicial:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + 0y = \dfrac{14}{9} \\ 0x + y = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

associado à matriz-linha reduzida à forma escada. Este é um caso de sistema com equações redundantes. A terceira e a quarta equações (que se tornam nulas no final do processo) podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

associado à matriz $\mathbf{B}_1$.

Usamos dizer também que, neste caso, as duas primeiras equações são "independentes" e que as demais são "dependentes" destas. Você vai se familiarizar com estas denominações no Capítulo 4. Ainda segundo esta terminologia, denominamos posto de uma matriz ao número de *linhas "independentes"* desta. Você pode observar que uma linha será "dependente" de outras (isto é, será igual a zero no final do processo de redução) se ela puder ser escrita como soma de produtos destas outras linhas por constantes. Costumamos dizer também que esta linha é uma *combinação linear* das outras. Por exemplo, na matriz **B** podemos dizer que a primeira e a segunda linhas são independentes, enquanto que a terceira e a quarta são combinações lineares das duas primeiras linhas.

Você viu assim que um posto da matriz ampliada de um sistema nos dá o número de equações independentes deste. Na próxima secção veremos que o posto também está relacionado com o número de soluções de um sistema.

2.5 SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUA

O objetivo desta secção é estudar detalhadamente toda
dem ocorrer na resolução de um sistema linear.

2.5.1 Se tivermos um sistema de uma equação e u

$$ax = b$$

existirão três possibilidades:

i) $a \neq 0$. Neste caso a equação tem uma única soluçã

$$x = \frac{b}{a}$$

ii) $a = 0$ e $b = 0$. Então temos $0x = 0$ e qualquer nú
da equação.

iii) $a = 0$ e $b \neq 0$. Temos $0x = b$. Não existe solução

Para analisar sistemas de duas equações e duas inc
exemplos.

2.5.2 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Lembramos que o conjunto de pontos $(x_1, x_2) \in R \times R$
equação deste sistema, representa uma reta no plano. Pa
devemos então encontrar os pontos comuns a estas duas

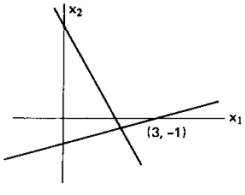


Figura 2.5.1

Deste modo, (3, -1) é a única solução. A matriz ampliad
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$. Transformando-a em matriz-linha reduzida

obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 \quad = 3 \\ \quad x_2 = -1 \end{cases}$$

equivalente ao sistema inicial. O sistema tem uma única solução $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$, como foi analisado graficamente. Observamos que o posto da matriz dos coeficientes do sistema reduzido $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o da matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é 2.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

As duas retas que formam este sistema são coincidentes.

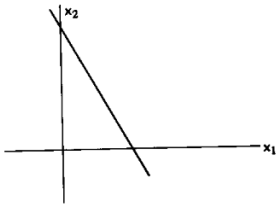


Figura 2.5.2

Neste caso, vemos geometricamente que qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema. A matriz ampliada do sistema e a matriz reduzida por linhas à forma escada são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema acima é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

onde a segunda equação pode ser simplesmente "ignor
nenhuma condição sobre x_1 ou x_2. Ela é verdadeira p
e x_2. O conjunto de soluções deste sistema será dado,
arbitrários para a incógnita x_2 e tomando $x_1 = \frac{5}{2} - -$
temos:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda$$
$$x_2 = \lambda$$

Atribuindo diversos valores para λ, obtemos várias solu
exemplo, para $\lambda = 0$, temos $x_1 = \frac{5}{2}$ e $x_2 = 0$. Para λ
$x_2 = 1$ etc. Este sistema admite infinitas soluções.

Observe que a matriz ampliada e também a matr
sistema têm posto 1, pois, uma vez transformadas em
na forma escada, elas possuem uma linha não nula. A
coeficientes é 2 - 1 = 1 que é também chamada o gra
ma. Isto quer dizer que o nosso sistema apresenta uma

Exemplo 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

Geometricamente, temos duas retas no plano que não
em comum, pois são paralelas, e portanto este sistema
mostrado na Figura 2.5.3.

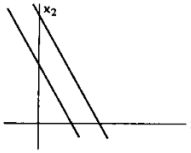


Figura 2.5.3

A matriz ampliada deste sistema $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ é equival
duzida à forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 0x_1 + \quad 0x_2 = 1 \end{cases}$$

Não existe nenhum valor de x_1 ou x_2 capaz de satisfazer a segunda equação. Assim, o sistema inicial não tem solução. Dizemos que ele é incompatível (impossível). Vamos comparar a matriz de coeficientes e a ampliada, reduzidas à forma escada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que o posto da matriz dos coeficientes do sistema inicial é 1 e o posto de sua matriz ampliada é 2.

2.5.3 Caso Geral: Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter

i) uma única solução: $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$

ii) infinitas soluções

iii) nenhuma solução.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é *possível* (compatível) e *determinado*. No segundo caso, dizemos que o sistema é *possível* e *indeterminado*. E no terceiro caso, dizemos que o sistema é *impossível* (incompatível).

Consideremos a matriz ampliada do sistema anterior e tomemos sua matriz-linha reduzida à forma escada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)} \quad \begin{bmatrix} \text{[illegible]} \\ 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

Procure entender e demonstrar (veja a secção 2.7) ca
ções do teorema abaixo. Leia com atenção e volte aos exe
2.5.2, se achar conveniente.

2.5.4 Teorema

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite sol
se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da m

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$,

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$,
$n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas

Para finalizarmos este assunto, convém ilustrá-lo. Dize
o *grau de liberdade* do sistema é $n - p$.

Em cada exemplo, é dada a matriz-linha reduzida à f
triz ampliada. Usamos a notação

p_c = posto da matriz dos coeficientes e

p_a = posto da matriz ampliada. Se $p_c = p_a$ denotamo
p.

2.5.5 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a$$

$m = 3$, $n = 3$ e $p = 3$. Então, a solução é única e $x_1 = 3$,

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad p_c = p$$

$m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$. Temos um grau de liberdade: $x_1 = -10 - 7x_3$ e $x_2 = -6 - 5x_3$.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$m = 3$, $n = 3$, $p_c = 2$ e $p_a = 3$. O sistema é impossível e, portanto, não existe solução.

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p_c = p_a = 2$$

$m = 3$, $n = 4$ e $p = 2$. Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$ e $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$.

2.5.6 Agora, depois de termos mostrado como é possível resolver sistemas de equações lineares através de matrizes, podemos voltar ao problema que havíamos proposto no início do capítulo, relativo à quantidade de hidrogênio e oxigênio necessária para se formar a água.

Sabemos que

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O$$

onde x, y, z devem satisfazer

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada, associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que, reduzida à forma escada, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, z é uma variável livre e, assim, se tornarmos z

$$\begin{cases} x - \lambda = 0 \\ y - \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note o significado de termos um grau de liberdad sistema. Temos apenas estabelecida a proporção com qu entrar na reação, e, para diferentes valores de λ, teremo de reagentes produzindo quantidades diferentes de água se $\lambda = 2$, teremos $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$
se $\lambda = 4$, teremos $4H_2 + 2O_2 \rightarrow 4H_2O$

2.5.7 Exemplos

Exemplo 1: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reinterpretando o sistema, vemos que z e t são variáveis lí dade 2). Chamando $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$ obtemos:

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $[-5\ 2\ 1\ 0]'$ e $[1\ -1\ 0\ 1]'$ são soluções do sistema obtidas da seguinte forma: a primeira, fazendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, e a segunda, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Elas são chamadas *soluções básicas* do sistema porque geram todas as outras. Todo sistema homogêneo tem solução que pode ser escrita desta forma. Basta reduzir o sistema, observar as variáveis livres e atribuir valores 1 para uma delas e zero para as outras, obtendo as soluções básicas (tantas quanto o grau de liberdade). A solução será uma soma destas soluções multiplicadas por constantes.

Exemplo 2: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

que reduzida torna-se $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Reinterpretando, vemos que y e z são variáveis livres.

Fazendo $y = \lambda_1$ e $z = \lambda_2$, temos

$$\begin{aligned} x &= -3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \end{aligned}$$

As soluções básicas são então: $x = -3$, $y = 1$, $z = 0$ e $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. Assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$

A matriz associada é

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ que reduzida à forma escada torna

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Reinterpretando, vemos que z e

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Compare com o exemplo 1. O que você nota?

2.6 EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, que estão zida por linhas.

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6. Determine k, para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.

ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.

iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

10. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

11. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um do quando se faz uso do computador, devido ao menor nú que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz amplia linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da li escada na condição *b*) de 2.4.1, que passa a ser: *b'*) (têm o primeiro elemento não nulo de alguma linha, ten *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a so ma é obtida por substituição.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{5}{2} \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

18. *a*) Mostre a proposição 2.4.3 para matrizes 2×2 quaisquer.
b) Sinta a dificuldade que você terá para formalizar o resultado para matrizes $n \times m$, mas convença-se de que é só uma questão de considerar todos os casos possíveis, e escreva a demonstração. Consulte 2.7.

19. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
b) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad\quad + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

Note que podemos escrevê-lo na forma matricial

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que a matriz $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma so

b) Resolva o sistema e verifique que toda "matriz-solu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in R$.

c) Verifique

$$\lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo, associado ao sist

$$(**) \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Conclua, dos itens *a*), *b*) e *c*), que o conjunto-soluç conjunto-solução do sistema **, somado a uma solu tema *.

21. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua e w.)
b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encont
c) Resolva também o sistema homogêneo associado.
d) Verifique que toda matriz-solução obtida em *b*) é a -solução encontrada em *c*) com a solução particular em *a*).

22. Altamente motivado pelos Exercícios 20 e 21, mostre ção de um sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é a soma de uma so

mogêneo associado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ com uma solução particular de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Sugestão: siga as etapas seguintes, usando somente propriedades de matrizes.

i) Mostre que se $\mathbf{X}_0$ é uma solução do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{X}_1$ é uma solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

ii) Se $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são soluções de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

iii) Use *i)* e *ii)* para chegar à conclusão desejada.

23. Faça o balanceamento das reações:

a) $N_2O_5 \rightarrow NO_2 + O_2$ (decomposição térmica do N_2O_5)
b) $HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$ (dissolução do vidro em HF)
c) $(NH_4)_2CO_3 \rightarrow NH_3 + H_2O + CO_2$

24. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a) Discuta a solução do sistema.
b) Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema incompatível.

25. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) de cada alimento, determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii) O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

iv) O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

26. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cad
190 g de fosfato e 205 g de potássio.

Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as

i) Cada quilograma do adubo I custa 5 u.c.p. e cont
10 g de fosfato e 100 g de potássio.

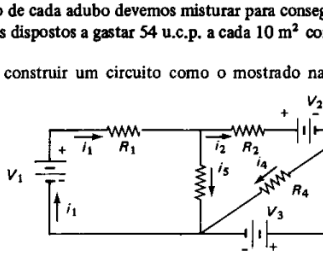
ii) Cada quilograma do adubo II custa 6 u.c.p. e con
100 g de fosfato e 30 g de potássio.

iii) Cada quilograma do adubo III custa 5 u.c.p. e co
20 g de fosfato e 20 g de potássio.

iv) Cada quilograma do adubo IV custa 15 u.c.p. e c
to, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseg
estamos dispostos a gastar 54 u.c.p. a cada 10 m² co

27. Deseja-se construir um circuito como o mostrado na



onde $V_1 = 280$ V, $V_2 = 100$ V, $V_3 = 50$ V, $R_1 =$
$R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 100\Omega$.

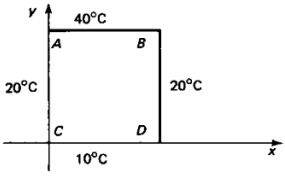
Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos d
como as correntes máximas que elas suportam sem

← resistência

		20Ω	30Ω	40Ω
c m o á r x r i . m a	0,5 A	10,00	10,00	15,00
	1,0 A	15,00	20,00	15,00
	3,0 A	20,00	22,00	20,00
	5,0 A	30,00	30,00	34,00

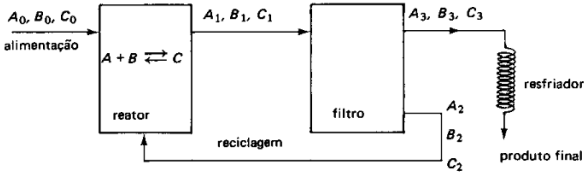
De que tipo devemos escolher cada resistência para
com segurança e a sua fabricação seja a de menor c

28. Uma placa quadrada de material homogêneo é mantida com os bordos AC e BD à temperatura de 20°C, o bordo AB a 40°C e CD a 10°C, com o uso de isolantes térmicos em A, B, C e D (vide figura).



Após ser atingido o equilíbrio térmico, qual é a temperatura aproximada em cada ponto da placa?

29. Consideremos uma unidade de produção (muito simplificada) de um processo de produção industrial de um determinado composto C a partir de certos compostos A e B (segundo a reação química $A + B \rightleftarrows C$):



$A_0 = 100$ kg/h, $B_0 = 100$ kg/h, $C_0 = 10$ kg/h são os fluxos de alimentação, isto é, a quantidade de material jogada dentro da unidade de produção por hora, enquanto que A_i, B_i e C_i são os fluxos em cada estágio da produção. Sabe-se, ainda que:

i) No reator a reação processa-se em condições tais que a quantidade de A após a reação é 0,487 da sua quantidade antes da reação, enquanto a de B é 0,266 e a de C é 4,675 de suas respectivas quantidades antes da reação.

ii) Baseado no fato do ponto de ebulição de C ser inferior ao de A e B, o filtro constitui-se de um destilador. Dessa forma o vapor dentro do filtro tem maior concentração de C do que A e B, e é continuamente retirado do filtro, sendo levado para um resfriador do qual obtemos o produto final. Enquanto isso a parte não vaporizada no destilador é levada de volta ao reator para ser reciclada. Tem-se a informação de

que a quantidade de A em forma de vapor dentro determinado instante, 0,5854 da quantidade de A instante na parte não vaporizada, enquanto que p ções são 1,50 e 1,07 respectivamente.

Deseja-se saber qual é o grau de concentração de C no unidade opera em condição estacionária (isto é, os flux mudam com o tempo em cada estágio), sabendo que a C_1 na mistura que passa do reator para o filtro é de 68

2.6.1 Respostas

1. $x = -1,\ y = 2,\ z = 5$

3. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $x = \frac{7}{16},\ y = -\frac{1}{16},\ z = \frac{17}{8}$

7. $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5$
$x_3 = 2 + x_5$
$x_4 = 3 + 2x_5$

9. *a*) Sejam x, y e z as quantidades de alimentos I, II Então

$x = -5 + 3z,\ y = 8 - 3z$ onde $\frac{5}{3} \leqslant z \leqslant \frac{8}{3}$

b) Sim. $x = 1,\ y = 2,\ z = 2$

11. $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z,\ y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$
$p_a = 2 = p_c,\ g.l. = 1$

13. $p_a = 2 = p_c,\ g.l. = 1,\ x = 3z,\ y = 0$

15. $p_a = 3 = p_c,\ g.l. = 0,\ x = y = z = 0$

19. *a*) $x_i = 0$ *b*) $k = 2$

21. *a)* $x = 0,\ y = z = 1,\ w = 0$

b) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

23. *a)* $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4\,NO_2 + O_2$

b) $4\,HF + SiO_2 \longrightarrow SiF_4 + 2\,H_2O$

c) $(NH_4)_2CO_3 \longrightarrow 2\,NH_3 + H_2O + CO_2$

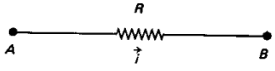
27. *Sugestão*: Calcule as várias correntes que circulam no circuito para depois fazer a escolha dos tipos de resistência. Para isto use as *Leis de Kirchoff*:

i) A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual à soma das correntes que saem deste nó.

ii) A partir de um ponto qualquer de uma malha, se a percorrermos em um sentido qualquer, ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

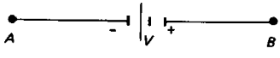
Leve em conta as observações:

i)



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há uma queda de potencial dada por Ri. Se fôssemos do ponto B ao ponto A haveria uma queda de potencial de $-Ri$, ou seja, um aumento de potencial de Ri.

ii)



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há um aumento de potencial de V, ou seja, uma queda de potencial de $-V$. Se fôssemos de B até A teríamos uma queda de potencial de V.

Aplique, então, as leis de Kirchoff ao circuito, obtendo um sistema linear. Generalizações do problema podem ser obtidas nas situações:

i) Circuitos de Corrente Alternada (obtemos sistemas com coeficientes complexos).

ii) Projetos de Circuito (cálculo das características dos componentes para que o circuito tenha certas especificações).

28. *Sugestão*: Sabe-se que a equação que rege o fluxo de

$$\text{(I)} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}$$

onde T é a temperatura num ponto (x, y) e no insta
$c > 0$ é uma constante característica do material de

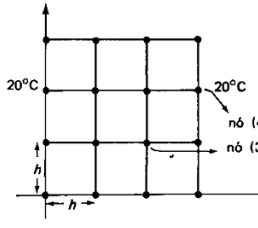
No equilíbrio térmico T não varia mais com o tempo

a equação se torna

$$\text{(II)} \quad \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0}$$

e o problema se converte em achar $T(x, y)$ satisfazen
tem um valor pré-fixado no bordo da placa.

Modelo Aproximado: Substituímos a placa por uma "
que consiste em uma malha (espera-se que quanto ma
seja a aproximação – veja a figura abaixo)



e procuramos as temperaturas T_{ij} nos (i, j) da malha
a condição dada nos bordos e uma equação que é um
Para obter a aproximação de (II) temos, num ponto (
malha:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(i,j)} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2\,T_{ij} + T_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{(i,j)} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2\,T_{ij} + T_{i,j-1}}{h^2}$$

substituindo em (II) e simplificando obtemos então:

$$\text{(III)} \quad T_{ij} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

(Observe que a temperatura num ponto do interior da malha deve ser a média aritmética das temperaturas dos seus vizinhos mais próximos.) Impondo a condição (III) nos pontos do interior da malha na figura acima, obtemos um sistema linear. Resolva-o!

O que seria modificado se a "abertura" da malha na vertical fosse diferente da "abertura" na horizontal? Seriam necessárias mais informações sobre a placa? E se o formato da placa fosse diferente?

Sugestão: O modelo teórico é construído baseado no seguinte fato: a massa que entra em um determinado estágio deve ser igual à massa que sai.

Usando este fato em cada estágio, assim como as informações dadas no problema, obtemos um sistema linear. Resolva-o e interprete os resultados. Você acredita neles? Os dados são reais?

2.7 DEMONSTRAÇÕES

Nesta seção, faremos com detalhes as provas dos teoremas 2.4.3 e 2.5.4, que omitimos anteriormente, para não prejudicar a seqüência de exposição do assunto. Estas demonstrações são apresentadas como matéria adicional, podendo ser estudadas ou não, dependendo de seu interesse.

2.7.1 Demonstração do Teorema 2.4.3: Toda matriz é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Demonstração

1ª Parte: Seja **A** uma matriz $m \times n$ qualquer. Se todo elemento da primeira linha de **A** é zero então a condição (*a*) está satisfeita, no que diz respeito a esta linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja k o menor inteiro j tal que $a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por $1/a_{ij}$ e a condição (*a*) ficará satisfeita. Agora, para cada $i \geqslant 2$ somemos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna k. Além disto, todos os outros elementos da coluna k são nulos.

Consideremos agora a matriz **B** obtida acima. Se a segu matriz for nula nada fazemos. Se houver elementos não nulo a coluna k' a primeira a conter um destes. Multiplicamos a s $1/b_{2k'}$ e a seguir, somando múltiplos adequados desta nova se mais linhas, obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não linha é 1 e todos os outros elementos da coluna em que este encontra são nulos. O importante é que neste processo não f elementos b_{11}, b_{1k}, e nem a k-ésima coluna da matriz **B**. (Po

Repetindo o procedimento acima em relação às demais m-ésima) obteremos no final uma matriz **M** que é linha equiv e que satisfaz as condições (*a*) e (*b*) da definição 2.4.1.

As condições (*c*) e (*d*) serão satisfeitas através de um n permutações de linhas da matriz **M**.

2ª Parte: Assim, mostramos nesta primeira parte que toda ma equivalente a *uma* matriz-linha reduzida à forma escada. Para só existe uma *única* matriz-linha reduzida à forma escada lin observamos primeiramente que *duas matrizes-linha reduzidas que são linhas equivalentes só podem ser iguais.*

De fato, você pode observar que nenhuma das três oper (exceto a multiplicação de uma linha pela constante 1) pode matriz-linha reduzida à forma escada, sem que ela perca esta nisto!)

Agora, suponhamos que por operações com linhas, parti triz **M** e podemos chegar a duas matrizes-linha reduzidas à fo Teremos então **M** ~ **N** e **M** ~ **P**. Como as operações com lin isto significará que **N** será linha-equivalente a **P**, e, portanto, cada acima, **N** = **P**.

2.7.2 Demonstração do Teorema 2.5.4

1ª Parte: Se o posto da matriz ampliada for maior que o da cientes (menor não pode ser), então esta matriz reduzida à fo ter pelo menos uma linha do tipo $(00 \ldots 0c_k)$, com $c_k \neq 0$. o sistema associado a esta matriz (que é equivalente ao inicial ção do tipo:

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = c_k \neq 0$$

e portanto não admite solução.

2ª Parte: Por outro lado, se o posto da matriz ampliada, **P**, fo triz dos coeficientes, temos dois casos a considerar:

a) se $p = n$, teremos a matriz-linha reduzida à forma escada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \\ \hline 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A solução do sistema será $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, portanto o sistema admite uma única solução.

b) se $p \neq n$ então $p < n$ (pois p não pode ser maior que n, veja o Exercício 8 de 2.6)

Neste caso, devemos considerar as várias possibilidades para a matriz-linha reduzida à forma escada. Podemos analisar inicialmente quando esta matriz de posto $p < n$ tem a forma:

1.
$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & a_{pp+1} & \cdots & a_{pn} & c_p \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teremos, neste caso: $\begin{cases} x_1 = c_1 - a_{1p+1}x_{p+1} \quad \cdots \quad -a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_p = c_p - a_{pp+1}x_{p+1} \quad \cdots \quad -a_{pn}x_n \end{cases}$

e o sistema terá portanto infinitas soluções, sendo $x_{p+1}, \ldots, x_n$ variáveis livres.

Uma segunda forma a ser considerada para a matriz re

2.
$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right.$$

então
$$\begin{aligned} x_2 &= c_1 - a_{1p+2}x_{p+2} + \ldots + -a_{1n}x_n \\ x_3 &= c_2 - a_{2p+2}x_{p+2} + \ldots + -a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_{p+1} &= c_p - a_p x_{p+2} + \ldots + -a_{pn}x_n \end{aligned}$$

sendo $x_1, x_{p+2}, \ldots, x_n$ variáveis livres.

E assim podemos prosseguir de uma maneira sistem
das as possibilidades para a matriz-linha reduzida à form
$p < n$, teremos um sistema com infinitas soluções e $n -$

Observe que na 1ª parte mostramos, usando contr
igualdade de postos entre as matrizes ampliada e dos co
dição necessária para a existência de solução do sistema.
mos que esta condição também é suficiente, considerando
b). Ficou assim demonstrada a afirmação (*i*) de 2.5.4. No
as condições (*ii*) e (*iii*) foram demonstradas em *a*) e *b*) r

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Ric
[2] SMSG; *Matemática: Curso Colegial*, vol. 3; Yale University Pres

3

DETERMINANTE E MATRIZ INVERSA

3.1 INTRODUÇÃO

Já em 250 A.C. havia exemplos da resolução de sistemas de equações através de matrizes, no livro chinês *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, cujo autor é desconhecido. Também algumas noções ligadas a determinantes, o assunto que será objeto de estudo neste Capítulo, já eram conhecidas na China antiga.

Mas, se por um lado já se utilizava a noção de determinantes no mundo Oriental há tanto tempo, no Ocidente este assunto começou a ser tratado esporadicamente a partir do século XVII. Nesta época surgem trabalhos de G. W. Leibniz (1646-1716), de G. Cramer (1704-1752) que desenvolveu um método de resolução de sistemas através de determinantes, conhecido por "Regra de Cramer" e foi publicado em 1750 (provavelmente já conhecido por C. Maclaurin (1698-1746) em 1729, e alguns resultados simétricos de J. L. Lagrange (1736--1813).

Só no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, a começar pelo longo tratado de A. L. Cauchy (1789-1857) em 1812, tendo sido realizados, em seguida, trabalhos de C. G. Jacobi (1804--1851).

A partir de então, o uso de determinantes difundiu-se
ceito de um número associado a uma matriz quadrada mostr
te útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se
inversível, se um sistema admite ou não solução, o que verer
secções.

3.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Consideremos o sistema $ax = b$ com $a \neq 0$. A solução deste

Observe que o denominador está associado à matriz dos coe
ou seja, $[a]$.

Num sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

resolvendo (desde que sejam possíveis as operações), encont

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1}{a_{11}a_{22} - a}$$

Observe que os denominadores são iguais e estão associados
ficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Num sistema 3×3

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(desde que sejam possíveis as operações), ao procurarmos o
e x_3, vemos que eles têm o mesmo denominador $a_{11}a_{22}a_{33}$
$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, que també
matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vamos rever estes números que aparecem nos denom
matrizes (quadradas). Estes números são casos particulares
determinante de uma matriz quadrada.

3.3 DETERMINANTE

Quando nos referirmos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ como na secção anterior, escreveremos:

$$\det \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{ou} \quad \det [a_{ij}]$$

Então

$$\det [a] = a$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

Talvez seja conveniente avisá-lo de que o conceito de determinante no caso geral envolve muitos símbolos, o que dificulta a leitura. Para tornar a discussão mais simples e organizada, vamos introduzir algumas definições necessárias. Comecemos lembrando o que significa uma *permutação*. Dados n objetos distintos $a_1, ..., a_n$, uma permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem. Por exemplo, (1 2 3) é uma permutação dos números 1, 2 e 3, (2 1 3) é outra permutação etc. A quantidade de permutações de n objetos é dada por $n!$, que é lido n fatorial e $n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (se $n > 0$). Por exemplo $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Define-se ainda $0! = 1$.

3.3.1 Definição: Dada uma permutação dos inteiros 1, 2, ..., n, existe uma *inversão* quando um inteiro precede outro menor que ele.

Consideremos as permutações de 1, 2, 3 e vejamos em cada permutação o número de inversões.

Permutação	*Número de inversões*
(1 2 3)	0
(1 3 2)	1
(2 1 3)	1
(2 3 1)	2
(3 1 2)	2
(3 2 1)	3

Como um outro exemplo, podemos tomar duas das 4! = 2
2, 3, 4. Assim, (3 2 1 4) tem 3 inversões e (4 3 2 1) p
Voltemos ao determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{3}$$

Observe que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde (j
mutações de 1, 2 e 3. Além disso, vemos que o sinal do ter
permutação tiver um número ímpar de inversões. (Veja a tab
os sinais.)

Como generalização, o determinante de uma matriz q
dado pela definição a seguir.

3.3.2 Definição: $\det [a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$

é o número de inversões da permutação $(j_1 j_2 \dots j_n)$ e ρ in
estendida a todas as $n!$ permutações de $(1\ 2\ \dots\ n)$.

Em relação a esta definição podemos fazer três obse

i) Se a permutação $(j_1\ j_2\ \dots\ j_n)$ tem um número par
ficiente $(-1)^J$ do termo correspondente na somatória
caso contrário, terá sinal negativo.

ii) Em cada termo da somatória, existe um e apenas u
linha, e um e apenas um elemento de cada coluna d

iii) Através de uma reordenação conveniente dos termos,
bém é possível definir um determinante por

$$\det [a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

variando os primeiros e deixando fixos os segundos
no caso 3 × 3.

Propriedades

i) Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz **A** são nulos, det **A** = 0.

A razão disto é que, pela observação (*ii*), em cada termo que aparece no cálculo do determinante há um dos elementos da linha (coluna) nula e, portanto, todos os termos se anulam, e o determinante é zero.

ii) det **A** = det **A**′

Daí inferimos que as propriedades que são válidas para linhas também o são para colunas.

A prova desta propriedade é a seguinte: se $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, sabemos que $\mathbf{A}' = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Então, pela definição de determinante, temos

$$\det [b_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

$$= \det [a_{ij}] \text{ pela observação } (iii).$$

iii) Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

Para verificarmos isto, chamemos de **A** a matriz original e **B** a matriz obtida de **A**, multiplicando uma linha de **A** por uma constante k. Então, ao calcularmos o determinante de **B**, pela observação (*ii*), em cada termo aparece um elemento daquela linha que foi multiplicada por k. Podemos colocar k em evidência, e o que permanece é exatamente o cálculo do determinante de **A**. Portanto, det **B** = k det **A**.

iv) Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

A razão disto é imediata se observarmos que ao trocar duas linhas de uma matriz, alteramos a paridade do número de inversões dos índices e, portanto trocamos o sinal dos termos.

v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

Isto é verdade porque se trocarmos as posições das linhas que são iguais, a matriz e, portanto, o determinante permanecerão os mesmos. Por outro lado, pela propriedade anterior, o determinante deve trocar de sinal e, portanto, a única possibilidade é que o determinante seja nulo.

vi)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}$$

Para mostrar esta propriedade, usamos a definição de distributividade. Mas cuidado! Observe que aqui temos a so não uma soma de matrizes. De um modo geral, o determin de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes da det(**A** + **B**) ≠ det **A** + det **B**. Veja o Exercício 4 da secçã

vii) O determinante não se altera se somarmos a uma lin tiplicada por uma constante.

Exemplo:
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aqui, à terceira linha, somamos a primeira linha multiplica var esta propriedade usamos as propriedades (*vi*), (*iii*) e (*v*

viii) det (**A** · **B**) = det **A** · det **B**

Mostre, inicialmente, esta propriedade para matrizes culdade que se teria para demonstrá-la já em matrizes 3 × deste resultado para matrizes $n \times n$ é bem mais elaborada dições de fazê-la usando matrizes elementares (veja a seçã

A próxima propriedade é tão importante e útil no c minante que destacamos sua importância apresentando-a n

3.4 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

Na seção 3.2 vimos que:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{2}$$

Mas, podemos escrever esta soma como:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz inicial 3 X 3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2 X 2, isto é,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}|$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$$

obtemos a expressão

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes de ordem n[1], e assim podemos expressar:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_{n\times n} &= a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \end{aligned}$$

Ao número Δ_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz $\mathbf{A}_{ij}$, obtida de $\mathbf{A}$ retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna), chamamos *cofator* ou complemento algébrico *do elemento* a_{ij}. Observe que na fórmula dada, o determinante foi "desenvolvido" pela i-ésima linha. Uma forma análoga é válida para as colunas.

3.4.1 Exemplos

Exemplo 1:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\Delta_{12} + 1\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32}$$

[1] Para uma demonstração, veja por exemplo Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*, McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

onde

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

Portanto

$$|\mathbf{A}| = (-2)(-2) + 1 \cdot 8 + (-1)7 = 5$$

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de reco
calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir
das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$. Em grande part
plifica muito o cálculo de determinantes, principalmente se
conjunto com outras propriedades dos determinantes.

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 + 4) =$$

O índice acima da igualdade indica o número da propriedad
somamos a segunda linha à terceira.

Exemplo 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(iii)}{=} -2\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} -2$$

$$= (-2)(3)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -6(-10 - 52) =$$

Note que na primeira passagem usamos a sétima propriedade ao somarmos a segunda coluna multiplicada por 2 à primeira coluna. Nosso intuito foi o de obter uma segunda linha com apenas um elemento não nulo, e então abaixar a ordem do determinante, usando menos cálculos. Seguindo este raciocínio, você pode também obter o determinante inicial, por exemplo, igualando o último elemento da primeira linha a zero.

3.5 MATRIZ ADJUNTA – MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz **A**, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$, onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz de **A**, obtida extraindo-se a i-ésima linha e j-ésima coluna. Com estes cofatores podemos formar uma nova matriz **A**, denominada *matriz dos cofatores* de **A**.

$$\bar{\mathbf{A}} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \ldots \text{ etc.}$$

$$\text{Então, } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

3.5.1 Dada uma matriz quadrada **A**, chamaremos de *matriz adjunta* de **A** à transposta da matriz dos cofatores de **A**.

$$\text{adj } \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}'$$

No exemplo anterior

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos efetuar, neste exemplo, $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}'$.

$$\begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -19\,\mathbf{I}_3$$

Além disto, podemos verificar que det **A** = – 19. Então $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = ($ resultado não foi obtido por acaso, mas é válido para toda matri de ordem n.

3.5.2 Teorema: $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = \mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n$

Para demonstrarmos esta proposição, usamos a propriedade qual o determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas e o desenvolvimento de Laplace. Vamos fazê-la esquematicamente 3×3. A demonstração é a mesma para matrizes $n \times n$.

Prova: ($n = 3$)

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} =$$

Calculando os elementos c_{ij}, achamos que

$$c_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = \det \mathbf{A}.$$
$$c_{12} = a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}.$$

Usando o desenvolvimento de Laplace em relação à segunda linha

$$c_{12} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

pois duas linhas são iguais. Analogamente,

$$c_{ii} = \det \mathbf{A} \quad \text{e} \quad c_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

Então:

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_3$$

3.5.3 Definição: Dada uma matriz quadrada **A** de ordem n, inversa de **A** a uma matriz **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde identidade de ordem n. Escrevemos $\mathbf{A}^{-1}$ para a inversa de **A**.

3.5.4 Exemplos

Exemplo 1:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

pois $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$ e $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ (Verifique!)

Exemplo 2:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

Procuremos sua inversa, isto é,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tal que } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 \text{ e } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$$

Impondo a primeira condição,

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{I}_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos

$$a = 2 \qquad b = -1$$
$$c = -\frac{11}{2} \qquad d = 3$$

Teremos então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Também

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ e, portanto,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz $\mathbf{A}$. ($\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$).

Observações:

i) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de mesma ordem, amb
é, existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB})$

De fato, basta observar que $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}$
$= \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ e que, analogamente $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$.

ii) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e existe uma matriz $\mathbf{B}$ tal
então $\mathbf{A}$ é inversível, ou seja $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, além disso, $\mathbf{B}$

Em outras palavras, basta verificar uma das condições pa
uma matriz, e esta será única.

A prova da primeira parte, ou seja, de que $\mathbf{A}^{-1}$ existe, s
3.8.6. Por ora, mostraremos apenas que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. De fato, se
a seguinte seqüência: $\mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{AA}^{-1}) = (\mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{IA}^{-1} =$

iii) Nem toda matriz tem inversa.

Por exemplo, para mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa
mostrar que a equação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n
Isto é verdade, pois

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

implica que $2c = 1$ e $c = 0$, e não podemos ter estas igualdade
mente.

Suponhamos agora que $\mathbf{A}_{n\times n}$ tenha inversa, isto é, existe $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Usando o determinante temos

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} \quad \text{e} \quad \det \mathbf{I}_n = 1$$

Então:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 1$$

Desse produto concluímos que se **A** tem inversa,

i) $\det \mathbf{A} \neq 0$

e *ii)* $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$

Ou seja, $\det \mathbf{A} \neq 0$ é uma condição necessária para que **A** tenha uma inversa. Vamos ver que esta condição também é suficiente. Já vimos em 3.5.2 que $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$. Se $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A} \cdot \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = \mathbf{I}$ e como a inversa é única, então $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}}'$.

Em resumo:

3.5.5 Teorema: Uma matriz quadrada **A** admite uma inversa se, e somente se $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Neste caso:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\text{adj } \mathbf{A})$$

Este resultado nos fornece um novo método de calcular a inversa de uma matriz. Consideremos a matriz do Exemplo 2 anterior:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 24 - 22 = 2 \neq 0$ e, portanto, existe a inversa de **A**. Calculemos sua inversa pela relação $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} (\text{adj } \mathbf{A})$.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\text{adj } \mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

3.6 REGRA DE CRAMER

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um outro méto sistemas lineares de equações. Este só se aplica a sistemas li mero de equações é igual ao número de incógnitas. Suponha mos resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ é a matriz dos coeficien

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ é a matriz dos termos independentes, e

a matriz das incógnitas. Para esta equação suponhamos que tanto, que **A** tenha a inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_n\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Usando a relação para matriz inversa dada em 3.5.4, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}}{\det \mathbf{A}}$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de **A**, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ($\det \mathbf{A} \neq 0$), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de **A**,

substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos indep
do de resolução de um sistema linear de n equações e n in
de ser aplicado quando o determinante da matriz dos coefi
é chamado *Regra de Cramer*.

3.6.1 Exemplo

Dado o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x \quad\quad + 3z = 5 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases}$$

temos

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Portanto, podemos usar a Regra de Cramer.
Então:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 18$$

Cabe aqui um comentário sobre a Regra de Cramer. E
útil, pois dá uma forma explícita das soluções de um sisten
usada para cálculos numéricos. Isto porque o número de op
envolve é muito grande, quando trabalhamos com muitas eq
do determinante de uma matriz de ordem n, temos que cal
de n fatores, e depois somá-los. (Veja a definição.) Efetuam
$+ (n! - 1) = n!n - 1$ operações. Como para resolver um sis

Regra de Cramer precisamos calcular $n + 1$ determinantes de ordem n, o número de operações se elevaria a $(n + 1)(n!n - 1)$, que é maior que $n^2 n!$.

Como um exemplo, para resolvermos um sistema de 10 equações e 10 incógnitas, pela Regra de Cramer teríamos um número de operações superior a $10^2\,10! = 362.880.000$ operações, enquanto que pelo método de redução de linhas não chegaríamos a 14.000.

Muitos dos problemas que aparecem em Engenharia, Economia, Biologia etc., costumam envolver um grande número de incógnitas, de ordem 100 ou 1.000, por exemplo. Nestes casos, mesmo os métodos de eliminação e redução por linhas podem não ser adequados. Então nos meios computacionais prefere-se usar métodos numéricos iterativos (como, por exemplo, o de Gauss-Seidel). Estes processos iterativos serão nosso objeto de estudo no capítulo 13.

3.7 CÁLCULO DO POSTO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Muitas vezes, é suficiente saber apenas se um sistema de equações lineares tem solução sem precisar resolvê-lo, isto é, sem explicitar as soluções. Por exemplo, ao estudar a posição relativa de duas retas no plano, dadas pelas equações $y - 2x = 3$ e $y - 3x = 2$, podemos estar interessados em saber apenas se elas se interceptam ou não, sem determinar seu ponto de intersecção. Ou seja, queremos saber se o sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

admite ou não solução.

Como já vimos em 2.5, a existência e o número de soluções estão relacionados com o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada. Vamos ver agora uma maneira de obter o posto de uma matriz usando determinantes.

3.7.1 Teorema: O posto (característica) de uma matriz **A** (quadrada ou não) é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de **A**, com determinantes diferentes de zero.

(Para uma demonstração, deste teorema veja os exercícios 18, 19 e 20 da seção 3.10.)

3.7.2 Exemplos

Exemplo 1: Dada a matriz 4 × 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que cada submatriz de ordem 4 (há 5) te
Também o determinante de cada submatriz de ordem 3 (há

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Então, o posto é 2.

Exemplo 2: Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = -1 \end{cases}$$

vamos dizer se ele é possível ou não, sem resolvê-lo.
A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

tem determinante 0, pois a terceira linha é igual à segunda
Portanto, o posto de **A** é menor que 3. (Se det A $\neq 0$, o p
é submatriz dela mesma.) Como $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 5$, **A** tem uma
de ordem 2, com determinante diferente de zero; portanto,

Tomemos agora a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1$, o posto de **B** é 3. Concluímos a

não admite solução, pois o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz ampliada.

Observação:
Num sistema de n equações e n incógnitas, onde o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de 0, existe uma única solução.

* 3.8 MATRIZES ELEMENTARES
Um processo de inversão de matrizes

O cálculo da inversa de uma matriz usando determinante, envolve um número muito grande de operações. O processo prático de inversão que vamos apresentar nesta seção é baseado nas operações com as linhas de uma matriz e, em termos de cálculos, é muito vantajoso. O conceito de matrizes elementares que introduziremos aqui será utilizado para mostrar a validade deste processo e ainda para demonstrar vários resultados já enunciados em seções anteriores.

Observemos, inicialmente, que cada operação com as linhas de uma matriz corresponde a uma multiplicação dessa matriz por uma matriz especial.

3.8.1 Exemplos

Exemplo 1: Ao multiplicarmos a primeira linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

por 2, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é exatamente o produto

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Ao trocarmos a primeira e a segunda linha obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Este resultado é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Ao somarmos à primeira linha da matriz A multiplicada por 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Observando mais cuidadosamente estes exemplos, vemo
operação elementar nas linhas da matriz A é o mesmo que
ção elementar na matriz identidade e, em seguida, multiplica
por A. Vejamos isto em outros exemplos.

Exemplo 4: Se tomarmos a matriz identidade I_3 e troc
a terceira linha, obteremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz A do exemplo 1,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & - \\ 0 & 1 & \\ 1 & 2 & \end{bmatrix}$$

cujo resultado é exatamente a troca da primeira e terceira li

Exemplo 5: Se tomarmos I_3 e somarmos à terceira linha a segunda multiplicada por -3, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz **A** do Exemplo 1, teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

Este resultado é exatamente aquele que obtemos se somarmos à terceira linha de **A** a segunda multiplicada por -3.

Através desses exemplos podemos perceber que existe uma relação íntima entre as operações com linhas de uma matriz e certas matrizes especiais construídas a partir da matriz identidade. Estas matrizes serão denominadas matrizes elementares.

3.8.2 Definição: Uma *matriz elementar* é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

O relacionamento entre matrizes elementares e operações com linhas é dado pelo teorema abaixo.

3.8.3 Teorema: Se **A** é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de **A** é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar **E** correspondente à operação com linhas pela matriz **A**.

A prova deste resultado poderá ser feita por você. Consiste apenas em escrever a matriz **E**, efetuar o produto $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ e verificar que o resultado obtido é o esperado. Este procedimento deve ser efetuado para cada tipo de operação com linhas. Uma conseqüência importante da proposição anterior é:

3.8.4 Corolário: Uma matriz elementar $\mathbf{E}_1$ é inversível e sua inversa é a matriz elementar $\mathbf{E}_2$, que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada por $\mathbf{E}_1$.

Por exemplo, se $\mathbf{E}_1$ é a matriz elementar cuja operação consiste em multiplicar uma determinada linha por k, a matriz inversa de $\mathbf{E}_1$ será a matriz elementar $\mathbf{E}_2$ que corresponde à operação de multiplicar a mesma linha por $\frac{1}{k}$. A prova deste corolário é deixada a seu encargo.

Como conseqüência do resultado anterior, podemos m
rema 2.3.1.

3.8.5 Teorema: Sistemas associados a matrizes linha eq
valentes.

Prova: Sejam **A** e **A'** matrizes-linha equivalentes. Por 3
$\mathbf{A}' = \mathbf{MA}$, onde **M** é um produto de matrizes elementares
sível (veja 3.8.4 e (*i*) de 3.5.4). Os sistemas (I) e (II) que t
matrizes ampliadas podem ser escritos respectivamente:
$\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{N}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$, onde **N** é a submatriz de **A** d
última coluna e **B** é esta coluna. (Idem para **N'**, **A'** e **B'**.) A
de verificar que

$$\mathbf{N}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}.$$

Portanto, $\mathbf{NX} = \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{MNX} = \mathbf{MB} \Longleftrightarrow \mathbf{N}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.
Isto significa que os sistemas (I) e (II) são equivalente

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que seja a solução do I será solução de II e vic

3.8.6 Usando os resultados 3.8.3 e 3.8.4 podemos ta
agora a demonstração da observação (*ii*) de 3.5.4. Repetind
mo foi enunciada: Se **A** é uma matriz quadrada e existe u
$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível, ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-}$
trado que se **A** é inversível, então $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Mostremos ago
te inversível.

Comecemos analisando o sistema de equações lineares
$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, onde **X** é um vetor coluna e **0** é o vetor-coluna c
nulos. Observamos que a única solução possível para esse si
multiplicando $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ por **B**, temos $\mathbf{0} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{B}(\mathbf{AX}) =$
Por outro lado, se resolvermos o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ através d
nhas, obteremos um sistema equivalente $\mathbf{RX} = \mathbf{0}$, onde **R** é
nha reduzida de **A** e, portanto, $\mathbf{R} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_1\mathbf{A}$. Mas,
$\mathbf{RX} = \mathbf{0}$ é equivalente a $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, a sua única solução é **X** =
na forma escada linha reduzida, a única possibilidade é **R** =
$\mathbf{I} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_1\mathbf{A}$, e, multiplicando sucessivamente por $\mathbf{E}$
(que são matrizes elementares, como vimos na seção 3.8.4),
$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \ldots \mathbf{E}_k^{-1}$, ou seja, **A** é um produto de matrizes
observação (*i*) de 3.5.4, é inversível.

* 3.9 PROCEDIMENTO PARA A INVERSÃO DE MATRIZES

Com argumentos análogos aos usados em 3.8.5 você pode provar o teorema enunciado a seguir.

3.9.1 Teorema: Se **A** é uma matriz inversível, sua matriz-linha reduzida à forma escada, **R**, é a identidade. Além disso, **A** é dada por um produto de matrizes elementares.

A recíproca deste resultado irá fornecer um novo processo para se calcular a inversa de uma matriz **A**. Suponhamos que, ao reduzir **A** à forma escada linha reduzida, a matriz identidade seja obtida como resultado. Neste caso, como a cada operação com linhas corresponde uma multiplicação por uma matriz elementar, E_i, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{A} \end{aligned}$$

Mas isto quer dizer que

$$\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$$

que podemos colocar em palavras através do teorema abaixo.

3.9.2 Teorema: Se uma matriz **A** pode ser reduzida à matriz identidade, por uma seqüência de operações elementares com linhas, então **A** é inversível e a matriz inversa de **A** é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operações com linhas.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes **A** e **I**, através de operações elementares, até chegarmos à matriz **I** na posição correspondente à matriz **A**. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz **I** será a inversa de **A**.

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}) \longrightarrow (\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1})$$

Vejamos como este procedimento pode ser colocado em prática.

3.9.3 Exemplos

Exemplo 1: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Coloquemos a matriz junto com a matriz identidade e apli
com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde
da linha reduzida, lembrando que cada operação deve ser e
mente na parte direita.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocando a primeira e segunda linhas, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, somamos à quarta a primeira e à segunda, a primei
por −2.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Subtraímos a segunda linha da terceira, obtendo

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocamos o sinal da terceira linha e, subseqüentemente, an
terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de **A** à direita.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Partimos de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e fazemos operações com linhas, para converter a parte esquerda (que corresponde a **A**) à forma escada linha reduzida. Obtemos então

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como a forma escada não é a identidade, a matriz **A** não tem inversa.

3.9.4 Agora, iremos demonstrar a propriedade

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

conforme nos propusemos a fazer em 3.3 (*viii*).

Para isso, queremos que você descubra qual é o deterr elementar **E** nos seguintes casos:

i) **E** é obtida de **I** por uma permutação de linhas.

ii) **E** é obtida de **I** pela multiplicação de uma das li k ($k \neq 0$).

iii) **E** é obtida de **I** pela substituição da i-ésima linha mais a i-ésima linha.

Agora você deverá provar o seguinte resultado.

3.9.5 Teorema: Se **E** for uma matriz elementar e da mesma ordem que **E**, então $\det \mathbf{EA} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}$

Para provar este teorema, considere as três possib (*i*), (*ii*) e (*iii*) dadas acima. Tudo ficará realmente simp à conclusão que, em (*i*) temos $\det \mathbf{E} = -1$, em (*ii*) det **E**

Finalmente, podemos demonstrar a propriedade d duto.

3.9.6 Teorema: Se **A** e **B** são matrizes $n \times n$ qu $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Prova:

1º caso: Se **A** ou **B** são não inversíveis, temos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ Exercício 10 da seção 3.10). Neste caso, $\det(\mathbf{AB}) = 0$, $\det \mathbf{B} = 0$, a igualdade se verifica.

2º caso: Se **A** e **B** são inversíveis, usando 3.9.1 temos:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{B})$$

Após sucessivas aplicações do teorema 3.9.5 chegamos a:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det \mathbf{E}_1 \cdot \det(\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{B}) \\ &= \ldots = \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{E}_2 \cdot \ldots \cdot \det \\ &= \det \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \det(\mathbf{E}_{k-1} \cdot \mathbf{E}_k) \\ &= \ldots = \det(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \end{aligned}$$

3.10 EXERCÍCIOS

1. Dê o número de inversões das seguintes permutações de 1, 2, 3, 4, 5:

   a) 3 5 4 1 2
   b) 2 1 4 3 5
   c) 5 4 3 2 1
   d) No determinante de uma matriz 5 X 5, que sinal (negativo ou positivo) precederia os termos $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$ e $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$?

2. Quantas inversões tem a permutação (n $n-1$ ... 2 1) dos números 1, 2, ..., $n-1$, n?

3. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

   a) pela definição
   b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

4. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule

   a) det **A** + det **B**
   b) det (**A** + **B**)

5. Sejam **A** e **B** matrizes do tipo $n \times n$. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas.

   a) det (**AB**) = det (**BA**)
   b) det (**A**′) = det **A**
   c) det (2**A**) = 2 det **A**
   d) det (**A**²) = (det **A**)²
   e) det $\mathbf{A}_{ij}$ < det **A**
   f) Se **A** é uma matriz 3 X 3, então
   $a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$

6. Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule

   a) $\mathbf{A}_{23}$
   b) $|\mathbf{A}_{23}|$
   c) Δ_{23}
   d) det **A**

7. *Propriedade*: O determinante de uma matriz triangular duto dos elementos de sua diagonal.

   a) Prove esta propriedade no caso em que **A** é uma m rior (genérica) 5 X 5. (Sugestão: Use e abuse do de place.)
   b) O que você pode dizer sobre o número de soluções

$$(i)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_2 + 9x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} 3x_5 + 2x_4 + x_1 = 0 \\ -x_3 + x_2 - x_1 = 5 \\ -9x_3 - x_2 + 9x_1 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

8. Calcule det **A**, onde

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 3 \\ 3 & -i \\ 2 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$

9. Encontre $\mathbf{A}^{-1}$, onde

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

10. Se **A** ou **B** é uma matriz não inversível, então **A** · **B** também não é. Prove isto, sem usar determinantes.

11. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe atentamente a igualdade acima e enuncie a propriedade que ela ilustra.

12. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule

a) adj **A**
b) det **A**
c) $\mathbf{A}^{-1}$

13. Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

14. Dizemos que **A** e **B** são matrizes semelhantes se existe uma matriz **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Mostre que det **A** = det **B** se **A** e **B** são semelhantes.

15. Verdadeiro ou falso?

a) Se det **A** = 1, então $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
b) Se **A** é uma matriz triangular superior e $\mathbf{A}^{-1}$ existe, então também $\mathbf{A}^{-1}$ será uma matriz triangular superior.
c) Se **A** é uma matriz escalar $n \times n$ da forma $k\mathbf{I}_n$, então det **A** = k^n.
d) Se **A** é uma matriz triangular, então det **A** = $a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

16. Resolva o sistema, usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$$

17. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.
b) Calcule o posto da matriz ampliada.
c) Descreva a solução deste sistema.
d) Considere um sistema homogêneo **AX** = **0**, onde **A** Que condição você deve impor sobre **A**, para que o ções diferentes da solução trivial (**X** = **0**)? Compare cício 18 do Capítulo 2.

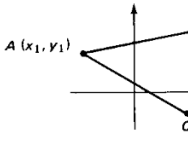
18. Prove que: Uma matriz **A**, com ordem n, tem posto n inversível.

19. A partir do exercício acima, você pode concluir que uma ordem n, possui determinante diferente de zero se, e s linhas linearmente independentes. Por quê? (Veja o fin

20. Agora prove a propriedade 3.7.1, usando o exercício a

21. Mostre que a área do triângulo na figura é dada pelo

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



22. *a*) Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3$

b) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números, mostre por indução

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

O símbolo à direita significa o produto de todos o $i < j$ e i, j inteiros variando de 1 a n.

Sugestão: Para efetuar facilmente a indução, multiplique cada coluna por x_1 e subtraia o mesmo da coluna imediatamente à direita, partindo do lado esquerdo, obtendo, então: $V_n = (x_n - x_1) \dots (x_2 - x_1) V_{n-1}$.
Tal determinante é chamado determinante de Vandermonde.

23. Uma maneira de codificar uma mensagem é através de multiplicação por matrizes. Vamos associar as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Suponhamos que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". Podemos formar uma matriz 3 X 3 assim:

$$\begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}, \text{ que usando a}$$

correspondência numérica fica:

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$$

Agora seja **C** uma matriz qualquer 3 X 3 *inversível*, por exemplo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos nossa matriz da mensagem por **C**, obtendo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}$.

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 83 & 58 \\ 1 & 21 & 22 \\ 5 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Transmitimos esta nova matriz (na prática, envia-se a cadeia de números -5 83 58 1 21 22 5 13 14). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa $((\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{M})$ e posterior transcrição dos números para letras. **C** é chamada *matriz chave* para o código.

a) Você recebeu a mensagem:
-12 48 23 -2 42 26 1 42 29
Utilizando a mesma chave traduza a mensagem.

b) Aconteceu que o inimigo descobriu sua chave. O se
você substituir a matriz chave por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. V
mensagem "CRETINO..." a ele (codificada, naturalm
será possível a ele decodificar sua mensagem?

c) Escolha uma matriz-chave que dê para codificar pal
Codifique e descodifique à vontade!

3.10.1 Respostas

1. *a*) 5 *b*) 2 *c*) 10 *d*) - e +

3. *a*) 21 *b*) 21

5. *a*) V *b*) V *c*) F *d*) V *e*) F

7. *a*) Seja **A** uma matriz triangular superior e desenvolva-
através da primeira coluna.
$|\mathbf{A}| = a_{11} |\mathbf{A}_{11}|$ mas $\mathbf{A}_{11}$ é triangular superior tamb
etc.
Então $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$.

b) (*i*) única, (*ii*) nenhuma.

9. *a*) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$

b) $\dfrac{-1}{2+i} \begin{bmatrix} -1-i & -1 & -1 & -1-i \\ -i & i & 1-i & -i \\ 1+2i & 1-i & i & -1+i \\ 3-i & -2-i & 3-i & 2+i \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-2}{x} & \dfrac{1}{x} \\ -1 & \dfrac{-1+2}{x} & \dfrac{1-1}{x} \\ 1 & \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{-1}{x^2} \end{bmatrix}$