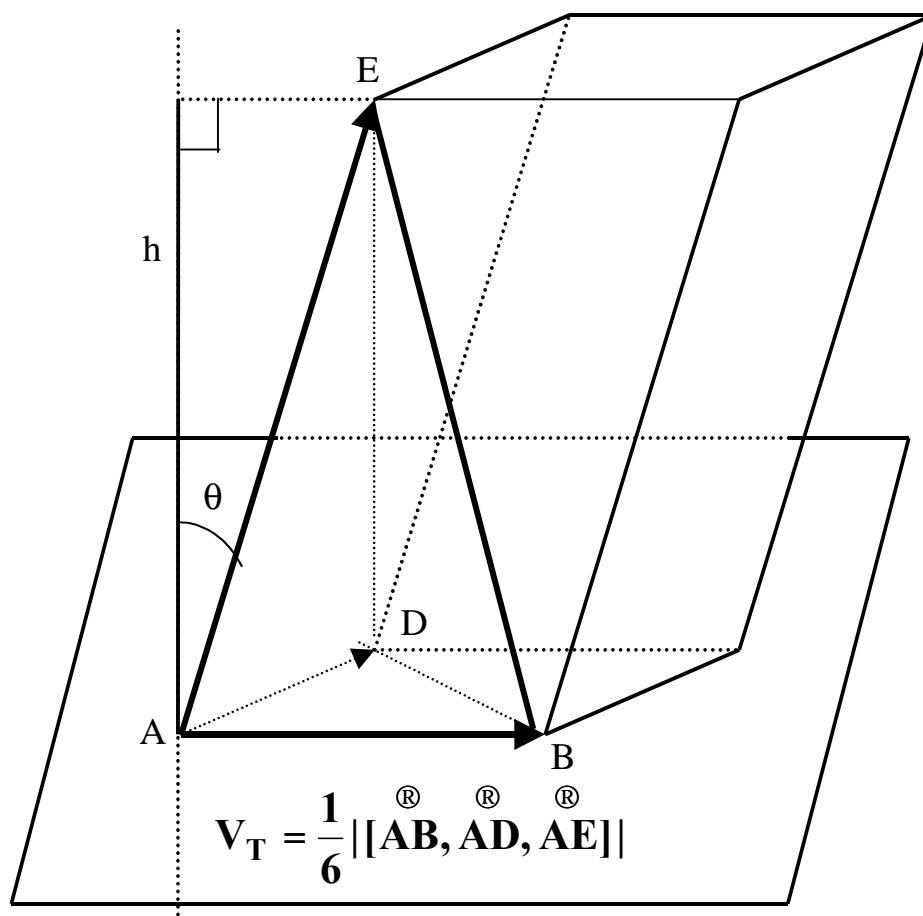


Cálculo



Vetorial

Instituto de Matemática – UFBA

1999

CAPÍTULO I - VETORES

1.1 Segmentos orientados

Consideremos uma reta r e sejam A e B dois pontos de r .



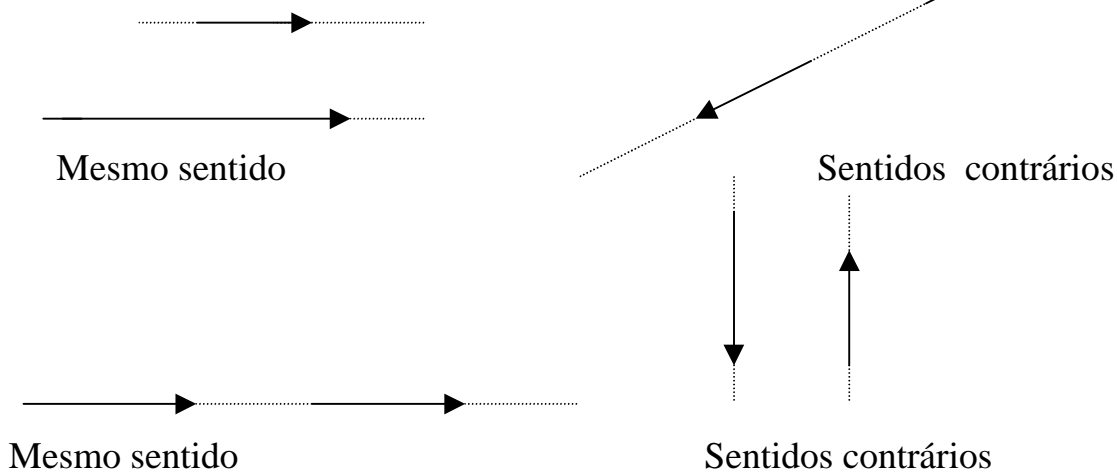
Ao segmento de reta AB , podemos associar um sentido : o sentido de A para B , ou o sentido de B para A . Escrevemos \overrightarrow{AB} para representar o segmento de reta AB associado com o sentido de A para B . Dizemos que

\overrightarrow{AB} é o **segmento orientado de origem A e extremidade B** e \overrightarrow{BA} é o segmento orientado de origem B e extremidade A . Chamamos \overrightarrow{BA} , **oposto** de \overrightarrow{AB} . Se $A = B$, dizemos que o segmento orientado $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ é o **segmento nulo**, e escrevemos $\overrightarrow{AA} = \mathbf{O}$. Na reta r está representado graficamente \overrightarrow{AB} .

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado, podemos associar um número real não negativo, seu comprimento, que é a sua **medida** em relação àquela unidade. A medida do segmento \overrightarrow{AB} , indicamos por **med**(\overrightarrow{AB}). Os segmentos nulos têm medida igual a zero. É claro que $\text{med}(\overrightarrow{AB}) = \text{med}(\overrightarrow{BA})$.

Dados dois segmentos orientados não nulos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , dizemos que eles têm **mesma direção**, se as retas suportes destes segmentos são paralelas ou coincidentes. Só podemos comparar os **sentidos** de dois segmentos orientados, se eles têm a mesma direção. Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Exemplos:

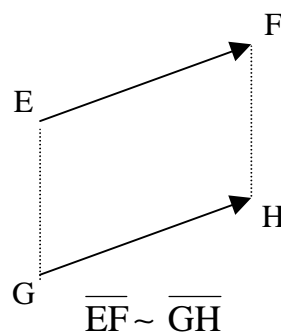
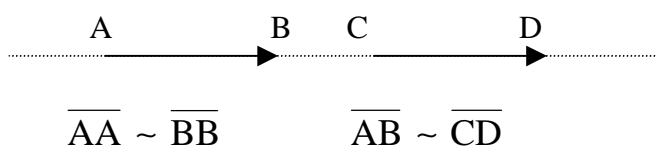


1.2 Equipolência

Definição: O segmento orientado \overline{AB} é equipolente ao segmento orientado \overline{CD} , se ambos são segmentos nulos, ou se têm mesma medida e mesmo sentido.

Indicamos: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Exemplos:



Propriedades:

1. $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexiva).
2. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ então $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simétrica).
3. Se $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ e $\overline{CD} \sim \overline{EF}$ então $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (transitiva).

4. Dados um segmento orientado \overrightarrow{AB} e um ponto C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.
5. Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}$.
6. Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$.

Essas propriedades são de fácil verificação.

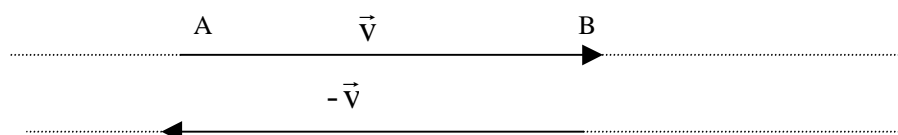
1.3 Vetores

Definição: Chamamos **vetor determinado por um segmento orientado** \overrightarrow{AB} , ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a \overrightarrow{AB} .

O vetor determinado por \overrightarrow{AB} , indicamos por \vec{AB} .

Dois vetores \vec{AB} e \vec{CD} **são iguais** se, e somente se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Um mesmo vetor \vec{AB} é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, que são chamados **representantes** desse vetor, e que são todos equipolentes entre si. Em particular, os segmentos nulos são representantes de um único vetor, que chamamos **vetor nulo**, e indicamos por $\vec{0}$.

Dado um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$, chamamos o vetor \vec{BA} **oposto** de \vec{AB} e indicamos por $-\vec{AB}$ ou $-\vec{v}$.



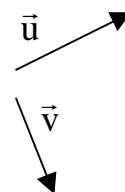
Decorre da propriedade 6 de 1.2 a implicação:

Se $\vec{AB} = \vec{CD}$ então $\vec{AC} = \vec{BD}$.

Dado um vetor \vec{u} , todos os seus representantes têm a mesma medida. Essa medida denominamos **módulo** do vetor \vec{u} , e indicamos por $|\vec{u}|$. Dizemos que os vetores \vec{AB} e \vec{CD} não nulos têm **mesma direção** (**mesmo sentido**), se \overline{AB} e \overline{CD} têm mesma direção (mesmo sentido).

Um vetor \vec{u} é **unitário** se $|\vec{u}| = 1$. Chamamos **versor** de um vetor não nulo \vec{u} , o vetor unitário que tem mesmo sentido de \vec{u} , e indicamos por \vec{u}° .

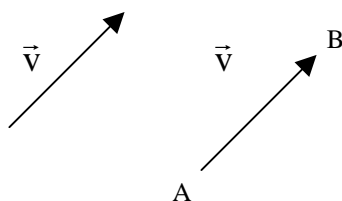
Dizemos que dois vetores não nulos são **ortogonais**, se podem ser representados por segmentos orientados ortogonais, e indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor do espaço.

1.4 Soma de um ponto com um vetor

Definição: Dados um ponto A e um vetor \vec{v} , existe um único ponto B tal que $\vec{AB} = \vec{v}$. O ponto B chamamos **soma do ponto A com o vetor \vec{v}** .



Indicamos a soma $A + (\vec{v})$, simplesmente por $A + \vec{v}$.

Propriedades:

1. $A + \vec{0} = A$.
2. $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$.
3. Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$, então $A = B$.
4. Se $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
5. $A + \vec{AB} = B$.

Essas propriedades são verificadas facilmente.

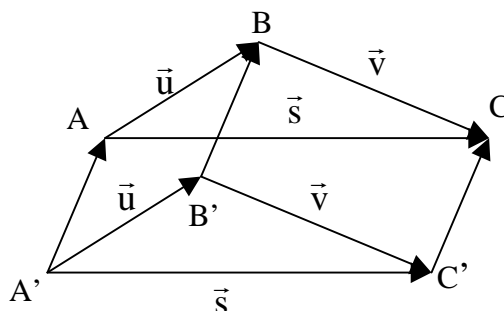
1.5 Adição de vetores

Definição: Consideremos dois vetores \vec{u} e \vec{v} , e um ponto qualquer A.

Sejam $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$. O vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$ é chamado **vetor soma de \vec{u} e \vec{v}** e indicamos por $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Observemos que o vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ independe do ponto A. De fato, se considerarmos outro ponto A' obteremos $B' = A' + \vec{u}$ e $C' = B' + \vec{v}$.

Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

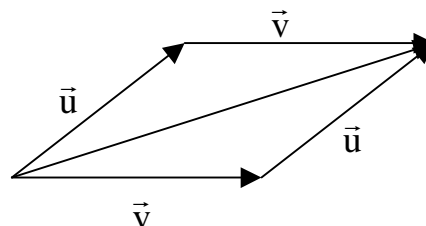


Usando a propriedade 1 de 1.3, concluímos que :

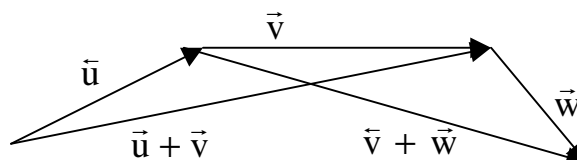
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. Daí, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ e portanto $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa).



2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(associativa)



3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro).

4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (elemento oposto).

Indicamos o vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$ por $\vec{u} - \vec{v}$. Notemos que $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.



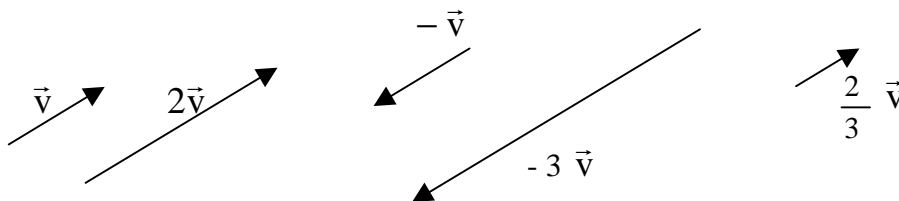
1.6 Produto de um número real por um vetor

Definição: Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, chamamos **produto de a por \vec{v}** , o vetor $\vec{w} = a\vec{v}$, que satisfaz às condições abaixo:

1. $|\vec{w}| = |a| |\vec{v}|$.
2. A direção de \vec{w} é a mesma da \vec{v} .
3. O sentido de \vec{w} é igual ao de \vec{v} se $a > 0$, e contrário ao de \vec{v} se $a < 0$.

Se $a = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto $a\vec{v}$ é o vetor nulo.

Exemplos:



Se $a \neq 0$, o produto $\frac{1}{a}\vec{v}$ é indicado por $\frac{\vec{v}}{a}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, é fácil mostrar que

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor de \vec{v} , ou seja $\vec{v}^\circ = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e portanto $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{v}^\circ$.

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$.
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
3. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$.
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

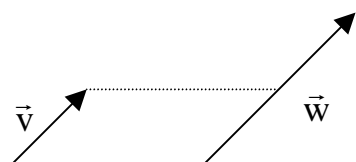
Nas propriedades acima, \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer, a e b são números reais.

1.7 Combinação linear

Definição 1: Dados n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ e n escalares a_1, a_2, \dots, a_n , chamamos o vetor $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$, de **combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ com coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n** .

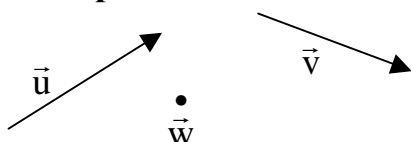
Nos exemplos 1, 2 e 3 a seguir, escrevemos \vec{w} como combinação linear dos vetores dados.

Exemplo 1:



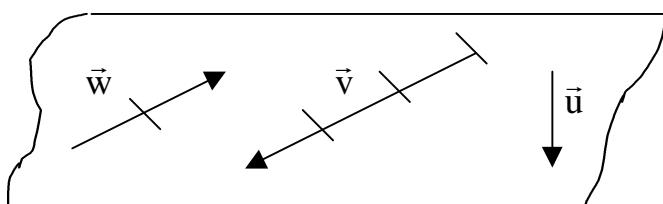
Neste exemplo, $\vec{w} = 2\vec{v}$.

Exemplo 2:



Como $\vec{w} = \vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, dizemos que $\vec{0}$ é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , com coeficientes zeros.

Exemplo 3:



Observando a figura ao lado, podemos escrever :

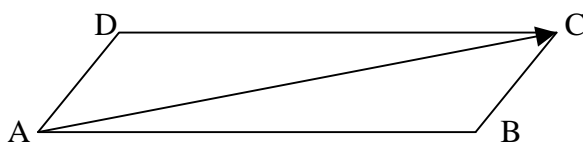
$$\vec{w} = -\frac{2}{3} \vec{v} + 0\vec{u}.$$

Assim, \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , com coeficientes $-\frac{2}{3}$ e 0 .

Note que, o vetor \vec{u} não pode ser escrito como combinação linear de \vec{w} e \vec{v} .

Exemplo 4:

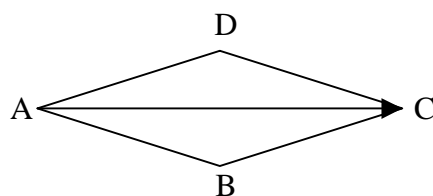
Consideremos um paralelogramo ABCD.



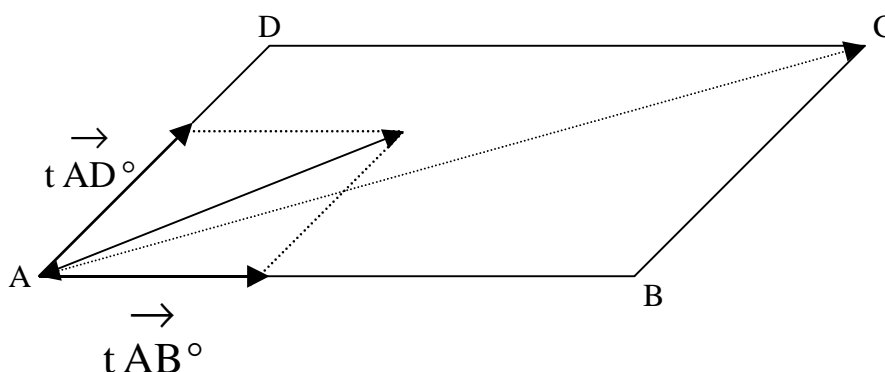
Observemos que o vetor $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ possui a mesma direção que a diagonal AC.

Se $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$, este paralelogramo será um losango. Sabemos que em um losango ABCD, a bissetriz do ângulo

$\hat{B A D}$ contém a diagonal AC. Assim, o vetor $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ possuirá também a mesma direção da bissetriz do ângulo $\hat{B A D}$.



No caso de $|\vec{AB}| \neq |\vec{AD}|$, o vetor \vec{AC} não possui a mesma direção da bissetriz do ângulo $\hat{B A D}$. Para conseguirmos um vetor que possua a mesma direção da bissetriz do ângulo $\hat{B A D}$, basta tomarmos o vetor $\vec{v} = t \vec{AB} + t \vec{AD}$, $t \in \mathbb{R}^*$.



Exemplo 5:

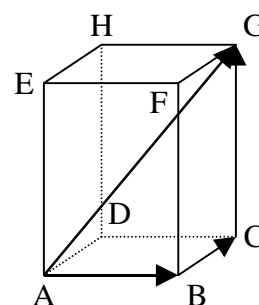
Observando o paralelepípedo ao lado, podemos escrever:

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$$

Dizemos então que \vec{AG} é combinação linear dos vetores \vec{AB} , \vec{BC} e \vec{CG} . Como $\vec{BC} = \vec{AD}$ e $\vec{CG} = \vec{AE}$, podemos também escrever:

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$$

Assim, podemos também dizer que \vec{AG} é combinação linear dos vetores \vec{AB} , \vec{AD} e \vec{AE} .



Definição 2: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são **colineares** (**paralelos**), se possuem representantes em uma mesma reta. Neste caso indicamos $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \vec{v}_3, \dots, // \vec{v}_n$.

No exemplo 1, temos $\vec{u} // \vec{w}$, e no exemplo 2 temos $\vec{w} // \vec{u}$ e $\vec{w} // \vec{v}$, embora \vec{u} e \vec{v} não sejam paralelos.

Definição 3: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são **coplanares**, se possuem representantes em um mesmo plano.

Observamos que a colinearidade de vetores é um caso particular da coplanaridade de vetores.

Nos exemplos de 1 a 4, os vetores envolvidos são coplanares.

Propriedades:

1. Os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear do outro.

Prova: " \Rightarrow " Começaremos considerando os seguintes casos:

- 1) $\vec{u} = \vec{o} = \vec{v}$; $\vec{u} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$
- 2) $\vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$; temos $\vec{u} = 0\vec{v}$

3. $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Como $\vec{u} // \vec{v}$, temos $\vec{u}^0 = \pm \vec{v}^0$. Daí, $|\vec{u}| \vec{u}^0 = \pm |\vec{u}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ou seja, $\vec{u} = \pm \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}$. Assim, se \vec{u} e \vec{v} têm mesmo sentido podemos escrever $\vec{u} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}$. E se \vec{u} e \vec{v} têm sentidos contrários temos $\vec{u} = -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}$.

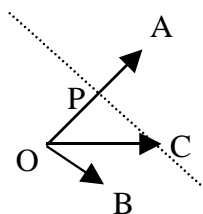
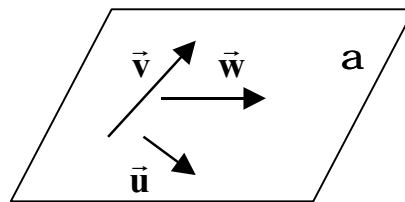
Por outro lado, suponhamos que podemos escrever \vec{u} como combinação linear de \vec{v} , ou seja, $\vec{u} = t \vec{v}$. Pela definição de produto de um número real por vetor, temos que \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção, logo são paralelos.

2. Os vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e somente se, podemos escrever um deles como combinação linear dos outros.

Prova: Suponhamos que \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são coplanares, temos então os seguintes casos:

- 1) Um deles sendo o vetor nulo, digamos $\vec{u} = \vec{0}$.
Podemos escrever: $\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$.
- 2) Dois deles são paralelos, digamos $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Podemos escrever: $\vec{u} = m\vec{v} = m\vec{v} + 0\vec{w}$, $m \in \mathbb{R}$.
- 3) Quaisquer dois desses vetores não paralelos.

Vamos considerar a figura ao lado, onde α é um plano que contém representantes dos vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .



Tomemos $\vec{OA} = \vec{v}$, $\vec{OB} = \vec{u}$ e $\vec{OC} = \vec{w}$. Tracemos pelo ponto C uma reta paralela ao vetor $\vec{OB} = \vec{u}$, que intercepta a reta OA no ponto P. Assim podemos escrever: $\vec{w} = \vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PC}$.

Como $\vec{OP} // \vec{OA}$ e $\vec{PC} // \vec{OB}$ temos: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $m, n \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, suponhamos que $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$, $n, m \in \mathbb{R}$. Assim, pela definição de adição de vetores, temos que \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

1.8 Dependência linear

Definição 1: Dizemos que um vetor \vec{v} é **linearmente dependente**, se $\vec{v} = \vec{0}$.

Definição 2: Dizemos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **linearmente dependentes** se eles são paralelos.

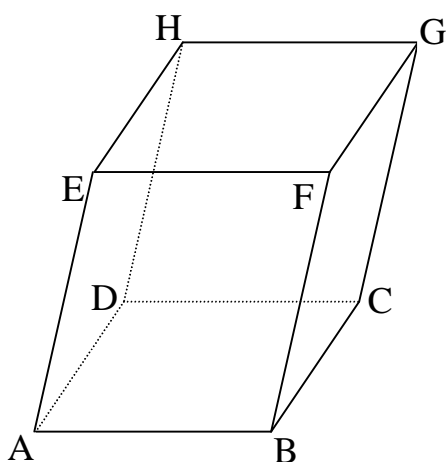
Definição 3: Dizemos que três vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são **linearmente dependentes** se eles são coplanares.

Definição 4: Dizemos que mais de três vetores do espaço (\mathbb{R}^3), são sempre **linearmente dependentes**.

Quando os vetores do espaço não são **linearmente dependentes** (LD), dizemos que eles são **linearmente independentes** (LI).

Exemplos:

Considerando o paralelepípedo de arestas AB, AD e AE, temos:



1) \vec{AB} é LI. 2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$ é LD.

3) \vec{AD} e \vec{AE} são LI.

4) \vec{AB} e $\frac{1}{2}\vec{AB}$ são LD.

5) \vec{AB}, \vec{AD} e \vec{AE} são LI.

6) \vec{AE}, \vec{AB} e \vec{DC} são LD.

7) \vec{AB}, \vec{AD} e \vec{FF} são LD.

8) $\vec{AB}, \vec{BF}, \vec{BC}$ e \vec{AG} são LD.

Propriedades:

1. Se um vetor \vec{v} é LI, então dado $\vec{u} // \vec{v}$, temos que existe um único escalar m tal que $\vec{u} = m\vec{v}$.

Prova: Como \vec{v} é LI, temos pela prova da propriedade 1 de 1.7, que $\vec{u} = m\vec{v}$ e m é único.

2. Se dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são LI, então dado \vec{v} coplanar com \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , temos que existe um único par de escalares (m, n) , tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$.

Prova: Como \vec{v} , \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são coplanares e, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são LI, temos pela prova da propriedade 2 de 1.7, que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$.

Para mostrar que esses escalares são únicos, vamos supor que existam m' e n' , tais que : $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2$. Então $(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 = \vec{0}$.

Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever $\vec{v}_1 = -\frac{(n - n')}{(m - m')}\vec{v}_2$. Daí, $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$, o que contradiz o fato de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 serem LI. Logo, $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

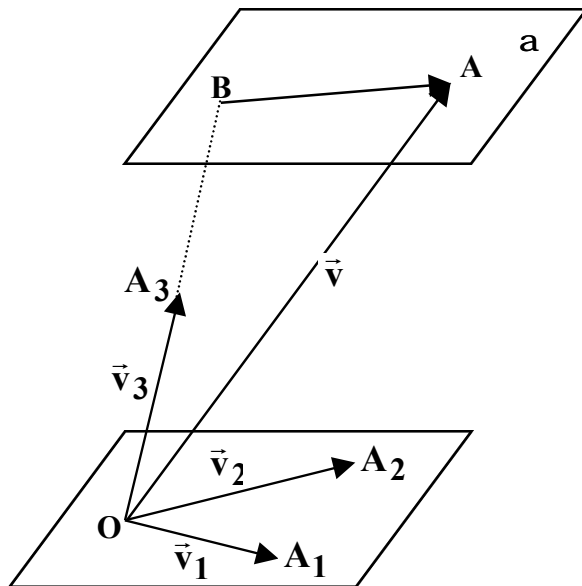
Analogamente podemos mostrar que $n = n'$.

3. Se três vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são LI, então dado um vetor \vec{v} qualquer, temos que existe único terno de escalares (m, n, p) , tal que $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$.

Prova: Suponhamos que \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são LI, temos então os seguintes casos:

- 1) $\vec{v} = \vec{0}$. Podemos escrever: $\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
- 2) \vec{v} paralelo a um dos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , digamos $\vec{v} // \vec{v}_1$. Então podemos escrever: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.
- 3) \vec{v} coplanar com dois dos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , digamos \vec{v} , \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são coplanares. Assim temos: $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.

4) \vec{v} não é coplanar com quaisquer dois dos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . Vamos considerar a figura a seguir, onde α é o plano paralelo ao plano OA_1A_2 passando pelo ponto A. Seja B é o ponto de interseção da reta OA_3 com o plano α .



Temos então:

$$\vec{v} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}.$$

Como $\vec{OB} \parallel \vec{v}_3$ e \vec{BA} é coplanar com \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , temos:

$$\vec{OB} = p\vec{v}_3, \quad \vec{BA} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2.$$

$$\text{Logo } \vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3.$$

Para mostrarmos que esses escalares são únicos, vamos supor que $\vec{v} = m'\vec{v}_1 + n'\vec{v}_2 + p'\vec{v}_3$. Então temos:

$$(m - m')\vec{v}_1 + (n - n')\vec{v}_2 + (p - p')\vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Se $m - m' \neq 0$, podemos escrever:

$$\vec{v}_1 = -\frac{n - n'}{m - m'} \vec{v}_2 - \frac{p - p'}{m - m'} \vec{v}_3,$$

ou seja, \vec{v}_1 é coplanar com \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . O que contradiz o fato de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 serem LI. Logo $m - m' = 0$, ou seja, $m = m'$.

Analogamente podemos mostrar que $n = n'$ e $p = p'$.

1.9 Base – Coordenadas de vetor

Definição 1: Dado um vetor \vec{v} LI, dizemos que $\{\vec{v}\}$ é uma **base para o conjunto de vetores paralelos a \vec{v}** .

Definição 2: Dados dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base para o conjunto de vetores coplanares com \vec{v}_1 e \vec{v}_2

Definição 3: Dados três vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 LI, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base para o conjunto de vetores do espaço (\mathbb{R}^3).

Definição 4: Dizemos que uma base é **ortogonal**, quando seus vetores são dois a dois ortogonais.

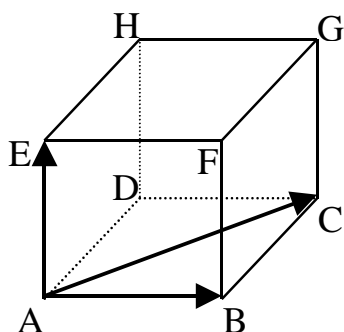
Definição 5: Dizemos que uma base é **ortonormal**, se ela for ortogonal e seus vetores unitários.

Costumamos representar uma base ortonormal por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Fixada uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço, pela propriedade 3 de 1.8, para todo vetor \vec{v} , temos $\vec{v} = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 + p\vec{v}_3$, onde m, n e p são únicos. Dizemos que $m\vec{v}_1, n\vec{v}_2$ e $p\vec{v}_3$ são as **componentes de \vec{v} na direção dos vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3** , respectivamente. Os escalares m, n e p são as **coordenadas de \vec{v}** em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Geralmente, representamos o vetor \vec{v} através de suas coordenadas, ou seja, $\vec{v} = (m, n, p)$.

Exemplo 1:



Consideremos o cubo ao lado e fixemos a base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}\}$. Podemos escrever:

$$1. \vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AE}, \text{ daí } \vec{AB} = (1, 0, 0).$$

$$\text{Analogamente, } \vec{AC} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{AE} = (0, 0, 1).$$

Podemos concluir então que, dada uma base qualquer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, as coordenadas desses vetores em relação a esta base são:

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{v}_3 = (0, 0, 1).$$

$$2. \quad \vec{AF} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 1\vec{AE}, \text{ daí } \vec{AF} = (1, 0, 1).$$

Observamos que se a base considerada for $\{\vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AC}\}$, temos $\vec{AF} = (1, 1, 0)$.

$$3. \quad \vec{AG} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC} + 1\vec{AE}, \text{ daí } \vec{AG} = (0, 1, 1).$$

Exemplo 2:

Consideremos $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ em relação base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}\}$ do exemplo anterior. Assim, $\vec{v} = -\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AH}$.

Analogamente ao que foi feito para o conjunto dos vetores no espaço, podemos fazer para conjuntos de vetores coplanares e colineares. Assim, um vetor num conjunto de vetores coplanares tem duas coordenadas e um vetor num conjunto de vetores colineares tem uma coordenada.

Propriedades:

Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base do espaço. Consideremos os vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , representados através de suas coordenadas em relação a esta base.

1. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $t \in \mathbb{R}$ então:

- a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2 \text{ e } a_3 = b_3.$
- b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$
- c) $t\vec{u} = (t a_1, t a_2, t a_3).$

Prova: a) Como $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ e $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$, temos:

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + (a_3 - b_3)\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Daí, $\vec{0} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Logo, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$ e $a_3 - b_3 = 0$.

De maneira análoga podemos mostrar os itens b) e c).

Observamos que os vetores $\vec{u} = (0, 0, 0)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são LD, visto que o vetor nulo é paralelo a todo vetor do espaço.

2. Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores não nulos. Os vetores \vec{u} e \vec{v} são LD se, e somente se, existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que :

$$\begin{aligned}a_1 &= t b_1 \\a_2 &= t b_2 \\a_3 &= t b_3\end{aligned}$$

Prova: Se \vec{u} e \vec{v} são LD, então $\vec{u} // \vec{v}$. Como \vec{v} é LI, podemos escrever: $\vec{u} = t \vec{v}$, ou seja,

$$\begin{aligned}a_1 &= t b_1 \\a_2 &= t b_2 \\a_3 &= t b_3.\end{aligned}$$

Por outro lado, se existe $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned}a_1 &= t b_1 \\a_2 &= t b_2 \\a_3 &= t b_3\end{aligned}$$

então $\vec{u} = t \vec{v}$. Logo $\vec{u} // \vec{v}$ e portanto \vec{u} e \vec{v} são LD.

3. Três vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são LD se, e somente se,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta propriedades pode ser demonstrada através de propriedades de determinantes.

Concluimos que se t não existe na propriedade 2, ou se Δ é diferente de zero, na propriedade 3, temos que os vetores considerados nessas propriedades são LI.

1.10 Sistemas de coordenadas cartesianas

Definição 1: Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço é um conjunto formado por um ponto O e uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Indicamos um sistema de coordenadas cartesianas no espaço por $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

O ponto O é chamado **origem do sistema** e os eixos que passam por O e tem as direções de \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , respectivamente, são chamados de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e seja P um ponto arbitrário do espaço. Chamamos **coordenadas do ponto**

P em relação ao sistema $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, as coordenadas do vetor \vec{OP} ,

ou seja, se $\vec{OP} = (a_1, a_2, a_3)$, então $P(a_1, a_2, a_3)$. Os números a_1, a_2, a_3 são denominados **abscissa**, **ordenada** e **cota do ponto P**, respectivamente.

Exemplo 1:

Na figura ao lado, temos:

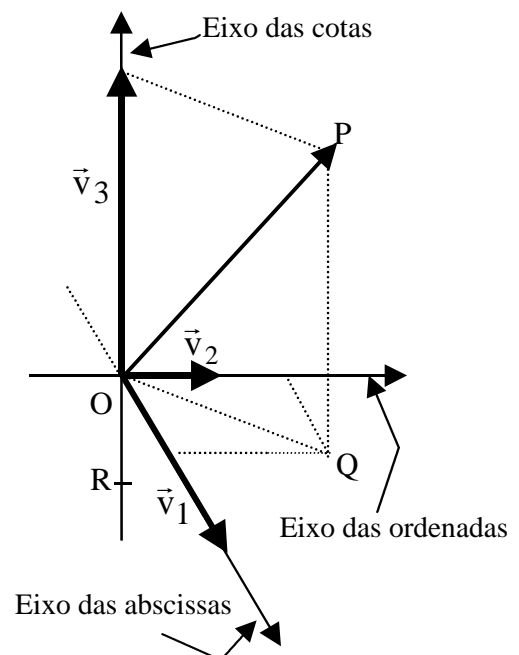
$$1. \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3,$$

$$\text{ou seja, } \vec{OP} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) \text{ e daí, } P\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right).$$

$$2. \vec{OQ} = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right), \text{ daí, } Q\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right).$$

$$3. \vec{OR} = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right), \text{ daí, } R = \left(0, 0, -\frac{2}{3}\right).$$

$$4. \vec{OO} = (0, 0, 0), \text{ daí } O(0, 0, 0).$$



Propriedades:

Fixado um sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e dados $\vec{v} = (a, b, c)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, temos as seguintes propriedades:

1. $\vec{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

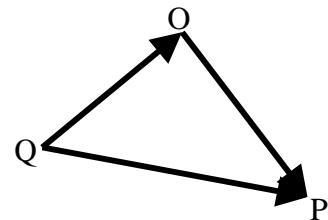
2. $P + \vec{v} = A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

3. O ponto médio de PQ é o ponto $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

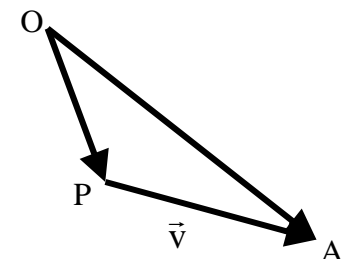
Prova:

1. Para demonstrarmos esta propriedade, escrevemos o vetor \vec{QP} como combinação linear dos vetores \vec{OQ} e \vec{OP} , ou seja,

$$\vec{QP} = -\vec{OQ} + \vec{OP} = (-x_2, -y_2, -z_2) + (x_1, y_1, z_1) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$



2. Utilizando a definição de soma de um ponto com um vetor, temos que $\vec{PA} = \vec{v}$. Assim, o vetor $\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA} = (x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$. Logo, $A(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$.

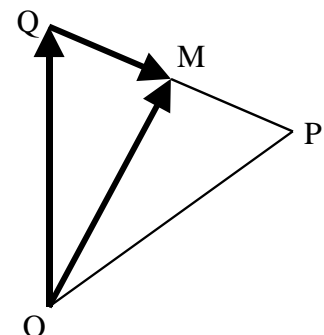


3. Podemos demonstrar a propriedade 3 escrevendo $\vec{OM} = \vec{OQ} + \vec{QM} = \vec{OQ} + \frac{1}{2}\vec{QP}$.

Representando os vetores \vec{OQ} e \vec{QP} através de suas coordenadas, obtemos:

$$\vec{OM} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Logo, $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.



Exemplo 2:

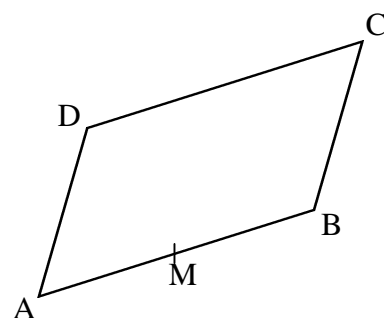
Consideremos o paralelogramo ABCD, onde $A(1,0,2)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,2,-2)$. Desejamos determinar as coordenadas dos vetores \vec{AB} e \vec{BC} , do vértice D e do ponto médio de AB.

Aplicando as propriedades anteriores temos:

$$\vec{AB} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 2) = (0, -1, 0),$$

$$\vec{BC} = (-1, 3, -4),$$

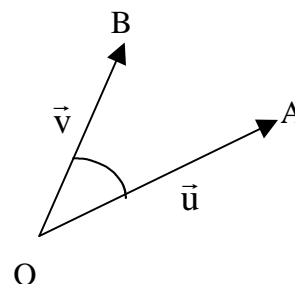
$D = A + \vec{AD} = A + \vec{BC} = (0, 3, -2)$ e o ponto médio de AB é $M(1, -1/2, 2)$.



CAPÍTULO II – PRODUTOS

2.1 Produto escalar

Definição 1: Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos, e escolhido um ponto O qualquer, podemos escrever: $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Chamamos **ângulo de \vec{u} e \vec{v}** a medida do ângulo \widehat{AOB} determinado pelas semi-retas OA e OB .



Indicamos $\widehat{AOB} = (\vec{u}, \vec{v})$, onde $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

Observemos que se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, os vetores \vec{u} e \vec{v} têm mesmo sentido e se $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, estes vetores têm sentidos contrários.

Definição 2: Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. O **produto escalar de \vec{u} por \vec{v}** , indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Se um dos vetores for nulo temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

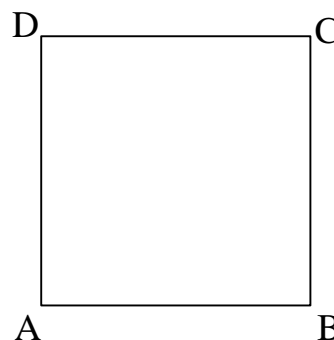
Exemplo 1

Considerando o quadrado seguinte, cujo lado mede $2u$, temos:

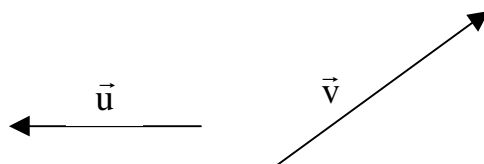
$$1) \vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 90^\circ = 0.$$

$$2) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 45^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

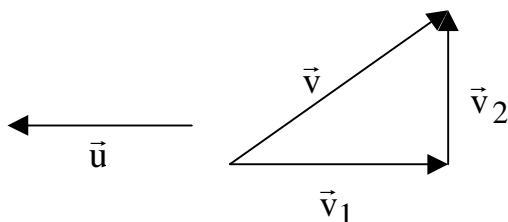
$$3) \vec{AB} \cdot \vec{CD} = |\vec{AB}| |\vec{CD}| \cos 180^\circ = -4.$$



Definição 3: Sejam \vec{u} um vetor não nulo e \vec{v} um vetor qualquer.



O vetor \vec{v} se exprime de maneira única na forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde \vec{v}_1 é paralelo a \vec{u} e \vec{v}_2 é ortogonal a \vec{u} .

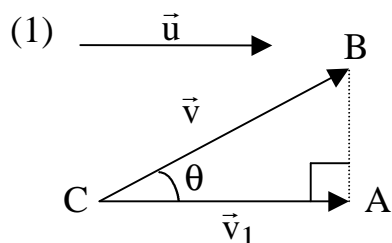


Chamamos o vetor \vec{v}_1 , de **projeção de \vec{v} na direção de \vec{u}** .

Indicamos $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v}_1$.

Interpretação geométrica do produto escalar

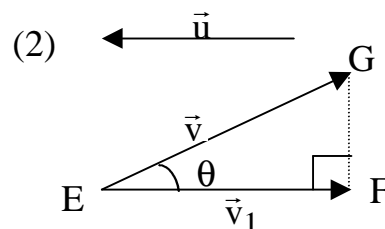
Se \vec{v} é um vetor qualquer e \vec{u} um vetor unitário, então $\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$. De fato, como $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = t\vec{u}$. Basta mostra que $\vec{v} \cdot \vec{u} = t$. Para isso, consideremos os casos a seguir:



Em (1) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é agudo. Nesse caso, temos $t > 0$, e daí $|\vec{v}_1| = |t| |\vec{u}| = t$. Por outro lado, como o triângulo ABC é retângulo em A, podemos escrever:

$$t = |\vec{v}_1| = |\vec{v}| \cos \theta = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Em (2) o ângulo $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ é obtuso. Nesse caso, temos $t < 0$, e daí $|\vec{v}_1| = |t| |\vec{u}| = -t$. Além disso, o ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \theta$. Considerando então o triângulo retângulo EFG, temos:



$$t = -|\vec{v}_1| = -|\vec{v}| \cos \theta = -|\vec{v}| |\vec{u}| \cos \theta = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\pi - \theta) = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Se $0 \neq |\vec{u}|$, temos $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \text{proj}_{\vec{u}^0} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}^0) \vec{u}^0$. Chamamos $\vec{v} \cdot \vec{u}^0$, a medida algébrica da projeção de \vec{v} na direção de \vec{u} e indicamos med alg $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

Exemplo 2:

Dados $\vec{u} \neq \vec{0}$, $|\vec{v}| = 6$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}^0 = |\vec{v}| |\vec{u}^0| \cos 60^\circ = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = 3\vec{u}^0$.

Exemplo 3:

Dados $\vec{a} \neq \vec{0}$, $|\vec{b}| = 8$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, temos que :

$$\text{med alg proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}^0 = |\vec{b}| |\vec{a}^0| \cos 120^\circ = 8 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

Daí, $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = -4\vec{a}^0$

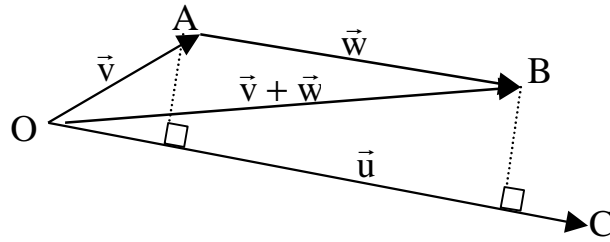
Propriedades do produto escalar

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
4. $t(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (t \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (t \vec{u})$.
5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Nas propriedades acima, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores quaisquer, e t é um número real.

As quatro primeiras propriedades decorrem diretamente da definição do produto escalar. Faremos a seguir a prova da propriedade 5.

Se um dos vetores for nulo, a verificação é imediata. Consideremos, na figura ao lado, os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não nulos e os pontos O, A, B e C tais que:



$$A = O + \vec{v}, B = A + \vec{w} \text{ e } C = O + \vec{u}.$$

Inicialmente observamos que:

$$\text{med alg proj}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{med alg proj}_{\vec{u}} \vec{v} + \text{med alg proj}_{\vec{u}} \vec{w}.$$

$$\text{Ou seja, } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}^\circ = \vec{v} \cdot \vec{u}^\circ + \vec{w} \cdot \vec{u}^\circ.$$

$$\text{Daí, } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (|\vec{u}| \vec{u}^\circ) = \vec{v} \cdot (|\vec{u}| \vec{u}^\circ) + \vec{w} \cdot (|\vec{u}| \vec{u}^\circ).$$

$$\text{Então, } (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}.$$

$$\text{Pela propriedade 1, temos: } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Expressão cartesiana do produto escalar

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= (x_1 x_2) \vec{i} \cdot \vec{i} + (x_1 y_2) \vec{i} \cdot \vec{j} + (x_1 z_2) \vec{i} \cdot \vec{k} + (y_1 x_2) \vec{j} \cdot \vec{i} + (y_1 y_2) \vec{j} \cdot \vec{j} + (y_1 z_2) \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ (z_1 x_2) \vec{k} \cdot \vec{i} + (z_1 y_2) \vec{k} \cdot \vec{j} + (z_1 z_2) \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal, seus vetores satisfazem às relações:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Assim, a expressão acima se reduz a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Observamos então que:

$$1) \quad |\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \quad \text{Daí, } |\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$2) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{u} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Daqui em diante, o sistema considerado será o ortonormal, exceto quando se explicitar o contrário.

Exemplo 4:

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 2)$ e $\vec{v} = (2, 0, 2)$, temos:

$$1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 + 4 = 6.$$

$$2) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

$$3) \quad \vec{u}^\circ = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$4) \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{logo, } (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ.$$

$$5) \quad \vec{u} \perp \vec{w}, \text{ sendo } \vec{w} = (0, 2, -2), \text{ pois } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{u}^\circ) \vec{u}^\circ = \left[(2, 0, 2) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right] \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$7) \quad \text{med alg proj}_{\vec{u}} \vec{v} = 2.$$

Cossenos diretores de um vetor

Fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, chamamos **cossenos diretores de um vetor** $\vec{v} \neq \vec{0}$, os cossenos dos ângulos que \vec{v} forma com os vetores desta base.

Considerando $\vec{v} = (x, y, z)$, $\alpha = (\vec{v}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{v}, \vec{j})$, e $\gamma = (\vec{v}, \vec{k})$, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}| |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{v}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}| |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{v}|}.$$

Como $\vec{v}^\circ = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, segue daí que, $\vec{v}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Daí, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Chamamos α , β e γ ângulo diretores de \vec{v} .

Exemplo 5:

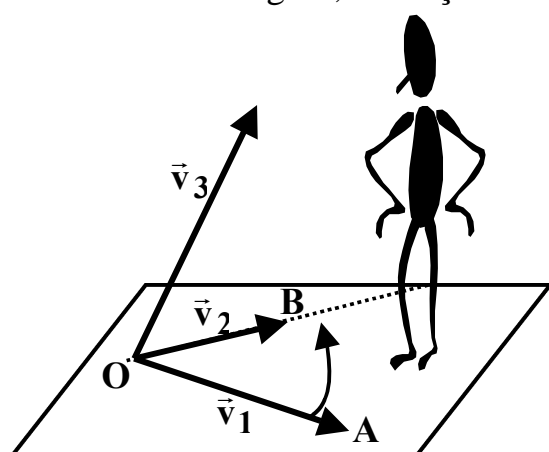
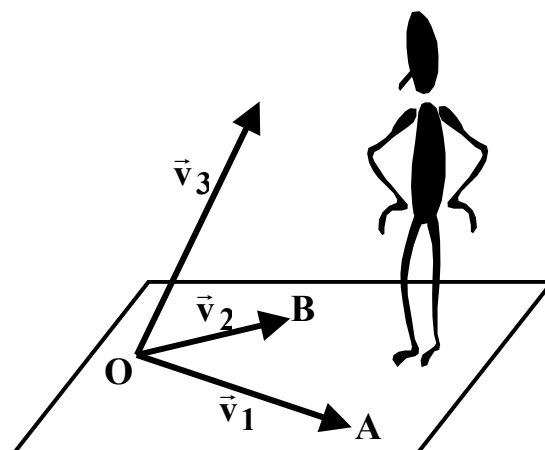
Dados $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \cos \beta = 0$, (\vec{v}, \vec{k}) obtuso e $|\vec{v}| = 5$, temos:

$$1) \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}. \text{ Logo, } \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \vec{v} = |\vec{v}| \vec{v}^\circ = 5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{5\sqrt{2}}{2} \right).$$

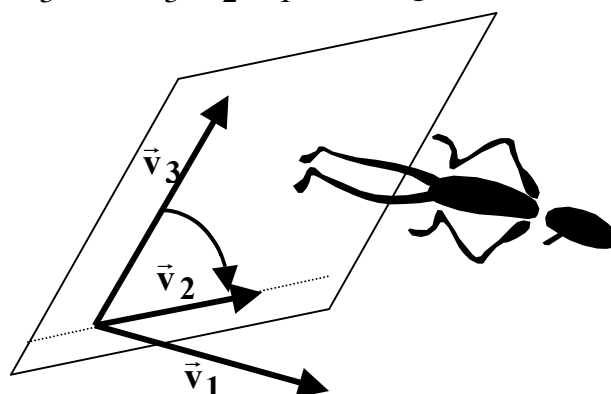
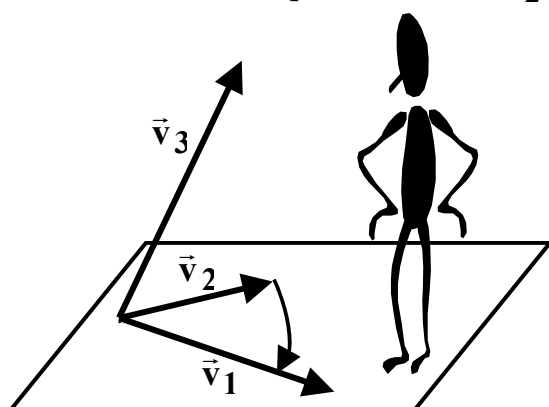
2.2 Produto Vetorial

Para definirmos o produto vetorial entre dois vetores é indispensável distinguirmos o que são **bases positivas** e **bases negativas**. Para isso, consideremos uma base do espaço $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ e um observador. Este observador deve estar com os pés em um plano que contém representantes de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 (os dois primeiros vetores da base), de modo que \vec{v}_3 (o terceiro vetor da base), esteja dirigido para os seus olhos. Neste plano, sejam $\vec{OA} = \vec{v}_1$ e $\vec{OB} = \vec{v}_2$.



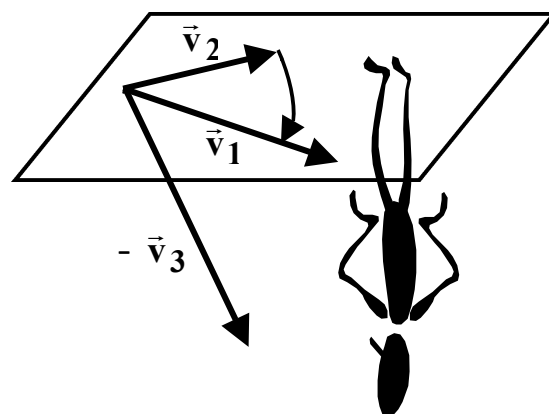
Consideremos agora, a rotação de menor ângulo em torno de O , que torna o vetor \vec{v}_1 (o primeiro vetor da base) com mesmo sentido do vetor \vec{v}_2 (o segundo vetor da base). Se esta rotação for no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, dizemos que a base é **positiva**. Caso contrário, dizemos que a base é **negativa**. Assim, a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, ilustrada ao lado, é positiva.

Observemos que as bases $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ e $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ são negativas.



Chamamos atenção especial do leitor para o fato de que nem sempre o observador está no mesmo semi-espaço que nós. Consequentemente, o sentido da rotação que ele verá é contrário ao que nós vemos. Para ilustrar este fato, desenhe em uma folha de papel dois vetores \vec{LI} com a mesma origem e considere uma rotação que torna um deles com mesmo sentido do outro. A folha de papel pode ser considerada com um plano, assim, a folha de papel divide o espaço em dois semi-espaços. Observemos então que, em um desses semi-espaços vemos esta rotação com um sentido. Se mudarmos de semi-espaço vemos esta rotação com um sentido contrário ao anterior.

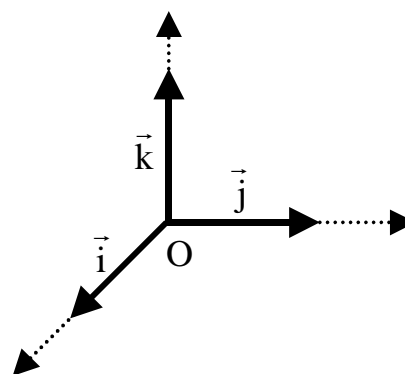
A observação anterior é útil na identificação de bases positivas e negativas, quando o observador não está no mesmo semi-espaço que nós. Por exemplo, ao analisarmos a base $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, -\vec{v}_3\}$ vemos a rotação no sentido horário, porém o observador, por estar no semi-espaço distinto do qual nos encontramos, vê esta rotação no sentido anti-horário e portanto esta base é positiva.



Exemplos

Consideremos o sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representado a seguir, temos que:

1. As bases $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\}$ são positivas.
2. As bases $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$, $\{\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\}$ e $\{\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\}$ são negativas.



Definição: Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não colineares. O **produto vetorial de \vec{u} por \vec{v}** , indicado $\vec{u} \times \vec{v}$, é um vetor, tal que:

1. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v})$;
2. A direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a um plano que contém representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} ;
3. A base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positiva.

Se \vec{u} e \vec{v} são colineares então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

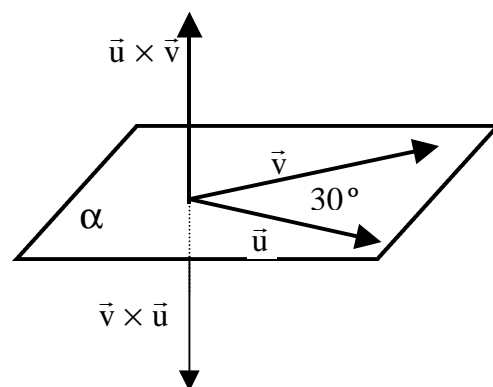
Exemplo 2

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores com representantes no plano α , onde $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$. Temos:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 30^\circ = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

e

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$



Assim, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$, mas $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são vetores opostos, como ilustra a figura.

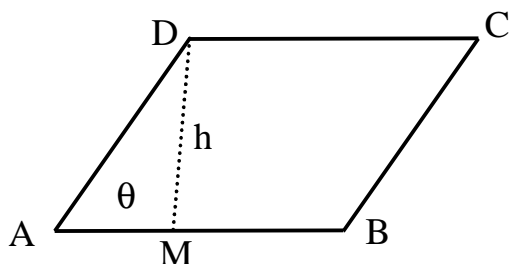
Exemplo 3

Dada a base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, temos :

1. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$
2. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
3. $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

Interpretação geométrica do produto vetorial

Consideremos o paralelogramo ABCD, abaixo.



Sabemos que a área S desse paralelogramo é:

$S = \text{base} \times \text{altura}$, ou seja

$$S = |\vec{AB}| \cdot h.$$

Do triângulo AMD, temos:

$$h = |\vec{AD}| \cdot \sin \theta.$$

Daí segue que,
$$S = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \sin \theta = |\vec{AB} \times \vec{AD}|.$$

Observamos também que a área T do triângulo ABD é:

$$T = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2}.$$

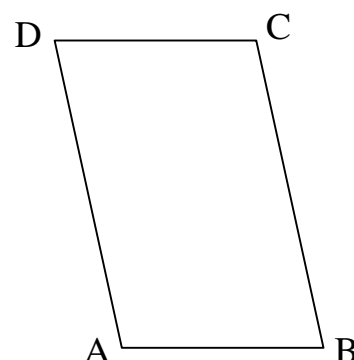
Exemplo 4:

Consideremos o paralelogramo ao lado, onde $A(1,1,0)$, $B(0,1,2)$ e $C(4,1,0)$, temos:

$$|\vec{AB}| = |(-1,0,2)| = \sqrt{5} \text{ e } |\vec{AD}| = |(4,0,-2)| = 2\sqrt{5}$$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(\vec{AB}, \vec{AD}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$



Segue daí que a área S do paralelogramo ABCD é:

$$S = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ u.a.}$$

Propriedades do produto vetorial

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. $(t \vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (t \vec{u}) = t (\vec{v} \times \vec{u})$.
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Nas propriedades acima, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores quaisquer e t um número real. As propriedades 1 e 2 decorrem diretamente da definição de produto vetorial, e a prova da propriedade 3 será feita no parágrafo seguinte.

Expressão cartesiana do produto vetorial

Fixada uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= (x_1 x_2) \vec{i} \times \vec{i} + (x_1 y_2) \vec{i} \times \vec{j} + (x_1 z_2) \vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ (y_1 x_2) \vec{j} \times \vec{i} + (y_1 y_2) \vec{j} \times \vec{j} + (y_1 z_2) \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ (z_1 x_2) \vec{k} \times \vec{i} + (z_1 y_2) \vec{k} \times \vec{j} + (z_1 z_2) \vec{k} \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma de um determinante “simbólico”:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ e $\vec{w} = (2, 4, 6)$, temos:

$$1) \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3)\vec{i} - (2 - 9)\vec{j} + (1 - 6)\vec{k},$$

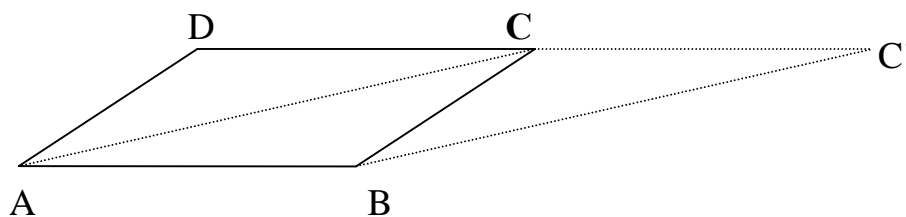
Daí, $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 7, -5)$.

$$2) \quad \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (12 - 12)\vec{i} + (6 - 6)\vec{j} + (4 - 4)\vec{k}.$$

Daí, $\vec{u} \times \vec{w} = (0, 0, 0) = \vec{0}$.

Exemplo 6

Consideremos, na figura a seguir, os paralelogramos ABCD e ABC'C.



Se S e S' são as áreas dos paralelogramos ABCD e ABC'C, respectivamente. Temos:

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| \quad \text{e} \quad S' = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Como

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = |\vec{AB} \times (\vec{AB} + \vec{BC})| = |\vec{AB} \times \vec{AB} + \vec{AB} \times \vec{BC}| = |\vec{0} + \vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AB} \times \vec{AD}|,$$

podemos concluir que: $S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = S'$.

Considerando T a área do triângulo ABC temos:

$$T = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{BC}|}{2} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{BC}|}{2}$$

Exemplo 7:

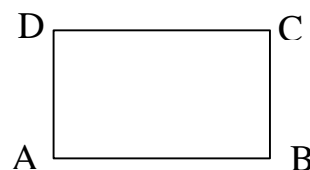
Considerando S a área do retângulo ao lado, onde

$A(1,0,2)$, $C(-2,3,3)$ e $\vec{AB}^\circ = (-1,0,0)$

temos:

$S = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ e $\vec{AC} = (-3,3,1)$.

Como $\vec{AB} \perp \vec{BC}$, temos que $\vec{AB} = \text{proj}_{\vec{AB}^\circ} \vec{AC} = (-3,0,0)$.



Daí $S = |(-3,3,1) \times (-3,0,0)| = |(0,-9,9)| = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$.

2.3 Produto Misto

Definição: Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} vetores quaisquer. **O produto misto dos vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w}** , indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é o número real $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Exemplo 1:

Dados os vetores $\vec{u} = (1,0,2)$, $\vec{v} = (-1,1,3)$ e $\vec{w} = (0,3,-2)$, temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [(1,0,2) \times (-1,1,3)] \cdot (0,3,-2) = (-2,-5,1) \cdot (0,3,-2) = -17$$

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [(-1,1,3) \times (1,0,2)] \cdot (0,3,-2) = (2,5,-1) \cdot (0,3,-2) = 17.$$

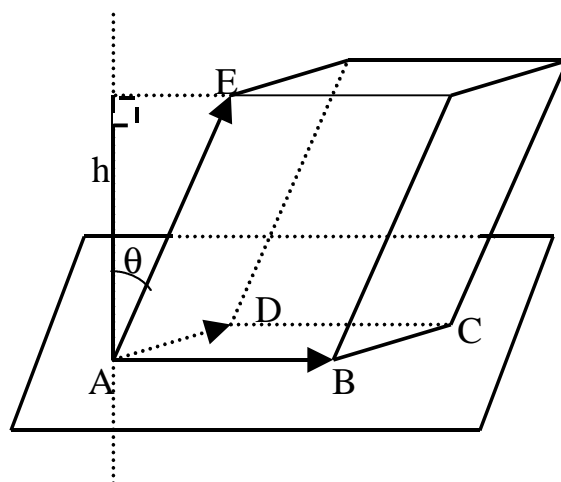
Interpretação geométrica do produto misto

Seja o paralelepípedo de arestas \vec{AB} , \vec{AD} e \vec{AE} . Sabemos que o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}.$$

Considerando a altura h desse paralelepípedo, em relação à base $ABCD$ e aplicando nossos conhecimentos do cálculo vetorial

podemos escrever: $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}| h$.



Por outro lado, essa altura pode ser calculada como o módulo da projeção do vetor \vec{AE} na direção do vetor $\vec{AB} \times \vec{AD}$, pois a direção deste vetor é ortogonal ao plano ABC . Assim podemos escrever:

$$h = \left| \text{proj}_{\vec{AB} \times \vec{AD}} \vec{AE} \right| = \left| \vec{AE} \cdot \frac{\vec{AB} \times \vec{AD}}{|\vec{AB} \times \vec{AD}|} \right| = |\vec{AE}| \cos \theta = |\vec{AE}| |\cos \theta|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores \vec{AE} e $\vec{AB} \times \vec{AD}$.

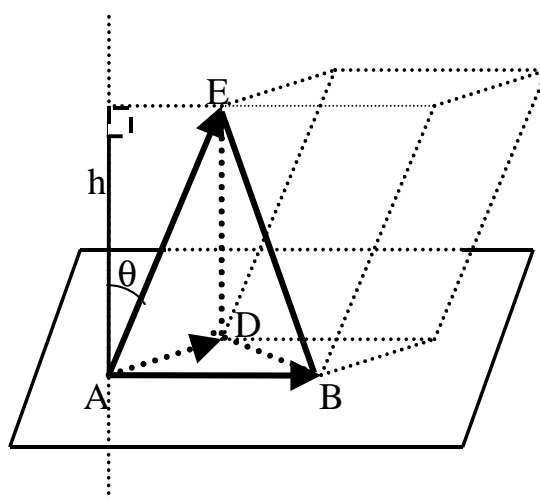
Daí, $V = |\vec{AB} \times \vec{AD}| |\vec{AE}| |\cos \theta| = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$, ou seja,

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$$

Consideremos agora o tetraedro de arestas \vec{AB} , \vec{AD} e \vec{AE} . Seja V_T o volume desse tetraedro, assim,

$$V_T = \frac{1}{3} \text{área da base} \times \text{altura}.$$

Considerando a base ABD desse tetraedro, observemos que a altura relativa a essa base coincide com a altura do paralelepípedo anterior.



Daí podemos escrever:

$$V_T = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{2} (\vec{AB} \times \vec{AD}) \right| \|\vec{AE}\| \cos \theta = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$$

Exemplo 2:

Consideremos o paralelepípedo de arestas OA, OB e OC, onde $\vec{OA} = (1,0,2)$, $\vec{OB} = (1,1,3)$ e $\vec{OC} = (2,1,0)$. O volume V deste paralelepípedo pode ser calculado como:

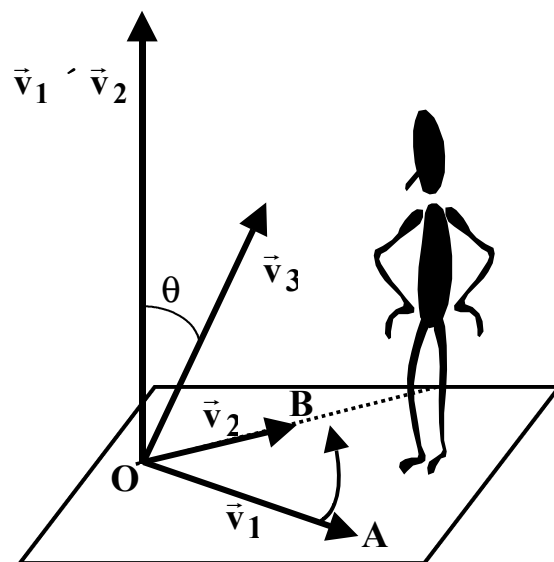
$$V = |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = |(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}| = |(-2, -1, -1) \cdot (2, 1, 0)| = 5 \text{ u. v.}$$

E a altura do mesmo em relação à base OABD será:

$$h = \left| \text{proj}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \vec{OC} \right| = \left| (2, 1, 0) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right| = \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ u. c. .}$$

Observação: Consideremos uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do espaço. Pela definição do produto vetorial a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2\}$ é positiva. Assim, se \vec{v}_3 estiver no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, em relação a um plano que contenha representantes de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será também positiva, já que o observador não muda de posição. Caso contrário a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será negativa.

Podemos verificar se \vec{v}_3 está, ou não, no mesmo semi-espaço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, em relação a um plano que contenha representantes de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , através do



ângulo entre estes vetores. Ou seja, se este ângulo for agudo, então \vec{v}_3 está no mesmo semi-espço que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, caso contrário, não.

Por outro lado, para determinarmos se o ângulo entre dois vetores é agudo ou obtuso, basta calcularmos o produto escalar entre eles. Assim, $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 > 0$, temos que o ângulo entre estes vetores é agudo, logo a base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ será positiva, caso contrário, a base será negativa.

Podemos então concluir que uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é positiva se o produto misto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] > 0$ e será negativa se $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] < 0$.

Propriedades do produto misto

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e \vec{w} são coplanares.
2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$.
3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.
4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
5. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$.
6. $t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}]$.

Nas propriedades acima, \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são vetores quaisquer, e t é um número real. Faremos a seguir suas provas:

1. “ \Rightarrow ” Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes de \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , é zero. Assim, esse paralelepípedo é degenerado, e portanto, \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

“ \Leftarrow ” É imediata.

2. Temos que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]|$, como volume de um mesmo paralelepípedo. Se \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são L D, então

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]| = 0$$

Se \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são L I, então as bases $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ e $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ pertencem a mesma classe. Logo,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

Nas provas das propriedades seguintes, usaremos as propriedades dos produtos escalar e vetorial já vistas.

$$3. [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} = -[(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

$$2. (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Usaremos agora as propriedades acima para demonstrar a distributividade do produto vetorial em relação à adição de vetores, ou seja:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

Mostraremos que : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{0}$.

Considerando $\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w})$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \{ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) \} \\ &= \vec{a} \cdot [\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})] - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \\ &= (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Portanto $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} 5. [\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] &= \{ (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v} \} \cdot \vec{w} = \{ \vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v} \} \cdot \vec{w} = \\ &= (\vec{u}_1 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u}_2 \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

$$6. [t \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (t \vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times t \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, t \vec{v}, \vec{w}].$$

Analogamente podemos obter as outras igualdades.

Expressão cartesiana do produto misto

Fixada uma base ortonormal positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e dados os vetores

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, temos:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) z_3 \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) z_3.$$

A expressão acima pode ser dada sob a forma do determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3:

Do tetraedro de arestas OA, OB, e OC, sabemos que :

$\vec{OA} = (x, 3, 4)$, $\vec{OB} = (0, 4, 2)$ e $\vec{OC} = (1, 3, 2)$.

Calcule o valor de x, para que o volume desse tetraedro seja igual a 2 u. v.

Sabemos que o volume V_T do tetraedro é dado por:

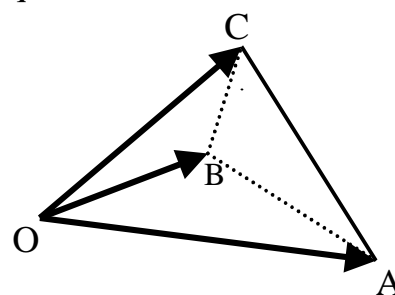
$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|$$

Assim,

$$V_T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |2x - 10|.$$

Como $V_T = 2$ u.v, temos: $\frac{1}{6} |2x - 10| = 2$.

Logo, $x = 11$ ou $x = -1$.



Exercícios

Sequência I

1. Considerando o prisma abaixo, cuja base é um hexágono regular, classifique em verdadeira ou falsa, as sentenças abaixo, justificando cada resposta.

a) $\vec{GA} - \vec{DI}$ é L.D.

b) \vec{HI} , \vec{IC} , \vec{IB} são L.I.

c) \vec{GM} , \vec{MF} , \vec{FE} são L.I.

d) $\vec{BC} + \vec{CI} + \vec{IB}$ e \vec{MF} são L.D.

e) \vec{AH} , \vec{ED} e \vec{MF} são L.D.

f) \vec{GM} e $2\vec{AH}$ são coplanares.

g) \vec{FA} , \vec{FE} e \vec{FM} são L.I.

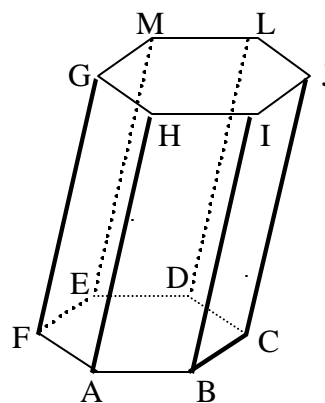
h) \vec{FM} pode ser escrito como combinação linear de \vec{FA} , \vec{FE} e \vec{GM} .

i) \vec{MG} pode ser escrito como combinação linear de \vec{GH} .

j) $\vec{F} = \vec{E} + \vec{LM}$

l) $\vec{FA}^\circ = (2\vec{JI})^\circ$

m) $\vec{FE}^\circ + (2\vec{ML})^\circ = (\vec{FE} + 2\vec{ML})^\circ$



Nos exercícios de 2 a 5, considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$.

2. Verifique se os vetores são L.D. em cada item abaixo:

a) \vec{u} b) \vec{u} e \vec{v} c) \vec{o} d) \vec{u} e \vec{o} e) \vec{u} e $(4, -2, 4)$

f) \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} g) \vec{u} , \vec{v} , $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 4)$ h) \vec{u} , \vec{v} e $(7, 4, 0)$.

3. Determine:

- a) $2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$.
- b) as coordenadas do ponto B, onde $A = (1, 0, -2)$ e $\vec{AB} = \vec{u}$.
- c) as coordenadas do ponto M, onde M é ponto médio do segmento AB, do item(b).

4. Escreva se possível:

- a) \vec{u} como combinação linear de $\vec{a} = (4, -2, 4)$.
- b) \vec{u} como combinação linear de \vec{o} .
- c) \vec{o} como combinação linear de \vec{u} .
- d) \vec{v} como combinação linear de \vec{u} .
- e) \vec{u} como combinação linear de \vec{v} e $\vec{a} = (4, -2, 4)$.
- f) \vec{v} como combinação linear de \vec{u} e $\vec{a} = (4, -2, 4)$.
- g) \vec{v} como combinação linear de \vec{u} e \vec{w} .

5. Determine:

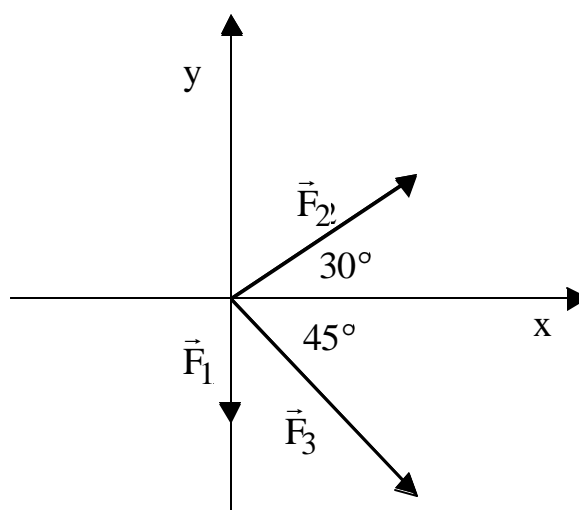
- a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{w}$ b) $|\vec{u}|$ e \vec{u}° c) (\vec{u}, \vec{v}) e (\vec{u}, \vec{w})
- d) Um vetor não nulo ortogonal a \vec{v} .
- e) A projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} .
- f) A projeção de \vec{u} na direção de \vec{w} .
- g) A medida algébrica da projeção de \vec{v} na direção de \vec{u} .
- h) O versor de \vec{b} , onde $\vec{b} \parallel \vec{u}$.
- i) Um vetor paralelo a \vec{u} e de módulo 9.
- j) O vetor \vec{c} , sabendo que seus ângulos diretores são agudos, onde $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ e $|\vec{c}| = |\vec{w}|$.
- l) $\vec{v} \times \vec{w}$
- m) Um vetor unitário ortogonal aos vetores \vec{u} e \vec{v} .
- n) Uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, onde $\vec{e}_1 \parallel \vec{u}$.
- o) Uma base positiva $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, onde $\vec{f}_1 = \vec{v}$.
- p) O vetor \vec{d} , tal que $\vec{d} \times \vec{u} = \vec{o}$ e $\vec{d} \cdot \vec{v} = -2$.
- q) A área do triângulo ABC, onde $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC} = \vec{v}$.
- r) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$
- s) O volume do paralelepípedo de arestas AB, AC e AD, onde $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ e $\vec{AD} = \vec{w}$.

Sequência II

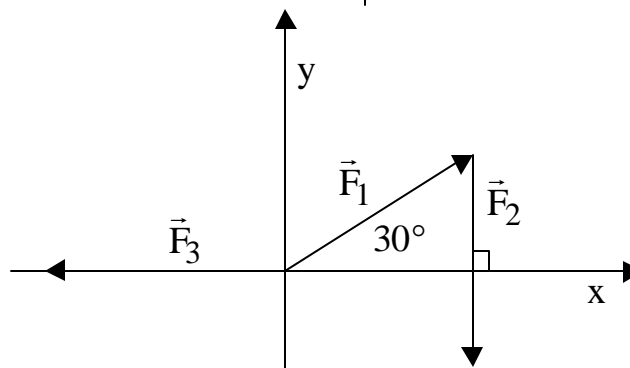
1. Sabendo que $A(0,0,0)$, $B(2,1,-2)$ e $C(0,0,5)$ são vértices de um triângulo, determine um vetor que tem a direção da bissetriz do ângulo interno \widehat{BAC} .

2. Determine a resultante das forças em cada item a seguir:

- a) $|\vec{F}_1| = 80 \text{ kgf}$
 $|\vec{F}_2| = 150 \text{ kgf}$
 $|\vec{F}_3| = 180 \text{ kgf}$



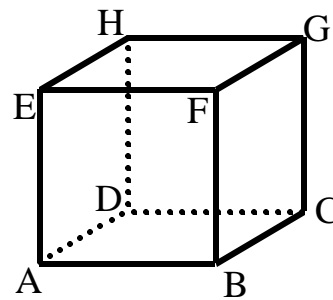
- b) $|\vec{F}_1| = 120 \text{ kgf}$
 $|\vec{F}_2| = 100 \text{ kgf}$
 $|\vec{F}_3| = 120 \text{ kgf}$



3. Exiba, se possível, os exemplos abaixo. Se impossível explique porque.

- a) Uma base do espaço que contenha os vetores $(1, -2, 3)$ e $(-2, 4, 6)$.
 b) Três vetores L.I. que não formem uma base do espaço.
 c) Um vetor não nulo, paralelo a $\vec{u} = (1, 0, 2)$ e ortogonal a $\vec{w} = (-1, 2, 3)$.

4. Do cubo ao lado, sabemos que: $A(2,1,0)$, $B(2,4,0)$ e $\vec{AD}^\circ = (0,0,1)$. Determine as coordenadas:



- do vetor \vec{AC} ;
- do ponto E;
- do vetor \vec{AL} , sabendo que $\vec{FL} = -\frac{1}{3}\vec{EF}$.
- do vetor \vec{CG} em relação à base $\left\{ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE} \right\}$;

5. De um losango ABCD sabemos que $A(1,0,2)$, $B(2,-1,2)$ e a diagonal AC é paralela ao vetor $\vec{u} = (-1,2,2)$. Determine as coordenadas dos outros vértices.

6. Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{w}| = 4$ e $(\vec{u}, \vec{w}) = 60^\circ$, calcule:

a) $|\vec{u} + \vec{w}|$ b) $|\text{proj}_{\vec{w}} \vec{u}|$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w})$

7. Determine o vetor \vec{v} sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ e que seus ângulos diretores são agudos e congruentes.

8. De um triângulo ABC, sabemos que $A(1,0,2)$, $B(3,1,1)$ e $\vec{AC}^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Determine a altura do triângulo ABC em relação à base AC.

9. De um triângulo ABC, sabemos que: $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 3$ e $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3\sqrt{3}$. Determine a área deste triângulo.

10. Sejam AB, AD, e AE arestas de um paralelepípedo retângulo de volume 12 u.v. Sabemos que $A(0,0,0)$, $C(4,1,0)$ e $\vec{AB}^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

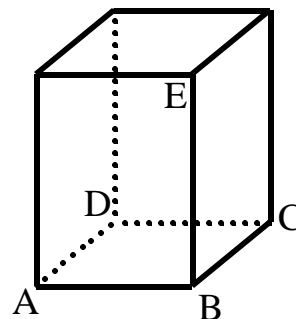
- Determine:
- A área do base ABCD.
 - As coordenadas do vértice E.

11. Do paralelepípedo retângulo ao lado, temos:

a) $A(2,1,0)$, $C(3,2,0)$ e $|\vec{BE}| = 3$.

b) Dois dos ângulos diretores de \vec{AB} são $\alpha = \gamma = 45^\circ$.

Determine o volume deste paralelepípedo.



12. De um tetraedro ABCD sabemos que:

a) $A(4, 0, 3)$, $B(-8, 4, 1)$, $D(3, -1, 0)$ e $|\vec{AC}| = 2\sqrt{2}$.

b) Os ângulos diretores de \vec{AC} são $\alpha = \gamma = 45^\circ$.

Determine o volume deste tetraedro.

13. Dados os vetores $\vec{OA} = (1, y, 2)$, $\vec{OB} = (2, 0, 1)$ e $\vec{OC} = (0, 3, 1)$, determine o valor de y para que a altura do tetraedro OABC, em relação à base OBC, seja igual a $\frac{1}{7}$ u. c.

14. De um paralelepípedo de base ABCD sabemos que:

a) $A(0, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ e $C(-1, 1, 0)$;

b) Os ângulos diretores de \vec{AE} são agudos e $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 45^\circ$.

Determine as coordenadas de vértice E, para que o volume deste paralelepípedo seja igual a $4\sqrt{2}$ u.v.

15. De um tetraedro ABCD, sabemos que:

a) $A(0,0,0)$, $D(1,5,t)$; $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$;

b) $\vec{AB}^\circ = (1,0,0)$ e $\vec{AC}^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

c) o triângulo ABC é equilátero.

Determine as coordenadas do vértice D para que o volume deste tetraedro seja igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ u.v.

RESPOSTAS**Sequência I**

5. a) 1 e 0 b) 3 e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ c) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{54}$ e 90°

d) $\left(x, y, \frac{5x+5y}{2}\right)$ $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e) $\left(\frac{5}{54}, \frac{5}{54}, -\frac{1}{27}\right)$

f) (0,0,0) g) $\frac{1}{3}$ h) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ou $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

i) (6,-3,6) ou (-6,3,-6) j) $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ l) (12,-6,15)

m) $\left(-\frac{8\sqrt{485}}{485}, \frac{14\sqrt{485}}{485}, \frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$ ou $\left(\frac{8\sqrt{485}}{485}, -\frac{14\sqrt{485}}{485}, -\frac{15\sqrt{485}}{485}\right)$

p) (-4,2,-4) q) $\frac{\sqrt{485}}{2}$ u.a. r) 15 s) 60 u.v.

Sequência II

1. $t\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $t \in \mathbb{R}^*$

2. a) $\vec{R} = (75\sqrt{3} + 90\sqrt{2}, -5 - 90\sqrt{2})$ b) $\vec{R} = (60\sqrt{3} - 120, -40)$

4. a) $\vec{AC} = (0,3,3)$ b) $E(5,1,0)$ c) $\vec{CG} = (0,0,1)$ d) $\vec{AL} = (3,2,0)$

5. C $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e D $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

6. a) $2\sqrt{7}$ b) 1 c) 8

$$\mathbf{7.} \quad \vec{v} = (1, 1, 1) \qquad \mathbf{8.} \quad h = \frac{\sqrt{22}}{2} \text{ u.c.} \qquad \mathbf{9.} \quad S = \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

$$\mathbf{10.} \quad \text{a) } S = 6\sqrt{2} \text{ u.a.} \quad \text{b) } E\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ ou } E\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{11.} \quad V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u.v.} \quad \mathbf{12.} \quad V = \frac{2}{3} \text{ u.v.} \quad \mathbf{13.} \quad y = 4 \text{ ou } y = 5$$

$$\mathbf{14.} \quad E(2, 2\sqrt{2} + 1, 3) \quad \mathbf{15.} \quad D(1, 5, 2) \text{ ou } D(1, 5, -2)$$

