Lista de exercícios

Fábio Braga, João Lucas Lima, Luca Argolo, Thiago Vieira

September 25, 2021

Questão 1.

a)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$, então ou $v \vDash \varphi$ ou $v \vDash (\psi \wedge \chi)$.

Se $v \vDash \varphi$, então $v \vDash \varphi \vee \psi$ e $v \vDash \varphi \vee \chi$. Logo, $v \vDash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$.

Se $v \nvDash \varphi$ mas $v \vDash (\psi \wedge \chi)$, então $v \vDash \psi$ e $v \vDash \chi$. Logo, $v \vDash \varphi \vee \psi$ e $v \vDash \varphi \vee \chi$. Portanto, $v \vDash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$.

b)

$$\varphi \to \psi \to \chi \equiv \varphi \wedge \psi \to \chi$$

Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash \varphi \to (\psi \to \chi)$. Então, ou $v \nvDash \varphi$ ou $v \vDash \varphi$ e $v \vDash (\psi \to \chi)$.

Se $v \nvDash \varphi$, então $v \nvDash (\varphi \wedge \psi)$. Logo, $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

Se $v \vDash \varphi$ e $v \vDash (\psi \to \chi)$ ou $v \nvDash \psi$, nesse caso, $v \nvDash \varphi \wedge \psi$ e $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$. O outro caso seria para $v \vDash \psi$ e $v \vDash \chi$, então $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

c) Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \vee \psi)$. Então, ou $v \vDash (\varphi \wedge \psi)$ ou $v \vDash \psi$

Se $v \vDash \psi$ o resultado é demonstrado.

Se $v \vDash (\varphi \wedge \psi)$, $v \vDash \varphi$ e $v \vDash \psi$. Logo, o resultado é demonstrado.

d) Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash (\varphi \vee \psi) \wedge \psi)$. Então, $v \vDash (\varphi \vee \psi)$ e $v \vDash \wedge \psi)$. Logo, segue o resultado.

Questão 2. Seja A um conjunto, r uma relação de equivalência em A e Pa o conjunto de todas as partições de A.

Definimos a função g: $\mathbb{R} \to Pa$, $g : r \to A_{/r}$, sendo $A_{/r}$ o conjunto quociente de r em A.

Provando a injetividade:

Seja $r_1 = r_2$. Temos $A_{/r_1} = \{[x]_{r_1} | x \in A\}$, $[x]_{r_1} = \{z \in A | x\ r_1\ z\}$.

Como $r_1 = r_2$, temos que $[x]_{r_1} = \{z \in A | x\ r_2\ z\} = [x]_{r_2}$.

Então $A_{r_1} = [x]_{r_1} | x \in A = [x]_{r_2} | x \in A = A_{r_2}$.

Provando a sobrejetividade:

Qualquer partição induz, por definição, uma relação de equivalência. ∀ x, y no mesmo subconjunto, x r y.

Sejam φ_1, φ_2 tais que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Isso significa que $v \vDash \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \forall v \in 2^v$.

Definimos $\neg v$ como o inverso de v. Logo, $\neg v \vDash \neg\varphi_1 \Leftrightarrow \neg v \vDash \neg\varphi_1$.

Dessa forma, a definição de equivalência é satisfeita.

Questão 3.
a) Seja $\varphi \in F_m$, uma fórmula nessa base $\{\neg, \vee, \wedge\}$, então podemos substituir todas subfórmulas de φ por fórmulas equivalentes: $\chi \wedge \varphi \equiv \neg(\neg\chi \vee \neg\varphi\})$. Para provar a equivalência segue que:
Se $v \vDash (\chi \wedge \varphi)$, então $v \vDash \chi$ e $v \vDash \varphi$, ou seja $v \nvDash \neg\chi$ e $v \nvDash \neg\varphi$. Logo $v \nvDash (\neg\chi \vee \neg\varphi)$, por fim $v \vDash \neg(\neg\chi \vee \neg\varphi)$.
b) Seja $\varphi \in F_m$, uma fórmula na base $\{\neg, \wedge\}$, então podemos substituir todas subfórmulas de φ conforme a equivalência a seguir.
Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash (\chi \wedge \varphi)$, logo, $v \vDash \chi$ e $v \vDash \varphi$, ou seja $v \nvDash \neg\varphi$. Logo, $v \nvDash \chi \to \neg\varphi$, então $v \vDash \neg(\chi \to \neg\varphi)$.
c) Seja $\varphi \in F_m$, uma fórmula na base $\{\neg, \to\}$, então podemos substituir todas as subformulas de φ com a seguinte equivalência lógica: $\neg\varphi \equiv\perp \varphi \to\perp$.
Provamos a equivalência da seguinte maneira:
Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash \neg\varphi$, então $v \nvDash \varphi$, logo, $v \vDash \varphi \to\perp$

Questão 4. Seja φ e $\psi \in F_m\wedge$. Fazendo o primeiro passo indutivo, considere φ atômicos. Como nem $\perp$ ou $\top$ existem na base $\{\wedge\}$, precisamos provar somente o caso de serem variável. Se for variável, φ não podem ser válidas, pois pode existir uma valoração $v \in 2^v$ tal que φ seja igual a zero.
Passo indutivo:
Seja φ, temos que provar que φ não pode ser válida. Segue a hipótese de indução, como χ e ψ não podem ser válidas, logo, existe uma valoração $v \in 2^v$ que não satisfaça χ ou ψ, logo $\{\wedge\}$ não pode ser base porque não existe $\top$.

Questão 5.

$$\varphi = p \to \neg(q \to r)$$

$$\varphi \equiv p \to \neg(\neg q \vee \neg r)$$

$$\varphi \equiv p \to (q \wedge \neg r)$$

$$\varphi \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r), FND$$

$$\varphi \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r), FNC$$

$$\psi = x \vee y \to \neg x$$

$$\psi \equiv \neg(x \vee y) \vee \neg x$$

$$\psi \equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee \neg x, FND$$

$$\psi \equiv (\neg x \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee \neg x), FNC$$

$$\epsilon = x \land y \to \neg x$$
$$\epsilon \equiv \neg(x \land y) \lor \neg x$$
$$\epsilon \equiv (\neg x \lor \neg y) \lor \neg x$$
$$\epsilon \equiv \neg x \lor \neg x \lor \neg x, FNCeFND$$

Questão 6.

Questão 7.