Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 30/05/2019

Sequências

DEFINIÇÃO:

Uma SEQUÊNCIA (ou uma sucessão) é um conjunto ordenado de elementos (numéricos ou não) seguindo um padrão pré-definido.
NOTAÇÃO: $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ $n \in \mathbb{N}$; onde a_n representa o n-ésimo termo da sequência.

EXEMPLOS:

- $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots)$ "Sequência dos números naturais"
- $(1, 3, 5, 7, \cdots)$ "Sequência dos números naturais ímpares"
- $(2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n-1}, 2^n, \cdots)$ "Sequência das potências de base 2; $n \in \mathbb{N}$"
- $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$ "Sequência de Fibonacci"

DEFINIÇÃO: (RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA)

Seja uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$. Uma RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA é uma equação que relaciona o termo geral a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, $\forall n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO.1:

Sejam as sequências: $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ e $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$.
"Como obter o n-ésimo termo de cada sequência?"

(1º) Observamos o comportamento dos termos da sequência; e,

(2º) Determinamos uma LEI DE FORMAÇÃO, incluindo as CONDIÇÕES INICIAIS.

Exemplo.1:
Vamos determinar o *n*-ésimo termo das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots)$ $\left\{\begin{array}{ll} a_1 = 2 & \\ a_2 = 4 = & a_1 + 2 \\ a_3 = 6 = & a_2 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & a_{n-2} + 2 \\ a_n = & a_{n-1} + 2 \end{array}\right.$

- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$ $\left\{\begin{array}{ll} a_1 = 1 & \\ a_2 = 3 = & a_1 + 2 \\ a_3 = 5 = & a_2 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & a_{n-2} + 2 \\ a_n = & a_{n-1} + 2 \end{array}\right.$

EXEMPLO.1:

LEI DE FORMAÇÃO das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots) \left\{ \; a_n = \quad a_{n-1} + 2; \quad \text{para} \quad n \geq 2 \right.$
- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots) \left\{ \; a_n = \quad a_{n-1} + 2; \quad \text{para} \quad n \geq 2 \right.$

Observação: Note nestas duas sequências a importância das CONDIÇÕES INICIAIS para que uma sequência seja bem definida.

EXEMPLO.1:

LEI DE FORMAÇÃO das sequências:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \cdots) \begin{cases} a_1 = & 2 & \text{“CONDIÇÃO INICIAL”} \\ a_n = & a_{n-1} + 2; & \text{para } \ n \geq 2 \end{cases}$
- $(1, 3, 5, 7, 9, \cdots) \begin{cases} a_1 = & 1 & \text{“CONDIÇÃO INICIAL”} \\ a_n = & a_{n-1} + 2; & \text{para } \ n \geq 2 \end{cases}$

EXEMPLO.2:

"Sequência da SOMA dos n primeiros números naturais".

$(S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-1}, S_n)$

$$\begin{cases} S_1 = 1 & \\ S_2 = 1+2 & = S_1 + 2 \\ S_3 = 1+2+3 & = S_2 + 3 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1} = 1+2+3+\cdots+(n-1) & = S_{n-2} + (n-1) \\ S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n & = S_{n-1} + n \end{cases}$$

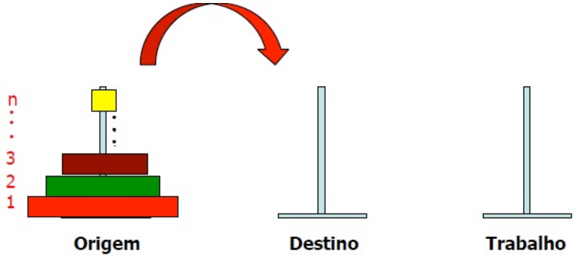
LEI DE FORMAÇÃO: $\begin{cases} S_1 = & 1 & \text{“CONDIÇÃO INICIAL”} \\ S_n = & S_{n-1} + n; & \text{para } \; n \geq 2 \end{cases}$

EXEMPLO.3:
"Sequência da SOMA dos n primeiros números ímpares".
$(S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n-1}, S_n)$

$$\begin{cases} S_1 = 1 & \\ S_2 = 1+3 & = S_1 + 3 \\ S_3 = 1+3+5 & = S_2 + 5 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1} = 1+3+5+\cdots+(2(n-1)-1) & = S_{n-2} + (2(n-1)-1) \\ S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) & = S_{n-1} + (2n-1) \end{cases}$$

LEI DE FORMAÇÃO: $\begin{cases} S_1 = & 1 & \text{"CONDIÇÃO INICIAL"} \\ S_n = & S_{n-1} + (2n-1); & \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$

EXEMPLO.4: "TORRE DE HANOI"



Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar $n \in \mathbb{N}$ discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo, respeitando as seguintes regras:

- Só é permitido mover um disco do topo para outro eixo; e,
- Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

EXEMPLO.4 Vamos denotar M_n o número mínimo de movimentos necessários para mover $n \in \mathbb{N}$ discos de um eixo para outro respeitando as regras do problema.
Observando os primeiros movimentos, notamos que para movimentar 1 disco precisamos de apenas um movimento; para movimentarmos 2 discos, precisamos no mínimo de três movimentos; e para movimentarmos 3 discos precisamos, no mínimo de sete movimentos.
Desta forma, descobrimos uma recorrência:

$$\begin{cases} M_1 & = 1 \\ M_2 & = M_1 + 1 + M_1 = 2M_1 + 1 \\ M_3 & = M_2 + 1 + M_2 = 2M_2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ M_{n-1} & = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} = 2M_{n-2} + 1 \\ M_n & = M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1 \end{cases}$$

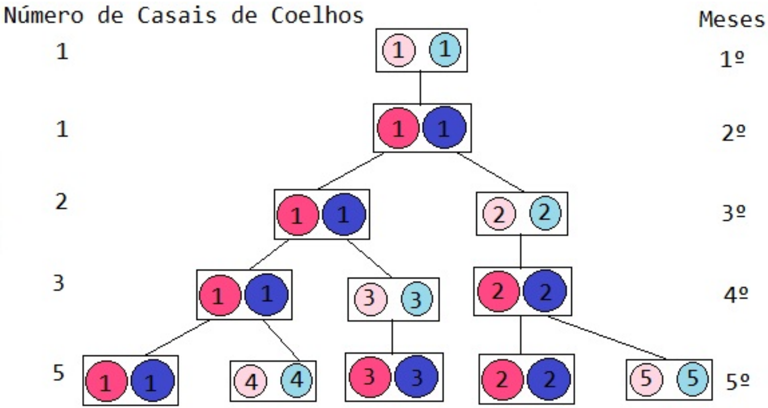
LEI DE FORMAÇÃO: $\begin{cases} M_1 = & 1 & \text{“CONDIÇÃO INICIAL”} \\ M_n = & 2M_{n-1} + 1; & \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$

EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Problema proposto por Leonardo de Pisa)"
Determine o número de pares de coelhos ao final de doze meses sob as seguintes condições:

- Inicialmente, tem-se um único par(macho e fêmea) de coelhos recém-nascidos;
- Todo mês cada par com pelo menos dois meses produz um novo par(macho e fêmea) de coelhos; e,
- Nenhum coelho morre durante este processo.

Vamos denotar F_n o número de pares de coelhos no n-ésimo mês ($n \in \mathbb{N}$) respeitando as condições do problema.

EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Problema proposto por Leonardo de Pisa)"



EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Continuação)
Observando os primeiros meses, notamos que no primeiro e no segundo mês temos apenas o par inicial de coelhos, ou seja, 1 par de coelhos; no terceiro mês o par de coelhos já está com dois meses e pode procriar, então teremos um par a mais de coelhos recém-nascidos, ou seja, 2 pares de coelhos; no quarto mês o novo par de coelhos ainda está crescendo e não pode procriar, mas o primeiro pode procriar novamente, o que implica em mais um par de coelhos recém-nascidos; então, agora teremos 3 pares de coelhos. Desta forma, descobrimos uma recorrência:

$$\begin{cases} F_1 & = 1 \\ F_2 & = 1 \\ F_3 & = F_2 + F_1 = 2 \\ F_4 & = F_3 + F_2 = 3 \\ F_5 & = F_4 + F_3 = 5 \\ \vdots & \vdots \\ F_{n-1} & = F_{n-2} + F_{n-3} \\ F_n & = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

EXEMPLO.5: "(SEQUÊNCIA DE FIBONACCI)" (Continuação)
Recorrência:

$$\begin{cases} F_1 & = 1 \\ F_2 & = 1 \\ F_3 & = F_2 + F_1 \\ F_4 & = F_3 + F_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_{n-1} & = F_{n-2} + F_{n-3} \\ F_n & = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

LEI DE FORMAÇÃO:
$$\begin{cases} F_1 = & 1 & \text{"CONDIÇÃO INICIAL"} \\ F_2 = & 1 & \text{"CONDIÇÃO INICIAL"} \\ F_n = & F_{n-1} + F_{n-2} & \text{para } \; n \geq 3 \end{cases}$$

EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Continuação)

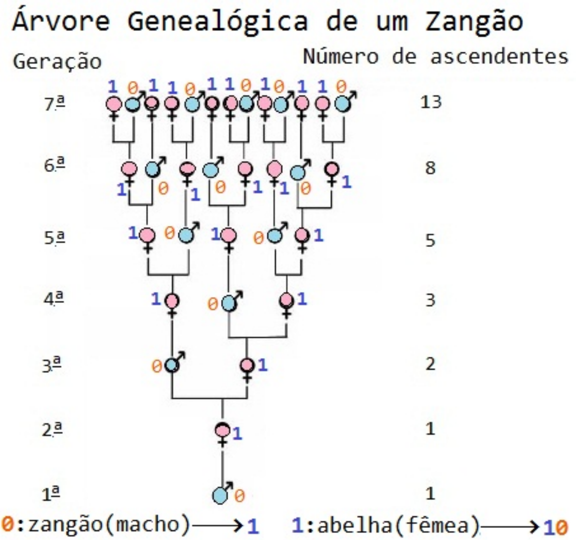
LEI DE FORMAÇÃO: $\begin{cases} F_1 = & 1 & \text{"condição inicial"} \\ F_2 = & 1 & \text{"condição inicial"} \\ F_n = & F_{n-1} + F_{n-2} & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$

Agora podemos calcular, por exemplo, para $n = 12$:
$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 13F_6 + 8F_5 = 233.$

OBSERVAÇÃO: Podemos encontrar a Sequência de Fibonacci por toda parte, por exemplo:

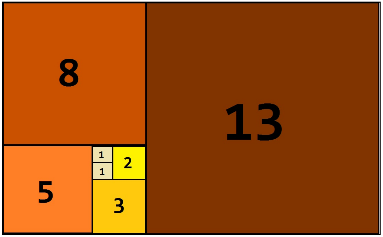
- Número de ouro(PROPORÇÃO ÁUREA): $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339....$
  A razão entre os números de Fibonacci tende a este valor, observe:
  $\frac{1}{1} = 1; \frac{2}{1} = 2; \frac{3}{2} = 1,5; \cdots ; \frac{233}{144} = 1,6180555; \cdots$
- Se assumirmos a codificação binária 0 e 1; tais que: $0 \to 1$ e $1 \to 10$; note como aparece a sequência de Fibonacci;
  $\underbrace{1}_{1} \to \underbrace{10}_{1\ \ 1} \to \underbrace{101}_{2\ \ 1} \to \underbrace{10110}_{3\ \ 2} \to \underbrace{10110101}_{5\ \ 3} \to \underbrace{1011010110110}_{8\ \ 5} \to \cdots$

EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Continuação)



EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Continuação)

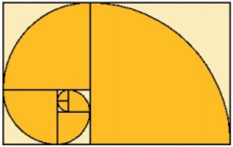
- O "Retângulo Áureo" :

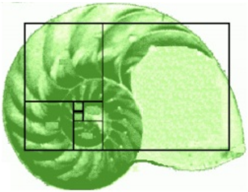


Começamos anexando dois quadrados com lado=1 $\Rightarrow$ um retângulo $2x1$, sendo o *lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores*. Anexamos agora outro quadrado com lado=2 (equivalente ao maior lado do retângulo $2x1$) $\Rightarrow$ um retângulo $3x2$. Se continuarmos a anexar quadrados com *lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos*, obteremos a sequência dos lados dos quadrados igual à série de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

EXEMPLO.5: "SEQUÊNCIA DE FIBONACCI" (Continuação)

- O "Retângulo Áureo" e o "Nautilus":





Se traçarmos com um compasso um quarto de círculo nos quadrados acima, obtemos uma ESPIRAL como a do nautilus marinho;

e esta forma espiralada também aparece na natureza como: galáxias, marfins de elefantes, flores, onda no oceano, etc.

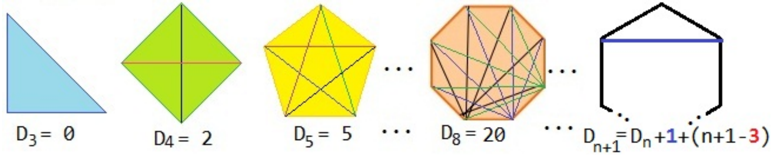
Recorrência Linear de 1^a ordem

$$\Delta_{n+1} T_{n+1} = \Delta_n T_n + f(n)$$

onde,

- os coeficientes são iguais: $\Delta_{n+1} = \Delta_n$;
- $f(n)$ é uma função em n podendo ser qualquer função linear ou não linear, ou até mesmo, ser uma função constante;
- "1^a ordem" porque a recorrência depende apenas de uma variável; e,
- "Linear" porque a equação é linear em T_n e T_{n+1}.

EXEMPLO.1: Número de diagonais do polígono convexo:



$$
\begin{array}{lll}
D_3 = & 0 & \text{Triângulo não tem diagonais} \\
D_4 = & 2 & = 0 + 1 + (4-3) \text{ Quadrado tem 2 diagonais} \\
D_5 = & 5 & = 2 + 1 + (5-3) \text{ Pentágono tem 5 diagonais} \\
D_6 = & 9 & = 5 + 1 + (6-3) \text{ Hexágono tem 9 diagonais} \\
D_7 = & 14 & = 9 + 1 + (7-3) \text{ Heptágono tem 14 diagonais} \\
D_8 = & 20 & = 14 + 1 + (8-3) \text{ Octágono tem 20 diagonais} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_n = & & D_{n-1} + 1 + (n-3) = D_{n-1} + (n-2) \text{ Polígono com } n \text{ vértices}
\end{array}
$$

Assim, obtemos uma função de recorrência:

$$
\begin{cases}
D_3 = & 0 \\
D_{n+1} = & D_n + (n-1) \quad \text{para} \quad n \geq 3
\end{cases}
$$

EXEMPLO.1: Como determinar a "Fórmula Fechada da Recorrência" do número de diagonais do polígono convexo?
Se somarmos estes elementos, podemos cancelar alguns deles do seguinte modo;

$$
\begin{array}{lll}
\cancel{D_3} = & 0 & \\
\cancel{D_4} = & \cancel{D_3} + (3-1) & = 2 \\
\cancel{D_5} = & \cancel{D_4} + (4-1) & = 5 \\
\cancel{D_6} = & \cancel{D_5} + (5-1) & = 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
D_n = & \cancel{D_{n-1}} + (n-2) & =? \\
\hline
\end{array}
$$

$$D_n = 0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)$$

Observação: Note que chegamos numa progressão aritmética com $n-3$ termos, visto que, $D_3 = 0$ não interfere na soma. Logo, a fórmula fechada é

$$D_n = (n-3)\frac{(n-2)+2}{2} = \frac{n(n-3)}{2}; n \geq 3$$

A fórmula fechada é $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$; $n \geq 3$

Prova por INDUÇÃO: $2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) = \frac{n(n-3)}{2}$; $n > 3$

(i) PASSO BÁSICO: $P(4) : \frac{4(4-3)}{2} = 2$; "verdadeiro";

(ii) HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $P(n) : \frac{n(n-3)}{2}$; $n > 3$ é verdadeira;
PASSO INDUTIVO: $P(4) \wedge \cdots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$.
Vamos verificar a validade de
$P(n+1) : 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.
então, $P(n+1) : \underbrace{2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)}_{\frac{n(n-3)}{2}} + (n-1) ==$

$\frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-3)+2(n-1)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.
Vale então para $P(n+1) \Rightarrow$ vale $\forall n > 3$

EXEMPLO.2:

$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ a_{n+1} = & a_n + 8n \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Qual a Fórmula Fechada da Recorrência:

$$\begin{array}{lll} a_1 = & 1 & = 1 \\ a_2 = & a_1 + 8(1) & = 9 \\ a_3 = & a_2 + 8(2) & = 25 \\ a_4 = & a_3 + 8(3) & = 49 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n = & a_{n-1} + 8(n-1) & =? \end{array}$$

EXEMPLO.2:
$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ a_{n+1} = & a_n + 8n \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$$
Qual a Fórmula Fechada da Recorrência:
$$\begin{array}{lll} \cancel{a_1} = & 1 & = 1 \\ \cancel{a_2} = & \cancel{a_1} + 8(1) & = 9 \\ \cancel{a_3} = & \cancel{a_2} + 8(2) & = 25 \\ \cancel{a_4} = & \cancel{a_3} + 8(3) & = 49 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n = & \cancel{a_{n-1}} + 8(n-1) & =? \end{array}$$

$a_n = 1 + 8 + 16 + 24 + \ldots + 8(n-1) = 1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1))$
$a_n = 1 + 8((n-1)\frac{(n-1)+1}{2}) = 1 + 8((n-1)\frac{n}{2}) = 1 + 4n(n-1)$
Logo, a fórmula fechada é
$$a_n = 1 + 4n(n-1); n \geq 1.$$

Recorrências e Fórmula Fechada

A fórmula fechada é $a_n = 1 + 4n(n-1); n \geq 1$
Prova por INDUÇÃO:
$1 + 8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 1 + 4n(n-1); n \geq 1$
$8 + 16 + 24 + \cdots + 8(n-1) = 4n(n-1); n > 1$

(i) Passo Básico: $P(2) : 8 = 4.2(2-1) = 8$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(n) : 4n(n-1); n > 1$ é verdadeira;
Passo indutivo: $P(2) \wedge \cdots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$.
Vamos verificar a validade de
$P(n+1) : \underbrace{8 + 16 + 24 + 32 + \cdots + 8(n-1)}_{4n(n-1)} + 8(n)$
$P(n+1) : 4n(n-1) + 8n = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$.
Vale então para $P(n+1) \Rightarrow$ vale $\forall n > 1$

Recorrência Linear de 1ª ordem com coeficientes distintos

$$\Delta_{n+1} T_{n+1} = \Delta_n T_n + f(n)$$

onde,

- $\Delta_{n+1} \neq \Delta_n$;
- $f(n)$ é uma função em n podendo ser qualquer função linear ou não linear, ou até mesmo, ser uma função constante;
- "1ª ORDEM" porque a recorrência depende apenas de uma variável; e,
- "Linear" porque a equação é linear em T_n e T_{n+1}.

EXEMPLO.3:

"Torre de Hanoi" $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_{n+1} = & 2x_n + 1 \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= & 1 & = 1 \\
x_2 &= & 2x_1 + 1 & = 3 \\
x_3 &= & 2x_2 + 1 & = 7 \\
x_4 &= & 2x_3 + 1 & = 15 \\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
x_{n-2} &= & 2x_{n-3} + 1 & \\
x_{n-1} &= & 2x_{n-2} + 1 & \\
x_n &= & 2x_{n-1} + 1 &
\end{aligned}
$$

EXEMPLO.3:
Observe que agora precisamos igualar os coeficientes a fim de simplificar os termos semelhantes.
Começaremos igualando os coeficientes de baixo para cima do seguinte modo;

$$\begin{array}{rrr}
2^{n-1}x_1 = & 2^{n-1}1 & = 1 \\
2^{n-2}x_2 = & 2^{n-2}2x_1 + 2^{n-2}1 & = 3 \\
2^{n-3}x_3 = & 2^{n-3}2x_2 + 2^{n-3}1 & = 7 \\
2^{n-4}x_4 = & 2^{n-4}2x_3 + 2^{n-4}1 & = 15 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2^2x_{n-2} = & 2^2 2x_{n-3} + 2^2 1 & \\
2x_{n-1} = & 2.2x_{n-2} + 2.1 & \\
x_n = & 2x_{n-1} + 1 &
\end{array}$$

EXEMPLO.3:

$$\begin{array}{rcrr}
\cancel{2^{n-1}x_1} & = & 2^{n-1}1 & = 1 \\
\cancel{2^{n-2}x_2} & = & \cancel{2^{n-1}x_1} + 2^{n-2}1 & = 3 \\
\cancel{2^{n-3}x_3} & = & \cancel{2^{n-2}x_2} + 2^{n-3}1 & = 7 \\
\cancel{2^{n-4}x_4} & = & \cancel{2^{n-3}x_3} + 2^{n-4}1 & = 15 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\cancel{2^2x_{n-2}} & = & \cancel{2^3x_{n-3}} + 2^21 & \\
\cancel{2x_{n-1}} & = & \cancel{2^2x_{n-2}} + 2.1 & \\
x_n & = & \cancel{2x_{n-1}} + 1 &
\end{array}$$

$x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$

$x_n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1; n \geq 1$

A fórmula fechada é $x_n = 2^n - 1; n \geq 1$
Prova por INDUÇÃO:
$2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1; n \geq 1$

(i) Passo Básico: $P(1) : 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução:
$P(n) : 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1; n \geq 1$ é verdadeira;
Passo indutivo: $P(n+1) : 2^n + \underbrace{2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1}_{2^n - 1} =$

$2^n + 2^n - 1 = 2^n(1+1) - 1 = 2^{n+1} - 1$
logo, vale para $P(n+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 1$

EXEMPLO.4:

$$\begin{cases} x_1 = & 2 \\ x_n = & 3x_{n-1} + 5 \quad \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lccr} x_1 = & 2 & = 2 \\ x_2 = & 3x_1 + 5 & = 9 \\ x_3 = & 3x_2 + 5 & = 25 \\ x_4 = & 3x_3 + 5 & = 49 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n = & 3x_{n-1} + 5 & =? \end{array}$$

"Procederemos agora como no exemplo anterior: igualamos os coeficientes e cancelamos os termos semelhantes".

EXEMPLO.4:

$$
\begin{aligned}
3^{n-1}x_1 &= & 3^{n-1}2 & \quad = 2 \\
3^{n-2}x_2 &= & 3^{n-2}3x_1 + 3^{n-2}5 & \quad = 9 \\
3^{n-3}x_3 &= & 3^{n-3}3x_2 + 3^{n-3}5 & \quad = 25 \\
3^{n-4}x_4 &= & 3^{n-4}3x_3 + 3^{n-4}5 & \quad = 49 \\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
3^2x_{n-2} &= & 3^2 3x_{n-3} + 3^2 5 & \\
3x_{n-1} &= & 3.3x_{n-2} + 3.5 & \\
x_n &= & 3x_{n-1} + 5 &
\end{aligned}
$$

Exemplo.4:

$$
\begin{aligned}
\cancel{3^{n-1}x_1} &= & 3^{n-1}2 & \quad = 2 \\
\cancel{3^{n-2}x_2} &= & \cancel{3^{n-1}}x_1 + 3^{n-2}5 & \quad = 9 \\
\cancel{3^{n-3}x_3} &= & \cancel{3^{n-2}}x_2 + 3^{n-3}5 & \quad = 25 \\
\cancel{3^{n-4}x_4} &= & \cancel{3^{n-3}}x_3 + 3^{n-4}5 & \quad = 49 \\
&\vdots & \vdots & \quad \vdots \\
\cancel{3^{2}x_{n-2}} &= & \cancel{3^{3}}x_{n-3} + 3^{2}5 & \\
\cancel{3x_{n-1}} &= & \cancel{3^{2}}x_{n-2} + 3.5 & \\
x_n &= & \cancel{3x_{n-1}} + 5 &
\end{aligned}
$$

$x_n = 2.3^{n-1} + 5.3^{n-2} + \cdots + 5.3^2 + 5.3 + 5$

$x_n = 2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1)$

$x_n = 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2}); n \geq 1$

Recorrências e Fórmula Fechada

A fórmula fechada é $P(n) : 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2}); n \geq 1$
Prova por INDUÇÃO:
$2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1) = 2.3^{n-1} + 5(\frac{3^{n-1}-1}{2})$
$3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{n-1}-1}{2}; n \geq 2$

(i) Passo Básico: $P(2) : 3^{2-2} = \frac{3^{2-1}-1}{2} \Rightarrow 1 = 1$; "verdadeiro";

(ii) Hipótese de Indução: $P(n) : 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{n-1}-1}{2}$ é verdadeira;
Passo indutivo: $P(n+1) : \underbrace{3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3 + 1}_{\frac{3^{n-1}-1}{2}} + 3^{n-1} =$

$\frac{3^{n-1}-1+2.3^{n-1}}{2} = \frac{3^{n-1}(1+2)-1}{2} = \frac{3^{n-1}.3-1}{2} = \frac{3^n-1}{2}$;
então, vale para $P(n+1) \Rightarrow$ vale $\forall n \geq 2$

Exercícios

1. Encontre a fórmula fechada para a soma dos n primeiros números naturais.

2. Encontre $f(1), f(2), f(3), f(4)$; $f(0) = 1$ nos itens abaixo:
   (a) $f(n+1) = f(n) + 2$
   (b) $f(n+1) = 3f(n)$

3. Dê uma definição recursiva da sequência (a_n); $n = 1, 2, 3, \cdots$, se;
   (a) $a_n = 2n + 1$
   (b) $a_n = 4n - 2$

4. Encontre a fórmula fechada para a seguinte soma telescópica: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$.