Geometria Analítica

Transformação de Coordenadas no Plano e Cônicas

Adriano Cattai
http://cattai.mat.br/ufba/ga

Departamento de Matemática – DMAT/UFBA
Departamento de Ciências Exatas e da Terra – DCET/UNEB

Sumário

Apresentação

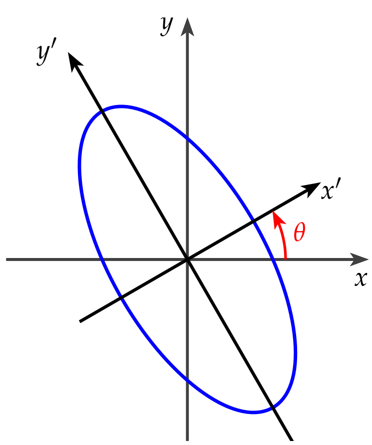
Agradeço pelas sugestões contribuindo com as correções (de digitação) e na apresentação das ideias básicas do conteúdo que estamos interessados em aprender.

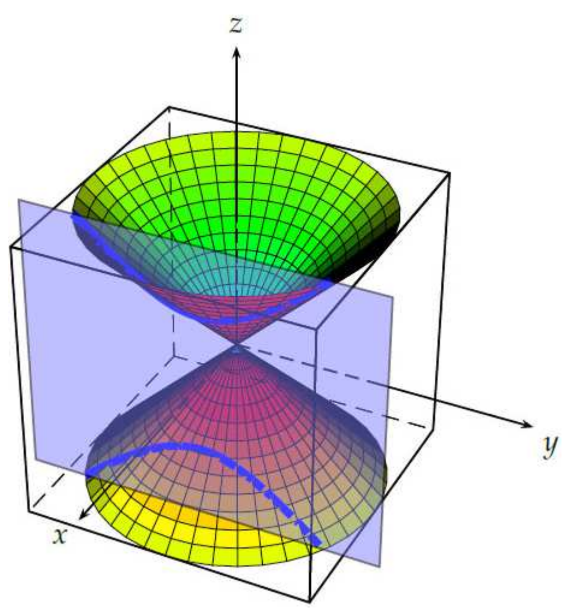
Importante observar:

- ✓ Este material **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;
- ✓ Estas notas serão nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos conteúdos que iremos conversar em nossas "saborosas" aulas de GA;
- ✓ Importante prestar muita atenção com a notação utilizada. A matemática uitliza-se de uma linguagem própria, por isso, curta-a!

Na primeira parte desta apostila apresentamos as **transformações de coordenadas no plano**, cuja principal aplicação é a simplificação das equações pela escolha conveniente de novos eixos. Estudaremos dois casos de transformação de coordenadas: *Translação dos Eixos Coordenados* e *Rotação dos Eixos Coordenados*.

Na segunda parte, estudaremos as **(seções) cônicas**, curvas planas que são obtidas da interseção de um cone circular com um plano. Estudaremos a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas de **cônicas não degeneradas**. Vamos definí-las em termos de lugares geométricos e estabeleceremos suas equações padrão. As outras cônicas, que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas **cônicas degeneradas**.





Texto composto em LaTeX 2_ε, Cattai, 11 de março de 2019

Transformação de Coordenadas no Plano: Translação e Rotação

1.1 *O Sistema de Coordenadas Cartesianas*

Deve-se a René Descartes (1596 – 1650), matemático e filósofo francês, o estabelecer da correspondência biunívoca entre pontos de um plano e pares de números reais, assim como entre pontos do espaço e ternos de números reais. Esse fato deu origem aos que chamamos de Geometria Analítica. Graças a este princípio é que podemos, por exemplo, interpretar o comportamento de uma função através do seu gráfico num sistema de coordenadas cartesianas.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, se $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado*, denotado por (a, b), onde primeiro elemento é $a \in A$, e o segundo elemento é $b \in B$. O *produto cartesiano* de A por B é o conjunto de todos esses pares ordenados e será indicado por $A \times B$. Em símbolos, escrevemos:

$$A \times B = \{(a, b); x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

1.1 Observação.

(i) Dados $(a, b), (c, d) \in A \times B$, temos:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b \text{ e } c = d.$$

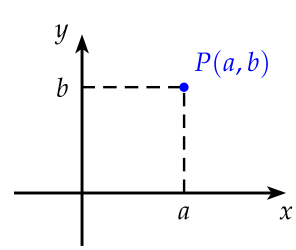
Assim por exemplo, $(5, 2)$ e $(2, 5)$ são pares ordenados distintos;

(ii) Quando $A = B$, o cartesiano $A \times B$ é o cartesiano $A \times A = A^2$;

Podemos fazer a representação gráfica do seguinte modo. Consideremos dois eixos Ox e Oy perpendiculares em O, os quais determinam um plano. Um horizontal, que será chamada o eixo das *abscissas* (ou eixo-x), e o outro vertical, o eixo das *ordenadas* (ou eixo-y). Interpretamos cada uma dessas retas como cópias de uma reta real, de tal forma que as origens de cada uma dessas cópias correspondam ao ponto de interseção dos eixos, que será chamado de origem do sistema cartesiano.

Os números reais positivos correspondem, na reta vertical, aos pontos da semi-reta superior, e na reta horizontal aos pontos da semi-reta à direita da origem. O *Plano Cartesiano* é o plano gerado por essas duas retas perpendiculares, ou seja, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Ele auxilia no processo de construção de pontos e de lugares geométricos. Este sistema divide o plano em quatro regiões as quais chamamos de quadrantes.

Dado o par ordenado (a, b), localizamos no eixo horizontal o ponto que corresponde ao número real a, e no eixo vertical o ponto que corresponde ao número real b. Conforme a figura ao lado, localizamos o ponto P de coordenadas a e b.



1.2 *Transformação de coordenadas no* $\mathbb{R}^2$

Frequentemente, em Geometria Analítica, somos levados a passar de um sistema de coordenadas adotado inicialmente (*antigos eixos*) para outro mais conveniente (*novos eixos*). Essa maior conveniência pode ser devida a vários fatores, por exemplo: se o primeiro sistema não for ortogonal pode surgir à necessidade de mudar para um sistema ortogonal; outras vezes, o objetivo é simplificar os cálculos algébricos, ou explorar melhor certas simetrias, etc. O problema central será sempre estabelecer relações entre as "antigas" e as "novas" coordenadas. Esse problema se resolve pela dedução de fórmulas, denominadas *fórmulas de transformação de coordenadas*, que relacionam as coordenadas de um ponto qualquer do plano, referidas ao primeiro sistema, com as coordenadas do mesmo ponto referidas ao segundo sistema.

A principal aplicação da transformação de coordenadas é a simplificação das equações pela escolha conveniente de novos eixos.

1.2 Definição (Transformação de coordenadas)**.** Uma *transformação de coordenadas* é uma operação a qual modifica uma expressão, relação ou figura e tem como objetivo simplificar equações.

Estudaremos dois casos de transformação de coordenadas:

(i) Translação dos Eixos Coordenados;

(ii) Rotação dos Eixos Coordenados.

1.2.1 *Translação dos Eixos Coordenados*

Motivação:

Consideremos uma circunferência de raio $r \neq 0$ cuja equação é dada na forma padrão

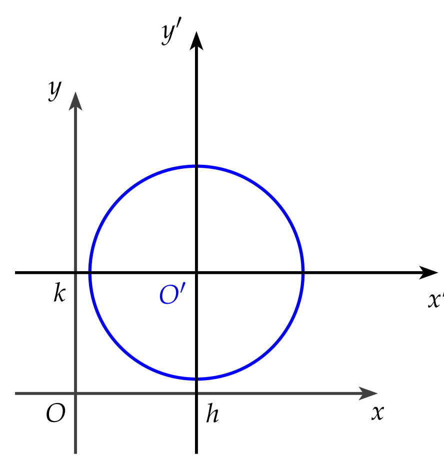
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{1.1}$$

em que as coordenadas (h, k) do centro O' são ambas diferentes de zero.

Se esta circunferência é mudada de posição, sendo colocada com seu centro na origem $O(0,0)$, sua equação assume a forma canônica mais simples

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos, no entanto, produzir o mesmo efeito sem mover a figura. Em vez disso, podemos mover os eixos coordenados paralelamente a si mesmo, respectivamente, no plano coordenado de maneira que a origem O coincida com o centro $O'(h,k)$ da circunferência e os eixos coordenados tomam as posições paralelas designadas pelos novos eixos, conforme a figura ao lado.



As coordenadas de um ponto P na circunferência são (x, y) quando referidas aos eixos originais, mas evidentemente são diferentes quando referidas aos novos eixos, e designaremos por (x', y'). Então a equação da circunferência referida aos novos eixos é dada pela forma canônica

$$x'^2 + y'^2 = r^2. \tag{1.2}$$

Vemos, então, que movendo os eixos coordenados paralelamente a si mesmo, respectivamente, transformamos as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer sobre a circunferência nas coordenadas (x', y'), e como consequência, transforma a equação (1.1) na forma (1.2) que claramente é mais simples. Nesse sentindo, estabelecemos a seguinte definição:

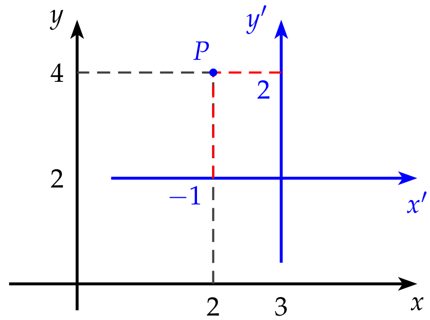
1.3 Definição (Translação dos eixos coordenados)**.** A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectivamente e semelhantemente orientados, é denominada *translação dos eixos coordenados*.

Exemplo 1. O ponto $P(2, 4)$ tem coordenadas $(x', y') = (-1, 2)$ num sistema $x'y'$ com origem $O'(3, 2)$.

Note que:

$$\begin{cases} 2 &= -1 + 3 \\ 4 &= 2 + 2 \end{cases}.$$

Nos sugerindo que $\begin{cases} x = x' + k \\ y = y' + h \end{cases}$.



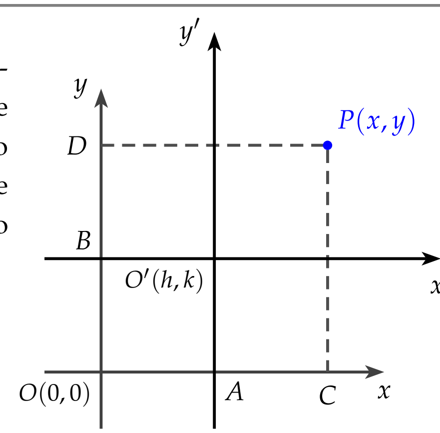
A fim de simplificar equações por translação dos eixos coordenados necessitaremos do seguinte teorema:

1.4 Teorema. Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $O'(h, k)$ e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da translação dos eixos são (x, y) e (x', y'), respectivamente, então as equações de translação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}.$$

Prova: Consideremos no plano xy um ponto $O'(h, k)$, arbitrário e introduzamos um novo sistema de coordenadas $x'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema xy são x e y e, em relação ao sistema $x'y'$ são x' e y'. Desta forma e de acordo com a figura, temos:

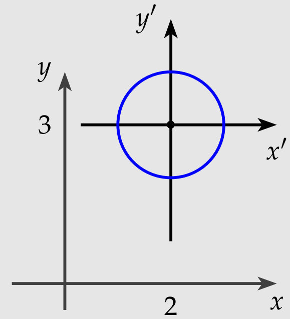
$$\begin{cases} x = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = x' + h \\ y = \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = y' + k \end{cases}$$



Exemplo 2. Por meio de uma translação de eixos, transforme a equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ em outra mais simples à nova origem $O'(2, 3)$.

Solução: Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + 2$ e $y = y' + 3$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$
\begin{aligned}
(x'+2)^2 + (y'+3)^2 - 4(x'+2) - 6(y'+3) + 12 &= 0 \\
x'^2 + 4x' + 4 + y'^2 + 6y' + 9 - 4x' - 8 - 6y' - 18 + 12 &= 0 \\
x'^2 + y'^2 - 1 &= 0.
\end{aligned}
$$



Ou seja, após transformação chegamos a $x'^2 + y'^2 = 1$.

Note que esta última equação é claramente mais simples e que podemos fazer rapidamente o desenho do seu lugar geométrico em relação aos novos eixos, por se tratar de uma circunferência de raio 1.

Exemplo 3. Por meio de uma translação de eixos transforme a equação

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$$

em outra mais simples à nova origem $(1, 2)$.

Solução: Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + 1$ e $y = y' + 2$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$(x'+1)^3 - 3(x'+1)^2 - (y'+2)^2 + 3(x'+1) + 4(y'+2) - 5 = 0$$

em que desenvolvendo e simplificando chegamos a $x'^3 - y'^2 = 0$ que é, claramente, uma equação mais simples.

1.5 Observação. Nos exemplos acima, a nova origem foi especificada. Usualmente, as coordenadas da nova origem não são dadas, mas devem ser determinada. Vejamos com exemplos como encontrar essa nova origem.

Exemplo 4. Por meio de uma translação de eixos, transforme cada equação em outra desprovida de termos de primeiro grau.

(a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$;

(b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$.

Solução:

(a) Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$
\begin{aligned}
(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 4(x'+h) - 6(y'+k) + 12 &= 0 \\
x'^2 + 2hx' + h^2 + y'^2 + 2ky' + k^2 - 4x' - 4h - 6y' - 6k + 12 &= 0 \\
x'^2 + y'^2 + (2h-4)x' + (2k-6)y' + h^2 + k^2 - 4h - 6k + 12 &= 0. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Como devemos encontrar os valores de h e k tal que a equação seja desprovida dos termos de primeiro grau, igualaremos a zero os coeficientes de x' e y' na última equação. Portanto,

$$\begin{cases} 2h - 4 = 0 \\ 2k - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Dessa forma, a nova origem é o ponto $O'(2,3)$ e, substituindo esses valores em (1.3), obtemos a equação simplificada $x'^2 + y'^2 = 1$, que representa uma circunfrência de raio 1, como vimos no Exemplo 2.

(b) Pelo Teorema 1.4, as equações de transformação são $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$(x'+h)^2 - 4(y'+k)^2 + 6(x'+h) + 8(y'+k) + 1 = 0$$

que, após desenvolvimentos e redução de termos semelhantes assume a forma

$$x'^2 - 4y'^2 + (2h+6)x' - (8k-8)y' + h^2 - 4k^2 + 6h + 8k + 1 = 0. \tag{1.4}$$

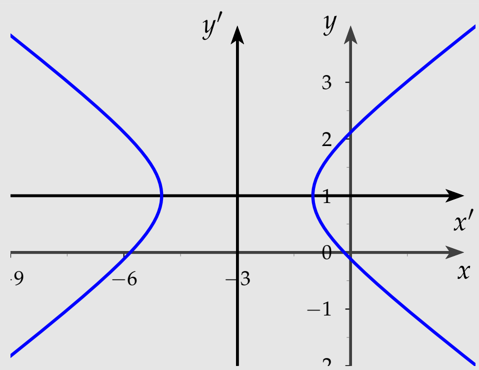
Como devemos encontrar os valores de k e h tal que a equação seja desprovida dos termos de primeiro grau, igualaremos a zero os coeficientes de x' e y' na última equação. Portanto,

$$\begin{cases} 2h+6=0 \\ 8k-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=-3 \\ k=1 \end{cases}$$

Dessa forma, a nova origem é o ponto $O'(-3,1)$ e, substituindo esses valores em (1.4), obtemos a equação procurada

$$x'^2 - 4y'^2 = 4 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1.$$

que é uma hipérbole, como veremos ao estudarmos as cônicas.



1.6 Observação. Note que nesse último exemplo, as equações estão desprovidas do termo misto de segundo grau xy que, de certa forma, facilitou nosso trabalho. No caso que equações do segundo grau estiverem desprovidas desse termo é possível também, em alguns casos, efetuar a transformação pelo método de *completar os quadrados*. Ou seja, podemos obter a partir da expressão $x^2 + bx$ o trinômio quadrado perfeito $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2$ se adicionarmos o termo $\dfrac{b^2}{4}$. Assim completando quadrado em $(x^2+6x) - (4y^2 - 8y) = -1$, temos

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 9 - 4 \cdot (-1) = -1$$

ou ainda, $(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 4$. Fazendo as substituições $x' = x+3$ e $y' = y-1$, obtemos a equação $x'^2 - 4y'^2 = 4$ e claramente as equações de translação são dadas por $x = x' - 3$ e $y = y' + 1$, como tínhamos obtido no exemplo anteriormente.

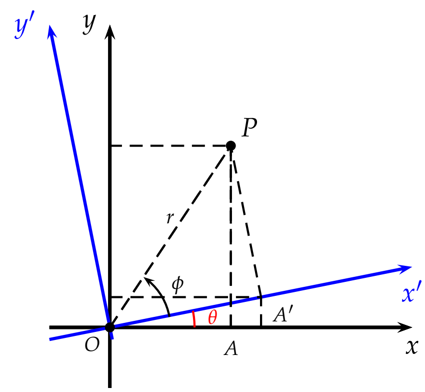
Podemos notar que a principal aplicação de Translação dos Eixos Coordenados é a remoção dos termos de primeiro grau. Vejamos então, o segundo caso de Transformação de transformação de coordenadas.

1.2.2 *Rotação dos Eixos Coordenados*

1.7 Definição (Rotação dos eixos coordenadoss)**.** A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos eixos possuam a mesma origem, é denominado *rotação dos eixos coordenados*.

Vejamos como é dada essa rotação a fim de simplificar equações.

Consideremos o plano xy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy.



Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema Oxy são x e y e, em relação aos sistemas $O'x'y'$ são x' e y'. Desta forma e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x' = \overline{OA'} = r\cos(\phi) \\ y' = \overline{A'P} = r\,\mathrm{sen}(\phi) \end{cases} \tag{1.5}$$

e

$$\begin{cases} x = \overline{OA} = r\cos(\theta+\phi) = r\cos(\theta)\cos\phi - r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}\,\phi \\ y = \overline{AP} = r\,\mathrm{sen}(\theta+\phi) = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos\phi + r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases} \tag{1.6}$$

Portanto, substituindo-se (1.5) em (1.6) temos:

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x'\,\mathrm{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases}$$

que são as equações de rotação. Acabamos de provar o seguinte teorema:

1.8 Teorema. Se girarmos os eixos coordenados de um ângulo θ em torno de sua origem O e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da rotação dos eixos são (x, y) e (x', y'), respectivamente, então as equações de rotação das antigas para as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x'\,\mathrm{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases}$$

Sob forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ é a matriz rotação sob o ângulo θ.

1.9 Observação. As equações de rotação nos dão as antigas coordenadas em função das novas. Para obter as novas em função das antigas, basta resolver em relação a x e y o sistema por elas formado. Pela regra de Cramer, temos:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & -\mathrm{sen}(\theta) \\ y & \cos(\theta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}} = x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & x \\ \mathrm{sen}(\theta) & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}} = -x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)$$

Essas duas fórmulas querem dizer que, para obter as novas coordenadas em função das antigas, basta inverter, nas equações de rotação, a posição de x com x', y com y' e trocar θ por $-\theta$.

Exemplo 5. Determinar as novas coordenadas do ponto $P(3, -4)$ quando os eixos coordenados são girados $45°$.

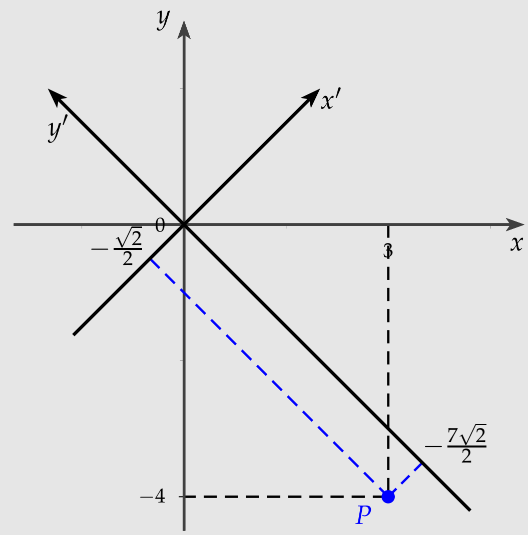
Solução: Pelo Teorema 1.8, temos:

$$\begin{cases} 3 &= x'\cos 45° - y'\,\text{sen}\,45° \\ -4 &= x'\,\text{sen}\,45° + y'\cos 45° \end{cases}$$

e, pela observação 1.9,

$$\begin{cases} x' &= 3\cos(-45°) + 4\,\text{sen}(-45°) \\ &= 3\cos(45°) - 4\,\text{sen}(45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= 3\,\text{sen}(-45°) - 4\cos(-45°) \\ &= -3\,\text{sen}(45°) - 4\cos(45°) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Daí, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ são as novas coordenadas do ponto P.



Exemplo 6. Transformar $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$, por rotação de eixos coordenados de um ângulo de $30°$.

Solução: As equações de transformação são

$$\begin{cases} x = x'\cos(30°) - y'\,\text{sen}(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = x'\,\text{sen}(30°) + y'\cos(30°) = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo estes valores de x e y na equação obtemos,

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4.$$

Após desenvolvimento e simplificação, obtemos a equação $5x'^2 + y'^2 = 8$, que é uma elipse.

1.10 Observação. Neste último exemplo, o ângulo de rotação foi dado. Geralmente o ângulo de rotação deve ser determinado a fim de alcançar alguma condição estabelecida.

Exemplo 7. Por uma rotação de eixos coordenados, transformar a equação

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$$

em outra desprovida do termo misto de grau 2.

Solução: Substituindo na equação as equações de transformação, temos

$$3\left(x'\cos(\theta) - y'\,\text{sen}(\theta)\right)^2 - 2(x'\cos(\theta) - y'\,\text{sen}(\theta))(x'\,\text{sen}(\theta) + y'\cos(\theta)) + 3\left(x'\,\text{sen}(\theta) + y'\cos(\theta)\right)^2 = 16.$$

Desenvolvendo e pondo x'^2, y'^2 e $x'y'$ em evidência, ficamos com:

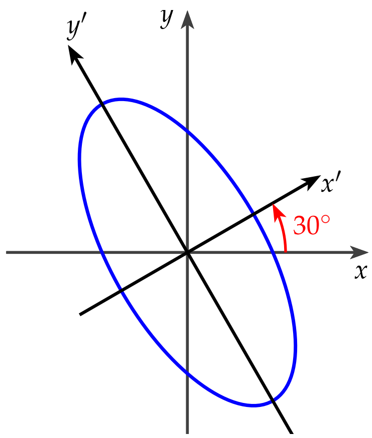
$$\begin{aligned} x'^2(3\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 3\operatorname{sen}^2(\theta)) + x'y'\big(-6\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 2\operatorname{sen}^2(\theta) - 2\cos^2(\theta) \\ +6\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\big) + y'^2(3\operatorname{sen}^2(\theta) + 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 3\cos^2(\theta)) &= 16 \end{aligned}$$

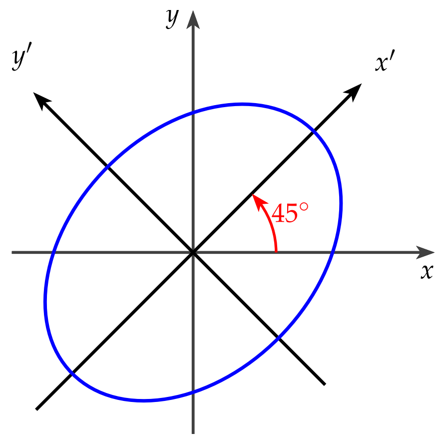
e, como queremos eliminar o termo $x'y'$ dessa última equação, faremos o coeficiente desse termo igual a zero, ou seja:

$$-6\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 2\operatorname{sen}^2(\theta) - 2\cos^2(\theta) + 6\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) = 0.$$

Portanto $2\operatorname{sen}^2(\theta) = 2\cos^2(\theta)$, daí $\theta = 45°$. Usando este ângulo, obtemos $2x'^2 + 4y'^2 = 16$, ou simplesmente $x'^2 + 2y'^2 = 8$. Como no exemplo anterior, também é uma elipse.

Abaixo, vemos as rotações dos eixos, sob $30°$ e $45°$, respectivamente, referentes aos exemplos 6 e 7. Note que, após a rotação, transformamos as equações para uma forma mais simples, de fácil identificação.





Esses dois últimos exemplos, serviram para ilustrar que a principal aplicação de Rotação dos Eixos Coordenados é a remoção do termo misto de segundo grau.

Observamos que, em geral, aplicar as equações de rotação, para uma dada equação do segundo grau a duas varáveis xy, é muito trabalhoso e demorado. O teorema que segue estabelece critérios de como obter o ângulo de rotação dos eixos coordenados sem precisar fazer todas as contas feitas no Exemplo 7.

1.11 Teorema. A equação geral do segundo grau nas variáveis x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $B \neq 0$ pode ser sempre transformada na equação

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde falta o termo $x'y'$, por rotação dos eixos coordenados do ângulo agudo positivo θ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{B}{A-C} \quad \text{se} \quad A \neq C \\ \theta &= 45° \quad \text{se} \quad A = C \end{aligned}.$$

Prova: Aplicando as equações de rotação, $x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta)$ e $y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} A\,(x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta))^2 + B(x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta))(x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta)) + C\,(x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta))^2 \\ +D(x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta)) + E(x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta)) + F = 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo as operações indicadas e reduzindo os termos semelhantes nesta última equação, chegamos a

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{1.7}$$

em que

$$\begin{cases} A' = A\cos^2(\theta) + B\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + C\operatorname{sen}^2(\theta) \\ B' = 2(C-A)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + B\left(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\right) \\ C' = A\operatorname{sen}^2(\theta) - B\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta) \\ D' = D\cos(\theta) + E\operatorname{sen}(\theta) \\ E' = E\cos(\theta) - D\operatorname{sen}(\theta) \\ F' = F \end{cases} \tag{1.8}$$

Para que a equação (1.7) seja desprovida do termo misto de grau 2, o coeficiente B' deve ser nulo, portanto, devemos ter

$$2(C-A)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + B\left(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\right) = 0.$$

Como $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$ e $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$ podemos reescrever esta última equação como

$$(C-A)\operatorname{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0.$$

Temos dois casos a analisar:

(i) Se $A \neq C$, então $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{B}{A-C}$;

(ii) Se $A = C$, então $\cos(2\theta) = 0$, visto que $B \neq 0$. Logo $2\theta = 90°$ e $\theta = 45°$.

Exemplo 8. Por uma rotação de eixos coordenados, transformar as equações em outras desprovidas do termo misto de grau 2.

(a) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$; (b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 16$; (c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$.

Solução:

(a) Temos $A = 2$, $B = \sqrt{3}$, $C = 1$ e $F = -4$, e como $A \neq C$, pelo Teorema 1.11, $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}$. Logo $\theta = 30°$. Usando as equações dadas em (1.8), temos que:

$$A' = \frac{5}{2},\ B' = 0,\ C' = \frac{1}{2},\ D' = 0,\ E' = 0,\ F' = -4.$$

Assim, obtemos $\dfrac{5}{2}x'^2 + \dfrac{1}{2}y'^2 = 4$, ou ainda, $5x'^2 + y'^2 = 8$.

(b) Temos $A = 3 = C$, logo $\theta = 45°$ e, analogamente, temos $x'^2 + 2y'^2 = 8$.

(c) Temos $A = 9$, $B = -24$, $C = 16$, $D = -40$, $E = -30$ e $F = 0$, e como $A \neq C$, temos $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{-24}{9-16} = \dfrac{24}{7}$.

Neste caso, recorrendo às relações métricas no triângulo retângulo, vemos um triângulo retângulo de catetos 24 e 7 e, por Pitágoras, obtemos hiponetusa 25. Daí, pela definição de seno e cosseno, temos

$\text{sen}(2\theta) = \dfrac{24}{25}$ e $\cos(2\theta) = \dfrac{7}{25}$. Pelas seguintes identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

obtemos $\text{sen}(\theta) = \pm\dfrac{3}{5}$ e $\cos(\theta) = \pm\dfrac{4}{5}$. Considerando $0 < \theta < 90°$, as equações de rotação são:

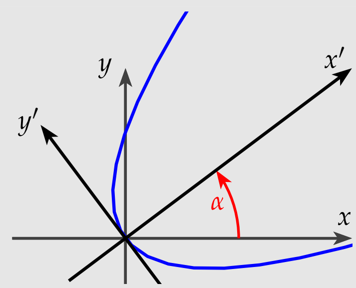
$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \quad \text{e} \quad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Substituindo na equação, temos a seguinte diversão:

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)^2 - 24\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) + 16\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right)^2 - 40\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right) & \\ -30\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) &= 0 \\ \frac{9}{25}\left(16x'^2 - 24x'y' + 9y'^2\right) - \frac{24}{25}\left(12x'^2 + 16x'y' - 9y'x' - 12y'^2\right) + \frac{16}{25}\left(9x'^2 + 24x'y' + 16y'^2\right) & \\ -32x' + 24y' - 18x' - 24y' &= 0. \end{aligned}$$

E, por um passe de mágica, chegamos em $y'^2 = 2x'$.

Note que $y'^2 = 2x'$ é a equação padrão de uma parábola no sistema $x'y'$, sob rotação de um ângulo α, como ilustra a figura ao lado.



1.2.3 *Aplicação: simplificação de equações por transformação de coordenadas*

Dada uma equação do segundo grau, vimos que a principal aplicação da translação dos eixos coordenados é eliminação dos termos de primeiro grau, e que a principal aplicação da rotação dos eixos coordenados é eliminação do termo misto do segundo grau. Ou seja, a principal aplicação da transformação de coordenadas é a simplificação das equações pela escolha conveniente dos eixos.

É natural inquirir se uma simplificação ainda maior pode ser alcançada para algumas equações realizando ambas as operações. Com isso, enunciaremos o seguinte teorema:

1.12 Teorema. Se os eixos coordenados são submetidos tanto a uma translação quanto a uma rotação, tomadas em qualquer ordem, e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y''), respectivamente, então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas finais são dadas por:

$$\begin{cases} x = x''\cos(\theta) - y''\,\text{sen}(\theta) + h \\ y = x''\,\text{sen}(\theta) + y''\cos(\theta) + k \end{cases}$$

em que θ é o ângulo de rotação e (h, k) são as coordenadas da nova origem referida aos eixos coordenados originais.

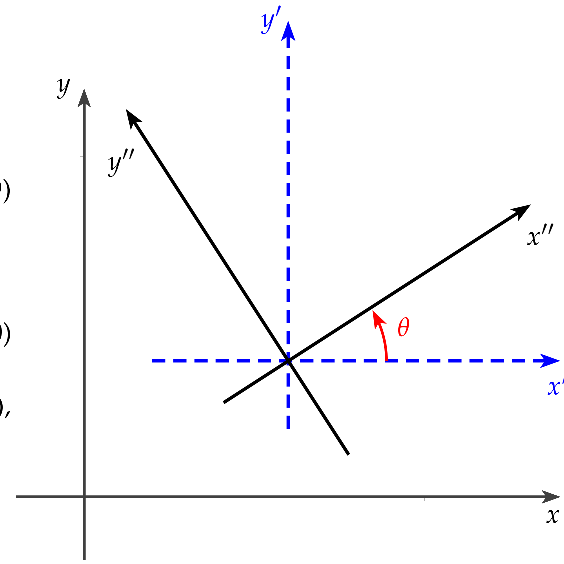
Prova: Consideremos primeiramente o caso em que uma translação dos eixos coordenados a uma nova origem $O'(h,k)$ é seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ, conforme a figura. Se P é um ponto qualquer no plano coordenado, sejam (x,y), (x',y') e (x'',y'') suas coordenadas quando referido, respectivamente, aos eixos originais, aos transladados e aos girados.

Então, pelos Teoremas 1.4 e 1.8 temos

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' + k \\ y = y' + h \end{array}\right. \tag{1.9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x''\cos(\theta) - y''\operatorname{sen}(\theta) \\ y' = x''\operatorname{sen}(\theta) + y''\cos(\theta) \end{array}\right. \tag{1.10}$$

Substituindo os valores de x' e y' dados em (1.10) em (1.9), obtemos as equações de transformação procuradas.



Fica como exercício a prova da situação invertida, ou seja, quando uma rotação é seguida por uma translação.

1.13 Observação. As equações do Teorema 1.12 podem ser empregados quando são realizadas tanto uma translação como uma rotação. Geralmente é mais simples realizar estas operações separadamente em duas etapas distintas, e este teorema mostra que a ordem é indiferente. Entretanto, no caso de uma equação de segundo grau em que os termos x^2, y^2 e xy formam um quadrado perfeito (por exemplo, $x^2 + 2xy + y^2$) é recomendado aplicar as equações de rotação primeiro, caso contrário as de translação.

Exemplo 9. Por transformação de coordenadas simplificar a equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$.

Solução: Como os termos de segundo grau não formam um quadrado perfeito, pelo que foi observado acima, vamos aplicar as equações de translação primeiro e obter uma nova origem $O'(h,k)$. Assim, temos:

$$3(x'+h)^2 - 2(x'+h)(y'+k) + 3(y'+k)^2 - 2(x'+h) - 10(y'+k) + 9 = 0.$$

Desenvolvendo, simplificando e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 + (6h - 2k - 2)x' + (-2h + 6k - 10)y' + 3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9 = 0.$$

A fim de eliminar os termos de grau um, temos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6h - 2k - 2 & = & 0 \\ -2h + 6k - 10 & = & 0 \end{array}\right.,$$

cuja solução é $h = 1$ e $k = 2$. Com esse valores, a equação fica transformada em $3x'^2 - 2x'y' + 3x'^2 - 2 = 0$. Agora, como $A' = C'$, pelo Teorema 1.11, temos que $\theta = 45°$. Daí, as equações de rotação são

$$\begin{cases} x' &= x''\cos(45°) - y''\,\text{sen}(45°) &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'' \\ x' &= x''\,\text{sen}(45°) + y''\cos(45°) &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'' \end{cases}.$$

Logo, após substituição e simplificação, obemos $x''^2 + 2y''^2 - 1 = 0$. Trata-se da equação de uma elipe, cujo centro está no ponto $(1, 2)$ e rotacionada $45°$.

Exemplo 10. Por translação dos eixos coordenados à nova origem $(1, 1)$, seguida de uma rotação dos eixos de um ângulo de $45°$ uma equação, no sistema xy, foi transfomada em $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Determine a equação no sistema xy.

Solução: Recorrendo à Observação 1.9, pág. 9, temos

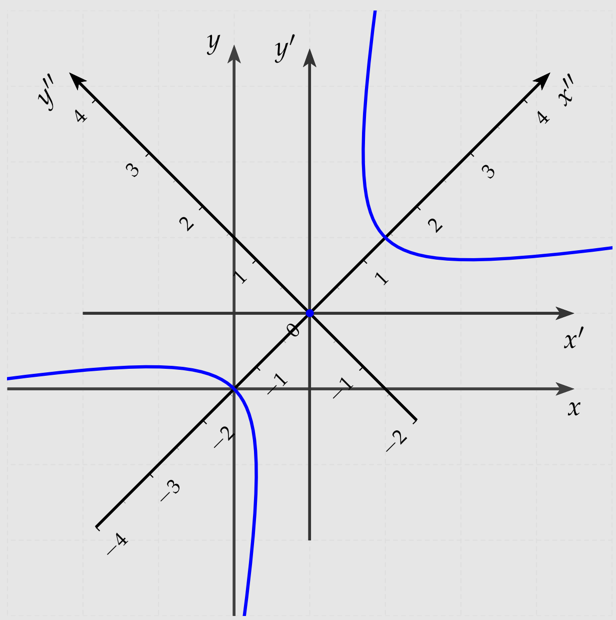
$$\begin{cases} x'' &= x'\cdot\cos(-45°) - y'\cdot\text{sen}(-45°) &= x'\cdot\cos(45°) + y'\cdot\text{sen}(45°) &= \dfrac{\sqrt{2}(x'+y')}{2} \\ y'' &= x'\cdot\text{sen}(-45°) + y'\cdot\cos(-45°) &= -x'\cdot\cos(45°) + y'\cdot\cos(45°) &= \dfrac{\sqrt{2}(-x'+y')}{2} \end{cases}.$$

Como as equações de translação são $x = x' + h = x' + 1$ e $y = y' + k = y' + 1$, podemos substituir nas anteriores:

$$\begin{cases} x'' &= \dfrac{\sqrt{2}(x+y-2)}{2} \\ y'' &= \dfrac{\sqrt{2}(y-x)}{2} \end{cases}.$$

Substituindo em $x''^2 - 2y''^2 = 2$, temos:

$$\frac{1}{2}(x+y-2)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(y-1)^2 = 2$$
$$\Downarrow$$
$$\vdots$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0.$$



Cônicas

Estudaremos as **(seções) cônicas**, curvas planas que são obtidas da interseção de um cone circular com um plano. Estudaremos a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas de **cônicas não degeneradas**. Vamos definí-las em termos de lugares geométricos e estabeleceremos suas equações padrão. As outras cônicas, que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas **cônicas degeneradas**.

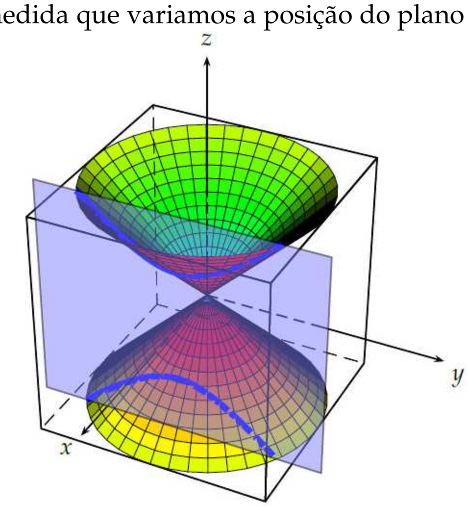
Veremos ainda que uma **(seção) cônica** é o lugar geométrico de uma equação geral do segundo grau, nas duas variáveis x e y, do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0 \text{ ou } B \neq 0 \text{ ou } C \neq 0.$$

2.1 Seções Cônicas

Considere e e g duas retas concorrentes, não perpendiculares, cuja intersecção é um ponto O. Mantenha fixa uma das retas, por exemplo e (eixo), e façamos girar 360° em torno desta, mediante um ângulo α constante, a outra reta g (geratriz). O objeto gerado é chamado de *superfície cônica formada por duas folhas* ou, simplesmente, *superfície cônica*, e separadas pelo vértice O.

O conjunto de pontos obtidos pela intersecção de um plano π com a superfície cônica é chamada de *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*. Ao seccionarmos uma superfície cônica por um plano arbitrário π, que não contém o vértice O, obteremos uma cônica dita *não degenerada* e, à medida que variamos a posição do plano de corte π, obtemos as seguintes cônicas não degeneradas:

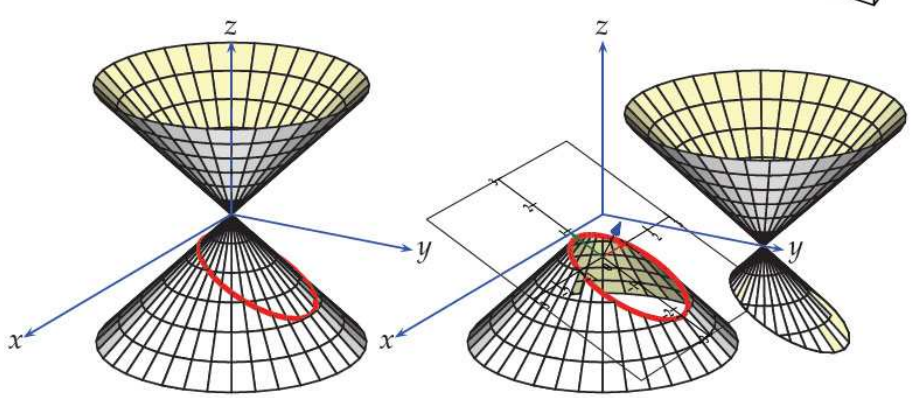


◇ ***Parábola:*** o plano π é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.

◇ ***Elipse:*** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície cônica;

  ◇ ***Circunferência:*** o plano π é perpendicular ao eixo e.

◇ ***Hipérbole:*** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície cônica.



Quando o plano π contém o vértice O da superfície, as cônica se degeneraram em:

◇ ***um ponto:*** se o plano π intercepta somente o vértice;

◇ ***uma reta:*** se o plano π contém somente uma geratriz;

◇ ***duas retas:*** se o plano π contém o eixo e.

As cônicas não degeneradas podem ser encontradas na natureza e por esse motivo foram objeto de estudo para diversos matemáticos. A elipse, por exemplo, corresponde à geometria das órbitas de alguns planetas e cometas. A hipérbole corresponde à geometria das trajetórias de alguns cometas e outros corpos celestes. A parábola corresponde à trajetória de um projétil lançado num campo gravitacional, o que se pode verificar com a trajetória de um jato d'água. A elipse pode ainda ser encontrada na forma da luz de uma lanterna projetada numa superfície plana. A circunferência, por sua vez, símbolo da perfeição na Grécia Antiga, pode ser encontrada nas ondas produzidas pela queda de uma pedra na superfície de um lago.

Igreja de São Francisco, Conjunto Arquitetônico da Pampulha, BH-MG

Na engenharia e arquitetura como no caso das pontes, cúpulas, torres e arcos, usam-se as cônicas devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907–2012) em muitas das suas obras, nota-se o traçado da tangência e concordância de arcos de circunferência e curvas cônicas, como a Igreja São Francisco de Assis, no Conjunto Arquitetônico da Pampulha em Belo Horizonte. Maiores informações, acesse http://www.niemeyer.org.br/.

A partir das cônicas podemos obter oarabolóides, elipsóides ou hiperbolóides que, a prtir deles, podemos produzir artefatos refletores. Tais artefados se devem às propriedades refletoras das cônicas.

Podemos construir farois e holofotes, antenas parabólicas ou criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros ou catedrais. Como por exemplo a Catedral de São Paulo, centro espiritual de Londres, projetada pelo arquiteto britânico Christopher Wren. Sua cúpula é a segunda maior do mundo, perdendo apenas para a cúpula da Igreja de São Pedro, em Roma.

Catedral de São Paulo, Londres

As cônicas possuem equações, chamadas reduzidas ou canônicas, que se tornam mais úteis pois, através destas, podemos determinar certos elementos que as melhor caracterizam-nas. Entretanto, para chegarmos a estas equações definiremos em termos de lugares geométricos cada cônica, uma a uma, a seguir.

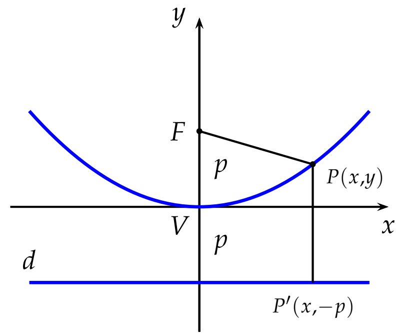
2.2 *A Parábola*

2.1 Definição (Parábola)**.** Considere um plano π determinado por uma reta d e um ponto F não pertencente a esta reta. A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano π que equidistam de F e de d.

Segue da definição que dado um ponto fixo F e uma reta d, um ponto P do plano está equidistante destes se, e somente se, pertence a uma parábola, ou seja,

$$d(P,F) = d(P,d) \iff P \in \text{ Parábola.} \tag{2.11}$$

2.2.1 *Os Principais Elementos da Parábola*



◇ Foco F; ◇ Diretriz d;

◇ Eixo focal (ou eixo de simetria): reta que passa pelo foco F e perpendicular a diretriz d;

◇ Vértice V: é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo focal;

◇ Corda: é obtida ligando quaisquer dois pontos distintos da parábola;

◇ Corda focal: uma corda que passa pelo foco;

◇ *Lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (do latim: latus significa "lado", e rectum significa "reto");

◇ Raio focal: é o segmento de reta de extremos no foco e num ponto da parábola;

◇ Denominamos o número p de *parâmetro da parábola*.

2.2.2 *As Equações Padrão de uma Parábola*

Dizemos que uma equação é *padrão*, também denominada *canônica* ou *reduzida*, quando está escrita em sua forma mais simples. A utilizamos para descrever um conjunto de curvas com alguma característica em comum. A parábola possui dois tipos de equações padrão: a primeira e a segunda. Para a primeira, consideramos o vértice na origem do sistema e o eixo de simetria sobre um dos eixos coordenados. Para a segunda o vértice está fora da origem e o eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados.

Primeira Equação Padrão da Parábola

Sejam $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de vértice V na origem dos eixos coordenados e de foco $F(0,p)$. Observe que qualquer ponto da diretriz d é dado por $Q(x,-p)$. Pela definição de parábola temos:

$$P(x,y) \in \text{ parábola } \iff d(P,F) = d(P,d).$$

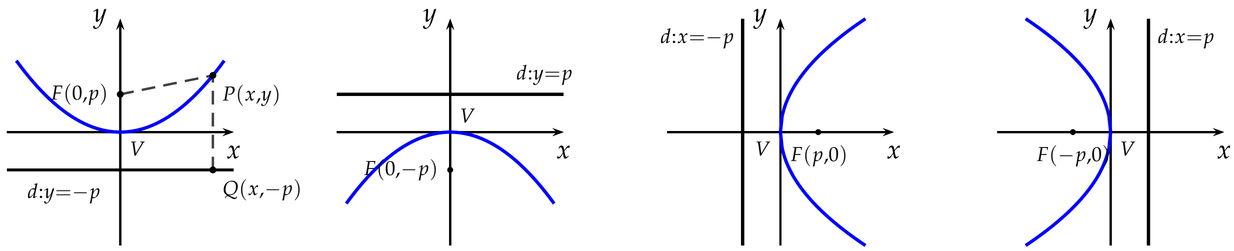
De acordo com a fórmula de distância entre pontos e a figura acima, temos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (p+y)^2}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima, obtemos $x^2 = 4py$, que é a equação reduzida da parábola para este caso.

De forma análoga, podemos obter as equações reduzidas das parábolas com vértice em $(0,0)$ para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados. Portanto,

$$\boxed{x^2 = \pm 4py} \quad \text{ou} \quad \boxed{y^2 = \pm 4px}. \tag{2.12}$$



$x^2 = 4py$ $\qquad$ $x^2 = -4py$ $\qquad$ $y^2 = 4px$ $\qquad$ $y^2 = -4px$

Da análise das equações em (2.12), tendo em vista ser x^2 (resp. y^2) sempre positivo ou nulo e que $p > 0$, podemos concluir que:

⋄ Se o sinal no 2° membro é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima (resp. direita);

⋄ Se o sinal no 2° membro é negativo, então a parábola tem concavidade voltada para baixo (resp. esquerda).

Exemplo 1. Obter a equação da parábola que satisfaça as condições em cada caso.

(a) Vértice na origem e foco em $(0,1)$; $\qquad$ (b) Foco em $(0,-3)$ e diretriz $y = 3$;

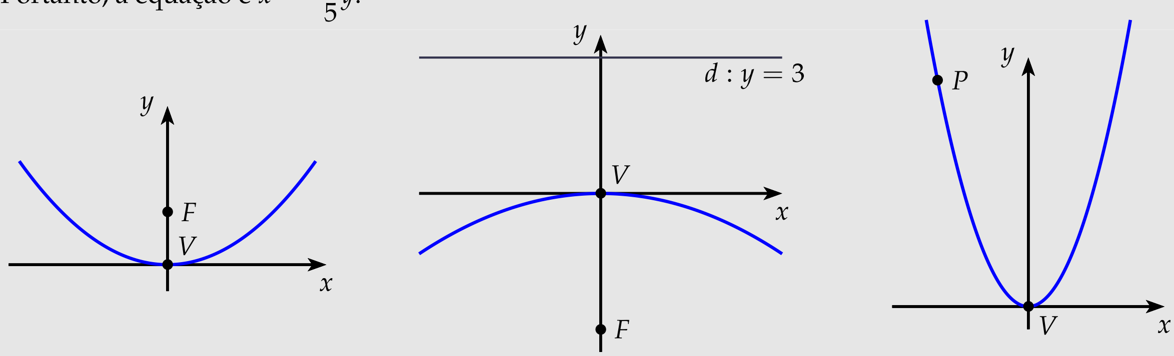
(c) Vértice na origem, concavidade voltada para cima e passando pelo ponto $P(-2,5)$.

Solução:

(a) $V(0,0)$ e $F(0,1)$. Logo, $p = 1$ e de $x^2 = 4py$, obtemos: $x^2 = 4y$;

(b) $F(0,-3)$ e $d : y = 3$. Portanto, $V(0,0)$ e $p = 3$. A equação é $x^2 = -4py$, ou seja $x^2 = -12y$;

(c) $V(0,0)$ e equação da forma $x^2 = 4py$. Como $(-2,5)$ é ponto da parábola, temos $(-2)^2 = 4p5$, de onde $p = \dfrac{1}{5}$. Portanto, a equação é $x^2 = \dfrac{4}{5}y$.



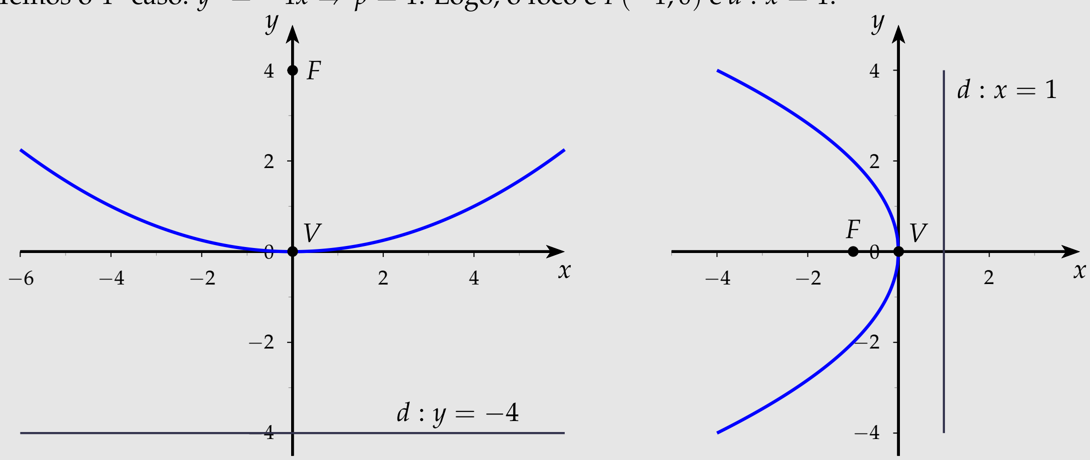
Exemplo 2. Determinar, para cada uma das parábolas, o foco e uma equação da diretriz.

(a) $x^2 - 16y = 0$; $\qquad$ (b) $y^2 + 4x = 0$.

Solução:

(a) Temos o 1° caso: $x^2 = 16y \Rightarrow p = 4$. Portanto, $F(0,4)$ e $d : y = -4$;

(b) Temos o 4° caso: $y^2 = -4x \Rightarrow p = 1$. Logo, o foco é $F(-1, 0)$ e $d : x = 1$.

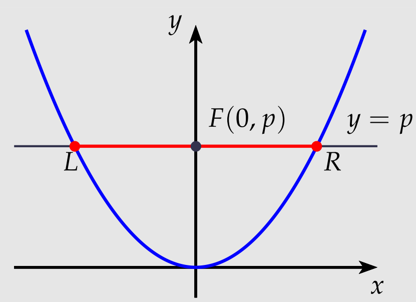


Exemplo 3. Determinar o comprimento do latus rectum de uma parábola.

Solução: Seja $x^2 = 4py$ a equação da parábola de vértice na origem e eixo focal coincidindo com o eixo das ordenadas.

Seja $y = p$ a reta perpendicular ao eixo focal, passando pelo foco $F(0, p)$.

Observe que a interseção da parábola com a reta são as extremidades L e R, do latus rectum. Fazendo $y = p$, na equação da parabola, temos $x^2 = 4p^2$, de onde $x = \pm 2p$. Logo, $|LR| = 4p$.



Segunda Equação Padrão da Parábola

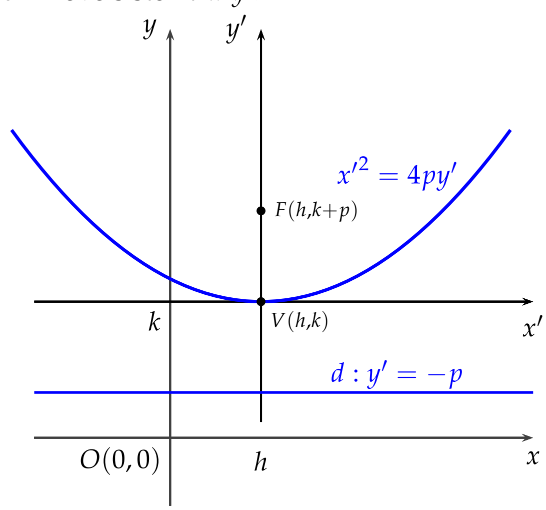
Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da parábola com vértice $V(h, k)$ fora da origem do sistema xy e cujo eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados. Para isso basta transladarmos o sistema xy para uma nova origem coincidindo com o vértice V, obtendo-se um novo sistema $x'y'$.

Assim, as equações destas parábolas se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{x'^2 = \pm 4py'} \quad \text{ou} \quad \boxed{y'^2 = \pm 4px'}.$$

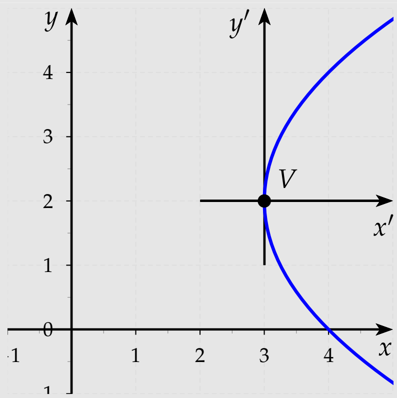
Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema 1.4 (pág. 6), temos que $\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{cases}$. Logo,

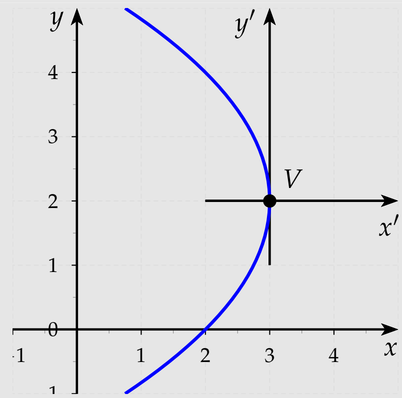
$$\boxed{(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)} \quad \text{ou} \quad \boxed{(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)}. \tag{2.13}$$



Exemplo 4. Determine a equação reduzida da parábola de vértice $V(3, 2)$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e parâmetro $p = 1$.

Solução: Como o vértice é $V(3,2) \neq (0,0)$, no novo sistema de coordenadas $x'y'$, temos duas possibilidades: $y'^2 = 4px'$ e $y'^2 = -4px'$, ou $y'^2 = \pm 4x'$, pois $p = 1$. Visto que o vértice é $V(3,2)$, obtemos $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$. Daí, $(y-2)^2 = \pm 4(x-3)$.





Exemplo 5. Dada a parábola $x^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, determine sua equação reduzida, o vértice, o foco e uma equação da sua diretriz e do eixo focal.

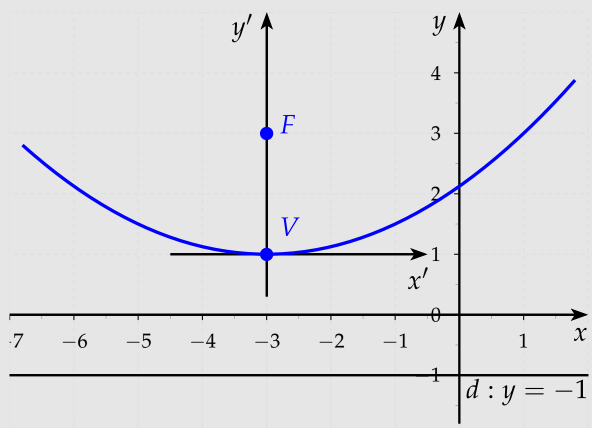
Solução: Completando-se o quadrado da variável x na equação dada, temos:

$$x^2 + 6x + 9 - 8y + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 8y - 8 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 8(y-1) \Rightarrow x'^2 = 8y',$$

em que $x = x' - 3$ e $y = y' + 1$.

Portanto, temos:

- ⋄ Vértice: $V(-3,1)$
- ⋄ Parâmetro: $p = 2$
- ⋄ Foco: $F(-3,3)$
- ⋄ Equação da diretriz: $d : y = -1$
- ⋄ Eixo focal: $x = -3$



2.2 Observação. Quando o eixo de simetria da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, a equação é "mais complicada", mas também se enquadra na forma geral da equação do 2° grau a duas incógnitas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

e, por uma rotação dos eixos coordenados, podemos reduzí-la a

$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

que facilmente é identificada.

Chamamos de *excentricidade* (e) da parábola a razão entre as distâncias de um ponto arbitrário P da curva ao foco e de P à diretriz. Neste caso, teremos sempre $e = 1$.

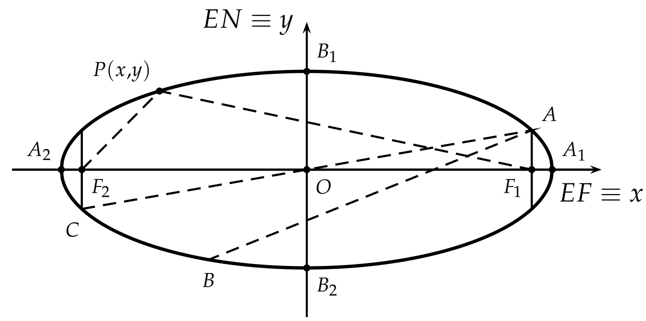
2.3 *A Elipse*

2.3 Definição (Elipse)**.** Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e maior do que a distância entre esses pontos fixos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a elipse E se, e somente se, $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = K,\ K > \text{dist}(F_1, F_2)$. Em símbolos temos:

$$E = \{P \in \pi;\ \text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = K,\ K > \text{dist}(F_1, F_2)\}. \tag{2.14}$$

2.3.1 *Os Principais Elementos da Elipse*



- ⋄ Focos F_1 e F_2;
- ⋄ Eixo focal EF: reta que passa pelos focos;
- ⋄ Centro O: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- ⋄ Eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;
- ⋄ Vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo focal;
- ⋄ Vértices B_1 e B_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo normal;
- ⋄ Eixo maior EM: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);
- ⋄ Eixo menor Em: segmento de reta que une os vértices B_1 e B_2 ($\overline{B_1B_2}$);
- ⋄ Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da elipse, por exemplo $\overline{AC}$;
- ⋄ Corda focal: uma corda que passa pelo foco;
- ⋄ *Lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal;
- ⋄ Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da elipse.

2.3.2 *As Equações Padrão de uma Elipse*

Desenvolveremos as duas equações padrão da elipse. A primeira equação padrão a elipse é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0, 0)$ do sistema de coordenadas xy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

2.4 Proposição (Primeira Equação Padrão da Elipse)**.** Seja E uma elipse de centro na origem do sistema coordenado xy e cujo comprimento do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$, $2b$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x, y) \in E$, temos:

(a) $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$;

(b) Sua equação cujos focos são $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$ é $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$;

(c) Sua equação cujos focos são $F_1(0;-c)$ e $F_2(0;c)$ é $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, em que $b=\sqrt{a^2-c^2}$;

(d) O comprimento do eixo menor $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: Mostremos os itens (a) e (b), deixamos como exercício a demonstração dos itens (c) e (d). Inicialmente, considere P sobre o eixo-x, suponha $P=A_1$. Deste modo, pela definição de elipse temos:

$$K=|\overline{A_1F_1}|+|\overline{A_1F_2}|=(a-c)+(a+c)=2a.$$

Como K é uma constante, será igual a $2a$ para todo $P(x,y)\in E$. Provaremos então (b). Por definição e pelo intem (a), temos que

$$\text{dist}(F_1,P)+\text{dist}(F_2,P)=2a,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Elevando novamente ao quadrado e simplifcando, temos

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Como $a>c$, então $a^2-c^2>0$ e assim, podemos definir $b=\sqrt{a^2-c^2}$, donde $a^2=b^2+c^2$ e reescrever a equação acima como

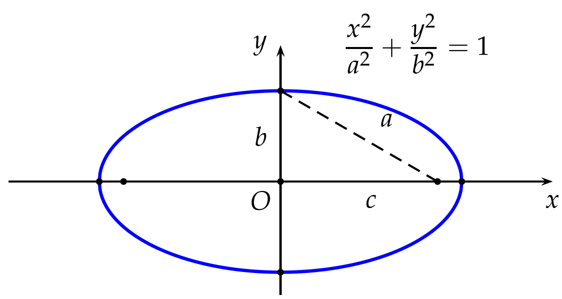
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

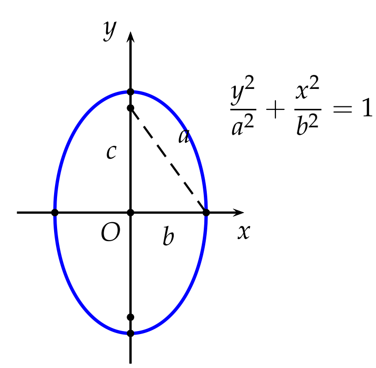
Dividindo esta últimoa equação por $a^2b^2\neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.15}$$

a equação reduzida da elipse para este caso.

Da análise destas deduções, temos os comprimentos do semi eixo maior e do semi eixo menor, medindo respectivamente $\frac{|EM|}{2}=a$ e $\frac{|Em|}{2}=b$. As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da elipse quando o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados.





Chamamos de *excentricidade* (e) da elipse a razão entre os comprimentos do segmento $\overline{F_1F_2}$ e do segmento $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e=\frac{c}{a}.$$

Como, $0<c<a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor do que 1. Observe que se $F_1=F_2$, temos $c=0$, então a elipse reduz-se a uma circunferência de raio $a=b$. Além disso, como $c=0$, então $e=0$. Assim, uma circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

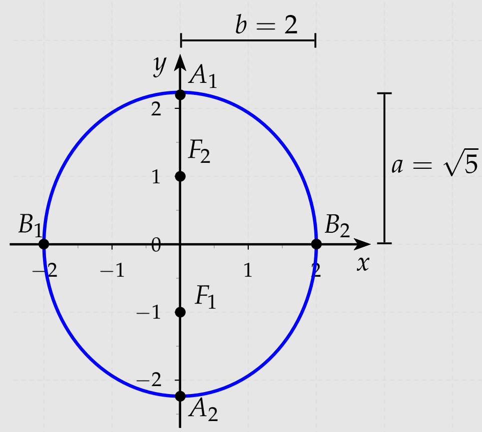
Exemplo 6. Determine os principais elementos da elipse $5x^2 + 4y^2 = 20$.

Solução: Como $5x^2 + 4y^2 = 20$ é equivalente a $\frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{4} = 1$, temos que o eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas. Daí $a = \sqrt{5}$ e $b = \sqrt{4} = 2$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos $5 = 4 + c^2$, ou seja, $c = 1$.
Desta forma, temos:

◇ Focos: $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$

◇ Vértices: $A_1(0, \sqrt{5})$, $A_2(0, -\sqrt{5})$,
$B_1(-2, 0)$ e $B_2(2, 0)$.

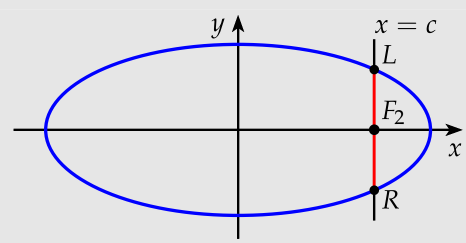


Exemplo 7. Prove que o comprimento do latus rectum é $\frac{2b^2}{a}$.

Solução: Seja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da elipse de centro na origem e comprimentos do eixo maior $2a$ e menor $2b$, com eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. Seja $x = c$ a reta perpendicular ao eixo dos x passando pelo foco $F_2(c, 0)$. Observe que a interseção da elipse com a reta são as extremidades L e R, do latus rectum. Fazendo $x = c$ na equação da elipse, obtemos:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Logo, $|LR| = \frac{2b^2}{a}$.



Segunda Equação Padrão da Elipse

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da elipse com centro $O'(h, k)$ fora da origem do sistema xy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso basta transladarmos o sistema xy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $x'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema 1.4 temos que $\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{cases}$. Logo,

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1} \tag{2.16}$$

Exemplo 8. Determine a equação reduzida da elipse de centro $O'(-3,2)$, eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos maior e menor iguais a 6 e 4, respectivamente.

Solução:

Como o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação é

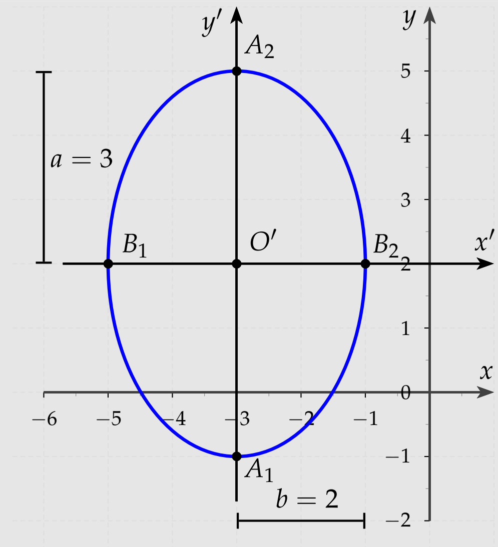
$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1.$$

Sendo o centro $O'(-3,2)$, segue que $h = -3$ e $k = 2$, de onde temos $x = x' - 3$ e $y = y' + 2$, ou ainda $x' = x + 3$ e $y' = y - 2$. Assim,

$$\frac{(y-2)^2}{a^2} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1.$$

Como o eixo maior mede 6 e o menor 4, temos $2a = 6$ e $2b = 4$, de onde, $a = 3$ e $b = 2$. Logo, a equação reduzida procurada é

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$



2.4 *A Hipérbole*

2.5 Definição. Uma *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e menor que a distância entre esses pontos fixos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a uma hipérbole H se, e somente se,

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = K < d(F_1,F_2).$$

Assim,

$$H = \{P \in \pi;\ \ |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = K,\ K < d(F_1,F_2)\}. \tag{2.17}$$

Observa-se que a hipérbole é uma curva constituída de dois ramos distintos.

2.4.1 *Os Principais Elementos da Hipérbole*

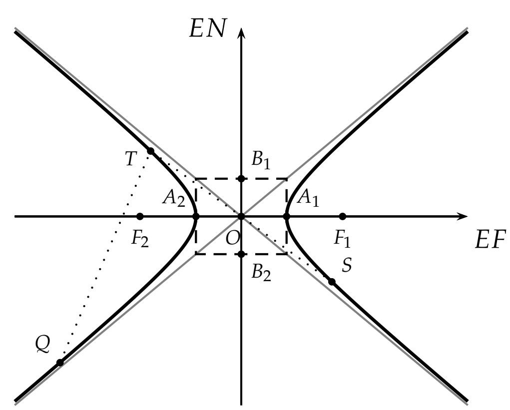
◇ Focos: pontos fixos F_1 e F_2, onde $d(F_1,F_2) = 2c$;

◇ Eixo focal EF: reta que passa pelos focos;

◇ Centro C: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

◇ Eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;

◇ Vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da hipérbole com o eixo focal;



⋄ Eixo real ou transverso ET: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);

⋄ Eixo imaginário ou conjugado EC: segmento de reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro e cujo comprimento é obtido conhecendo-se os valores de K e de c;

⋄ Pontos B_1 e B_2: extremidades do eixo imaginário ($\overline{B_1B_2}$);

⋄ Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da hipérbole que podem estar no mesmo ramo ou em ramos distintos, por exemplo $\overline{ST}$;

⋄ Corda focal: uma corda que passa pelo foco, por exemplo $\overline{QT}$;

⋄ *Lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);

⋄ Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da hipérbole.

2.4.2 *As Equações Padrão de uma Hipérbole*

Desenvolveremos duas equações padrão da hipérbole. A primeira equação padrão a hipérbole é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0,0)$ do sistema de coordenadas xy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

2.6 Proposição (Primeira Equação Padrão da Hipérbole)**.** Seja H uma hipérbole de centro na origem do sistema coordenado xy e cujo comprimento do eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x,y) \in H$, temos:

(a) $\left| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \right| = 2a$;

(b) Se os focos são $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$, então sua equação é $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$) são $y = \pm\frac{b}{a}x$, em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$;

(c) Se os focos são $F_1(0;-c)$ e $F_2(0;c)$, então sua equação é $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $y \to \pm\infty$) são $y = \pm\frac{a}{b}x$, em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$;

(d) O comprimento do eixo conjugado $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: A demonstração do item (a) é análogo ao caso da elipse dado na proposição 2.4. Mostremos os itens (b) e (d), deixamos como exercício a demonstração dos itens (a) e (c). Inicialmente provaremos (b). Por definição e pelo item (a), temos que $|d(F_1P) - d(F_2P)| = 2a$, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos $\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Elevando novamente ao quadrado e simplifcando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $c > a$, então $c^2 - a^2 > 0$ e assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, donde $c^2 = a^2 + b^2$ e reescrever a equação acima como

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividindo esta últimoa equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos a equação reduzida da elipse para este caso:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.18}$$

Se a equação (2.18) é resolvida em y, obtemos $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

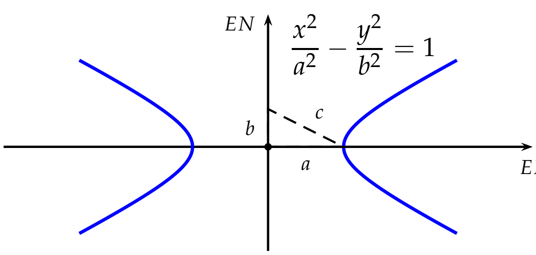
$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

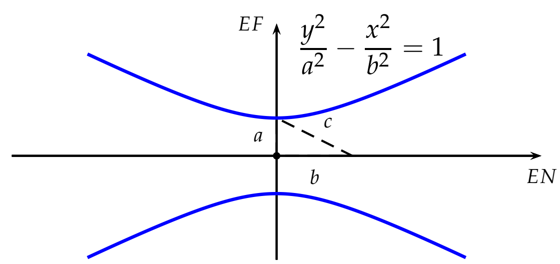
Se x tende a $+\infty$, então o radical no segundo membro se aproxima de 1 e a equação tende a $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.
O mesmo ocorre para $x < 0$, quando x tende a $-\infty$ (verifique!).
Finalmente, para provar (d), perceba que $\pm\dfrac{b}{a}$ é a inclinação das assíntotas, ou seja, se α é o ângulo de inclinação que a reta $y = \dfrac{b}{a}x$ faz com o eixo-x, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{|B_1B_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|B_1B_2|}{2a},$$

donde concluímos que $|B_1B_2| = 2b$. A nálogo para a reta $y = -\frac{b}{a}x$.

Da análise destas deduções, temos que o comprimento do semi eixo transverso e o comprimento do semi eixo conjugado são respectivamente iguais a $\frac{|ET|}{2} = \frac{|A_1A_2|}{2} = a$ e $\frac{|EC|}{2} = \frac{|B_1B_2|}{2} = b$. Estas informações são úteis na construção do esboço de uma hipérbole. As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da hipérbole quando o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.





Exemplo 9. Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 2, 0)$ e vértices $A(\pm 1, 0)$.

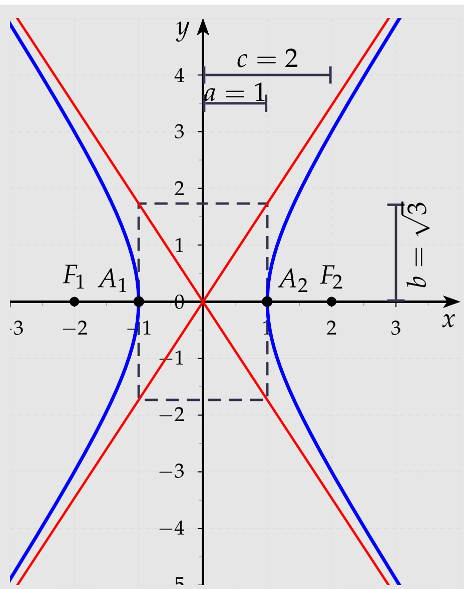
Solução:
Sendo $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$, os focos, concluímos que o centro é $O(0,0)$, $c = 2$ e que a equação é do tipo $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Sendo $A_1(-1,0)$ e $A_2(1,0)$, temos $a = 1$, pois $2a = |\overline{A_1A_2}|$.

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $b = \sqrt{3}$. Portanto, a equação da hipérbole é

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Suas assíntotas são $y = \pm\sqrt{3}$.



2.7 Observação. A hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser, também, representada por $b^2x^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ em que, o primeiro membro é equivalente a $(bx)^2 - (ax)^2 = (bx - ay)(bx + ay)$. Curiosamente, se igualar a zero esse primeiro membro, ou seja $(bx - ay)(bx + ay) = 0$, temos $bx - ay = 0$ ou $bx + ay = 0$ que são justamente as equações das assíntotas da hipébole, como vimos na Proposição 2.6. De fato, a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ possui assíntotas dadas por $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ que é equivalente a $bx \pm ay = 0$. Ou seja, as assíntotas são $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$.

2.8 Observação (hipérbole Equilátera ou Retangular)**.** Uma hipérbole que possui seus eixos transverso e conjugado de mesmo comprimento é denominada *hipérbole equilátera*. Como $a = b$ ela assume a forma mais simples $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$). Suas assíntotas são as bissetrizes dos primeiro e do segundo quadrantes, ou seja, $y = \pm x$ que são perpendiculares, entre si. Por esta razão, a hipérbole é também chamada de *hipérbole retangular*.

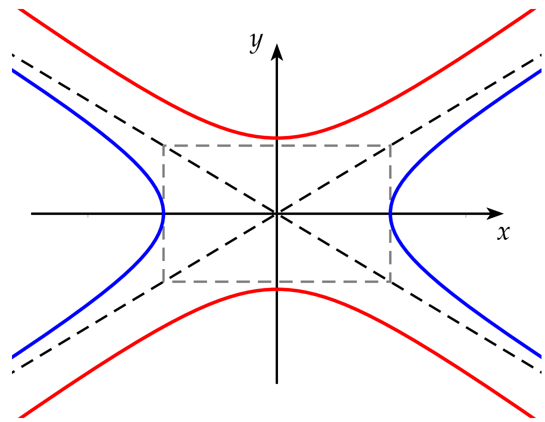
2.9 Observação (Hipérboles Conjugadas)**.** Se duas hipérboles são tais que o eixto transverso de uma conincide com o eixo conjugado da outra, então elas são denominadas de *hipérboles conjugadas*.

Cada hipérbole é a hipérbole conjugada da outra ou cada hipérbole é dita conjugada à outra. Ademais:

(i) A hipérbole conjugada de $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$;

(ii) Para um par de hipérboles conjugadas temos:

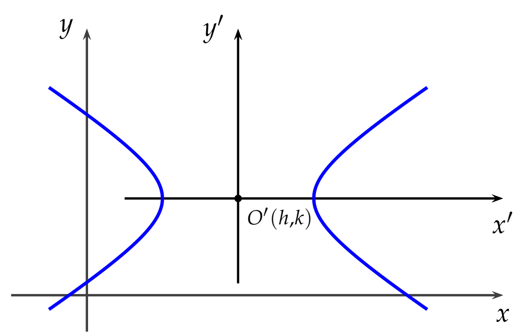
- ◇ possuem centro comum;
- ◇ possuem par de assíntotas comuns;
- ◇ todos os focos são equidistantes do centro.



Segunda Equação Padrão da Hipérbole

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da hipérbole com centro $O'(h,k)$ fora da origem do sistema xy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso, basta transladarmos o sistema xy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $x'y'$. Assim, as equações da hipérbole se restringirão a um dos casos:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1}$$



Pelas equações de translação, Teorema (1.8), temos que

$$\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{cases}.$$

Logo,

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \tag{2.19}$$

conforme o eixo focal seja paralelo ao eixo-x ou ao eixo-y.

Definimos a *excentricidade* (e) da hipérbole a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Exemplo 10. Determine a excentricidade da hipérbole cujos comprimentos dos eixos transverso e conjugado são iguais a 4 e 6, respectivamente.

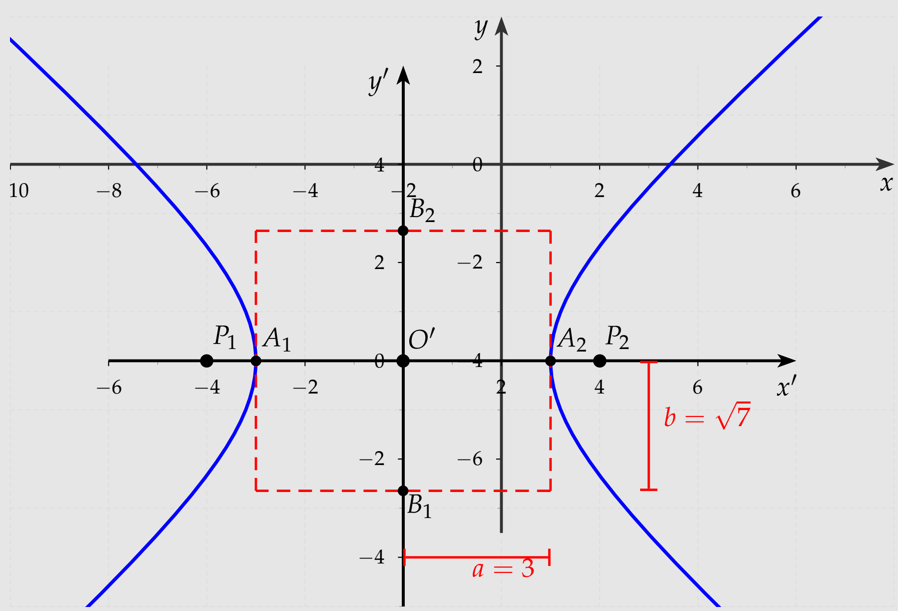
Solução: Temos que $2a = 4$ e $2b = 6$. Assim, $a = 2$ e $b = 3$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que, $c = \sqrt{13}$ e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Exemplo 11. Determine a equação do lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que a diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6, -4)$ e $P_2(2, -4)$ seja igual a 6, por duas formas: (a) utilizando as equações padrão, e (b) utilizando a definição da hipérbole como lugar geométrico.

Solução:

(a) Como $P_1(-6, -4)$ e $P_2(2, -4)$ são os focos, temos que o eixo focal é paralelo ao eixo-x, que $a = 3$ (pois $6 = 2a$) e que $c = \dfrac{\overline{P_1P_2}}{2} = 4$. Logo $b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. O centro da hipérbole é o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$, ou seja, $C(h = -2, k = -4) = O'$. Como o eixo focal é paralelo ao eixo-x, a equação da hipérbole é $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$. Desenvolvendo, temos:

$$7(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 + 8y + 16) = 63 \Longrightarrow 7x^2 - 9y^2 + 28x - 72y - 179 = 0.$$



(b) Pela definição deduzimos que este lugar geométrico trata-se de uma hipérbole e que os pontos P_1 e P_2 são os seus focos. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos que $|d(P, P_1) - d(P, P_2)| = 6$. Segue que, $d(P, P_1) - d(P, P_2) = 6$ ou $d(P, P_1) - d(P, P_2) = -6$. Vamos desenvolver a primeira destas equações. Acompanhe o raciocínio!

$$\begin{aligned}
6 &= d(P,P_1) - d(P,P_2)\\
6 &= \sqrt{(x-(-6))^2+(y-(-4))^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-(-4))^2}\\
\sqrt{(x+6)^2+(y+4)^2} &= \sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}+6\\
\sqrt{x^2+12x+36+y^2+8y+16} &= \sqrt{x^2-4x+4+y^2+8y+16}+6\\
\left(\sqrt{x^2+12x+y^2+8y+52}\right)^2 &= \left(\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}+6\right)^2\\
x^2+12x+y^2+8y+52 &= x^2-4x+y^2+8y+20+12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}+36\\
12x+52 &= -4x+56+12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}\\
16x-4 &= 12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}\\
(4x-1)^2 &= \left(3\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}\right)^2\\
16x^2-8x+1 &= 9(x^2-4x+y^2+8y+20)\\
16x^2-8x+1 &= 9x^2-36x+9y^2+72y+180\\
7x^2+28x-9y^2-72y-179 &= 0
\end{aligned}$$

Falta desenvolver a segunda equação $d(P,P_1) - d(P,P_2) = -6$. Faça essas continhas e veja que chegará na mesma equação.

2.5 Classificação e Caracterização das Cônicas

O **indicador** da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é o número $\Delta = B^2 - 4AC$.

2.10 Teorema. O lugar geométrico dos pontos $(x;y)$ que satisfazem a equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$, é:

(i) Uma elipse, ou um ponto ou o vazio se $\Delta < 0$;

(ii) Uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes se $\Delta > 0$;

(iii) Uma parábola, ou uma reta, ou par de retas paralelas ou o vazio se $\Delta = 4AC - B^2 = 0$.

Exemplo 12.

(a) A equação $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$ é do tipo parabólico. De fato, como $A = 1$, $B = 2$ e $C = 1$, temos $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$;

(b) A equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0$ é do tipo elíptico. De fato, como $A = 5$, $B = 4$ e $C = 2$, temos $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -24 < 0$;

(c) A equação $4xy - 3y^2 - 36 = 0$ é do tipo hiperbólico. De fato, como $A = 0$, $B = 4$ e $C = -3$, temos $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-3) = 16 > 0$.

A seguir, temos que todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

2.11 Definição (Definição Geral das Cônicas)**.** Seja $e > 0$ uma constante, F um ponto fixo e r uma reta fixa tal que $F \notin r$. A cônica $\mathcal{C}$ de excentricidade e, foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos do plano P tais que

$$\text{dist}(P; F) = e \cdot \text{dist}(P; r).$$

Ademais,

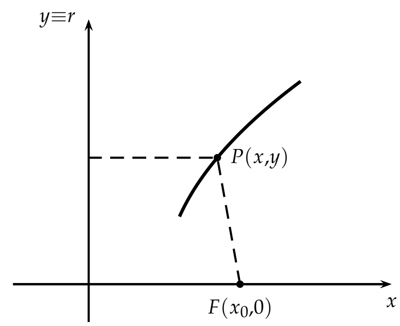
(a) Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola;

(b) Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse;

(c) Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.

Considere $F(x_0, 0)$, $r : x = 0$ e $P(x, y)$. Pela definição geral das cônicas temos

$$\begin{aligned}
\text{dist}(P; F) &= e \cdot \text{dist}(P; r) \\
\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} &= e \cdot x \\
(x - x_0)^2 + y^2 &= e^2 x^2 \\
x^2 - 2x_0 x + f^2 + y^2 - e^2 x^2 &= 0 \\
(1 - e^2)x^2 - 2x_0 x + y^2 + x_0^2 &= 0.
\end{aligned}$$



Se $e = 1$, temos $y^2 = 2x_0 \left(x - \dfrac{x_0}{2} \right)$, uma parábola de vértice em $\left(\dfrac{x_0}{2}, 0 \right)$ e eixo focal coincidente com o eixo das abscissas.

Se $e \neq 1$, temos $x^2 - \dfrac{2x_0}{1 - e^2} x + \dfrac{y^2}{1 - e^2} + \dfrac{x_0^2}{1 - e^2} = 0$, que, claramente, representa uma elipse se $e < 1$, ou uma hipérbole se $e > 1$. Efetuando-se os cálculos necessários podemos chegar facilmente à forma reduzida dada por

$$\frac{\left[x - \dfrac{x_0}{(1 - e^2)} \right]^2}{\dfrac{e^2 x_0^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 x_0^2}{(1 - e^2)}} = 1.$$

O valor de e apresentado aqui é idêntico ao valor $\dfrac{c}{a}$ que fora introduzido em seções anteriores. De fato, no caso da hipérbole, temos $a^2 = \dfrac{e^2 x_0^2}{(1 - e^2)^2}$ e $b^2 = \dfrac{e^2 x_0^2}{(e^2 - 1)}$. Das relações fundamentais seque que

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{e^2 x_0^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{e^2 x_0^2 (e^2 - 1)}{(1 - e^2)^2} = \frac{e^4 x_0^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Logo, $\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{e^4 x_0^2}{(1 - e^2)^2} \cdot \dfrac{(1 - e^2)^2}{e^2 x_0^2}$, ou seja, $e = \dfrac{c}{a}$.

A partir desta defnição, podemos determinar as diretrizes da elipse e da hipérboles.

Considere a elipse E de centro na origem do sistema xy e focos em $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Portanto, sua equação é dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo assim, as equações das diretrizes r_1 e r_2 de E são $x = -\alpha$ e $x = \alpha$, respectivamente. De acordo com a definição geral temos que para todo ponto $P(x, y) \in E$, $\text{dist}(P, F_2) = e \cdot \text{dist}(P, r_2)$. Portanto, para o vértice $A_2(a, 0)$, temos que $\text{dist}(A_2, F_2) = e \cdot \text{dis}(A_2, r_2)$. Segue que, $\dfrac{a - c}{\alpha - a} = \dfrac{c}{a}$. De onde teremos

$\alpha = \dfrac{a}{e}$. Podemos concluir, portanto, que as equações das diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $x = -\dfrac{a}{e}$ e $x = \dfrac{a}{e}$.

De forma análoga, encontramos as mesmas equações para as diretrizes da hipérbole.

Exemplo 13. Determine o vértice e a equação da parábola que tem foco $F(1,1)$ e a reta $r : x + y + 2 = 0$ como diretriz.

Solução: Sabemos que um ponto $P(x,y)$ pertence à parábola se, e somente se, $\text{dist}(P;F) = \text{dist}(P;r)$. Recordando a fórmula de distância entre um ponto $Q(x_0,y_0)$ e uma reta $s : ax + by + c = 0$, que é dada por $\text{dist}(Q;r) = \dfrac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, temos:

$$P(x,y) \in \text{ Parábola } \iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} \iff 2\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right) = (x+y+2)^2.$$

Logo $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$ é a equação desejada.

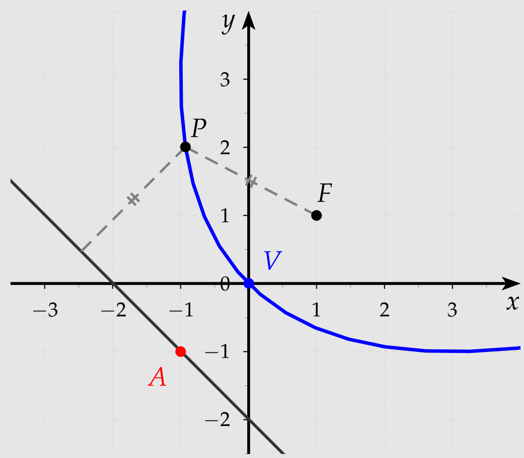
A reta focal é a reta $\ell : y = m_\ell \cdot x + n$ perpendicular à diretriz r que passa pelo foco $F(1,1)$. Como a inclinação de r é $m_r = -1$, então $m_\ell = 1$, pois $m_r \cdot m_\ell = -1$. Agora, como $(1,1) \in \ell$, temos $n = 0$. Então $\ell : y = x$.

Seja $A(x,y)$ o ponto de interseção emtre as retas ℓ e r. Então as coordenadas x e y satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x + y &= -2 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

De onde, $A(x = -1, y = -1)$.

Como o vértice é o ponto médrio do segmento $\overline{AF}$, temos $V(0,0)$.



Exemplo 14. Determine a equação da elipse e seus principais elementos, conhecendo-se um dos seus focos $(3,1)$, a equação da diretriz $r : x + y - 1 = 0$ correspondente a esse foco e a sua excentricidade $e = 0,5$.

Solução: Seja $r_1 : x + y = 1$ a diretriz correspondente ao foco $F_1(3,1)$. Temos que $P(x;y)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$\text{dist}(P;F_1) = \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(P;r_1) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow 8\left((x-3)^2 + (y-1)^2\right) = (x+y-1)^2.$$

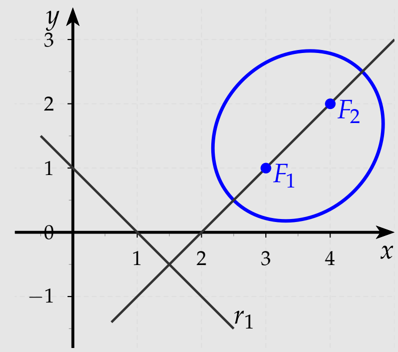
logo, a equação da elipse é $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x - 14y + 79 = 0$. Sendo C o centro da elipse, temos:

$$\begin{cases} \text{dist}(F_1, r_1) &= \text{dist}(C, r_1) - \text{dist}(C, F_1) = \dfrac{a}{e} - c = \dfrac{a}{e} - ae = \dfrac{3a}{2} \\ \text{dist}(F_1, r_1) &= \dfrac{|3+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Portanto, $a = \sqrt{2}$ e $c = ae = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, temos $b = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
Seja $F_2(x, y)$ o segundo foco. Como $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$ e que $F_2 \in \ell$: $x - y = -2$ ($\ell \perp r_1$) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 2 \\ x - y &= 2 \end{cases}.$$

Note que $x = 4$ e $y = 2$ é uma solução. Logo $F_2(4, 2)$.



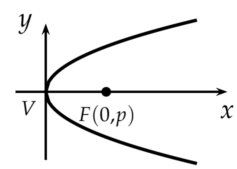
2.6 A Etimologia das Palavras que Definem as Seções Cônicas

A excentricidade de uma cônica é, tradicionalmente, representada por e e seu nome deve-se ao fato de que ele mede quanto os focos estão "fora do centro", *ex centrum*.

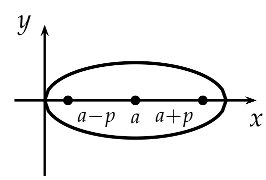
Arquimedes e os pitagóricos foram os primeiros a empregar as palavras Parábola, Elipse e Hipérbole, porém, com outra acepção da atual: seções a uma superfície cônica, que se deve a Apolônio.

Traduzida do grego

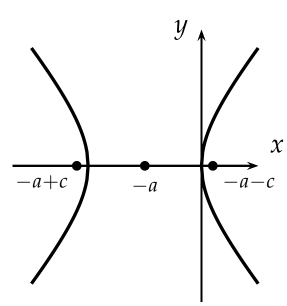
⋄ "$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$": **parábola** significa: comparação; igualdade. Deve-se ao fato da igualdade $y^2 = \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Parábola de vértice na origem e foco sobre o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $y^2 = 4p \cdot x$. Como o comprimento do latus rectum de uma parábola é $\ell = 4p$, temos, portanto, $y^2 = \ell \cdot x$.



⋄ "$\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\zeta$": **elipse** significa: falta; omissão. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 < \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Elipse de centro no ponto $(a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo maior e menor da elipse de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Isolando y^2, obtemos $y^2 = \dfrac{2b^2}{a}x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Como o comprimento do latus rectum de uma elipse é $\ell = \dfrac{2b^2}{a}$, temos, portanto, $y^2 = \ell x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Donde, podemos concluir que $y^2 < \ell \cdot x$.



⋄ "$\nu\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\eta$": **hipérbole** significa: excesso; exagero. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 > \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Hipérbole de centro no ponto $(-a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo real e imaginário da Hipérbole de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Seguindo o mesmo raciocínio adotado anteriormente para a Elipse, com as devidas alterações, podemos concluir que $y^2 > \ell \cdot x$.



Referência Bibliográfica

[1] LEHMAN, Charles H. *Geometria Analítica*. Editora Globo, São Paulo, 1995, 8ª edição.