Exercício 2 - Teoria dos Grafos

João Lucas Lima de Melo

Novembro 2022

Exercício 1: Prove que um grafo G é bicolorível se, e somente se, não possui ciclos ímpares.

Um grafo bicolorível é um grafo que admite uma bicoloração, uma coloração própria com 2 cores. Uma coloração própria de vértices V pode ser entendida como uma partição de V em conjuntos independentes $X_1, X_2, ..., X_k$ onde cada partição contém todos os vértices rotulados pelo índice da partição.

Portanto, um grafo bicolorível é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes. Essa é a definição de um grafo bipartido. Logo, um grafo é dito bicolorível se, e somente se, ele é dito bipartido.

Um grafo é bipartido se, e somente se, não possuir um ciclo ímpar. A prova desse teorema é dada a seguir:

$\Rightarrow$ Seja G um grafo bipartido com duas bipartições X, Y. Todo passeio em G alterna etre arestas em X e em Y. Dessa forma, um vértice $v \in X$ se conecta a qualquer outro $u \in X$ através de uma quantidade par de arestas (alternantes entre X e Y). Logo, não há ciclos ímpares em G.

$\Leftarrow$ Seja G um grafo sem ciclos ímpares e u um vértice em uma componente não trivial H do grafo G. Organizaremos os vértices em H distantes a uma distância par de u em um conjuto X e os a uma distância ímpar em um conjunto Y.

Uma aresta vv' formada por vértices $v \in X$ e $v' \in Y$ criaria um passeio fechado usando um $u, v-$caminho, a aresta vv' e v', u-caminho. Um caminho fechado ímpar contém um ciclo ímpar, o que contradiz nossa hipótese.

Portanto, foram ciradas duas partições independetes de vértices X, Y tal que $X \cup Y = V(H)$, onde H se caracteriza como um $X, Y-$bigrafo.

Provado que todo grafo G é bigrafo se, e somente se, não possui ciclo ímpar e todo grafo G é bigrafo se, e somente se, for bicolorível (por definição), temos que um grafo G é bicolorível se, e somente se, não possui ciclos ímpares.

Exercício 2: Dê uma função f tal que para todo grafo G bicolorível com n é verdade que $e(G) \leq f(n)$ e determine para qual família de grafos G temos $e(G) = f(n)$.

Seja G um grafo bicolorível. G possui duas partições independentes de vértices a quem são atribuídas rótulos exclusivos. Por definição, um grafo bicolorível é também dito um grafo bipartido.

Por proposição vista em sala, se G é um grafo bipartido com n vértices, então G possui no máximo $n^2/4$ arestas.

Supomos um grafo bipartido $G = (X, Y; E)$, $|X| = x$ e $|Y| = y$. Supomos por contradição que $e(G) > n^2/4$.

Como G é bipartido, para o caso extremal onde todos os vértices de X são adjacentes aos de Y, temos que:
$e(G) \leq xy$.

O conjunto de vértices de G é dado por $V(G) = X \cup U$, onde $n = x + y$. Utilizando a hipótese, temos:
$e(G) > n^2/4$
$\Leftrightarrow e(G) > (x + y)^2/4$

Analisando ambos os resultados, temos:
$(x + y)^2/4 < e(G) \leq xy$
$\Leftrightarrow (x + y)^2/4 < xy$
$\Leftrightarrow (x + y)^2 < 4xy$

Essa desigualdade implica dizer que para um dado x ou y iguais a 0, teríamos $(x + y)^2 < 0$, um absurdo. Portanto, segue que se G é um grafo bipartido com n vértices, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas. A função f desejada é $f(n) = n^2/4$.

A configuração de um grafo bipartido que garante a maior quantidade possível de arestas se dá quando todos os vértices de uma partição são adjacentes a todos os vértices da outra partição. Portanto, uma família de grafos G tal que $e(G) \leq f(n) = n^2/4$ é a família de grafos bipartidos completos com $n/2$ vértices de cada lado da partição $K_{n/2,n/2}$.

Exercício 3: Prove que para todo grafo bipartido G temos $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Seja G um grafo bipartido. $\chi'(G)$ indica o número aresta-cromático de G, quantidade de partições independentes de uma aresta-coloração em G. Esse valor é denominado índice cromático.

Uma vez que para cada vértice uma aresta de uma cor diferente deve ser atribuída, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Vamos provar a igualdade para o caso de grafos bipartidos através da indução em $\Delta(G)$.

Para o caso base, onde $\Delta(G) = 0$, segue que $\chi'(G) = 0$, e portanto vale a hipótese. Vamos construir a demonstração para os casos onde $\Delta(G) > 0$.

Todo grafo bipartido $k-$regular, para um $k > 0$, possui um emparelhamento perfeito. Vamos escolher um grafo bipartido $\Delta-$regular G' tal que possua G como subgrafo. Sabemos, portanto, que G' possui um emparelhamento M' perfeito.

Podemos construir o grafo $F = G' - M'$ tal que $\Delta(F) = \Delta(G') - 1$. Dessa forma, podemos aplicar a hipótese de indução em F e afirmar que $\chi'(F) = \Delta(F)$, onde $\chi'(F) = \chi'(G') - 1$. Inserimos em F as arestas em M removidas, estendendo sua aresta-coloração de $\Delta(G') - 1$ a $\Delta(G')$, valendo também para G. Portanto, para todo grafo bipartido G, $\chi'(G) = \Delta(G)$.