Definições:

Grafo: Estrutura matemática G composta por um conjunto de vértices V(G) e um conjunto de arestas E(G) formados por pares de vértices.
Complemento de um Grafo: Um grafo G' dado pelo mesmo conjunto de vértices de G, onde V(G') = V(G) e contenha as arestas não contidas em G. G' = (V, E').
Clique: Conjunto de pares de vértices adjacentes.
Vértices vizinhos: Vértices pertencentes a uma mesma aresta.
Grafo simples: Grafo sem múltiplas arestas e laços.
Grafo finito: Grafo cujo conjunto de vértices é finito.
Grafo nulo: Grafo cujo conjunto de vértices e arestas é vazio.
Grafo vazio: Grafo sem arestas.
Grau: Quantidade de vizinhos de um vértice.
Grau mínimo: O menor grau entre todos os vértices de um grafo.
Grau máximo: O maior grau entre todos os bértices de um grafo.
Grau médio: Somatório de todos os graus dividido pela quantidade de vértices.
Subgrafo: É um grafo H cojuto conjunto de vértices e arestas esteja contido no conjuto de vértices e arestas de um grafo G, onde V(H) está contido em V(G) e E(H) está contido em E(G).
Subgrafo próprio: Subgrafo H de G onde V(H) != V(G) e E(H) != E(G).
Grafo gerador: Subgrafo H de G onde V(H) = V(G).
Grafo induzido: Dado um subconjunto X de vértices de G, H é um grafo induzido se V(H) = X e E(H) = E(G) para todos os vértices em X.
Matriz de adjacência: Matriz n por n em que cada célula informa o número de arestas entre o vértice i e o vértice j.
Matriz de incidência: Matriz n por n em que cada célula informa se há arestas entre o vértice i e o vértice j.
Passeio: Uma sequência de vértices v1 … vk onde possa existir repetição de vértices e arestas.
Trilha: Uma sequência de vértices v1 … vk onde não possa haver repetição de arestas.
Caminho: Uma sequência de vértices *distintos* v1 … vk.
Ciclo: Grafo com quantidade igual de vértices e arestas cujos vértices possam ser colocados em sequência tal que o vértice de origem é o vertice de destino. Uma definição formal seria o grafo obtido por um caminho maximal P de v1, …, vk, somado à uma aresta v1vk.
Passeio, trilha e caimnho fechado: Estrutura de *comprimento não nulo* onde um vértice é origem e destino da sequência.
Isomorfismo: Uma bijeção f: V(G) -> V(H) onde todas as arestas uv estão em G sse a aresta f(u)f(v) está em H. Ou seja, há um mapeamento de vértices de um grafo G para um H cuja relação entre os vértices, suas arestas, é preservada.
Grafo isomorfo: Grafo G onde exista uma relação de isomorfismo a outro grafo H.
Automorfismo de um grafo: Isomorfismo de um grafo G para ele mesmo.
Grafo auto-complementar: Grafo isomorfo ao seu complemento.
Decomposição de um grafo: Uma lista de subgrafos tais que toda aresta apareça em exatamente um subgrafo da lista.
Distância: Quantidade de arestas entre dois vértices u,v.
Grafo maximal: Um grafo cuja adição de uma estrutura, seja vértice ou aretsa, implica na perda de uma propriedade. Por exemplo, um caminho maximal P é o maior caminho possível de um grafo, cuja adição de vértice implica a existência de um caminho maior que P, não sendo mais o maior caminho de um grafo.
Grafo conexo: Um grafo onde para todo par de vértice u,v existe um caminho P entre u,v.

Componente: Um subgrafo H induzido por um cunjunto X de vértices de G, conexo, e sem arestas entre X e V(G) \ X.
Componente trivial: Um vértice isolado.
Grafo k-regular: Grafo onde todos os vértices possuem o mesmo grau k.
Grafo completo: Grafo com n vértices onde para quaisquer vértices u,v existe uma aresta uv. Denotado por Kn.
Conjunto independente: Conjunto de vértices X contido em V(G) onde G não possua nenhuma aresta para os vértices de X.
Diâmetro: A maior distância entre todos os pares de vértices de G.
Cintura: A quantidade de arestas do menor ciclo de G, denotado por g(G).
Aresta de corte: Aresta de G cuja remoção implica na criação de um grafo G' com mais componentes conexas que G.
Vértice de corte: Vértice de G cuja remoção implica na criação de um grafo G' com mais componentes conexas que G.
Grafo bipartido: Grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos X, Y, cuja interseção seja vazia, de modo que não há arestas entre os vértices pertencentes a cada conjunto. Há apenas arestas cujo um extremo pertence a X e outro a Y.
Grafo biclique: Grafo bipartido.
Grafo bipartido completo: Grafo bipartido onde existe uma aresta para qualquer par de vértices xy, onde x pertence a X e y pertence a Y, conjuntos da bipartição. Denotado por Kx,y com x vértices de uma partição e y vértices de outra partição.
União de grafos: União de arestas e vértices de diferentes grafos G1, G2, …, Gk, resultando em um grafo G onde V(G) = U (V(G1) + V(G2) + … + V(Gk)) e E(G) = U (E(G1) + E(G2) + … + E(Gk)).
Trilha euleriana: Uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo G.
Circuiro euleriano: Trilha euleriana fechada.
Grafo euleiano: Grafo que possua uma trilha euleriana fechada.
Digrafo: Estrutura matemática consistente de um conjunto de vértices, conjunto de arestas e uma função mapeando uma aresta para cada par de vértices. Pode se pensar em digrafo como um grafo direcionado. Definições de subgrafos, isomorfismo, decomposição e união de grafos se aplicam aos digrafos. Os graus de vértices em digrafos são deompostos em graus de entrada e saída para cada vértice.
Grafo par: Grafo cujos todos os vértices possuem grau par.
Grafo ímpar: Grafo cujos todos os vértices possuem grau ímpar.
Máximo: Referente á maximalidade quantitativa de componentes de uma estrutura. Como um ciclo máximo, que possui a maior quantidade possível de vértices.
Máximal: Referente á maximalidade qualitativa de uma estrutura, de tal forma que a adição de qualquer componente à estrutura implica na perda de sua propriedade. Como um caminho maximal em um grafo acíclico, cuja adição de uma aresta implica na perda de sua propriedade de ser acíclio.
Ordem de um grafo: Número de vértices de um grafo G.
Tamanho de um grafo: Número de arestas de um grafo G.
Grafo k-livre: Um grafo G que não possua um subgrafo induzido isomorfo a k.
Árvore: Grafo acíclico conexo.
Floresta: Grafo cujas componentes são árvores.
Folha: Vértice de uma árvore cujo grau seja 1.
Árvore geradora: Um subgrafo gerador H de G que seja árvore.
Caminho hamiltoniano: Um caminho que passa por todos os vértices de um grafo.
Ciclo hamiltoniano: Um ciclo que passe por todos os vértices de um grafo.
Grafo hamiltoniano: Um grafo que possua um ciclo hamiltoniano.

Fechamento (hamiltoniano) de um grafo: Um grafo com conjunto de cértices V(G) obtido por G pela adição de arestas a vértices não adjacentes cuja soma de grau seja maior ou igual ao número de vértices n, até que haja mais pares restantes.

Teoremas:

.Se *G* é um grafo com *δ(G) >= 2* então *G* contém um caminho de comprimento pelo menos *δ(G)* e um ciclo com comprimento pelo menos *δ(G) + 1*.
.Se *G* é um grafo que contém um ciclo, então *diam(G) >= piso(g(G)/2)*.
.Se *G* é um grafo *k*-regular com *g(G) >= 4*, então *G* tem pelo menos *2k* vértices.
.Sejam *G* um grafo e *e* uma aresta de *G*. A aresta *e* é uma aresta de corte de *G* sse *e* não pertence a um ciclo.
=> Por contradição, é aresta de corte e pertence a um ciclo
<= Por contradição, não pertence a um ciclo e não é uma aresta de corte

Demonstração. Sejam G um grafo e $e = xy$ uma aresta de G. Seja xy uma aresta de corte de G e suponha por contradição que xy pertence a um ciclo $C = x, v_1, \dots, v_p, y, x$. Removendo xy, obtemos um grafo G' onde x e y estão em diferentes componentes. Mas G' contém o caminho $x, v_1, \dots, v_p, y$ entre x e y, uma contradição.

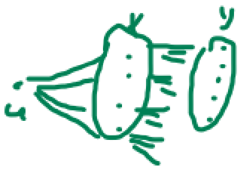
Agora suponha por contradição que xy não pertence a nenhum ciclo e xy não é uma aresta de corte de G. Como xy não é uma aresta de corte, sua remoção gera um grafo G' que contém um caminho P entre x e y. Mas em G, o caminho P juntamente com a aresta xy forma um ciclo, que é uma contradição. □

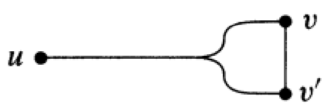
.**Teorema de Konig:** Um grafo *G* é bipartido sse *G* não contém ciclos ímpares.
=> Mostrar que todo ciclo em G é par, analisando que todo vi impar está em X e todo vj par está em Y
<= Definir conjuntos X e Y de G tais que x em X sejam vertices a uma distância par de u e y em Y a uma distância ímpar. Fazer a análise para os vertices no ciclo.

Proof: *Necessity.* Let G be a bipartite graph. Every walk alternates between the two sets of a bipartition, so every return to the original partite set happens after an even number of steps. Hence G has no odd cycle.

Sufficiency. Let G be a graph with no odd cycle. We prove that G is bipartite by constructing a bipartition of each nontrivial component. Let u be a vertex in a nontrivial component H. For each $v \in V(H)$, let $f(v)$ be the minimum length of a u, v-path. Since H is connected, $f(v)$ is defined for each $v \in V(H)$.

Let $X = \{v \in V(H) : f(v) \text{ is even}\}$ and $Y = \{v \in V(H) : f(v) \text{ is odd}\}$. An edge v, v' within X or Y would create a closed odd walk using a shortest u, v-path, the edge vv', and the reverse of a shortest u, v'-path. By Lemma 1.2.15, such a walk must contain an odd cycle, which contradicts our hypothesis. Hence X and Y are independent sets. Also $X \cup Y = V(H)$, so H is an X, Y-bigraph. ■





.Para todo grafo bipartido regular *G* e toda bipartição *(X,Y)* de *G*, temos |*X*| = |*Y*|.

.Um grafo completo *K_{n}* pode ser expresso pela união de *k* grafos bipartidos sse *n <= 2^k*.
=> Indução em k, base k = 1. supor Kn = G1 U G2 U … U Gk, onde cada Gi é bipartido com bipartições X e Y. A união de k - 1 grafos cobrem os subgrafos completos induzidos por X e Y. Aplicando a hipótese de indução, |X| <= 2^k-1 e |Y| <= 2^k-1. Então n<=|X| + |Y| <= 2^k-1 + 2^k-1 = 2^k
<= Particionamos o grafo com n <= 2^k em duas partições X e Y de tamanho 2^k-1 cada. Pela hipótese de indução, podemos obter o subgrafo induzido por ambos os conjuntos com k - 1 subgrafos bipartidos.

$\Rightarrow$ **Proof:** We use induction on k. Basis step: $k = 1$. Since K_3 has an odd cycle and K_2 does not, K_n is itself a bipartite graph if and only if $n \le 2$.

Induction step: $k > 1$. We prove each implication using the induction hypothesis. Suppose first that $K_n = G_1 \cup \cdots \cup G_k$, where each G_i is bipartite. We partition the vertex set into two sets X, Y such that G_k has no edge within X or within Y. The union of the other $k-1$ bipartite subgraphs must cover the complete subgraphs induced by X and by Y. Applying the induction hypothesis to each yields $|X| \le 2^{k-1}$ and $|Y| \le 2^{k-1}$, so $n \le 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

?

$\Leftarrow$ Conversely, suppose that $n \le 2^k$. We partition the vertex set into subsets X, Y, each of size at most 2^{k-1}. By the induction hypothesis, we can cover the complete subgraph induced by either subset with $k-1$ bipartite subgraphs. The union of the ith such subgraph on X with the ith such subgraph on Y is a bipartite graph. Hence we obtain $k-1$ bipartite graphs whose union consists of the complete subgraphs induced by X and Y. The remaining edges are those of the biclique with bipartition X, Y. Letting this be the kth bipartite subgraph completes the construction. ■

.Para um grafo conexo não-trivial com exatamente *2k* vértices ímpares, a quantidade mínima de trilhas que o decompõe é igual a *max{k, 1}*.
.Todo grafo simples *G* possui um subgrafo bipartido com ao menos *E(G)/2* arestas.
.**Teorema de Mantel:** Se *G* é um grafo com *n* vértices sem triângulos, então *G* tem no máximo *n^2/4* arestas.
//Indução em vértices de G, n<=2 vale trivialmente então assumimos n>=3. Remove dois vértices adjacentes xy, como não há triangulos, então |N(x) U N(y)| <= n -2 (já que removemos 2 vértices). Entre os vértices de G' e x e y existem no máximo n - 2 arestas. xy perntence a G. Aplica a hipótese e temos E(G) <= E(G') + n - 2 + 1 <= (n-2)^2/4 + n - 1 = n^2/4

Demonstração 1 (Indução) - Teorema de Mantel. Seja G um grafo com n vértices sem triângulos. Se $n \leq 2$, então o teorema vale trivialmente. Assuma $n \geq 3$ e suponha que a conclusão é verdadeira para todo grafo com menos que n vértices que não contém triângulos.

Seja H o grafo obtido de G após a remoção de dois vértices adjacentes x e y (note que H tem $n-2$ vértices). Como x e y são adjacentes, eles não podem ter vizinhos em comum, pois caso contrário teríamos um triângulo em G. Assim, sabemos que $|N_H(x) \cup N_H(y)| \leq n-2$, i.e., existem no máximo $n-2$ arestas entre os vértices de H e os vértices x e y. Portanto, lembrando que $xy \in E(G)$ e aplicando a hipótese de indução em H, obtemos o seguinte.

xy

$$e(G) \leq e(H) + (n-2) + 1 \leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}.$$

arestas removidas de H a x e H a y

□

.**Teorema de Turán:** Seja *r* >= 3 um inteiro. Se G é um grafo com *n* vértices que não contém K_{r+1}, então G tem no máximo (1-(1/r))n^2/2 arestas.

.Um grafo conexo *G* é euleriano sse *G* possui no máximo uma componente não trivial e todos os vértices de *G* têm grau par.

=> Contradição, seja G euleriano (contém trilha euleriana fechada) e seus vértices não tem grau par.

<= Construir a prova por meio de uma trilha maximal, supondo que é aberta (mostrar que é fechada pela paridade de grau). Mostrar que a trilha fechada é euleriana por meio do fato de G ser conexo, haver uma trilha fechada e, portanto, há uma trilha que passe por todas as arestas.

<= Indução nas arestas. Para m = 0, G é conexo e há um vértice. Há uma trilha fechada que contemple todos os vértices. Para m >= 1. Como grau minimo >= 2, há um ciclo. Remove as arestas de C, aplica a hipótese de indução, reconstroi o ciclo inorporando as arestas á uma trilha.

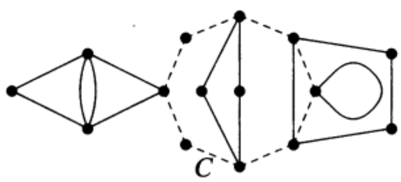
Proof: *Necessity.* Suppose that G has an Eulerian circuit C. Each passage of C through a vertex uses two incident edges, and the first edge is paired with the last at the first vertex. Hence every vertex has even degree. Also, two edges can be in the same trail only when they lie in the same component, so there is at most one nontrivial component.

Sufficiency. Assuming that the condition holds, we obtain an Eulerian circuit using induction on the number of edges, m.

Basis step: $m = 0$. A closed trail consisting of one vertex suffices.

Induction step: $m > 0$. With even degrees, each vertex in the nontrivial component of G has degree at least 2. By Lemma 1.2.25, the nontrivial component has a cycle C. Let G' be the graph obtained from G by deleting $E(C)$.

Since C has 0 or 2 edges at each vertex, each component of G' is also an even graph. Since each component also is connected and has fewer than m edges, we can apply the induction hypothesis to conclude that each component of G' has an Eulerian circuit. To combine these into an Eulerian circuit of G, we traverse C, but when a component of G' is entered for the first time we detour along an Eulerian circuit of that component. This circuit ends at the vertex where we began the detour. When we complete the traversal of C, we have completed an Eulerian circuit of G. ■



.Um grafo conexo G contém uma trilha euleriana aberta sse G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

.Todos os vértices de um grafo G têm grau par sse G admite uma decomposição em ciclos.

=> Usar um exemplo minimal em um grafo com menor quantidade de arestas possível tal que todos os vértices tenham grau par e, por contradição, não admitem decomposição por ciclos. Tendo grau par, certamente há um ciclo em G. Removendo um ciclo, todos os graus são decrecidos em 2, ainda sendo pares em G' = G - C. G' não admite decomposição em ciclos pois essa decomposição com C formaria

decomposição em ciclos de G. Logo, como e(G') < e(G), há uma contradição com a minimalidade de G.
<= Se admite decomposição em ciclos, há a necessidade de haver ciclos, então por teorema graumin(G) >= 2

$\Leftarrow$ *Demonstração.* Se G admite uma decomposição em ciclos, então basta observar que todos os vértices de um ciclo têm grau 2 para concluir que todos os vértices de G têm grau par.

$\Rightarrow$ Vamos agora provar que se todos os vértices de um grafo G têm grau par então G admite uma decomposição em ciclos. Seja G um contra-exemplo minimal, i.e., um grafo com a menor quantidade de arestas possível tal que todos seus vértices têm grau par e G não admite decomposição em ciclos. Note que certamente G possui arestas, logo G tem algum vértice de grau dois. Pelo Teorema 1.4, sabemos que G tem um ciclo. Seja C um ciclo de G e considere o grafo G' obtido da remoção das arestas de C do grafo G. Como todos os vértices de um ciclo têm grau 2 e os vértices de G têm grau par, sabemos que todos os vértices de G' também têm grau par. Note que G' não admite uma decomposição em ciclos, pois se isso acontecesse, essa decomposição juntamente com C formaria uma decomposição em ciclos do grafo G. Logo, como $e(G') < e(G)$, temos uma contradição com a minimalidade de G. □

.Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. As seguintes informações são equivalentes:

1. G é uma árvore
2. Entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho
3. G é conexo, então toda aresta de G é uma ponte.
4. G é conexo e $m = n - 1$
5. G é acíclico e $m = n - 1$
6. G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes u e v temos que $G[E \cup \{uv\}]$ tem exatamente um ciclo.

(1 $\Rightarrow$ 2) Por definição, se G é uma árvore, então G é conexo e acíclico. Suponha por contradição que existem vértices u e v tal que existem dois caminhos entre eles. Sejam P_1 e P_2 dois caminhos entre u e v. Considere o caminho mais longo P com início em u que pertence aos caminhos P_1 e P_2. Seja w o último vértice de P e seja z o primeiro vértice comum a P_1 e P_2 que está após w nesses caminhos. Como os trechos de P_1 e P_2 entre w e z tem somente esses vértices em comum, eles formam um ciclo, uma contradição.

(2 $\Rightarrow$ 3) Suponha que exista um único caminho entre quaisquer dois vértices de G. Portanto, o grafo é conexo, mas não contém ciclos. Considere agora uma aresta qualquer uv de G e seja G' o grafo $G[E \setminus \{uv\}]$. Suponha por contradição que G' é conexo. Logo, existe um caminho entre u e v em G'. Esse caminho juntamente com a aresta uv forma um ciclo em G, uma contradição.

(3 $\Rightarrow$ 4) Seja G um grafo conexo tal que toda aresta de G é ponte. Sabemos do Teorema 1.7 que pontes não pertencem a ciclos, de onde concluímos que G é acíclico. Mas como G é conexo e acíclico, a Proposição 4.3 garante que $m = n - 1$.

(4 $\Rightarrow$ 5) Se G é conexo e $m = n - 1$, então pela Proposição 4.2 sabemos que G é acíclico.

(5 $\Rightarrow$ 6) Seja G um grafo acíclico e considere $m = n - 1$. Sejam u e v dois vértices quaisquer não adjacentes. Pela Proposição 4.6, G é conexo. Como G é acíclico e conexo, por definição, G é uma árvore. Como mostramos que 1 $\Rightarrow$ 2, concluímos que existe um único caminho P entre u e v em G. Logo, a adição da aresta uv forma um único ciclo com P.

(6 $\Rightarrow$ 1) Seja G um grafo acíclico tal que para todo par de vértices não adjacentes u e v o grafo $G[E \cup \{uv\}]$ tem exatamente um ciclo. Com a existência desse ciclo, sabemos que em G existe um caminho entre u e v. Portanto, G é conexo. Como G é, por hipótese, acíclico, concluímos a prova. $\square$

.Um vértice *v* de uma árvore é vértice de corte sse *v* não é uma folha.

.Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

.**Teorema de Dirac:** Seja *G* um grafo com $n >= 3$ vértices. Se $\delta(G) >= n/2$ então *G* é hamiltoniano.

//Supor por contradição que um grafo G com n >=3 δ(G) >= n/2 não é hamiltoniano e tem a maior quantidade de arestas possível. Assim, a adição de qualquer aresta a G o torna um grafo hamiltoniano. Sejam u e v dois vértices não adjacentes em G e H = G + uv hamiltoniano (pela maximalidade de G). Consideramos os conjuntos U = {vi : vi pertence a N(u)} e V = {vi-1 : vi-1 pertence a N(v)}. Os conjuntos são disjuntos por G não possuir ciclo hamiltoniano. u não pertence a U união V, portanto, |U união V| <= n -1. Logo: n - 1 >= |U uniao V| = |U| + |V| - |U inter V| = |U| + |V| = d(u) + d(v) >= por hipotese de indução n/2 + n/2 = n.

//Observar que G, que atente a hipótese com n>= 3 e δ(G) >=n/2 é conexo, uma vez que existe uma componente com mais que n/2 vérrices (1 vértice + δ(G) vértices vizinhos), de modo que se G fosse desconexo existiria uma componente com menos que n/2 vértices e implicaria na existência de um vértice de grau < 2. Supor um caminho maximal P, observar que d(v), d(u), para quaisquer u,v é >= n/2, então, pelo princípio da casa dos pombos, eles possuem um vértice vizinho em comum, o que configura um ciclo. Como P é um caminho maximal passando por todos os vértices e por ele ocorre um ciclo, há um ciclo hamiltoniano em G.

Demonstração 1. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n \geq 3$ vértices e $\delta(G) \geq n/2$. Começamos notando que G é conexo, pois como $\delta(G) \geq n/2$ existe uma componente com mais que $n/2$ vértices, de modo que caso G seja desconexo existiria uma componente com menos que $n/2$ vértices e isso implicaria na existência de um vértice com grau menor que $n/2$.

Seja $P = (v_1, \ldots, v_k)$ um maior caminho de G. Assim, todos os vizinhos de v_1 e v_k pertencem a P. Como $d(v_1), d(v_k) \geq n/2$, sabemos pelo princípio da casa dos pombos que existe um vértice v_i em P tal que $v_{i+1} \in N(v_1)$ e $v_i \in N(v_k)$. Portanto, temos um ciclo

$$C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1)$$

que contém todos os vértices de P (veja Figura 8.2).

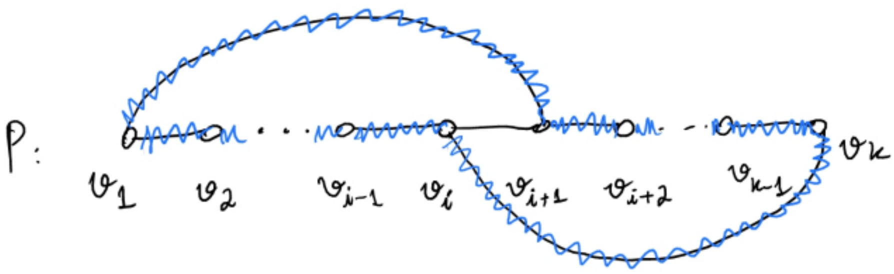


Figura 8.2: Ciclo $C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1)$ marcado em azul.

Caso exista um vértice de V que não está em C, pela conexidade de G, existiria uma aresta xv_j com $x \notin V(C)$. Mas então essa aresta juntamente com um caminho gerador de C formaria um caminho maior que P, uma contradição. Portanto, C é um ciclo hamiltoniano de G. $\square$

.**Teorema de Bondy-Chvátal:** Seja *G* um grafo com *n* vértices. Se *G* contém vértices não adjacentes *u* e *v* tais que *d(u) + d(v) >= n*, então o seguinte vale. O grafo *G* é hamiltoniano sse *G + uv* é hamiltoniano.
.**Teorema de Ore:** Seja *G* um grafo com *n >= 3* vértices. Se para todo par de vértices não adjacentes *{u,v}* vale que *d(u) + d(v) >= n*, então *G* é hamiltoniano.
Segue da demonstração de dirac
.**Teorema de Rédei:** Todo torneio possui um caminho hamiltoniano.

Proposições:

.Dado um grafo *G*, temos que *Σd(v) = 2E(G)*.
//Indução na quantidade de vértices. Se tira um vértice, aplica a hipótese e faz a manipulação de valores. Ou indução nas arestas, que acho mais fácil

Demonstração 2 (Indução na quantidade de arestas) - Proposição 1.1. Vamos provar a proposição por indução na quantidade de arestas do grafo G. Para a base, note que quando G não tem arestas o resultado é válido. Suponha que para qualquer grafo G' com menos que $e(G)$ arestas temos $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2e(G')$.

Remova uma aresta uv de G obtendo um grafo G' com $e(G') = e(G) - 1$ arestas. Note que, como G' contém os mesmos vértices de G e exatamente uma aresta a menos, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v). \tag{1.2}$$

4

Pela hipótese de indução, concluímos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + 2e(G') = 2(e(G') + 1) = 2e(G). \tag{1.3}$$

□

.Todo grafo *G* com *V(G) >= 2* contém dois vertices com o mesmo grau.

.Para todo grafo bipartido com n vértices, então G tem no máximo $n^2/4$ aresats.
.Se G é um grafo com n vértices sem ciclos ímpares, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas.
.Seja G um grafo conexo com n vértices. Se G tem exatamente $n - 1$ arestas, então G não contém ciclos.
.Seja G um grafo conexo com n vértices. Se G não contém ciclos, então G tem exatamente $n - 1$ arestas.
.Seja G um grafo com n vértices e $n - 1$ arestas. Se G não contém ciclos, então G é conexo.
.Todo grafo par pode ser decomposto em ciclos.
.Todo grafo G que contém um ciclo satisfaz $\delta(G) <= 2.diam(G) + 1$
.Se G é um grafo simples cujos vértices possuem grau pelo menos k, então G contém um caminho de tamanho pelo menos k. Se $k >= 2$, então G também contém um ciclo de tamanho pelo menos $k + 1$.
//Seja P um caminho maxinal e u um vértice da extremidade. Como P é maximal, todo vizinho de u está em P. Como u possui pelo menos k vizinhos e G é simples, P possui ao menos k outros vértices além de u e possui comprimento k. Se k >= 2, a aresta de u ao seu sucessor, por P ser maximal, já está em P, o que incrementa em 1 a aresta do caminho e o torna um ciclo.

Proof: Let u be an endpoint of a maximal path P in G. Since P does not extend, every neighbor of u is in $V(P)$. Since u has at least k neighbors and G is simple,

P therefore has at least k vertices other than u and has length at least k. If $k \geq 2$, then the edge from u to its farthest neighbor v along P completes a sufficiently long cycle with the portion of P from v to u. ■

.Todo grafo com arestas sem laço possui ao menos dois vértices que não são vértices de corte.
.Todo grafo com n vértices e k arestas possui ao menos $n - k$ componentes.
.Uma classe de isomorfismo é uma classe de equivalência.
//Tranquilinho de fazer. Provar simetria, reflexão e transitividade

the set of (simple) graphs.

Proof: *Reflexive property.* The identity permutation on $V(G)$ is an isomorphism from G to itself. Thus $G \cong G$.

Symmetric property. If $f\colon V(G) \to V(H)$ is an isomorphism from G to H, then f^{-1} is an isomorphism from H to G, because the statement "$uv \in E(G)$ if and only if $f(u)f(v) \in E(H)$" yields "$xy \in E(H)$ if and only if $f^{-1}(x)f^{-1}(y) \in E(H)$". Thus $G \cong H$ implies $H \cong G$.

Transitive property. Suppose that $f\colon V(F) \to V(G)$ and $g\colon V(G) \to V(H)$ are isomorphisms. We are given "$uv \in E(F)$ if and only if $f(u)f(v) \in E(G)$" and "$xy \in E(G)$ if and only if $g(x)g(y) \in E(H)$". Since f is an isomorphism, for every $xy \in E(G)$ we can find $uv \in E(F)$ such that $f(u) = x$ and $f(v) = y$. This

yields "$uv \in E(F)$ if and only if $g(f(u))g(f(v)) \in E(H)$". Thus the composition $g \circ f$ is an isomorphism from F to H. We have proved that $F \cong G$ and $G \cong H$ together imply $F \cong H$. ■

.Se $k > 0$, um grafo bipartido k-regular possui o mesmo número de vértices em cada bipartição.

.A quantidade mínima de arestas em um grafo conexo com n vértices é dada por $n - 1$.

//Para n = 1, trivial. Estudo de dois casos:

$\delta(G) >= 2$: como 2E(G) = som(d(v)) >= 2n, então E(G) >= n >= n -1

$\delta(G) < 2$: há um vertice de grau um em G. remoce-o de G criando um G', aplica a hipótese de indução onde |E(G')| >= |V(G')| - 1 e reconstroi |E(G)| = |E(G')| + 1 e |V(G)| = |V(G')| + 1, |E(G)| >= |V(G)| - 1 - 1 + 1

Proof: By Proposition 1.2.11, every graph with n vertices and k edges has at least $n - k$ components. Hence every n-vertex graph with fewer than $n - 1$ edges has at least two components and is disconnected. The contrapositive of this is that every connected n-vertex graph has at least $n - 1$ edges. This lower bound is achieved by the path P_n. ■

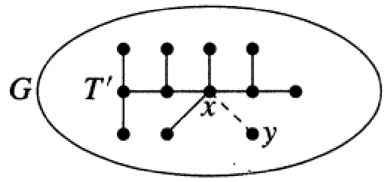
.Se G é um grafo simples com n vértices com $\delta(G) >= (n - 1)/2$, então G é conexo.

.Seja *T, T'* árvores geradoras de um grafo conexo *G* e *e* uma aresta em *E(T) - E(T')*, então existe uma aresta *e'* em *E(T) - E(T')* tal que *T - e + e'* seja uma árvore geradora de *G*.
.Seja *T, T'* árvores geradoras de um grafo conexo *G* e *e* uma aresta em *E(T) - E(T')*, então existe uma aresta *e'* em *E(T) - E(T')* tal que *T' + e - e'* seja uma árvore geradora de *G*.
.Seja *T* uma árvore com *k* arestas e *G* um grafo simples com *δ(G) >= k*, então *T* é subgrafo de *G*.
//Indução em k, com base k = 0. Removemos uma folha v com vizinho u de uma árvore T gerando T' = T - v. Aplicamos a hipótese de indução, G contém T', uma vez que δ(G)>= k >= k-1. Seja x o vértice em T' correspondente a u em T. Como dG(x) >= k, há um vértice y em G que não pertence à cópia de T'. Adicionando a aresta xy na cópia de T' na cópia de T em G, segue a hipótese. Basicamente tirar um vértice, valer hipótese de indução, e reconstruir uma cópia do modelo.

Proof: We use induction on k. Basis step: $k = 0$. Every simple graph contains K_1, which is the only tree with no edges.

Induction step: $k > 0$. We assume that the claim holds for trees with fewer than k edges. Since $k > 0$, Lemma 2.1.3 allows us to choose a leaf v in T; let u be its neighbor. Consider the smaller tree $T' = T - v$. By the induction hypothesis, G contains T' as a subgraph, since $\delta(G) \geq k > k - 1$.

Let x be the vertex in this copy of T' that corresponds to u (see illustration). Because T' has only $k - 1$ vertices other than u and $d_G(x) \geq k$, x has a neighbor y in G that is not in this copy of T'. Adding the edge xy expands this copy of T' into a copy of T in G, with y playing the role of v. ■



.Se *G* é um grafo hamiltoniano, então *c(G - S) <= |S|* para todo *S* contido em *V(G)*.
//Por contradição, supor que S contido em V(G) tal que c(G - S) > |S|. As componentes geradas por G-S Ti,...,Tc(G-S) não possuem arestas entre si. Mas para todo vertice de todas as componentes o ciclo hamiltoniano há duas arestas incidentes. Existem portanto 2.c(G-S) > 2.|S| arestas no cilo hamiltoniano C. Para valer a inequação, é preciso que exista ao menos um vértice de S com mais que duas arestas (contribuindo em um vértice em G-S), o que é uma contradição pela existência do ciclo.
//Saindo de uma componente G-S, um ciclo hamiltoniano pode ir de S para S usando vértices distintos de S. Portanto S deve possuir uma quantidade de vértices equivalente a quanto o grafo G-S possui componentes

Demonstração. Suponha por contradição que G contém um ciclo hamiltoniano C e que existe $S \subset V(G)$ tal que $c(G - S) > |S|$. Sejam $T_1, \ldots, T_{c(G-S)}$ as $c(G - S)$ componentes de $G - S$. Como cada T_i é uma componente de $G - S$, sabemos que não existem arestas entre essas componentes. Mas como C é um ciclo hamiltoniano, todo vértice de G está em C. Assim, para cada uma das componente de $G - S$ existem duas arestas de C que são incidentes a vértices de T_i e vértices de S. Portanto, existem pelo menos $2 \cdot c(G - S) > 2|S|$ arestas do ciclo hamiltoniano C que são incidentes a vértices de S. Logo, existe pelo menos um vértice de S com mais que duas arestas de C, uma contradição com o fato de C ser um ciclo. □

Lemas:

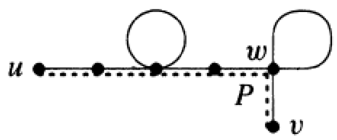
.Todo u,v-passeio contém um u,v-caminho.

//Indução no tamanho do passeio. Para l = 0, não há aresta, passeio e caminhos de comprimento 0. Para l > 0, se não há repetição de vértices, por definição é um caminho. Caso contrário, remover as arestas e vértices repetidas para todas as cópias de ocorrência para um vértice qualquer w, levando a um passeio W' menor que o passeio original W, que contém W'. Por hipótese de indução, W' contém um caminho P e P é contido em W.

Proof: We prove the statement by induction on the length l of a u, v-walk W.

Basis step: $l = 0$. Having no edge, W consists of a single vertex ($u = v$). This vertex is a u, v-path of length 0.

Induction step: $l \geq 1$. We suppose that the claim holds for walks of length less than l. If W has no repeated vertex, then its vertices and edges form a u, v-path. If W has a repeated vertex w, then deleting the edges and vertices between appearances of w (leaving one copy of w) yields a shorter u, v-walk W' contained in W. By the induction hypothesis, W' contains a u, v-path P, and this path P is contained in W. ■



.Todo passeio ímpar fechado contém um ciclo ímpar.

.Se todos os vértices de um grafo possuem grau de pelo menos dois, ou seja, $\delta(G) >= 2$, então G contém um ciclo.

.Em um grafo par, toda trilha maximal é fechada.

.Toda árvore com ao menos dois vértices possui ao menos duas folhas. Remover uma folha de uma árvore com n vértices implica na criação de uma árvore com n - 1 vértices.

//Um grafo com pelo menos dois vértices possui uma única aresta, onde cada vértice possui garu 1, cosntitui um grafo acíclico e conexo onde ambos os vértices são folhas. Em um grafo acíclico, uma extremidade de um caminho maximal não possui outro vizinho além do que está no caminho. Portanto, as extremidades de um caminho são folhas. Seja v uma folha de uma árvore G e G' = G - v o grafo resultante da remoção da folha. Para todo u,w-caminho em G o caminho é preservado em G', portanto é conexo. Como a remoção de um vértice não cria ciclo, G' é acíclico. G' é árvore com n-1 vértices.

Proof: A connected graph with at least two vertices has an edge. In an acyclic graph, an endpoint of a maximal nontrivial path has no neighbor other than its neighbor on the path. Hence the endpoints of a such a path are leaves.

Let v be a leaf of a tree G, and let $G' = G - v$. A vertex of degree 1 belongs to no path connecting two other vertices. Therefore, for $u, w \in V(G')$, every u, w-path in G is also in G'. Hence G' is connected. Since deleting a vertex cannot create a cycle, G' also is acyclic. Thus G' is a tree with $n - 1$ vertices. ■

.O fechamento de G é bem definido.

//pulei essa

Fatos:

.Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|E| >= |V| - 1$.

Demonstração. Se um grafo G tem somente um vértice, então o resultado vale trivialmente. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com n vértices. Suponha que todo grafo com $k < n$ vértices possui pelo menos $k - 1$ arestas.

Se $\delta(G) \geq 2$, então, pela Proposição 1.1, sabemos que

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2n.$$

POSSO PROVAR DE OUTRO JEITO

Assim, temos que $|E| \geq n$, provando o resultado. Podemos então assumir que G contém pelo menos um vértice v de grau 1. Seja $G' = G[V \setminus \{v\}]$. Assim, como G é conexo e G' foi obtido de G pela remoção de um vértice de grau 1, sabemos que G' é conexo. Como $|V(G')| = n - 1 < n$, sabemos, pela hipótese de indução, que $|E(G')| \geq |V(G')| - 1 = n - 2$. Portanto, temos que $|E| = E(G') + 1 \geq n - 1$. $\square$

Corolário:

.Todo grafo tem uma quantidade par de vértices de grau ímpar.
.Seja G um grafo com n vértices. G é uma árvore sse G é conexo e tem $n - 1$ arestas.
.Em um grafo G, o grau médio é dado por $2E(G)/n(G)$. Daí, $\delta(G) <= 2E(G)/n(G) <= \Delta(G)$.
.Todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar. Nenhum grafo ímpar é regular com grau ímpar.
.Um grafo k-regular com n vértices possui ao menos $nk/2$ arestas.
.Toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte.
.Adicionar uma aresta a uma árvore cria exatamente um ciclo.
.Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Conjectura:

.**Conjectura de Pósa-Seymour:** Seja G um grafo com $n >= 3$ vértices e seja k um inteiro positivo. Se $\delta(G) >= (k/(k + 1))n$, então G contém a k-ésima potência de um cilco hamiltoniano.

Ꭶ Visto em sala
Ꭶ Em lista