Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Segunda unidade – 3 de abril de 2017

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Usando os critérios de divisibilidade, encontre a decomposição, no produto de potências de primos, do número 3773.

2. Considere o conjunto ordenado $(D_{60}, |)$.

(a) Desenhe o diagrama de Hasse dele.

(b) Encontre os elementos minimais e maximais de $D_{60} \setminus \{1, 60\}$.

(c) Determine se D_{60} é ou não uma álgebra de Boole. Caso não seja, apresente pelo menos um elemento não complementado.

(d) Se possível, encontre um elemento de D_{60} que tenha mais de um complemento. Se não, explique porque um tal elemento não existe.

3. Considere a álgebra de Boole $\mathbf{D_{110}} = (D_{110}, \mathrm{mmc}, \mathrm{mdc}, \frac{110}{\cdot}, 1, 110)$. Encontre, explicando como, um conjunto X tal que a álgebra de Boole $\mathbf{2^X} = (\wp(X), \cup, \cap, ^c, \varnothing, X)$ seja isomorfa a $\mathbf{D_{110}}$ e apresente um isomorfismo entre as duas.

4. Desenhe o diagrama de Hasse do produto lexicográfico $X \times_{\mathrm{lex}} Y$, onde $X = (\{0, 1\}, \leq)$ e $Y = (\wp(\{a, b\}), \subseteq)$.

5. (Optativa) Demonstre que, em qualquer álgebra de Boole B, vale:

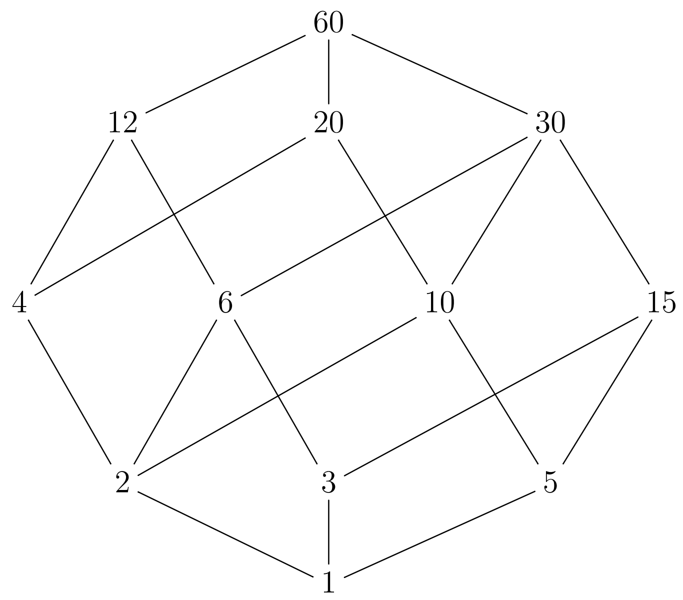
$$\forall x (x \leq \neg x \iff x = \bot).$$

1. Os algarismos de lugar par de 3773 são os mesmos que aqueles de lugar impar, então a diferença entre as somas deles dá 0, que é múltiplo de 11. Portanto 3773 é múltiplo de 11: $3773 = 11 \cdot 343$.

343 tem o algarismo das unidades que é impar e não é 5, então não é múltiplo de 2, nem de 5. Igualmente, não é múltiplo de 3, pois $3 + 4 + 3 = 10$ e 10 não é múltiplo de 3.

343 é múltiplo de 7, pois $34 - 2 \cdot 3 = 28 = 4 \cdot 7$. Dividindo 343 por 7, obtemos $343 = 49 \cdot 7$ e, como $49 = 7^2$, segue: $3773 = 7^3 \cdot 11$.

2. (a) O diagrama de Hasse de D_{60} é o seguinte



(b) Os elementos minimais de $D_{60} \setminus \{1, 60\}$ são 2, 3 e 5 e os maximais 12, 20 e 30.

(c) Sabemos que D_n é uma álgebra de Boole se, e só se, n se, a decomposição de n, em produto de potências de primos dois a dois distintos, tem todos os expoentes iguais a 1. Neste caso, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, então D_{60} não é uma álgebra de Boole.

Um elemento não complementado é, por exemplo, 2. De fato, o único $x \in D_{60}$ tal que $x \vee 2 = 60$ é o próprio 60, mas $2 \wedge 60 = 2 \neq 1$.

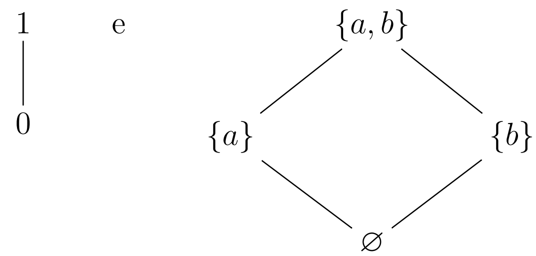
(d) D_{60}, apesar de não ser uma álgebra de Boole, é um reticulado distributivo e limitado. Em um reticulado distributivo e limitado, se um elemento tiver complementar, esse complementar é único. Portanto D_{60} não tem elementos com mais de um complementar.

3. $D_{110} = \{1, 2, 5, 11, 10, 22, 55, 110\}$, então $|D_{110}| = 2^3$. Pelo Teorema de Representação de Stone (caso finito), $\mathbf{D_{110}}$ é isomorfa à álgebra de Boole das partes de um conjunto de três elementos. Seja $X = \{a, b, c\}$; $\mathbf{D_{110}} \cong \mathbf{2^X}$.

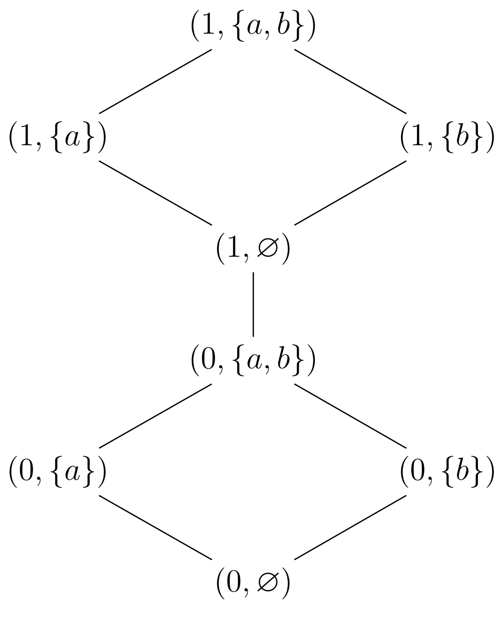
Uma função entre as duas álgebras é um isomorfismo se, e somente se, ela associa 1 a $\varnothing$, 110 a X, átomos a átomos, e o complementar de cada átomo ao complementar da imagem do mesmo átomo. Por exemplo, a função a seguir é um isomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} f: & D_{110} & \to & \wp(X) \\ & 1 & \mapsto & \varnothing \\ & 2 & \mapsto & \{a\} \\ & 5 & \mapsto & \{c\} \\ & 11 & \mapsto & \{b\} \\ & 10 & \mapsto & \{a,c\} \\ & 22 & \mapsto & \{a,b\} \\ & 55 & \mapsto & \{b,c\} \\ & 110 & \mapsto & X \end{array}$$

4. Os diagramas de Hasse de X e Y, respectivamente,



Então o diagrama de Hasse de $X \times_{\text{lex}} Y$ é o seguinte:



5. Sabemos que, em todo reticulado, vale, por definição:

$$\forall x \forall y (x \leq y \iff x \vee y = y).$$

Por outro lado, nas álgebras de Boole, vale:

$$\forall x (x \vee \neg x = \top).$$

Portanto, em qualquer álgebra de Boole B e para todo $x \in B$, vale a seguinte cadeia de equivalencias:

$$x \leq \neg x \iff x \vee \neg x = \neg x \iff \top = \neg x \iff \bot = x.$$