$(S, \leq)$ poset

$(L, \vee, \wedge)$ reticulados

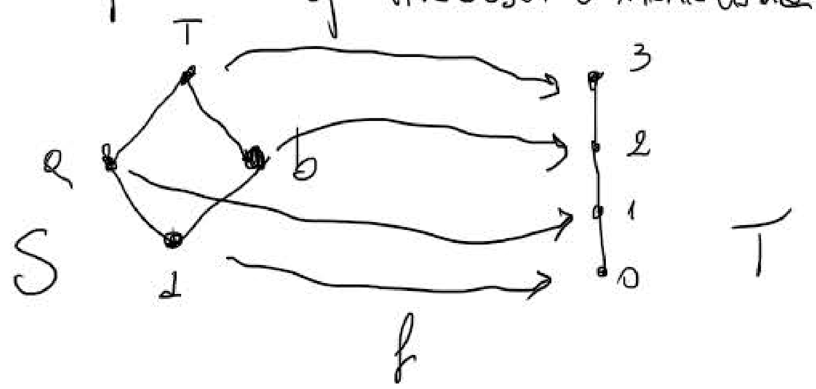
$(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ álgebras de Boole

Poset	Reticulados	Álgebras de Boole
Funções monótonas $\Leftarrow$	hom. de reticulados $\Leftarrow$	hom. de álg. de Boole
$\not\Rightarrow$	$\not\Rightarrow$	

hom. injetor é dito <u>imersão</u>

hom. (de retic. ou de álg. de Boole) bijetor é dito <u>isomorfismo</u>

Função monótona bijetora cuja inversa é monótona é dita <u>isomorfismo de ordem</u>.



f é monótona pois $\bot \leq x \ \forall x \in S$ e $f(\bot) = 0 \leq f(x) \ \forall x \in S$

$\top \geq x \ \forall x \in S$ e $f(\top) = 3 \geq f(x) \ \forall x \in S$

f é bijetora, pois $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \ \forall x, y \in S$ e

$\forall z \in T \ \exists x \in S$ t.q. $f(x) = z$.

$$f^{-1}: \begin{array}{l} 0 \mapsto \bot \\ 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto \top \end{array}$$

$1 \leq 2$ mas $f^{-1}(1) = a \not\leq b = f^{-1}(2) \Rightarrow$

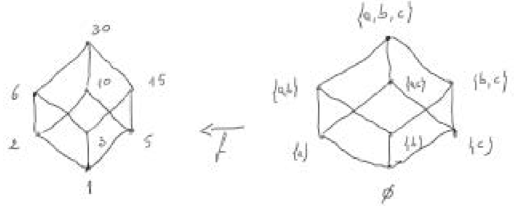
$\Rightarrow f^{-1}$ não é monótona e, então, f não é um isomorfismo de ordem.

$a \wedge b = \bot$ $\quad f(a) \wedge f(b) = 1 \wedge 2 = 1$

$f(a \wedge b) = f(\bot) = 0$ $\times$ $\Rightarrow f$ não é hom. de reticulados.

Proposição $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, o reticulado $(D_n, \text{mmc}, \text{mdc})$ é uma álgebra de Boole se, e somente se, n é produto de primos dois a dois distintos, isto é, para todo primo p, $p^2 \nmid n$.

$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ $\quad\quad$ $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$



$\forall Y \in \mathcal{P}(\{a,b,c\})$, seja $\chi_Y : \{a,b,c\} \to \{0,1\}$

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin Y \\ 1 & \text{se } x \in Y \end{cases}$$

$\chi_{\{a\}}(a) = 1, \quad \chi_{\{a\}}(b) = 0 = \chi_{\{a\}}(c)$ $\quad\quad$ $\chi_\emptyset \equiv 0$

$\chi_{\{a,c\}}(a) = 1 = \chi_{\{a,c\}}(c), \quad \chi_{\{a,c\}}(b) = 0$ $\quad\quad$ $\chi_{\{a,b,c\}} \equiv 1$

$$f : \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \mapsto D_{30}$$
$$Y \mapsto 2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)} \cdot 5^{\chi_Y(c)}$$

Para demonstrar que uma função é um homomorfismo de álg. de Boole, é suficiente verificar que preserva:

- a complementação $\quad (f(\neg x) = \neg f(x) \ \ \forall x)$
- uma entre $\vee$ e $\wedge$, ou seja, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ ou $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \ \ \forall x, y$
- uma entre $\perp$ e $\top$, ou seja, $f(\perp) = \perp$ ou $f(\top) = \top$

$$f(Y^c) = 2^{\chi_{Y^c}(a)} \cdot 3^{\chi_{Y^c}(b)} \cdot 5^{\chi_{Y^c}(c)} = \qquad \chi_{Y^c} = 1 - \chi_Y$$

$$= 2^{1-\chi_Y(a)} \cdot 3^{1-\chi_Y(b)} \cdot 5^{1-\chi_Y(c)} = \frac{2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1}{2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)} \cdot 5^{\chi_Y(c)}} = \frac{30}{f(Y)} =$$

$$= \neg f(Y) \Rightarrow f(Y^c) = \neg f(Y).$$

$$f(Y\cup Z) = 2^{\chi_{Y\cup Z}(a)} \cdot 3^{\chi_{Y\cup Z}(b)} \cdot 5^{\chi_{Y\cup Z}(c)} = \qquad \chi_{Y\cup Z}(x) = \max(\chi_Y(x), \chi_Z(x))$$

$$= 2^{\max(\chi_Y(a), \chi_Z(a))} \cdot 3^{\max(\chi_Y(b), \chi_Z(b))} \cdot 5^{\max(\chi_Y(c), \chi_Z(c))} =$$

$$= \text{mmc}\left(2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)} \cdot 5^{\chi_Y(c)},\ 2^{\chi_Z(a)} \cdot 3^{\chi_Z(b)} \cdot 5^{\chi_Z(c)}\right) =$$

$$= \text{mmc}(f(Y), f(Z)) = f(Y) \vee f(Z) \Rightarrow f \text{ preserva } \vee$$

$f(\emptyset) = 2^{\chi_\emptyset(a)} \cdot 3^{\chi_\emptyset(b)} \cdot 5^{\chi_\emptyset(c)} = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$ que é o mínimo de D_{30}.

f é homomorfismo de álgebras de Boole.

Sejam $Y \neq Z \in \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \Rightarrow \exists x \in Y \setminus Z$ ou $x \in Z \setminus Y$.

Sem perda, podemos supor $x \in Y \setminus Z$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } x = a,\ 2 \mid f(Y) \text{ e } 2 \nmid f(Z) \\ \text{Se } x = b,\ 3 \mid f(Y) \text{ e } 3 \nmid f(Z) \\ \text{Se } x = c,\ 5 \mid f(Y) \text{ e } 5 \nmid f(Z) \end{array}\right] \Rightarrow f(Y) \neq f(Z)$$

Logo, f é injetora.

$\forall x \in D_{30}$, $x = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3}$, com $t_1, t_2, t_3 \in \{0,1\}$

Seja Y o subconjunto de $\{a,b,c\}$ cuja função χ_Y é:

$\chi_Y(a) = t_1$, $\chi_Y(b) = t_2$, $\chi_Y(c) = t_3$

Então $f(Y) = 2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)} \cdot 5^{\chi_Y(c)} = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} = x$

Logo, f é sobrejetora.

Então f é um isomorfismo de álgebras de Boole.

$f: X \to Y$ é sobrejetora se $\forall y \in Y\ \exists x \in X\ (f(x) = y)$

$f: X \to Y$ é injetora se $\forall x, x' \in X\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$
$(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

$$f^{-1} : D_{30} \to \mathcal{P}(\{a,b,c\})$$

$$x = 2^{t_1} 3^{t_2} 5^{t_3} \mapsto Y \text{ definido por:}$$

$a \in Y$ sse $t_1 = 1$

$b \in Y$ sse $t_2 = 1$

$c \in Y$ sse $t_3 = 1$

$$f \circ f^{-1} = id_{D_{30}}$$

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathcal{P}(\{a,b,c\})}$$

$$g : Y \in \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \mapsto 2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\max(\chi_Y(b), \chi_Y(c))} \in D_{30}$$

$g(\{a,b,c\}) = 2^1 \cdot 3^1 = 6 \neq 30 \Rightarrow g$ não é hom. de álg. de Boole.

$$g(Y \cup Z) = 2^{\chi_{Y \cup Z}(a)} \cdot 3^{\max(\chi_{Y \cup Z}(b), \chi_{Y \cup Z}(c))} = 2^{\max(\chi_Y(a), \chi_Z(a))} \cdot$$

$$\cdot 3^{\max(\max(\chi_Y(b), \chi_Z(b)), \max(\chi_Y(c), \chi_Z(c)))} =$$

$$= 2^{\max(\chi_Y(a), \chi_Z(a))} \cdot 3^{\max(\max(\chi_Y(b), \chi_Y(c)), \max(\chi_Z(b), \chi_Z(c)))} =$$

$$= \text{mmc}\left(2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\max(\chi_Y(b), \chi_Y(c))}, 2^{\chi_Z(a)} \cdot 3^{\max(\chi_Z(b), \chi_Z(c))}\right) =$$

$$= \text{mmc}(g(Y), g(Z)) = g(Y) \vee g(Z)$$

$$g(Y\cap Z) = 2^{\chi_{Y\cap Z}(a)} \cdot 3^{\chi_{Y\cap Z}(b) \vee \chi_{Y\cap Z}(c)} = 2^{\chi_Y(a)\wedge\chi_Z(a)} \cdot$$

$$\cdot\, 3^{(\chi_Y(b)\wedge\chi_Z(b))\vee(\chi_Y(c)\wedge\chi_Z(c))} = 2^{\chi_Y(a)\wedge\chi_Z(a)}\cdot$$

$$\cdot\, 3^{((\chi_Y(b)\wedge\chi_Z(b))\vee\chi_Y(c))\wedge((\chi_Y(b)\wedge\chi_Z(b))\vee\chi_Z(c))} =$$

$$= 2^{\chi_Y(a)\wedge\chi_Z(a)}\cdot 3^{(\chi_Y(b)\vee\chi_Y(c))\wedge(\chi_Z(b)\vee\chi_Y(c))\wedge(\chi_Y(b)\vee\chi_Z(c))\wedge(\chi_Z(b)\vee\chi_Z(c))}$$

$$g(Y)\wedge g(Z) = mdc\left(2^{\chi_Y(a)}\cdot 3^{\chi_Y(b)\vee\chi_Y(c)},\ 2^{\chi_Z(a)}\cdot 3^{\chi_Z(b)\vee\chi_Z(c)}\right) =$$

$$= 2^{\chi_Y(a)\wedge\chi_Z(a)}\cdot 3^{(\chi_Y(b)\vee\chi_Y(c))\wedge(\chi_Z(b)\vee\chi_Z(c))}$$

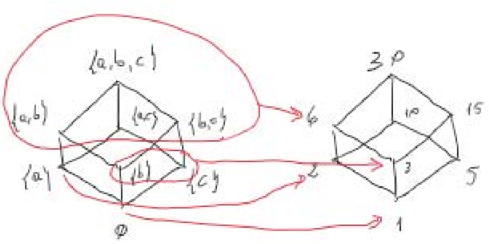
$$g(\{b\}) = 2^0\cdot 3^1 = 3 = 2^0 \cdot 3^1 = g(\{c\}) \Rightarrow g(\{b\})\wedge g(\{c\}) = mdc(3,3)=3$$

$g(\{b\}\cap\{c\}) = g(\emptyset) = 1 \neq 3 \Rightarrow \wedge$ não é preservado $\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ não é homom. de reticulados.

g é função monótona, pois, se $Y\subseteq Z$ então $\chi_Y(x)\le\chi_Z(x)$ $\forall x\in\{a,b,c\} \Rightarrow 2^{\chi_Y(a)}\cdot 3^{\chi_Y(b)\vee\chi_Y(c)} \mid 2^{\chi_Z(a)}\cdot 3^{\chi_Z(b)\vee\chi_Z(c)}$

$\Rightarrow (Y\subseteq Z \Rightarrow f(Y)\mid f(Z))$ ~



$$h(Y) = 2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)}$$

$$h(Y \wedge Z) = 2^{\chi_Y(a) \wedge \chi_Z(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b) \wedge \chi_Z(b)} = \mathrm{mdc}\left(2^{\chi_Y(a)} 3^{\chi_Y(b)}, 2^{\chi_Z(a)} 3^{\chi_Z(b)}\right)$$

$$= \mathrm{mdc}\left(h(Y), h(Z)\right) = h(Y) \wedge h(Z)$$

$$h(Y \vee Z) = 2^{\chi_Y(a) \vee \chi_Z(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b) \vee \chi_Z(b)} = \mathrm{mmc}\left(2^{\chi_Y(a)} \cdot 3^{\chi_Y(b)}, 2^{\chi_Z(a)} \cdot 3^{\chi_Z(b)}\right)$$

$$= \mathrm{mmc}\left(h(Y), h(Z)\right) = h(Y) \vee h(Z)$$

$$h(\{a,b,c\}) = 2^1 \cdot 3^1 = 6 \neq 30$$

$$h(\{a\}) = 2^1 \cdot 3^0 = 2 \qquad h(\{a\}^c) = h(\{b,c\}) = 2^0 \cdot 3^1 = 3 \neq \frac{30}{2}$$

h é hom. de reticulados mas não de álgebras de Boole.