Aplicação da Prova de Diagonal de Cantor
Profa. Laís Salvador
(Adaptado de J.L. Rangel – Linguagens Formais)

Teorema: O conjunto $2^{\mathbf{N}}$ dos subconjuntos dos naturais (**N**) não é um conjunto enumerável.
Dem.: **por "diagonalização".**

Uma vez que a definição de conjunto enumerável se baseia na existência de uma função com certas propriedades, devemos mostrar que tal função não existe, e a demonstração será feita por contradição (ou redução ao absurdo).

Suponhamos que o conjunto $2^{\mathbf{N}}$ é enumerável. Isto significa que existe uma enumeração de $2^{\mathbf{N}}$, ou seja uma sobrejeção $f: \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{N}}$. Assim, para cada elemento A de $2^{\mathbf{N}}$ (um conjunto A de naturais), existe um número i tal que $f(i) = A$.

Vamos considerar o conjunto X definido a seguir:
$X = \{ j \in \mathbf{N} \mid j \notin f(j) \}$

Por exemplo, se assumirmos a seguinte enumeração:

$f(0) = \{1,3,4\}$ $f(3) = \{0,1,3\}$
$f(1) = \{0,3\}$ $f(4) = \{5\}$
$f(2) = \{2,4,5\}$ $f(5) = \{1,2\}$

temos:

$X=\{0,1,4,5,..\}$

Como X é um conjunto de naturais, $X \in 2^{\mathbf{N}}$. Entretanto, veremos que X não faz parte da enumeração definida por f. Seja k um natural qualquer. Duas possibilidades podem ocorrer:

- ou $k \in f(k)$, e neste caso $k \notin X$,
- ou $k \notin f(k)$, e neste caso $k \in X$.

Nos dois casos os conjuntos X e f(k) diferem em pelo menos um elemento. Assim,

$$X \neq f(k) \ \forall k$$

Portanto X não faz parte da enumeração definida por f, caracterizando-se uma contradição. Consequentemente, $2^{\mathbf{N}}$ não é enumerável.
□

Esta técnica de demonstração recebeu o nome de *diagonalização,* desenvolvida no final do século XIX pelo matemático russo Georg Cantor (1845-1918) . Por que diagonalização ou diagonal de Cantor?

Inicialmente representamos um conjunto $A \subseteq \mathbf{N}$ por uma sequência infinita de bits:
se $i \in A$, o i-ésimo símbolo da sequência será 1; caso contrário, será 0.

Por exemplo, para

$A = \{1, 3, 4\}$

temos a seguinte sequência de bits:

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	1	1	0	0	...

Assim, se fizéssemos uma tabela de bits infinita onde cada linha i correspondesse ao conjunto f(i) da enumeração, $i \in \mathbf{N}$, por exemplo:

		0	1	2	3	4	5	...	Conjuntos Exemplos
f(0)	0	0	1	0	1	1	0	...	$f(0) = \{1,3,4\}$
f(1)	1	1	0	0	1	0	0	...	$f(1) = \{0,3\}$
f(2)	2	0	0	1	0	1	1	...	$f(2) = \{2,4,5\}$
f(3)	3	1	1	0	1	0	0	...	$f(3) = \{0,1,3\}$
f(4)	4	0	0	0	0	0	1	...	$f(4) = \{5\}$
f(5)	5	0	1	1	0	0	0	...	$f(5) = \{1,2\}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

O conjunto $X = \{ j \in \mathbf{N} \mid j \notin f(j) \}$
seria definido invertendo o que se encontra na diagonal principal (D) da tabela, pois:

- se na posição (k,k) se encontra um 1, indicando que $k \in f(k)$, na linha correspondente a X teríamos um 0 na k-ésima coluna, indicando que $k \notin X$,
- se na posição (k,k) se encontra um 0, indicando que $k \notin f(k)$, na linha correspondente a X teríamos um 1 na k-ésima coluna, indicando que $k \in X$.

Para qualquer $k \in \mathbf{N}$.

No exemplo acima teríamos:

$D = \{0,0,1,1,0,0...\}$
$X = D' = \{1,1,0,0,1,1..\}$
Lembrando que $X = \{0, 1, 4, 5,...\}$ usando a notação usual de conjuntos.

Então, como encaixar X na enumeração definida por f ?

Vamos tentar colocar X numa linha **k** da nossa matriz:

		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**k**
f(0)	**0**	0	1	0	1	1	0	...	...
f(1)	**1**	1	0	0	1	0	0	...	...
f(2)	**2**	0	0	1	0	1	1	...	...
f(3)	**3**	1	1	0	1	0	0	...	...
f(4)	**4**	0	0	0	0	0	1	...	...
f(5)	**5**	0	1	1	0	0	0	...	...
...	...	...	...	...	...	..	...	...	...
X= f(k)	k	1	1	0	0	1	1	...	**?**

O que acontece na posição (k,k)?
Ela não pode ser definida, caracterizando-se uma contradição.

Podemos ver que, para qualquer k, $f(k) \neq X$. Para isso, basta notar que k pertence a exatamente um dos dois conjuntos f(k) e X. Portanto, qualquer que fosse a enumeração de 2^N, X não pertenceria a ela.

Exercício:
Provar que o conjunto dos números reais x, 0 < x < 1, é não enumerável.

Fonte:
Apostila do prof. José Lucas Rangel - Capítulo 0:
http://www.tecmf.inf.puc-rio.br/LFA