Notas de aulas da disciplina de Lógica, primeira parte

Steffen Lewitzka

17 de agosto de 2021

Este script está em fase de elaboração.

Literatura secundária:
F. Soares Corrêa Silva, A. C. Vieira de Melo, M. Finger: *Lógica para Computação*. Thomson Pioneira
U. Schöning: *Logic for Computer Scientists*. Springer
W. Rautenberg: *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer
D. van Dalen: *Logic and Structure*. Springer
M. Ben-Ari: *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer
H. D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Tomas: *Mathematical Logic*. Springer

1 Técnicas de demonstração

Uma proposição é um enunciado, uma asserção que possui um valor-verdade: ou verdadeiro ou falso. Nas considerações informais a seguir, usaremos letras $A, B, C, ...$ para proposições.

Demonstração direta: $A \Rightarrow B$. Esta implicação se prova mostrando que a verdade de A implica a verdade de B.
Demonstração por contraposição. Para demonstrar $A \Rightarrow B$ basta mostrar a implicação $\neg B \Rightarrow \neg A$. A segunda implicação é dita a contrapositiva da primeira.
Demonstração por contradição (reductio ad absurdum, prova indireta). Queremos demonstrar uma proposição A a partir de certas premissas. Para isto, supomos que $\neg A$ é verdadeiro e mostramos que essa suposição resulta numa contradição.
Exemplo: Existe uma quantidade infinita de números primos (Teorema de Euclides). Povaremos essa proposição por contradição supondo que o número de

números primos é finito. Sejam $p_1, ..., p_k$ todos os números primos. Consideramos $p := p_1 p_2 ... p_k + 1$. Fato (óbvio): O menor divisor $\neq 1$ de um número $n > 1$ é um número primo. Observamos que nenhum p_i divide p, pois sempre dá resto 1. O menor divisor de p (diferente de 1) é primo, mas não está entre os p_i. Contradição! Q.E.D. (quod erat demonstrandum)
Transitividade da implicação. Se as implicações $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$,...,$A_{n-1} \Rightarrow A_n$ são verdadeiras, então podemos concluir $A_1 \Rightarrow A_n$.
Equivalência entre $n \geq 2$ proposições. Para provar que as n proposições $A_1, ... A_n$ são equivalentes, isto é $A_i \Leftrightarrow A_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, ..., n\}$, basta provar um ciclo de apenas n implicações $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$.
Exercício: Quantas implicações entre proposições diferentes destes n proposições existem?
Demonstração por casos. Para provar $(A_1 \vee ... \vee A_n) \Rightarrow A$ bastar provar as n implicações $A_1 \Rightarrow A$,...,$A_n \Rightarrow A$.
Demonstração de uma disjunção. Uma possibilidade de demonstrar que uma disjunção $A \vee B$ é verdadeira consiste em supor que a A é falso, e mostrar que então B tem que ser verdadeiro.

Um princípio fundamental dos números naturais é o **Axioma da Indução**. Frequentemente, este princípio é expresso por enunciados equivalentes conforme o resultado seguinte:

Teorema 1.1 *Os princípios seguintes são equivalentes:*

(i) Se M é um conjunto de números naturais tal que $0 \in M$, e $n \in M$ implica $n + 1 \in M$, então segue que $M = \mathbb{N}$. (Axioma da Indução)

(ii) Seja A uma propriedade de números naturais. Se $A(0)$ é verdadeiro, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $A(n)$ implica $A(n+1)$, então todos os números naturais têm a propriedade A, ou seja, $A(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Princípio da Indução nos números naturais)

(iii) Todo conjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento. (Princípio do menor elemento).

Demonstração. Mostraremos as equivalência através do ciclo de implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Supomos que o Axioma da Indução seja valido. Seja A uma propriedade de números naturais tal que $A(0)$ é verdadeiro, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $A(n)$ implica $A(n+1)$. Consideramos o conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Então $0 \in M$ (já que $A(0)$), e $n \in M$ implica $n + 1 \in M$ (já que $A(n)$ implica

$A(n+1)$). Pelo Axioma da Indução segue que $M = \mathbb{N}$, e portanto $A(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Seja M um conjunto não-vazio de números naturais. Consideramos a asserção $A(n)$: "Se M contém um elemento $\leq n$, então M tem um menor elemento."Obviamente, $A(0)$ é verdadeiro. De fato, se $0 \in M$, então 0 é o menor elemento de M. Vamos mostrar: Se $A(n)$, então $A(n+1)$. Seja então $A(n)$ verdadeiro. Para mostrar que isso implica $A(n+1)$, supomos que M contenha um elemento $\leq n+1$. Então $n+1$ é o menor elemento de M ou M contém um elemento m ainda menor: $m \leq n$. Neste último caso, a suposta verdade de $A(n)$ implica que M tem um menor elemento. Logo, a asserção $A(n+1)$ é verdadeira. Pelo Teorema da Indução, $A(n)$ vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como M é não-vazio e contém pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ implica que M tem um menor elemento. Isto mostra que o Princípio do menor elemento segue do Axioma da Indução.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Seja M um conjunto de números naturais tal que $0 \in M$, e com cada $n \in M$ tem-se $n+1 \in M$. Aplicamos demonstração por contradição: supomos que M não é o conjunto de todos os naturais, isto é, $X = \mathbb{N} \setminus M \neq \varnothing$. Então este conjunto X possui um menor elemento $m \in X$, conforme o Princípio do menor elemento (iii). $m > 0$ já que $0 \in M$. Logo, existe o antecessor $n = m - 1 \in M$. Mas por hipótese, $n+1 = m \in M$. Esta é uma contradição, pois m é o menor elemento de X e portanto $m \notin M$. Logo, a suposição $M \subsetneq \mathbb{N}$ era falsa. Concluimos que $M = \mathbb{N}$. Q.E.D.

Se aceitamos a validade dos enunciados do Teorema 1.1, então podemos aplicar o seguinte método de demonstração.

Princípio da demonstração por indução nos números naturais. Para demonstrar que uma asserção $A(n)$ (que envolve um número natural n) é verdadeira para todos os $n \geq n_0$, não é necessário provar $A(n_0)$, $A(n_0+1)$, $A(n_0+2)$, ... separadamente (seria um número infinito de asserções). Basta provar apenas os dois itens seguintes:

(i) $A(n_0)$ é verdadeiro. (Base da indução)

(ii) Se $n \geq n_0$ e $A(n)$ é verdadeiro (hipótese da indução), então segue que $A(n+1)$ é verdadeiro. (Passo da indução)

Exemplo 1.2 *Seja $A(n)$ a asserção seguinte: Se $M_1, ..., M_n$ são $n \geq 2$ conjuntos tais que para quaisquer $i, i \in \{1, ..., .n\}$, $M_i \subseteq M_j$ ou $M_j \subseteq M_i$, então um desses n conjuntos é subconjunto de todos.*
Prova por indução:
Base da indução. $n_0 = 2$. Pela hipótese da asserção, $M_1 \subseteq M_2$ ou $M_2 \subseteq M_1$. No

primeiro caso, M_1 é subconjunto dos dois. No segundo caso, M_2 é subconjunto de todos.
Passo da indução. Seja $A(n)$ verdadeiro (hipótese da indução). Supomos que temos $n+1$ conjuntos $M_1, ..., M_n, M_{n+1}$ tais que $M_i \subseteq M_j$ ou $M_j \subseteq M_i$, para quaisquer $i, i \in \{1, ..., n+1\}$. Então trivialmente, $M_i \subseteq M_j$ ou $M_j \subseteq M_i$ para quaisquer $i, i \in \{1, ..., n\}$. Pela hipótese da indução, existe um M_i, $i \in \{1, ..., n\}$, tal que M_i e subconjunto de todos os $M_1, ..., M_n$. Então existem dois casos: $M_i \subseteq M_{n+1}$ ou $M_{n+1} \subseteq M_i$. No primeiro caso, segue que M_i é subconjunto de todos os $M_1, ..., M_n, M_{n+1}$. No segundo caso, segue que M_{n+1} é subconjunto de todos os $M_1, ..., M_n, M_{n+1}$. Q.E.D.

Na prática, se aplica frequentemente uma versão modificada do princípio da prova por indução. Esta versão é chamada de indução forte: Para provar $A(n)$ para todos os naturais $n \geq n_0$ basta mostrar o seguinte. (i) $A(n_0)$ é verdadeiro. (ii) para qualquer $n \geq n_0$, a verdade das asserções $A(m)$, para $m \in \{n_0, ..., n-1, n\}$, implica a verdade de $A(n+1)$.
É fácil verificar que a versão forte implica a versão comum da prova por indução. Na verdade, é possível provar que as duas versões são equivalentes: uma implica a outra.

2 Introdução

O que é Lógica? "Lógica é a ciência do raciocínio correto". Um objetivo da Lógica moderna: formalizar aspectos (clássicos ou não-clássicos) do raciocínio lógico. Existem várias lógicas (sistemas lógicos) que formalizam aspectos diferentes do raciocínio lógico ou possuem expressividades diferentes. Uma lógica sempre compreende dois lados: a parte sintática (uma linguagem formal junto com um cálculo dedutivo) e a parte semântica que determina o significado e interpreta a linguagem formal sobre certos domínios semânticos (por ex., valores-verdade, estruturas matemáticas, ...). A semântica determina também uma noção de consequência lógica. Um dos objetivos principais é estabelecer equivalência entre as deduções lógicas realizadas pelo cálculo (sintaxe, manipulação de símbolos) e as consequências lógicas (baseadas em semântica).

Nesta disciplina vamos estudar as duas Lógicas Clássicas principais: A Lógica Proposicional (Clássica) e a Lógica de Predicados (Lógica da Primeira Ordem).

Duas propriedades fundamentais da Lógica Clássica:
- cada proposição é verdadeira ou falsa (Princípio do Terceiro Excluído, Tertium non Datur)

- nenhuma proposição é verdadeira e falsa ao mesmo tempo (Princípio da Exclusão de Contradições)

Existem lógicas (não-clássicas) onde estes princípios são infringidos. Considere a proposição A: “Esta propisição é falsa.”$A \Leftrightarrow \neg A$.

3 A Lógica Proposicional

Um dos objetivos da Lógica Proposicional é formalizar e analizar as conexões lógicas entre proposições e seus valores-verdades ‘verdadeiro’ e ‘falso’.

Proposições são enunciados, asserções que possuem um valor verdade (verdadeiro ou falso). Exemplos:

p: “Roma é a capital da Itália.”
q: “7 é um número primo.”

Na Lógica Proposicional, a semântica de uma proposição é dada apenas pelo seu valor-verdade. Isto é, todo conteúdo semântico de uma proposição é reduzido ao seu valor-verdade: verdadeiro ou falso. Embora p e q sejam proposições muito diferentes na nossa linguagem natural, a semântica da Logica Proposicional não distingue entre elas: as duas possuem o valor-verdade ‘verdadeiro’ e são, neste sentido, equivalentes. Sob essa abstração, existem apenas duas proposições na Lógica Proposicional: o ‘verdadeiro’ (representado por 1) e o ‘falso’ (representado por 0). Na linguagem formal temos variáveis para proposições, como p e q acima (ou $x_0, x_1, ...$) Essas variáveis podem representar proposições da linguagem natural. Mas na análise semântica formal, essas variáveis podem assumir apenas os valores-verdade 0 ou 1 (e nenhum outro possível conteúdo semântico).

3.1 Sintaxe da Lógica Proposicional

Nossa *meta-linguagem* é o português. Usaremos a meta-linguagem para falar sobre nossa *linguagem de objeto*: a linguagem da Lógica Proposicional. O alfabeto da linguagem de objeto contém os seguintes símbolos:

(i) Um conjunto infinitamente contável $V = \{x_0, x_1, x_2 ...\}$ de variáveis de proposições. Usamos letras minúsculas x, y, z ou p, q, r, s, t, u para nos referir a essas variáveis.

(ii) Conectivos de aridade zero: $\top$, $\bot$, de aridade um: $\neg$, e de aridade dois: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

(iii) Parênteses:) e (.

Definição 3.1 *O conjunto Fm das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as condições seguintes:*

(i) $V \cup \{\top, \bot\} \subseteq Fm$, isto é, variáveis e os conectivos $\top$, $\bot$ são fórmulas. (Estas fórmulas são ditas atômicas.)

(ii) Se $\varphi, \psi \in Fm$, então $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in Fm$.

Trata-se de uma definição indutiva. O primeiro item corresponde à base da indução, o segundo item representa o passo da indução onde "Se $\varphi, \psi \in Fm$"é a hipótese da indução. Outra maneira de formular a definição de fórmulas é a notação a seguir (baseada na forma de Backus-Naur – BNF), onde x representa qualquer variável, as letras gregas denotam fórmulas quaisquer, e os traços signalizam alternativas.

$$\varphi ::= \bot \mid \top \mid x \mid \neg\psi \mid (\psi \vee \chi) \mid (\psi \wedge \chi) \mid (\psi \rightarrow \chi).$$

Os conectivos são lidos de maneira seguinte:

$\neg\varphi$ ..."não φ", negação de φ
$(\varphi \vee \psi)$ ..."φ ou ψ", disjunção de φ e ψ
$(\varphi \wedge \psi)$ ..."φ e ψ", conjunção de φ e ψ
$(\varphi \rightarrow \psi)$ ..."φ implica ψ"ou "se φ, então ψ", implicação
$\top$ ..."o verum"
$\bot$ ..."o falsum"

Às vezes usamos o conectivo do bicondicional $\leftrightarrow$ que definimos como segue: $(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$. Note que este conectivo não pertence à linguagem mas é introduzido através de outros conectivos da linguagem, a dizer: implicação e conjunção. Observe que os símbolos $\bot$ e $\top$ são conectivos e fórmulas (atômicas) ao mesmo tempo.

Usamos letras minúsculas $\varphi, \psi, \chi, \alpha, \beta, \delta, \vartheta, ...$ para nos referir a fórmulas, e letras maiúsculas $\varPhi, \varPsi, \varGamma, \varDelta, \varSigma, ...$ para nos referir a conjuntos de fórmulas. Exemplos:

$\varphi, \varPhi$ ... phi
$\psi, \varPsi$ ... psi
$\chi, \mathcal{X}$ ... xi, chi

δ, Δ ... delta
ϑ, Θ ... teta
γ, Γ ... gama

Os parênteses garantem a legibilidade correta das fórmulas. Por exemplo, não fica claro como ler $\varphi \vee \psi \to \chi$. Porém, em muitos casos podemos omitir parênteses conforme as regras seguintes:

- Parênteses mais externos podem ser omitidos. Ex.: $\varphi \vee \psi$ representa a fórmula $(\varphi \vee \psi)$.
- No uso repetido da conjunção ou da disjunção, os parênteses aninham-se à esquerda. Ex.: $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_4$ representa a fórmula $(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \varphi_4)$.
- No uso repetido da implicação os parênteses aninham-se à direita. Ex. $x \to y \to z$ representa a fórmula $(x \to (y \to z))$.
- Consideramos a seguinte ordem de prioridade ou precedência nos conectivos (ordem decrescente): $\neg, \wedge, \vee, \to$. Ex: $x \vee y \wedge z$ representa $(x \vee (y \wedge z))$, $x \vee \neg y \to z$ representa $((x \vee \neg y) \to z)$, $x \vee \neg y \to z$ e $x \vee \neg(y \to z)$ e $x \vee (\neg y \to z)$ representam três fórmulas diferentes.

A noção de subfórmula de uma fórmula dada é definida recursivamente através do conjunto de todas as subfórmulas. Note que toda fórmula é subfórmula de si mesma.

Definição 3.2 *Seja $\varphi \in Fm$. O conjunto $sub(\varphi)$ das subfórmulas de φ é definido recursivamente como segue:*

- $sub(\varphi) = \{\varphi\}$*, se φ é atômica.*
- $sub(\varphi) = sub(\psi) \cup \{\varphi\}$*, se $\varphi = \neg\psi$.*
- $sub(\varphi) = sub(\psi) \cup sub(\chi) \cup \{\varphi\}$*, se $\varphi = (\psi \Box \chi)$, $\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$.*

Fórmulas podem ser representadas por sua árvore sintática. Essa é uma árvore onde a raíz é a própria fórmula, e os filhos de cada nó (vértice) são as subfórmulas imediatas. As folhas (nós sem filhos) então são as subfórmulas atômicas.

Exercício 3.3 *Ache o conjunto de todas as subfórmulas de $\varphi = (p \to q \to r) \wedge (s \vee s \to r)$ usando a Definição 3.2. Apresente também uma árvore sintática.*

Seja $A(\varphi)$ uma asserção que involve a fórmula φ. Frequentemente estamos na situação de ter que provar $A(\varphi)$ para toda $\varphi \in Fm$. Como o conjunto Fm é infinito, não podemos provar $A(\varphi)$ para cada fórmula φ separadamente. O seguinte método de prova por indução nas fórmulas resolve este problema.

Teorema 3.4 (Princípio da prova por indução nas fórmulas) *Seja A uma asserção sobre fórmulas. Para provar $A(\varphi)$ para todas as fórmulas $\varphi \in Fm$ é suficiente provar os itens (a) e (b):*
(a) $A(\varphi)$ para toda fórmula atômica φ.
(b) Se $A(\psi)$ e $A(\chi)$ para fórmulas $\psi, \chi \in Fm$, então $A(\neg\psi)$ e $A(\psi\Box\chi)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.[1]

Demonstração. Seja $X = \{\varphi \in Fm \mid A(\varphi)\}$. Basta mostrar que $X = Fm$. Obviamente, $X \subseteq Fm$. Supomos que (a) e (b) sejam provados. Então X satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 3.1 (claro, com Fm substituido por X). Isto é, toda fórmula atômica pertence a X, e se φ e ψ pertencem a X, então também $(\varphi\Box\psi) \in X$. Conforme a Definição 3.1, Fm é o *menor* conjunto com essas duas propriedades. Logo, $Fm \subseteq X$ e finalmente $X = Fm$. Q.E.D

O item (a) no Teorema 3.4 representa a *base da indução*, o item (b) é o *passo da indução* onde a parte "Se $A(\psi)$ e $A(\chi)$ ... " é a *hipótese da indução*.

Vamos apresentar uma prova alternativa do Teorema 3.4. Para este fim introduzimos a função $compl\colon Fm \rightarrow \mathbb{N}$ que atribui a cada fórmula φ um número natural conforme sua "complexidade".

$$\begin{aligned}
&compl(\bot) = compl(\top) = compl(x) = 0, \text{ para } x \in V\\
&compl(\neg\psi) = compl(\psi) + 1\\
&compl(\psi\Box\chi) = max(compl(\psi), compl(\chi)) + 1
\end{aligned}$$

onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. A função $max(n, m)$ retorna o maior dos números n e m. A seguir usaremos o "Axioma da Indução" na forma do enunciado equivalente que diz que todo conjunto não vazio de números naturais tem um menor elemento. Seja A alguma afirmação sobre fórmulas e os itens (a) e (b) do Teorema sejam provados. Veremos que a suposição que exista alguma fórmula ψ tal que $A(\psi)$ é falso nos leva a uma contradição. Essa suposição implica que o conjunto $M = \{\psi \mid A(\psi) \text{ é falso}\}$ é não-vazio. Pelo Axioma da Indução existe um elemento $\psi \in M$ tal que $compl(\psi) = n$ é minimal: o menor elemento de $\{compl(\psi) \mid \psi \in M\}$. Isto

[1] Frequentemente colocamos apenas $A(\varphi)$ para expressar "$A(\varphi)$ é verdadeiro".

é, para toda fórmula φ com $compl(\varphi) < n$ temos que $A(\varphi)$. Por (a), ψ não pode ser uma fórmula atômica. Então ψ tem a forma $\neg\chi$ ou $(\chi_1 \Box \chi_2)$, $\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$. Seja $\psi = (\chi_1 \vee \chi_2)$. Isto implica que $compl(\chi_1), compl(\chi_2) < n$. Portanto, $A(\chi_1)$ e $A(\chi_1)$. Por (b), $A(\psi)$, ou seja, $\psi \notin M$. Uma contradição! Analogamente obtemos contradições supondo que ψ tem a forma $\neg\chi$ ou $(\chi_1 \Box \chi_2)$, $\Box \in \{\wedge, \to\}$. Logo, a suposição de que exista alguma fórmula ψ tal que "não $A(\psi)$"é falsa. Isto é, $M = \varnothing$ e $A(\varphi)$ para todas as $\varphi \in Fm$. Q.E.D.

Exemplo 3.5 *Vamos provar por indução: 'Toda fórmula tem um número par de parênteses.' (Isto é, se $A(\varphi)$ é a asserção 'φ possui um número par de parênteses', então provaremos $A(\varphi)$ para toda $\varphi \in Fm$.)*
Base da indução. φ seja uma fórmula atômica. Então $\varphi \in V \cup \{\bot, \top\}$. Obviamente, em todos estes casos, φ não tem parênteses, ou seja, o número de parênteses é 0, um número par. Logo, a Base da Indução é provada.
Passo indutivo. Primeiro, seja $\varphi = \neg\psi$ e supomos (hipótese da indução) que a afirmação seja verdeira para ψ, iso é, ψ tem um número par de parênteses. Obviamente, φ tem o mesmo número de parênteses que ψ, este número é par por hipótese da indução.
Agora, seja $\varphi = (\psi \vee \chi)$. Pela hipótese da indução, ψ tem um número par de parênteses, digamos $2n$, e χ tem um número par de parênteses, digamos $2m$. Logo, φ tem $2 + 2n + 2m = 2(1 + n + m)$ parênteses. Este número é par.
Os casos restantes $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ e $\varphi = (\psi \to \chi)$ são tratados analogamente (exercício!). Q.E.D.

Finalmente, apresentaremos outra noção sintática que será útil na próxima seção.

Definição 3.6 *Seja $\varphi \in Fm$. O conjunto $var(\varphi)$ das variáveis que ocorrem em φ é definido como segue:*

- $var(\varphi) = \{x\}$, *se* $\varphi = x \in V$
- $var(\varphi) = \varnothing$, *se* $\varphi \in \{\top, \bot\}$
- $var(\varphi) = var(\psi)$, *se* $\varphi = \neg\psi$
- $var(\varphi) = var(\psi) \cup var(\chi)$, *se* $\varphi = (\psi \Box \chi)$ *onde* $\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$.

3.2 Semântica da Lógica Proposicional

Uma *proposição* é uma asserção (ou uma afirmação) que possui um valor verdade. Ela não depende da linguagem em que é expressa. Por exemplo, as sentenças

“Roma é a capital da Itália”e “Rome is the capital of Italy”denotam a mesma proposição. As proposições expressas por “Picasso foi um dos artistas mais importantes”e “Picasso foi um dos artistas mais influentes”são muito parecidas porém não completamente idênticas. Embora sejam verdadeiras, elas representam conteúdos semânticos levemente diferentes. Na Lógica Proposicional não é possível expressar tais sutilezas semânticas da linguagem natural. De fato, na Lógica Proposicional reduzimos o conteúdo semântico de uma proposição ao valor verdade da mesma. Isto é, uma proposição pode será identificada com seu valor verdade: todas as proposições verdadeiras são identificadas com o verdadeiro, e todas as proposições falsas são identificadas com o falso. Isto é, existem apenas duas proposições: a proposição verdadeira (o verdadeiro, representado por 1) e a proposição falsa (o falso, representado por 0). Supondo essa simplificação, as sentenças “Roma é a capital da Itália”e “Brasília é a capital do Brasil”denotam à *mesma* proposição: a proposiçãp verdadeira, ou seja, o valor 1.

A denotação (a semântica, o significado) de uma fórmula é uma proposição, ou seja (neste caso da Lógica Proposicional), um valor-verdade: ‘verdadeiro’ ou ‘falso’. Esta atribuição de valores-verdade a fórmulas é formalizada pela noção da valoração:

Definição 3.7 *Uma valoração é uma função $v\colon V \to \{0,1\}$. Os valores $0, 1$ são vistos como valores verdade, onde 1 corresponde ao ‘verdadeiro’ e 0 ao ‘falso’. Dada uma valoração v, definimos sua extensão $v^*\colon Fm \to \{0,1\}$ recursivamente de forma seguinte:*

$$v^*(x) = v(x), \textit{ para } x \in V$$
$$v^*(\top) = 1$$
$$v^*(\bot) = 0$$
$$v^*(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, \textit{ se } v^*(\varphi) = 0 \\ 0, \textit{ caso contrário} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1, \textit{ se } v^*(\varphi) = 1 \textit{ ou } v^*(\psi) = 1 \\ 0, \textit{ c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1, \textit{ se } v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 1 \\ 0, \textit{ c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0, \textit{ se } v^*(\varphi) = 1 \textit{ e } v^*(\psi) = 0 \\ 1, \textit{ c.c.} \end{cases}$$

Por indução nas fórmulas se mostra facilmente que existe exatamente uma extensão de v com estas propriedades. Para simplificar a notação, designamos esta única extensão v^* de v também por v. Pela unicidade de v^*, isto não criará confusões.

Relembre que para conjuntos A e B, B^A denota o conjunto $\{f \mid f\colon A \to B\}$ de todas as funções de A para B. Se identificamos 2 com o conjunto $\{0,1\}$ (o que de fato se faz na Teoria dos Conjuntos), então $2^V = \{v \mid v\colon V \to \{0,1\}\}$ é o conjunto de todas as valorações.

Exercício 3.8 *(a) Na literatura, o conjunto das partes $Pow(M)$ (power set) de um conjunto M é frequentemente identificado com $2^M = \{f \mid f\colon M \to \{0,1\}\}$, ous seja, com o conjunto das funções de M para $\{0,1\}$. Isto é justificado pelo fato que existe uma bijeção de $Pow(M)$ para 2^M (e, consequentemente, também de 2^M para $Pow(M)$). Estabeleça uma destas bijeções!*
(b) Seja A um conjunto. O que é $A^\varnothing$? Por que uma função f do tipo $f\colon A^\varnothing \to B$ pode ser interpretada como uma constante $f \in B$?
(c) Use a diagonalização de Cantor para provar que o conjunto 2^V de todas as valorações é incontável.

Exemplo 3.9 *A valoração v seja dada por $x \mapsto 0$, $y \mapsto 1$, $z \mapsto 1$, $u \mapsto 0$, e $s \mapsto 0$ para $s \notin \{x, y, z, u\}$. Então, $v(\neg x) = 1$, $v(x \vee \neg x) = 1$, $v((x \to (y \to z)) \wedge u) = 0$.*

Uma função booleana (de aridade n) é uma função $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Podemos atribuir a cada conectivo c de aridade n uma função booleana $f_c\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ de acordo com a Definição 3.7:
$f_\perp\colon \{0,1\}^0 \to \{0,1\}$, isto é $f_\perp \in \{0,1\}$. Definimos: $f_\perp = 0$
$f_\top\colon \{0,1\}^0 \to \{0,1\}$, isto é $f_\perp \in \{0,1\}$. Definimos: $f_\top = 1$
$f_\neg\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f_\neg(0) = 1$, $f_\neg(1) = 0$
$f_\Box\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$
$\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$, $f_\vee(0,0) = 0$, $f_\vee(0,1) = f_\vee(1,0) = f_\vee(1,1) = 1$

Exercício 3.10 *Defina as funções restantes $f_\wedge$ e $f_\to$.*

As funções booleanas f_c representam a semântica dos conectivos c. Alternativamente à Definição 3.7, podemos usar essas funções booleanas para determinar a semântica das fórmulas conforme o Lema seguinte.

Lema 3.11 *Seja $v \in 2^V$ uma valoração. Então os valores-verdade das fórmulas, relativamente à valoração v, são recursivamente dados de forma seguinte (onde φ, ψ são quaisquer fórmulas):*

$v^*(x) = v(x)$, *para* $x \in V$
$v^*(\bot) = f_\bot = 0$
$v^*(\top) = f_\top = 1$
$v^*(\neg\varphi) = f_\neg(v^*(\varphi))$
$v^*(\varphi \vee \psi) = f_\vee(v^*(\varphi), v^*(\psi))$
$v^*(\varphi \wedge \psi) = f_\wedge(v^*(\varphi), v^*(\psi))$
$v^*(\varphi \to \psi) = f_\to(v^*(\varphi), v^*(\psi))$

De fato, o Lemma 3.11 pode servir como definição alternativa à Definição 3.7. A demonstração do Lema deixamos como exercício.

Definição 3.12 *A relação da satisfatibilidade $\vDash \subseteq 2^V \times Fm$ entre valorações e fórmulas é definida como segue:*

$$v \vDash \varphi :\Leftrightarrow v(\varphi) = 1.$$

Se $v \vDash \varphi$, então dizemos que v satisfaz φ ou que v é um modelo de φ ou que a fórmula φ é verdadeira referente à valoração v. Se $v(\varphi) = 0$, então escrevemos $v \nvDash \varphi$. A noção da satisfatibilidade pode ser generalizada para conjuntos de fórmulas $\Phi \subseteq Fm$. Definimos $v \vDash \Phi :\Leftrightarrow v \vDash \varphi$ para toda fórmula $\varphi \in \Phi$. $Mod(\Phi) := \{v \in 2^V \mid v \vDash \Phi\}$ é o conjunto de todos os modelos do conjunto $\Phi \subseteq Fm$.

Exemplo 3.13 *Seja $v(x) = 0 = v(y)$, $v(z) = 1$, e seja $\varphi := x \to y$, $\psi := z \to y$. Então, $v \vDash \varphi$ e $v \nvDash \psi$.*
A fórmula $\varphi := x \vee \neg x$ é satisfeita por todas as valorações. Ou seja, toda valoração é modelo de φ: $Mod(\{\varphi\}) = 2^V$.
O conjunto $\Phi := \{p, \neg p\}$ não possui nenhum modelo: $Mod(\Phi) = \varnothing$.

Lema 3.14 (Lema da Coincidência) *Seja $\varphi \in Fm$. Se v_1 e v_2 são duas valorações tais que $v_1(x) = v_2(x)$ para todo $x \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.*

Demonstração. Provaremos o Lema por indução na fórmula φ.
Base da indução: Seja φ uma fórmula atômica, isto é, $\varphi \in V \cup \{\bot, \top\}$. Se $\varphi = x \in V$, então a afirmação é trivial pela hipótese do Lema. Agora supomos $\varphi = \bot$. Então $v(\varphi) = 0$, para qualquer valoração v. Analogamente para o caso $\varphi = \top$. Logo, a afirmação é verdadeira para todas as fórmulas atômicas.

Passo da indução: Seja φ uma fórmula complexa. Consideramos o caso $\varphi = \neg\psi$. Conforme hipótese do Lema, supomos $v_1(x) = v_2(x)$ para toda $x \in var(\varphi)$. Como $var(\varphi) = var(\psi)$, temos que $v_1(x) = v_2(x)$ para toda $x \in var(\psi)$. A hipótese da indução diz que a afirmação do Lema é provada para a fórmula ψ. Aplicando essa hipótese da indução obtemos $v_1(\psi) = v_2(\psi)$. Logo, $v_1(\neg\psi) = f_\neg(v_1(\psi)) = f_\neg(v_2(\psi)) = v_2(\neg\psi)$. Isto é, $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.
Os casos $\varphi = (\psi \Box \chi)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, seguem analogamente. Exercício!
Q.E.D.

O Lema da Coincidência expressa o fato trivial que o valor verdade de uma fórmula φ depende apenas dos valores verdade das variáveis $x \in var(\varphi)$.

Com base na noção da satisfatibilidade podemos classificar as fórmulas de acordo com as noções seguintes.

Definição 3.15 *Seja $\varphi \in Fm$.*

(i) φ é dita válida (ou uma tautologia), se toda valoração é modelo de φ, isto é, $Mod(\{\varphi\}) = 2^V$.

(ii) φ é dita contraditória (ou insatisfatível, ou uma contradição), se nenhuma valoração é modelo de φ, isto é, $Mod(\{\varphi\}) = \varnothing$.

(iii) φ é dita satisfatível, se φ possui um modelo, isto é, $Mod(\{\varphi\}) \neq \varnothing$.

Um conjunto $\Phi \subseteq Fm$ é dito contraditório (ou insatisfatível), se $Mod(\Phi) = \varnothing$. Φ é dito satisfatível, se $Mod(\Phi) \neq \varnothing$.

Exercício 3.16 *Prove: Uma fórmula φ é válida se e somente se $\neg\varphi$ é contraditória.*

Exemplo 3.17 *$((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y$ é tautologia.*
$((x \rightarrow y) \wedge y) \rightarrow x$ nem é tautologia nem contradição.
Se φ é contradição ou ψ tautologia, então $\varphi \rightarrow \psi$ é válida.
O seguinte é falso. Se φ é contradição e $\varphi \rightarrow \psi$ é tautologia, então ψ é tautologia.
Prove estas afirmações (sem o uso de tabela verdade)! Relembre: A falsidade de uma afirmação se prova dando um contra-exemplo.

Os conceitos "contraditório", "satisfatível"e "válido"são decidíveis (computáveis ou recursivos). Isto é, existem algoritmos (procedimentos efetivos que podem ser implementados como programas em computadores) que decidem para qualquer fórmula dada se ela é ou não é contraditória, satisfatível ou válida. Um algoritmo bem conhecido é o método da tabela verdade. Seja $\varphi \in Fm$ e n o número de variáveis que ocorrem em φ. Existe um número infinito de valorações e todas elas podem ser consideradas para calcular os respectivos valores verdade da fórmula φ. Porém, pelo Lema 3.14, basta considerar apenas as valorações que atribuem valores diferentes às variáveis que ocorrem em $var(\varphi)$. Estas são 2^n valorações diferentes e elas podem ser listadas numa tabela com 2^n linhas (uma para cada valoração). Nas colunas da tabela calcula-se os respectivos valores verdade das subfórmulas de φ começando com as subfórmulas mais simples, as fórmulas atômicas, e proseguindo com as fórmulas mais complexas. A última coluna contém os 2^n possíveis valores verdade da própria fórmula φ, a subfórmula mais complexa de φ. Se todos estes valores são 1, então φ é válida. Se todos os valores são 0, então φ é insatisfatível. Finalmente, se existem valorações que satisfazem φ e outras que não a satisfazem, então ela é satisfatível e não válida.

Exercício 3.18 *Apresente a tabela verdade para $x \to (y \vee z) \to (y \wedge z)$ e identifique as diferentes valorações envolvidas.*

3.2.1 Consequência Lógica

Intuitivamente, uma proposição B é consequência lógica de um conjunto X de proposições se em cada "circunstância", "situação"ou em cada "mundo possível"onde X é verdadeiro a proposiçõa B também é verdadeira. Na Lógica Proposicional, os conceitos abstratos de "circunstância", "mundo possível"etc. são modelados pela noção de valoração.
Exemplo:

"Ou chove ou o céu está azul. Se chove, então não faz sol. Logo, se faz sol, então o céu está azul."

Vamos formalizar este argumento na Lógica Proposicional. Seja x a variável que representa a proposição "Chove."(mais preciso, x é a variável de proposição que contém o valor verdade da proposição "Chove."), y a variável que representa "O céu está azul.", e z a variável que contém o valor da proposição "Faz sol.". Então, das premissas $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ e $x \to \neg z$ podemos tirar a conclusão $z \to y$. A corretude deste raciocínio (desta consequência lógica) é justificada pelo fato que cada valoração que é modelo de $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ e $x \to \neg z$ também é modelo de $z \to y$. Expressamos este fato pela notação: $\{(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y), x \to \neg z\} \Vdash z \to y$. $\Vdash$ é um símbolo da nossa metalinguagem e representa a relação da consequência lógica.

A noção intuitiva da consequência lógica (argumento lógico) é formalizada pela definição seguinte.

Definição 3.19 *Uma fórmula ψ é consequência lógica de um conjunto Φ de fórmulas, notação: $\Phi \Vdash \psi$, se $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\psi\})$.*[2] *Se $\Phi \Vdash \psi$, então Φ é dito conjunto de premissas e ψ é dita conlusão. Se o conjunto de premissas é vazio, então escrevemos $\Vdash \psi$ em lugar de $\varnothing \Vdash \psi$. Se o conjunto de premissas Φ é finito e não-vazio, digamos $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, então simplificamos notação escrevendo $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$. $\Phi, \varphi \Vdash \psi$ usamos como abreviação para $\Phi \cup \{\varphi\} \Vdash \psi$. Se ψ não é consequência lógica de Φ, então escrevemos $\Phi \nVdash \psi$.*

Note que $\Phi \nVdash \varphi$ é, pela definição, a negação lógica da condição $\Phi \Vdash \varphi$. Isto é, $\Phi \nVdash \varphi$ significa $Mod(\Phi) \nsubseteq Mod(\{\varphi\})$, isto é, existe uma valoração $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \Phi$ e $v \nvDash \varphi$.

Quais são os modelos do conjunto vazio? Em outras palavras, o que é $Mod(\varnothing)$? Pela Definição 3.12, uma valoração v satisfaz o conjunto vazio $\varnothing$, se $v \vDash \varphi$ para toda $\varphi \in \varnothing$. Isto é, $v \vDash \varnothing$ se a seguinte implicação é verdadeira: Se $\varphi \in \varnothing$, então $v \vDash \varphi$. Obviamente, a premisa dessa implicação é falsa. Portanto, toda a implicação é verdadeira. Isto vale para qualquer valoração v. Logo, $v \vDash \varnothing$ para toda $v \in 2^V$, isto é, $Mod(\varnothing) = 2^V$. Este fato ajudará na prova do exemplo (i) a seguir.

Exemplo 3.20 *(i)* $\Vdash \varphi$ *sse* φ *é válida.*[3]

(ii) $\{\varphi\} \Vdash \varphi \vee \psi$

(iii) $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \Vdash \psi$

(iv) $\{\varphi \to \psi\} \Vdash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$

(v) $\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \vartheta \to \psi\} \Vdash (\varphi \wedge \vartheta) \to \chi$

(vi) $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \Leftrightarrow v \vDash \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$

Vamos demonstrar, de forma exemplar, a validade do item (iv) acima. Queremos mostrar o seguinte: para qualquer $v \in 2^V$, se $v \vDash \{\varphi \to \psi\}$, então $v \vDash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$. Seja então $v \in 2^V$ uma valoração tal que $v \vDash \{\varphi \to \psi\}$. Isto é, $v \vDash \varphi \to \psi$. Para mostrar que isso implica $v \vDash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$, supomos $v \vDash \chi \vee \varphi$. Como estamos diante de uma disjunção, temos que considerar dois casos. Primeiro caso: $v \vDash \chi$. Então segue imediatamante $v \vDash \chi \vee \psi$, para qualquer fórmula ψ. Segundo caso: $v \vDash \varphi$. Agora recorremos à hipótese $v \vDash \varphi \to \psi$ que

[2] Observe que a relação da consequência lógica é uma relação $\Vdash \subseteq Pow(Fm) \times Fm$.

[3] 'sse' usamos como abreviação de 'se e somente se'. Relembre que usamos também o símbolo $\Leftrightarrow$ para expressar equivalência (bicondicional) na nossa metalinguagem.

nos dá $v \vDash \psi$, já que $v \vDash \varphi$. Logo, $v \vDash \chi \vee \psi$. Então, concluímos que $v \vDash \chi \vee \varphi$ implica $v \vDash \chi \vee \psi$. Isto é equivalente a $v \vDash (\chi \vee \varphi) \rightarrow (\chi \vee \psi)$. Q.E.D.

Temos agora três símbolos de implicação: $\rightarrow$, $\Vdash$ e $\Rightarrow$. O primeiro é um símbolo da linguagem de objeto, os dois restantes são símbolos da nossa metalinguagem. O seguinte teorema mostra que existe uma íntima ligação entre $\Vdash$ e $\rightarrow$.

Teorema 3.21 (Teorema da Dedução) *Sejam $\psi, \varphi_i \in Fm, 1 \leq i \leq n$, e $\Phi \subseteq Fm$. Então*

$$\Phi \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \Vdash \psi \Longleftrightarrow \Phi \Vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi.$$

Demonstração. Para provar o Teorema, temos que mostrar uma 'ida' e uma 'volta'.
"$\Rightarrow$": Supomos que consequência lógica da parte esquerda se dá. Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \Phi$. Queremos mostrar que isto implica $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$. Para isto, supomos $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ que é equivalente a $v \vDash \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Então temos que $v \vDash \Phi \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. A hipótese nos dá $v \vDash \psi$. Logo, $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ e a consequência lógica do lado direito é satisfeita.
"$\Leftarrow$": Agora supomos que o lado direito seja verdadeiro. Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \Phi \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Queremos mostrar que isto implica $v \vDash \psi$. Temos em particular: $v \vDash \Phi$. Pela hipótese, isto implica $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$. Como também temos que $v \vDash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$, segue que $v \vDash \psi$. Logo, $\Phi \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \Vdash \psi$. Q.E.D.

Um importante caso especial do teorema se dá quando $\Phi = \varnothing$. Neste caso, o teorema diz que $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$ sse a fórmula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ é válida. Como a validez de uma fórmula é decidível, segue que a relação de conseqüência lógica é decidível para conjuntos finítos de premissas. Isto é, existe um algoritmo que para quaisquer fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi$ computa a resposta à pergunta: $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$?

Teorema 3.22 (Propriedades da relação da consequência lógica) *Para todos os $\Phi, \Phi' \subseteq Fm$ e $\varphi, \psi \in Fm$, o seguinte é verdadeiro.*

- *$\Phi \Vdash \psi$, para todo $\psi \in \Phi$. (Extensividade ou Reflexividade)*
- *Se $\Phi \subseteq \Phi'$ e $\Phi \Vdash \psi$, então $\Phi' \Vdash \psi$. (Monotonicidade)*
- *Se $\Phi' \Vdash \psi$, e $\Phi \Vdash \varphi$ para todo $\varphi \in \Phi'$, então $\Phi \Vdash \psi$. (Idempotência)*

A demonstração é um exercício. Prove também que a monotonicidade já segue da idempotência e da reflexividade.

Existe uma ligação entre as noções da satisfatibilidade e da consequência lógica. Uma pode ser caracaterizada pela outra:

Lema 3.23 • *Para qualquer conjunto de fórmulas Φ, os enunciados seguintes são equivalentes:*

(i) Φ é satisfatível.

(ii) Para qualquer fórmula contraditória φ, $\Phi \nVdash \varphi$.

(iii) Existe uma fórmula ψ tal que $\Phi \nVdash \psi$

• *Para qualquer conjunto de fórmulas Φ e qualquer fórmula φ, os enunciados seguintes são equivalentes:*

(i) $\Phi \Vdash \varphi$

(ii) O conjunto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

Demonstração. (i) implica (ii): Seja v uma valoração que satisfaz Φ. Temos que $v \nvDash \varphi$ para qualquer fórmula contraditória φ. Logo, $\Phi \nVdash \varphi$ para qualquer fórmula contraditória φ.
(ii) implica (iii): Note que (ii) é particularmente verdadeiro no caso que não existir nenhuma fórmula contraditória. Mas sabemos que existe uma fórmula contraditória: por exemplo $\bot$ ou $x \wedge \neg x$. Então podemos escolher para ψ uma fórmula contraditória específica. Logo, (iii) segue de (ii).
(iii) implica (i): Se existe uma fórmula ψ tal que $\Phi \nVdash \psi$, então existe uma valoração que satisfaz Φ e não satisfaz ψ. Em particular, Φ é satisfatível.
Segundo item:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Prova por contraposição. Se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível, então existe uma valoração que satisfaz Φ e $\neg\varphi$. Logo, $\Phi \nVdash \varphi$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Seja $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ insatisfatível. Se v é uma valoração que satisfaz Φ, então v não pode satisfazer também $\neg\varphi$. Logo, tal v satisfaz φ. Concluímos: Toda valoração que satisfaz Φ, satisfaz φ. Isto é, $\Phi \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Note que negando enunciados que são equivalentes dois-a-dois resulta novamente em enunciados equivalentes dois-a-dois. Negando os enunciados (i), (ii) e (iii) do primeiro item do Lema 3.23 resulta na equivalência das asserções seguintes (e numa caracterização da noção de 'contraditório' em termos de consequência lógica):

(i) Φ é contraditório.

(ii) Existe uma fórmula contraditória φ tal que $\Phi \Vdash \varphi$.

(iii) Para toda fórmula ψ, $\Phi \Vdash \psi$.

3.2.2 Equivalência lógica

Definição 3.24 *Dizemos que duas fórmulas φ, ψ são logicamente equivalentes, notação: $\varphi \equiv \psi$, se para qualquer valoração $v \in 2^V$: $v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \psi$.*

Exemplo 3.25 *Sejam φ, ψ, χ quaisquer fórmulas. Então*

- $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$ *e* $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$.
- $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ *(Idempotência)*
- $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$, $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ *(Comutatividade)*
- $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$, $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$, *(Associatividade)*
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ *(Regras de De-Morgan)*
- $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \equiv \psi$, $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \equiv \psi$ *(Absorção)*
- $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$, $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ *(Distributividade)*
- $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ *(Dupla negação)*
- $\varphi \vee \psi \equiv \varphi$ *e* $\varphi \wedge \psi \equiv \psi$, *se* φ *é tautologia (Regras de tautologia)*
- $\varphi \vee \psi \equiv \psi$ *e* $\varphi \wedge \psi \equiv \varphi$, *se* φ *é contradição (Regras de contradição)*
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$ *(Contraposição)*
- $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$ *(Eliminação de $\neg$)*
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ *(Eliminação de $\to$)*
- $\varphi \to \psi \to \chi \equiv \varphi \wedge \psi \to \chi$

Exemplo 3.26 *(a) Mostramos: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.*

Seja $v \in 2^V$. Temos que

$$\begin{aligned} v \models \neg(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow v \not\models \varphi \wedge \psi \\ &\Leftrightarrow v \not\models \varphi \text{ ou } v \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow v \models \neg\varphi \text{ ou } v \models \neg\psi \\ &\Leftrightarrow v \models \neg\varphi \vee \neg\psi \end{aligned}$$

(b) Mostramos: $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$. Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \neg\varphi$. Então $v \nvDash \varphi$. Logo, $v \vDash \varphi \to \psi$ para qualquer fórmula ψ, em particular para $\psi = \bot$. Agora supomos que $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \varphi \to \bot$. Como $\bot$ é insatisfatível, segue que $v \nvDash \varphi$. Logo, $v \vDash \neg\varphi$.

É fácil mostrar que a relação de consequência lógica é uma relação de equivalência.

Exercício 3.27 *Revise as noções de relação de equivalência e classes de equivalência. Prove o seguinte: Qualquer relação de equivalência R num dado conjunto A induz uma partição P_R em A; e por outro lado, qualquer partição P de A define uma relação de equivalência R_P em A cujas classes são exatamente os conjuntos da partição. Estas transições são inversas uma a outra, isto é, $R_{P_R} = R$ e $P_{R_P} = P$. Portanto, relações de equivalência e partições são apenas "duas faces da mesma medalha". Se A é um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência, então A/R denota o conjunto quociente (a partição formada pelas classes de equivalência).*

Seja $\mathcal{A} = (A, f_1, ..., f_k)$ uma álgeba, ou seja, A é um universo de elementos e $f_1, ..., f_k$ são funções $f_i \colon A^{n_i} \to A$ de aridade n_i, $i = 1, ..., k$. Então uma relação $R \subseteq A \times A$ é dita uma relação de congruência em $\mathcal{A}$ se R é uma relação de equivalência que é compatível com as funções $f_1, ..., f_k$. Esta compatibilidade significa o seguinte: Para qualquer função f_i e para quaisquer n_i-uplas $(a_1, ..., a_{n_i})$ e $(b_1, ..., b_{n_i}) \in A^{n_i}$, se (a_1, b_1), (a_2, b_2), ...,$(a_{n_i}, b_{n_i}) \in R$, então $(f_i(a_1, ..., a_{n_i}), f_i(b_1, ..., b_{n_i})) \in R$.

Definição 3.28 *Seja $\mathcal{A} = (A, f_1, ..., f_k)$ uma álgeba e seja R uma relação de congruência em $\mathcal{A}$. Então podemos considerar a álgebra quociente de $\mathcal{A}$ modulo R, $\mathcal{A}/R = (A/R, \overline{f_1}, ..., \overline{f_k})$ onde as funções $\overline{f_i}$ são definidas da forma seguinte:*

$$\overline{f_i}([a_1], ..., [a_{n_i}]) := [f_i(a_1, ..., a_{n_i})].$$

Aqui denota $[b] := \{a \in A \mid (a, b) \in R\}$ a classe de equivalência de b modulo R. Note que as funções $\overline{f_i}$ têm a mesma aridade que as funções f_i, e elas são bem-definidas, quer dizer, sua definição é independente dos representantes das classes de equivalência. De fato, isto é exatamente o que expressa a compatibilidade de R com as funções f_i.

Agora consideramos o conjunto Fm como uma álgebra de fórmulas com os conectivos como operações ou funções: **Fm** $= (Fm, \neg, \vee, \wedge, \to, \bot, \top)$. Exercício: Prove que a relação $\equiv$ da equivalência lógica é uma relação de congruência em **Fm** e que a resultante álgebra quociente $\mathbf{Fm}_{/\equiv} = (Fm_{/\equiv}, \overline{\neg}, \overline{\vee}, \overline{\wedge}, \overline{\rightarrow}, \overline{\bot}, \overline{\top})$ é uma álgebra Booleana (relembre os axiomas que determinam uma álgebra Booleana)!

O fato seguinte está ligado às considerações anteriores. Escrevemos $\psi[x := \varphi]$ para nos referir ao resultado da substituição de todas as ocorrências da variável x em ψ pela fórmula φ. Formalmente, esta noção é definida como segue:

Definição 3.29 *Definimos $\varphi[x := \psi]$ indutivamente na construção de φ:*

$$y[x := \psi] = \begin{cases} y, \text{ se } y \in V \setminus \{x\} \\ \psi, \text{ se } y = x \end{cases}$$
$$\bot[x := \psi] = \bot$$
$$\top[x := \psi] = \top$$
$$\neg\chi[x := \psi] = \neg(\chi[x := \psi])$$
$$(\varphi_1 \Box \varphi_2)[x := \psi] = (\varphi_1[x := \psi] \Box \varphi_2[x := \psi]), \text{ onde } \Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}.$$

Se $x \in var(\psi)$, então φ é uma subfórmula de $\psi[x := \varphi]$ (prova por indução em ψ). Note que a fórmula $\psi[x := \varphi']$ resulta de $\psi[x := \varphi]$ substituindo toda ocorrência da subfórmula φ por φ' em ψ. O seguinte resultado diz que fórmulas logicamente equivalentes 'podem ser substituídas uma por outra em qualquer contexto'.

Teorema 3.30 *Sejam $\psi, \varphi, \varphi' \in Fm$. Se $\varphi \equiv \varphi'$, então $\psi[x := \varphi] \equiv \psi[x := \varphi']$.*

Demonstração. Prova por indução em ψ. Exercício.

Exemplo 3.31 *Consideramos $\psi = u \wedge (x \vee \neg z)$, $\varphi = (y \rightarrow \neg z)$ e $\varphi' = (\neg y \vee \neg z)$. Então $\varphi \equiv \varphi'$ e portanto $\psi[u := \varphi] \equiv \psi[u := \varphi']$.*

Lema 3.32 *Os enunciados seguintes são equivalentes para todas as fórmulas φ, ψ.*

(i) $\varphi \equiv \psi$

(ii) *A fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é válida.*

(iii) $\Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

(iv) $\varphi \Vdash \psi$ *e* $\psi \Vdash \varphi$

Demonstração. Exercício.

Sabemos que a validez de uma fórmula é decidível. Pelo teorema anterior, a equivalência lógica entre duas fórmulas é decidível.

3.2.3 Formas normais

Consideramos a conjunção $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n$ e a disjunção $\psi = \psi_1 \vee \psi_2 \vee ... \vee \psi_m$. Se $n = m = 1$, então φ, ψ é dita uma conjunção, disjunção trivial, respectivamente. Também é possível considerar os casos $n = m = 0$. Nestes casos falamos da conjunção (da disjunção) vazia, respectivamente. A disjunção vazia é equivalente a $\perp$. Isto pode ser justificado de forma seguinte: uma valoração v satisfaz uma disjunção sse v satisfaz pelo menos um fórmula constituinte da disjunção. Como no caso da disjunção vazia não existe nenhuma fórmula constituinte, v não satisfaz a disjunção. A disjunção vazia não possui nenhum modelo. De forma análoga, se justifica que a conjunção vazia é equivalente à fórmula $\top$. Qualquer valoração é modelo da conjunção vazia.

Na Definição seguinte consideramos também disjunções e conjunções triviais, mas sempre não-vazias.

Definição 3.33

- *Uma fórmula $\psi \in Fm$ é dita literal, se $\psi = x$ ou $\psi = \neg x$, para algum $x \in V$. No primeiro caso, ψ é literal positivo, no segundo caso é literal negativo.*

- *Para um literal ψ,*

$$\overline{\psi} := \begin{cases} \neg\psi, \text{ se } \psi \in V \\ x, \text{ se } \psi = \neg x \end{cases}$$

  é o literal inverso.

- *Uma fórmula φ está em forma normal disjuntiva (FND), se $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ e $\varphi_i = \psi_{i,1} \wedge ... \wedge \psi_{i,m_i}$ com literais $\psi_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, onde $n \geq 1$ e $m_i \geq 1$.*

- *Uma fórmula φ está em forma normal conjuntiva (FNC), se $\varphi = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ e $\varphi_i = \psi_{i,1} \vee ... \vee \psi_{i,m_i}$ com literais $\psi_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, onde $n \geq 1$ e $m_i \geq 1$.*

Exemplo 3.34 *As fórmulas x, $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ e $x_1 \vee ... \vee x_n$ estão em FND e FNC. As fórmulas $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$, $(\neg x \wedge z) \vee x$ estão em FND.*
As fórmulas $\neg(x \wedge z) \vee (x \wedge y)$, $(x \wedge (y \vee z)) \vee (\neg x \wedge y)$ não estão em FND.

Encontre outras fórmulas que estão em FNC e fórmulas que não estão em FNC!

Teorema 3.35 *Para toda fórmula φ existem fórmulas δ e δ' tais que $\delta \equiv \varphi \equiv \delta'$, δ está em FNC e δ' está em FND.*

O Teorema pode ser provada, por exemplo, por indução em φ. Em vez disso, esboçamos um "algoritmo"que produz uma FNC (uma FND) para uma dada fórmula φ. A corretude do "algoritmo"é garantida pelo Teorema 3.30 que diz que podemos substituir qualquer subfórmula de φ por outra logicamente equivalente – o resultado φ' será logicamente equivalente a φ.

Input: fórmula φ.
Substituir toda subfórmula $\bot$ por $x_0 \wedge \neg x_0$.
Substituir toda subfórmula $\top$ por $x_0 \vee \neg x_0$.[4]
Substituir todas as subfórmulas $\psi \rightarrow \chi$ por $\neg\psi \vee \chi$.
Substituir todas as subfórmulas $\neg\neg\psi$ por ψ.
Substituir todas as subfórmulas $\neg(\psi \wedge \chi)$ por $(\neg\psi \vee \neg\chi)$.
Substituir todas as subfórmulas $\neg(\psi \vee \chi)$ por $(\neg\psi \wedge \neg\chi)$.
Substituir todas as subfórmulas $\psi \vee (\chi \wedge \xi)$ por $(\psi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \xi)$.
Substituir todas as subfórmulas $(\psi \wedge \chi) \vee \xi$ por $(\psi \vee \xi) \wedge (\chi \vee \xi)$.

A ordem das substituições neste "algoritmo"não é relevante. O algoritmo termina quando não existem mais subfórmulas que possam ser substituidas. Note que por associatividade dos conectivos $\vee$ e $\wedge$ também podemos escrever $\psi \vee \chi \vee \xi$ em lugar de $\psi \vee (\chi \vee \xi)$, e analogamente para a conjunção.
Output: A fórmula resultante δ que obviamente está em FNC. Pelo Teorema 3.30, $\delta \equiv \varphi$.

Exercício 3.36 *Modifique o algoritmo de tal forma que a fórmula resultante δ' é uma FND de φ.*

Exemplo 3.37 *(a)*

$$\begin{aligned} x \rightarrow \neg(y \vee \neg z) &\equiv x \rightarrow (\neg y \wedge \neg\neg z) \\ &\equiv \neg x \vee (\neg y \wedge z), \textit{ FND} \\ &\equiv (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z). \textit{ FNC} \end{aligned}$$

[4]Outra possibilidade de lidar com os conectivos $\bot$ e $\top$ seria admitir estes na Definição 3.33 das formas normais FNC e FND (como disjunção, conjunção vazia, respectivamente) e não considerar as suas substituições neste algoritmo.

(b)

$$
\begin{aligned}
x \to \neg(y \wedge \neg z) &\equiv x \to (\neg y \vee \neg\neg z)\\
&\equiv \neg x \vee (\neg y \vee z)\\
&\equiv \neg x \vee \neg y \vee z. \text{ \textit{FND e FNC}}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
p \vee (q \to \neg(p \vee r)) &\equiv p \vee (\neg q \vee \neg(p \vee r))\\
&\equiv p \vee \neg q \vee \neg(p \vee r)\\
&\equiv p \vee \neg q \vee (\neg p \wedge \neg r), \text{ \textit{FND}}\\
&= \psi \vee (\neg p \wedge \neg r), \text{ \textit{onde} } \psi = (p \vee \neg q)\\
&\equiv (\psi \vee \neg p) \wedge (\psi \vee \neg r)\\
&= (p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r). \text{ \textit{FNC}}
\end{aligned}
$$

Embora não seja necessário, a última forma normal pode ser simplificada para $(p \vee \neg q \vee \neg r)$ *que está em FNC e em FND. De fato,* $p \vee \neg p \equiv \top$, $\top \vee \neg q \equiv \top$ *e* $\top \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv (p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Exercício 3.38 *Apresente mais exemplos de transformações de fórmulas em FNC e FND.*

3.2.4 Bases de conectivos

Vimos que a semântica de um conectivo c com aridade n é uma função booleana $f_c\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. A cardinalidade de $\{0,1\}^n$, ou seja, o número de n-uplas com elementos $0,1$ é 2^n. Uma função booleana de aridade n atribui a cada elemento de $\{0,1\}^n$ (a cada n-upla) o valor 0 ou 1. Há 2^{2^n} possibilidades de fazer isso. Logo, existem 2^{2^n} funções booleanas de aridade n.[5] No entanto, nem toda função booleana corresponde a um dos nossos conectivos. Por exemplo, existem $2^2 = 4$ funções booleanas de aridade 1, mas nossa linguagem contém apenas um conectivo de aridade 1, a dizer, a negação $\neg$. Existem $2^{2^2} = 16$ funções booleanas de aridade 2, mas temos apenas 3 conectivos de aridade 2. Isto significa que podemos definir novos conectivos que correspondem às funções booleanas restantes. Por exemplo, sejam $\uparrow$ e $\downarrow$ os conectivos de aridade 2 dados pelas funções booleanas $f_*\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, onde $* \in \{\uparrow, \downarrow\}$, que são definidas como segue:

$$
f_\uparrow(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = 1\\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

[5] Isto pode ser verificado de forma mais geral. Se A e B são conjuntos finitos, então $|A^B| = |A|^{|B|}$, onde A^B é o conjunto de todas as funções de B para A. Exercício: Prove isso por indução na cardinalidade de B !

$$f_\downarrow(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = y = 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Estes conectivos são conhecidos como NAND ("not and") e NOR ("not or"), respectivamente (note que as funções $f_\uparrow, f_\downarrow$ negam os respectivos resultados da conjunção, da disjunção). De forma semelhante podemos definir conectivos de qualquer aridade que correspondem a respectivas funções booleanas. Por exemplo, a função $f_c\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definida por

$$f_c(x,y,z) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y = z = 0 \\ 1, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

descreve o comportamento de um conectivo c de aridade 3. Poderíamos introduzir novas fórmulas do tipo $c(\varphi, \psi, \chi)$ na nossa linguagem de objeto que representam a aplicação do conectivo c a fórmulas dadas φ, ψ e χ.

Exercício 3.39 *Defina os restantes* 3 *conectivos (fora de* $\neg$*) que correspondem às funções booleanas de aridade* 1.

Problema: A introdução de novos conectivos aumenta o poder expressivo da nossa linguagem de objeto? Ou seja, introduzindo novos conectivos obtemos fórmulas que não são logicamente equivalentes a fórmulas que contêm somente os conectivos originais $\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \to$? A resposta é "não", como mostraremos abaixo. Surprendentemente, toda fórmula que é construida mediante conectivos quaisquer (e de qualquer aridade) é logicamente equivalente a uma fórmula que contém apenas os conectivos originais. Na verdade, é possível provar um resultado ainda mais forte como veremos mais em diante.

Definição 3.40 *Um conjunto* $C = \{c_1, ..., c_n\}$ *de conectivos é dito base de conectivos, se toda fórmula de* Fm *é logicamente equivalente a uma fórmula que contém apenas conectivos de* C.

Exemplo 3.41 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *é uma base de conectivos. Isto segue imediatamente do Teorema 3.35: Toda* $\varphi \in Fm$ *é logicamente equivalente a uma fórmula que está em FNC (em FND). Obviamente, todos os conectivos de uma forma normal são do conjunto* $\{\neg, \vee, \wedge\}$.
Disso segue que $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \to\}$ *e* $\{\bot, \to\}$ *são bases de conectivos. De fato, supondo que* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *é base, podemos eliminar a conjunção considerando*

a equivalência $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Isto é, dada uma fórmula na base $\{\neg, \vee, \wedge\}$, podemos substituir todas as subfórmulas do tipo $\varphi \wedge \psi$ por $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. O resultado será uma fórmula equivalente que contém apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Logo, este conjunto também é base.

Exercício 3.42 *Prove que*

- $\{\neg, \wedge\}$ *é base de conectivos supondo que* $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *é base*
- $\{\neg, \rightarrow\}$ *é base supondo que* $\{\neg, \wedge\}$ *é base (ou supondo que* $\{\neg, \vee\}$ *é base)*
- $\{\perp, \rightarrow\}$ *é base supondo que* $\{\neg, \rightarrow\}$ *é base.*

Surpreendentemente, o conjunto $\{\uparrow\}$ é base de conectivos. Isto é, qualquer $\varphi \in Fm$ da nossa lógica original é logicamente equivalente a uma fórmula construída apenas com o conectivo $\uparrow$. Prova: Sabemos que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ é base. Seja φ uma fórmula nesta base de conectivos. Então substituimos todas as subfórmulas de φ por fórmulas equivalentes conforme as equivalências seguintes cuja validade se verifica facilmente: $\neg\chi \equiv (\chi \uparrow \chi)$, $(\chi \wedge \psi) \equiv ((\chi \uparrow \psi) \uparrow (\chi \uparrow \psi))$ e $(\chi \vee \psi) \equiv ((\chi \uparrow \chi) \uparrow (\psi \uparrow \psi))$.

Vamos mostrar que $\{\rightarrow\}$ não é base de conectivos. Para ver isso, é suficiente provar que qualquer fórmula φ construída apenas com o conectivo $\rightarrow$ é satisfatível. Então tal φ não pode ser logicamente equivalente a uma fórmula contraditória como $\perp$ ou $x \wedge \neg x$.
Seja $Fm_{\rightarrow} \subseteq Fm$ o menor conjunto que contém V e é fechado sob a condição seguinte: se $\varphi, \psi \in Fm_{\rightarrow}$, então $(\varphi \rightarrow \psi) \in Fm_{\rightarrow}$. Provamos por indução nas fórmulas de $Fm_{\rightarrow}$ que todas elas são satisfatíveis.
Base da indução. Seja $\varphi \in V$. Então a afirmação é trivial: uma variável sempre é satisfatível. Note que este é o único caso a considerar na base já que $\perp, \top \notin Fm_{\rightarrow}$.
Passo da indução. Seja $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$. Temos que achar um modelo para φ. Segundo a hipótese da indução, ψ e χ são satisfatíveis. Em particular, existe $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \chi$. Pela semântica do conectivo $\rightarrow$, obtemos $v \vDash \psi \rightarrow \chi$. Q.E.D.

Ainda estamos devendo a prova de que conectivos novos não aumentam o poder expressivo da linguagem original. Vamos demonstrar que uma fórmula contendo conectivos quaisquer (inclusive conectivos novos e de qualquer aridade) é logicamente equivalente a uma FND (ou a uma FNC). Isto é, apresentaremos uma prova mais formal para a Proposição 3.35.

Definição 3.43 *Seja $\varphi \in Fm$ e $var(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Dizemos que φ representa a função booleana f (de aridade n), se $v(\varphi) = f(v(x_1), ..., v(x_n))$ para qualquer valoração $v \in 2^V$.*

Note que φ representa exatamente uma função (por que?). Exemplo: $x_1 \wedge x_2$ representa a função $f_\wedge$, $\neg x_1 \vee x_2$ e $\neg(x_1 \wedge \neg x_2)$ representam a função $f_\rightarrow$, $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2$ representa $f_\vee$, etc.

Para $x \in V$ definimos $x^1 := x$ e $x^0 := \neg x$. Por indução em $n \geq 1$ se mostra facilmente que para todos os $u_1, ..., u_n \in \{0,1\}$ temos que

$$(1) \qquad v(x_1^{u_1} \wedge ... \wedge x_n^{u_n}) = 1 \Leftrightarrow v(x_1) = u_1, ..., v(x_n) = u_n.$$

Teorema 3.44 *Toda função booleana $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ($n \geq 0$) pode ser representada por uma FND, a dizer, por $\varphi := \bigvee_{f(u_1,...,u_n)=1} x_1^{u_1} \wedge ... \wedge x_n^{u_n}$.*[6] *Dualmente, f pode ser representada por uma FNC $\psi := \bigwedge_{f(u_1,...,u_n)=0} x_1^{f_\neg(u_1)} \vee ... \vee x_n^{f_\neg(u_n)}$.*

Demonstração. Para dada função f seja φ como na afirmação do Teorema, e seja $v \in 2^V$. Então: $v(\varphi) = 1$ sse [existem $u_1, ..., u_n$ t.q. $v(x_1^{u_1} \wedge ... \wedge x_n^{u_n}) = 1$ e $f(u_1, ..., u_n) = 1$] sse [existem $u_1, ..., u_n$ t.q. $v(x_1) = u_1, ..., v(x_n) = u_n$ e $f(u_1, ..., u_n) = 1$] (conforme a equivalência (1) acima) sse $f(v(x_1), ..., v(x_n)) = 1$. Dessa equivalência segue que $v(\varphi) = f(v(x_1), ..., v(x_n))$, ou seja, φ representa f. Analogamente para a representação de f por ψ. Q.E.D.

O Teorema implica que para qualquer fórmula com conectivos quaisquer (inclusive conectivos novos de qualquer aridade) existe uma FND (FNC) logicamente equivalente. Em particular, segue a Proposição 3.35.

3.3 Sistemas Dedutivos

3.3.1 Axiomatização — um cálculo no estilo de Hilbert

Trabalhamos com a base de conectivos $\{\neg, \rightarrow\}$. Fm denota agora o conjunto de fórmulas na base $\{\neg, \rightarrow\}$. Tendo em vista as equivalências lógicas correspondentes, os conectivos restantes podem ser recuperados pelas definições seguintes: $\top := (x_0 \rightarrow x_0)$, $\bot := \neg\top$, $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

[6] Se $n = 0$, então $f = 0$ or $f = 1$. No primeiro caso, φ é a disjunção vazia $\bot$ que podemos entender como uma FND (de fato, é equivalente à FND $x_0 \wedge \neg x_0$). No segundo caso, φ é uma disjunção trivial da conjunção vazia $\top$ que também podemos entender como uma FND (é equivalente à FND $x_0 \vee \neg x_0$). Se $n > 0$ e f nunca assume o valor 1, então φ é a disjunção vazia $\bot$, equivalente a uma FND. Dualmente, consideramos esses casos para ψ.

Uma fórmula é um axioma sse ela tem a forma de um dos esquemas (A1) – (A4) a seguir:

(A1) $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$
(A2) $\varphi \to \psi \to \varphi$
(A3) $\neg\varphi \to \varphi \to \psi$
(A4) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$

Note que (A1)–(A4) são esquemas de axiomas, isto é, representam formas gerais de fórmulas que consideramos axiomas. Por exemplo, $x_1 \to (x_4 \to x_1)$ é um axioma do esquema (A2), e $\neg(x_2 \to \neg x_1) \to (x_2 \to \neg x_1) \to x_5$ é um axiom do esquema (A3). Dizemos que estes axiomas são instâncias de (A2), (A3), respectivamente.

A regra de inferência é o **Modus Ponens** (MP): "Se temos φ e $\varphi \to \psi$, então inferimos ψ." A fórmula ψ é a conclusão ou o resultado do Modus Ponens aplicado às premissas φ e $\varphi \to \psi$.

Definição 3.45 *Uma derivação (ou prova, dedução) de uma fórmula φ (conclusão) a partir de um conjunto Φ de fórmulas (premissas) é uma sequência finita de fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ tal que para cada $i = 1, 2, ..., n$, a fórmula φ_i é obtida através de uma das alternativas seguintes:*

- *φ_i é um axioma ou*
- *$\varphi_i \in \Phi$ (isto é, φ_i é uma premissa) ou*
- *φ_i é resultado de uma aplicação do Modus Ponens a fórmulas φ_k e $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$ que ocorrem em posições anteriores na sequência: $1 \leq j, k < i$.*

Se existe uma prova de φ a partir de Φ, então escrevemos $\Phi \vdash_H \varphi$ e dizemos que φ é derivável a partir de Φ (no cálculo de Hilbert). Se não existe tal derivação, então anotamos $\Phi \nvdash_H \varphi$. Se φ é derivável a partir do conjunto vazio, então escrevemos $\vdash_H \varphi$ e chamamos φ de ***teorema****.*

Em situações quando está claro que estamos trabalhando com o cálculo de Hilbert (existem outros cálulos) podemos escrever também $\Phi \vdash \varphi$ em lugar de $\Phi \vdash_H \varphi$ simplificando notação.

O objetivo é provar o seguinte:

$$\Phi \vdash_H \varphi \Leftrightarrow \Phi \Vdash \varphi, \tag{2}$$

para qualquer $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$. Isto é, queremos mostrar que a noção sintática da derivação $\vdash_H$ representa ou simula exatamente a noção semântica da consequência lógica $\Vdash$. Se a ida de (2) se verifica, ou seja, se qualquer derivação corresponde a uma consequência lógica, então o cálculo é dito **correto**. O cálculo é dito **completo** se toda consequência lógica pode ser representada por uma derivação, isto é, se a volta da equivalência (2) se verifica. Note que (2) implica particularmente que os teoremas são precisamente as tautologias (considere o caso $\Phi = \varnothing$).

Teorema 3.46 (Corretude do cálculo) *O cálculo é correto, isto é, $\Phi \vdash_H \varphi$ implica em $\Phi \Vdash \varphi$.*

Demonstração. Sabemos que todos os axiomas são tautologias (exercício!). Além disso, a regra do Modus Ponens é correto no sentido seguinte: Para qualquer valoração v, se $v \vDash \varphi$ e $v \vDash \varphi \to \psi$, então $v \vDash \psi$.
Supomos que $\Phi \vdash_H \varphi$. Isto é, existe uma derivação $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ de φ a partir de Φ. Provaremos a afirmação por indução no comprimento n da derivação.
Base. $n = 1$. Então, por definição, $\varphi \in \Phi$ ou φ é um axioma. Nos dois casos segue que $\Phi \Vdash \varphi$ (relembre que todos os axiomas são tautologias).
Passo da indução. Pela hipótese da indução, a afirmação do Teorema é verdadeira para todas as derivações de comprimento $\leq n$. Seja $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi$ uma derivação de comprimento $n + 1$. Se φ é um axioma ou $\varphi \in \Phi$, então podemos argumentar exatamente como na base da indução concluindo $\Phi \Vdash \varphi$. Vamos supor então que φ é o resultado da aplicação do Modus Ponens a fórmulas $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi$ e φ_k, com $j, k \leq n$. Como as respectivas derivações têm comprimento $\leq n$, podemos aplicar a hipótese da indução (duas vezes). Isto resulta em $\Phi \Vdash \varphi_j$ e $\Phi \Vdash \varphi_k$. Da definição da relação de consequência segue $\Phi \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Observação 3.47 *Se $\Phi \vdash_H \varphi$ e $\Phi \vdash_H \varphi \to \psi$, então obtemos $\Phi \vdash_H \psi$. Justificativa: Pela hipótese temos derivações de φ e de $\varphi \to \psi$ a partir de Φ, respectivamente. Concatenando essas duas sequências (derivações) resulta e uma nova derivação com o mesmo conjunto de premissas Φ. Como nesta nova derivação ocorrem as fórmulas φ e $\varphi \to \psi$, podemos aplicar o Modus Ponens inferindo ψ. Isto é, $\Phi \vdash_H \psi$. Usaremos este argumento com frequência.*

Teorema 3.48 (Finitude do cálculo) *Se $\Phi \vdash_H \varphi$, então existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi$ tal que $\Delta \vdash_H \varphi$.*

Demonstração. Indução no comprimento n da derivação.
Base. $n = 1$. Então, $\varphi \in \Phi$ ou φ é um axioma. No primeiro caso, $\{\varphi\} \subseteq \Phi$ e, por definição, $\{\varphi\} \vdash_H \varphi$. Logo, podemos supor $\Delta = \{\varphi\}$. No segundo caso, $\varnothing \subseteq \Phi$

e, por definição (φ é um axioma), $\vdash_H \varphi$. Logo, $\Delta = \varnothing$.
Passo da indução. Seja $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ uma derivação de comprimento $n + 1$ da fórmula $\varphi = \varphi_{n+1}$ a partir de Φ. Podemos supor que φ foi derivada pelo MP aplicado a duas fórmulas φ_k e $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi$, com $j, k \leq n$ (nas outras duas alternativas podemos argumentar como no caso da base da indução). Como φ_j, φ_k foram obtidas por derivações de comprimento $\leq n$, podemos aplicar a hipótese da indução duas vezes. Isto é, existem conjuntos finitos $\Delta_1 \subseteq \Phi$ e $\Delta_2 \subseteq \Phi$ tais que $\Delta_1 \vdash \varphi_j$ e $\Delta_2 \vdash \varphi_k$. Então também $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \varphi_j$ e $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \varphi_k$. Concatenando as respectivas derivações e aplicando o MP resulta numa derivação de φ a partir de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ (veja Observação 3.47). Isto é, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \varphi$. Note que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ é finito e $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Phi$. Q.E.D.

Por definição, uma prova formal no cálculo de Hilbert é uma sequência finita de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ que satisfazem as condições especificadas na Definição 3.45. Tal sequência pode ser anotada em n linhas onde cada linha contém a fórmula φ_i derivada no i-ésimo passo da derivação junto com a justificativa correspondente. A demonstração do seguinte Lemma é um exemplo desta prática.

Lema 3.49 *$\vdash \varphi \to \varphi$, para qualquer fórmula φ. Isto é, $\varphi \to \varphi$ é um teorema, para qualquer fórmula φ.*

Demonstração. Os seguintes passos constituem uma prova de $\varphi \to \varphi$ a partir do conjunto vazio.
1. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$, é instância de (A1) e portanto um axioma
2. $\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to \varphi$, axioma conforme (A2)
3. $(\varphi \to \varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$, resultado do MP aplicado a 1. e 2.
4. $\varphi \to \varphi \to \varphi$, axioma conforme (A2)
5. $\varphi \to \varphi$, MP aplicado a 3. e 4.
Q.E.D.

Definição 3.50 *Um conjunto Φ de fórmulas é dito consistente se existe uma fórmula φ tal que $\Phi \nvdash_H \varphi$. Φ é dito inconsistente se não é consistente. Φ é dito maximalmente consistente (ou maximal consistente), se Φ é consistente e para qualquer $\varphi \in Fm \smallsetminus \Phi$, $\Phi \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.*

Note que Φ é inconsistente sse $\Phi \vdash_H \varphi$ para toda fórmula φ. Φ é maximalmente consistente sse Φ é consistente e toda extensão própria $\Phi' \supsetneq \Phi$ é inconsistente. As caracterizações seguintes dos conceitos “consistente”e “inconsistente”serão útieis.

Lema 3.51 *Φ é consistente sse $\Phi \nvdash_H \bot$. Φ é inconsistente sse $\Phi \vdash_H \bot$.*

Demonstração. A volta da primeira asserção segue imediatamente da definição. Para mostrar a ida por contraposição supomos $\Phi \vdash \bot$. Isto é, $\Phi \vdash \neg(x_0 \to x_0)$. Por Lemma 3.50, $\Phi \vdash x_0 \to x_0$. Por (A3), $\Phi \vdash \neg(x_0 \to x_0) \to (x_0 \to x_0) \to \psi$, para qualquer fórmula ψ. Aplicando duas vezes MP resulta em $\Phi \vdash \psi$. Isto é, qualquer fórmula é derivável a partir de Φ e Φ é inconsistente. A segunda afirmação segue da primeira. Q.E.D.

Lema 3.52 (Teorema da Dedução) *Se $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, então $\Phi \vdash \varphi \to \psi$.*

Demonstração. Indução no comprimento n da derivação de ψ a partir de $\Phi \cup \{\varphi\}$. Base: $n = 1$. Então $\psi \in \Phi \cup \{\varphi\}$ ou ψ é um axioma. Se $\psi = \varphi$, então $\Phi \vdash \varphi \to \psi$, segundo Lemma 3.50. Se $\psi \in \Phi$ ou ψ é um axioma, então $\Phi \vdash \psi$. Por (A2), $\Phi \vdash \psi \to \varphi \to \psi$. MP resulta em $\Phi \vdash \varphi \to \psi$.
Passo indutivo: A prova de ψ a partir de $\Phi \cup \{\varphi\}$ tenha comprimento $n+1$. Podemos supor que no último passo da prova obtemos ψ por uma aplicação do Modus Ponens (caso contrário, podemos argumentar como na base). Isto é, existe χ tal que χ e $\chi \to \psi$ ocorrem em posições anteriores na prova. Logo, as derivações dessas fórmulas têm comprimento $\leq n$ e podemos aplicar a hipótese da indução a $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \chi$ e a $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \psi$. Isto resulta em $\Phi \vdash \varphi \to \chi$ e $\Phi \vdash \varphi \to \chi \to \psi$. Tendo em vista (A1), duas aplicações do Modus Ponens resulta em $\Phi \vdash \varphi \to \psi$. Q.E.D.

A volta do Teorema da Dedução também é verdadeira:

Lema 3.53 *Se $\Phi \vdash \varphi \to \psi$, então $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Demonstração. Seja $\Phi \vdash \varphi \to \psi$ verdadeiro. Qualquer derivação que testemunha aquele fato, também testemunha $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$. Obviamente, $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Concatenando as duas derivações que testemunham as duas últimas relações, respectivamente, e aplicando Modus Ponens, resulta numa derivação que justifica $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Q.E.D.

Estratégia para provar a completude do cálculo, $\Phi \Vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash_H \varphi$.
Prova por contraposição: $\Phi \nvdash_H \varphi \Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente $\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ possui um modelo $v \Rightarrow$ existe $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \Phi$ e $v \nvDash \varphi \Rightarrow \Phi \nVdash \varphi$.

Lema 3.54 (Teorema de Lindenbaum) *Qualquer conjunto consistente tem uma extensão maximalmente consistente.*

Demonstração. Seja Φ um conjunto consistente. Construimos uma cadeia de conjuntos consistentes $\Phi = \Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq ...$ tal que a união $\Phi_\omega := \bigcup_{i\in\omega} \Phi_i$ é maximalmente consistente. Então obviamente $\Phi \subseteq \Phi_\omega$. Isto é, Φ_ω é a desejada extensão de Φ. Para efetuar esta construção fixamos uma enumeração $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\}$ de Fm. Definimos $\Phi_0 := \Phi$. Se Φ_i para um $i \in \mathbb{N}$ já é construido, então definimos

$$\Phi_{i+1} := \begin{cases} \Phi_i \cup \{\varphi_i\}, \text{ se } \Phi_i \cup \{\varphi_i\} \text{ é consistente} \\ \Phi_i, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Isto define indutivamente a cadeia desejada de conjuntos consistentes. Resta mostrar que a união Φ_ω é maximalmente consistente.
(a) Φ_ω é consistente: Supomos o contrário. Isto é, $\Phi_\omega \vdash \bot$. Por Teorema 3.48, existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi_\omega$ tal que $\Delta \vdash \bot$. Seja $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$. $\Delta \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Phi_i$ implica em $\psi_k \in \Phi_{i_k}$, para $k = 1, ..., n$ e indices $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$. Se i_j é o maior destes indices, então Φ_{i_j} é o maior destes n conjuntos e portanto $\Delta \subseteq \Phi_{i_j}$. Logo, $\Phi_{i_j} \vdash \bot$. Isto contradiz a consistência de Φ_{i_j}. Logo, $\Phi_\omega \nvdash \bot$ e Φ_ω é consistente.
(b) Qualquer extensão própria de Φ_ω é inconsistente: Seja $\Phi_\omega \cup \{\varphi\}$ uma extensão própria, isto é, $\varphi \notin \Phi_\omega$. Mostraremos que ela é inconsistente. Evidentemente, φ ocorre na enumeração fixada, isto é, $\varphi = \varphi_i$ para um $i \in \mathbb{N}$. Pela construção, $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ é inconsistente (caso contrário, $\Phi_i \cup \{\varphi_i\} = \Phi_{i+1} \subseteq \Phi_\omega$ e portanto $\varphi_i = \varphi \in \Phi_\omega$). Como $\Phi_i \cup \{\varphi_i\} \subseteq \Phi_\omega \cup \{\varphi\}$, $\Phi_\omega \cup \{\varphi\}$ é inconsistente. Logo, Φ_ω é maximalmente consistente. Q.E.D.

A prova de Lindenbaum é "construtiva", isto é, a existência do objeto em questão (a extensão maximalmente consistente) é provada através de uma "construção"do mesmo. (Na verdade, não se trata de uma construção no sentido de um algoritmo já que essa "construção"usa métodos transfinitos.) Na matemática, se aplica frequentemente argumentos não-construtivos. Isto é, a existência de um objeto é provado sem dizer como obter tal objeto, sem apresentar uma construção do mesmo. A seguinte prova alternativa do Teorema de Lindenbaum faz uso do Axioma da Escolha, um princípio não-construtivo. Antes de apresentar essa prova, relembramos alguns conceitos básicos.

Seja $(A, \leq)$ uma ordem parcial (isto é, o conjunto A é parcialmente ordenado pela relação $\leq$ (relembre os axiomas de uma ordem parcial e de uma ordem total!). Uma cadeia em $(A, \leq)$ é um subconjunto de A que é totalmente ordenado por $\leq$. Para $a, b \in A$ escrevemos $a < b$, se $a \leq b$ e $a \neq b$. Seja $B \subseteq A$. Um elemento $a \in A$ é uma cota superior (upper bound) de B, se $b \leq a$ para todos os $b \in B$. Uma cota superior a de B é dita supremum de B, se $a \leq a'$ para todas as cotas superiores a' de B. Um elemento maximal de B é um elemento $b \in B$ tal que $b < a$ implica em $a \notin B$. O maior elemento de B é um elemento $b \in B$ tal que $b' \leq b$ para todos os $b' \in B$. Analogamente se define cota inferior, infimum, elemento minimal, menor elemento de B.

O Axioma da Escolha diz o seguinte.

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família não-vazia de conjuntos não-vazios. Então existe uma função de escolha para $(A_i)_{i \in I}$, isto é, uma função $f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para todos os $i \in I$.

À primeira vista, a existência de tal função parece ser trivial. O axioma diz que dado uma coleção de conjuntos A_i, $i \in I$, sempre podemos escolher de cada conjunto A_i exatamente um elemento conforme uma função de escolha. Porém, o enunciado não diz nada a respeito de uma possível definição ou construção dessa função. A existência de tal função parece menos evidente se levamos em consideração que tanto os conjuntos A_i como o conjunto de indices I podem ser infinitos. Como fazer então a escolha dos elementos? A pesar dessas objeções teóricas, o Axioma da Escolha é geralmente aceito e amplamente utilizado na prática matemática. Um enunciado equivalente ao Axioma da Escolha é o Lema de Zorn:

Lema 3.55 (Lema de Zorn) *Seja $(A, \leq)$ uma ordem parcial tal que qualquer cadeia em A tem uma cota superior (em A). Então $(A, \leq)$ tem um elemento maximal.*

Lembre que uma cadeia numa dada ordem parcial é um subconjunto totalmente (linearmente) ordenado. Se A é um conjunto parcialmente ordenado, então uma cota superior de um subconjunto $Y \subseteq A$ é um elemento $s \in A$ tal que $y \leq s$ para todos os $y \in Y$ (note que não necessáriamente $s \in Y$).

A seguir apresentaremos uma prova alternativa do Teorema de Lindenbaum usando o Axioma da Escolha na forma do Lema de Zorn. A 'construção' na prova do Teorema de Lindenbaum baseia-se no fato que o conjunto Fm é contável. O Lema de Zorn não tem essa restrição, pois é aplicável também em situações que envolvem conjuntos incontáveis.

Demonstração do Teorem de Lindenbaum usando o Axioma da Escolha. Seja Φ um conjunto consistente. Consideramos $X = \{\Psi \subseteq Fm \mid \Psi$ é consistente e $\Phi \subseteq \Psi\}$. Este conjunto é não-vazio ($\Phi \in X$) e parcialmente ordenado pela relação $\subseteq$. Se conseguimos mostrar que qualquer cadeia em X tem uma cota superior em X, então podemos aplicar o Lema de Zorn para concluir que X tem elementos maximais. É claro que um elemento maximal de X é uma extensão maximalmente consistente de Φ (Exercício!). Vamos supor então que $Y = (\Psi_i)_{i\in I}$ seja uma cadeia em X. Isto é, os Ψ_i pertencem a X e I é um (possivelmente infinito) conjunto de índices que são totalmente ordenados tal que $i < j$ implica em $\Psi_i \subseteq \Psi_j$. Então seja $\Gamma := \bigcup\{\Psi_i \mid i \in I\}$ a união da cadeia. Mostraremos que Γ é uma cota superior de $Y \subseteq X$. Para isto temos que mostrar que $\Gamma \in X$ e que todos os elementos da cadeia Y são menores (no sentido de $\subseteq$) que Γ. Esta última propriedade é evidente. Falta mostrar que $\Gamma \in X$. Obviamente, $\Phi \subseteq \Gamma$. Se Γ for inconsistente, então pelo Teorema da Finitude existiria um $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \bot$ e Δ é finito. Mas (pelo mesmo argumento aplicado na prova original do Teorema de Lindenbaum) a finitude de Δ implica que $\Delta \subseteq \Psi$, para um $\Psi \in \Gamma$. Logo, $\Psi \vdash \bot$. Isto é uma contradição à consistência de Ψ. Logo, Γ é consistente. Pela definição de X segue que $\Gamma \in X$. Γ é cota superior de Y. Pelo Lema de Zorn, X tem elementos maximais. Q.E.D.

Relembre que um conjunto Φ é consistente sse $\Phi \nvdash \bot$. O resultado seguinte será útil.

Lema 3.56 *Para quaisquer $\Phi \subseteq Fm$, $\varphi \in Fm$:*
(a) $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$
(b) $\Phi \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\varphi\} \vdash \bot$

Demonstração. (a). Ida: $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Também, $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$. Por (A3), $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \varphi \to \bot$. Aplicando duas vezes MP resulta em $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. Volta: $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \neg\varphi \to \varphi$, por Lema 3.52. Também $\Phi \vdash \varphi \to \varphi$, por Lemma 3.49. Então, $\Phi \vdash \varphi$, por (A4) e duas vezes MP.
De forma semelhante se prova item (b). Exercício! Q.E.D.

As propriedades seguintes de um conjunto maximalmente consistente são importantes para a prova do Teorema da Completude.

Lema 3.57 (Propriedades de conjuntos maximalmente consistentes) *Seja Φ um conjunto maximalmente consistente e sejam φ, ψ quaisquer fórmulas. Então*

(i) $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi$

(ii) $\Phi \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \Phi \nvdash \varphi$

(iii) $\Phi \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Phi \nvdash \varphi$ *ou* $\Phi \vdash \psi$

Demonstração. (i): A ida é trivial. Seja $\Phi \vdash \varphi$. Se $\varphi \notin \Phi$, então $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \bot$, já que Φ é maximalmente consistente. Pelo Teorema de Dedução, $\Phi \vdash \varphi \to \bot$. Modus Ponens resulta em $\Phi \vdash \bot$, uma contradição. Logo, $\varphi \in \Phi$.
(ii): Ida: $\Phi \vdash \neg\varphi \Rightarrow \Phi \cup \{\varphi\} \vdash \bot$, por Lema 3.56(b). Então $\Phi \vdash \varphi \to \bot$, por Lemma 3.52. Disso segue $\Phi \nvdash \varphi$ (caso contrário, $\Phi \vdash \bot$, por MP). Volta: $\Phi \nvdash \varphi$ implica que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente, por Lema 3.56(a). Como Φ é maximalmente consistente, $\neg\varphi \in \Phi$. Por (i), $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(iii): A ida segue de uma aplicação do Modus Ponens. Para a volta temos que considerar dois casos. Primeiro caso: $\Phi \nvdash \varphi$. Por (ii), $\Phi \vdash \neg\varphi$. Por (A3) e Modus Ponens, $\Phi \vdash \varphi \to \psi$. Segundo caso: $\Phi \vdash \psi$. Uma instância de (A2) e Modus Ponens nos dá $\Phi \vdash \varphi \to \psi$. Q.E.D.

Lema 3.58 *Qualquer conjunto consistente é satisfatível.*

Demonstração. Seja Ψ uma conjunto consistente. Então existe uma extensão $\Phi \supseteq \Psi$ tal que Φ é maximalmente consistente, pelo Teorema de Lindenbaum. No que segue vamos definir uma valoração v que é modelo de Φ. Evidentemente, este modelo v também será um modelo de $\Psi \subseteq \Phi$. A definição de v é dada por $v(x) = 1 :\Leftrightarrow \Phi \vdash x$, para qualquer $x \in V$. Agora provamos por indução nas fórmulas a seguinte afirmação:

$$v \vDash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi, \text{ para qualquer fórmula } \varphi.$$

Relembre que trabalhamos na base de conectivos $\{\neg, \to\}$. Portanto, na base e no passo indutivo consideraremos apenas os casos relacionados a estes conectivos.
Base. $\varphi = x \in V$: Este caso está coberto pela definição de v.
Paso da indução. Seja $\varphi = \neg\psi$. Então

$$\begin{aligned} v \vDash \neg\psi &\Leftrightarrow v \nvDash \psi, \text{ por definição da semântica} \\ &\Leftrightarrow \Phi \nvdash \psi, \text{ por hipótese da indução} \\ &\Leftrightarrow \Phi \vdash \neg\psi, \text{ por Lema 3.57(ii)} \end{aligned}$$

Agora seja $\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$. Então

$$\begin{aligned} v \vDash \psi_1 \to \psi_2 &\Leftrightarrow v \nvDash \psi_1 \text{ ou } v \vDash \psi_2, \text{ por definição da semântica} \\ &\Leftrightarrow \Phi \nvdash \psi_1 \text{ ou } \Phi \vdash \psi_2, \text{ por hipótese da indução} \\ &\Leftrightarrow \Phi \vdash \psi_1 \to \psi_2, \text{ por Lema 3.57(iii)} \end{aligned}$$

Logo, para toda fórmula φ: $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow v \vDash \varphi$. Então, $v \vDash \Phi$ e portanto $v \vDash \Psi$. Isto é, Ψ é satisfatível. Q.E.D.

Teorema 3.59 (Teorema da Completude) $\Phi \Vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$.

Demonstração. Supomos $\Phi \nvdash \varphi$. Então, por Lema 3.56, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente. Lema 3.58 garante a existência de um modelo v de $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Então $\Phi \nVdash \varphi$ (caso contrário, v seria modelo de $\neg\varphi$ e de φ). Q.E.D.

Concluimos que a noção semântica da satisfatibilidade é equivalente à noção sintática da consistência.

Corolário 3.60 *Os seguintes dois enunciados são verdadeiros e equivalentes:*

(i) Para qualquer $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$: $\Phi \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi$.

(ii) Um conjunto Ψ é satisfatível sse Ψ é consistente.

Demonstração. (i): Os Teoremas da Corretude e da Completude já foram provados.
(i) implica (ii): Seja Ψ satisfatível. Se $\Psi \vdash \bot$, então $\Psi \Vdash \bot$, por (i). Logo, Ψ não pode ser satisfatível, uma contradição. Agora supomos que Ψ é um conjunto consistente. Se Ψ for insatisfatível, então $\Psi \Vdash \bot$. De novo, (i) resulta numa contradição.
(ii) implica (i): Se $\Phi \nvdash \varphi$, então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente, por Lema 3.56. (ii) garante um modelo para $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Logo, $\Phi \nVdash \varphi$. Isso mostra a ida de (i) por contra-posição. Para provar a volta supomos $\Phi \nVdash \varphi$. Então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ tem um modelo. Por (ii), este conjunto é consistente. Por Lema 3.56(a), $\Phi \nvdash \varphi$. Q.E.D.

Uma consequência é o seguinte

Corolário 3.61 (Teorema da Compacidade) *Os seguintes dois enunciados são verdadeiros e equivalentes.*

(i) Se $\Phi \Vdash \varphi$, então existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi$ tal que $\Delta \Vdash \varphi$. (Finitude da relação da consequência lógica)

(ii) Um conjunto Ψ é satisfatível sse todo subconjunto finito de Ψ é satisfatível. (Compacidade da Lógica Proposicional)

Demonstração. O primeiro item segue imediatamente do Teorema da Finitude (Teorema 3.48) junto com os Teoremas da Completude e Corretude do cálculo. Vamos mostrar a equivalência entre (i) e (ii).
(i) implica (ii): Se Ψ é satisfatível, então um modelo de Ψ também satisfaz todos os subconjuntos de Ψ (ou seja, a ida de (ii) é trivial). Supomos que todo subconjunto finito de Ψ é satisfatível. Note que subconjuntos diferentes de Ψ podem possuir

modelos diferentes (ou seja, a volta de (ii) está longe de ser trivial). Se Ψ for insatisfatível, então $\Psi \Vdash \bot$. Por (i), existe $\Delta \subseteq \Psi$, Δ finito e $\Delta \Vdash \bot$. Isto contradiz a satisfatibilidade de Δ. Logo, Ψ tem um modelo.
(ii) implica (i): Seja $\Phi \Vdash \varphi$. Supomos que para qualquer subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi$ temos que $\Delta \nVdash \varphi$. Então para todos estes subconjuntos finitos Δ, $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Por (ii), $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Isto contradiz $\Phi \Vdash \varphi$. Logo, Φ contém um Δ finito tal que $\Delta \Vdash \varphi$. Q.E.D.

3.3.2 Um cálculo de sequentes

Um cálculo de sequentes é um tipo de cálculo que foi desenvolvido por Gerhard Gentzen em 1934. Uma sequente é um objeto da forma $\Delta \vdash \psi$ que expessa intuitivamente que existe uma prova da fórmula ψ a partir do conjunto finito Δ de fórmulas. A idéia é, como em outros cálculos, formalizar aspectos do conceito da demonstração matemática. Uma demonstração matemática produz uma proposição verdadeira (conclusão) a partir de proposições verdadeiras (premissas). Durante a demonstração provamos uma série de proposições intermediárias até finalmente chegarmos á proposição que desejamos demonstrar. Por exemplo, se temos demonstrações de proposições intermediárias φ e $\varphi \to \psi$, então podemos estabelecer uma demonstração da proposição ψ. Este argumento é formalizado pela regra (R5) abaixo (e representa a regra de inferência Modus Ponens). As sequentes em cima da linha são as premissas, e a sequente embaixo da linha é a conclusão do argumento.

Definição 3.62 *(i) Uma sequente é uma expressão da forma $\Delta \vdash \varphi$, onde $\Delta \subseteq Fm$ é finito e $\varphi \in Fm$. A sequente $\Delta \vdash \varphi$ é correta se ela corresponde a uma consequência lógica, isto é, se $\Delta \Vdash \varphi$.*

(ii) Uma regra de sequentes é uma expressão da forma

$$\frac{\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n}{\Delta \vdash \varphi}$$

onde $n \geq 0$ e $\Delta \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n$ denotam sequentes, chamadas de premissas, e $\Delta \vdash \varphi$ denota uma sequente, chamada de conclusão da regra. No caso $n = 0$, o conjunto de premissas é, por definição, vazio. Neste caso, a regra tem a forma

$$\frac{}{\Delta \vdash \varphi}$$

(iii) Uma regra de sequentes é correta, se a corretude das suas premissas implica a corretude da conclusão.

Exemplo 3.63 *Consideremos a regra* $\dfrac{\Delta \vdash \varphi}{\Delta \vdash \varphi \vee \psi}$

Vamos mostrar a corretude dessa regra. Para isto, supomos que a sequente $\Delta \vdash \varphi$ (a única premissa) seja correta, isto é, $\Delta \Vdash \varphi$. Então todo modelo de Δ é modelo de φ: $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\{\varphi\})$. Obviamente, $Mod(\{\varphi\}) \subseteq Mod(\{\varphi \vee \psi\})$. Logo, $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\{\varphi \vee \psi\})$. Isto é, $\Delta \Vdash \varphi \vee \psi$ e a sequente $\Delta \vdash \varphi \vee \psi$ é correta.

Definição 3.64 *Um cálculo de sequentes $\mathcal{S}$ é um conjunto finito de regras de sequentes. Uma derivação (ou prova, dedução) em $\mathcal{S}$ é uma sequência finita de sequentes $(\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n)$ tal que cada sequente é a conclusão de uma regra cujas premissas estão entres as sequentes anteriores na sequência. A sequente $\Delta \vdash \varphi$ é derivável no cálculos de sequentes $\mathcal{S}$ se existe uma derivação $(\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n)$ tal que $\Delta_n = \Delta$ e $\varphi_n = \varphi$. Para um conjunto (possivelmente infinito) de fórmulas $\Phi \cup \{\varphi\}$ escrevemos $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, se existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi$ e uma derivação da sequente $\Delta \vdash \varphi$ em $\mathcal{S}$. Em lugar de $\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ escrevemos também $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$; neste caso, dizemos que φ é um teorema.*

Observação 3.65 *Da definição segue que a primeira sequente $\Delta_1 \vdash \varphi_1$ de uma derivação $(\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n)$ é sempre a conclusão de uma regra sem premissas (veja a regra (R1) abaixo). Também segue imediatamente da definição que um cálculo de sequentes é finitário: Se $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, então existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Phi$ tal que $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.*

Definição 3.66 *Seja $\mathcal{S}$ uma cálculo de sequentes.*

(i) $\mathcal{S}$ é correto se para todo conjunto $\Phi \subseteq Fm$ e toda fórmula $\varphi \in Fm$, $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $\Phi \Vdash \varphi$.

(ii) $\mathcal{S}$ é completo se para todo conjunto $\Phi \subseteq Fm$ e toda fórmula $\varphi \in Fm$, $\Phi \Vdash \varphi$ implica $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Teorema 3.67 *Um cálculo de sequentes é correto se todas as regras são corretas.*

Demonstração. Por indução no comprimento n das derivações. Supomos que todas as regras sejam corretas. Seja $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ justificado pela derivação $(\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n)$, com $\Delta \subseteq \Phi$ e $\varphi_n = \varphi$. Base: $n = 1$. Então a sequente $\Delta_1 \vdash \varphi_1$ foi derivada por uma regra sem premissas. Como esta regra é correta (por hipótese), sua sequente conclusão $\Delta_1 \vdash \varphi_1$ é correta, isto é, $\Delta_1 \Vdash \varphi_1$, $\varphi_1 = \varphi$, $\Delta_1 \subseteq \Phi$. Logo, $\Phi \Vdash \varphi$. Passo indutivo: Agora supomos que $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ seja justificado por uma derivação de comprimento $n + 1$, $(\Delta_1 \vdash \varphi_1, ..., \Delta_n \vdash \varphi_n, \Delta_{n+1} \vdash \varphi_{n+1})$. A última sequente é conclusão de uma regra cujas premissas estão entre as sequentes anteriores. Como essas sequentes anteriores foram derivadas em $\leq n$ passos, podemos aplicar a hipótese da indução que diz que essas sequentes correspondem a consequências lógicas, ou seja, são corretas. Como a regra é correta, segue $\Delta_{n+1} \Vdash \varphi_{n+1}$. Q.E.D.

Depois dessas considerações gerais, apresentamos a seguir um cálculo de sequentes específico e mostraremos sua corretude e completude. Para minimizar o número de regras do cálculo, escolhemos uma base reduzida de conectivos, a decir: $\{\neg, \rightarrow\}$. Outros conectivos podem ser definidos através de $\neg$ e $\rightarrow$.

Definição 3.68 *$\mathcal{S}$ é o clálculo de sequentes dado pelas regras seguintes:*

(R1) $\dfrac{}{\Delta \vdash \varphi}$, *se* $\varphi \in \Delta$

(R2) $\dfrac{\Delta \vdash \varphi}{\Delta' \vdash \varphi}$, *se* $\Delta \subseteq \Delta'$

(R3) $\dfrac{\Delta \vdash \varphi, \Delta \vdash \neg\varphi}{\Delta \vdash \psi}$

(R4) $\dfrac{\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \Delta \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi}{\Delta \vdash \psi}$

(R5) $\dfrac{\Delta \vdash \varphi, \Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Delta \vdash \psi}$

(R6) $\dfrac{\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi}$

Note que a regra (R1) não possui premissas, portanto ela é também chamada de regra inicial, e uma sequente $\Delta \vdash \varphi$ com $\varphi \in \Delta$ é chamada de sequente inicial.

Teorema 3.69 *O cálculo $\mathcal{S}$ é correto.*

Demonstração. Conforme Teorema 3.67, é suficiente mostrar que todas as regras de $\mathcal{S}$ são corretas. Deixamos essa prova como exercício. Q.E.D.

Exemplo 3.70 *(a) Apresentamos uma derivação no cálculo de sequentes mostrando* $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \to \chi$. *Isto é, a transitividade da implicação é derivável.*
1. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$*, por (R1)*
2. $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$*, (R2) aplicado a 1.*
3. $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi$*, por (R1)*
4. $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \psi$*, (R5) aplicado a 2. e 3.*
5. $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \psi \to \chi$*, (R1)*
6. $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \chi$*, (R5) aplicado a 4. e 5.*
7. $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$*, (R6) aplicado a 6.*

(b) Pela derivação seguinte, temos que $\{\varphi \to \psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \neg\psi \to \neg\varphi$.
1. $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \varphi$*, (R1)*
2. $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$*, (R1)*
3. $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi$*, (R5) aplicado a 1. e 2.*
4. $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\} \vdash \psi$*, (R2) aplicado a 3.*
5. $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\psi$*, (R1)*
6. $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$*, (R3) aplicado a 4. e 5.*
7. $\{\varphi \to \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$*, (R1)*
8. $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$*, (R4) aplicado a 6. e 7.*
9. $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$*, (R6) aplicado a 8.*

(c) Relembre que estamos trabalhando na base de conectivos $\{\neg, \to\}$ *e podemos definir a disjunção como segue:* $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \to \psi$. *Então a derivação seguinte mostra que podemos afirmar* $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \vee \psi$.
1. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$*, (R1)*
2. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$*, (R1)*
3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$*, (R3) aplicado a 1. e 2.*
4. $\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$*, (R6) aplicado a 3.*

(d) Mostramos que $\{\neg\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$
1. $\{\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$*, (R1)*
2. $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$*, (R1)*
3. $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$*, (R1)*
4. $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$*, (R3) aplicado a 2. e 3.*
5. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$*, (R4) aplicado a 4. e 1.*

(e) Analogamente a (d), segue que $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \neg\neg\varphi$*. Exercício: Apresente uma derivação que prova essa afirmação!*

(d) Finalmente, provamos que $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$*, isto é,* $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ *é um teorema. Para isto, lembramos que* $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$*.*
1. $\{\varphi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$*, (R1)*
2. $\{\varphi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi \to \neg\psi$*, (R1)*
3. $\{\varphi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash \neg\psi$*, (R5) aplicado a 1. e 2.*
4. $\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi$*, (R6) aplicado a 3.*
5. $\{\varphi\} \vdash ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$*, por (b) e (R6), essa última fórmula é um teorema e portanto derivável de qualquer conjunto*
6. $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$*, (R5) aplicado a 4. e 5.*
7. $\{\varphi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$*, por (e) e (R6), a fórmula* $\psi \to \neg\neg\psi$ *é um teorema*
8. $\{\varphi\} \vdash \psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$*, por (a) e (R6), transitividade da implicação é um teorema; agora considere 6. e 7. e (R5)*
9. $\varnothing \vdash \varphi \to \psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)$*, (R6) aplicado a 8.*

Além dessas derivações normais, é também possível derivar novas regras. Essas regras novas podem ajudar em derivações futuras. Para derivar uma regra nova partimos de certas sequentes considerando elas como premissas ou suposições e, fazendo derivações no cálculo, chegamos finalmente a uma sequente considerada como conclusão. Um exemplo é dado pela derivação seguinte:

Exemplo 3.71 *1.* $\Delta \vdash \varphi \to \psi$*, suposição*
2. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$*, por (R2)*
3. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$*, por (R1)*
4. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$*, por (R5)*

Considerando na derivação do Exemplo 3.71 a sequente 1. como premissa e a sequente 4. como conclusão, obtemos a nova regra (R7):

$$\text{(R7)}\ \frac{\Delta \vdash \varphi \to \psi}{\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi}$$

A completude de $\mathcal{S}$ pode ser provada de forma semelhante como no caso do cálculo de Hilbert: novamente, o resultado essencial é que todo conjunto consistente (onde consistência é definida agora referente ao cálculo $\mathcal{C}$) é satisfatível, ou seja, possui um modelo. Alternativamente, podemos provar a completude de $\mathcal{S}$ aproveitando da completude do cálculo de Hilbert. Isto é, provamos o seguinte: $\Phi \vdash_H \varphi$ implica $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. A completude então segue por contraposição usando a completude do cálculo de Hilbert.

Teorema 3.72 *Para todo conjunto de fórmulas* $\Phi \cup \{\varphi\}$*,* $\Phi \vdash_H \varphi$ *implica* $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$*.*

Demonstração. Indução no comprimento n das derivações no cálculo de Hilbert.
Base: $n = 1$. Então $\varphi \in \Phi$ ou φ é um axioma. No primeiro caso, $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ segue da regra (R1). Para o segundo caso, mostramos que todos os axiomas do cálculo de Hilbert são deriváveis em $\mathcal{S}$, isto é, $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ para qualquer axioma φ.
Os passos seguintes constituem uma derivação em $\mathcal{S}$:
1. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$, por (R1)
2. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \psi$, por (R1)
3. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$, (R7) aplicado a 1.
4. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi$, (R7) aplicado a 2.
5. $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \chi$, (R5) aplicado a 3. e 4.
6. ...
7. ...
8. $\varnothing \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$, aplicando sucessivamente (R6)
Logo, $\vdash_{\mathcal{S}} (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$. Isto é, (A1) é derivável em $\mathcal{S}$.

Consideramos a derivação seguinte:
1. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$, (R1)
2. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, (R1)
3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$, (R3) aplicado a 1., 2.
4. $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$, (R6) aplicado a 3.
5. $\varnothing \vdash \neg\varphi \to \varphi \to \psi$, (R6) aplicado a 4.
Logo, $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi \to \varphi \to \psi$, isto é, (A3) é derivável no nosso cálculo de sequentes.

Finalmente, consideramos a derivação a seguir:
1. $\{\neg\varphi \to \psi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$, (R1)
2. $\{\neg\varphi \to \psi, \varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \psi$, (R1)
3. $\{\neg\varphi \to \psi, \varphi \to \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$, (R7) aplicado a 1.
4. $\{\neg\varphi \to \psi, \varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi$, (R7) aplicado a 2.
5. $\{\neg\varphi \to \psi, \varphi \to \psi, \} \vdash \psi$, (R4) aplicado a 3. e 4.
6. ...
7. ...
8. $\varnothing \vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$, aplicando sucessivamente (R6)
Logo, $\vdash_{\mathcal{S}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$, isto é, (A4) é derivável em $\mathcal{S}$.

Exercício: Apresente uma derivação do esquema de axiomas (A2) no cálculo de sequentes. Com este exercício, a base da indução é provada.
Passo indutivo: A afirmação seja verdadeira para todas as derivações de comprimento n no cálculo de Hilbert (hipótese da indução). Seja $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi$

uma derivação de φ a partir de Φ. Podemos supor que $\varphi_{n+1} = \varphi$ é obtido por Modus Ponens (caso contrário, podemos argumentar como na base da indução). Então existem fórmulas derivadas φ_i e $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi$ com $1 \leq i, j \leq n$. Pela hipótese da indução, $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i$ e $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i \to \varphi$. Por definição, existem subconjuntos finitos $\Delta_1 \subseteq \Phi$ e $\Delta_2 \subseteq \Phi$ tais que $\Delta_1 \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i$ e $\Delta_2 \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i \to \varphi$. Logo $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i$ e $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash_{\mathcal{S}} \varphi_i \to \varphi$, por (R2). Usando (R5) derivamos a sequente $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \varphi$. Como $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Phi$, obtemos $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Q.E.D.

Corolário 3.73 *O cálculo de sequentes $\mathcal{S}$ é completo: $\Phi \Vdash \varphi$ implica $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para qualquer conjunto de fórmulas $\Phi \cup \{\varphi\}$.*

Demonstração. Prova por contraposição usando o Teorema 3.72 e o Teorema da Completude do cálculo de Hilbert: $\Phi \nvdash_{\mathcal{S}} \varphi$ implica $\Phi \nvdash_{H} \varphi$ implica $\Phi \nVdash \varphi$. Note que a primeira implicação é o Teorema anterior e a segunda implicação é o Teorema da Completude do cálculo de Hilbert. Q.E.D.

Resumindo, obtemos a equivalência dos cálculos de Hilbert e de sequentes no sentido que $\Phi \vdash_H \varphi \Leftrightarrow \Phi \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para qualquer conjunto $\Phi \cup \{\varphi\}$ de fórmulas.

3.3.3 O Cálculo de Resolução

Grande parte do material apresentado nesta seção baseia-se no livro de U. Schöning.

Diferentemente dos cálculos de Hilbert e de sequentes, o cálculo de resolução tem como objetivo mostrar (por meios sintáticos) que uma dada fórmula insatisfatível é instatisfatível. Esse método é importante em aplicações, como p. ex. na Programação em Lógica (linguagens de programação como PROLOG e outras) no nível da Lógica de Predicados. Aqui estudamos os princípios básicos da Resolução na Lógica Proposicional.
Observamos que vários problemas podem ser reduzidos à questão da insatisfatibilidade de uma fórmula. Exemplos são a validade de uma fórmula e a questão da consequência lógica a partir de um conjunto finito de premissas: relembre que uma fórmula φ é válida sse $\neg\varphi$ é insatisfatível (então, para mostrar a validade de φ basta mostrar a insatisfatibilidade de $\neg\varphi$; e a relação $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \Vdash \varphi$ se dá sse $\Vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$ (Teorema da Dedução) sse $(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$ é uma tautologia sse $\neg\varphi_1 \vee ... \vee \neg\varphi_n \vee \varphi$ é uma tautologia sse $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ é uma contradição (ou seja, insatisfatível). Sabemos que essas questões podem ser decididas por meios semânticos (p. ex., tabela-verdade). Porém, em certas aplicações e implementações de algoritmos, meios sintáticos, como o método da Resolução,

são imprescindíveis.

Para poder aplicar o método da Resolução, a fórmula em questão tem que estar em FNC. Relembre que φ está em FNC se φ é uma conjunção de disjunções de literais: $\varphi = (\psi_{1,1} \vee ... \vee \psi_{1,n_1}) \wedge ... \wedge (\psi_{k,1} \vee ... \vee \psi_{k,n_k})$, onde as $\psi_{i,j}$ são literais, $k, n_k \geq 1$. Para tecnicamente lidar melhor com este tipo de fórmulas, as escrevemos como conjuntos de conjuntos. Essa representação fica clara se observamos um exemplo: no caso da fórmula φ acima, o conjunto de conjuntos que representa φ é $\{\{\psi_{1,1}, ..., \psi_{1,n_1}\}, ..., \{\psi_{k,1}, ..., \psi_{k,n_k}\}\}$. Os conjuntos internos chamamos de cláusulas. Isto é, uma FNC é representada por um conjunto de cláusulas: cada cláusula é dada por literais que representam as disjunções da FNC, e entre as cláusulas imaginamos as conjunções da FNC. Obviamente, o mesmo conjunto de cláusulas pode representar várias FNC's diferentes (e logicamente equivalentes entre sí). Por exemplo, as fórmulas

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_3)$
$\neg x_3 \wedge (x_2 \vee x_1)$
$\neg x_3 \wedge (x_2 \vee x_1 \vee x_1)$

são todas representadas pelo mesmo conjunto de cláusulas $\{\{x_1, x_2\}, \{\neg x_3\}\}$.

Para simplificar as coisas, vamos denotar o conjunto de cláusulas que representa uma fórmula φ também por φ. Também aplicaremos as noções de (in-) satisfatibilidade e validade a conjuntos de cláusulas: note que um conjunto de cláusulas é satisfeito por uma valoração $v \in 2^V$ sse v satisfaz todas as cláusulas sse v satisfaz de cada cláusula ao menos um literal.

O cálculo de Resolução é dado por apenas uma regra: a regra de Resolução formulada na definição seguinte (relembre que para um dado literal ψ, escrevemos $\overline{\psi}$ para designar o literal inverso).

Definição 3.74 *Sejam C_1, C_2 e R cláusulas. Então R é dito resolvente de C_1 e C_2 se existe um literal ψ tal que $\psi \in C_1$ e $\overline{\psi} \in C_2$, e R tem a forma*

$$R = (C_1 \setminus \{\psi\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\psi}\}).$$

Exemplo 3.75 *$R = \{p, \neg q\}$ é resolvente das cláusulas $C_1 = \{p, \neg q, r\}$ e $C_2 = \{\neg q, \neg r\}$. As cláusulas $\{p, q, \neg r, \neg s\}$ e $\{\neg p, q, \neg r, s\}$ possuem dois resolventes, isto é, a regra de Resolução é aplicável duas vezes as estas duas cláusulas; os respectivos resolventes são $\{q, \neg r, \neg s, s\}$ e $\{p, q, \neg r, \neg p\}$.*

É importante levar em consideração que a regra de Resolução pode ser aplicada apenas uma vez em cada passo. Também é possível gerar o resolvente vazio $R = \varnothing$ que denotamos por $\square$. Por exemplo, aplicando a regra de Resolução às duas cláusulas $\{y\}$ e $\{\neg y\}$ dá o resolvente vazio $\square$.

Exercício 3.76 *Ache uma FNC de $\varphi = x \to (y \vee \neg z)$ e apresente o correspondente conjunto de cláusulas. Gere todos os resolventes que podem ser obtidos a partir dele.*

Definição 3.77 *Uma derivação (prova, dedução) de uma cláusula C a partir de um conjunto φ de cláusulas é uma sequência finita de cláusulas $C_1, ..., C_n = C$ tal que para cada C_i temos o seguinte:*

- *C_i é elemento de φ ou*
- *C_i é resolvente de duas cláusulas C_j e C_k, onde $1 \leq j, k < i$.*

Dizemos que a cláusula C é derivável a partir do conjunto de cláusulas φ se existe uma derivação de C a partir de φ.

Com a última definição temos uma noção de derivabilidade (ou derivação) analogamente às respectivas noções no cálculo de Hilbert e no cálculo de sequentes. Porém, o objetivo da noção atual é diferente: Em vez de simular sintaticamente a relação da consequência lógica, queremos agora mostrar que uma dada fórmula insatisfatível é insatisfatível. O resultado principal do cálculo de Resolução diz que uma fórmula φ, dada em FNC, é insatisfatível sse a cláusula vazia $\square$ é derivável a partir do conjunto de cláusulas φ. A demonstração deste Teorema é bastante técnica e não vamos apresentar aqui (veja, p. ex., o livro de U. Schöning para maiores detalhes).

Exemplo 3.78 *Seja $\varphi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge \neg x \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y)$. φ é representada pelo conjunto de cláusulas $\varphi = \{\{x, y, \neg z\}, \{\neg x\}, \{x, y, z\}, \{x, \neg y\}\}$. Os passos a seguir constituem uma derivação da cláusula vazia a partir de φ:*

1. $C_1 = \{x, y, \neg z\}$, cláusula de φ
2. $C_2 = \{x, y, z\}$, cláusula de φ
3. $C_3 = \{x, y\}$, resolvente de C_1 e C_2
4. $C_4 = \{x, \neg y\}$, cláusula de φ
5. $C_5 = \{x\}$, resolvente de C_3 e C_4
6. $C_6 = \{\neg x\}$, cláusula de φ
7. $C_7 = \square$, resolvente de C_5 e C_6.

A derivação de uma cláusula C a partir de um conjunto de cláusulas φ pode ser descrita por um processo de geração de cláusulas: (i) gere todos os resolventes de cláusulas de φ, gere todos os resolventes de cláusulas de φ e das cláusulas geradas em (i), (ii) gere todos os resolventes de cláusulas de φ e de cláusulas achadas em (i) e (ii), ... Este processo, a priori infinito, gera passo a passo um conjunto crescente de cláusulas. Depois de um número finito de passos, o processo está saturado e não cresce mais. Isto acontece quando não é mais possível achar novos resolvente. Então, uma cláusula C é derivável de φ sse C ocorre naquele conjunto gerado e saturado de cláusulas. Estas observações informais podem ser demonstradas formalmente. A seguir, vamos definir este processo de geração de resolventes recursivamente.

Definição 3.79 *Seja φ um conjunto de cláusulas. Definimos*

$$Res(\varphi) := \varphi \cup \{R \mid R \text{ é resolvente de duas cláusulas de } \varphi\}.$$

Então, para $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $Res^n(\varphi)$ são definidos recursivamente como segue:

$$\begin{aligned} &Res^0(\varphi) := \varphi \\ &Res^{n+1}(\varphi) := Res(Res^n(\varphi)). \end{aligned}$$

Finalmente, colocamos
$Res^*(\varphi) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Res^n(\varphi) = Res^0(\varphi) \cup Res^1(\varphi) \cup Res^2(\varphi) \cup ....$

Exemplo 3.80 *Seja $\varphi = \{\{\neg x, y, z\}, \{x, y\}, \{\neg u, \neg z\}\}$. Calculamos sucessivamente os conjuntos $Res^n(\varphi)$ para $n = 0, 1, 2, ...$*
$Res^0(\varphi) = \varphi$
$Res^1(\varphi) = Res(\varphi) = \varphi \cup \{\{y, z\}, \{\neg x, y, \neg u\}\}$
$Res^2(\varphi) = Res(Res(\varphi)) = Res(\varphi) \cup \{\{y, \neg u\}\}$
$Res^3(\varphi) = Res(Res^2(\varphi)) = Res^2(\varphi) \cup \varnothing = Res^2(\varphi)$
Logo, $Res^0(\varphi) \subsetneq Res(\varphi) \subsetneq Res^2(\varphi) = Res^3(\varphi) = ... = Res^n(\varphi) = Res^{n+1}(\varphi)$ *para qualquer* $n \geq 2$.

Observação 3.81 *(i) Se $Res^n(\varphi) = Res^{n+1}(\varphi)$, então dizemos que o conjunto $Res^n(\varphi)$ é saturado. Isto significa que não é mais possível gerar novos resolventes a partir das cláusulas dadas. De fato, é possível mostrar que os conjuntos $Res^*(\varphi)$ são sempre finitos, isto é, sempre existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $Res^n(\varphi)$ é saturado. No exemplo anterior, os conjuntos $Res^n(\varphi)$ para $n \geq 2$ são saturados.*
(ii) Uma cláusula pode conter tanto um literal ψ como também seu literal inverso $\overline{\psi}$. Exemplos são os dois possíveis resolventes $\{x, \neg z, z, u\}$ e $\{x, y, \neg y, u\}$ das

duas cláusulas $\{x, y, \neg z\}$ e $\{\neg y, z, u\}$. Note que tais resolventes são logicamente equivalentes ao verum $\top$, ou seja, a qualquer cláusula da forma $\{x, \neg x\}$. Se φ é um conjunto de cláusulas e $C \in \varphi$ é uma cláusula que contém um literal e seu inverso, então $\varphi \equiv \varphi \smallsetminus \{C\}$. (Por que?)

Teorema 3.82 *Sejam φ um conjunto de cláusulas e C uma cláusula. Então C é derivável de φ se e somente se $C \in Res^*(\varphi)$.*

Demonstração. A prova é um exercício. Dica: Na ida, aplique indução no comprimento das derivações. Para a volta, note que $C \in Res^*(\varphi)$ sse existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \in Res^n(\varphi)$, agora faça indução em n. Q.E.D.

O último resultado expressa o fato que $Res^*(\varphi)$ é o conjunto de todas as cláusulas deriváveis a partir de φ. Para o resultado seguinte, relembramos que uma valoração v satisfaz um conjunto de cláusulas φ sse v satisfaz todas as cláusulas de φ sse v satisfaz de cada cláusula φ um literal.

Lema 3.83 (Lema da Resolução) *Seja φ um conjunto de cláusulas e R um resolvente de duas cláusulas de φ. Então $\varphi \equiv \varphi \cup \{R\}$, isto é, para qualquer valoração v: v satisfaz todas as cláusulas de φ sse v satisfaz todas as cláusulas de φ mais a cláusula R.*

Demonstração. Temos que provar um bicondicional. A volta do mesmo (se $v \vDash \varphi \cup \{R\}$ então $v \vDash \varphi$) é trivialmente verdadeira. Mostramos a ida. Supomos $v \vDash \varphi$, isto é, v satisfaz todas as cláusulas de φ. R tem, por definição, a forma $R = (C_1 \smallsetminus \{\psi\}) \cup (C_2 \smallsetminus \{\overline{\psi}\})$, onde C_1, C_2 são cláusulas de φ. Obviamente, tem os dois possíveis casos $v \vDash \psi$ e $v \nvDash \psi$.
Primeiro caso: $v \vDash \psi$. Então $v \nvDash \overline{\psi}$. Mas, por hipótese, $v \vDash C_2$ (v satisfaz todas as cláusulas de φ). Lembre que satisfazer uma cláusula signfica satisfazer pelo menos um literar da cláusula. Logo, tem que existir um literal em $C_2 \smallsetminus \{\overline{\psi}\}$ que é satisfeito por v. Então v satisfaz também a cláusula R.
Segundo caso: $v \nvDash \psi$. Por hipótese, v satisfaz todas as cláusulas de φ, em particular C_1. Como v não satisfaz o literal ψ, tem que existir um outro literal em $C_1 \smallsetminus \{\psi\}$ que é satisfeito por v. Este literal também pertence à cláusula R. Logo, v satisfaz R. Então, em todos os casos possíveis, v satisfaz R. Logo, $v \vDash \varphi \cup \{R\}$, e os dois conjuntos de cláusulas φ e $\varphi \cup \{R\}$ são logicamente equivalentes. Q.E.D.

O seguinte Teorema de Resolução expressa a corretude e a completude do cálculo de Resolução, ou seja, expressa o fato que este cálculo realemte faz o esperado: se para uma dada fórmula a cláusula vazia é derivável, então a fórmula é insatisfatível (corretude); a cláusula vazia é derivável a partir de qualquer fórmula insatisfatível (completude). Lembre que sempre supomos que a fórmula em questão esteja em FNC.

Teorema 3.84 (Teorema de Resolução: Corretude e Completude da Resolução) *Um conjunto de cláusulas φ é insatisfatível sse $\Box \in Res^*(\varphi)$.*

Demonstração. Corretude: Seja $\Box \in Res^*(\varphi)$. A cláusula vazia $\Box$ somente pode ser resolvente de duas cláusulas da forma $\{\psi\}$ e $\{\overline{\psi}\}$, para um literal ψ. Segue do Lemma da Resolução (Lemma 3.83) que as seguintes equivalências valem:

$$\varphi \equiv Res(\varphi) \equiv Res^2(\varphi) \equiv Res^3(\varphi) \equiv ... \equiv Res^n(\varphi) \equiv ...$$

Como $\Box \in Res^*(\varphi)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Box \in Res^n(\varphi)$. Então também as duas cláusulas $\{\psi\}$ e $\{\overline{\psi}\}$ pertencem a $Res^n(\varphi)$. Mas não existe nenhuma valoração que satisfaz $\{\psi\}$ e $\{\overline{\psi}\}$ juntos. Logo, o conjunto de cláusulas $Res^n(\varphi)$ é insatisfatível. Pela equivalência lógica acima estabelicida, também φ é insatisfatível.
A prova da Completude (ou seja, da ida do Teorema) é tecnicamente complexa e pode ser consultada na literatura (por exemplo, no livro de U. Schöning). Q.E.D.

Com base no Teorema de Resolução podemos construir o seguinte algoritmo que determina se uma fórmula dada em FNC é ou não é satisfatível.

INPUT fórmula φ dada como conjunto de cláusulas
REPEAT $\psi := \varphi$; $\varphi := Res(\varphi)$
UNTIL ($\Box \in \varphi$) **OU** ($\varphi = \psi$)
IF $\Box \in \varphi$ **THEN PRINT** "φ é insatisfatível"
ELSE PRINT "φ é satisfatível"

4 Semântica algébrica

Veremos nesta seção que a lógica proposicional clássica está intimamente ligada a uma certa classe de álgebras, a dizer, as álgebras Booleanas. De fato, a lógica pode ser interpretada semanticamente em álgebras Booleanas (quaisquer) e ela é correta e completa referente à classe de todas as álgebras Booleanas. Surpreendentemente, basta considerar apenas uma álgebra Booleana, a dizer, aquela de dois elementos $\{0, 1\}$. Esta álgebra corresponde à nossa semântica original de valores verdade $\{0, 1\}$.

Definição 4.1 *Uma estrutura* $\mathcal{B} = (B, \vee^{\mathcal{B}}, \wedge^{\mathcal{B}}, \neg^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}}, 1^{\mathcal{B}})$ *é uma álgebra Booleana*[7] *se* B *é um conjunto não-vazio chamado de universo ou domínio, e* $\vee^{\mathcal{B}} \colon B \times B \to B$, $\wedge^{\mathcal{B}} \colon B \times B \to B$ *são funções binárias,* $\neg^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ *é uma função unária e* $0^{\mathcal{B}}$, $1^{\mathcal{B}} \in B$ *são constantes (isto é, funções de aridade zero, elementos do universo) tal que quaisquer elementos* $a, b, c \in B$ *satisfazem as equações seguintes:*

(i) $a \vee^{\mathcal{B}} b = b \vee^{\mathcal{B}} a$, $a \wedge^{\mathcal{B}} b = b \wedge^{\mathcal{B}} a$ *(comutatividade)*

(ii) $a \vee^{\mathcal{B}} (b \vee^{\mathcal{B}} c) = (a \vee^{\mathcal{B}} b) \vee^{\mathcal{B}} c$, $a \wedge^{\mathcal{B}} (b \wedge^{\mathcal{B}} c) = (a \wedge^{\mathcal{B}} b) \wedge^{\mathcal{B}} c$ *(associatividade)*

(iii) $a \vee^{\mathcal{B}} (a \wedge^{\mathcal{B}} b) = a$, $a \wedge^{\mathcal{B}} (a \vee^{\mathcal{B}} b) = a$ *(absorção)*

(iv) $a \wedge^{\mathcal{B}} (b \vee^{\mathcal{B}} c) = (a \wedge^{\mathcal{B}} b) \vee^{\mathcal{B}} (a \wedge^{\mathcal{B}} c)$, $a \vee^{\mathcal{B}} (b \wedge^{\mathcal{B}} c) = (a \vee^{\mathcal{B}} b) \wedge^{\mathcal{B}} (a \vee^{\mathcal{B}} c)$ *(distributividade)*

(v) $a \wedge^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}} a = 0^{\mathcal{B}}$, $a \vee^{\mathcal{B}} \neg^{\mathcal{B}} a = 1^{\mathcal{B}}$ *(complementos)*

(vi) $a \wedge^{\mathcal{B}} 0^{\mathcal{B}} = 0^{\mathcal{B}}$, $a \vee^{\mathcal{B}} 0^{\mathcal{B}} = a$ *(menor elemento)*

(vii) $a \wedge^{\mathcal{B}} 1^{\mathcal{B}} = a$, $a \vee^{\mathcal{B}} 1^{\mathcal{B}} = 1^{\mathcal{B}}$ *(maior elemento)*

As operações $\vee^{\mathcal{B}}$ e $\wedge^{\mathcal{B}} B$ chamamos também de join e meet, respectivamente. $\neg^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ é a operação de complemento. Quando está claro que estamos no contexto de uma dada álgebra $\mathcal{B}$, então escrevemos também $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, 1 em lugar de $\vee^{\mathcal{B}}$, $\wedge^{\mathcal{B}}$, $\neg^{\mathcal{B}}$, $0^{\mathcal{B}}$ e $1^{\mathcal{B}}$, respectivamente, para simplificar notação. Dada uma álgebra Booleana, usaremos as seguintes abreviações: $a \to b := \neg a \vee b$ e $a \leftrightarrow b := (a \to b) \wedge (b \to a)$.

Relembre que as condições (i)–(iii) expressam que $\mathcal{B}$ é um reticulado. Então, uma álgebra Booleana é um reticulado distributivo com uma operação de complemento e menor e maior elemento conforme (v)–(vii). Dizendo que $0^{\mathcal{B}}$ e $1^{\mathcal{B}}$ são o menor e o maior elemento, respectivamente, implica a existência de uma ordem subyacente. De fato, definindo $a \leq b :\Leftrightarrow a \wedge^{\mathcal{B}} b = a$, obtemos uma ordem parcial $\leq$ em B com a propriedade que quaisquer dois elementos $a, b \in B$ possuem ínfimo e supremo que são dados por $inf\{a, b\} := a \wedge^{\mathcal{B}} b$ e $sup\{a, b\} := a \vee^{\mathcal{B}} b$, respectivamente. Reticulados podem ser definidos precisamente através dessa propriedade: são ordens parciais tais que quaisquer dois elementos têm um ínfimo e um supremo. Por outro lado, se um reticulado $\mathcal{R}$ é dado por essa definição, então podemos definir operações $a \wedge^{\mathcal{R}} b := inf\{a, b\}$ e $a \vee^{\mathcal{R}} b := sup\{a, b\}$ que satisfazem as condições (i)–(iii) (com $\mathcal{R}$ em lugar de $\mathcal{B}$). Essas transformações são inversas uma a outra. Portanto, um reticulado pode ser entendido tanto com

[7] Os elementos $0^{\mathcal{B}}$, $1^{\mathcal{B}}$ podem ser denotados também por $\perp^{\mathcal{B}}$ e $\top^{\mathcal{B}}$, respectivamente.

uma ordem parcial tal que quaisquer dois elementos possuem ínfimo e supremo como alternativamente também como uma estrutura algébrica com duas operações binárias que satisfazem (i)–(iii) acima.

Os fatos seguintes apresentamos sem prova.

Lema 4.2 *Toda álgebra Booleana satisfaz as equações seguintes:*

- $a \wedge b = 0$ *e* $a \vee b = 1$ *implica* $a = \neg b$ *(unicidade do complemento)*
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$*,* $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ *(leis de De Morgan)*
- $\neg\neg a = a$
- $\neg 0 = 1$*,* $\neg 1 = 0$

Lema 4.3 *Em qualquer álgebra Booleana vale:* $a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1$.

Demonstração. Temos que $a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$. Logo, $\neg a \vee b = \neg(a \wedge b) \vee b = \neg a \vee \neg b \vee b = \neg a \vee 1 = 1$. Q.E.D.

Exemplo 4.4 *(a) Para todo conjunto* M*,* $\mathcal{M} = (Pow(M), \cup, \cap, c, \varnothing, M)$ *é uma álgebra Booleana, a álgebra dos subconjuntos de* M*. Aqui é* c *a operação de complemento:* $c(A) := M \smallsetminus A$*, para* $A \subseteq M$*.*
(b) **2** $= (\{0,1\}, f_\vee, f_\wedge, f_\neg, f_\perp, f_\top)$ *é uma álgebra Booleana de dois elementos com as funções booleanas definidas como acima (veja semântica da lógica proposicional clássical). Na verdade, todas as álgebras Booleanas de exatamente dois elementos são isomorfas a essa álgebra (ou seja, têm a mesma estrutura, diferem apenas nos nomes dos elementos).*
(c) O conjunto de todos os subconjuntos finitos ou cofinitos de $\mathbb{N}$ *forma uma álgebra Booleana com as operações de união, interseção e complemento em* $\mathbb{N}$*.*[8]

Exercício 4.5 *Prove as asserções de Exemplo 4.4.*

Definição 4.6 *Seja* $\mathcal{B}$ *uma álgebra Booleana. Um subconjunto não-vazio* $F \subseteq B$ *é um filtro de* $\mathcal{B}$ *se para quaisquer elementos* $a, b \in B$ *vale o seguinte (como sempre,* $\leq$ *denota a ordem parcial do reticulado subyacente):*

(i) Se $a, b \in F$*, então* $a \wedge b \in F$ *("Se dois elementos* a, b *pertencem ao filtro, o 'núcleo comum'* $a \wedge b$ *também pertence ao filtro")*

(ii) Se $a \in F$ *e* $a \leq b$*, então* $b \in F$ *("Se um dado elemento não passa o filtro, então elementos maiores também não passam")*

[8] Um subconjunto A de um conjunto M é dito cofinito se $M \smallsetminus A$ é finito.

Um filtro F é dito próprio se $F \neq B$, isto é, se $0^{\mathcal{B}} \notin F$.

Exercício 4.7 *Dada uma álgebra Booleana, prove o seguinte:*

- *Se $\mathcal{F}$ é um conjunto de filtros, então $\bigcap \mathcal{F}$ é um filtro (isto é, 'filtros são fechados sob interseção').*[9]
- *Se $\mathcal{F}$ é uma cadeia não-vazia de filtros, então $\bigcup \mathcal{F}$ é um filtro (isto é, 'filtros são fechados sob união de cadeias')*

Relembre que uma relação de congruência R numa dada álgebra $\mathcal{A}$ é uma relação de equivalência que é compatível com as operações da álgebra, isto é, as classes de equivalência são independentes dos seus representantes: se $f^{\mathcal{A}}$ é qualquer operação de $\mathcal{A}$ de aridade $n > 0$, e $a_1 R b_1, ..., a_n R b_n$ (ou seja, $[a_1]_R = [b_1]_R, ..., [a_n]_R = [b_n]_R$), então $f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) R f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n)$ (isto é, $[f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)]_R = [f^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_n)]_R$. No caso particular de álgebras de Boole temos o seguinte resultado.

Observação 4.8 *Em qualquer álgebra Booleana temos que $a \leftrightarrow b = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$. Em particular,*

- $(a \leftrightarrow a) = (a \vee \neg a) = 1$
- $(a \leftrightarrow 1) = a$
- $(a \leftrightarrow 0) = \neg a$

Seja F é um filtro. Então ($a \in F$ e $a \to b \in F$) implica $b \in F$.

Exercício 4.9 *Prove as afirmações da Observação 4.8.*

Teorema 4.10 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra Booleana. Para qualquer filtro F, a relação $R_F \subseteq B \times B$ definida por $aRb :\Leftrightarrow a \leftrightarrow b \in F$ é uma congruência de $\mathcal{B}$. Por outro lado, para qualquer relação de congruência R de $\mathcal{B}$, a classe de equivalência $F_R := \{a \in B \mid aR1^{\mathcal{B}}\} = [1^{\mathcal{B}}]_R$ é um filtro.*

Demonstração. Seja F uma filtro de $\mathcal{B}$ e seja R_F definida como no Lema. Então R_F é reflexiva já que aRa sse $a \leftrightarrow a = 1^{\mathcal{B}} \in F$ (note que qualquer filtro contém o maior elemento do reticulado). Obviamente, R também é simétrica. Agora supomos $a \leftrightarrow b \in F$ e $b \leftrightarrow c \in F$. Em particular, $a \to b \in F$ e $b \to c \in F$. Isto é, $\neg a \vee b \in F$ e $\neg b \vee c \in F$. Como F é um filtro, segue $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \in F$.

[9] Para o conjunto vazio de filtros definimos $\bigcap \varnothing := B$.

Aplicando distributividade, obtemos $d := (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (b \wedge c) \in F$. Como $d \leq \neg a \vee c$ e F é um filtro, concluímos $\neg a \vee c = a \to c \in F$. Analogamente segue que $c \to a \in F$. Logo, $a \leftrightarrow c \in F$ e R é transitiva.
R é compatível com as operações da álgebra Booleana e portanto é uma relação de congruência: Supomos aRa' e bRb'. Queremos mostrar que isso resulta em $(a \wedge a')R(b \wedge b')$. A hipótese implica particularmente $\neg a \vee a' \in F$ e $\neg b \vee b' \in F$. Então, obviamente, $\neg a \vee a' \leq (\neg a \vee \neg b \vee a') \in F$ e $\neg b \vee b' \leq (\neg a \vee \neg b \vee b') \in F$. Aplicando as leis de distributividade e De Morgan obtemos $\neg(a \wedge b) \vee (a' \wedge b') = (\neg a \vee \neg b \vee a') \wedge (\neg a \vee \neg b \vee b') \in F$. Logo, $(a \wedge b) \to (a' \wedge b') \in F$. Analogamente mostramos $(a' \wedge b') \to (a \wedge b) \in F$. Logo, $(a \wedge b) \leftrightarrow (a' \wedge b') \in F$ e R é compatível com a operação $\wedge$. A compatibilidade com as operações restantes deixamos como exercício.
Agora supomos que nos é dado uma relação de congruência R. Mostraremos que $F_R = \{a \in B \mid aR1^{\mathcal{B}}\}$ é um filtro. Obviamente, $1^{\mathcal{B}} \in F_R \neq \varnothing$. Supomos $a, b \in F_R$. Então $aR1^{\mathcal{B}}$ e $bR1^{\mathcal{B}}$. Segue que $(a \wedge b)R(1^{\mathcal{B}} \wedge 1^{\mathcal{B}})$, isto é, $(a \wedge b)R1^{\mathcal{B}}$. Logo, $a \wedge b \in F_R$. Agora seja $a \in F_R$ e $a \leq b$ para um $b \in B$. Então $aR1^{\mathcal{B}}$ e trivialmente também bRb. Como R é congruência, obtemos $\neg aR\neg 1^{\mathcal{B}}$, isto é, $\neg aR0^{\mathcal{B}}$, e finalmente $(\neg a \vee b)Rb$, isto é, $(a \to b)Rb$. Pelo Lema 4.2, $1^{\mathcal{B}}Rb$, logo $b \in F_R$. Q.E.D.

Definição 4.11 *Dada uma álgebra Booleana, um filtro próprio é dito ultrafiltro se ele é um elemento maximal no conjunto de todos os filtros próprios.*

Um filtro próprio U é um ultrafiltro sse $U \subseteq F$ implica $U = F$ para qualquer filtro própio F.

Exercício 4.12 *Use o Lema de Zorn para provar que todo filtro próprio de uma dada álgebra Booleana está contido num ultrafiltro.*

Lema 4.13 *Seja F um filtro próprio de uma dada álgebra Booleana $\mathcal{B}$. Os enunciados seguintes são equivalentes:*

(i) F é um ultrafiltro.

(ii) Para todo $a \in B$: $a \in F \Leftrightarrow \neg a \notin F$ (isto é, ou $a \in F$ ou $\neg a \in F$).

(iii) Para quaisquer $a, b \in B$: $a \vee b \in F \Leftrightarrow a \in F$ or $b \in F$.

Demonstração. (iii) implica (ii): Considere $a \vee \neg a = 1 \in F$.
(ii) implica (i): Supomos que (ii) seja verdadeiro. Se F não é ultrafiltro, então existe uma filtro próprio F' tal que $F \subsetneq F'$. Seja $a \in F' \setminus F$. Por (ii), $\neg a \in F$.

Logo, $\neg a \in F'$ e $a \in F'$ o que implica $a \wedge \neg a = 0 \in F$. Uma contradição. Logo, F é ultrafiltro.
(i) implica (iii): Esta implicação, não apresentada aqui, pode ser encontrada na literatura apropriada. (Note que a 'volta' de (iii) é sempre satisfeita pela definição de um filtro.) Q.E.D.

Todo filtro é 'gerado' por um conjunto de ultrafiltros no sentido do seguinte resultado.

Lema 4.14 *Seja F um filtro numa dada álgebra Booleana. Então F é a interseção do conjunto de todos os ultrafiltros que estendem F.*

Demonstração. Se F é o filtro não-próprio, isto é $0 \in F$, então $F = \bigcap \varnothing$. Seja F um filtro próprio. Então pelo Lema de Zorn, para qualquer $a \in B \smallsetminus F$ existe um ultrafiltro U_a tal que $a \notin U_a$ e $F \subseteq U_a$. Então $F = \bigcap\{U_a \mid a \notin F\}$ e a afirmação segue. Q.E.D.

Exercício 4.15 *Apresente os detalhes da prova do Lemma 4.14.*

Teorema 4.16 *Sejam $\mathcal{B} = (B, \vee^{\mathcal{B}}, \wedge^{\mathcal{B}}, \neg^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}}, 1^{\mathcal{B}})$ uma álgebra Booleana e F um filtro próprio de $\mathcal{B}$. Então o conjunto $B/F := \{[a] \mid a \in B\}$ das classes de congruência $[a] := \{b \in B \mid R_F(a,b)\}$ dos elementos $a \in B$ módulo a relação R_F (onde R_F é dada como no Teorema 4.10) forma uma álgebra Booleana*

$$\mathcal{B}/F = (B/F, \vee^{\mathcal{B}/F}, \wedge^{\mathcal{B}/F}, \neg^{\mathcal{B}/F}, 0^{\mathcal{B}/F}, 1^{\mathcal{B}/F})$$

com as operações definidas como segue (note que usamos as operações da álgebra original $\mathcal{B}$ para definir as operações da álgebra $\mathcal{B}/F$):

$$\begin{aligned}
&[a] \vee^{\mathcal{B}/F} [b] := [a \vee^{\mathcal{B}} b] \\
&[a] \wedge^{\mathcal{B}/F} [b] := [a \wedge^{\mathcal{B}} b] \\
&\neg^{\mathcal{B}/F}[a] := [\neg^{\mathcal{B}} a] \\
&0^{\mathcal{B}/F} := [0^{\mathcal{B}}] \\
&1^{\mathcal{B}/F} := [1^{\mathcal{B}}].
\end{aligned}$$

Demonstração. Vimos no Teorema 4.10 que a relação R_F é uma relação de congruência de $\mathcal{B}$. Então as classes de equivalência $[a]$ são independentes dos seus representantes. Isto é, se $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$ então segue que $\neg^{\mathcal{B}/F}[a] = \neg^{\mathcal{B}/F}[a']$, $[a] \vee^{\mathcal{B}/F} [b] = [a'] \vee^{\mathcal{B}/F} [b']$ e $[a] \wedge^{\mathcal{B}/F} [b] = [a'] \wedge^{\mathcal{B}/F} [b']$. De fato, isto segue precisamente da propriedade de R_F ser compatível com as operações de $\mathcal{B}$.

Logo, as definições das operações de $\mathcal{B}/F$ fazem sentido, se diz que elas são 'bem-definidas'. Deixamos como exercícios que de fato as equações da Definição 4.1 são válidas em $\mathcal{B}/F$. Q.E.D.

Definição 4.17 *Sejam $\mathcal{B}$, F e $\mathcal{B}/F$ dadas como no Teorema 4.16. Então $\mathcal{B}/F$ é dita a álgebra (Booleana) quociente de $\mathcal{B}$ módulo of filtro F (ou módulo a congruência R_F).*

Lema 4.18 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra Booleana com um filtro próprio F e seja $\mathcal{B}/F$ a álgebra quociente de $\mathcal{B}$ módulo F. Então $1^{\mathcal{B}/F} = F = [1^{\mathcal{B}}]$, isto é, F é o maior elmento na álgebra quociente. Em particular, se F é um ultrafiltro, então a álgebra quociente é a álgebra Booleana de exatamente dois elementos $1^{\mathcal{B}/F} = F$ e $0^{\mathcal{B}/F} = (B \setminus F) = \{a \in B \mid \neg^{\mathcal{B}} a \in F\}$.*

Demonstração. Os elementos $[a]$ da álgebra quociente são precisamente as classes de congruência da relação $R_F = \{(a,b) \mid a \leftrightarrow b \in F\}$. Em particular, $1^{\mathcal{B}/F} = [1^{\mathcal{B}}] = \{a \in B \mid a \leftrightarrow 1^{\mathcal{B}} \in F\} = \{a \in B \mid a \in F\} = F$, já que equação $a \leftrightarrow 1 = a$ vale em qualquer álgebra Booleana. Agora supomos que F seja um ultrafiltro. A álgebra quociente $\mathcal{B}/F$ possui ao menos os dois elementos $0^{\mathcal{B}/F}$ e $1^{\mathcal{B}/F}$. Como $F \neq B$, esses dois elementos (classes de equivalência) não podem ser iguais. Para ver que não existem outros elementos basta mostrar que para qualquer elemento $[a]$, $[a] \neq 1^{\mathcal{B}/F}$ implica $[a] = 0^{\mathcal{B}/F}$. $[a] \neq 1^{\mathcal{B}/F}$ significa $a \leftrightarrow 1^{\mathcal{B}} = a \notin F$. Pelo Lemma 4.13, isto implica $\neg a \in F$. A equação $\neg a = a \leftrightarrow 0$ vale em qualquer álgebra Booleana. Logo, $\neg a = a \leftrightarrow 0^{\mathcal{B}} \in F$, isto é, $R_F(a, 0^{\mathcal{B}})$ e portanto $[a] = [0^{\mathcal{B}}] = 0^{\mathcal{B}/F}$. Q.E.D.

Lembramos que V denota o conjunto das variáveis da lógica proposicional, e Fm é o conjunto de todas as fórmulas.

Definição 4.19 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra Booleana. Uma valoração (ou atribuição) em $\mathcal{B}$ é uma função $v\colon V \to B$. Qualquer valoração $v \in B^V$ estende canonicamente para uma função $v^*\colon Fm \to B$ como segue:*[10]

$$\begin{aligned}
&v^*(x) = v(x), \textit{ para } x \in V \\
&v^*(\bot) = 0^{\mathcal{B}} \\
&v^*(\top) = 1^{\mathcal{B}} \\
&v^*(\neg\varphi) = \neg^{\mathcal{B}} v^*(\varphi) \\
&v^*(\varphi \Box \psi) = v^*(\varphi) \Box^{\mathcal{B}} v^*(\psi), \textit{ onde } \Box \in \{\vee, \wedge, \to\}
\end{aligned}$$

[10]Relembre que definimos $a \to^{\mathcal{B}} b := \neg^{\mathcal{B}} a \vee^{\mathcal{B}} b$.

Para simplificar notação, escrevemos novamente v em lugar da (única) extensão v^* de v.

Definição 4.20 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra Booleana, $TRUE \subseteq B$ um ultrafiltro de $\mathcal{B}$ e v uma valoração em $\mathcal{B}$. A dupla $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, TRUE)$ chamamos de modelo, e a dupla $I = (\mathcal{M}, v)$ chamamos de interpretação. Definimos uma relação de satisfatibilidade entre interpretações e fórmulas como segue:*

$$((\mathcal{B}, TRUE), v) \vDash_b \varphi :\Leftrightarrow v(\varphi) \in TRUE$$

Isto é, uma fórmula é verdadeira se ela é interpretada por um elemento do ultrafiltro $TRUE$ da interpretação dada $((\mathcal{B}, TRUE), v)$. Se $\mathcal{B}$ é a álgebra Booleana de dois elementos $0, 1$ (valores verdade) com as funções Booleanas $f_\perp = 0, f_\top = 1, f_\neg, f_\vee, f_\wedge, f_\rightarrow$ como operações, então a Definição 3.7 (semântica da Lógica Proposicional) representa um caso especial da Definição 4.20. Isto é, nossa semântica padrão de dois valores verdade 0 e 1 da Lógica Proposicional é dada pela álgebra Booleana

$$\mathcal{B} = (\{0,1\}, f_\vee, f_\wedge, f_\neg, 0, 1) \text{ com o único ultrafiltro } TRUE = \{1\}$$

junto com as valorações $v \colon V \to \{0, 1\}$.

Lema 4.21 *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra Booleana, U um ultrafiltro e $v \in B^V$ uma valoração em $\mathcal{B}$. Na álgebra quociente $\mathcal{B}/U$ consideramos a valoração $\overline{v} \colon V \to B/U$ definida por $\overline{v}(x) := [v(x)]$. Então, para qualquer $\varphi \in Fm$, $\overline{v}(\varphi) = [v(\varphi)]$ e*

$$(\mathcal{M}, v) \vDash_b \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}/U, \overline{v}) \vDash_b \varphi,$$

onde $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, U)$ e $\mathcal{M}/U = (\mathcal{B}/U, \{1^{\mathcal{B}/U}\})$. Isto é, a fórmula φ é verdadeira no modelo $\mathcal{M}$ sob a valoração v sse φ é verdadeira no modelo quociente $\mathcal{M}/U$ sob a valoração $\overline{v}$.

Demonstração. A equação $\overline{v}(\varphi) = [v(\varphi)]$ segue por indução na construção de φ. Se φ é uma variável, então a afirmação é a definição de $\overline{v}$. Se $\varphi = \perp$, então $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\perp) = 0^{\mathcal{B}/U} = [0^{\mathcal{B}}] = [v(\perp)]$. Analogamente para $\varphi = \top$. Agora seja $\varphi = \psi \vee \chi$. Então $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\chi \vee \psi) = \overline{v}(\psi) \vee^{\mathcal{B}/U} \overline{v}(\chi)$, já que $\overline{v}$ é uma valoração. Pela hipótese da indução, isso é igual a $[v(\psi)] \vee^{\mathcal{B}/U} [v(\chi)] = [v(\psi) \vee^{\mathcal{B}} v(\chi)] = [v(\varphi)]$. Analogamente para os casos restantes.
Considerando as definições e os resultados do Lemma 4.22 obtemos as equivalências seguintes:
$(\mathcal{M}, v) \vDash_b \varphi \Leftrightarrow v(\varphi) \in U = 1^{\mathcal{B}/U} \Leftrightarrow [v(\varphi)] = 1^{\mathcal{B}/U} \Leftrightarrow \overline{v}(\varphi) = 1^{\mathcal{B}/U} \Leftrightarrow (\mathcal{M}/U, \overline{v}) \vDash_b \varphi$. Q.E.D.

Definição 4.22 *Para nossa semântica algébrica definimos uma relação de consequência lógica* $\Vdash_b \subseteq Pow(Fm) \times Fm$ *como segue:*

$$\varPhi \Vdash_b \varphi :\Leftrightarrow I \vDash_b \varPhi \textit{ implica } I \vDash_b \varphi, \textit{ para qualquer interpretação } I$$

De novo, observamos que a Definição 3.19 da relação de consequência lógica padrão da Lógica Proposicional é um caso particular da Definição 4.22 onde uma interpretação I é dada pela álgebra Booleana de dois elementos $\{0, 1\}$, o único ultrafiltro $TRUE = \{1\}$ e qualquer valoração $v\colon V \to \{0, 1\}$. Como essa álgebra Booleana e o ultrafiltro nunca mudam, basta considerar apenas as valorações como interpretações. Surge a questão se a definição mais geral 4.22 traz algo novo. Isto não é o caso, como vamos mostrar a seguir. Isto é, para o caso da Lógica Proposicional, a semântica álgebrica baseada em todas as álgebras Booleanas pode ser reduzida à semântica de dois valores verdade, ou seja, a semântica dada pela álgebra Booleana de dois elementos.

Teorema 4.23 *Para qualquer conjunto* $\varPhi \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$*,*

$$\varPhi \Vdash_b \varphi \Leftrightarrow \varPhi \Vdash \varphi.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$": Supomos $\varPhi \Vdash_b \varphi$. Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \varPhi$. Então $I \vDash_b \varPhi$ onde a interpretação I (conforme Definição 4.20) consiste na álgebra Booleana de dois elementos 0 e 1, ultrafiltro $\{1\}$ e valoração v. Pela hipótese, $I \vDash_b \varphi$. Isto é, $v(\varphi) = 1$ e portanto $v \vDash \varphi$.
"$\Leftarrow$": Supomos $\varPhi \Vdash \varphi$. Seja $I = (\mathcal{M}, v)$ qualquer interpretação conforme Definição 4.20 tal que $I \vDash_b \varPhi$. Pelo Lemma 4.21, para toda $\psi \in \varPhi$, $\overline{v}(\psi) = 1$ na álgebra quociente que é a álgebra Booleana de dois elementos $0, 1$. Podemos entender $\overline{v}\colon V \to \{0, 1\}$ como uma valoração da nossa semântica original de valores verdades. Isto é, $\overline{v} \vDash \varPhi$. Pela hipótese, isto implica $\overline{v} \vDash \varphi$, ou seja, $\overline{v}(\varphi) = 1$ na álgebra quociente. Aplicando novamente Lema 4.21, obtemos $I \vDash_b \varphi$. Como I foi arbitrário, segue $\varPhi \Vdash_b \varphi$. Q.E.D.