Exercício 1 - Teoria dos Grafos

João Lucas Lima de Melo

Outubro 2022

Questão 1

1.1 Por que Gandalf já sabe que não conseguirá montar os casamentos?
Do universo de 150 damas, 62 não querem se casar com nenhum dos 92 cavalheiros de um certo grupo. Podemos pensar essa configuração em um subconjunto D, correspondente ao conjunto das damas que não querem se casar com nenhum dos 92 cavalheiros. Restam do universo de cavalheiros 58 pretendentes para o casamento. Pensando em uma modelagem por grafo, as 62 damas podem ser vizinhas a apenas 58 cavalheiros, de tal forma que $|N(D)| < |D|$. Haveriam, portanto, damas sem parceiros. Dessa forma, Gandalf sabe que não conseguirá montar os 150 casamentos.

1.2 Pensando em grafos, como podemos modelar a situação relatada?
Podemos pensar na situação através de uma modelagem de grafos bipartidos, onde um grafo G possui duas bipartições X e Y de vértices tais que X corresponda ao conjunto de todos os 150 cavalheiros e Y o conjuntpo correspondente às 150 damas. A relação de casamento é dado por uma aresta entre um vértice em X e um vértice em Y. Em Y haveria ainda um subconjunto D tal que represente as 62 damas que não querem se casar com nenhum dos 92 cavalheiros de um subconjunto em X. Os cavalheiros disponíveis para o casamento seria um subconjunto em X dado por $|N(D)| = 58$.

1.3 Baseado na ideia acima, qual seria uma condição necessária para organizarmos N casamentos?
Para que ocorram N casamentos, deve haver uma relação de um para um de N vértices de X e Y, tal que para um subconjunto de damas D em Y, contendo N vértices, $|N(D)| \geq |D|$.

Questão 2

Por definição, um emparelhamento é dito perfeito se satura todo o conjunto de vértices, ou seja, se todos os vértices estão contidos no emparelhamento. Seguiremos a prova de que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito por contradição.

Vamos supor que uma árvore T possua dois emparelhamentos perfeitos M e M'. Dessa forma, todos os vértices da árvore estão contidos em ambos emparelhamentos. Fazendo a construção do grafo G através da união de arestas dos emparelhamentos $M \cup M'$, temos que cada componente do grafo consistirá de uma única aresta contida em ambos os emparelhamentos ou um ciclo. Se a aresta está contida em ambos os emparelhamentos, isso implica dizer que $M = M'$. Dada a definição de árvore, um grafo acíclico conexo, não é possível que a união dos emparelhamentos implique na existência de um ciclo. Portanto, toda árvore possui no máximo um emparelhamento perfeito.