10

DERIVADAS PARCIAIS

10.1. DERIVADAS PARCIAIS

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f em relação a x, no ponto* (x_0, y_0) e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$

ou, ainda,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A, que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1.ª ordem de f, em relação a x*, ou, simplesmente, *derivada parcial de f em relação a x.*

De modo análogo, define-se *derivada parcial de f, em relação a y, no ponto* (x_0, y_0) que se indica por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}}$$

Para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada, em relação a x, de $f(x, y)$, mantendo-se y *constante*. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada, em relação a y, de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$

Solução

a) Devemos olhar y como constante e derivar em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(-4y) = 0.$$

Por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)y - 4y - 2xy + 4y}{\Delta x}$$
$$= 2y.$$

b) Devemos olhar x como constante e derivar em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 4y) = 2x - 4.$$

c) Conforme *a*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$. Daí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$.

d) Conforme *b*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -6.$$

EXEMPLO 2. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $z = \text{arc tg}\,(x^2 + y^2)$. Calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ *b*) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$ *d*) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$

Solução

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{arc tg}\,(x^2 + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\text{arc tg}\ (x^2 + y^2)\right) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2),$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

c) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}.$$

d) $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$$

Antes de passarmos ao próximo exemplo, observamos que uma função $z = f(x, y)$ se diz *definida ou dada implicitamente* pela equação $g(x, y, z) = 0$ se, para todo $(x, y) \in D_f$, $g(x, y, f(x, y)) = 0$. Por exemplo, a função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$, é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois, para todo (x, y) no seu domínio, $x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 = 1$. As funções $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, são também dadas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (verifique).

EXEMPLO 3. Sendo $z = f(x, y)$ dada implicitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ *b*) $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solução

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ x^2 + y^2 < 1.$$

Poderíamos, também, ter chegado ao resultado acima trabalhando diretamente com a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1);$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$, $\frac{\partial}{\partial x}[z^2] = \frac{d}{dz}[z^2] \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2z\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$, resulta:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ x^2 + y^2 < 1.$$

b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(1)$, ou seja,

$$2y + 2z\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e, portanto, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ x^2 + y^2 < 1.$

CUIDADOS COM NOTAÇÕES. A notação $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, como vimos, indica a derivada de $f(x, y)$ em relação a x, onde y é olhado como *constante*, ou seja, como *independente* de x. Por outro lado, a notação $\frac{d}{dx}[f(x, y)]$ indica a derivada de $f(x, y)$, onde y *deve ser olhado* (quando nada for dito em contrário) *como função de* x. As notações foram criadas para serem usadas corretamente. Portanto, não confunda $\frac{\partial}{\partial x}$ com $\frac{d}{dx}$.

EXEMPLO 4. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$, enquanto

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x + 2y\,\frac{dy}{dx}$$

pois,

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\,\frac{dy}{dx} = 2y\,\frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLO 5. Suponha que $z = f(x, y)$ seja dada implicitamente pela equação

$$e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Suponha que f admita derivada parcial em relação a x, expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y e z.

Solução

Para todo $(x, y) \in D_f$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = e^{xyz}\,\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = e^{xyz}\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2z\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim,

$$e^{xyz}\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 2z\,\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yz\,e^{xyz}}{xy\,e^{xyz} - 2z}$$

em todo $(x, y) \in D_f$ com $xy\,e^{xyz} - 2z \neq 0$.

EXEMPLO 6. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável e derivável. Considere a função g dada por $g(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$. Verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Solução

$$g(x, y) = \phi(u) \text{ onde } u = x^2 + y^2.$$

Então, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,2x.$$

Da mesma forma, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,2y.$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2\,\phi'(2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Observação. Se no exemplo anterior a função ϕ fosse, por exemplo, a função seno, teríamos $g(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ e, assim, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sen}'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x\cos(x^2 + y^2)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sen}'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y\cos(x^2 + y^2)$.

EXEMPLO 7. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *b)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Solução

a) Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)\,2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em (0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ é a derivada, em } x = 0, \text{ de } g(x) = f(x, 0).$$

$$f(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

assim, $g(x) = f(x, 0) = x$, para todo x; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1.$$

Poderíamos, também, ter calculado $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em (0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ é (caso exista) a derivada, em } y = 0, \text{ de } h(y) = f(0, y);$$

$$f(0, y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

assim, $h(y)$ não é contínua em $y = 0$, logo, $h'(0)$ não existe, ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

Segue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ está definida em todo $(x, y) \neq (0, 0)$ (mas não em $(0, 0)$) e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

EXEMPLO 8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Prove que f não depende de x, isto é, que existe $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \phi(y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução

Fixado um y qualquer, a função $h(x) = f(x, y)$ é constante em $\mathbb{R}$, pois, para todo x, $h'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. Segue que, para todo x,

$$h(x) = h(0)$$

ou seja,

$$f(x, y) = f(0, y).$$

Como y foi fixado de modo arbitrário, resulta que $f(x, y) = f(0, y)$ se verifica para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Tomando-se $\phi(y) = f(0, y)$ teremos

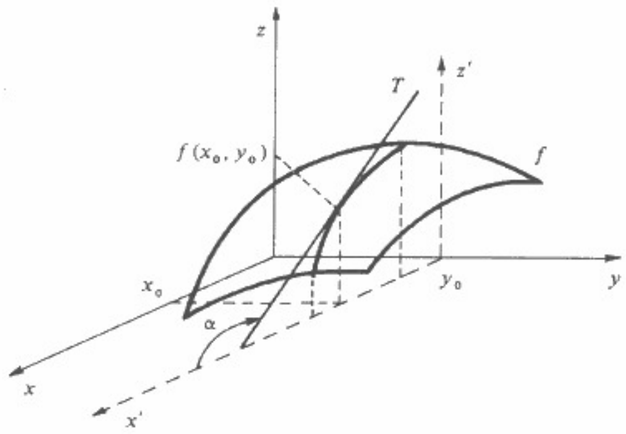
$$f(x, y) = \phi(y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 9 (*Interpretação geométrica*). Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, no plano $x'\,y_0\,z'$ (veja figura), é a intersecção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o *coeficiente angular da reta tangente T* a esta intersecção no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Interprete você } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

O exemplo seguinte mostra-nos que a *existência de derivada parcial num ponto não implica a continuidade da função neste ponto.*



EXEMPLO 10. Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em (0, 0), mas não é contínua neste ponto.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Assim, f admite derivadas parciais em (0, 0). Vamos mostrar, a seguir, que f não é contínua em (0, 0). A composta de f com a reta γ dada por $\gamma(t) = (t, t)$ é

$$g(t) = f(t, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Como γ é contínua em $t = 0$ e a composta $g(t) = f(t, t)$ não é contínua em $t = 0$, resulta que f não é contínua em (0, 0). (Por quê?)

O exemplo anterior mostra-nos ainda que a mera existência das derivadas parciais de f num ponto (x_0, y_0) não implica a derivabilidade em t_0 da composta $g(t) = f(\gamma(t))$, onde γ é uma curva suposta diferenciável em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. No exemplo anterior, f admite derivadas parciais em (0, 0), $\gamma(t) = (t, t)$ é diferenciável em $t = 0$, mas a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ *não* é diferenciável em $t = 0$.

Do que vimos acima, resulta que a existência de derivadas parciais num ponto (x_0, y_0) não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma

variável real. Uma boa generalização deverá implicar a continuidade da função e a diferenciabilidade da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ quando f e γ o forem, porque é isso que acontece no caso de funções de uma variável. Veremos no próximo capítulo qual é a boa generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis reais.

Exercícios 10.1

1. Determine as derivadas parciais

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $z = \cos xy$

c) $z = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

f) $z = xy\, e^{xy}$

g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h) $z = \text{arc tg } \dfrac{x}{y}$

i) $g(x, y) = x^y$

j) $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

l) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

m) $z = \dfrac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$.

5. Considere a função dada por $z = x \text{ sen } \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, onde n e R são constantes não-nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

7. Seja $z = e^y \phi(x - y)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

8. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$.
Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

9. Sejam $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2}(2x \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \theta).$$

Conclua que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen} \theta.$$

10. Suponha que a função $z = z(x, y)$ admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio e que seja dada implicitamente pela equação $xyz + z^3 = x$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

11. Seja $z = f(x + at)$ onde f é uma função diferenciável de uma variável real e a uma constante. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

12. Seja $z = f(x^2 - y^2)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável real. Verifique que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

13. Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = z(x, y)$. Admita que $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4$ e que $z = 1$ para $x = 1$ e $y = 1$. Calcule $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

14. Seja $f(x, y) = e^{-\frac{x}{2}}\,\phi(2y - x)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f.$$

15. Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2}\,dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

16. Seja $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\,dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $g(x, y) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = yf'(y).$$

18. Seja $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

19. Determine uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2 + 1} \end{cases}$$

20. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

21. Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x, 0) = 1 + x^2$, $f(0, y) = 1 + y^2$ e $f(x, y) = 0$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

c) f é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ existe? $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$?

e) Qual o domínio de $\frac{\partial f}{\partial x}$?

23. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f.

a) Determine $z(t)$.
b) Esboce os gráficos de f e γ.
c) Determine a reta tangente a γ no ponto $(1, 1, 2)$.
d) Seja T a reta do item *c*; mostre que T está contida no plano de equação

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

24. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida no gráfico de f. Suponha, ainda, $\gamma(0) = (1, 1, 2)$. Seja T a reta tangente a γ em $\gamma(0)$. Mostre que T está contida no plano

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Interprete geometricamente.

25. Suponha que $z = f(x, y)$ admita derivadas parciais em (x_0, y_0). Considere as curvas cujas imagens estão contidas no gráfico de f:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0) \end{cases}$$

Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes a γ_1 e γ_2, nos pontos $\gamma_1(y_0)$ e $\gamma_2(x_0)$, respectivamente. Mostre que a equação do plano determinado pelas retas T_1 e T_2 é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

26. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está no gráfico de f. Seja T a reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$. Mostre que T não está contida no plano da equação

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0).$$

27. Considere a função $z = f(x, y)$ e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Como você definiria *plano tangente* ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0)? Admitindo que f admita derivadas parciais em (x_0, y_0), escreva a equação de um plano que você acha que seja um "forte" candidato a plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

28. Dê exemplo de uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$, mas que f não seja contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$.

29. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de $z = f(x, y)$ se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Determine (caso existam) os pontos críticos da função dada.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$	*b)* $f(x, y) = 2x + y^3$
c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$	*d)* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$
e) $f(x, y) = 3x^2 + 8xy^2 - 14x - 16y$	*f)* $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$

30. Seja (x_0, y_0) um ponto de D_f. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo local* de f (respectivamente, *ponto de mínimo local*) se existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que, para todo $(x, y) \in B \cap D_f$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (respectivamente, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Prove que se (x_0, y_0) é um *ponto interior* de D_f e se f admite derivadas parciais em (x_0, y_0), então uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local ou de mínimo local é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f, isto é, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

31. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

32. Dê exemplo de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$, mas que f não seja constante em A.

33. Suponha que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) em $\mathbb{R}^2$, $|f(x, y) - f(s, t)| \leq \|(x, y) - (s, t)\|^2$. Prove que f é constante.

34. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe para todo $(x, y) \in A$. Sejam (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ dois pontos de A. Prove que se o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ estiver contido em A, então existirá $\bar{x}$ entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\, h.$$

35. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que f admite derivadas parciais em A. Seja $(x_0, y_0) \in A$. Prove que se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em (x_0, y_0), então f também será.

(*Sugestão.* $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\text{(I)}} + \underbrace{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}_{\text{(II)}}$; aplique o TVM a (I) e (II).)

10.2. Derivadas Parciais de Funções de Três ou Mais Variáveis Reais

Sejam $w = f(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$. Mantendo-se y_0 e z_0 constantes, podemos considerar para função $g(x) = f(x, y_0, z_0)$. A derivada desta função, em $x = x_0$ (caso exista), denomina-se *derivada parcial de f em relação a x no ponto* (x_0, y_0, z_0) e indica-se por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}}$.

De modo análogo, define-se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

Da mesma forma, definem-se as derivadas parciais de uma função de mais de três variáveis reais.

EXEMPLO. Calcule as derivadas parciais da função $s = f(x, y, z, w)$ dada por

$$s = e^{xyzw}$$

Solução

$$\frac{\partial s}{\partial x} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial x}(xyzw) = yzwe^{xyzw} \qquad (y,\ z \text{ e } w \text{ são olhadas como constantes}).$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial y}(xyzw) = xzwe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial z}(xyzw) = xywe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial w}(xyzw) = xyze^{xyzw}$$

Exercícios 10.2

1. Calcule as derivadas parciais.

   a) $f(x, y, z) = x\,e^{x - y - z}$ *b)* $w = x^2 \text{ arc sen } \frac{y}{2}$

   c) $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ *d)* $f(x, y, z) = \text{sen}\,(x^2 + y^2 + z^2)$

   e) $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = xw \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

2. Seja $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -f.$$

3. Seja $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = e^{\frac{x}{y} - \frac{z}{w}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} + z\frac{\partial s}{\partial z} + w\frac{\partial s}{\partial w} = 0.$$

4. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(3) = 4$. Seja

$$g(x, y, z) = \int_0^{x + y^2 + z^4} f(t)\, dt.$$

   Calcule:

   a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ *b)* $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ *c)* $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

5. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e seja g dada por $g(x, y, z) = f(r)$ onde $r = \|(x, y, z)\|$. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = rf'(r)$$

6. Seja $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(3) = 4$. Seja $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. Calcule:

   a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ *b)* $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ *c)* $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

11

FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

11.1. FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL: DEFINIÇÃO

O objetivo desta seção é estender para funções de duas variáveis reais o conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma variável real.

Vimos que, por definição, uma função $f(x)$ é *diferenciável* ou *derivável* em x_0 se e somente se o limite, quando h tende a zero, da razão incremental $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e for finito. Esta forma não é adequada para generalização, pois se f for uma função de duas variáveis reais h será um par ordenado e, então, a razão incremental não terá sentido. Nossa tarefa a seguir é a de tentar obter uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade e que seja passível de generalização.

Supondo $f(x)$ diferenciável em x_0, existe um real a, $a = f'(x_0)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a.$$

Temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0.$$

Como

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{|h|} = 0 \text{ (verifique)}$$

resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0.$$

Portanto, f é *diferenciável* em x_0 se e somente se existir um real a tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0.$$

Estamos, agora, em condições de definir diferenciabilidades para funções de duas variáveis reais.

Definição. Sejam $f: A \to \mathbb{R}$, A aberto de $\mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)-ah-bk}{\|(h,k)\|} = 0$$

O próximo teorema nos diz que *diferenciabilidade* implica *continuidade*.

Teorema 1. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f será contínua em (x_0, y_0).

Demonstração

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde $E(h, k)$ é a função dada por

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h,k).$$

Como

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} (ah+bk) = 0$$

e, ...

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \|(h,k)\| \cdot \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

resulta

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0).$$

Logo, f é contínua em (x_0, y_0). ■

Vamos mostrar, agora, que se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais em (x_0, y_0) e

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$$

será a *única* transformação linear que goza da propriedade

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0$$

Teorema 2. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e seja $(x_0, y_0) \in A$. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.

Demonstração

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), existem reais a e b tais que

① $$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde $E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk$. Segue de ① que

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, 0)}{\|(h, 0)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Daí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De modo análogo, obtém-se $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. ■

Observação. Provamos acima que se

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

então teremos necessariamente $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Deste modo, se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0), então $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ serão os *únicos* reais para os quais o limite acima é zero.

Segue do teorema 2 o seguinte *importante*

Corolário. Seja $f(x, y)$ definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$. Tem-se:

$$f \text{ diferenciável em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \ f \text{ admite derivadas parciais em } (x_0, y_0); \\ b) \ \lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \dfrac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \end{cases}$$

$$\left(E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k \right)$$

Observações

1. Segue do corolário acima que para provar que uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (x_0, y_0), então f não será diferenciável neste ponto.

3. Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), mas se o limite acima não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

4. Se f não for contínua em (x_0, y_0), então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

Dizemos que f é *diferenciável* em $B \subset D_f$ se f for diferenciável em todo $(x, y) \in B$. Diremos, simplesmente, que f é uma *função diferenciável* se f for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

EXEMPLO 1. Prove que $f(x, y) = x^2 y$ é uma função diferenciável.

Solução

Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(D_f = \mathbb{R}^2)$. f admite derivadas parciais em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

Por outro lado, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k = \\ &= (x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k = \\ &= 2xhk + h^2y + h^2k. \end{aligned}$$

Como, para $(h, k) \neq (0, 0)$, $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$, resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[2x\overset{0}{h} \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} + hy\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0.$$

Portanto, f é diferenciável em todo (x, y) de $\mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável.

EXEMPLO 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

Solução

f não é contínua em $(0, 0)$; logo, f *não é diferenciável* em $(0, 0)$. Para a não-continuidade de f em $(0, 0)$, veja Exercício 2, Seç. 9.1. Observe que f admite derivadas parciais em $(0, 0)$.

EXEMPLO 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Temos

$$E(h, k) = f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\,k$$

ou seja, $E(h, k) = \dfrac{h^3}{h^2+k^2} - h$. Segue que

$$\frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{\dfrac{-hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = G(h, k).$$

Como $\lim\limits_{t\to 0} G(t, t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|}$ não existe, resulta que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} \text{ não existe;}$$

logo, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Observação. Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{0}{x} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0 = f(0, 0)$$

resulta que f é contínua em $(0, 0)$. Assim, f é contínua em $(0, 0)$, admite derivadas parciais em $(0, 0)$, mas não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercícios 11.1

1. Prove que as funções dadas são diferenciáveis.

   a) $f(x, y) = xy$ b) $f(x, y) = x + y$

   c) $f(x, y) = x^2y^2$ d) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$

   e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}$ f) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

   a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

   b) $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

   c) $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

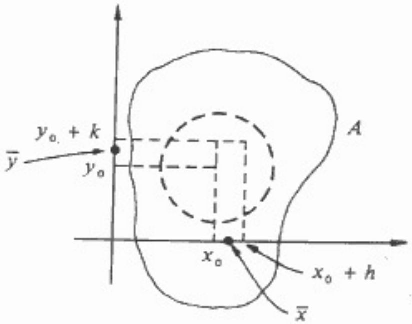
11.2. Uma Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar que a *continuidade em A, A aberto, das derivadas parciais de uma função f garante a diferenciabilidade desta função em todos os pontos de A*. Este resultado é bastante importante, pois, em muitas ocasiões, é mais fácil verificar a continuidade das derivadas parciais do que a diferenciabilidade diretamente pela definição.

> ***Teorema.*** Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável neste ponto.

Demonstração

Como A é aberto, existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), contida em A. Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Temos



$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{(\mathrm{II})}.$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$, pelo TVM existe $\bar{x}$, entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$(\mathrm{I}) = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x})\, h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)\, h.$$

Do mesmo modo, existe $\bar{y}$ entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$(\mathrm{II}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k.$$

Assim,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k.$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$ obtemos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] k.$$

Segue que

$$\left|\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|}\right| \le$$

$$\le \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|}_{(\mathrm{III})} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}^{\text{limitada}} +$$

$$+ \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|}_{(\mathrm{IV})} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Pela continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0, y_0), as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando $(h, k) \to (0, 0)$, e, portanto,

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0;$$

logo, f é diferenciável em (x_0, y_0). ■

Seja $f(x, y)$ uma função. Dizemos que f é de *classe* C^1 no aberto A se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A.

Segue do teorema anterior o seguinte

> ***Corolário.*** Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^1 em A, então f será diferenciável em A.

EXEMPLO 1. $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2)$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Observação. O teorema anterior conta-nos que se f admite derivadas parciais em A e se estas são *contínuas* no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável em (x_0, y_0). A recíproca, entretanto, não é verdadeira: existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas neste ponto. O exemplo seguinte exibe-nos uma tal função.

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *não* são contínuas em $(0, 0)$.

c) Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) Prove que f é uma função diferenciável.

Solução

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2}}{x}$, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \cancelto{0}{x} \underbrace{\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

De modo análogo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\cos\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2y\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2}\cos\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, t)$ não existe. (Verifique.) Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

De modo análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

c) $\dfrac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|} = \dfrac{(h^2 + k^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$

$$= \sqrt{h^2 + k^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{h^2 + k^2}.$$

Como $\lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \cancelto{0}{\sqrt{h^2 + k^2}}\, \underbrace{\text{sen}\,\dfrac{1}{h^2 + k^2}}_{\text{limitada}} = 0$, resulta que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) f é diferenciável em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, pois, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Conclusão. f é uma função diferenciável em todo $(x, y) \in D_f$ $(D_f = \mathbb{R}^2)$.

EXEMPLO 3. Verifique que $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é uma função diferenciável.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, pois são quocientes de contínuas.

Em (0, 0),

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\overset{0}{2x} \underbrace{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}}_{\text{limitada}} + 4x \overbrace{\frac{x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}}^{\text{limitada}} \right] = 0$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0);$$

logo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0, 0). De modo análogo, prova-se que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0, 0).

Da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Observação. Para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow x^4 \leqslant (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 1;$$

e

$$\begin{cases} 0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2 \\ \qquad\qquad \Rightarrow x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 1. \\ 0 \leqslant y^2 \leqslant x^2 + y^2 \end{cases}$$

Exercícios 11.2

1. Verifique que a função dada é diferenciável.

$a)$ $f(x,y) = e^{x-y^2}$ $\qquad$ $b)$ $f(x,y) = x^4 + y^3$

$c)$ $f(x,y) = x^2y$ $\qquad$ $d)$ $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

$e)$ $f(x,y) = x\cos(x^2+y^2)$ $\qquad$ $f)$ $f(x,y) = \text{arc tg}\, xy$

2. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

$a)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$b)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$c)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$d)$ $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

11.3. Plano Tangente e Reta Normal

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$

Seja $E(x, y)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x, y)$ por

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Assim,

$$f(x,y) = T(x,y) + E(x,y)$$

onde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$

Do que vimos na Seç. 11.1 (veja, também, o Exercício 15 desta seção), resulta que $T(x, y)$ é a *única* função afim que aproxima $f(x, y)$ com erro $E(x, y)$ que *tende a zero mais rapidamente* que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$, quando (x, y) tende a (x_0, y_0). (Dizer que $E(x, y)$ *tende a zero mais rapidamente* que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$, quando (x, y) tende a (x_0, y_0), significa que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.\Big)$$

Definição. Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

① $$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observe que só definimos plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se f for diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano ① existirá, mas *não será plano tangente.* Veremos mais adiante que se $f(x, y)$ for *diferenciável* em (x_0, y_0), o plano ① conterá todas as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Em notação de produto escalar, o plano ① se escreve:

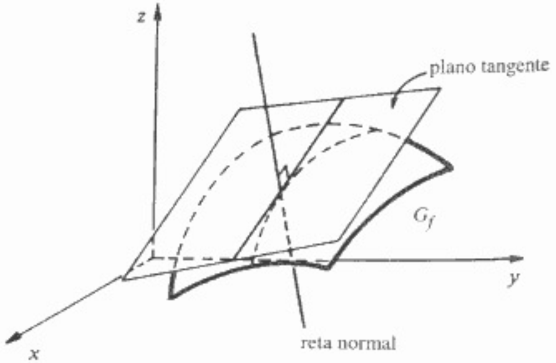
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0.$$

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

② $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

A reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor ② denomina-se *reta normal* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A equação de tal reta é:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.}$$



EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Solução

Plano tangente

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3. \end{cases}$$

A equação do plano tangente é

$$\boxed{z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)}$$

Reta normal

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 5) + \lambda(11, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}.}$$

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0, 0, f(0, 0))$.

Solução

De acordo com a definição, para que f admita plano tangente no ponto $(0, 0, f(0, 0))$, f deve ser diferenciável em $(0, 0)$. Se provarmos que f é não diferenciável em $(0, 0)$, seguirá que f não admite plano tangente no ponto dado. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \text{ (Verifique.)}$$

$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k}{\|(h,k)\|} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Seja $G(h, k) = \dfrac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$. Temos:

$$\lim_{t \to 0} G(0, t) = 0$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} G(t, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,k}{\|(h,k)\|}$$

não existe, logo, f não é diferenciável em $(0, 0)$; portanto, *f não admite plano tangente* no ponto $(0, 0, f(0, 0))$. Observe que o plano

$$z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

ou seja,

$$z = 0$$

não contém a reta tangente à curva $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$ no ponto $\gamma(0) = (0, 0, f(0, 0))$. De fato, a reta tangente a γ no ponto $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

que, evidentemente, não está contida no plano $z = 0$.

Exercícios 11.3

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

   a) $f(x, y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1, 1))$.

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0, 1))$.

   c) $f(x, y) = 3x^2y - xy$ em $(1, -1, f(1, -1))$.

   d) $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$ em $(2, 2, f(2, 2))$.

   e) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(x - 2y)$ em $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$

   f) $f(x, y) = xy$ em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

2. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

3. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

4. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

5. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

6. Considere a função $f(x, y) = x\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ onde $\phi(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

7. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

8. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

9. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

10. β é um plano tangente aos gráficos de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2$. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$, sendo $(a, b, f(a, b))$ o ponto em que β tangencia o gráfico de f.

11. Considere a função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Seja α o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, 1 - a^2 - b^2)$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a^2 + b^2 < 1$. Seja V o volume do tetraedro determinado por α e pelos planos coordenados.

    a) Expresse V em função de a e b.

    b) Determine a e b para que se tenha $\frac{\partial V}{\partial a}(a, b) = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial b}(a, b) = 0$.

12. Determine os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e que contenham o eixo $0x$.

13. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$, onde $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.

14. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mostre que $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$.

15. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). Seja S a função afim dada por $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$. Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0)$.

11.4. Diferencial

Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) e consideremos a transformação linear (transformação é sinônimo de função) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{①} \qquad L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k.$$

Segue, do que vimos anteriormente, que $L(h, k)$ é a *única* transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ que aproxima o acréscimo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

com erro $E(h, k)$ que tende a zero mais rapidamente que $\|(h, k)\|$, quando (h, k) tende a $(0, 0)$. Isto é,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h,\, k)} + E(h, k)$$

Com

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Pois bem, a transformação linear L, dada por ①, denomina-se *diferencial* de f em (x_0, y_0).

Seja $T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Sabemos que o gráfico de T é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, vem:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h,\, k)}.$$

Segue que $L(h, k)$ é a variação que sofre T, quando se passa do ponto (x_0, y_0) ao ponto $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Por outro lado, $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ é a variação em f, quando se passa de (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$. Temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de h e k.

Muitas vezes, referir-nos-emos a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ como a diferencial de f em (x_0, y_0), relativa aos acréscimos h e k.

Consideremos, agora, a função diferenciável $z = f(x, y)$. Em notação clássica, a diferencial de f, em (x, y), relativa aos acréscimos dx e dy é indicada por dz (ou por df):

$$\text{②} \qquad dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

No que se segue, referir-nos-emos a ② simplesmente como a diferencial de $z = f(x, y)$.

O símbolo Δz será usado para representar a variação em f, quando se passa de (x, y) a $(x + dx, y + dy)$:

$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Assim,

$$\Delta z \cong dz$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de dx e dy.

EXEMPLO. Seja $z = x^2 y$.

a) Calcule a diferencial.
b) Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 2$ para $x = 1{,}02$ e $y = 2{,}01$.
c) Calcule o erro cometido na aproximação acima.

Solução

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$; assim, $dz = 2xy\, dx + x^2\, dy$.
b) $\Delta z \cong dz$ ou $\Delta z \cong 2xy\, dx + x^2\, dy$.
Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}02$ e $dy = 0{,}01$ resulta $\Delta z \cong 0{,}09$.
c) $\Delta z = (x + dx)^2 (y + dy) - x^2 y = (1{,}02)^2 (1{,}01) - 2 = 0{,}091204$ (valor exato).
O erro cometido na avaliação acima é $0{,}001204$.

Exercícios 11.4

1. Calcule a diferencial.

a) $z = x^3 y^2$
b) $z = x \operatorname{arc\,tg}(x + 2y)$
c) $z = \operatorname{sen} xy$
d) $u = e^{s^2 - r^2}$
e) $T = \ln(1 + p^2 + v^2)$
f) $x = \operatorname{arc\,sen} uv$

2. Seja $z = x \text{ a } e^{x^2 - y^2}$.

   a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1{,}01$ e $y = 1{,}002$.
   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1{,}01$ e $y = 1{,}002$.

3. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$.

   a) Calcule a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.
   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1{,}01$ e $y = 7{,}9$.
   c) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0{,}9$ e $y = 8{,}01$.

4. Calcule um valor aproximado para a variação ΔA na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2$ m e $y = 3$ m para $x = 2{,}01$ m e $y = 2{,}97$ m.

5. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura 0,03 m. As medidas internas são: altura 2 m e raio da base 1 m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

6. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule um valor aproximado para a variação ΔP em P, quando V decresce 0,2 volt e R aumenta de 0,01 ohm.

7. A altura de um cone é $h = 20$ cm e o raio da base $r = 12$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação ΔV no volume quando h aumenta 2 mm e r decresce 1 mm.

8. Calcule aproximadamente $(1{,}01)^{2{,}03}$.

9. Um dos catetos de um triângulo retângulo é $x = 3$ cm e o outro, $y = 4$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação Δz na hipotenusa z, quando x aumenta 0,01 cm e y decresce 0,1 cm.

10. Defina diferencial de uma função de três variáveis.

11. Calcule a diferencial.

    a) $w = xyz$ *b*) $x = e^{2u + 2v - t^2}$ *c*) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$ *d*) $s = (1 + x^2)^{yz}$

12. Calcule aproximadamente $\sqrt{(0{,}01)^2 + (3{,}02)^2 + (3{,}9)^2}$.

11.5. O VETOR GRADIENTE

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

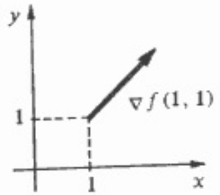
denomina-se *gradiente* de f em (x_0, y_0). Outra notação usada para o gradiente de f em (x_0, y_0) é: grad $f(x_0, y_0)$. Geometricamente, interpretaremos $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor *aplicado* no ponto (x_0, y_0).

EXEMPLO. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\nabla f(1, 1)$ e represente-o geometricamente.

Solução

$\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y)$. Assim,

$$\nabla f(1, 1) = (2, 2) = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$



Suponhamos, agora, que $f(x, y)$ seja diferenciável em (x_0, y_0). Temos:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(h, k)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Tendo em vista a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$$

resulta

$$\boxed{\begin{gathered} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] + E(x, y) \\ \text{com} \\ \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0. \end{gathered}}$$

Fazendo $X = (x, y)$ e $X_0 = (x_0, y_0)$ teremos:

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \to X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Já vimos que se $f(x)$ for função de variável real e diferenciável em x_0, então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x)$$

com

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Sendo $f(x, y)$ *diferenciável* em (x_0, y_0), nada mais natural, então, do que definir a *derivada* de f em (x_0, y_0) por: $f'(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$. Assim, a derivada de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) é o gradiente de f em (x_0, y_0) .

Mais adiante, destacaremos as principais propriedades do vetor gradiente.

Exercícios 11.5

1. Calcule $\nabla f(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

   a) $x^2 y$ *b)* $e^{x^2 - y^2}$

   c) $\dfrac{x}{y}$ *d)* arc tg $\dfrac{x}{y}$

2. Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x, y, z)$ sendo $f(x, y, z) =$

   a) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *b)* $x^2 + y^2 + z^2$

   c) $(x^2 + y^2 + 1)^{z^2}$ *d)* z arc tg $\dfrac{x}{y}$

3. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) =$

   a) $(1, 1)$ *b)* $(-1, 1)$

   c) $(-1, -1)$ *d)* $(1, -1)$

4. Seja $f(x, y) = \text{arc tg } \dfrac{x}{y}$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

5. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 1$, isto é, para todo t no domínio de γ, $f(x(t), y(t)) = 1$ (dê exemplo de uma tal curva). Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0$. Interprete geometricamente.

   (*Sugestão.* Para todo t no domínio de γ, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$; derive em relação a t e faça $t = t_0$.)

6. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferencial cuja imagem está contida na superfície de nível $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Interprete geometricamente.

7. Calcule $f'(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

   a) xy *b)* $2^{x - y}$

   c) x tg $\dfrac{x}{y}$ *d)* arc sen xy

8. Seja $f(x, y) = xy$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$. Mostre que para todo t em I, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível $xy = 2$.

9. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\text{sen } t, \text{sen}^2 t)$.

   a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

   b) Desenhe a imagem de γ.

   c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

10. Seja $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

    a) Dê exemplo de uma curva $\gamma(t)$, *diferenciável, cuja imagem esteja contida na superfície de nível* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

    b) Verifique que $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. Interprete geometricamente.

11. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

    a) Prove que $\nabla(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

    b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).

    c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

12

REGRA DA CADEIA

12.1. REGRA DA CADEIA

Sejam $f(x, y)$ uma função definida num aberto do $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ uma curva definida num intervalo I, tais que $\gamma(t) \in D_f$ para todo $t \in I$. Nosso objetivo a seguir é provar que, se f e γ forem diferenciáveis, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será, também, diferenciável e vale a regra da cadeia

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

onde $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$.

Vamos precisar do seguinte lema.

Lema. Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, for diferenciável em $X_0 \in A$, então existirá uma função $\varphi(X)$ definida em A tal que

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \, \| X - X_0 \|$$

com $\lim_{X \to X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0)$.

Demonstração

Sendo f diferenciável em X_0 tem-se

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \to X_0} \frac{E(X)}{\| X - X_0 \|} = 0.$$

Tomando-se

$$\varphi(X) = \begin{cases} \dfrac{E(X)}{\| X - X_0 \|} & \text{se} \quad X \neq X_0 \\ 0 & \text{se} \quad X = X_0 \end{cases}$$

segue a nossa afirmação. Observe que $\varphi(X)$ é contínua em X_0. ■

Note que no lema acima nada muda se supusermos f uma função de n variáveis.

Antes de enunciar e demonstrar a regra da cadeia para derivação da composta de uma função de duas variáveis com uma curva, vejamos o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1. Sejam $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. Considere a composta $F(t) = f(\gamma(t))$.

a) Calcule $F(t)$.
b) Calcule $F'(t)$ e verifique que $F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Solução

a) $F(t) = f(\gamma(t)) = f(t^3, t^2) = t^5$. Observe que F fornece os valores que $f(x, y)$ assume nos pontos da curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

b) $\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right) = (y, x)$; segue que $\nabla f(t^3, t^2) = (t^2, t^3)$. Por outro lado, $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$. Assim,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^2, t^3) \cdot (3t^2, 2t) = 3t^4 + 2t^4$$

ou seja,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 5\,t^4 = F'(t).$$

Teorema. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, tais que $\gamma(t) \in A$ para todo t no intervalo I. Nestas condições, se γ for diferenciável em t_0 e f em $X_0 = \gamma(t_0)$, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia

$$F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

Demonstração

Pelo lema, para todo $X \in A$,

① $$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \, \| X - X_0 \|$$

onde

$$\lim_{X \to X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0).$$

Substituindo em ① X por $\gamma(t)$ e X_0 por $\gamma(t_0)$ e dividindo por $t - t_0$, $t \neq t_0$, vem

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}.$$

Observe que

$$\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \cdot \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|.$$

De

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(\overset{0}{\gamma(t)}) \overset{\text{limitada}}{\frac{|t - t_0|}{t - t_0}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\| = \|\gamma'(t_0)\|$$

resulta

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = 0.$$

Logo,

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0). \blacksquare$$

A demonstração do teorema acima é exatamente a mesma, se substituirmos f de duas variáveis por f de n variáveis.

Segue desse último teorema que se f for diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^2$ e γ diferenciável em I, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável e, para todo t em I,

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Fazendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e lembrando que

$$\nabla f(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \text{ e } \gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

resulta:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}.$$

Escreveremos com freqüência

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ficando subentendido que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculados em $(x(t), y(t))$ quando $\frac{dF}{dt}$ for calculado em t.

Com freqüência, ocorrerão, ainda, problemas do seguinte tipo: são dadas as funções diferenciáveis $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e pede-se calcular $\frac{dz}{dt}$. Evidentemente, o que se deseja é a derivada da composta $z = f(x(t), y(t))$. Assim:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ou ainda,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Tudo se passa da mesma forma no caso em que f é uma função de três ou mais variáveis.

EXEMPLO 2. Sejam $z = x^2 y$, $x = e^{t^2}$ e $y = 2t + 1$. Calcule $\frac{dz}{dt}$.

Solução

1.º processo

$$z = x^2 y,\ x = e^{t^2} \text{ e } y = 2t + 1 \Rightarrow z = 2e^{2t^2}(2t + 1).$$

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{2t^2}(2t + 1) + 2e^{2t^2}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t^2}[4t^2 + 2t + 1].$$

2.º processo (regra da cadeia)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,\ \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2} \text{ e } \frac{dy}{dt} = 2.$$

Assim,

$$\frac{dz}{dt} = 4xyte^{t^2} + 2x^2$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{t^2}(2t+1)e^{t^2} + 2e^{2t^2} = 2e^{2t^2}[4t^2+2t+1].$$

EXEMPLO 3. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \text{sen } t)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

a) Expresse $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Calcule $F'(0)$ supondo $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

Solução

a) $F(t) = f(x, y)$ onde $x = e^{t^2}$ e $y = \text{sen } t$.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Daí

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \text{sen } t)\, 2te^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \text{sen } t)\cos t.$$

b) $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\cdot 1$; logo

$$F'(0) = 5.$$

EXEMPLO 4. $z = f(x^2, 3x+1)$, onde $f(u, v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

a) Expresse $\frac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Verifique que $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\frac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$.

Solução

Sendo $f(u, v)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $f(u, v)$ será diferenciável em $\mathbb{R}^2$; $u = x^2$ e $v = 3x+1$ também são diferenciáveis. Podemos então, aplicar a regra da cadeia.

a) $z = f(u, v)$, $u = x^2$ e $v = 3x + 1$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\frac{dv}{dx},$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = 2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2, 3x+1) + 3\frac{\partial f}{\partial v}(x^2, 3x+1).$$

Fazendo $x = 1$ na expressão anterior, obtemos:

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\frac{\partial f}{\partial v}(1, 4).$$

EXEMPLO 5. Seja $g(x) = f(x, x^3+2)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, definida e diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^2$. Expresse $g'(x)$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$g(x) = f(x, y)$ onde $y = x^3 + 2$.

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx},$$

ou seja,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3+2) + 3x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3+2).$$

EXEMPLO 6. Suponha $f(x, y)$ diferenciável e que, para todo x,

$$f(3x+1, 3x-1) = 4.$$

Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1)$.

Solução

Para evitar confusão com as variáveis, vamos primeiro substituir x por t. Assim, para todo t,

$$f(3t+1, 3t-1) = 4.$$

Derivando em relação a t os dois membros obtemos:

$$\frac{d}{dt}[f(3t+1, 3t-1)] = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(3t+1, 3t-1)] &= \frac{\partial f}{\partial x}(3t+1, 3t-1)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(3t+1, 3t-1)\frac{dy}{dt}\\ &= 3\frac{\partial f}{\partial x}(3t+1, 3t-1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3t+1, 3t-1)\end{aligned}$$

teremos, para todo t,

$$3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t+1,3t-1)+3\,\frac{\partial f}{\partial y}(3t+1,3t-1)=0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3t+1,3t-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3t+1,3t-1).$$

Segue que, para todo x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1).$$

Observação. Sejam $f(x, y)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções diferenciáveis e seja $\gamma(x)=(g(x), h(x))$. Assim,

$$f(g(x), h(x))=f(\gamma(x)).$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x), h(x))]=\frac{d}{dx}[f(\gamma(x))]=\nabla f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x), h(x))]=\frac{\partial f}{\partial x}(g(x), h(x))\,g'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}(g(x), h(x))\,h'(x).$$

Vamos, agora, resolver o exemplo anterior trabalhando diretamente com a equação

$$f(3x+1,3x-1)=4.$$

Derivando em relação a x os dois membros, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[f(3x+1,3x-1)]=0.$$

Como (veja observação acima)

$$\frac{d}{dx}[f(3x+1,3x-1)]=\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1)(3x+1)'+\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1)(3x-1)'$$
$$=3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1)+3\,\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1)$$

resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1).$$

EXEMPLO 7. $z=f(e^{-u}, u^2)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\dfrac{dz}{du}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$z=f(x, y)$ onde $x=e^{-u}$ e $y=u^2$.

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{du}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{du}=-e^{-u}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)+2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

onde $x=e^{-u}$ e $y=u^2$.

EXEMPLO 8. Sejam A e B abertos do $\mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ diferenciável em A, $g(u, v)$ e $h(u, v)$ diferenciáveis em B tais que, para todo (u, v) em B, $(g(u, v), h(u, v))\in A$. Seja

$$F(u, v)=f(g(u, v), h(u, v)),\ (u, v)\in B.$$

(Observe que a mudança de variáveis $x=g(u, v)$ e $y=h(u, v)$ transforma a função de duas variáveis $z=f(x, y)$ na função de duas variáveis

$$z=F(u, v)=f(g(u, v), h(u, v)).)$$

Mostre que

a) $\dfrac{\partial F}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\left(\text{ou } \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculadas no ponto $(g(u, v), h(u, v))$.

b) $\dfrac{\partial F}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\left(\text{ou } \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right).$

Solução

a) $F(u, v)=f(x, y)$ onde $x=g(u, v)$ e $y=h(u, v)$. Para calcular $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ vamos aplicar a regra da cadeia, olhando v como constante; tudo se passa como se x e y dependessem apenas de u:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.

Cuidado. Escrevemos $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ e não $\frac{dx}{du}$ e $\frac{dy}{du}$ por se tratarem de derivadas parciais.

b) Para calcular $\frac{\partial F}{\partial v}$ vamos aplicar a regra da cadeia, olhando u como constante; tudo se passa como se x e y dependessem apenas de v:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.

EXEMPLO 9. $z = f(u^2 + v^2, uv)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$z = f(x, y)$ onde $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, uv).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial v} = 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

onde $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$.

EXEMPLO 10. $F(r, \theta) = f(x, y)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, sendo $f(x, y)$ uma função diferenciável dada. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$

Solução

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial r}$$

① $$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

ou

② $$\frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

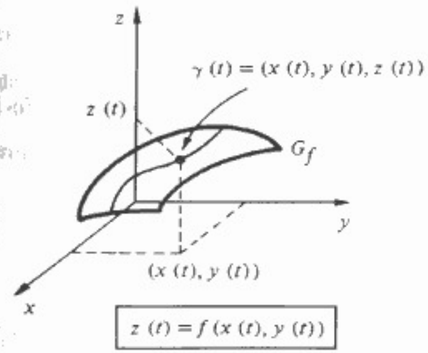
Multiplicando ① por sen θ, ② por cos θ e somando membro a membro obtemos a relação que queríamos.

EXEMPLO 11. Suponha $z = f(x, y)$ de classe C^1, $f(1, 2) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Admita que a imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, 3t - 1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, esteja contida no gráfico de f.

a) Calcule $z'(t)$.
b) Ache a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

Solução

a) $(x, y, z) \in G_f \Leftrightarrow z = f(x, y)$. Como a imagem de γ está contida no gráfico de f, para todo t, $(t^2, 3t - 1, z(t)) \in G_f$, logo, $z(t) = f(t^2, 3t - 1)$.



b) A equação da reta tangente no ponto $\gamma(1)$ é:

$$(x, y, z) = \gamma(1) + \lambda\gamma'(1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$\gamma(1) = (1, 2, z(1)) = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, -2);$$

$$\gamma'(t) = \left(2t, 3, \frac{dz}{dt}\right);$$

$$z = f(t^2, 3t-1) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1)\frac{dy}{dt}.$$

Assim, $\frac{dz}{dt} = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t-1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t-1)$ e, portanto, $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = 18$. Segue que

$$\gamma'(1) = (2, 3, 18).$$

A equação da reta tangente é, então,

$$(x, y, z) = (1, 2, -2) + \lambda(2, 3, 18),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

O próximo exemplo mostra-nos que se γ for uma curva qualquer, diferenciável em t_0, cuja imagem está contida no gráfico da função $f(x, y)$, diferenciável em (x_0, y_0), então a reta tangente γ no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ está contida no plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

EXEMPLO 12. Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), $\gamma(t)$ uma curva diferenciável em t_0, cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Então a reta tangente a γ no ponto a $\gamma(t_0)$ está contida no plano tangente ao gráfico de f no ponto $\gamma(t_0)$.

Solução

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$; como a imagem de γ está contida no gráfico de f

$$z(t) = f(x(t), y(t)).$$

Sendo f diferenciável em (x_0, y_0), $x(t)$ e $y(t)$ diferenciáveis em t_0, podemos aplicar a regra da cadeia para obter $z'(t_0)$:

① $$z'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,y'(t_0).$$

A equação da reta tangente em $\gamma(t_0)$ é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Precisamos mostrar que, para todo λ, o ponto

$$(x_0 + \lambda x'(t_0), y_0 + \lambda y'(t_0), f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0))$$

pertence ao plano

② $$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Basta mostrar, então, que fazendo em ② $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$ e $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$ obteremos $z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0)$. De fato, para $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$ e $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$ temos:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\lambda x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\lambda y'(t_0),$$

ou seja,

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,y'(t_0)\right];$$

tendo em vista ①

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0).$$

Exercícios 12.1

(Todas as funções são supostas de classe C^1 ou diferenciáveis, quando necessário)

1. Calcule $\frac{dz}{dt}$ pelo dois processos descritos no Exemplo 2.

   a) $z = \operatorname{sen} xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$.
   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$.
   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 3t$.

2. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

3. Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x, y)$ e

   a) $x = t^2$ e $y = 3t$.
   b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$.

4. Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

5. Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = \text{arc tg } x$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$.

   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

6. Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

   Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t, \text{sen } t)$.

7. Admita que, para todo (x, y),

$$4y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

   (*Sugestão*. Observe que a função g do exercício anterior fornece os valores de f sobre a elipse.)

8. A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

9. Admita que, para todo (x, y),

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Mostre que $g(t) = f\left(t, \dfrac{2}{t}\right)$, $t > 0$, é constante.

10. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

11. Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

12. Considere a função $F(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que $x\,\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$.

13. Prove que a função $u = f(x + at, y + bt)$, a e b constantes, é solução da equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

14. Seja $z = t^2 f(x, y)$, onde $x = t^2$ e $y = t^3$. Expresse $\dfrac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f.

15. Seja g dada por $g(t) = f(x, y)\,\text{sen } 3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que

$$g'(t) = 3f(x, y)\cos 3t + \text{sen } 3t\left[2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right],$$

   onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

16. Seja $z = u\,f(u - v, u + v)$. Verifique que

$$u\,\frac{\partial z}{\partial u} + u\,\frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

17. Seja $g(x, y) = (x^2 + y^2)\,f(u, v)$, onde $u = 2x - y$ e $v = x + 2y$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x\,f(u, v) + (x^2 + y^2)\left[2\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right].$$

18. Seja $g(x)$ uma função diferenciável tal que $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in D_g$. Mostre que

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

   para todo $x \in D_g$, com $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

19. $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$, para todo t. Suponha $f(0) = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.

20. $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que, para todo (x, y) no domínio de g, $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Suponha $g(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 3)$.

21. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$; suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$.

    a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
    b) Calcule $g'(0)$.

22. Seja $g(x, y) = x\,f(x^2 + y, 2y, 2x - y)$. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

23. Suponha que, para todo (x, y), $f(x, y, x^2 + y^2) = 0$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$.

24. Seja $F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$. Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

25. Seja $F(u, v)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0$, para todo (u, v). Suponha que, para todo (x, y), $F(xy, z) = 0$, onde $z = z(x, y)$. Mostre que $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

26. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto A. Prove:

a) $a\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda - 1} f(a, b)$ para todo $t > 0$ e para todo $(a, b) \in A$, com $(at, bt) \in A$.

b) (Relação de Euler). Conclua de *a)* que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f.$$

(*Sugestão* para *a*): Derive em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$.)

27. Seja $f(x, y)$ definida e diferenciável na bola aberta A. Suponha que f verifica em A a relação de Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

Prove que f é homogênea de grau λ.

$\left(\textit{Sugestão. } \text{Mostre que } g(t) = \frac{f(at, bt)}{t^{\lambda}} \text{ é constante.}\right)$

28. Seja $\phi(u)$ uma função diferenciável qualquer. A função $f(x, y) = x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ verifica a relação de Euler $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$? Por quê?

29. $f(x, y) = \dfrac{e^{\frac{x}{y}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + \operatorname{sen}\left(\cos\frac{x}{y}\right)}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}$ verifica a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -f$? Por quê?

30. Determine uma família de funções que verifiquem a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

31. Suponha $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ. Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$, isto é, que $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda - 1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ para todo $t > 0$, e para todo (x, y) em A com $(tx, ty) \in A$.

(*Sugestão*. Derive em relação a x os dois membros de $f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$.)

32. Seja $f(x, y)$ definida em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e tal que $f(tx, ty) = t f(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é linear, isto é, que existem reais a e b tais que $f(x, y) = ax + by$.

33. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Verifique que $f(tx, ty) = t f(x, y)$ para todo t e todo (x, y).
b) Olhe para o Exercício. 32 e responda: f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?

34. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$

$$① \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Verifique que a função $g(u, v)$ dada por $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = u + v$ e $y = u$, é tal que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Conclua que $g(u, v) = \varphi(v)$ para alguma função φ, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Determine uma família de soluções da equação ①.

c) $f(x, y) = \dfrac{e^{(x - y)^2} + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}(x - y)) + \ln[1 + (x - y)^2]}{(x - y)^2 + 5}$

verifica ①? (Não precisa fazer contas!)

12.2. Derivação de Funções Definidas Implicitamente. Teorema das Funções Implícitas

Como já vimos, a função $y = g(x)$ é *definida implicitamente* pela equação $f(x, y) = 0$ se, para todo $x \in D_g$,

$$f(x, g(x)) = 0.$$