UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE II - LISTA DE EXERCÍCIOS

Coordenadas polares

(1) (a) Encontre as coordenadas polares possíveis para o ponto P com coordenadas cartesianas $(-2, 2\sqrt{3})$.

(b) Determine as coordenadas polares, com $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$, para os pontos com coordenadas cartesianas $(2, 2)$ e $(-4\sqrt{3}, 4)$.

(2) Determine a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar:

(a) $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

(b) $r^2 = \cos\theta$

(c) $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

(d) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

(3) Determine uma equação polar que represente a curva descrita pela equação cartesiana:

(a) $x^2 + y^2 = a^2$

(b) $x + y = 1$

(c) $2xy = 1$

(d) $y^2 = 4(x + 1)$

(4) Estude a simetria das curvas:

(a) $C : r = -1 - 3\operatorname{sen}(2\theta)$

(b) $C : r = 2$

(c) $C : r = 4 + 6\cos\theta$

(d) $C : r = 2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

(5) Encontre os pontos de interseção, em coordenadas cartesianas, das curvas descritas pelas equações polares:

(a) $C_1 : r = 2$ e $C_2 : \theta = \dfrac{\pi}{4}$

(b) $C_1 : r = \cos^2\theta$ e $C_2 : r = -1$, $\theta \in [0, 2\pi]$

(c) $C_1 : r = 2(1 - \cos\theta)$ e $C_2 : r = 2(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

(d) $C_1 : r = 2\cos\theta$ e $C_2 : r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

(e) $C_1 : r = 4 - 6\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $C_2 : \theta = -\dfrac{\pi}{3}$

(f) $C_1 : r = 2\,\mathrm{sen}\,3\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, e $C_2 : r = \sqrt{3}$

(6) Calcule a área da região:

(a) limitada pela leminiscata $C : r^2 = a^2 \cos 2\theta$

(b) limitada pela leminiscata $C : r^2 = \mathrm{sen}\,2\theta$

(c) limitada pela rosácea $C : r = 2\cos 3\theta$

(d) interior à cardióide $C_1 : r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$ e exterior ao círculo $C_2 : r = 1$

(e) interior à leminiscata $C_1 : r^2 = 8\,\mathrm{sen}\,2\theta$ e exterior ao círculo $C_2 : r = 2$

(f) interior aos dois círculos $C_1 : r = \cos\theta$ e $C_2 : r = \mathrm{sen}\,\theta$

(g) interior ao círculo $C_1 : r = \mathrm{sen}\,\theta$ e à rosácea $C_2 : r = \mathrm{sen}\,2\theta$

(h) interior ao círculo $C_1 : r = 3\cos\theta$ e exterior à cardióide $C_2 : r = 1 + \cos\theta$

(i) exterior ao círculo $C_1 : r = 3\cos\theta$ e interior à cardióide $C_2 : r = 1 + \cos\theta$

(j) limitada pelo laço interno da curva $C : r = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

(7) Determine o comprimento da curva:

(a) $C : r = 3$, $\theta \in [0, \pi]$

(b) $C : r = e^{2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

(c) $C : r = 2\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

(d) $C : r = 2(1 + \cos\theta)$

Limite e continuidade

(1) Determine e represente graficamente o domínio da função:

(a) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

(d) $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

(e) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - 2)}{1 - x^2 - y^2}$

(2) Determine as curvas de nível e as interseções do gráfico da função com os planos yz e xz e faça um esboço do gráfico:

(a) $f(x,y) = 1 - x^2$

(b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = 1 + x^2 + 4y^2$

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(3) Utilize a definição para mostrar que:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -1}} 3x - 8y = 17$

(4) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{(x-1)^2y}{(x-1)^4+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-xy+x-y}{x-y}$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x-y}$

(e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{x^3+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 1^-}} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$

(h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+\operatorname{sen}^2 y}{2x^2+y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(5) Determine o conjunto em que a função é contínua:

(a) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{x^2-y^2}\right)$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+4y^2, & \text{se } x^2+4y^2 \leq 5 \\ 3, & \text{se } x^2+4y^2 > 5 \end{cases}$

Derivadas

(1) Determine a inclinação da reta tangente à curva gerada pela interseção do gráfico da função:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^5}$ com o plano $x = 4$, no ponto $(4,2)$.

(b) $f(x,y) = \ln(y^4) + x^3y + 5x$ com o plano $y = 1$, no ponto $(2,1)$.

(2) Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe.

(3) Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule

$$f(1,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

(4) Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função:

(a) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^3$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

(c) $f(x,y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$

(5) Verifique que, se $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(6) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prove que:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, para $y \neq 0$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para $x \neq 0$.

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

(d) as derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ não são contínuas em $(0,0)$.

(7) Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis no ponto P. Justifique.

(a) $f(x,y) = e^x \cos(xy)$, $P = (0,0)$.

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+2y)$, $P = (1,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P = (0,0)$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P = (0,0)$.

(8) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.

(b) f é diferenciável em $(0,0)$.

(9) Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função no ponto P:

(a) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-2y^2}$, $P = (1,-1)$.

(b) $f(x,y) = \ln(2x+y)$, $P = (-1,3)$.

(10) Seja $f(x,y) = x^2+y^2$.

(a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $y = 1$, no ponto $P = (2,1)$.

(b) Determine a equação de um plano que é paralelo ao plano $z = 2x+y$ e tangente ao gráfico da $f(x,y)$.

(11) Utilize a diferencial para calcular um valor aproximado para:

(a) a variação Δz da função $z = xe^{x^2-y^2}$ quando $(x,y) = (1,1)$ varia para $(1,01; 1,002)$

(b) $\text{sen}[(1,99).\ln(1,03)]$

c) $\sqrt{(0,01)^2+(3,02)^2+(3,97)^2}$

(12) Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$ e suas medidas internas são: altura $2m$ e raio da base $1m$. Utilize a diferencial para calcular um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa, quando

(a) a caixa é sem tampa.

(b) a caixa é com tampa.

Regra da cadeia e funções implícitas

(1) Determine as derivadas parciais indicadas:

(a) $\dfrac{dz}{dt}$, para $z = ye^x + xe^y$, com $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$

(b) $\dfrac{dz}{dt}$, para $z = \sqrt{1 + xy}$, com $x = \operatorname{tg} t$ e $y = \operatorname{arctg} t$

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, para $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, com $x = u^2 + v^2$ e $y = 1 - 2uv$

(d) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, para $z = e^{\frac{y}{x}}$, com $x = 2u\cos v$ e $y = 4u \operatorname{sen} v$

(2) Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de $2cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimentoo e o ângulo é $\dfrac{\pi}{6}$.

(3) O raio de um cone circular está aumentando em uma taxa de $4,6cm/s$ enquanto sua altura está descrescendo em uma taxa de $6,5cm/s$. Determine a taxa que o volume do cone está variando quando o raio é $300cm$ e a altura é $350cm$?

(4) Seja $z = xf(x - y, x + y)$. Se $u = x - y$ e $v = x + y$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(5) Suponha $f(x, y) = g(x^2y, x^3y^2)$, com f, g diferenciáveis. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 16$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 8$, determine as derivadas parciais da g em $(4, 8)$.

(6) Supondo que as funções f, g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

(7) Determine $\dfrac{dy}{dx}$, para $y = f(x)$ definida implicitamente por:

(a) $y\cos x = x^2 + y^2$

(b) $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

(8) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, para $z = f(x, y)$ definida implicitamnte por:

(a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(b) $yz + x\ln y = z^2$

(9) Supondo que $z = z(x, y)$ é definida implicitamente por $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

(10) Determine o vetor gradiente da função em P e a derivada direcional em P na direção do vetor $\vec{v}$:

(a) $f(x, y) = x^2y - xy^3$, $P = (2, 1)$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

(b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$, $P = (4, -2)$ e $\vec{v} = -\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$

(c) $f(x, y, z) = xy^2e^{-2z}$, $P = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P = (1, 3, 1)$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$

(11) Utilize o vetor gradiente para determinar:

(a) equação da reta tangente à curva de nível $k = 6$ da função $f(x, y) = xy$ no ponto $(3, 2)$.

(b) equação do plano tangente à superfície $xy^2z^3 = 8$ no ponto $(2, 2, 1)$.

(12) Determine a taxa de variação máxima da função em P e a direção em que isso ocorre.

(a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $P = (1, 0)$

(b) $f(x, y) = x^2y$, $P = (1, 1)$

(13) A temperatura em uma placa de metal é dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, com x, y em centímetros e a temperatura T em °C. Qual a direção de maior crescimento da temperatura a partir do ponto $(2, -3)$? Determine a taxa de crescimento.

GABARITO

Coordenadas polares

(1) (a) $\big(4, \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi\big)$ ou $\big(-4, \dfrac{5\pi}{3} + 2n\pi\big)$, (b) $\big(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\big)$ e $\big(8, \dfrac{5\pi}{6}\big)$; **(2)** (a) $3x^2 - 8x + 4y^2 = 16$, (b) $(x^2+y^2)^3 = x^2$, (c) $y = \dfrac{x^2-16}{8}$, (d) $(x^2+y^2)^2 = 2xy$; **(3)** (a) $r = a$, (b) $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$, (c) $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$, (d) $r = \dfrac{-2}{1+\cos\theta}$; **(4)** (a) simétrica em relação ao pólo, (b) possui as três simetrias, (c) simétrica em relação ao eixo polar, (d) não possui simetria; **(5)** (a) $P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (b) $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,0)$, (c) $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (0,-2)$, (d) $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,1)$, (e) $P_1 = (0,0)$, $P_2 = \big(\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{4\sqrt{3}-9}{2}\big)$, $P_3 = \big(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-4\sqrt{3}-9}{2}\big)$, (f) $P_1 = \big(\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{\pi}{9}\big), \sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{\pi}{9}\big)\big)$, $P_2 = \big(\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{2\pi}{9}\big), \sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{2\pi}{9}\big)\big)$, $P_3 = \big(-\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{4\pi}{9}\big), -\sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{4\pi}{9}\big)\big)$, $P_4 = \big(-\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{5\pi}{9}\big), -\sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{5\pi}{9}\big)\big)$, $P_5 = \big(\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{7\pi}{9}\big), \sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{7\pi}{9}\big)\big)$, $P_6 = \big(\sqrt{3}\cos\big(\dfrac{8\pi}{9}\big), \sqrt{3}\operatorname{sen}\big(\dfrac{8\pi}{9}\big)\big)$;

(6) (a) a^2, (b) 1, (c) π, (d) $\big(\dfrac{\pi}{4} + 2\big)$, (e) $4\big(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\big)$, (f) $\big(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}\big)$ (g) $\big(\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{16}\big)$, (h) π, (i) $\dfrac{\pi}{4}$, (j) $\big(\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\big)$; **(7)**$(a)$ 3π, (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\big(e^{4\pi} - 1\big)$, (c) 2π, (d) 16.

Limite e continuidade

(4) (a) Não existe, (b) 0, (c) 1, (d) 0; (e) 0, (f) Não existe, (g) 0, (h) Não existe, (i) Não existe, (j) 0; **(5)** (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y, x \neq -y\}$, (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \neq 5\}$.

Derivadas

(1) (a) $\dfrac{-5}{4}$, (b) 17; **(2)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$; **(3)** $\dfrac{12}{5}$ **(9)** (a) $x - 2y + z = 4$, (b) $2x + y - z = 1$; **(10)** (a) 4, (b) $z = 2x + y - \dfrac{5}{4}$; **(11)** (a) $0{,}026$, (b) $0{,}06$, (c) $4{,}988$; **(12)** (a) $0{,}15\pi m^3$, (b) $0{,}18\pi m^3$.

Regra da cadeia e funções implícitas

(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{36}\text{rad}/s$; **(3)** $127x10^3\pi cm^3/s$; **(5)** $\dfrac{\partial g}{\partial u}(4,8) = 10$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(4,8) = -2$;

(7) (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\operatorname{sen} x + 2x}{\cos x - 2y}$, (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y - e^y\cos x}{e^y \operatorname{sen} x - x}$; **(8)** (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{3z}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-2y}{3z}$, (b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\ln y}{2z - y}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x + zy}{y(2z - y)}$; **(10)** (a) $\nabla f(2,1) = (3,-2)$ e $D_u f(2,1) = \dfrac{1}{5}$, (b) $\nabla f(4,-2) = (1,2)$ e $D_u f(4,-2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $\nabla f(2,1,0) = (4,4,-4)$ e $D_u f(2,1,0) = 4$, (d) $\nabla f(1,3,1) = \big(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}\big)$ e $D_u f(1,3,1) = \dfrac{23}{28}$; **(11)** (a) $2x + 3y = 12$, (b) $x + 2y + 6z = 12$; **(12)** (a) Taxa: 1, direção: $(0,1)$ (b) Taxa: $\sqrt{5}$, direção: $(2,1)$; **(13)** Taxa: $2\sqrt{73}$, direção: $(-16,6)$.

`Última atualização: 06/08/2019`