Lista de exercícios

Luca Argolo, João, Fábio, Thiago Vieira

August 30, 2021

Questão 1. No caso φ, por ordem de precedência, a inserção de parêntesis se dará na forma:

$$p \lor q \to p \to r$$

$$(p \lor q) \to p \to r$$

$$(p \lor q) \to (p \to r)$$

$$\varphi = ((p \lor q) \to (p \to r))$$

No caso ψ, por ordem de precedência, a inserção de parêntesis se dará na forma:

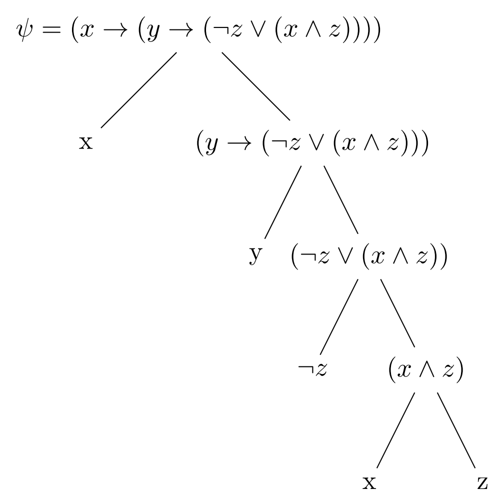
$$x \to y \to \neg z \lor x \land z$$

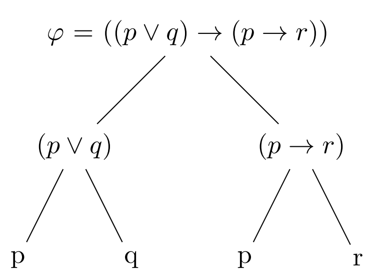
$$x \to y \to \neg z \lor (x \land z)$$

$$x \to y \to (\neg z \lor (x \land z))$$

$$x \to (y \to (\neg z \lor (x \land z)))$$

$$\psi = (x \to (y \to (\neg z \lor (x \land z))))$$





Questão 2 (Fórmulas do Exemplo 3.5 do script.)**.** Seja $\varphi = \psi \wedge \chi$. Pela hipótese da indução, ψ tem um número par de parênteses que vamos chamar de 2m. Também pela hipótese, temos que χ tem um número par de parênteses que chamaremos de 2n. Logo φ tem um número de parênteses igual à $2+2n+2m = 2(1+n+m)$. Este número é par.

Seja $\varphi = \psi \to \chi$. Pela hipótese da indução, ψ tem um número par de parênteses que vamos chamar de 2m. Também pela hipótese, temos que χ tem um número par de parênteses que chamaremos de 2n. Logo φ tem um número de parênteses igual à $2 + 2n + 2m = 2(1 + n + m)$. Este número é par.

Questão 3 (Exercício 3.8(a))**.** Seja M um conjunto, $S \subseteq M$ um subconjunto de M, $Pw(M)$ o conjunto potência de M, e χ um elemento de $Pw(M)$. $\{0,1\}^M$ é o conjunto dado por funções que podem ser descritas por $f_s : M \to \{0,1\}$, $f_s :=$ $m \mapsto \begin{Bmatrix} 1, m \in S, \, S \subseteq M \\ 0, c.c. \end{Bmatrix}$(chamada de funções indicativas ou características).
Podemos criar a função que relaciona f_s e χ:
$h : \{0,1\}^M \to Pw(M)$
$h := f_s \mapsto \chi, s = \chi$. Essa função é bijetora pelo fato de que, para cada s em $\{0,1\}^M$, existe um χ igual em $Pw(M)$.

Questão 4 (Exercício 6)**.** Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \wedge \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi) = v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \wedge \chi)$ (por def.) $= f_\wedge(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\wedge(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\wedge(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \wedge \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.
Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \vee \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi)$ $= v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \vee \chi)$ (por def.) $= f_\vee(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\vee(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\vee(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \vee \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.
Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \to \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi)$ $= v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \to \chi)$ (por def.) $= f_\to(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\to(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\to(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \to \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.