10

DERIVADAS PARCIAIS

10.1. DERIVADAS PARCIAIS

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f em relação a x, no ponto* (x_0, y_0) e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$

ou, ainda,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A, que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1.ª ordem de f, em relação a x*, ou, simplesmente, *derivada parcial de f em relação a x*.

De modo análogo, define-se *derivada parcial de f, em relação a y, no ponto* (x_0, y_0) que se indica por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}}$$

Para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada, em relação a x, de $f(x, y)$, mantendo-se y *constante*. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada, em relação a y, de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$

Solução

a) Devemos olhar y como constante e derivar em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(-4y) = 0.$$

Por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)y - 4y - 2xy + 4y}{\Delta x}$$
$$= 2y.$$

b) Devemos olhar x como constante e derivar em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 4y) = 2x - 4.$$

c) Conforme *a*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$. Daí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$.

d) Conforme *b*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -6.$$

EXEMPLO 2. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $z = \text{arc tg}\,(x^2 + y^2)$. Calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$ Ler

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

d) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$

Solução

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{arc tg}\,(x^2 + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\text{arc tg}\,(x^2 + y^2)\right) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2),$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

c) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{2}{1 + 4} = \frac{2}{5}.$$

d) $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$$

Antes de passarmos ao próximo exemplo, observamos que uma função $z = f(x, y)$ se diz *definida ou dada implicitamente* pela equação $g(x, y, z) = 0$ se, para todo $(x, y) \in D_f$, $g(x, y, f(x, y)) = 0$. Por exemplo, a função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$, é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois, para todo (x, y) no seu domínio, $x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 = 1$. As funções $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, são também, dadas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (verifique).

EXEMPLO 3. Sendo $z = f(x, y)$ dada implicitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solução

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

ou seja,

Ler

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Poderíamos, também, ter chegado ao resultado acima trabalhando diretamente com a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1);$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$, $\frac{\partial}{\partial x}[z^2] = \frac{d}{dz}[z^2] \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2z\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$, resulta:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ x^2 + y^2 < 1.$$

b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(1)$, ou seja,

$$2y + 2z\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e, portanto, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ x^2 + y^2 < 1.$

CUIDADOS COM NOTAÇÕES. A notação $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, como vimos, indica a derivada de $f(x, y)$ em relação a x, onde y é olhado como *constante*, ou seja, como *independente de x*. Por outro lado, a notação $\frac{d}{dx}[f(x, y)]$ indica a derivada de $f(x, y)$, onde *y deve ser olhado* (quando nada for dito em contrário) *como função de x*. As notações foram criadas para serem usadas corretamente. Portanto, não confunda $\frac{\partial}{\partial x}$ com $\frac{d}{dx}$.

Ler

EXEMPLO 4. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$, enquanto

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x + 2y\,\frac{dy}{dx}$$

pois, Ler

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\,\frac{dy}{dx} = 2y\,\frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLO 5. Suponha que $z = f(x, y)$ seja dada implicitamente pela equação

$$e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Suponha que f admita derivada parcial em relação a x, expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y e z.

Solução

Para todo $(x, y) \in D_f$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = e^{xyz}\,\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = e^{xyz}\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2z\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim,

$$e^{xyz}\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 2z\,\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yz\,e^{xyz}}{xy\,e^{xyz} - 2z}$$

em todo $(x, y) \in D_f$ com $xy\,e^{xyz} - 2z \neq 0$.

EXEMPLO 6. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável e derivável. Considere a função g dada por $g(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$. Verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Solução Ler

$$g(x, y) = \phi(u) \text{ onde } u = x^2 + y^2.$$

Então, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,2x.$$

Da mesma forma, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2)\,2y.$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2\,\phi'(2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Observação. Se no exemplo anterior a função ϕ fosse, por exemplo, a função seno, teríamos $g(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ e, assim, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sen}'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x\cos(x^2 + y^2)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sen}'(x^2 + y^2)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y\cos(x^2 + y^2)$.

EXEMPLO 7. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ Ler   *b)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Solução

a) Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 (x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)\, 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ é a derivada, em $x = 0$, de $g(x) = f(x, 0)$.

$$f(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

assim, $g(x) = f(x, 0) = x$, para todo x; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1.$$

Poderíamos, também, ter calculado $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ é (caso exista) a derivada, em $y = 0$, de $h(y) = f(0, y)$;

$$f(0, y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

assim, $h(y)$ não é contínua em $y = 0$, logo, $h'(0)$ não existe, ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

Segue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ está definida em todo $(x, y) \neq (0, 0)$ (mas não em $(0, 0)$) e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

EXEMPLO 8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Prove que f não depende de x, isto é, que existe $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \phi(y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ler

Solução

Fixado um y qualquer, a função $h(x) = f(x, y)$ é constante em $\mathbb{R}$, pois, para todo x, $h'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. Segue que, para todo x,

$$h(x) = h(0)$$

ou seja,

$$f(x, y) = f(0, y).$$

Como y foi fixado de modo arbitrário, resulta que $f(x, y) = f(0, y)$ se verifica para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Tomando-se $\phi(y) = f(0, y)$ teremos

$$f(x, y) = \phi(y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 9 (*Interpretação geométrica*). Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, no plano $x'\, y_0\, z'$ (veja figura), é a intersecção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o *coeficiente angular da reta tangente* T a esta intersecção no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$ Interprete você $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

O exemplo seguinte mostra-nos que a *existência de derivada parcial num ponto não implica a continuidade da função neste ponto.*

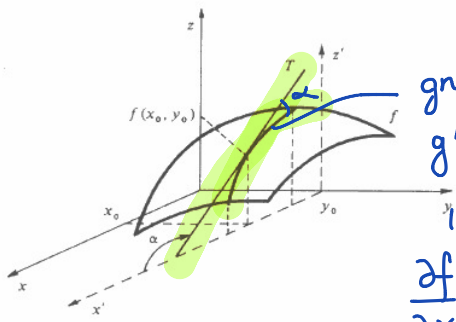

gráfico (g)

$g'(x_0) = tg(\alpha)$

$\parallel$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

EXEMPLO 10. Mostre que a função

Ler

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0, 0)$, mas não é contínua neste ponto.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Assim, f admite derivadas parciais em $(0, 0)$. Vamos mostrar, a seguir, que f não é contínua em $(0, 0)$. A composta de f com a reta γ dada por $\gamma(t) = (t, t)$ é

$$g(t) = f(t, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Como γ é contínua em $t = 0$ e a composta $g(t) = f(t, t)$ não é contínua em $t = 0$, resulta que f não é contínua em $(0, 0)$. (Por quê?)

O exemplo anterior mostra-nos ainda que a mera existência das derivadas parciais de f num ponto (x_0, y_0) não implica a derivabilidade em t_0 da composta $g(t) = f(\gamma(t))$, onde γ é uma curva suposta diferenciável em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. No exemplo anterior, f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, $\gamma(t) = (t, t)$ é diferenciável em $t = 0$, mas a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ *não* é diferenciável em $t = 0$.

Do que vimos acima, resulta que a existência de derivadas parciais num ponto (x_0, y_0) não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma

variável real. Uma boa generalização deverá implicar a continuidade da função e a diferenciabilidade da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ quando f e γ o forem, porque é isso que acontece no caso de funções de uma variável. Veremos no próximo capítulo qual é a boa generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis reais.

Exercícios 10.1

1. Determine as derivadas parciais

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $z = \cos xy$

c) $z = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

f) $z = xy\, e^{xy}$

g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h) $z = \text{arc tg } \dfrac{x}{y}$

i) $g(x, y) = x^y$

j) $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

l) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

m) $z = \dfrac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$.

5. Considere a função dada por $z = x \text{ sen } \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, onde n e R são constantes não-nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

7. Seja $z = e^y \phi(x - y)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

8. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$.
Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

9. Sejam $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2}(2x\cos\theta + 2y\,\text{sen}\,\theta).$$

Conclua que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\,\text{sen}\,\theta.$$

10. Suponha que a função $z = z(x, y)$ admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio e que seja dada implicitamente pela equação $xyz + z^3 = x$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

11. Seja $z = f(x + at)$ onde f é uma função diferenciável de uma variável real e a uma constante. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

12. Seja $z = f(x^2 \quad y^2)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável real. Verifique que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

13. Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = z(x, y)$. Admita que $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4$ e que $z = 1$ para $x = 1$ e $y = 1$. Calcule $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

14. Seja $f(x, y) = e^{-\frac{x}{2}}\,\phi(2y - x)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f.$$

15. Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2}\,dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

16. Seja $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\,dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $g(x, y) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = yf'(y).$$

18. Seja $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

19. Determine uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1} \end{cases}$$

20. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

21. Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x, 0) = 1 + x^2$, $f(0, y) = 1 + y^2$ e $f(x, y) = 0$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

c) f é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ existe? $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$?

e) Qual o domínio de $\frac{\partial f}{\partial x}$?

23. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f.

a) Determine $z(t)$.

b) Esboce os gráficos de f e γ.

c) Determine a reta tangente a γ no ponto $(1, 1, 2)$.

d) Seja T a reta do item c; mostre que T está contida no plano de equação

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

24. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida no gráfico de f. Suponha, ainda, $\gamma(0) = (1, 1, 2)$. Seja T a reta tangente a γ em $\gamma(0)$. Mostre que T está contida no plano

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Interprete geometricamente.

25. Suponha que $z = f(x, y)$ admita derivadas parciais em (x_0, y_0). Considere as curvas cujas imagens estão contidas no gráfico de f:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0) \end{cases}$$

Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes a γ_1 e γ_2, nos pontos $\gamma_1(y_0)$ e $\gamma_2(x_0)$, respectivamente. Mostre que a equação do plano determinado pelas retas T_1 e T_2 é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

26. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está no gráfico de f. Seja T a reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$. Mostre que T não está contida no plano da equação

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0).$$

27. Considere a função $z = f(x, y)$ e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Como você definiria *plano tangente* ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0)? Admitindo que f admita derivadas parciais em (x_0, y_0), escreva a equação de um plano que você acha que seja um "forte" candidato a plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

28. Dê exemplo de uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$, mas que f não seja contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$.

29. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de $z = f(x, y)$ se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Determine (caso existam) os pontos críticos da função dada.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *b)* $f(x, y) = 2x + y^3$

c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$ *d)* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

e) $f(x, y) = 3x^2 + 8xy^2 - 14x - 16y$ *f)* $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$

30. Seja (x_0, y_0) um ponto de D_f. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo local* de f (respectivamente, *ponto de mínimo local*) se existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que, para todo $(x, y) \in B \cap D_f$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (respectivamente, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$). Prove que se (x_0, y_0) é um *ponto interior* de D_f e se f admite derivadas parciais em (x_0, y_0), então uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local ou de mínimo local é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f, isto é, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

31. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

32. Dê exemplo de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$, mas que f não seja constante em A.

33. Suponha que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) em $\mathbb{R}^2$, $|f(x, y) - f(s, t)| \leqslant \|(x, y) - (s, t)\|^2$. Prove que f é constante.

34. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe para todo $(x, y) \in A$. Sejam (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ dois pontos de A. Prove que se o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ estiver contido em A, então existirá $\bar{x}$ entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\, h.$$

35. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que f admite derivadas parciais em A. Seja $(x_0, y_0) \in A$. Prove que se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em (x_0, y_0), então f também será.

(*Sugestão.* $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{\text{(I)}} + \underbrace{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}_{\text{(II)}}$; aplique o TVM a (I) e (II).)

10.2. Derivadas Parciais de Funções de Três ou mais Variáveis Reais

Sejam $w = f(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$. Mantendo-se y_0 e z_0 constantes, podemos considerar para função $g(x) = f(x, y_0, z_0)$. A derivada desta função, em $x = x_0$ (caso exista), denomina-se *derivada parcial de f em relação a x no ponto* (x_0, y_0, z_0) e indica-se por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}}$.

De modo análogo, define-se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$