UFBa - IME - DMAT —- MÁlgebra Linear I(MATA07) - Profa: Isamara

4^a LISTA DE EXERCÍCIOS - RESPOSTAS

---

1. Considerando os subespaços de $\mathbb{C}^3$:

   $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / x = -z\}$

   $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / x = -y \text{ e } z = 0\}$;

   $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / x = -z \text{ e } x = -y \text{ e } z = 0\} = \{x = y = z = 0\} = \{0\} \Longrightarrow$ $W_1 \cap W_2$ é o subespaço nulo. $(W_1 + W_2) = \{u \in \mathbb{C}^3 \mid u = u_1 + u_2; u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$; então, $W_1 + W_2\{u \in \mathbb{C}^3 \mid u = (-z_1, y_1, z_1) + (-y_2, y_2, 0) = (-z_1 - y_2, y_1 + y_2, z_1)\} = \mathbb{C}^3$; logo, a soma é também um subespaço vetorial.

   Enquanto que $W_1 \cup W_2$ não será um subespaço do $\mathbb{C}^3$; pois $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ou seja, um subespaço não é um subconjunto do outro.

---

2. $W_1 \cap W_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C}) / a_0 = a_1 \text{ e } a_2 = 0\}$

   $W_1 \cap W_2 \neq W_1$ e $W_1 \cap W_2 \neq W_2$; logo $W_1 \cup W_2$ não é subespaço.

   Enquanto que

   $W_1 + W_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C}) / p(t) = a_1 + a_1 t + a_2 t^2 + b_0 + b_1 t = (a_1 + b_0) + (a_1 + b_1)t + a_2 t^2\} = P_2(\mathbb{C})$

---

3. $W_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -y\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -w\}$.

   $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -y \text{ e } z = -w\}$ e $W_1 \cup W_2 \neq W_1$ e $W_1 \cup W_2 \neq W_2$ logo, não é subespaço.

   $W_1 + W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w) = (-y_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, -w_2, w_2) = (-y_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 - w_2, w_1 + w_2)\} = \mathbb{R}^4$ logo, é subespaço.

---

4. $W_1 : a_{ij} = 0; \forall i \neq j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$,

   $W_2 : a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$, e

   $W_3 : a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} = 0, \forall i$.

   Assim, temos que;

   $W_1 \cap W_2 = W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_2$ também será um subespaço; $W_1 \cap W_3 = \{0\} \Rightarrow W_1 \cup W_3$ não será um subespaço pois ; $W_1 \not\subseteq W_3$ e $W_3 \not\subseteq W_1$; $W_2 \cap W_3 = \{0\} \Rightarrow W_2 \cup W_3$ não será um subespaço pois ; $W_2 \not\subseteq W_3$ e $W_3 \not\subseteq W_2$; $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\} \Rightarrow W_1 \cup W_2 \cup W_3$ não será um subespaço;

$W_1 + W_2 = W_2$; $W_1 + W_3 : a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$; $W_2 + W_3 = M_3(\mathbb{C})$;

$W_1 + W_2 + W_3 = M_3(\mathbb{C})$

---

5. (5)

6. (6)

7. (7)

8. (8)

9. (9)

10. (10)

11. Considerando os subespaços de $\mathbb{C}^3$:

    $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x = -z\} \Longrightarrow W_1 = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)] = [e_3 - e_1, e_2]$ e os vetores $e_3 - e_1, e_2$ são Linearmente idenpendentes $\Longrightarrow \beta_{W_1} = \{e_3 - e_1, e_2\} \Longrightarrow dim(W_1) = 2$; e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x = -y$ e $z = 0\} \Longrightarrow W_2 = [(-1, 1, 0)] = [e_2 - e_1] \Longrightarrow \beta_{W_2} = \{e_2 - e_1\} \Longrightarrow dim(W_2) = 1$; então o subespaço

    $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x = -z$ e $x = -y$ e $z = 0\} = \{x = y = z = 0\} = \{0\} \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = [\emptyset] \Longrightarrow \beta_{W_1 \cap W_2} = \emptyset \Longrightarrow dim(W_1 \cap W_2) = 0 \Longrightarrow dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 1 - 0 = 3 \Longrightarrow dim(W_1 + W_2) = dim(\mathbb{C}^3) = 3$ e como $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{C}^3$ então $W_1 + W_2 = \mathbb{C}^3$. De $\mathbb{C}^3 = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = 0$; concluimos que $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$.

---

12. $W_1 : a_{ij} = 0; \forall i \neq j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$,

    $W_2 : a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$, e

    $W_3 : a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} = 0, \forall i$.

    Assim, temos que;

    $W_1 \cap W_2 = W_1$; $W_1 \cap W_3 = \{0\}$; $W_2 \cap W_3 = \{0\}$; $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$;

    $W_1 + W_2 = W_2$; $W_1 + W_3 : a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j$ e $a_{ii} \in \mathbb{C}, \forall i$; $W_2 + W_3 = M_3(\mathbb{C})$;

    $W_1 + W_2 + W_3 = M_3(\mathbb{C})$ então; $M_3(\mathbb{C}) = W_2 \oplus W_3$; $M_3(\mathbb{C}) \neq W_1 \oplus W_2$; $M_3(\mathbb{C}) \neq W_1 \oplus W_3$; logo, $M_3(\mathbb{C}) \neq W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$; visto que não podemos escrever de forma única $\forall A \in M_3(\mathbb{C})$

como combinação linear dos vetores de W_1, W_2, W_3 pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

---

13. $P_2(\mathbb{C}) \neq W_1 \oplus W_2$ pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$: $W_1 \cap W_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{C})/a_0 = a_1$ e $a_2 = 0\} = [e_1 + e_2] \Longrightarrow \beta_{W_1 \cap W_2} = \{e_1 + e_2\} \Longrightarrow dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

---

14. $W_1 = [e_2 - e_1, e_4 - e_3]$ e os vetores $e_2 - e_1, e_4 - e_3$ são L.I. $\Longrightarrow \beta_{w_1} = \{e_2 - e_1, e_4 - e_3\} \Longrightarrow dim(W_1) = 2$; e queremos: $dim(W_1 \cap W_2) = 0$ e $dim(W_1 + W_2) = dim(\mathbb{R}^4) = 4$, então $dim(W_2) = 2$. Devemos determinar dois vetores,v_1, v_2, para formar uma base de W_2; porém, esses vetores junto com os vetores da base de W_1 devem formar uma base para R^4.

    Assim, podemos, por exemplo, dizer que $v_1 = e_1, v_2 = e_3$, i.é., $\forall v \in W_2 : v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_3 \Longrightarrow W_2 = [e_1, e_3] \Longrightarrow W_2 = \{v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / y = w = 0\}$.

---

15. $W_1 = [e_1, e_4] \Longrightarrow \beta_{W_1} = \{e_1, e_4\} \Longrightarrow dim(W_1) = 2$; e queremos: $dim(W_1 \cap W_2) = 0$ e $dim(W_1 + W_2) = dim(M_2(\mathbb{C})) = 4$, então $dim(W_2) = 2$. Devemos determinar dois vetores,v_1, v_2, para formar uma base de W_2; porém, esses vetores junto com os vetores da base de W_1 devem formar uma base para $M_2(\mathbb{C})$. Assim, podemos, por exemplo, dizer que $v_1 = e_2, v_2 = e_3$, i.é., $\forall v \in W_2 : v = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 \Longrightarrow W_2 = [e_2, e_3] \Longrightarrow W_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / a_{ii} = 0, \forall i = 1, 2\}$.

---

16. Considere o seguinte subespaço de $P_2(\mathbb{C})$: $W_1 = [e_1, e_3 - e_2] \Longrightarrow \beta_{W_1} = \{e_1, e_3 - e_2\} \Longrightarrow dim(W_1) = 2$; e queremos: $dim(W_1 \cap W_2) = 0$ e $dim(W_1 + W_2) = dim(P_2(\mathbb{C})) = 3$, então $dim(W_2) = 1$. Devemos determinar um vetor,v_1, para formar uma base de W_2; porém, esse vetor junto com os vetores da base de W_1 devem formar uma base para $P_2(\mathbb{C})$. Assim, podemos, por exemplo, dizer que $v_1 = e_2$, i.é., $\forall v \in W_2 : v = \lambda_1 e_2 \Longrightarrow W_2 = [e_2] \Longrightarrow W_2 = \{A \in P_2(\mathbb{C}) / a_0 = a_2 = 0\}$.

---

17. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $\forall u \in W : u = (-y, y, -w, w) = y(-1, 1, 0, 0) + w(0, 0, -1, 1) \Longrightarrow W = [e_2 - e_1, e_4 - e_3]$.

---

18. para $K = \mathbb{C}$: $W = [e_1, e_4]$; porém, se $K = \mathbb{R}$: $W = [e_1, ie_1, e_4, ie_4]$.

---

19. $\forall p(t) \in W : p(t) = -3a_2 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_1(t) + a_2(-3 + t^2) + a_3(t^3) \Longrightarrow W = [t, -3 + t^2, t^3] = [e_2, e_3 - 3e_1, e_4]$.

---

20. $W_1 = [e_3 - e_1, e_2]$; $W_2 = [e_2 - e_1]$; $W_1 + W_2 = [e_3 - e_1, e_2, e_2 - e_1]$ e como os vetores $e_3 - e_1, e_2, e_2 - e_1$ são L.I., temos que $W_1 \cap W_2 = [\ \ ] \Rightarrow W_1 \cap W_2$ é gerado pelo conjunto $\emptyset$.

---

21. $\forall A \in W : a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{23} = a_{32}$. Mostrar os axiomas da soma e multiplicação por escalar; em seguida, determinar os geradores: $W = [e_1 - e_4, e_2 + e_3]$.

---

22. $W_1 = \{(-y, y, w, w) = y(-1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 1, 1)\} = [(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)] = [e_2 - e_1, e_3 + e_4] \Longrightarrow e_2 - e_1, e_3 + e_4$ são L.I.; então : $\beta_{W_1} = \{e_2 - e_1, e_3 + e_4\}$.

    $W_2 = \{(-y-z, y, z, w) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1)\} = [(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0,$
    $[e_2 - e_1, e_3 - e_1, e_1] \Longrightarrow e_2 - e_1, e_3 - e_1, e_1$ são L.I.; então : $\beta_{W_2} = \{e_2 - e_1, e_3 - e_1, e_1\}$.

    $W_1 \cap W_2 = \{u = (-y, y, w, w)$ e $u = (-y-z, y, z, w)\} = [(-1, 1, 0, 0)] = [e_2 - e_1] \Longrightarrow e_2 - e_1$ é L.I.; então : $\beta_{W_1 \cap W_2} = \{e_2 - e1\}$.

    $W_1 + W_2 = [(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)] = [e_2 - e_1, e_3 + e_4, e_3 - e_1, e_1] \Longrightarrow e_2 - e_1, e_3 + e_4, e_3 - e_1, e_1$ são L.I.; então : $\beta_{W_1 + W_2} = \{e_2 - e1, e_3 + e_4, e_3 - e_1, e_1\}$.

---

23. $W_1 = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1)] = [2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3] \Longrightarrow 2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3$ são L.I.; então : $\beta_{W_1} = \{2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3\}$.

    $W_2 = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)] = [e_1 + e_3, e_1 + e_2 + 3e_3] \Longrightarrow e_1 + e_3, e_1 + e_2 + 3e_3$ são L.I.; então : $\beta_{W_2} = \{e_1 + e_3, e_1 + e_2 + 3e_3\}$.

    $W_1 \cap W_2 = \{u = \lambda_1(2e_1 + e_2) + \lambda_2(-3e_1 + e_3)$ e $u = \lambda_3(e_1 + e_3) + \lambda_4(e_1 + e_2 + 3e_3)\} \Longrightarrow \lambda_1(2e_1 + e_2) + \lambda_2(-3e_1 + e_3) = \lambda_3(e_1 + e_3) + \lambda_4(e_1 + e_2 + 3e_3) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4$ e $\lambda_3 = -2\lambda_4$; assim, $\lambda_4(2e_1 + e_2) + \lambda_4(-3e_1 + e_3) = -2\lambda_4(e_1 + e_3) + \lambda_4(e_1 + e_2 + 3e_3)$ para $\lambda_4 = 1$: $(2e_1 + e_2) + (-3e_1 + e_3) = -2(e_1 + e_3) + (e_1 + e_2 + 3e_3) \Longrightarrow (-e_1 + e_2 + e_3) = (-e_1 + e_2 + e_3) = u$ u é L.I.; então $\beta_{W_1 \cap W_2} = \{-e_1 + e_2 + e_3\}$.

    $W_1 + W_2 = [2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + 3e_3] \Longrightarrow 2e_1 + e_2, -3e_1 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + 3e_3$ são L.D.; pois da combinação linear nula: $\lambda_1(2e_1 + e_2) + \lambda_2(-3e_1 + e_3) + \lambda_3(e_1 + e_3) + \lambda_4(e_1 + e_2 + 3e_3) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4; \lambda_3 = -2\lambda_4; \lambda_4 \in \mathbb{R}$; temos que retirar um vetor que torna os vetores linearmente dependentes. Fazendo, por exemplo: $\lambda_4 = 1$ e substituindo na combinação linear acima: $-(2e_1 + e_2) - (-3e_1 + e_3) - 2(e_1 + e_3) + (e_1 + e_2 + 3e_3) =$

$0 \Longrightarrow (e_1+e_2+3e_3) = (2e_1+e_2)+(-3e_1+e_3)+2(e_1+e_3)$, logo, podemos retirar o vetor $e_1+e_2+3e_3$, e assim, $\beta_{W_1+W_2} = \{2e_1+e_2, -3e_1+e_3, e_1+e_3\}$.

---

24. $W = [(1,0,1,2),(2,-1,1,3),(-1,1,0,-1)] = [e_1+e_3+2e_4, 2e_1-e_2+e_3+3e_4, -e_1+e_2-e_4]$, porém os vetores são L.D.: $\lambda_1(e_1+e_3+2e_4)+\lambda_2(2e_1-e_2+e_3+3e_4)+\lambda_3(-e_1+e_2-e_4) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_3 = \lambda_2; \lambda_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow -(e_1+e_3+2e_4)+(2e_1-e_2+e_3+3e_4)+(-e_1+e_2-e_4) = 0 \Longrightarrow (e_1+e_3+2e_4) = (2e_1-e_2+e_3+3e_4)+(-e_1+e_2-e_4); \Longrightarrow \beta_W = \{(2e_1-e_2+e_3+3e_4), (-e_1+e_2-e_4)\} \Longrightarrow dim(W) = 2$. Então, como $dim(\mathbb{R}^4) = 4$ para determinarmos uma base para $\mathbb{R}^4$ contendo uma base do subespaço W, temos que inserir mais dois vetores que sejam L.I. com os vetores da base de W. Por exemplo: $e_1, e_4 \Longrightarrow \beta_{\mathbb{R}^4} = \{(2e_1-e_2+e_3+3e_4), (-e_1+e_2-e_4), e_1, e_4\}$.

---

25. (a) $S = [(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 1)] = [-\frac{7}{2}e_1+\frac{3}{2}e_2+e_3] \Longrightarrow \beta_S = \{-\frac{7}{2}e_1+\frac{3}{2}e_2+e_3\}$;

    (b) fazendo em $W; y = x+z \Longrightarrow W = [(1,1,0),(0,1,1)] = [e_1+e_2, e_2+e_3] \Longrightarrow \beta_W = \{e_1+e_2, e_2+e_3\}$, determinando agora a intersecção dos subespaços:
    $\forall u \in W \cap S \Longrightarrow u = \lambda_1(-\frac{7}{2}e_1+\frac{3}{2}e_2+e_3) = \lambda_2(e_1+e_2)+\lambda_3(e_2+e_3) \Longrightarrow u = 0 \Longrightarrow W \cap S = \{0\} \Longrightarrow \beta_{W\cap S} = \emptyset$.

    (c) $dim(W+S) = dim(W)+dim(S)-dim(W\cap S) = 1+2-0 = 3 \Longrightarrow dim(W+S) = dim(\mathbb{R}^3)$ e $W+S \subseteq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow W+S = \mathbb{R}^3$; então uma base pode ser:
    $\beta_{W+S} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

---

26. (a) $W_1 = \{u = (y+z, y, z) = y(1,1,0)+z(1,0,1)\} = [e_1+e_2, e_1+e_3]$ e os vetores e_1+e_2, e_1+e_3 são L.I.; $\Longrightarrow \beta_{W_1} = \{e_1+e_2, e_1+e_3\}$.
    $W_2 = [(1,2,1)] = [e_1+2e_2+e_3] \Longrightarrow \beta_{W_2} = \{e_1+2e_2+e_3\}$.
    $W_1+W_2 = [e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+2e_2+e_3]$; verificando se os vetores são L.I.: $\alpha_1(e_1+e_2)+\alpha_2(e_1+e_3)+\alpha_3(e_1+2e_2+e_3) = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, logo são L.I. $\Longrightarrow \beta_{W_1+W_2} = \{e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+2e_2+e_3\}$.
    $W_1 \cap W_2 = \{u = \alpha_1(e_1+e_2)+\alpha_2(e_1+e_3) = \alpha_3(e_1+2e_2+e_3)\} = \{u = (0,0,0)\} = [\ \ ] \Longrightarrow \beta_{W_1\cap W_2} = \emptyset$.

    (b) $dim(W_1) = 2; dim(W_2) = 1, dim(W_1\cap W_2) = 0$, e $dim(W_1+W_2) = 3$.

    (c) $dim(W_1+W_2) = dim(V) = 3; W_1+W_2 \subseteq V \Longrightarrow V = W_1+W_2$; e $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$.

---

27. Sejam o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e, subespaços de V.

(a) $W_1 = [(-1,1,-1),(1,2,1)] = [-e_1+e_2-e_3, e_1+2e_2+e_3] \Longrightarrow \{-e_1+e_2-e_3, e_1+2e_2+e_3\}$ é L.I. $\Longrightarrow \beta_{W_1} = \{-e_1+e_2-e_3, e_1+2e_2+e_3\}$, $W_2 = [(2,2,1),(1,1,-1)] = [2e_1+2e_2+e_3, e_1+e_2-e_3] \Longrightarrow \{2e_1+2e_2+e_3, e_1+e_2-e_3\}$ é L.I. $\Longrightarrow \beta_{W_2} = \{2e_1+2e_2+e_3, e_1+e_2-e_3\}$.

$W_1+W_2 = [-e_1+e_2-e_3, e_1+2e_2+e_3, 2e_1+2e_2+e_3, e_1+e_2-e_3]$;

verificando a dependência linear entre os vetores:

$\alpha_1(-e_1+e_2-e_3)+\alpha_2(e_1+2e_2+e_3)+\alpha_3(2e_1+2e_2+e_3)+\alpha_4(e_1+e_2-e_3) = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -\alpha_4, \alpha_2 = 2\alpha_4, \alpha_3 = -2\alpha_4, \alpha_4 \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ para $\alpha_4 = 1; -e_1+e_2-e_3 = 2(e_1+2e_2+e_3) - 2(2e_1+2e_2+e_3)+(e_1+e_2-e_3) \Longrightarrow \beta_{W_1+W_2} = \{e_1+2e_2+e_3, 2e_1+2e_2+e_3, e_1+e_2-e_3\}$

$W_1 \cap W_2 = \{u = \alpha_1(-e_1+e_2-e_3)+\alpha_2(e_1+2e_2+e_3) = \alpha_3(2e_1+2e_2+e_3)+\alpha_4(e_1+e_2-e_3)\} = \{u = 3(-e_1-e_2-e_3)\} = [-e_1-e_2-e_3] \Longrightarrow \beta_{W_1\cap W_2} = \{-e_1-e_2-e_3\}$,

(b) $dim(W_1) = 2, dim(W_2) = 2, dim(W_1 \cap W_2) = 1$, e $dim(W_1+W_2) = 3$.

(c) $dim(W_1+W_2) = dim(V) = 3; W_1+W_2 \subseteq V \Longrightarrow V = W_1+W_2$; porém, $W_1 \cap W_2 \neq \{0\} \Longrightarrow V \neq W_1 \oplus W_2$.

---

28. (28)

---

29. (29)

---

30. (30)

---

31. (31)

---

32. (32)

---

33. (33)

---

34. Pelo teorema da dimensão da soma de subespaços:

$dim(W_1+W_2) = dim(W_1)+dim(W_2)-dim(W_1\cap W_2)$; como $W_1+W_2 \subseteq V \Longrightarrow dim(W_1+W_2) \leq 9 \Longrightarrow dim(W_1\cap W_2) \geq dim(W_1)+dim(W_2)-dim(W_1+W_2) = 6+5-9 = 2$.

E ainda, $dim(W_1+W_2) \geq 6$, visto que $\max(dim(W_1), dim(W_2)) = 6 \Longrightarrow dim(W_1\cap W_2) \leq dim(W_1)+dim(W_2)-dim(W_1+W_2) = 6+5-6 = 5$; logo, $2 \leq dim(W_1\cap W_2) \leq 5$.

---

35. Para $a \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}$.

---

36. (36)

---

37. $u=(3,1,6)=\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(1,0,-1)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) \Longrightarrow$

$\alpha_1=1,\alpha_2=\frac{7}{2},\alpha_3=-\frac{3}{2} \Longrightarrow [u]_{\beta_{\mathbb{R}^3}}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$

---

38. $p(t)=2+4t+t^2=\alpha_1(1)+\alpha_2(1+t)+\alpha_3(1+t^2)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(1)+\alpha_2(t)+\alpha_3(t^2) \Longrightarrow$

$\alpha_1=-3,\alpha_2=4,\alpha_3=1 \Longrightarrow [p(t)]_{\beta_{P_2(\mathbb{R})}}=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$

---

39. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\alpha_1(e_1+e_2+e_3)+\alpha_2(e_1+e_2+e_4)+\alpha_3(e_1+e_3+e_4)+\alpha_4(e_2+e_3+e_4)=$

$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha_1=\alpha_3=1,\alpha_2=2,\alpha_4=3 \Longrightarrow$

$[A]_{\beta_{M_2(\mathbb{R})}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

---

40. $\beta_{P_2(\mathbb{R})}=\{t,1+t,1-t^2\}$ e $\gamma_{P_2(\mathbb{R})}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

$[I]^{\beta}_{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $[I]^{\gamma}_{\beta}=([I]^{\beta}_{\gamma})^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$p(t)=2+4t+t^2\in P_2(\mathbb{R})$:

$[p(t)]_{\beta_{P_2(\mathbb{R})}}=[I]^{\gamma}_{\beta}\ \ [p(t)]_{\gamma_{P_2(\mathbb{R})}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

e $[p(t)]_{\gamma_{P_2(\mathbb{R})}}=[I]^{\beta}_{\gamma}\ \ [p(t)]_{\beta_{P_2(\mathbb{R})}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$

---

41. (a) $[v]_\beta=[I]^{\gamma}_{\beta}\ \ [v]_\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $[v]_\gamma = ([I]_\beta^\gamma)^{-1} \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \text{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
