Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações
Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

6

Autovalores e Autovetores

Conteúdo

6.1 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Sejam V um espaço vetorial real e T um operador linear sobre V. Podemos fazer a colocação do seguinte problema:

$$\boxed{\text{Quais são os elementos } v \in V \text{ tais que } T(v) = -v \text{ ?}}$$

Exemplo 6.1.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *O operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (-x\,,\,-y) \end{array}$$

é a reflexão em torno da origem, isto é, uma rotação de 180^o *no sentido anti–horário.*

Podemos verificar facilmente que

$$T(x,y) = (-x\,,\,-y) = -1(x\,,\,y)\,.$$

Portanto, todo elemento $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição acima.

Exemplo 6.1.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *e o operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (x+2y\,,\,-y) \end{array}$$

Podemos verificar facilmente que

$$T(x,-x) = (-x\,,\,x) = -1(x\,,\,-x)\,.$$

Portanto, todo elemento $v = (x,-x) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição acima.

Sejam V um espaço vetorial real e T um operador linear sobre V. Podemos também fazer a colocação do seguinte problema:

Quais são os elementos $v \in V$, não–nulos, que são levados pelo operador T em um múltiplo de si mesmo, isto é, estamos procurando elementos $v \in V$, não–nulos, e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$?

Definição 6.1.1 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* $T : V \longrightarrow V$ *um operador linear. Se existirem* $v \in V$*, diferentes do elemento neutro, e* $\lambda \in \mathbb{F}$ *tais que* $T(v) = \lambda v$*, então o escalar* $\lambda \in \mathbb{F}$ *é um* ***autovalor*** *de* T *e o elemento* v *é um* ***autovetor*** *de* T *associado ao autovalor* λ.

Exemplo 6.1.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. O operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (y\,,\,x) \end{array}$$

é a reflexão em torno da reta r *dada pela equação* $y = x$

Assim, para qualquer elemento $v = (x,y) \in r$, não nulo, temos que

$$T(x,y) \;=\; T(x,x) \;=\; 1\,(x\,,\,x)\,.$$

Portanto, qualquer elemento $v = (x,y) \in r$ não–nulo é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$.

De modo análogo, qualquer elemento $v = (x,y) \in s$, não nulo, onde s é a reta dada pela equação $y = -x$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$. De fato,

$$T(x,y) \;=\; T(x,-x) \;=\; (-x\,,\,x) \;=\; -1\,(x\,,\,y)\,.$$

Teorema 6.1.1 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*,* T *um operador linear sobre* V *e* v *um autovetor associado ao autovalor* λ*. Então, qualquer elemento* $w = \alpha v$*, com* $\alpha \in \mathbb{F}$ *não–nulo, também é um autovetor de* T *associado a* λ*.*

Demonstração – Considerando que $(v\,,\,\lambda)$ é um autopar do operador linear T, isto é, $T(v) = \lambda v$, e que $w = \alpha v$, temos que

$$T(w) \;=\; T(\alpha v) \;=\; \alpha T(v) \;=\; \alpha(\lambda v) \;=\; \lambda(\alpha v) \;=\; \lambda w\,.$$

Logo, o elemento $w = \alpha v$, com $\alpha \in \mathbb{F}$ não–nulo, é um autovetor de T associado ao autovalor λ. ■

Podemos observar que o autovalor λ é unicamente determinado pelo operador T e pelo autovetor v. De fato, considere que λ e λ' são autovalores do operador T associados ao autovetor v, isto é,

$$T(v) \;=\; \lambda\, v \qquad \text{e} \qquad T(v) \;=\; \lambda'\, v\,.$$

Assim, temos que

$$\lambda v \,-\, \lambda' v \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad (\,\lambda \,-\, \lambda'\,)\,v \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad (\,\lambda \,-\, \lambda'\,) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda \;=\; \lambda'\,,$$

pois $v \neq 0_V$. Assim, temos somente um autovalor λ associado ao autovetor v.

Nos casos em que o autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos dar uma interpretação geométrica para os autovetores associados como sendo os elementos de V que tem suas direções preservadas pelo operador T.

Definição 6.1.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Fixando um autovalor λ do operador T, o subconjunto*

$$V_\lambda = \{ v \in V \ / \ T(v) = \lambda v \}$$

*é denominado **subespaço associado ao autovalor** λ.*

Podemos observar facilmente que o subconjunto V_λ é igual ao subespaço $Ker(T - \lambda I_V)$. De fato, tomando um elemento $v \in V_\lambda$ temos que

$$T(v) = \lambda v \iff (T - \lambda I_V)(v) = 0_V \iff v \in Ker(T - \lambda I_V).$$

Logo, temos que $V_\lambda = Ker(T - \lambda I_V)$. Assim, provamos que V_λ é um subespaço de V, pois sabemos que o núcleo de um operador linear é um subespaço de V.

Exemplo 6.1.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V, λ_1 e λ_2 autovalores distintos do operador T. Podemos verificar facilmente que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{ 0_V \}$.*

De fato, tomando um elemento $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ temos que

$$T(v) = \lambda_1 v \qquad \text{e} \qquad T(v) = \lambda_2 v.$$

Assim, obtemos

$$\lambda_1 v - \lambda_2 v = 0_V \implies (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos que $v = 0_V$. Portanto, mostramos que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{ 0_V \}$.

Exemplo 6.1.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V e λ um autovalor do operador T. Podemos verificar facilmente que o subespaço V_λ é invariante sob T, isto é $T(v) \in V_\lambda$ para todo $v \in V_\lambda$.*

Exemplo 6.1.6 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$*. O operador linear*

$$\begin{array}{rcl} T: \quad I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (x\,,\,-y) \end{array}$$

é a reflexão em torno do eixo–ox.

Assim, podemos observar que para os elementos do tipo $v \;=\; (0,y) \;\in\; I\!R^2$ temos que

$$T(0,y) \;=\; (0\,,\,-y) \;=\; -1(0\,,\,y)\,.$$

Portanto, os elementos $v \;=\; (0,y) \in I\!R^2$ são autovetores de T com autovalor $\lambda \;=\; -1$.

De modo análogo, temos que os elementos $v \;=\; (x,0) \;\in\; I\!R^2$ são autovetores de T associados ao autovalor $\lambda \;=\; 1$. De fato,

$$T(x,0) \;=\; (x\,,\,0) \;=\; 1(x\,,\,0)\,.$$

Exemplo 6.1.7 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$*. O operador linear*

$$\begin{array}{rcl} T: \quad I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (-x\,,\,-y) \end{array}$$

é a reflexão em torno da origem.

Assim, para qualquer elemento $v \;=\; (x,y) \;\in\; I\!R^2$, não nulo, temos que

$$T(x,y) \;=\; (-x\,,\,-y) \;=\; -1(x\,,\,y)\,.$$

Portanto, qualquer elemento $v \;=\; (x,y) \in I\!R^2$, não–nulo, é um autovetor de T associado ao único autovalor $\lambda \;=\; -1$.

Exemplo 6.1.8 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$*. O operador linear*

$$\begin{array}{rcl} T: \quad I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (x\,,\,0) \end{array}$$

é a projeção no eixo–ox, isto é, um operador de projeção de coordenadas.

Podemos verificar facilmente que qualquer elemento $v \;=\; (x,0) \;\in\; I\!R^2$, não–nulo, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda \;=\; 1$. Além disso, qualquer elemento $v \;=\; (0,y) \in I\!R^2$, não–nulo, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda \;=\; 0$.

Exemplo 6.1.9 *De um modo geral todo operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; \lambda\,(x\,,\,y) \end{array}$$

com $\lambda \neq 0$, *tem* λ *como único autovalor e qualquer elemento* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *não nulo, como autovetor associado.*

Exemplo 6.1.10 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *O operador linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) \;=\; (-y\,,\,x) \end{array}$$

é uma rotação de um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *no sentido anti–horário.*

Note que nenhum vetor $v \in \mathbb{R}^2$ não–nulo é levado por T em um múltiplo de si mesmo. Logo, T não tem nem autovalores e nem autovetores. Este é um exemplo de que nem todo operador linear sobre um espaço vetorial real possui autovalores e autovetores. Mais a frente vamos fazer uma melhor colocação desse fato.

Exemplo 6.1.11 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *e* P *o operador linear sobre* $\mathbb{R}^3$ *definido da seguinte forma:* $P(x,y,z) = (x,y,0)$ *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *que representa a projeção sobre o plano* xy.

Neste exemplo, temos que todo elemento $v = (0,0,z) \in \mathbb{R}^3$, elementos sobre o eixo–oz, é um autovetor de P associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$. De fato, $P(0,0,z) = (0,0,0)$. Todo elemento $v = (x,y,0) \in \mathbb{R}^3$, elementos do plano xy, é um autovetor de P associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$. De fato, $P(x,y,0) = (x,y,0)$.

Exemplo 6.1.12 *Seja* V *o espaço vetorial real das funções contínuas* f, *definidas em* (a,b), *que possuem derivadas contínuas de todas as ordens, que denotamos por* $\mathcal{C}^{\infty}((a,b))$. *Considere o operador linear* D *sobre* V *definido da seguinte forma:* $D(f) = f'$. *Os autovetores do operador* D *são todas as funções contínuas não nulas* f *satisfazendo a equação da forma:* $f' = \lambda f$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Assim, os autovetores são as funções* $f(x) = c\exp(\lambda x)$, *onde* $c \in \mathbb{R}$ *é uma constante não nula, associados aos autovalores* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Note que para* $\lambda = 0$, *os autovetores associados são as funções constantes não nulas, isto é,* $f(x) = c$, *para* $c \in \mathbb{R}$ *não nula.*

Exemplo 6.1.13 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e o subespaço* $S = [(1,-1,2)]$. *Seja* P *o operador linear sobre* $\mathbb{R}^3$ *onde* $w = P(u)$, *para* $u \in \mathbb{R}^3$, *é a projeção ortogonal do elemento* u *sobre o subespaço* S. *Vamos determinar os autovalores e autovetores de* P.

Fazendo $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos que $w = P(u) = \alpha^* v \in S$ com

$$\alpha^* = \frac{\langle u , v \rangle}{\langle v , v \rangle} = \frac{v^t u}{v^t v}$$

Assim, temos que w pode ser escrito da seguinte forma:

$$w = P(u) = \frac{v^t u}{v^t v} v = \frac{v v^t}{v^t v} u$$

Considerando o $\mathbb{R}^3$ com a base canônica β, temos que

$$[P]^\beta_\beta = \frac{v v^t}{v^t v} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Sabemos que, para todo $z \in S$ temos $P(z) = z$. Portanto, $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de P com $v_1 = (1,-1,2)$ o autovetor associado. Logo, o subespaço S é o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

O complemento ortogonal, $S^\perp$, do subespaço S em $\mathbb{R}^3$ é o hiperplano dado por:

$$S^\perp = H = \{ u \in \mathbb{R}^3 \ / \ \langle u , v \rangle = 0 \}$$

Note que $S^\perp$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - y + 2z = 0$. Temos também que, $P(u) = (0,0,0)$ para todo $u \in S^\perp$. Observamos também que $Ker(P) = S^\perp$.

Desse modo, como $P(u) = 0\,u$ para todo $u \in S^\perp$, podemos concluir que $\lambda_2 = 0$ é um autovalor de P e $S^\perp$ é o subespaço associado ao autovalor λ_2. Assim, quaisquer dois vetores v_2 e v_3 linearmente independentes em $S^\perp$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 0$.

Finalmente, escolhemos $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (0,2,1)$ como sendo os autovetores do operador P associados ao autovalor $\lambda_2 = 0$.

Exemplo 6.1.14 *Considere o espaço vetorial real* $I\!\!R^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e o subespaço* $S = [(1,-1,2)]$*. Seja* R *o operador linear sobre* $I\!\!R^3$ *onde* $w = R(u)$*, para* $u \in I\!\!R^3$*, é a reflexão do elemento* u *em torno do subespaço* $S^\perp$*. Vamos determinar os autovalores e autovetores de* R*.*

Do Exemplo 6.1.13, sabemos que o operador P de projeção ortogonal sobre o subespaço S é dado por:

$$P(u) = \frac{v^t u}{v^t v} v = \frac{v v^t}{v^t v} u \qquad \text{para todo} \qquad u \in I\!\!R^3$$

Desse modo, o operador T de projeção ortogonal sobre o subespaço $S^\perp$ é dado por:

$$T(u) = u - P(u) = u - \frac{v^t u}{v^t v} v = \left(I - \frac{v v^t}{v^t v} \right) u$$

Temos que o operador R de reflexão em torno do subespaço $S^\perp$ é dado por:

$$R(u) = T(u) - P(u) = u - 2\,P(u) = = \left(I - 2\,\frac{v v^t}{v^t v} \right) u$$

Desse modo, temos que $R(u) = u$ para todo $u \in S^\perp$, concluindo que $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de R e $S^\perp$ é o subespaço associado ao autovalor λ_1. Assim, quaisquer dois vetores v_1 e v_2 linearmente independentes em $S^\perp$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Portanto, podemos escolher $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,2,1)$ como sendo os autovetores de R associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Sabemos que, para todo $w \in S$ temos $R(w) = -w$. Portanto, $\lambda_2 = -1$ é um autovalor de R com $v_3 = (1,-1,2)$ o autovetor associado. Logo, o subespaço S é o subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Note que podemos generalizar os dois últimos exemplos para o caso em que $S = [v]$, com $v \in I\!\!R^n$ não–nulo.

Exercícios

Exercício 6.1 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, T *um operador linear sobre* V, v *um autovetor de* T *associado a um autovalor* λ *e* α *um escalar não–nulo. Mostre que* $\alpha\lambda$ *é um autovalor do operador linear* αT *com* v *o autovetor associado.*

Exercício 6.2 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador linear sobre* V. *Mostre que* $\lambda = 0$ *é um autovalor de* T *se, e somente se,* T *não é um operador injetor.*

Exercício 6.3 *Sejam* V *um espaço vetorial real e* T *um operador linear sobre* V *tal que* $T^2 = T$, *isto é,* $T(T(v)) = T(v)$ *para todo* $v \in V$ (***operador idempotente***). *Mostre que os autovalores de* T *são* $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 = 1$.

Exercício 6.4 *Sejam* V *um espaço vetorial real e* T *um operador linear sobre* V *tal que* $T^2 = I_V$, *isto é,* $T(T(v)) = v$ *para todo* $v \in V$ (***operador auto–reflexivo***). *Mostre que os autovalores de* T *são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -1$.

Exercício 6.5 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, T *um operador linear sobre* V *e* λ *é um autovalor de* T *com* v *o autovetor associado. Mostre que* $a\lambda + b$ *é um autovalor do operador* $aT + bI_V$, *para* $a, b \in \mathbb{F}$, *com* v *o autovetor associado.*

Exercício 6.6 *Determine o operador linear* T *sobre o* $\mathbb{R}^2$ *satisfazendo as seguintes propriedades simultaneamente:*

(a) $\lambda_1 = 1$ *é um autovalor de* T *com os autovetores associados do tipo* $v_1 = (y\,, -y)$ *para* $y \in \mathbb{R}$ *não–nulo.*

(b) $\lambda_2 = 3$ *é um autovalor de* T *com os autovetores associados do tipo* $v_2 = (0\,, y)$ *para* $y \in \mathbb{R}$ *não nulo.*

Exercício 6.7 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual e* W *o subespaço vetorial gerado pelos elementos* $w_1 = (1, -1, 0, 1)$ *e* $w_2 = (-1, 0, 1, 1)$. *Sejam* P *o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço* W *e* R *o operador de reflexão sobre o subespaço* W. *Pede–se:*

(a) Determine os autovalores e os autovetores do operador P.

(b) Determine os autovalores e os autovetores do operador R.

Exercício 6.8 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*,* T *um operador linear sobre* V *e* v *um autovetor de* T *associado a um autovalor* λ*. Mostre que* v *é um autovetor do operador* T^n *associado ao autovalor* λ^n *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercício 6.9 *Sejam* V *um espaço vetorial real e* T *um operador linear sobre* V *de modo que existe um número inteiro* n *tal que* $T^n = 0$*, isto é,* $T^n(v) = 0_V$ *para todo* $v \in V$ *(**operador nilpotente**). Mostre que o único autovalor de* T *é* $\lambda = 0$*.*

Exercício 6.10 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*,* T *um isomorfismo de* V *e* v *um autovetor de* T *associado a um autovalor* λ*. Mostre que* v *é um autovetor do isomorfismo inverso* T^{-1} *associado ao autovalor* $\dfrac{1}{\lambda}$*.*

Exercício 6.11 *Seja* T *um operador linear sobre o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(A) = A^t$*. Mostre que os autovalores de* T *são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -1$*, descrevendo os subespaços associados a cada um dos autovalores.*

Exercício 6.12 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$*,* T *um operador linear sobre* V *e* λ *um autovalor de* T*. Mostre que o subconjunto definido por:*

$$V_\lambda = \{ \, v \in V \; / \; T(v) = \lambda v \, \}$$

é um subespaço vetorial de V*.*

Exercício 6.13 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo e* T *um operador linear sobre* V *tal que* $T^2 = -I_V$*, isto é,* $T(T(v)) = -v$ *para todo* $v \in V$*. Mostre que* T *é um automorfismo de* V *e que os autovalores de* T *são* $\lambda_1 = i$ *e* $\lambda_2 = -i$*.*

Exercício 6.14 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *e o operador* T *sobre o* $\mathbb{R}^4$ *definido da seguinte forma:* $T(x,y,z,t) = (-y \, , \, x \, , \, -t \, , \, z)$*. Mostre que* T *satisfaz* $T^2(v) = -v$ *para todo* $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$*. Determine a matriz* $[T]^\beta_\beta$*, onde* β *é a base canônica de* $\mathbb{R}^4$*. O operador linear* T *possui autovalores e autovetores ?*

Exercício 6.15 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^4$ *e o operador* T *sobre o* $\mathbb{C}^4$ *definido da seguinte forma:* $T(x,y,z,t) = (-t \, , \, z \, , \, -y \, , \, x)$*. Mostre que* T *satisfaz* $T^2(v) = -v$ *para todo* $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$*. Determine a matriz* $[T]^\beta_\beta$*, onde* β *é a base canônica de* $\mathbb{C}^4$*, como espaço vetorial complexo. O operador linear* T *possui autovalores e autovetores ?*

6.2 Autovalor e Autovetor de uma Matriz

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$, digamos que $dim(V) = n$, e T um operador linear sobre V. O problema de encontrar os autovalores do operador T será resolvido através do cálculo de determinantes. Queremos encontrar escalares $\lambda \in \mathbb{F}$ de modo que a equação $T(v) = \lambda\, v$ tenha solução $v \in V$, não nula. A equação $T(v) = \lambda\, v$ pode ser escrita na forma: $(T - \lambda\, I_V)\,(v) = 0_V$.

A equação acima terá solução v não nula se, e somente se, $Ker(T - \lambda\, I_V) \neq \{\, 0_V \,\}$. Assim, se $A = [T]_\beta^\beta$ é a representação matricial do operador T, com relação a alguma base ordenada de V, então a matriz $A - \lambda\, I_n$ é a representação matricial para o operador $T - \lambda\, I_V$. Desse modo, a matriz $A - \lambda\, I_n$ deve ser singular, isto é, $\det(\, A - \lambda\, I_n \,) = 0$.

Portanto, $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor do operador T se, e somente se, satisfaz a equação

$$\det(\, A - \lambda\, I_n \,) = 0\,.$$

Desse modo, dada uma matriz A de ordem n sobre um corpo $\mathbb{F}$, vamos definir um autovalor de A como sendo um autovalor do operador linear T_A sobre $\mathbb{F}^n$ associado à matriz A, isto é, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathbb{F}^n$. Portanto, os autovetores da matriz A, associados ao autovalor λ, são soluções não nulas da equação $T_A(v) = \lambda\, v$, representadas como matriz coluna. Assim, se $u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ é um autovetor de T_A associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$, isto é, $T_A(u) = \lambda\, u$, temos que

$$AX = \lambda\, X \quad , \quad \text{onde} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})\,,$$

isto é, $(\lambda\,, X)$ é um autopar da matriz A. Note que $[u]_\beta = X$.

Definição 6.2.1 *Seja A uma matriz de ordem n sobre um corpo $\mathbb{F}$. Um **autovalor** da matriz A é um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que a matriz $(A - \lambda\, I_n)$ seja singular.*

Equivalentemente, λ é um autovalor de A se, e somente se, $det(\, A - \lambda\, I_n \,) = 0$. Evidentemente, os autovalores de A são exatamente os escalares $\lambda \in \mathbb{F}$ que são raízes do polinômio $p(\lambda) = det(\, A - \lambda\, I_n \,)$. O polinômio $p(\lambda)$ é denominado **polinômio característico** da matriz A, que é um polinômio de grau n.

Definição 6.2.2 *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Dizemos que a matriz B é **similar** ou **semelhante** a matriz A, se existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ de maneira que $B = P^{-1}AP$.*

Note que matrizes similares possuem a seguinte propriedade:

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A).$$

Esta propriedade nos leva ao seguinte resultado, que é muito importante no estudo de autovalores.

Teorema 6.2.1 *Matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração – Considerando que a matriz B é similar à matriz A, isto é, existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Consideramos inicialmente o polinômio característico da matriz B, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) \\ &= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} P) \\ &= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= det(P^{-1}) det(A - \lambda I_n) det(P) \\ &= det(A - \lambda I_n), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

O Teorema 6.2.1 nos permite definir o polinômio característico do operador linear T como sendo o polinômio característico da matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$, que é a representação matricial do operador T em relação a qualquer base ordenada β de V. Para isso, vamos precisar do seguinte resultado.

Teorema 6.2.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V, β e α bases ordenadas de V. Então,*

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Demonstração – Seja $P = [I]_{\alpha}^{\beta}$ a matriz mudança da base β para a base α, e lembrando que $[I]_{\beta}^{\alpha} = P^{-1}$. Inicialmente, vamos calcular

$$[T(u)]_{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\alpha} [u]_{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta} [u]_{\beta} \quad \text{para todo} \quad u \in V.$$

Assim, podemos escrever $[T(u)]_{\beta}$ da seguinte forma:

$$[T(u)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T(u)]_{\alpha} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta} [u]_{\beta} \quad \Longrightarrow \quad [T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Portanto, mostramos que $[T]_{\beta}^{\beta} = P^{-1} [T]_{\alpha}^{\alpha} P$, isto é, as matrizes $[T]_{\beta}^{\beta}$ e $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ são similares, o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.2.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V, β e α bases ordenadas de V. Então,*

$$\det([T]_\alpha^\alpha) = \det([T]_\beta^\beta).$$

Demonstração – A prova é feita utilizando o resultado do Teorema 6.2.2. □

Definição 6.2.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V e β uma base ordenada de V. Definimos o* ***determinante*** *do operador T da seguinte forma: $\det(T) = \det([T]_\beta^\beta)$.*

Teorema 6.2.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Então, T é invertível se, e somente se, $\det(T) \neq 0$.*

Demonstração – A prova segue da definição de determinante e do Corolário 4.8.2. □

Exemplo 6.2.1 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e o operador T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por: $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. Considerando a base canônica $\beta = \{1, x, x^2\}$, temos que*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det(T) = \det([T]_\beta^\beta) = 6$. Logo, o operador T é invertível, pois $\det(T) \neq 0$. Podemos observar facilmente que o determinante de um operador linear, assim definido, fica bem estabelecido devido ao Corolário 6.2.1.

Definição 6.2.4 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Definimos o* ***polinômio característico*** *do operador T como sendo o polinômio característico da matriz $[T]_\beta^\beta$ em relação a qualquer base ordenada β de V.*

Considerando o Exemplo 6.2.1, temos que o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda),$$

com $A = [T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Proposição 6.2.1 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$*, digamos* $dim(v) = n$*, e* T *um operador linear sobre* V*. Então, os autovalores do operador linear* T *são os escalares* $\lambda \in \mathbb{F}$ *que são raízes do polinômio característico da matriz* $A = [T]_\beta^\beta$ *em relação a qualquer base ordenada* β *de* V*.*

Demonstração – Por definição, um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor do operador T, se a equação $T(v) = \lambda v$ tem solução não nula. A equação $T(v) = \lambda v$ pode ser escrita na forma: $(T - \lambda I_V)(v) = 0_V$.

Assim, a equação acima terá solução não nula se, e somente se, $Ker(T - \lambda I_V) \neq \{ 0_V \}$. Desse modo, se $A = [T]_\beta^\beta$ é a representação matricial do operador linear T, com relação a alguma base ordenada β de V, então $A - \lambda I_n$ é a matriz do operador $T - \lambda I_V$. Desse modo, a matriz $A - \lambda I_n$ deve ser singular, isto é, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Portanto, um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor do operador T se, e somente se, satisfaz a equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$, o que completa a demonstração. ■

Finalmente, para determinar os autovetores do operador T associados ao autovalor λ, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $T - \lambda I_V$, isto é, temos que encontrar as soluções não nulas da equação $T(v) = \lambda v$.

De uma maneira geral, podemos simplificar os cálculos para determinar os autovetores do operador T associados ao autovalor λ, fazendo a seguinte observação.

Considerando que $u \in V$ é um autovetor do operador linear T associado ao autovalor λ, isto é, $T(u) = \lambda u$, obtemos

$$[T(u)]_\beta = \lambda [u]_\beta \qquad \Longrightarrow \qquad [T]_\beta^\beta [u]_\beta = \lambda [u]_\beta .$$

Portanto, podemos observar facilmente que $[u]_\beta = X$, onde $X \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})$ é um autovetor da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ associado ao autovalor λ.

Sabemos que os autovalores do operador T são os escalares $\lambda \in \mathbb{F}$ que são raízes do polinômio característico da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ em relação a qualquer base ordenada β de V. Desse modo, podemos também simplificar os cálculos para encontrar os autovalores de T, escolhendo a base canônica de V para determinar a representação matricial do operador linear T.

Exemplo 6.2.2 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) = (1 + x)p'(x) + p''(x).$$

Determine os autovalores do operador linear T.

Temos que A $= [T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{1, x, x^2\}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Como $\lambda_1 = 0$ é um autovalor do operador linear T, podemos observar que

$$V_{\lambda_1} = Ker(T).$$

Assim, o operador linear T não é um operador injetor.

Exemplo 6.2.3 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ com a base canônica β e T o operador linear definido por:*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longrightarrow & T(x, y) = (2x + 2y\,,\, y) \end{array}$$

Determine o polinômio característico do operador T.

Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Desse modo, temos que $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ são os autovalores do operador T.

Exemplo 6.2.4 *No Exemplo 6.2.3 considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *com a base ordenada* $\gamma = \{ (1,1),\ (-1,1) \}$.

Temos que a matriz $A = [T]_{\gamma}^{\gamma}$ é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left(\frac{5}{2} - \lambda \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) + \frac{3}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 .$$

Assim, obtemos o resultado esperado, de acordo com o Teorema 6.2.2.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que determinar os elementos não–nulos $(x,y) \in I\!R^2$ tais que $T(x,y) = 2(x,y)$. Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador $(T - 2I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ \qquad\ \ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v_1 = (x,0)$, com $x \neq 0$. Desse modo, podemos escolher $v_1 = (1,0)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que determinar os elementos não–nulos $(x,y) \in I\!R^2$ tais que $T(x,y) = (x,y)$. Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T - I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x + 2y = 0$$

Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são do tipo $v_2 = t\,(-2,1)$, para $t \in I\!R$ não–nulo. Assim, podemos escolher $v_2 = (-2,1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

Exemplo 6.2.5 *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ associado a matriz A, isto é,

$$T_A(x, y, z) = (\, 2x + y + z \,,\, 2x + 3y + 4z \,,\, -x - y - 2z \,)$$

Assim, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - I)$. Assim, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ -x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Adicionando a primeira equação e a terceira equação encontramos $z = 0$, as duas primeiras equação ficam reduzidas a equação $x + y = 0$.

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são do tipo $v_1 = (x, -x, 0)$, com $x \neq 0$. Assim, podemos escolher $v_1 = (1, -1, 0)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. De modo análogo, obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ que são do tipo $v_2 = t\,(0, 1, -1)$, e os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 3$ que são do tipo $v_3 = t\,(2, 3, -1)$, para $t \in \mathbb{R}$ não–nulo.

Finalmente, os autovetores da matriz A são representados da seguinte forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $x \in I\!R$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Desse modo, temos que $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}$$

para $y \in I\!R$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$. Desse modo, temos que $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

$$X_3 = \begin{bmatrix} -2z \\ -3z \\ z \end{bmatrix}$$

para $z \in I\!R$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 3$. Desse modo, temos que $AX_3 = \lambda_3 X_3$.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$, respectivamente.

É importante observar que como A é uma matriz quadrada de ordem 3, seus autovetores são matrizes coluna de ordem 3×1.

Sejam V é um espaço vetorial complexo de dimensão finita, digamos $dim(V) = n$, e T um operador linear sobre V. Então, o polinômio característico do operador linear T é um polinômio complexo que possui n raízes em $\mathbb{C}$, levando em conta a multiplicidade, veja **Teorema Fundamental da Álgebra**. Neste caso, um operador linear T tem n autovalores. Entretanto, se V é um espaço vetorial real o número de autovalores do operador T é menor ou igual à dimensão de V. Para ilustrar este fato vamos considerar os seguintes exemplos.

Exemplo 6.2.6 *Seja* $\mathbb{C}^2$ *um espaço vetorial complexo com a base* $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$. *O operador linear*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{C}^2 \quad &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x,y) \quad &\longrightarrow T(x,y) = (-y\,,\,x) \end{aligned}$$

é uma rotação de um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *no sentido anti–horário.*

Temos que o polinômio característico da matriz $[T]_\beta^\beta$ é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, o operador T possui os autovalores $\lambda_1 = -i$ e $\lambda_2 = i$.

Desse modo, o autovetor $v_1 \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -i$ é a solução do seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} i\,x - y = 0 \\ x + i\,y = 0 \end{cases} \iff i\,x - y = 0 \implies y = i\,x$$

Portanto, todo elemento $v_1 = (a, i\,a) \in \mathbb{C}^2$, para $a \in \mathbb{C}$ não–nulo, é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_1 = -i$. Assim, podemos escolher $v_1 = (1,i)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -i$.

De modo análogo, o autovetor $v_2 \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $\lambda_2 = i$ é a solução do seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} -i\,x - y = 0 \\ x - i\,y = 0 \end{cases} \iff i\,x + y = 0 \implies y = -i\,x$$

Portanto, todo elemento $v_2 = (a, -i\,a) \in \mathbb{C}^2$, para $a \in \mathbb{C}$ não–nulo, é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_2 = i$. Assim, podemos escolher $v_2 = (1,-i)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = i$.

É importante observar que, neste caso, não temos a interpretação geométrica para o autovetor como sendo o elemento que tem sua direção preservada pelo operador T.

Exemplo 6.2.7 *Considere o operador linear* T *sobre o* $\mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$\begin{array}{rcl} T: \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & T(x, y, z) = (\, x \,,\, -z \,,\, y \,) \end{array}$$

que representa uma rotação de um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *no sentido anti–horário no plano* yz*.*

A matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$A = [T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(\, A - \lambda I \,) = (1 - \lambda)(1 + \lambda^2)\,,$$

que possui as seguintes raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$.

Desse modo, como estamos considerando o operador linear T sobre o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, temos que $\lambda_1 = 1$ é o único autovalor de T.

Podemos verificar facilmente que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são do tipo $v = (x, 0, 0)$ para $x \in \mathbb{R}$ não–nulo. Assim, podemos escolher o autovetor $v_1 = (1, 0, 0)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Entretanto, considerando o operador linear T sobre o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$, temos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$ são os autovalores de T.

Neste caso, podemos verificar facilmente que $v_2 = (0, 1, -i)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = i$. De modo análogo, temos que $v_3 = (0, 1, i)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -i$.

Exemplo 6.2.8 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x + x^2) .$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Vamos determinar a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$, onde $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Desse modo, temos que

$$T(1) = 1 + x + x^2 \quad , \quad T(x) = x + x^2 \qquad \text{e} \qquad T(x^2) = x + x^2 .$$

Logo, a matriz $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Assim, o polinômio característico do operador linear T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) .$$

Portanto, os autovalores do operador linear T são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, que são os autovalores da matriz A.

Podemos verificar facilmente que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, respectivamente.

Portanto, sabemos que

$$[p_1(x)]_{\beta} = X_1 \quad , \quad [p_2(x)]_{\beta} = X_2 \qquad \text{e} \qquad [p_3(x)]_{\beta} = X_3 ,$$

onde $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os autovetores do operador linear T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, respectivamente. Logo, obtemos

$$p_1(x) = x + x^2 \quad , \quad p_2(x) = 1 - x - x^2 \qquad \text{e} \qquad p_3(x) = x - x^2 .$$

Podemos observar facilmente que

$$V_{\lambda_1} = [x + x^2] \quad , \quad V_{\lambda_2} = [1 - x - x^2] \qquad \text{e} \qquad V_{\lambda_3} = [x - x^2] .$$

Exercícios

Exercício 6.16 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) \,=\, p(x) \,+\, (x+1)p'(x)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.17 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) \,=\, xp'(x) \,+\, p''(x)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.18 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) \,=\, p(x) \,+\, xp'(x)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.19 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) \,=\, p(x) \,+\, xp''(x)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T. O operador linear T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?

Exercício 6.20 *Considere o operador T sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (x \,+\, 2y \,-\, z\,,\, 3y \,+\, z\,,\, 4z)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.21 *Considere o operador linear T sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:*

$$T(x,y,z) \,=\, (x \,+\, y\,,\, x \,-\, y \,+\, 2z\,,\, 2x \,+\, y \,-\, z)\,.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.22 *Considere o operador linear T sobre $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \,=\, \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

Exercício 6.23 *Sejam* V *um espaço vetorial real de dimensão finita e* T *um operador linear sobre* V *definido em uma base ordenada* $\gamma = \{ v_1 , v_2 , \cdots , v_n \}$ *de* V *da seguinte forma:* $T(v_i) = \lambda_i v_i \ , \ \lambda_i \in I\!R$. *Determine o polinômio característico e os autovalores do operador linear* T.

Exercício 6.24 *Seja* $D \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz Diagonal. Mostre que* D *possui um conjunto de* n *autovetores linearmente independentes.*

Exercício 6.25 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$. *Mostre que as matrizes* A *e* A^t *possuem os mesmos autovalores.* ***Sugestão:*** *utilize o polinômio característico.*

Exercício 6.26 *Considere o operador linear* T *sobre o* $I\!R^4$ *cuja matriz em relação à base canônica* β *de* $I\!R^4$ *é dada por:*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T. *O operador linear* T *é um automorfismo de* $I\!R^4$ *?*

Exercício 6.27 *Sejam* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz invertível e* λ *um autovalor de* A. *Mostre que* $\dfrac{1}{\lambda}$ *é um autovalor de* A^{-1}. ***Sugestão:*** *utilize o polinômio característico.*

Exercício 6.28 *Determine os autovalores da matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.29 *Sejam* T *um operador linear sobre* $I\!R^3$, $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *uma base ordenada para o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *e o subespaço* $S = [v_1, v_3]$. *Sabendo que* $T(v) = v$ *para todo* $v \in S$ *e* $T(v_2) = v_1 + 2v_2 + 3v_3$. *Determine os autovalores e os autovetores do operador linear* T.

Exercício 6.30 *Mostre que se* λ *é um autovalor de uma matriz* A *com* X *o autovetor associado, então* $\alpha\lambda + \beta$ *é um autovalor da matriz* $\alpha A + \beta I_n$ *com* X *o autovetor associado.*

Exercício 6.31 *Seja V o subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares superiores. Pede–se:*

(a) Exiba uma base ordenada para V.

(b) Seja $T : V \longrightarrow V$ o operador linear definido por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ 0 & c-a-b \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é um automorfismo de V.

(c) Determine os autovalores e os autovetores de T.

Exercício 6.32 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(p(x)) = p(x) + p'(x) + x^2 p''(x) .$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T, descrevendo para cada autovalor o subespaço associado.

Exercício 6.33 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:*

$$T(a + bx + cx^2) = (2b + c) + (2b - c)x + 2cx^2 .$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T, descrevendo para cada autovalor o subespaço associado.

Exercício 6.34 *Seja A uma matriz de ordem n triangular superior (inferior) ou uma matriz diagonal. Mostre que os autovalores de A são os elementos da diagonal principal da matriz A.*

Exercício 6.35 *Seja λ um autovalor de A com X o autovetor associado. Mostre que λ^n é um autovalor de A^n com X o autovetor associado, para $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 6.36 *Sejam A uma matriz invertível e λ um autovalor de A com X o autovetor associado. Mostre que $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor da matriz A^{-1} com X o autovetor associado.*

Exercício 6.37 *Determine os autovalores e autovetores das matrizes A e A^{-1}, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.38 *Considere a matriz diagonal em blocos* $T \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} U & 0_2 \\ 0_2 & D \end{bmatrix},$$

onde $U \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é uma matriz triangular superior e* $D \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é uma matriz diagonal, representadas por:*

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

com $a, b, c, d, e \in R$. *Mostre que*

$$\lambda_1 = a \quad , \quad \lambda_2 = c \quad , \quad \lambda_3 = d \quad e \quad \lambda_4 = e$$

são os autovalores da matriz T, *com autovetores associados*

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{c-a} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente, para $c \neq a$. *Considerando* $a = c$, *determine os autovalores e os autovetores da matriz* T.

Exercício 6.39 *Determine os autovalores e os autovetores da matriz* T *dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.40 *Determine os autovalores e os autovetores da matriz* T *dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.41 *Sejam* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *matrizes similares, isto é, existe uma matriz invertível* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $B = P^{-1}AP$. *Mostre que se* A *é invertível, então* B *é invertível e as matrizes* A^{-1} *e* B^{-1} *são similares.*

6.3 Multiplicidade Algébrica e Geométrica

Definição 6.3.1 *Definimos a **multiplicidade algébrica** de um **autovalor** λ como sendo a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.*

Definição 6.3.2 *Definimos a **multiplicidade geométrica** de um **autovalor** λ como sendo a dimensão do subespaço V_λ associado ao autovalor λ.*

Exemplo 6.3.1 *Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ associado a matriz A, isto é, , isto é,

$$T_A(x, y, z) = (\, 2x - y + z \,,\, 3y - z \,,\, 2x + y + 3z \,)\,.$$

Assim, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 2$ com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2 = 4$ com multiplicidade algébrica igual a 1.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - 2I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, obtemos a solução $z = y = -x$. Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v_1 = (x, -x, -x)$, com $x \neq 0$. Desse modo, o autovalor $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. De modo análogo, obtemos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são do tipo $v_2 = (x, -x, x)$, com $x \neq 0$. Note que o autovalor λ_2 tem multiplicidade geométrica igual a 1.

Finalmente, os autovetores da matriz A são representados da seguinte forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, que possui multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1. Desse modo, temos que $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

$$X_2 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$, que possui multiplicidade algébrica igual a 1 e multiplicidade geométrica igual a 1. Desse modo, temos que $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, respectivamente.

Exemplo 6.3.2 *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ associado a matriz A, isto é, , isto é,

$$T_A(x, y, z) = (2x + y + z \,,\, 2x + 3y + 2z \,,\, 3x + 3y + 4z) .$$

Assim, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$$

Os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 7$ com multiplicidade algébrica igual a 1, e $\lambda_2 = 1$ com multiplicidade algébrica igual a 2.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 7$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - 7I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x \\ 7y \\ 7z \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ -3x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim, obtemos a solução $y = 2x$ e $z = 3x$. Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 7$ são do tipo $v_1 = t\,(1, 2, 3)$, com $t \neq 0$. Desse modo, o autovalor $\lambda_1 = 7$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. De maneira análoga, obtemos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são do tipo $v_2 = a\,(1, 0, -1) + b\,(0, 1, -1)$, com $a, b \neq 0$. Note que o autovalor λ_2 tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Finalmente, os autovetores da matriz A são representados da seguinte forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix}$$

para $x \in I\!R$ não–nulo, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 7$, que possui multiplicidade algébrica igual a 1 e multiplicidade geométrica igual a 1. Desse modo, temos que $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

$$X_2 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}$$

para $x\,, y \in I\!R$ não–nulos, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$, que possui multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 2. Desse modo, temos que $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

onde X_1 é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 7$, X_2 e X_3 são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

Exercícios

Exercício 6.42 *Considere a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica dos autovalores da matriz A.

Exercício 6.43 *Sejam* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *matrizes similares, isto é, existe uma matriz invertível* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $A = P^{-1} B P$. *Estabeleça a relação entre os autovalores e autovetores das matrizes* A *e* B.

Exercício 6.44 *Sejam* A *e* B *matrizes invertíveis de mesma ordem. Mostre que as matrizes* AB^{-1} *e* $B^{-1}A$ *possuem os mesmos autovalores.*

Exercício 6.45 *Sejam* A *e* B *matrizes invertíveis de mesma ordem. Pede–se:*

(a) *Mostre que as matrizes* AB *e* BA *possuem os mesmos autovalores.*

(b) *Mostre que se* λ *é um autovalor da matriz* AB *com* X *o autovetor associado, então* λ *é um autovalor da matriz* BA *com* BX *autovetor associado.*

(c) *Mostre que se* λ *é um autovalor da matriz* BA *com* Y *o autovetor associado, então* λ *é um autovalor da matriz* BA *com* AY *o autovetor associado.*

Exercício 6.46 *Seja* A *uma matriz de ordem* n. *Mostre que a transformação de similaridade preserva tanto a multiplicidade algébrica quanto a multiplicidade geométrica dos autovalores da matriz* A.

Exercício 6.47 *Sejam* A, B, C *matrizes quadradas de mesma ordem. Mostre que a transformação de similaridade é uma relação de equivalência, isto é,*

(a) A *é similar a* A.

(b) *Se* A *é similar a* B, *então* B *é similar a* A.

(c) *Se* A *é similar a* B *e* B *é similar a* C, *então* A *é similar a* C.

6.4 Matrizes Especiais

Com o objetivo de simplificar a notação e facilitar as demonstrações que apresentamos nesta seção, sempre que necessário, vamos considerar os elementos do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ representados na forma de matriz coluna, elementos do espaço vetorial real $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tendo em vista que os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ são isomorfos. Sabemos também que os espaços vetoriais complexos $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ são isomorfos.

Um conceito que utilizaremos com muita freqüência é o de transposta Hermitiana de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, que denotamos por A^*, que é definido da forma: $A^* = [\overline{a}_{ji}]$. Como ilustração, considere a matriz $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ e sua respectiva transposta Hermitiana $A^* \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+i \\ 4i & 1+2i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^* = \begin{bmatrix} 2+3i & -4i \\ 1-i & 1-2i \end{bmatrix}.$$

De mesmo modo, esse conceito é aplicado aos elementos de $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, resultando em um elemento de $\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{C})$.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a base canônica $\beta = \{ e_1, \cdots, e_n \}$. Sabemos que todo elemento $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é escrito de modo único da forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i ,$$

que vamos representar pela matriz coluna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) .$$

Assim, o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\langle \cdot , \cdot \rangle$, pode ser escrito como:

$$\langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = Y^t X$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

De modo análogo, considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ com a base canônica. Desse modo, podemos escrever o produto interno usual da seguinte forma:

$$\langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = Y^* X$$

para todos $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Teorema 6.4.1 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$. *Então, para todos* $x, y \in I\!R^n$ *temos que*

$$\langle Ax , y \rangle = \langle x , A^t y \rangle .$$

Demonstração – Para $x, y \in I\!R^n$, representados na forma de matriz coluna, tem–se

$$\langle Ax , y \rangle = y^t A x = (A^t y)^t x = \langle x , A^t y \rangle ,$$

o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.4.1 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *simétrica. Então, para todos* $x, y \in I\!R^n$ *tem–se*

$$\langle Ax , y \rangle = \langle x , Ay \rangle .$$

Demonstração – A prova é imediata utilizando o resultado do Teorema 6.4.1. □

Teorema 6.4.2 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$. *Então, para todos* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *temos que*

$$\langle Ax , y \rangle = \langle x , A^* y \rangle .$$

Demonstração – Para $x, y \in \mathbb{C}^n$, representados na forma de matriz coluna, tem–se

$$\langle Ax , y \rangle = y^* A x = (A^* y)^* x = \langle x , A^* y \rangle ,$$

o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.4.2 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *Hermitiana. Então, para todos* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *tem–se*

$$\langle Ax , y \rangle = \langle x , Ay \rangle .$$

Demonstração – A prova é imediata utilizando o resultado do Teorema 6.4.2. □

Os resultados do Teorema 6.4.1 e do Teorema 6.4.2, e os respectivos corolários, serão muito utilizados nas demonstrações que se seguem.

Teorema 6.4.3 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Então, seus autovalores são todos reais. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{C}^n$ associado a matriz A, isto é,

$$T_A(v) \;=\; Av$$

para todo $v \in \mathbb{C}^n$, representado na forma de matriz coluna.

Como a matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{C}^n$, temos que um autovalor de A é um autovalor do operador T_A.

Como, por hipótese, a matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é Hermitiana, sabemos que o operador T_A é Hermitiano.

Tomando λ um autovalor de T_A e v o autovetor associado, isto é, $T_A(v) = \lambda v$, obtemos

$$\lambda \langle v , v \rangle \;=\; \langle T_A(v) , v \rangle \;=\; \langle v , T_A(v) \rangle \;=\; \langle v , \lambda v \rangle \;=\; \overline{\lambda} \langle v , v \rangle \,.$$

Desse modo, obtemos a equação

$$(\lambda \,-\, \overline{\lambda}) \langle v , v \rangle \;=\; 0 \,.$$

Como v é não–nulo, temos que $\lambda - \overline{\lambda} = 0$. Portanto, o autovalor λ é real, completando a demonstração da primeira parte.

Para a prova da segunda parte, sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de T_A, com v_1 e v_2 os autovetores associados, respectivamente. Desse modo, temos que

$$\lambda_1 \langle v_1 , v_2 \rangle \;=\; \langle T_A(v_1) , v_2 \rangle \;=\; \langle v_1 , T_A(v_2) \rangle \;=\; \langle v_1 , \lambda_2 v_2 \rangle \;=\; \lambda_2 \langle v_1 , v_2 \rangle \,.$$

Desse modo, obtemos a equação

$$(\lambda_1 \,-\, \lambda_2) \langle v_1 , v_2 \rangle \;=\; 0 \,.$$

Portanto, tem–se

$$\langle v_1 , v_2 \rangle \;=\; 0 \,,$$

pois os autovalores λ_1 e λ_2 são distintos, o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.4.3 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz simétrica. Então, seus autovalores são todos reais. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.4.3, considerando que a matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana. □

Exemplo 6.4.1 *Considere a matriz simétrica* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores de A.

Seja T_A o operador linear sobre $I\!R^2$ associado a matriz A. Sabemos que $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $I\!R^2$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados na forma de matriz coluna.

O polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Portanto, os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - 3I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \iff -x + y = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ são do tipo $v_1 = (x, x)$, com $x \neq 0$. Desse modo, podemos escolher $v_1 = (1, 1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, do operador linear T_A.

Assim, podemos escolher

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

um autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, isto é, $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

De modo análogo, para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A + I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + y = 0 \,.$$

Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são do tipo $v_2 = (x, -x)$, para $x \in I\!R$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_2 = (1, -1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$, do operador linear T_A.

Assim, podemos escolher

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

um autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$, isto é, $AX_2 = \lambda_2 X_2$. Note que os autovetores X_1 e X_2 são ortogonais.

Definição 6.4.1 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz simétrica. Dizemos que* A *é uma matriz* ***positiva–definida*** *se*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j x_i = x^t A x = \langle \, Ax \, , \, x \, \rangle > 0$$

para todo $x \in I\!R^n$ *não–nulo, representado na forma de matriz coluna.*

No caso em que existe um elemento não–nulo $x \in I\!R^n$ tal que $x^t A x = 0$, dizemos que A é uma matriz **semipositiva–definida**.

Exemplo 6.4.2 *Considere a matriz simétrica* $A \in I\!M_2(I\!R)$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Mostre que a matriz A *é positiva–definida.*

Fazendo uso da Definição 6.4.1, temos que

$$\langle \, Ax \, , \, x \, \rangle = x^t A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$$

para todo $x = (x_1 \, , \, x_2) \in I\!R^2$ não–nulo, representado na forma de matriz coluna. Desse modo, mostramos que a matriz A é positiva–definida.

Definição 6.4.2 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Dizemos que* A *é uma matriz* ***positiva–definida*** *se*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \overline{x}_i = x^* A x = \langle Ax \, , \, x \rangle > 0$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$ *não–nulo, representado na forma de matriz coluna.*

No caso em que existe um elemento não–nulo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $x^* A x = 0$, dizemos que A é uma matriz **semipositiva–definida**.

Teorema 6.4.4 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *positiva–definida. Então, seus autovalores são todos positivos. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – Como A é uma matriz Hermitiana, do Teorema 6.4.3, sabemos que seus autovalores são reais. Tomando λ uma autovalor da matriz A com v o autovetor associado, isto é, $Av = \lambda v$, e utilizando a hipótese que U é uma matriz positiva–definida, temos que

$$\langle Av \, , \, v \rangle = \lambda \langle v \, , \, v \rangle > 0 \, .$$

Como $\langle v \, , \, v \rangle > 0$, pois v é não-nulo, provamos que o autovalor $\lambda > 0$.

Como A é uma matriz Hermitiana, do Teorema 6.4.3, sabemos que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.4.4 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *positiva–definida. Então, seus autovalores são todos positivos. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.4.4, e do fato que a matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana. □

Exemplo 6.4.3 *Considere a matriz positiva–definida* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Determine os autovalores e os autovetores de A*.*

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^2$ associado a matriz A. Sabemos que $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados na forma de matriz coluna.

O polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Portanto, os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - 3I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \iff -x + y = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ são do tipo $v_1 = (x, x)$, com $x \neq 0$. Desse modo, podemos escolher $v_1 = (1, 1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, do operador linear T_A.

De modo análogo, para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que encontrar os elementos não–nulos do núcleo do operador $(T_A - I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x + y = 0.$$

Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são do tipo $v_2 = (x, -x)$, para $x \in I\!R$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_2 = (1, -1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, do operador linear T_A.

Desse modo, temos que os autovetores da matriz A são dados por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, respectivamente. Note que os autovetores X_1 e X_2 são ortogonais.

Na seção 6.7 vamos provar o resultado abaixo, que é muito importante na teoria de autovalores e autovetores, e nas suas aplicações, que é a caracterização de uma matriz positiva–definida.

Teorema 6.4.5 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz Hermitiana. Então, A é uma matriz positiva–definida se, e somente se, seus autovalores são todos positivos.*

Corolário 6.4.5 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então, A é uma matriz positiva–definida se, e somente se, seus autovalores são todos positivos.*

Exemplo 6.4.4 *Fazendo uso do Corolário 6.4.5, podemos verificar que a matriz simétrica do Exemplo 6.4.1 não é positiva–definida, pois seus autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.*

Definição 6.4.3 *Dizemos que $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é uma **matriz unitária** se $U^*U = I$. Assim, temos que $UU^* = I$. Desse modo, tem–se que $U^{-1} = U^*$.*

Teorema 6.4.6 *Seja $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal. Então,* $\det(Q) = \pm 1$.

Demonstração – A prova segue da utilização da definição de matriz ortogonal e das propriedades de determinante de uma matriz. Como Q é ortogonal, tem–se que

$$\det(Q^tQ) = \det(I) = 1 .$$

Desse modo, obtemos

$$\det(Q^tQ) = \det(Q^t)\,\det(Q) = (\,\det(Q)\,)^2 = 1 .$$

Portanto, mostramos que $\det(Q) = \pm 1$. ■

Teorema 6.4.7 *Seja $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal. Então, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos que*

1. $\langle\, Q\,x \,,\, Q\,y \,\rangle = \langle\, x \,,\, y \,\rangle$.
2. $\|\, Q\,x \,\|_2 = \|\, x \,\|_2$.

Demonstração – A prova do primeiro item segue do Teorema 6.4.1 e da definição de matriz ortogonal. De fato,

$$\langle\, Q\,x \,,\, Q\,y \,\rangle = \langle\, x \,,\, Q^tQ\,y \,\rangle = \langle\, x \,,\, y \,\rangle .$$

A prova do segundo item segue de imediato do primeiro item a da definição de norma Euclidiana, o que completa a demonstração. ■

Teorema 6.4.8 *Sejam* $U \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *unitária e* λ *um autovalor. Então,* $|\lambda| = 1$.

Demonstração – Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja T o operador linear sobre $\mathbb{C}^n$ associado a matriz U, isto é, $T_U(v) = Uv$ para $v \in \mathbb{C}^n$, na forma de matriz coluna. Como $U = [T_U]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{C}^n$, temos que um autovalor de U é um autovalor do operador T_U. Como $A = [T_U]_\beta^\beta$ é unitária, temos que o operador T_U é unitário.

Assim, tomando λ um autovalor de T_U e v o autovetor associado, isto é, $T_U(v) = \lambda v$, obtemos

$$|\lambda| \langle v , v \rangle = \lambda\overline{\lambda} \langle v , v \rangle = \langle T_U(v) , T_U(v) \rangle = \langle Uv , Uv \rangle = \langle v , v \rangle .$$

Portanto, temos que $(1 - |\lambda|) \langle v , v \rangle = 0$. Como $v \in \mathbb{C}^n$ é não–nulo, obtemos $|\lambda| = 1$, o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.4.6 *Sejam* $Q \in I\!M_n(I\!R)$ *ortogonal e* λ *um autovalor. Então,* $|\lambda| = 1$.

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.4.8, considerando que a matriz ortogonal é um caso particular de uma matriz unitária. □

Exemplo 6.4.5 *A matriz* $Q \in I\!M_2(I\!R)$ *que representa uma rotação de um ângulo* θ *no sentido anti–horário*

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal. Determine os autovalores da matriz Q*, em função do ângulo* θ.

Podemos verificar facilmente que o polinômio característico da matriz Q é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\,\lambda + 1 .$$

Portanto, os autovalores da matriz Q, em função do ângulo θ, são dados por:

$$\lambda(\theta) = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - 1} = \cos(\theta) \pm \left(\sqrt{|\cos^2(\theta) - 1|} \right) i .$$

Note que $|\lambda(\theta)| = 1$, para todo $\theta \in I\!R$.

Definição 6.4.4 *As matrizes* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *são* ***ortogonalmente similares*** *se existe uma matriz ortogonal* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $B = Q^t A Q$.

Exemplo 6.4.6 *A matriz* $U \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *dada por:*

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

é uma matriz unitária.

Definição 6.4.5 *As matrizes* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *são* ***unitáriamente similares*** *se existe uma matriz unitária* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *tal que* $B = U^* A U$.

Teorema 6.4.9 *Seja* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *é uma matriz unitária. Então,* $|\det(U)| = 1$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 6.4.10 *Seja* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *uma matriz unitária. Então, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de U com v_1 e v_2 os autovetores associados, respectivamente. Tomando a hipótese que U é uma matriz unitária, temos que

$$\lambda_1 \overline{\lambda}_2 \langle v_1 \, , \, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1 \, , \, \lambda_2 v_2 \rangle = \langle U v_1 \, , \, U v_2 \rangle = \langle v_1 \, , \, v_2 \rangle \, .$$

Desse modo, obtemos a equação

$$(1 - \lambda_1 \overline{\lambda}_2) \langle v_1 \, , \, v_2 \rangle = 0 \, .$$

Como os autovalores λ_1 e λ_2 são distintos, temos que $1 - \lambda_1 \overline{\lambda}_2 \neq 0$.

Portanto, obtemos

$$\langle v_1 \, , \, v_2 \rangle = 0 \, ,$$

mostrando que v_1 e v_2 são ortogonais, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 6.4.7 *Considere a matriz unitária* $U \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *dada por:*

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores da matriz U.

O polinômio característico da matriz U é dado por: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Assim, os autovalores da matriz U são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\,.$$

Temos que os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são dados por:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Recordamos que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz **idempotente** se $A^2 = A$, isto é,

$$A(Ax) = Ax$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, representado na forma de matriz coluna.

Teorema 6.4.11 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz idempotente. Então, seus autovalores são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 0$.

Demonstração – Tomando λ um autovalor de A e v o autovetor associado, isto é, $Av = \lambda v$, temos que

$$A(Av) = A(\lambda v) \iff \lambda v = \lambda^2 v \iff \lambda(1 - \lambda)v = 0\,.$$

Como v é não–nulo, obtemos a equação

$$\lambda(1 - \lambda) = 0\,,$$

que tem como soluções $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, o que completa a demonstração. ■

Recordamos que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz **auto–reflexiva** se $A^2 = I$, isto é,

$$A(Ax) = x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, representado na forma de matriz coluna.

Teorema 6.4.12 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz auto–reflexiva. Então, seus autovalores são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -1$.

Demonstração – Tomando λ um autovalor de A e v o autovetor associado, isto é, $Av = \lambda v$, temos que

$$A(Av) = A(\lambda v) \iff v = \lambda^2 v \iff (1 - \lambda^2)v = 0\,.$$

Como v é não–nulo, obtemos a equação

$$1 - \lambda^2 = 0\,,$$

que tem como soluções $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 6.4.8 *Considere a matriz auto–reflexiva* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores da matriz A.

O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1\,,$$

que possui como raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, que são os autovalores da matriz A.

Exemplo 6.4.9 *Considere a matriz idempotente* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores da matriz A.

O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(1 - \lambda)\,,$$

que possui como raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, que são os autovalores da matriz A.

6.5 Aplicação. Classificação de Pontos Críticos

Exemplo 6.5.1 *Considere a função* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *com derivadas contínuas de segunda ordem, definida da seguinte forma:*

$$F(x,y) \;=\; 6\,x \;-\; 4\,y \;-\; x^2 \;-\; 2\,y^2 \qquad , \qquad (x,y) \;\in\; \mathbb{R}^2 \;.$$

Pede–se:

1. *Determinar os pontos críticos da função* F*.*

2. *Classificar os pontos críticos.*

3. *Fazer um esboço do gráfico da função* F*.*

Por simplicidade, dado um elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, vamos representa–lo na forma de vetor coluna

$$X \;=\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;.$$

Sabemos que os pontos críticos de F são os ponto $(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega$ que satisfazem a equação

$$\nabla F(x,y) \;=\; 0$$

Para fazer a classificação dos pontos críticos, vamos fazer uso da *Fórmula de Taylor de Segunda–Ordem* da função F numa vizinhança do ponto crítico $\overline{X}$ dada por:

$$\begin{aligned} F(X) \;&=\; F(\overline{X}) \;+\; Y^t\,\nabla F(\overline{X}) \;+\; \frac{1}{2}\,Y^t\,H(\overline{X})\,Y \\ &=\; F(\overline{X}) \;+\; \langle\, \nabla F(\overline{X})\,,\,Y\,\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,\langle\, H(\overline{X})\,Y\,,\,Y\,\rangle \\ &=\; F(\overline{X}) \;+\; \frac{1}{2}\,\langle\, H(\overline{X})\,Y\,,\,Y\,\rangle \end{aligned}$$

para todo $X \in B_r(\overline{X})$, onde $Y = X - \overline{X}$, $\nabla F(X)$ é o gradiente da função F e $H(X)$ é a matriz **Hessiana** da função F.

Portanto, se a matriz Hessiana $H(\overline{x},\overline{y})$ for positiva–definida, isto é, seus autovalores são positivos, temos que o ponto crítico $(\overline{x},\overline{y})$ é um ponto de mínimo relativo. No caso em que a matriz $H(\overline{x},\overline{y})$ for negativa–definida, isto é, seus autovalores são negativos, temos que o ponto crítico $(\overline{x},\overline{y})$ é um ponto de máximo relativo. No caso em que a matriz Hessiana $H(\overline{x},\overline{y})$ possuir autovalores negativo e positivo, isto é, $H(\overline{x},\overline{y})$ é uma **matriz indefinida**, temos que o ponto crítico $(\overline{x},\overline{y})$ é um ponto de sela.

Voltando ao exemplo, temos que

$$\nabla F(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 6 \;-\; 2\,x \\ \\ -4 \;-\; 4\,y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temos um ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) \;=\; (3,-1)$. Vamos calcular a matriz Hessiana $H(x,y)$

$$H(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

que não depende do ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y})$, e possui os autovalores $\lambda_1 \;=\; -2$ e $\lambda_2 \;=\; -4$. Logo, o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) \;=\; (3,-1)$ é um ponto de **máximo global** da função F.

Exemplo 6.5.2 *Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com derivadas contínuas de segunda ordem, definida da seguinte forma:*

$$F(x,y) \;=\; y^2 \;-\; x^2 \qquad , \qquad (x,y) \;\in\; \mathbb{R}^2 \;.$$

Pede–se:

1. *Determinar os pontos críticos da função F.*

2. *Classificar os pontos críticos.*

3. *Fazer um esboço do gráfico da função F.*

Neste caso, temos que

$$\nabla F(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -2\,x \\ \\ 2\,y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temos um ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) \;=\; (0,0)$. Vamos calcular a matriz Hessiana $H(x,y)$

$$H(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que não depende do ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y})$, e possui os autovalores $\lambda_1 \;=\; -2$ e $\lambda_2 \;=\; 2$.

Temos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 \;=\; 2$ são do tipo $v_2 \;=\; (0,y)$ com $y \;\neq\; 0$. Assim, tem–se que

$$\langle\, H(\overline{x}, \overline{y})\, v_2 \,,\, v_2 \,\rangle \;=\; \lambda_2 \, \|\, v_2 \,\|_2^2 \;>\; 0 \qquad \text{para todo} \qquad v_2 \;\neq\; 0 \;.$$

Temos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$ são do tipo $v_1 = (x, 0)$ com $x \neq 0$. Assim, tem–se que

$$\langle H(\overline{x}, \overline{y})\, v_1 \,,\, v_1 \rangle \;=\; \lambda_1 \| v_1 \|_2^2 \;<\; 0 \qquad \text{para todo} \qquad v_1 \neq 0\,.$$

Logo, o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$ é um ponto de **sela** da função F.

Exemplo 6.5.3 *Considere a função* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, com derivadas contínuas de segunda ordem, definida da seguinte forma:*

$$F(x, y) \;=\; 2\,x^4 \;+\; y^2 \;-\; x^2 \;-\; 2\,y \qquad , \qquad (x, y) \,\in\, \mathbb{R}^2\,.$$

Pede–se:

1. *Determinar os pontos críticos da função* F*.*
2. *Classificar os pontos críticos.*
3. *Fazer um esboço do gráfico da função* F*.*

Neste caso, temos que

$$\nabla F(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} 8\,x^3 \;-\; 2\,x \\[2mm] 2\,y \;-\; 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\[2mm] 0 \end{pmatrix}$$

Temos os seguintes pontos críticos $(0, 1)$, $(0.5, 1)$ e $(-0.5, 1)$. Vamos calcular a matriz Hessiana $H(\overline{x}, \overline{y})$ para o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 1)$

$$H(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} -2 \;+\; 24\,x^2 & 0 \\[2mm] 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H(\overline{x}, \overline{y}) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\[2mm] 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que possui os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Logo, o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 1)$ é um ponto de **sela** da função F.

Agora, vamos calcular a matriz Hessiana $H(\overline{x}, \overline{y})$ para o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (0.5, 1)$

$$H(\overline{x}, \overline{y}) \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\[2mm] 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que possui os autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. Logo, o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (0.5, 1)$ é um ponto de **mínimo relativo** da função F. De modo análogo, temos que o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}) = (-0.5, 1)$, também é um ponto de **mínimo relativo** da função F.

Exercícios

Exercício 6.48 *Determine quais das seguintes classes de matrizes são matrizes normais:*

(a) Matrizes Hermitianas.

(b) Matrizes anti–simétricas.

(c) Matrizes anti–Hermitianas.

(d) Matrizes unitárias.

(e) Matrizes simétricas.

(f) Matrizes ortogonais.

Exercício 6.49 *Mostre que toda matriz ortogonal em* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *pode ser escrita na forma:*

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad ou \qquad Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

com $a^2 + b^2 = 1$ *para* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercício 6.50 *Mostre que toda matriz unitária no espaço vetorial complexo* $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *pode ser escrita da seguinte forma:*

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\,\overline{b} & e^{i\theta}\,\overline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ *e* $|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 = 1$ *para* $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercício 6.51 *Sejam* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *ortogonal e* λ *um autovalor real. Então,* $\lambda = 1$ *ou* $\lambda = -1$.

Exercício 6.52 *Sejam* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz ortogonal e* λ *um autovalor complexo de* Q*. Então,* $\overline{\lambda}$ *é também um autovalor de* Q.

Exercício 6.53 *Seja* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz ortogonal com* n *ímpar. Então,* Q *possui pelo menos um autovalor real.*

Exercício 6.54 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *idempotente. Se* $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é similar a matriz* A*, então* B *é uma matriz idempotente.*

Exercício 6.55 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *auto–reflexiva. Se* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *é similar a matriz* A*, então* B *é uma matriz auto–reflexiva.*

Exercício 6.56 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *simétrica. Se* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *é ortogonalmente similar a matriz* A*, então* B *é simétrica.*

Exercício 6.57 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *Hermitiana. Se* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *é unitáriamente similar a matriz* A*, então* B *é Hermitiana.*

Exercício 6.58 *Sejam* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *anti–Hermitiana e* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *unitáriamente similar a matriz* A*. Então,* B *é anti–Hermitiana.*

Exercício 6.59 *Sejam* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *positiva–definida e* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *ortogonalmente similar a* A*. Então,* B *é positiva–definida.*

Exercício 6.60 *Mostre que se* A *é positiva–definida, então* A *é uma matriz invertível e* A^{-1} *também é uma matriz positiva–definida.*

Exercício 6.61 *Mostre que se* A *é semipositiva–definida, então* A *é uma matriz singular e* $\lambda = 0$ *é um autovalor de* A*.*

Exercício 6.62 *Classifique os pontos críticos da função* $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ *dada por:*

$$F(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y\,.$$

Exercício 6.63 *Determine todos os valores extremos, absoluto e relativo, e os pontos de sela da função* $F(x,y) = xy(\,1 - x^2 - y^2\,)$ *no quadrado definido por:*

$$Q = \{\,(x,y) \in I\!R^2 \;/\; 0 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq 1\,\}\,.$$

Exercício 6.64 *Classifique os pontos críticos da função* $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ *dada por:*

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\,.$$

6.6 Diagonalização de Operadores Lineares

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Nosso objetivo é determinar sob que condições V possui uma base ordenada com relação a qual a matriz do operador T seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples de se representar um operador linear. A solução para o problema de diagonalização de operadores lineares também nos leva naturalmente ao conceito de autovalores e autovetores do operador T.

Teorema 6.6.1 *Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, γ uma base ordenada para o espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ e T_A o operador linear sobre $\mathbb{F}^n$ associado a matriz A. Então,*

$$[T_A]_\gamma^\gamma \;=\; P^{-1}\,A\,P\,,$$

onde P é a matriz de mudança da base γ para a base canônica β de $\mathbb{F}^n$.

Demonstração – Como β é a base canônica para $\mathbb{F}^n$, temos que $A = [T_A]_\beta^\beta$.

Como $P = [I]_\beta^\gamma$, pelo Teorema 6.2.2, temos que

$$[T_A]_\gamma^\gamma \;=\; (\,[I]_\beta^\gamma\,)^{-1}\,[T_A]_\beta^\beta\,[I]_\beta^\gamma \;=\; P^{-1}\,A\,P\,,$$

o que completa a demonstração. ■

Exemplo 6.6.1 *Sejam $\gamma = \{\,(1,2),\,(1,1)\,\}$ uma base ordenada para $\mathbb{R}^2$ e a matriz $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por:*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

para uma ilustração do Teorema 6.6.1.

Assim, temos que

$$P \;=\; [I]_\beta^\gamma \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, obtemos

$$[T_A]_\gamma^\gamma \;=\; P^{-1}\,A\,P \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}\,,$$

o que completa a ilustração do Teorema 6.6.1.

Teorema 6.6.2 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$, β *uma base ordenada para* V, T *um operador linear sobre* V *e* B *uma matriz similar a matriz* $[T]_\beta^\beta$. *Então, existe uma base ordenada* γ *para* V *tal que* $B = [T]_\gamma^\gamma$.

Demonstração – Considerando que a matriz B é similar a matriz $[T]_\beta^\beta$. Então, existe uma matriz $P = [p_{ij}]$ invertível tal que $B = P^{-1}\,[T]_\beta^\beta\,P$.

Seja $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$, e definimos

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\,v_i \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots, n\,.$$

Então, $\gamma = \{ w_1, \cdots, w_n \}$ é uma base ordenada para V tal que P é a matriz de mudança da base γ para a base β, isto é, $P = [I]_\beta^\gamma$ (Exercício 3.71).

Portanto, temos que

$$[T]_\gamma^\gamma = P^{-1}\,[T]_\beta^\beta\,P = [I]_\gamma^\beta\,[T]_\beta^\beta\,[I]_\beta^\gamma$$

de acordo com o Teorema 6.2.2, o que completa a demonstração. ■

O conceito de matrizes similares é muito importante para o estudo de diagonalização de operadores lineares, tendo em vista que este problema pode ser reformulado no contexto de matrizes.

Definição 6.6.1 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador linear sobre* V. *Dizemos que* T *é um operador* ***diagonalizável*** *se existe uma base ordenada* β *para* V *tal que* $[T]_\beta^\beta$ *é uma matriz diagonal.*

Definição 6.6.2 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. *Dizemos que* A *é uma matriz* ***diagonalizável*** *se* A *é similar a uma matriz diagonal.*

Exemplo 6.6.2 *Considere a matriz simétrica* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Exemplo 6.4.1, sabemos que seus autovalores são $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -1$ *com os autovetores associados*

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Tomamos a matriz P e a matriz diagonal D dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Note que a matriz P foi construída a partir dos autovetores da matriz A e a matriz diagonal D foi construída com os autovalores da matriz A.

Assim, temos que a matriz A é similar a matriz diagonal D, onde P é a matriz que realiza a transformação de similaridade, isto é, $A = PDP^{-1}$ ou $D = P^{-1}AP$.

De fato, podemos verificar facilmente que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) .$$

Portanto, a matriz A é diagonalizável.

Teorema 6.6.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, β uma base ordenada para V e T um operador linear sobre V. Então, T é um operador* ***diagonalizável*** *se, e somente se, $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonalizável.*

Demonstração – Considerando que T é um operador diagonalizável. Então, existe uma base ordenada γ para V tal que $[T]_\gamma^\gamma$ é uma matriz diagonal. Portanto, pelo Teorema 6.2.2, temos que a matriz $[T]_\beta^\beta$ é similar a matriz $[T]_\gamma^\gamma$. Logo, $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonalizável.

Considerando agora que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonalizável. Então, a matriz $[T]_\beta^\beta$ é similar a uma matriz diagonal B. Pelo Teorema 6.6.2, existe uma base ordenada γ para V tal que $B = [T]_\gamma^\gamma$. Logo, T é um operador diagonalizável. ■

Corolário 6.6.1 *Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ e T_A o operador linear sobre $\mathbb{F}^n$ associado a matriz A. Então, A é uma matriz diagonalizável se, e somente se, T_A é um operador diagonalizável.*

Definição 6.6.3 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Dizemos que A é uma* ***matriz simples*** *se possui um conjunto de n autovetores linearmente independentes.*

Teorema 6.6.4 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Então, A é uma matriz simples se, e somente se, A é uma matriz diagonalizável.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 6.6.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*. O operador linear* T *sobre o* $\mathbb{R}^3$ *definido por:* $T(x,y,z) = (3x - 4z,\, 3y + 5z,\, -z)$ *é um operador diagonalizável.*

Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(3 - \lambda)^2 (1 + \lambda).$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$, com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2 = -1$, com multiplicidade algébrica igual a 1.

Podemos verificar facilmente que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são do tipo $v = (x,y,0)$ para $x,\, y \in \mathbb{R}$ não–nulos. Assim, podemos escolher os autovetores $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,1,0)$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Logo, o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são do tipo $v = (-4y, 5y, -4y)$ para $y \in \mathbb{R}$ não–nulo. Assim, podemos escolher o autovetor $v_3 = (-4, 5, -4)$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Portanto, temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é diagonalizável. Podemos verificar que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Assim, mostramos que T é um operador diagonalizável.

De modo análogo, sabemos que T é um operador diagonalizável, pois $\gamma = \{ v_1,\, v_2,\, v_3 \}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$ de modo que $[T]_\gamma^\gamma$ é uma matriz diagonal. De fato, podemos verificar facilmente que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 6.6.5 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* T *um operador linear sobre* V *que possui autovalores distintos* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ *com* $v_1, \cdots, v_k$ *os autovetores associados, respectivamente. Então,* $\{ v_1, \cdots, v_k \}$ *é linearmente independente em* V.

Demonstração – A prova é feita por indução matemática sobre k. Para $k = 1$ o resultado é obtido trivialmente. De fato, como $v_1 \neq 0_V$, pois v_1 é um autovetor, temos que $\{ v_1 \}$ é linearmente independente.

Agora supomos que o resultado seja válido para $k - 1$ autovalores distintos, onde $k - 1 \geq 1$. Finalmente, vamos mostrar que o resultado é válido para k autovalores distintos. Para isso, consideramos a combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, v_i = 0_V .$$

Aplicando o operador T na equação acima e usando o fato $T(v_i) = \lambda\, v_i$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, \lambda_i\, v_i = 0_V .$$

Subtraindo da segunda equação o resultado da multiplicando a primeira equação por λ_k, tem–se a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i\, (\lambda_i - \lambda_k)\, v_i = 0_V .$$

Pela hipótese de indução, temos que $v_1, \cdots, v_{k-1}$ são linearmente independentes, o que devemos ter $c_i\,(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ para $i = 1, \cdots, k-1$. Como os autovalores são distintos, isto é, $\lambda_i \neq \lambda_k$ para $i \neq k$, temos que $c_i = 0$ para $i = 1, \cdots, k-1$. Assim da primeira equação, temos também que $c_k = 0$, provando que os autovetores $v_1, \cdots, v_k$ são linearmente independentes em V. ∎

Corolário 6.6.2 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$*, digamos que* $dim(V) = n$*, e* T *um operador linear sobre* V *que possui* n *autovalores distintos. Então,* T *é um operador diagonalizável.*

Demonstração – Considerando que T possui n autovalores distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Sejam $v_1, \cdots, v_n$ os respectivos autovetores associados. Pelo Teorema 6.6.5, temos que $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é linearmente independente em V. Como $dim(V) = n$, temos que o conjunto β de autovetores é uma base para V. Como $T(v_i) = \lambda_i\, v_i$, temos que a matriz do operador T com relação à base ordenada de autovetores é a matriz diagonal $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, o que completa a demonstração. ∎

Note que o operador linear T pode possuir n autovetores linearmente independentes que não estão associados a autovalores distintos, isto é, algum autovalor pode possuir multiplicidade algébrica r maior do que 1, mas possui uma multiplicidade geométrica igual a r, como já vimos em exemplos anteriores. Desse modo, podemos introduzir o conceito de diagonalização para operadores lineares.

Teorema 6.6.6 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Então, T é um operador* ***diagonalizável*** *se, e somente se, existe uma base ordenada β para V cujos elementos são autovetores de T.*

Demonstração – Inicialmente, supomos que T seja diagonalizável. Então, existe uma base ordenada $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ para V tal que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, onde os escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ não necessariamente são distintos dois a dois. Assim, temos que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \, v_i = \lambda_j \, v_j \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots, n \, .$$

Portanto, mostramos que cada elemento v_j da base ordenada β é um autovetor do operador T associado ao autovalor λ_j, isto é,

$$T(v_j) = \lambda_j \, v_j \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots, n \, .$$

Desse modo, temos que $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é uma base de autovetores para V.

Finalmente, considerando que $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ seja uma base ordenada para V formada de autovetores do operador T, isto é,

$$T(v_i) = \lambda_i \, v_i \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots n \, ,$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os respectivos autovalores do operador T.

Podemos verificar facilmente que a matriz $[T]_\beta^\beta$ é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} ,$$

o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 6.6.4 *Considere o operador linear T sobre $I\!R^2$ definido por:*

$$T(x,y) = (x+3y\,,\,4x+2y)\,.$$

Mostre que T é um operador diagonalizável.

Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$, com relação à base canônica β do $I\!R^2$, é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(\,A - \lambda I\,) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10\,.$$

Desse modo, temos que $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores de T. Podemos verificar facilmente que $v_1 = (3,4)$ e $v_2 = (1,-1)$ são os autovetores associados, respectivamente. Evidentemente, $\gamma = \{\,v_1,\ v_2\,\}$ é uma base de autovetores para $I\!R^2$. Logo, temos que T é um operador diagonalizável.

Exemplo 6.6.5 *Considere o operador linear T sobre $I\!R^3$ definido por:*

$$T(x,y,z) = (2y,\,2x,\ 2z)\,.$$

Mostre que T é um operador diagonalizável.

Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$, com relação à base canônica β do $I\!R^3$, é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(\,A - \lambda I\,) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) = -(2-\lambda)^2(\lambda + 2)\,.$$

Desse modo, temos que $\lambda_1 = 2$ é um autovalor com multiplicidade algébrica igual 2 e $\lambda_2 = -2$ é um autovalor com multiplicidade algébrica igual a 1.

Podemos verificar facilmente que os autovalores associados ao autovalor λ_1 são do tipo $v = (x,x,z)$ para $x,\,z \in I\!R$ não–nulos. Assim, podemos escolher $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$ os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, que tem multiplicidade geométrica igual a 2. Para o autovalor $\lambda_2 = -2$ temos que os autovetores associados são do tipo $v = (0,0,z)$ para $z \in I\!R$ não–nulo. Assim, podemos escolher $v_3 = (1,-1,0)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$, que tem multiplicidade geométrica igual a 1. Evidentemente, $\gamma = \{\,v_1\,,\,v_2\,,\,v_3\,\}$ é uma base de autovetores para $I\!R^3$. Logo, temos que T é um operador diagonalizável.

Exemplo 6.6.6 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *e* T *o operador linear dado por*

$$\begin{array}{rccl} T: & I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (-3x+4y,\ -x+2y) \end{array}$$

Mostre que T *é um operador linear diagonalizável.*

Seja β a base canônica do $I\!R^2$. Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Assim, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores do operador T. Como os autovalores são distintos, podemos garantir que existe uma base de autovetores γ para $I\!R^2$ de modo que a matriz $[T]_\gamma^\gamma = \Lambda = diag(\lambda_1,\ \lambda_2)$.

Os autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (4,1)$, respectivamente. Assim, temos que $\gamma = \{ v_1,\ v_2 \}$ é uma base de autovetores para $I\!R^2$. Sabemos que

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são os autovetores da matriz A associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, respectivamente. Podemos observar facilmente que $AP = P\Lambda$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ pode ser representada da seguinte forma:

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{ou} \quad \Lambda = P^{-1}AP,$$

com a matriz P realizando a diagonalização da matriz $A = [T]_\beta^\beta$.

Exemplo 6.6.7 *Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(I\!R)$ definido por:*

$$T(p(x)) = (1 + x)p'(x) + p''(x) .$$

Determine uma base ordenada γ para $\mathcal{P}_2(I\!R)$ tal que $[T]_\gamma^\gamma$ seja uma matriz diagonal.

Temos que $A = [T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(I\!R)$, é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda) .$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Como o operador T possui três autovalores distintos, pelo Corolário 6.6.2, sabemos que T é um operador linear diagonalizável e que a base ordenada $\gamma = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$, formada pelos autovetores de T, é tal que $[T]_\gamma^\gamma = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Podemos verificar facilmente que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$, respectivamente. Portanto, sabemos que

$$[p_1(x)]_\beta = X_1 \quad , \quad [p_2(x)]_\beta = X_2 \quad \text{e} \quad [p_3(x)]_\beta = X_3 ,$$

onde $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os autovetores do operador linear T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$, respectivamente. Logo, obtemos

$$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad p_3(x) = 2 + 2x + x^2 .$$

É importante observar que $A = P \Lambda P^{-1}$ ou $\Lambda = P^{-1} A P$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 6.6.8 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *e* T *o operador linear dado por*

$$\begin{array}{rccl} T: & I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (2x+2y,\, 2x+5y) \end{array}$$

Mostre que T *é um operador linear diagonalizável.*

Seja β a base canônica do $I\!R^2$. Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Assim, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$ são os autovalores do operador T. Como os autovalores são distintos, podemos garantir que existe uma base de autovetores γ para $I\!R^2$ de modo que a matriz $[T]_\gamma^\gamma = \Lambda = diag(\lambda_1,\, \lambda_2)$.

Os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são $v_1 = (-2,1)$ e $v_2 = (1,2)$, respectivamente. Assim, temos que $\gamma = \{ v_1,\, v_2 \}$ é uma base ortogonal de autovetores para o espaço vetorial $I\!R^2$. Podemos obter também uma base ortonormal de autovetores $\gamma^* = \{ q_1, q_2 \}$ para $I\!R^2$, obtida a partir da base ortogonal γ. Sabemos que

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

são os autovetores da matriz A associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, respectivamente. Podemos observar facilmente que $A\,Q = Q\,\Lambda$, onde

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ pode ser representada da seguinte forma:

$$A = Q\,\Lambda\,Q^t \quad \text{ou} \quad \Lambda = Q^t\,A\,Q\,.$$

Note que a matriz Q é uma matriz ortogonal, isto é, $Q\,Q^t = Q^t\,Q = I$, e realiza a diagonalização da matriz $A = [T]_\beta^\beta$.

Exemplo 6.6.9 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *e* T *o operador linear dado por*

$$\begin{aligned} T: \quad I\!R^3 &\longrightarrow I\!R^3 \\ (x,y,z) &\longrightarrow T(x,y,z) = (y+z,\, x+z,\, x+y) \end{aligned}$$

Mostre que T *é um operador linear diagonalizável.*

Seja β a base canônica do $I\!R^3$. Temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2 (\lambda - 2).$$

Os autovalores do operador T são $\lambda_1 = 2$, com multiplicidade algébrica igual a 1, e $\lambda_2 = -1$, com multiplicidade algébrica igual a 2.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

que tem como solução $z = y = x$. Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v_1 = (x,x,x)$, com $x \neq 0$. Desse modo, podemos escolher $v_1 = (1,1,1)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Assim, temos que o autovalor λ_1 tem multiplicidade geométrica igual a 1.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff x + y + z = 0$$

que tem como solução $z = -y - x$.

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são do tipo $v = (x, y, -x-y)$, com $x, y \neq 0$. Desse modo, podemos escolher $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$. Assim, temos que o autovalor λ_2 tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Desse modo, temos que $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ é uma base de autovetores para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ que realiza a diagonalização do operador T, isto é, a representação matricial $[T]_\gamma^\gamma = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

A partir da base de autovetores γ podemos obter uma base de autovetores ortonormais $\gamma^* = \{ q_1 , q_2 , q_3 \}$ dada por:

$$q_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1) \quad , \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1) \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(2,-1,-1) \, .$$

Assim, temos que

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

são os autovetores da matriz A associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$, respectivamente. Podemos observar facilmente que $A\,Q = Q\,\Lambda$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ pode ser representada da seguinte forma:

$$A = Q\,\Lambda\,Q^t \quad \text{ou} \quad \Lambda = Q^t\,A\,Q \, .$$

Note que a matriz Q é uma matriz ortogonal, isto é, $Q\,Q^t = Q^t\,Q = I$, e realiza a diagonalização da matriz $A = [T]_\beta^\beta$.

Exemplo 6.6.10 *Seja* A *uma matriz de ordem* n *diagonalizável, isto é, existe uma matriz* P *invertível tal que* $\Lambda = P^{-1} A P$ *ou* $A = P \Lambda P^{-1}$*, onde* Λ *é uma matriz diagonal dada por:*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *os autovalores da matriz* A*, não necessariamente distintos dois a dois.*

Podemos verificar facilmente que $A^m = P \Lambda^m P^{-1}$*, onde* Λ^m *é dada por:*

$$\Lambda^m = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^m \end{bmatrix},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$*. Desse modo, quando* A *é uma matriz diagonalizável, podemos calcular com uma certa eficiência qualquer potência de* A*.*

Exemplo 6.6.11 *Seja* A *uma matriz de ordem* n*. Sabemos que a série*

$$I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

converge para a matriz $\exp(A)$*, isto é,*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Considerando que A *é uma matriz diagonalizável, temos que*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P \Lambda^k P^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right) P^{-1} = P \exp(\Lambda) P^{-1},$$

onde P *é a matriz que realiza a diagonalização de* A *e a matriz* $\exp(\Lambda)$ *é dada por:*

$$\exp(\Lambda) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Desse modo, quando A *é uma matriz diagonalizável, podemos calcular com uma certa eficiência a matriz* $\exp(A)$*.*

Exemplo 6.6.12 *Como uma aplicação direta do Exemplo 6.6.11, vamos considerar o seguinte Problema de Valor Inicial representado pelo sistema dinâmico*

$$\begin{cases} X'(t) &= A\,X(t) \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

onde A *é uma matriz de ordem* n*, e os vetores coluna de ordem* $n \times 1$*,* $X(t)$ *e* X_0 *são dados por:*

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad e \qquad X_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_i(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} .$$

Estamos considerando que cada componente da função vetorial $X(t)$*, isto é,* $x_i(t)$*, é uma função continuamente diferenciável para todo* $t \geq 0$*. O vetor coluna* X_0 *é a condição inicial do sistema dinâmico. Os vetores* $X(t)$ *e* X_0 *são geralmente denominados vetor de estado e vetor de estado inicial, respectivamente.*

Vamos apresentar o desenvolvimento para obtenção da solução do sistema dinâmico acima, considerando que a matriz A seja diagonalizável. Desse modo, sabemos que existe uma matriz invertível P de ordem n tal que $A = P\,\Lambda\,P^{-1}$, onde $\Lambda = diag(\lambda_1\,, \cdots\,, \lambda_n)$.

Assim, substituindo $A = P\,\Lambda\,P^{-1}$ no sistema dinâmico e fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}\,X(t)$ e $Y(0) = P^{-1}\,X(0)$, obtemos o sistema dinâmico equivalente

$$\begin{cases} Y'(t) &= \Lambda\,Y(t) \\ Y(0) &= Y_0 \end{cases}$$

Note que como Λ é uma matriz diagonal, ficamos com n Problemas de Valor Inicial de primeira ordem sem acoplamentos, isto é,

$$\begin{cases} y_i'(t) &= \lambda_i\,y_i(t) \\ y_i(0) &= c_i \end{cases}$$

onde c_i é a condição inicial de cada um dos problemas, para $i = 1, \cdots, n$.

Sabemos que a solução de cada um dos Problemas de Valor Inicial, sem acoplamentos, é

$$y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t) \qquad \text{e} \qquad i = 1, \cdots, n \, .$$

Podemos verificar facilmente que as n soluções podem ser escritas da seguinte forma:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_i(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix} = \exp(\Lambda t) Y(0) \, .$$

Utilizando novamente a mudança de variável, obtemos a solução do sistema dinâmico original que é dada por:

$$X(t) = P \exp(\Lambda t) P^{-1} X(0) \qquad \text{para todo} \qquad t \geq 0 \, .$$

Assim, pelo Exemplo 6.6.11, temos que $X(t) = \exp(At)\, X_0$ para todo $t \geq 0$.

Para exemplificar, vamos considerar o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} .$$

Neste caso, a matriz do sistema dinâmico é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Vamos determinar os autovalores e os autovetores da matriz A. O polinômio característico da matriz A é dada por:

$$p(\lambda) = \det(\, A - \lambda I \,) = -\lambda(\lambda + 3)^2$$

Assim, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -3$.

Podemos verificar facilmente que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = -3$, respectivamente. Podemos observar facilmente que os autovetores X_1, X_2 e X_3 são linearmente independentes. Logo, a matriz A é diagonalizável.

Portanto, a matriz P que realiza a diagonalização da matriz A, sua respectiva inversa e a matriz diagonal Λ são dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sabemos que a solução do sistema dinâmico é dada por:

$$X(t) = P\exp(\Lambda t)P^{-1}X(0) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0\,.$$

Portanto, obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + e^{-3t} - 3e^{-3t} \\ 3 - 3e^{-3t} \\ 3 + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0\,.$$

Na Figura 6.1 temos os gráficos das soluções do sistema dinâmico do Exemplo 6.6.12. A curva azul representa o gráfico da solução $x(t)$, a curva verde representa o gráfico da solução $y(t)$ e a curva vermelha representa o gráfico da solução $z(t)$, para $0 \leq t \leq 2$.

Exemplo 6.6.13 *Determine a solução do seguinte sistema dinâmico*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - 4y(t) \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a matriz do sistema dinâmico é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores e os autovetores da matriz A. O polinômio característico da matriz A é dada por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Assim, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Portando, a matriz A é diagonalizável.

Podemos verificar facilmente que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$, respectivamente.

Portanto, a matriz P que realiza a diagonalização da matriz A, sua respectiva inversa e a matriz diagonal Λ são dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sabemos que a solução do sistema dinâmico é dada por:

$$X(t) = P \exp(\Lambda t) P^{-1} X(0) \qquad \text{para todo} \qquad t \geq 0 .$$

Portanto, obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad \text{para todo} \qquad t \geq 0 .$$

Na Figura 6.2 temos os gráficos das soluções do sistema dinâmico do Exemplo 6.6.13. A curva azul representa o gráfico da solução $x(t)$ e a curva verde representa o gráfico da solução $y(t)$, para $0 \leq t \leq 6$.

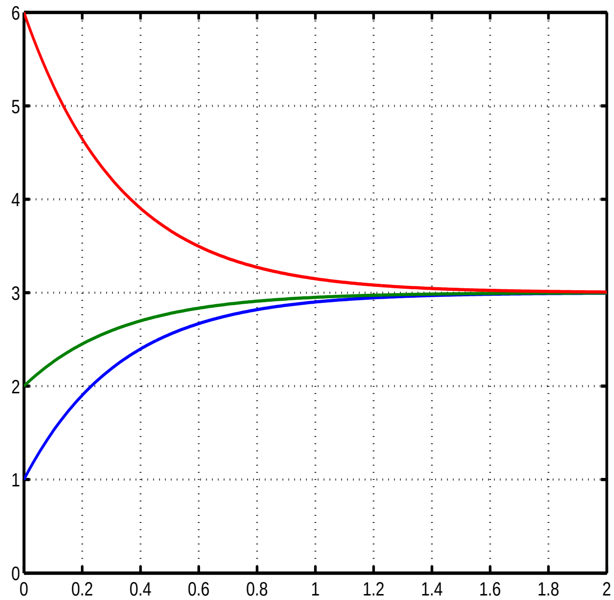

Figura 6.1: Gráficos dos soluções do sistema dinâmico do Exemplo 6.6.12. A curva azul representa o gráfico da solução $x(t)$, a curva verde representa o gráfico da solução $y(t)$ e a curva vermelha representa o gráfico da solução $z(t)$, para $0 \leq t \leq 2$.

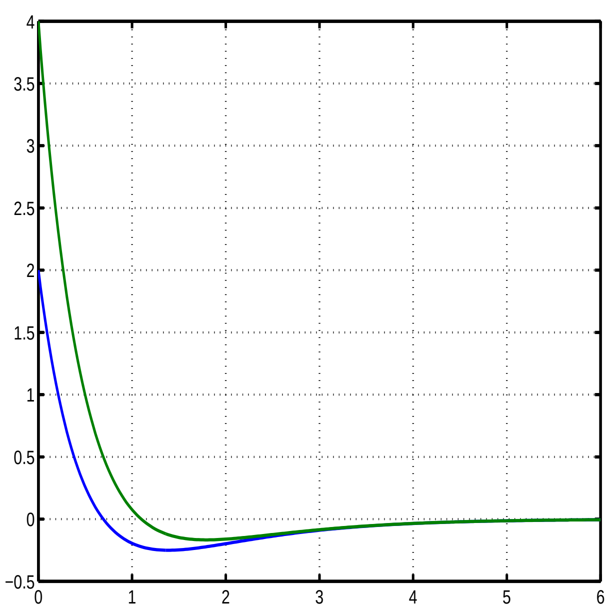

Figura 6.2: Gráficos das soluções do sistema dinâmico do Exemplo 6.6.13. A curva azul representa o gráfico da solução $x(t)$, a curva verde representa o gráfico da solução $y(t)$, para $0 \leq t \leq 6$.

Exercícios

Exercício 6.65 *Seja* T *o operador linear sobre* $\mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$T(x,y,z) = (-3x - 4y,\, 2x + 3y,\, -z)\,.$$

Encontre os autovalores e os autovetores do operador linear T. *O operador linear* T *é diagonalizável ? Justifique sua resposta.*

Exercício 6.66 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.67 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$. *Verifique se* T *é um operador linear diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.68 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(p(x)) = p(x) + (x+1)p'(x)$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.69 *Seja* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *o operador linear dado por:*

$$T(a + bx + cx^2) = (2b + c) + (2b - c)x + 2cx^2\,.$$

Verifique se T *é um operador diagonalizável. Justifique sua resposta.*

Exercício 6.70 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(A) = A^t$. *Determine uma base ordenada para* $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *tal que* $[T]_\beta^\beta$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.71 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$, *digamos que* $dim(V) = n$, T *um operador linear sobre* V *que possui somente dois autovalores distintos* λ_1 *e* λ_2 *com* $dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$. *Prove que* T *é um operador diagonalizável.*

Exercício 6.72 *Dê um exemplo de um operador linear diagonalizável* T *sobre* $\mathbb{R}^3$ *cujo núcleo é gerado pelo elemento* $u = (1,0,1)$.

Exercício 6.73 *Dê um exemplo de um operador linear diagonalizável* T *sobre* $\mathbb{R}^3$ *cujo imagem é gerada pelos elementos* $u_1 = (1,1,0)$ *e* $u_2 = (1,0,1)$.

Exercício 6.74 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^2$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathbb{C}^2$ *definido por:* $T(x,y) = (x + iy\,,\, ix + y)$. *Verifique se* T *é um operador linear diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base ordenada* γ *para* $\mathbb{C}^2$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.75 *Dê um exemplo de um operador linear diagonalizável* T *sobre* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *satisfazendo simultaneamente as seguintes propriedades:*

1. $\lambda_1 = -3$ *é um autovalor de* T.
2. $Ker(T) = [1 - x]$.
3. $T(p(x)) \neq p(x)$ *para todo* $p(x)$ *não–nulo.*

Exercício 6.76 *Considere a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine se possível uma matriz $P \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *invertível de modo que* $P^{-1}AP$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.77 *Considere a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule de maneira eficiente A^n *para* $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.78 *Considere a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os valores dos parâmetros a *e* b *de modo que a matriz* A *seja diagonalizável. Para estes valores de* a *e* b, *determine uma matriz invertível* P *e a matriz diagonal* D *de modo que* $P^{-1}AP = D$.

Exercício 6.79 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$, *digamos que* $dim(V) = n$, *e* $c \in \mathbb{F}$. *Pede–se:*

(a) *Para qualquer base ordenada* β *de* V *mostre que* $[cI_V]_\beta^\beta = cI_n$, *onde* I_V *é o operador identidade sobre* V *e* I_n *é a matriz identidade de ordem* n.

(b) *Determine o polinômio característico do operador* cI_V.

(c) *Mostre que o operador* cI_V *possui um único autovalor.*

(d) *Mostre que o operador* cI_V *é um operador diagonalizável.*

Exercício 6.80 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^2$ *e o operador linear* T *sobre* $\mathbb{C}^2$ *definido por:* $T(x, y) = (ix + y\,,\, 2x - iy)$. *Verifique se* T *é um operador linear diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base ordenada* γ *para* $\mathbb{C}^2$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 6.81 *Determine o operador linear* T *sobre o* $\mathbb{R}^4$, *diagonalizável, que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:*

(a) $Ker(T) = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y - z + t = 0 \quad e \quad z - t = 0 \,\}$.

(b) $T(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 2, 0)$.

(c) $(0, 1, 0, 0) \in Im(T)$.

(d) $\lambda = -3$ *é um autovalor do operador* T.

Exercício 6.82 *Considerando o operador linear diagonalizável* T *do Exemplo 6.6.6, determine explicitamente a expressão do operador linear* T^{16} *sobre o* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6.83 *Considere o operador linear diagonalizável* T *do Exemplo 6.6.7. Dado o polinômio* $p(x) = 2 - x + 3x^2$, *determine o polinômio* $q(x) = T^{16}(p(x))$.

Exercício 6.84 *Determine o operador linear* T *sobre o* $\mathbb{R}^4$, *diagonalizável, que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:*

(a) $Ker(T) = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y - z + t = 0 \quad e \quad z - t = 0 \,\}$.

(b) $Im(T) = [(1, 0, 0, 0)\,,\, (0, 1, 1, 0)]$.

(c) $\lambda = 2$ *é um autovalor de* T *com multiplicidade algébrica igual a* 2.

Exercício 6.85 *Considere o operador linear* $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$T(p(x)) = p'(x) + (x+1)p(1).$$

Sejam $\beta = \{ 1, 7 - 4x \}$ *e* $\gamma = \{ q(x), 2x - 1 \}$ *bases para* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *tais que*

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 & s \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine o polinômio $q(x)$ *e o parâmetro* $s \in \mathbb{R}$.

(b) T *é um automorfismo? Em caso afirmativo, determine o automorfismo inverso.*

(c) O operador linear T *é diagonalizável? Justifique sua resposta.*

Exercício 6.86 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *munido do produto interno usual, que denotamos por* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, *e o elemento* $u \in \mathbb{R}^n$ *não–nulo. Definimos as aplicações* P *e* Q *de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^n$ *da seguinte forma:*

$$P(v) = \frac{\langle u , v \rangle}{\langle u , u \rangle} u \qquad e \qquad Q(v) = v - 2P(v)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que P *e* Q *são operadores lineares sobre* $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $P(w) = w$, *com* $w = \alpha u$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Mostre que $P(w) = 0_{\mathbb{R}^n}$ *para* $\langle u , w \rangle = 0$.

(d) Mostre que $Q(w) = -w$, *com* $w = \alpha u$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) Mostre que $Q(w) = w$ *para* $\langle u , w \rangle = 0$.

(f) Dê uma interpretação geométrica para os operadores lineares P *e* Q.

(g) O operador linear P *é diagonalizável? Justifique sua resposta.*

(h) O operador linear Q *é diagonalizável? Justifique sua resposta.*

Exercício 6.87 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a + b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}.$$

o operador linear T *é diagonalizável? Justifique sua resposta.*

6.7 Diagonalização de Operadores Hermitianos

Considere V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja T um operador Hermitiano sobre V, isto é,

$$\langle T(u) , v \rangle \;=\; \langle u , T(v) \rangle \qquad ; \qquad \forall\; u, v \,\in\, V \,.$$

Pelo Teorema 5.13.1, sabemos que a matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz Hermitiana, onde β é uma base ortonormal de V. Assim, O problema de diagonalização de uma matriz Hermitiana é equivalente ao problema de diagonalização de um operador Hermitiano.

Teorema 6.7.1 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um operador Hermitiano sobre V. Então, todo autovalor de T é real. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – Seja λ um autovalor de T com v o autovetor associado. Usando a hipótese que T é Hermitiano, obtemos

$$\lambda \langle v , v \rangle \;=\; \langle \lambda v , v \rangle \;=\; \langle T(v) , v \rangle \;=\; \langle v , T(v) \rangle \;=\; \langle v , \lambda v \rangle \;=\; \overline{\lambda} \langle v , v \rangle \,.$$

Logo, $(\lambda - \overline{\lambda}) \langle v , v \rangle = 0$. Como v é não–nulo, temos que $\lambda = \overline{\lambda}$. Portanto, os autovalores do operador T são reais.

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos do operador T, com v_1 e v_2 os autovetores associados, respectivamente. Desse modo, temos que

$$\lambda_1 \langle v_1 , v_2 \rangle \;=\; \langle T(v_1) , v_2 \rangle \;=\; \langle v_1 , T(v_2) \rangle \;=\; \langle v_1 , \lambda_2 v_2 \rangle \;=\; \lambda_2 \langle v_1 , v_2 \rangle \,.$$

Portanto, tem–se que $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1 , v_2 \rangle = 0$. Logo, $\langle v_1 , v_2 \rangle = 0$, pois λ_1 e λ_2 são distintos. Assim, completamos a demonstração. ■

Teorema 6.7.2 *Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, T um operador Hermitiano sobre V e S um subespaço de V invariante sob T, isto é, $T(v) \in S$ para todo $v \in S$. Então, o subespaço $S^{\perp}$ é também invariante sob T.*

Demonstração – Seja $u \in S^{\perp}$, para todo $v \in S$ temos que

$$\langle T(u) , v \rangle \;=\; \langle u , T(v) \rangle \;=\; 0 \,.$$

Assim, provamos que $T(u) \in S^{\perp}$ para todo $u \in S^{\perp}$. ■

Teorema 6.7.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, com $dim(V) = n$, e S o subespaço de V gerado pelo elemento unitário $u \in V$. Então, o subespaço $S^{\perp}$ tem dimensão $(n - 1)$.*

Demonstração – Seja $\beta = \{ u, v_2, \cdots , v_n \}$ uma base ortonormal para V. Dado um elemento $v \in S^{\perp} \subset V$ temos que

$$v = c_1 u + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \quad ; \quad c_j \in \mathbb{F}$$

Note que $c_1 = \langle u , v \rangle = 0$. Portanto, todo elemento do subespaço $S^{\perp}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elemento $v_2, \cdots , v_n$ da base ortonormal de V. Assim, provamos que $dim(S^{\perp}) = (n - 1)$. ∎

Teorema 6.7.4 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, com $dim(V) = n$, e T um operador Hermitiano sobre V. Então, existe uma base ortonormal para V formada de autovetores de T.*

Demonstração – A prova é feita por indução sobre a dimensão do espaço V. Se $n = 1$, T possui exatamente um autovalor λ_1 com v_1 o autovetor associado. Assim, podemos considerar $\| v_1 \|_2 = 1$. Agora consideramos que o resultado seja válido para um espaço de dimensão $n - 1$, com $n > 2$, e vamos mostrar que o resultado é válido para um espaço de dimensão n.

Seja (λ_1, v_1) um autopar de T, isto é, $T(v_1) = \lambda_1 v_1$. Vamos considerar o subespaço $S = [v_1]$. Temos que S é invariante sob T. Pelo Teorema 6.7.2, temos que $S^{\perp}$ é invariante sob T. Desse modo, T é um operador Hermitiano sobre $S^{\perp}$. Como $dim(S^{\perp}) = n - 1$ e pela hipótese de indução, existem autovetores $v_2, \cdots , v_n$ de T os quais formam uma base ortonormal para o subespaço $S^{\perp}$.

Como $V = S \oplus S^{\perp}$, os autovetores $v_1, v_2, \cdots , v_n$ formam uma base ortonormal para o espaço V, o que completa a demonstração. ∎

Tomando $\beta = \{ v_1, \cdots , v_n \}$ a base ortonormal de autovetores para o espaço V. Sabemos que a matriz do operador T com relação à base ortonormal β de autovetores é a matriz diagonal $[T]^{\beta}_{\beta} = diag(\lambda_1, \cdots , \lambda_n)$, onde v_k é o autovetor associado ao autovalor λ_k para $k = 1, \cdots , n$. Portanto, o operador T é diagonalizável.

Teorema 6.7.5 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador Hermitiano sobre* V. *Então,* T *é um operador diagonalizável.*

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.6.6 e do Teorema 6.7.4. $\square$

Proposição 6.7.1 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Então,* A *é uma matriz diagonalizável, isto é,* A *é unitáriamente similar a uma matriz diagonal.*

Demonstração – A prova segue do Corolário 6.6.1 e do Teorema 6.7.5. $\square$

Proposição 6.7.2 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *um matriz simétrica. Então,* A *é uma matriz diagonalizável, isto é,* A *é ortogonalmente similar a uma matriz diagonal.*

Demonstração – A prova segue da Proposição 6.7.1 e do fato que uma matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana. $\square$

Proposição 6.7.3 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^n$ *munido do produto interno usual. Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana e* T_A *o operador linear sobre* $\mathbb{C}^n$ *associado a matriz* A. *Então, o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^n$ *possui uma base ortonormal de autovetores do operador linear* T_A *.*

Demonstração – A prova segue aplicando o Teorema 6.7.4 no operador linear T_A que é um operador Hermitiano sobre $\mathbb{C}^n$. $\square$

Proposição 6.7.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *com o produto interno usual. Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz simétrica e* T_A *o operador linear sobre* $\mathbb{R}^n$ *associado a matriz* A. *o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *possui uma base ortonormal de autovetores do operador linear* T_A *.*

Demonstração – A prova segue da Proposição 6.7.3 e do fato que uma matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana. $\square$

Exemplo 6.7.1 *Considere a matriz simétrica* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para fazer uma ilustração da Proposição 6.7.4.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ associado a matriz A, isto é,

$$T_A = (x + 2z, y, 2x + z).$$

Assim, $A = [T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz a são os autovalores do operador T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados como vetor coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3).$$

Assim, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.

Os autovetores de T_A associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ são do tipo $v = (x, 0, -x)$ para $x \in \mathbb{R}$ não–nulo.

Os autovetores de T_A associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são do tipo $v = (0, y, 0)$ para $y \in \mathbb{R}$ não–nulo.

Os autovetores de T_A associados ao autovalor $\lambda_3 = 3$ são do tipo $v = (x, 0, x)$ para $x \in \mathbb{R}$ não–nulo.

Assim, temos a seguinte base ortonormal $\gamma = \{ q_1, q_2, q_3 \}$ para $\mathbb{R}^3$, onde

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1) \quad , \quad q_2 = (0, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1),$$

formada por autovetores do operador linear T_A. Podemos observar facilmente que

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

são os autovetores da matriz A associados aos autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$, respectivamente.

Exemplo 6.7.2 *Considere o operador linear T sobre $\mathbb{C}^2$ definido por:*

$$T(x,y) \;=\; (4x + 2iy\,, -2ix + 4y) \qquad \textit{para todo} \qquad (x,y) \in \mathbb{C}^2\,.$$

Mostre que T é um operador Hermitiano sobre $\mathbb{C}^2$ e determine seus autovalores e autovetores.

Seja $\beta = \{\, e_1\,,\, e_2 \,\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^2$, a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é dada por:

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar facilmente que A é uma matriz Hermitiana, isto é, $A^* = A$. Logo, pelo Teorema 5.13.1, temos que T é um operador Hermitiano.

O polinômio característico do operador linear T é dado por:

$$p(\lambda) \;=\; \det(\, A - \lambda\, I) \;=\; \lambda^2 - 8\lambda + 12\,.$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$ são os autovalores do operador linear T.

Para determinar os autovalores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que encontrar os elementos não–nulos de $Ker(T - 2I)$. Assim, temos que obter as soluções não nulas do sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 2iy & = & 0 \\ -2ix & + & 2y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2ix + 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = ix$$

Portanto, todo elemento $v_1 = (a,\, i\,a) \in \mathbb{C}^2$, para $a \in \mathbb{C}$ não–nulo, é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Assim, podemos escolher $v_1 = (1, i)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Para determinar os autovalores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$, temos que encontrar os elementos não–nulos de $Ker(T - 6I)$. Assim, temos que obter as soluções não nulas do sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & 2iy & = & 0 \\ -2ix & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2ix - 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -ix$$

Portanto, todo elemento $v_1 = (a,\, -i\,a) \in \mathbb{C}^2$, para $a \in \mathbb{C}$ não–nulo, é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$. Assim, podemos escolher $v_1 = (1, -i)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$.

Temos que $\gamma = \{ v_1 , v_2 \}$ é uma base ortogonal de autovetores para o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. Além disso, sabemos que a matriz $\Lambda = [T]_{\gamma}^{\gamma}$ é dada por:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que $\gamma^* = \{ q_1 , q_2 \}$, onde

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 , i) \qquad \text{e} \qquad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 , -i) ,$$

é uma base ortonormal de autovetores para $\mathbb{C}^2$.

Assim, temos que

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

são os autovetores da matriz A associados aos autovetores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$, respectivamente. Podemos observar que $AU = U\Lambda$, onde

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} .$$

Desse modo, a matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ pode ser representada da seguinte forma:

$$A = U \Lambda U^* \qquad \text{ou} \qquad \Lambda = U^* A U .$$

Note que a matriz U é uma matriz unitária, isto é, $UU^* = U^*U = I$, e realiza a diagonalização da matriz $A = [T]_{\beta}^{\beta}$.

Definição 6.7.1 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador Hermitiano sobre* V. *Dizemos que* T *é um* ***operador positivo*** *sobre* V *se*

$$\langle T(u) , u \rangle > 0 \qquad \textit{para todo} \quad u \in V \quad \textit{não–nulo.}$$

Desse modo, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} p : \; V \times V & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) & \longrightarrow p(u, v) = \langle T(u) , v \rangle \end{aligned}$$

define um produto interno no espaço vetorial complexo V.

Teorema 6.7.6 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal ordenada para* V, T *um operador Hermitiano sobre* V *e* $A = [T]_\beta^\beta$ *a matriz do operador* T *com relação à base* β. *Então,* T *é um operador positivo se, e somente se,* A *é uma matriz positiva–definida.*

Demonstração – Seja $A = [a_{ij}]$ a representação matricial do operador T com relação à base ortonormal β, isto é, $a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle$. Para todo $u \in V$ temos que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j = \sum_{j=1}^{n} b_j q_j .$$

Podemos escrever $\langle T(u) , u \rangle$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle T(u) , u \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_j \overline{b}_i \langle T(q_j) , q_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_j \overline{b}_i a_{ij} \\ &= ([u]_\beta)^* A [u]_\beta \end{aligned}$$

Portanto, para todo $u \in V$, não–nulo, obtemos

$$\langle T(u) , u \rangle > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ([u]_\beta)^* A [u]_\beta > 0 ,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 6.7.7 *Seja $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ uma matriz Hermitiana. Então, a matriz A é positiva–definida se, e somente se, seus autovalores são todos positivos.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Tomando A positiva–definida, do Teorema 6.4.4, temos que seus autovalores são todos positivos.

($\Longleftarrow$) Considerando A uma matriz Hermitiana e seus autovalores todos positivos.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{C}^n$ associado a matriz A. Da Proposição 6.7.3, temos que existe uma base ortonormal para o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ de autovetores do operador T_A. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ os autovalores do operador T_A, que são também os autovalores da matriz A, com $v_1, \cdots, v_n$ os autovetores associados.

Tomando um elemento não–nulo $u \in \mathbb{C}^n$, que não seja um autovetor de T_A, sabemos que pode ser escrito de modo único da seguinte forma:

$$u = \sum_{i=i}^{n} c_i v_i \, .$$

Desse modo, temos que

$$\langle \, T_A(u) \, , \, u \, \rangle = \langle \sum_{i=i}^{n} c_i T_A(v_i) \, , \, \sum_{j=i}^{n} c_j v_j \, \rangle = \langle \sum_{i=i}^{n} c_i \lambda_i v_i \, , \, \sum_{j=i}^{n} c_j v_j \, \rangle \, .$$

Logo, temos que

$$\langle \, T_A(u) \, , \, u \, \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i \, \overline{c}_j \, \lambda_i \, \langle \, v_i \, , \, v_j \, \rangle \, .$$

Como $v_1, \cdots, v_n$ são mutuamente ortonormais, obtemos

$$\langle \, T_A(u) \, , \, u \, \rangle = \sum_{i=1}^{n} | \, c_i \, |^2 \, \lambda_i > 0 \, .$$

Logo, T_A é um operador positivo. Assim, mostramos que a matriz A é positiva–definida, pois $A = [T]_{\beta}^{\beta}$, onde β é a base canônica de $\mathbb{C}^n$. ∎

Corolário 6.7.1 *Seja $A \in I\!M_n(I\!R)$ uma matriz simétrica. Então, a matriz A é positiva–definida se, e somente se, seus autovalores são todos positivos.*

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.7.7 e do fato que uma matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana.

Exemplo 6.7.3 *Considere a matriz Hermitiana A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$$

para fazer uma ilustração do Teorema 6.7.7.

Podemos verificar facilmente que o polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 .$$

Assim, temos que os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Logo, pelo Teorema 6.7.7, temos que A é uma matriz positiva–definida.

Exemplo 6.7.4 *Considere a matriz simétrica A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

para fazer uma ilustração do Corolário 6.7.1.

Podemos verificar facilmente que o polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)\{(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) .$$

Assim, temos que os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$. Logo, pelo Corolário 6.7.1, temos que A é uma matriz positiva–definida.

A seguir, enunciamos um resultado geométrico para uma matriz positiva–definida, que será muito importante na análise de convergência do Método dos Gradientes Conjugados.

Teorema 6.7.8 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz positiva–definida. Então, a equação*

$$x^t A x = 1 \tag{6.1}$$

representa um hiper–elipsóide em $\mathbb{R}^n$ *com centro na origem e cujos semi–eixos tem comprimentos*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \,,\, \cdots \,,\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$$

nas direções dos autovetores $q_1 \,, \cdots \,, q_n$ *associados aos autovalores*

$$0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \,.$$

Demonstração – Como A é positiva–definida, vamos utilizar a sua diagonalização

$$A = Q \Lambda Q^t \,,$$

onde

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \,, \ldots \,, \lambda_j \,, \ldots \lambda_n)$$

é uma matriz diagonal e

$$Q = [q_1 \cdots q_j \cdots q_n]$$

é uma matriz ortogonal. Note que $(\lambda_j \,, q_j)$ é um autopar da matriz A.

Desse modo, podemos escrever a equação (6.1) da seguinte forma:

$$x^t A x = (Q^t x)^t \Lambda (Q^t x) = 1 \,.$$

Fazendo a mudança de variável $y = Q^t x$, obtemos a seguinte equação

$$y^t \Lambda y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{a_j^2} = 1 \,,$$

onde

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$$

é o comprimento do semi–eixo na direção do autovetor q_j.

Portanto, o maior eixo está na direção do autovetor associado ao menor autovalor e o menor eixo está na direção do autovetor associado ao maior autovalor, o que completa a demonstração. ■

Lei de Inércia de Sylvester

Definição 6.7.2 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. A* ***inércia*** *da matriz* A, *que indicamos por* $i(A)$, *é o terno ordenado*

$$i(A) \;=\; (\, i_+(A)\,,\, i_-(A)\,,\, i_0(A)\,)\;,$$

onde $i_+(A)$ *é o número de autovalores positivos de* A, $i_-(A)$ *é o número de autovalores negativos de* A, *e* $i_0(A)$ *é o número de autovalores iguais a zero de* A, *considerando a multiplicidade de cada um dos autovalores.*

Definição 6.7.3 *Sejam* $A, B \in I\!M_n(\mathbb{C})$. *Dizemos que a matriz* B *é* ***congruente*** *com a matriz* A *se existe uma matriz invertível* $P \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *tal que* $B = PAP^*$.

Exemplo 6.7.5 *Seja* $A \in I\!M_m(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Então,* $A = U\Lambda U^*$, *onde*

$$\Lambda \;=\; diag(\lambda_1\,,\,\ldots\,,\,\lambda_j\,,\,\ldots\,,\,\lambda_m)$$

é uma matriz diagonal real e

$$U \;=\; [u_1 \cdots u_j \cdots u_m]$$

é uma matriz unitária, com $(\lambda_j\,,\,u_j)$ *um autopar da matriz* A. *Vamos mostrar que toda matriz Hermitiana* A *é congruente com a matriz diagonal* $\widehat{\Lambda} \in I\!M_m(I\!R)$ *dada por:*

$$\widehat{\Lambda} \;=\; diag(1\,,\,\ldots\,,\,1\,,\,-1\,,\,\ldots\,,\,-1\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0)\;, \tag{6.2}$$

denominada ***matriz de inércia*** *da matriz* A, *onde o número de* 1 *é igual a* $i_+(A)$, *o número de* -1 *é igual a* $i_-(A)$, *e o número de* 0 *é igual a* $i_0(A)$.

De fato, para simplificar a prova, vamos organizar os autovalores de A em três grupos. Os autovalores positivos que vamos denotar por $\lambda_1^+, \cdots, \lambda_p^+$, os autovalores negativos que vamos denotar por $\lambda_1^-, \cdots, \lambda_n^-$, e os autovalores nulos que vamos denotar por $\lambda_1^0, \cdots, \lambda_r^0$, com $p + n + r = m$. Assim, representamos a matriz diagonal Λ da seguinte forma:

$$\Lambda \;=\; diag(\lambda_1^+\,,\,\ldots\,,\,\lambda_p^+\,,\,\lambda_1^-\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n^-\,,\,\lambda_1^0\,,\,\ldots\,,\,\lambda_r^0)\,.$$

Vamos definir uma matriz diagonal $D \in I\!M_m(I\!R)$ da seguinte forma:

$$D \;=\; diag\left(\sqrt{\lambda_1^+}\,,\,\ldots\,,\,\sqrt{\lambda_p^+}\,,\,\sqrt{-\lambda_1^-}\,,\,\ldots\,,\,\sqrt{-\lambda_n^-}\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,1\right)\;,$$

com a qual podemos escrever a matriz diagonal $\Lambda \in I\!M_m(I\!R)$ da seguinte forma:

$$\Lambda \;=\; D\,\widehat{\Lambda}\,D\,.$$

Portanto, a matriz Hermitiana A pode ser escrita da forma:

$$A = U \Lambda U^* = U D \widehat{\Lambda} D U^* = (U D) \widehat{\Lambda} (UD)^* = P \widehat{\Lambda} P^* , \tag{6.3}$$

onde a matriz invertível $P = UD$ realiza a relação de congruência. Assim, mostramos que toda matriz Hermitiana A é congruente com a matriz diagonal $\widehat{\Lambda}$, em uma forma mais simples. Logo, conhecida a matriz diagonal $\widehat{\Lambda}$ sabemos a inércia da matriz A. Reciprocamente, sabendo a inércia da matriz A conhecemos a matriz diagonal $\widehat{\Lambda}$.

Proposição 6.7.5 *Sejam* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *matrizes congruentes. Então,*

$$posto(A) = posto(B) .$$

Demonstração – A prova segue imediata do Exercício 4.50. □

Teorema 6.7.9 (Lei de Inércia de Sylvester) *Sejam* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *matrizes Hermitianas. Então, existe uma matriz invertível* $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *tal que* $A = PBP^*$ *se, e somente se,* A *e* B *tem a mesma inércia.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Tomando a hipótese que as matrizes A e B são congruentes, isto é, $A = PBP^*$, para alguma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Como matrizes congruentes tem o mesmo posto, $posto(A) = posto(B)$, temos que $i_0(A) = i_0(B)$. Assim, precisamos mostrar somente que $i_+(A) = i_+(B)$.

Sejam $u_1, \cdots, u_p$ autovetores ortonormais da matriz Hermitiana A associados aos autovalores positivos $\lambda_1^+, \cdots, \lambda_p^+$. E denotamos por $E_+(A)$ o subespaço gerado por esse conjunto de autovetores ortonormais, isto é,

$$E_+(A) = [u_1 , \cdots , u_p] .$$

Note que $dim(E_+(A)) = i_+(A)$.

Agora consideramos um elemento $w \in E_+(A)$ não–nulo, isto é,

$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_1 u_p \neq 0_{\mathbb{C}^n} .$$

Assim, temos que

$$w^* A w = \lambda_1^+ \, |\, \alpha_1 \,|^2 + \cdots + \lambda_p^+ \, |\, \alpha_p \,|^2 > 0 .$$

Portanto, obtemos

$$x^*(PBP^*)x \;=\; (P^*x)^*B(P^*x) \;=\; z^*Bz \;>\; 0 \,,$$

para todo elemento z não–nulo no subespaço gerado pelo conjunto

$$\{ P^*u_1 \,, \cdots , P^*u_p \}$$

linearmente independente, desde que P é uma matriz invertível. Desse modo, podemos concluir que $i_+(B) \geq i_+(A)$.

Trocando as posições das matrizes A e B, e fazendo as mesmas argumentações, temos que $i_+(A) \geq i_+(B)$. Portanto, provamos que $i_+(A) = i_+(A)$.

($\Longleftarrow$) Tomando como hipótese que as matrizes Hermitianas A e B tem a mesma inércia, sabemos que podem ser representadas como em (6.3), possuindo a mesma matriz de inércia $\widehat{\Lambda}$, isto é,

$$A \;=\; P\,\widehat{\Lambda}\,P^* \qquad \text{e} \qquad B \;=\; S\,\widehat{\Lambda}\,S^* \,,$$

onde $P, S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ são matrizes invertíveis.

Pela propriedade transitiva da relação de congruência, veja Exemplo 2.8.3, e pelo fato que as matrizes A e B são congruentes a mesma matriz $\widehat{\Lambda}$, temos que as matrizes A e B são congruentes. De fato, podemos escrever a matriz $\widehat{\Lambda}$ da seguinte forma:

$$\widehat{\Lambda} \;=\; Q\,B\,Q^* \qquad \Longrightarrow \qquad A \;=\; (SQ)B(SQ)^* \,,$$

onde $Q = S^{-1}$, com SQ uma matriz invertível, desde que S e Q são matrizes invertíveis, o que completa a demonstração. ■

Corolário 6.7.2 *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas. Então, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = PBP^t$ se, e somente se, A e B tem a mesma inércia.*

Demonstração – A prova segue do resultado do Teorema 6.7.9, e do fato que uma matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana. ■

Corolário 6.7.3 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ invertível tal que $D = PAP^t$ é uma matriz diagonal. Além disso, o número de elementos na diagonal de D que são positivos, negativos e nulos é sempre o mesmo, independente da matriz P que realiza a relação de congruência.*

Definição 6.7.4 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz simétrica. Dizemos que* A *é uma* ***matriz indefinida*** *quando possui autovalores de ambos os sinais.*

Exemplo 6.7.6 *Seja* $B \in I\!M_n(I\!R)$ *uma matriz invertível. Mostre que a matriz simétrica* H*, de ordem* $2n$*, dada por:*

$$H = \begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz indefinida.

Inicialmente vamos mostrar que H é uma matriz invertível. De fato, considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{I\!R^n} \\ 0_{I\!R^n} \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u \;+\; B^t w \;=\; 0_{I\!R^n} \\ Bu \;=\; 0_{I\!R^n} \end{cases}$$

Portanto, como B é uma matriz invertível, obtemos

$$u = 0_{I\!R^n} \qquad \text{e} \qquad w = 0_{I\!R^n} \,.$$

Assim, mostramos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial.

Finalmente, vamos determinar os autovalores da matriz simétrica H, isto é, determinar os escalares $\lambda \in I\!R$ tais que

$$HX = \lambda X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} ,$$

para $u\,, w \in I\!R^n$ não–nulos.

Desse modo, obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} u \;+\; B^t w \;=\; \lambda u \\ Bu \;=\; \lambda w \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos

$$w = \frac{1}{\lambda} B u \,,$$

com $\lambda \neq 0$, pois H é uma matriz invertível. Substituindo w na primeira equação, obtemos

$$B^t B u = (\lambda^2 - \lambda) u \,.$$

Como B é uma matriz invertível, sabemos que B^tB é uma matriz positiva–definida. Logo, seus autovalores são todos positivos, que vamos denotar por $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

Desse modo, considerando (α_i, v_i) um autopar da matriz B^tB, obtemos

$$\lambda_i^2 - \lambda_i = \alpha_i$$

para $i = 1, \cdots n$.

Assim, para cada autovalor α_i de B^tB, temos dois autovalores associados para H dados por:

$$\lambda_i^+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha_i}}{2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda_i^- = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha_i}}{2} < 0 .$$

para $i = 1, \cdots n$.

Portanto, mostramos que H é uma matriz indefinida, e determinamos seus autovalores.

Exemplo 6.7.7 *Seja $B \in I\!M_{m\times n}(I\!R)$, com $m \leq n$ e posto$(B) = m$. Mostre que a matriz simétrica H, de ordem $n + m$, dada por:*

$$H = \begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix}$$

é uma matriz indefinida.

Inicialmente vamos mostrar que H é uma matriz invertível. De fato, considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{I\!R^n} \\ 0_{I\!R^m} \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u + B^t w = 0_{I\!R^n} \\ Bu = 0_{I\!R^m} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por B, obtemos a equação

$$BB^t w = 0_{I\!R^m}$$

Como $posto(B) = m$, sabemos que BB^t, de ordem m, é uma matriz positiva–definida. Logo, BB^t é uma matriz invertível. Desse modo, obtemos

$$w = 0_{I\!R^m} \qquad \text{e} \qquad u = 0_{I\!R^n} .$$

Assim, mostramos que o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial.

Finalmente, vamos determinar os autovalores da matriz simétrica H, isto é, determinar os escalares $\lambda \in I\!R$ tais que

$$HX = \lambda X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} I_n & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} ,$$

para $u \in I\!R^n$ e $w \in I\!R^m$ não–nulos.

Desse modo, obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} u + B^t w = \lambda u \\ Bu = \lambda w \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos

$$w = \frac{1}{\lambda} Bu ,$$

com $\lambda \neq 0$, pois H é uma matriz invertível. Substituindo w na primeira equação, obtemos

$$B^t B u = (\lambda^2 - \lambda) u .$$

Como $posto(B) = m$ e $m \leq n$, sabemos que a matriz $B^t B$, de ordem n, é uma matriz semipositiva–definida e tem $posto(B^t B) = m$.

Logo, a matriz $B^t B$ possui m autovalores positivos, que vamos denotar por $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, e um autovalor $\beta = 0$ com multiplicidade algébrica $p = n - m$.

Desse modo, considerando (α_i , u_i) um autopar da matriz $B^t B$, obtemos

$$\lambda_i^2 - \lambda_i = \alpha_i$$

para $i = 1, \cdots m$.

Assim, para cada autovalor α_i de $B^t B$, temos dois autovalores associados para H dados por:

$$\lambda_i^+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha_i}}{2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lambda_i^- = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha_i}}{2} < 0 .$$

para $i = 1, \cdots m$.

Para o autovalor $\beta = 0$, obtemos um autovalor $\widehat{\lambda} = 1$ com multiplicidade algébrica $p = n - m$ da matriz H.

Portanto, mostramos que H é uma matriz indefinida, e determinamos seus autovalores.

Exemplo 6.7.8 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz positiva–definida e* $B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$*, com* $m \leq n$ *e* $posto(B) = m$*. Mostre que a matriz simétrica* H*, de ordem* $n + m$*, dada por:*

$$H = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix}$$

é uma matriz indefinida.

Como $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz positiva–definida, sabemos que $A = Q \Lambda Q^t$, onde

$$\Lambda = diag(\lambda_1 \,, \, \ldots \,, \, \lambda_j \,, \, \ldots \,, \, \lambda_n)$$

é uma matriz diagonal real, onde os autovalores $\lambda_1 \,, \, \ldots \,, \, \lambda_j \,, \, \ldots \,, \, \lambda_n$ são todos positivos, e $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal. Desse modo, pelo Exemplo 6.7.5, sabemos que a matriz positiva–definida A é congruente com a matriz identidade, isto é,

$$A = (QD) \widehat{\Lambda} (QD)^t = P \widehat{\Lambda} P^t = P \, I_n \, P^t \,,$$

onde a matriz invertível $P = QD$ realiza a relação de congruência, e as matrizes D e $\widehat{\Lambda}$ são dadas por:

$$D = diag\left(\sqrt{\lambda_1} \,, \, \ldots \,, \, \sqrt{\lambda_n} \right) \qquad \text{e} \qquad \widehat{\Lambda} = diag(1 \,, \, \cdots \,, \, 1) = I_n \,.$$

Desse modo, temos que

$$I_n = P^{-1} \, A \, P^{-t} \,,$$

onde $P^{-1} = D^{-1} Q^t$ e $P^{-t} = Q \, D^{-1}$.

Considere a matriz invertível S, de ordem $n + m$, definida da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0^t_{m \times n} \\ & \\ 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} .$$

Podemos verificar facilmente que a matriz simétrica $\widehat{H} = SHS^t$, onde

$$\widehat{H} = SHS^t = \begin{bmatrix} P^{-1} \, A \, P^{-t} & P^{-1} \, B^t \\ & \\ BP^{-t} & 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & P^{-1} \, B^t \\ & \\ BP^{-t} & 0_m \end{bmatrix} ,$$

é uma matriz indefinida, pelo resultado do Exemplo 6.7.7.

Desse modo, pelo Corolário 6.7.2, as matrizes simétricas H e $\widehat{H}$ tem a mesma inércia. Portanto, mostramos que a matriz simétrica H é uma matriz indefinida.

Diagonalização de Operadores anti–Hermitianos

Considere V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja T um operador anti–Hermitiano sobre V, isto é,

$$\langle T(u) , v \rangle \; = \; -\langle u , T(v) \rangle \qquad ; \qquad \forall \; u, v \in V .$$

Pelo Teorema 5.13.3, sabemos que a matriz $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz anti–Hermitiana, onde β é uma base ortonormal de V. Assim, O problema de diagonalização de uma matriz anti–Hermitiana é equivalente ao problema de diagonalização de um operador anti–Hermitiano.

Teorema 6.7.10 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, T um operador anti–Hermitiano sobre V e λ um autovalor de T. Então, λ é imaginário puro, isto é, $\lambda = -\overline{\lambda}$. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração – Seja λ um autovalor de T com v o autovetor associado. Usando a hipótese que T é anti–Hermitiano, obtemos

$$\lambda\langle v , v \rangle = \langle \lambda v , v \rangle = \langle T(v) , v \rangle = -\langle v , T(v) \rangle = -\langle v , \lambda v \rangle = -\overline{\lambda}\langle v , v \rangle .$$

Logo, $(\lambda + \overline{\lambda})\langle v , v \rangle = 0$. Como v é não–nulo, temos que $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, isto é, $\lambda = -\overline{\lambda}$. Portanto, mostramos que o autovalor λ é imaginário puro.

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos do operador T, com v_1 e v_2 os autovetores associados, respectivamente. Desse modo, temos que

$$\lambda_1\langle v_1 , v_2 \rangle = \langle T(v_1) , v_2 \rangle = -\langle v_1 , T(v_2) \rangle = -\langle v_1 , \lambda_2 v_2 \rangle = -\overline{\lambda}_2\langle v_1 , v_2 \rangle .$$

Portanto, tem–se que $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1 , v_2 \rangle = 0$. Logo, $\langle v_1 , v_2 \rangle = 0$, pois λ_1 e λ_2 são distintos. Assim, completamos a demonstração. ■

Teorema 6.7.11 *Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, T um operador anti–Hermitiano sobre V e S um subespaço de V invariante sob T, isto é, $T(v) \in S$ para todo $v \in S$. Então, o subespaço $S^{\perp}$ é também invariante sob T.*

Demonstração – Seja $u \in S^{\perp}$, para todo $v \in S$ temos que

$$\langle T(u) , v \rangle = -\langle u , T(v) \rangle = 0 .$$

Assim, provamos que $T(u) \in S^{\perp}$ para todo $u \in S^{\perp}$. ■

Teorema 6.7.12 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, com $dim(V) = n$, e T um operador anti–Hermitiano sobre V. Então, existe uma base ortonormal para V formada de autovetores de T.*

Demonstração – A prova é feita de modo análogo ao Teorema 6.7.4. □

Tomando $\beta = \{ v_1, \cdots , v_n \}$ a base ortonormal de autovetores para o espaço V. Sabemos que a matriz do operador T com relação à base ortonormal β de autovetores é a matriz diagonal $[T]^{\beta}_{\beta} = diag(\lambda_1, \cdots , \lambda_n)$, onde v_k é o autovetor associado ao autovalor λ_k para $k = 1, \cdots , n$. Portanto, o operador T é diagonalizável.

Teorema 6.7.13 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um operador anti–Hermitiano sobre V. Então, T é um operador diagonalizável.*

Demonstração – A prova segue do Teorema 6.6.6 e do Teorema 6.7.12. □

Proposição 6.7.6 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz anti–Hermitiana. Então, A é uma matriz diagonalizável, isto é, A é unitáriamente similar a uma matriz diagonal.*

Demonstração – A prova segue do Corolário 6.6.1 e do Teorema 6.7.13. □

Proposição 6.7.7 *Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno usual. Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz anti–Hermitiana e T_A o operador linear sobre $\mathbb{C}^n$ associado a matriz A. Então, o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ possui uma base ortonormal de autovetores do operador linear T_A.*

Demonstração – A prova segue aplicando o Teorema 6.7.12 no operador linear T_A que é um operador anti–Hermitiano sobre $\mathbb{C}^n$. □

Exemplo 6.7.9 *Considere a matriz anti–Hermitiana* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

para fazer uma ilustração da Proposição 6.7.6.

Podemos verificar facilmente que o polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - i\lambda + 2 .$$

Podemos verificar que os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -i$.

Os autovetores da matriz A são do tipo

$$X_1 = \begin{bmatrix} -(1+i)y \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} x \\ (1-i)x \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -i$, respectivamente.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -i$, respectivamente.

Desse modo, podemos representar a matriz A da seguinte forma:

$$A = U \Lambda U^* \qquad \text{ou} \qquad \Lambda = U^* A U ,$$

onde

$$U = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} .$$

Note que a matriz U é uma matriz unitária, isto é, $UU^* = U^*U = I$, e realiza a diagonalização da matriz A.

Exercícios

Exercício 6.88 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Mostre que* $x^* A x \in I\!R$ *para todo elemento* $x \in \mathbb{C}^n$.

Exercício 6.89 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Mostre que* SAS^* *é uma matriz Hermitiana para toda matriz* $S \in I\!M_n(\mathbb{C})$.

Exercício 6.90 *Seja* $A \in I\!M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz Hermitiana. Mostre que existe um escalar* $\lambda \in I\!R$ *de modo que a matriz* $\lambda I + A$ *seja positiva–definida.*

Exercício 6.91 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador anti–Hermitiano sobre* V. *Mostre que* $\langle T(u) , u \rangle$ *é imaginário puro para todo* $u \in V$.

Exercício 6.92 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!F)$ *uma matriz diagonalizável. Pede–se:*

(a) Mostre que o $\det(A)$ *é igual ao produto de seus autovalores.*

(b) Mostre que o $tr(A)$ *é igual a soma de seus autovalores.*

Exercício 6.93 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador positivo sobre* V. *Mostre que a aplicação*

$$\begin{aligned} p : \ V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longrightarrow p(u,v) = \langle T(u) , v \rangle \end{aligned}$$

define um produto interno no espaço vetorial complexo V.

Exercício 6.94 *Considere a matriz simétrica* $A \in I\!M_3(I\!R)$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz ortogonal $Q \in I\!M_3(I\!R)$ *que realiza a diagonalização da matriz* A*, isto é,* $\Lambda = Q^t A Q$ *é uma matriz diagonal.*

Exercício 6.95 *Seja* $A \in I\!M_n(I\!R)$ *positiva–definida. Mostre que* $\det(A)$ *é positivo.*

Exercício 6.96 *Considere a matriz simétrica B dada por:*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz B utilizando os resultados do Exercício 6.5 e do Exercício 6.94.

Exercício 6.97 *Determine a solução do seguinte sistema dinâmico*

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.98 *Determine a solução do seguinte sistema dinâmico*

$$\begin{cases} x'(t) = -5x(t) \\ y'(t) = -4y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = +3y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

com a condição inicial

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.99 *Considere a seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Exercício 6.100 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ anti–simétrica. Mostre que as matriz $I - A$ e $I + A$ são invertíveis e que a matriz $(I - A)(I + A)^{-1}$ é uma matriz ortogonal.*

Exercício 6.101 *Considere a seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Verifique se A *é uma matriz positiva–definida. Determine o* $\det(A)$ *e o* $tr(A)$*, utilizando os resultados do Exercício 6.92.*

Exercício 6.102 *Considere a matriz diagonal em blocos* $T \in I\!M_4(I\!R)$ *dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & U \end{bmatrix},$$

onde $A \in I\!M_2(I\!R)$ *é uma matriz simétrica e* $U \in I\!M_2(I\!R)$ *é uma matriz triangular superior, representadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix},$$

com $a, b, c, d, e \in R$ *não–nulos. Determine as condições para que a matriz* T *seja diagonalizável. Justifique sua resposta.*

Exercício 6.103 *Considere a matriz diagonal em blocos* T *dada por:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encontre os autovalores e os autovetores da matriz T*. A matriz* T *é diagonalizável ?*

Exercício 6.104 *Considere a matriz simétrica* $A \in I\!M_3(I\!R)$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz ortogonal $Q \in I\!M_3(I\!R)$ *e uma matriz diagonal* $\Lambda \in I\!M_3(I\!R)$ *tais que* $A = Q\Lambda Q^t$*. A matriz* A *é positiva–definida?*

Exercício 6.105 *Considere a matriz simétrica* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *e uma matriz diagonal* $\Lambda \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *tais que* $A = Q\Lambda Q^t$. *A matriz* A *é positiva–definida?*

Exercício 6.106 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz positiva–definida e* $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz invertível. Mostre que a matriz* $B = CAC^t$ *é positiva–definida.*

Exercício 6.107 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz positiva–definida e* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz ortogonal. Mostre que a matriz* $C = QAQ^t$ *é uma matriz positiva–definida.*

Exercício 6.108 *Seja* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz simétrica. Mostre que* A *é congruente com a matriz identidade se, e somente se, todos os autovalores de* A *são positivos.*

Exercício 6.109 *Seja* $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz invertível. Mostre que a matriz simétrica* H, *de ordem* $2n$, *definida da seguinte forma:*

$$H = \begin{bmatrix} 0_n & B^t \\ B & 0_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz indefinida.

Exercício 6.110 *Seja* $B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, *com* $m \leq n$ *e* $posto(B) = m$. *Mostre que a matriz simétrica* H, *de ordem* $n + m$, *definida da seguinte forma:*

$$H = \begin{bmatrix} 0_n & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix}$$

é uma matriz indefinida.

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] LUENBERGER, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.

[20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.