Def. Um reticulado $(L, \vee, \wedge)$ é uma estrutura algébrica com duas operações binárias, $\vee$ e $\wedge$, que verificam as equações seguintes $\forall x, y, z \in L$:

(L1) $x \vee x = x$ e $x \wedge x = x$ (idempotência)

(L2) $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$ (comutatividade)

(L3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ e $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (associatividade)

(L4) $x \vee (x \wedge y) = x$ e $x \wedge (x \vee y) = x$ (absorção).

Seja $(L, \vee, \wedge)$ um reticulado e seja $\leq$ a relação def. por:

$x \leq y$ sse $x \vee y = y$ sse $x \wedge y = x$.

Se $x \vee y = y$, então $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) \overset{L4}{=} x$. Analogamente, se $x \wedge y = x$, então $x \vee y = (x \wedge y) \vee y \overset{L2}{=} y \vee (y \wedge x) \overset{L4}{=} y$.

Por L1, $x \vee x = x$, então $x \leq x$ e $\leq$ é reflexiva.

Se $\underset{(1)}{x \leq y}$ e $\underset{(2)}{y \leq x}$, então $x \overset{(1)}{=} x \wedge y \overset{L2}{=} y \wedge x \overset{(2)}{=} y \Rightarrow x = y$ e $\leq$ é antiss.

Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \vee y = y$ e $y \vee z = z \Rightarrow x \vee z = x \vee (y \vee z) \overset{L3}{=}$
$= (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$. Logo $x \leq z$ e $\leq$ é transitiva.

$\leq$ é uma relação de ordem em L.

Sejam $x, y \in L$.

$x \vee (x \vee y) \overset{L3}{=} (x \vee x) \vee y \overset{L1}{=} x \vee y \Rightarrow x \leq x \vee y$.

$y \vee (x \vee y) \overset{L2}{=} y \vee (y \vee x) \overset{L3}{=} (y \vee y) \vee x \overset{L1}{=} y \vee x \overset{L2}{=} x \vee y \Rightarrow y \leq x \vee y$.

Então $x \vee y \in \mathcal{U}_L(\{x, y\})$. Seja $z \in \mathcal{U}_L(\{x, y\})$, ou seja, t.q. $x \leq z$ e $y \leq z$. $x \vee z = z$ e $y \vee z = z \Rightarrow z \overset{L1}{=} z \vee z = (x \vee z) \vee (y \vee z) =$

$= x \vee z \vee y \vee z = x \vee y \vee \underbrace{z \vee z} \overset{L1}{=} x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee y \leq z$.

Logo, $x \vee y = \min \mathcal{U}_L(\{x, y\}) = \sup_L \{x, y\}$.

Analogamente, se prova que $x \wedge y = \max \ell_L(\{x, y\}) = \inf_L \{x, y\}$.

Se $(S, \leq)$ é reticulado (1ª definição), então

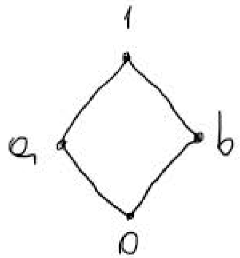
$(S, \sup, \inf)$ é reticulado segundo a 2ª definição.

Sejam $(L, \vee, \wedge)$ e $(L', \vee, \wedge)$ reticulados.

Uma função $f : L \to L'$ é um <u>homomorfismo (de reticulados)</u>

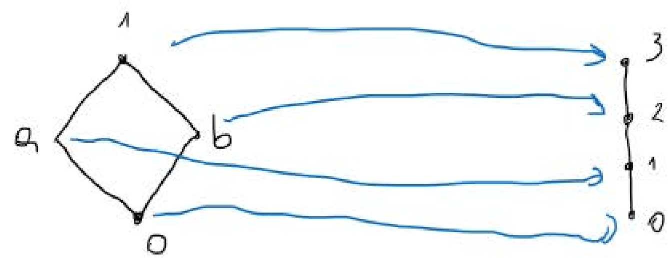
se $\forall x, y \in L$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

f homomorfismo $\Rightarrow$ f monótona
$\not\Leftarrow$

$L =$  é reticulado

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

f:  $= I$

f é monótona, pois $0 \leq x \ \forall x \in L$ e $f(0) = 0 \leq f(x) \ \forall x \in L$

$x \leq 1 \ \forall x \in L$ e $f(x) \leq f(1) = 3 \ \forall x \in L$

porém não é homomorfismo, porque $f(a \vee b) = f(1) = 3$ enquanto

$f(a) \vee f(b) = 1 \vee 2 = 2$. Então $f(a \vee b) \neq f(a) \vee f(b)$.

Se $f : L \to L'$ é homomorfismo. $\forall x, y \in L$, se $x \leq y$, então

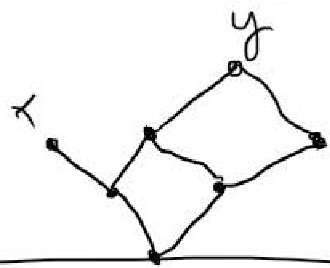
$x \vee y = y$. Logo, $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$ e, então,

$f(x) \leq f(y)$ e f é monótona.

Se $(S, \leq)$ é um conjunto ordenado com, pelo menos, dois elementos maximais (ou minimais) distintos, então S não é reticulado.

De fato, se $x, y \in S$ são maximais distintos, então $x \vee y$ seria um elemento $\geq$ aos dois e distinto de ambos, ou seja,

$x < x \vee y$ e $y < x \vee y$, em contradição com a maximalidade de x e y. Logo, $\nexists \sup_S\{x,y\}$ e portanto S não é reticulado.



não é reticulado.

$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ é reticulado, para todo conjunto X.

Um reticulado $(L, \vee, \wedge)$ é dito:

- superiormente limitado se $\exists \top = \max L$;
- inferiormente limitado se $\exists \bot = \min L$;
- limitado se for superiormente e inferiormente limitado.

Se L é um ret. limitado, um elemento $x \in L$ é dito complementado se existe um complementar (ou complemento) x' de x em L, ou seja, um elemento t.q. $x \vee x' = \top$ e $x \wedge x' = \bot$.

L é dito:

- distributivo se $\forall x, y, z \in L$, $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ e $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
- complementado se for limitado e todo seu elemento tiver complemento.

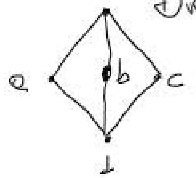
Proposição Se L é um reticulado limitado e distributivo, e $x \in L$ é complementado, então o complemento de x é único.

Dem.

Sejam x' e x'' complementos de x e vamos provar que $x' = x''$.

$$x' = x' \wedge \top = x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') = \bot \vee (x' \wedge x'') =$$

$$= (x \wedge x'') \vee (x' \wedge x'') = (x \vee x') \wedge x'' = \top \wedge x'' = x'' \Rightarrow x' = x''.$$



$(a \vee b) \wedge c = \top \wedge c = c$ não é distributivo.

$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = \bot \vee \bot = \bot$ $\#$

$\bot$ e $\top$ são sempre complementos (únicos) um do outro.

$a \vee b = \top = a \vee c$ e $a \wedge b = \bot = a \wedge c \Rightarrow b$ e c são complementos de a.

Igualmente, a e b são compl. de c e a e c são compl. de b.

Def. Uma <u>álgebra de Boole</u> é um reticulado distributivo e complementado. Geralmente, para as álg. de Boole, é usada a notação $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, onde $0 = \min B$, $1 = \max B$ e $\forall x \in B$, $\neg x$ é o complem. de x

$\{0,1\}$ é uma álg. de Boole.

$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X)$ é uma álg. de Boole, onde

$\forall Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y^c = X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$

($\mathcal{P}(X)$ "pode ser vista" como $\{0,1\}^X = \{f : X \to \{0,1\} \mid f$ função$\}$)

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ e $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

em todo reticulado.

$x \wedge y \leq x$ e $x \wedge z \leq x \Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \vee x = x$

$x \wedge y \leq y \leq y \vee z$ e $x \wedge z \leq z \leq y \vee z \Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (y \vee z) \vee (y \vee z) = y \vee z$

Então $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \leq x \wedge (y \vee z)$

L é modular se $\forall x,y,z\in L$:

$$x\le y \Rightarrow x\vee(y\wedge z) = y\wedge(x\vee z)$$

ou, equivalentemente,

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z) = y\wedge((x\wedge y)\vee z)$$

L distributivo $\Rightarrow$ L modular
$\not\Leftarrow$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(x\wedge y)\vee(y\wedge z) = ((x\wedge y)\wedge y)\vee(z\wedge y) \overset{D}{=} y\wedge((x\wedge y)\vee z)$

$\boxed{\not\Leftarrow}$ Consideremos o diamante $M_3=\{0,1,a,b,c\}$ e sejam $x,y,z\in M_3$ t.q. $x\le y$. Se $x=y$, obviamente

$$x\vee(y\wedge z) = x\vee(x\wedge z) = x = x\wedge(x\vee z) = y\wedge(x\vee z).$$

Se $x<y$. Então, ou $x=0$ ou $y=1$

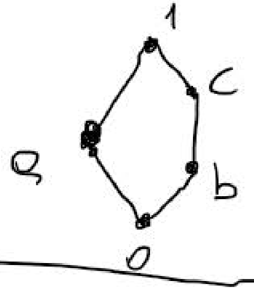
1º caso: $x=0$. $\quad x\vee(y\wedge z) = 0\vee(y\wedge z) = y\wedge z = y\wedge(0\vee z) = y\wedge(x\vee z)$

2º caso: $y=1$ $\quad x\vee(1\wedge z) = x\vee z = 1\wedge(x\vee z) = y\wedge(x\vee z)$.

Logo, M_3 é modular mas não distributivo.

Exemplo de reticulado não modular:

N_5, o pentágono:



$$\boxed{(x\wedge y)\vee(y\wedge z) = y\wedge((x\wedge y)\vee z)}$$ ← não vale.

$x=b$, $y=c$ e $z=a$

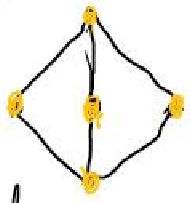
$(b\wedge c)\vee(c\wedge a) = b\vee 0 = b$

$c\wedge((b\wedge c)\vee a) = c\wedge(b\vee a) = c\wedge 1 = c$

} não são iguais

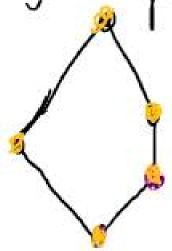
Logo, N_5 não é modular.

M_3 diamante



modular e não distr.

N_5 pentágono



não modular (e, então, não distr.)