13

Gradiente e Derivada Direcional

13.1. Gradiente de uma Função de Duas Variáveis: Interpretação Geométrica

O gradiente de uma função $f(x, y)$ foi introduzido na Seç. 11.5; nosso objetivo aqui é interpretá-lo geometricamente. Antes vamos recordar a regra da cadeia: se $f(x, y)$ for diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ diferenciável no intervalo aberto I, onde $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in I$, então, $h(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável e

$$h'(t) = \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Seja $f(x, y)$ de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto da curva de nível $f(x, y) = c$; suponhamos $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Vamos mostrar a seguir que $\nabla f(x_0, y_0)$ é *perpendicular* em (x_0, y_0) a toda curva γ, diferenciável, passando por (x_0, y_0) e cuja imagem esteja contida na curva de nível $f(x, y) = c$ (nas condições acima, pelo teorema das funções implícitas, uma tal curva existe). Seja, então, $\gamma(t)$, $t \in I$, uma tal curva, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$; como estamos admitindo que a imagem de γ está contida na curva de nível $f(x, y) = c$, teremos

① $\quad f(\gamma(t)) = c$

para todo t no domínio de γ. Derivando os dois membros de ① em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = \frac{d}{dt}(c)$$

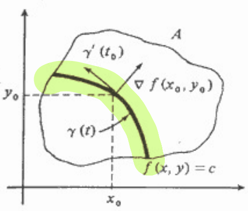
ou

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \ t \in I.$$

e, portanto,

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

ou seja, $\nabla f(x_0, y_0)$ é *perpendicular* a γ, em $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.



Dizemos, então, que $\nabla f(x_0, y_0)$ é *um vetor normal* à curva de nível $f(x, y) = c$, *em* (x_0, y_0). A reta passando por (x_0, y_0) e perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ denomina-se *reta tangente*, em (x_0, y_0), à curva de nível $f(x, y) = c$. A equação de tal reta é:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

EXEMPLO 1. A curva $\gamma(t)$ passa pelo ponto $(1, 2)$ e é tal que $f(\gamma(t)) = 6$ para todo t no domínio de γ, onde $f(x, y) = x^3y^3 - xy$ (observe que a imagem de γ está contida na curva de nível $f(x, y) = 6$). Suponha $\gamma(t_0) = (1, 2)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 2)$.

Solução

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)\right) = (22, 11).$$

A reta tangente a γ em $\gamma(t_0) = (1, 2)$ coincide com a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ em $(1, 2)$. Assim, a equação da reta tangente a γ em $(1, 2)$ é:

$$\nabla f(1, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$$

ou

$$22(x - 1) + 11(y - 2) = 0$$

ou

$$y = -2x + 4.$$

Vejamos como fica, em notação vetorial, a equação desta reta. O vetor $(-11, 22)$ é perpendicular a $\nabla f(1, 2) = (22, 11)$; logo, $(-11, 22)$ é paralelo a $\gamma'(t_0)$; assim, a equação da reta tangente acima pode, também, ser dada na forma

$$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-11, 22),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2. Considere a equação a derivadas parciais

② Ler $$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

a) Com argumentos geométricos, obtenha solução de ②.

b) Suponha $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável; prove que se f satisfaz ②, então existe $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f(x, y) = \varphi(2y - x)$.

Solução

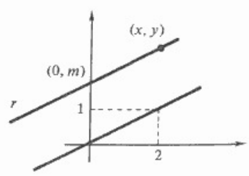
a) Sendo $f(x, y)$ solução de ②, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ou

$$(2, 1) \cdot \nabla f(x, y) = 0.$$

Como para todo (x, y), $\nabla(x, y)$ é perpendicular ao vetor $(2, 1)$ e como $\nabla f(x, y)$ é perpendicular, em (x, y), à curva de nível de f que passa por este ponto, é razoável esperar que as curvas de nível de f sejam retas paralelas ao vetor $(2, 1)$; assim f deve ser constante sobre cada reta paralela ao vetor $(2, 1)$.



Sendo $f(x, y)$ constante sobre a reta r

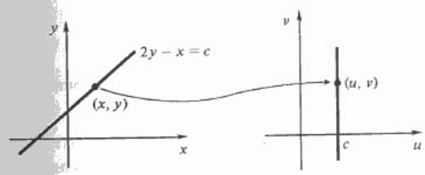
$$f(x, y) = f(0, m), \text{ onde}$$

$\dfrac{y - m}{x - 0} = \dfrac{1}{2}$, ou, $m = \dfrac{2y - x}{2}$. Assim, $f(x, y) = f\left(0, \dfrac{2y - x}{2}\right)$; tomando-se $\varphi(u) = f\left(0, \dfrac{u}{2}\right)$, resulta $f(x, y) = \varphi(2y - x)$, onde $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável. Verifique você que, para toda $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, $f(x, y) = \varphi(2y - x)$ é solução de ②. Assim, as funções sen $(2y - x)$, $e^{2y - x}$, $\dfrac{(2y - x)^2 + e^{2y - x}}{(2y - x)^4 + 1}$ etc. são soluções de ②.

Observação. Consideremos a mudança de variável

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2v - u \\ y = v \end{cases}$$

Note que quando (x, y) percorre a reta $2y - x = c$ o correspondente ponto (u, v) percorrerá a reta vertical $u = c$.



Seja $g(u, v) = f(x, y)$, com $x = 2v - u$ e $y = v$. Vimos, geometricamente, que f deve ser constante sobre as retas $2y - x = c$; é de se esperar, então, que g seja constante sobre as retas $u = c$, ou seja, que g não dependa de v. Vamos, agora, resolver a parte *b*).

b) Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$; supondo f solução de ② teremos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Seja $g(u, v) = f(x, y)$ com $x = 2v - u$ e $y = v$ (veja observação anterior). Temos:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial v}$$

ou

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \underbrace{2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}_{0}.$$

Assim, para todo (u, v) em $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$$

o que mostra que g não depende de v, isto é,

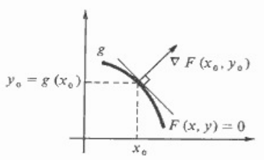
$$g(u, v) = \varphi(u),$$

para alguma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Portanto, $f(x, y) = \varphi(2y - x)$, onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Vejamos, agora, como utilizar o gradiente de uma função de duas variáveis na obtenção da reta tangente e da reta normal ao gráfico de uma função $y = g(x)$ de uma variável. Para isto, consideremos a função de duas variáveis $F(x, y) = g(x) - y$; evidentemente, o gráfico de g coincide com a curva de nível $F(x, y) = 0$. Seja (x_0, y_0), com $y_0 = g(x_0)$, um ponto do gráfico de g.

Segue que $\nabla F(x_0, y_0)$ é normal ao gráfico de g em (x_0, y_0). Como

$$\nabla F(x, y) = (g'(x), -1)$$



resulta, $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$. A equação da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abscissa x_0, é, então

$$(g'(x_0), -1) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$$

ou

$$g'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

ou, ainda, $y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$.

Por outro lado, a equação da reta normal ao gráfico de g no ponto de abscissa x_0 é:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda (g'(x_0), -1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos, agora, que a função diferenciável $y = g(x)$ seja dada implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, onde F é suposta diferenciável e $\nabla F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, com $y_0 = g(x_0)$ (observe que a situação anterior é um caso particular desta). Segue que, para todo x no domínio de g, $F(x, g(x)) = 0$, isto é, a imagem da curva $\gamma(x) = (x, g(x))$ está contida na curva de nível $F(x, y) = 0$. Assim, $\nabla F(x_0, y_0)$ *é normal ao gráfico de g no ponto* (x_0, y_0). Podemos, também, ter chegado a este resultado, no caso $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, observando que

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

é o coeficiente angular da direção determinada pelo vetor $\nabla F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}$ e que

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

(fórmula de derivação implícita) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0).

EXEMPLO 3. $y = f(x)$ é uma função diferenciável definida implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

Solução

Ler

$$y^3 + xy + x^3 = 3x \Leftrightarrow \underbrace{y^3 + xy + x^3 - 3x}_{F(x, y)} = 0$$

$\nabla F(1, 1)$ é perpendicular ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$. Temos:

$$\nabla F(1, 1) = (1, 4), \text{ pois, } \nabla F(x, y) = (y + 3x^2 - 3, 3y^2 + x)$$

Reta tangente:

$$\nabla F(1, 1) \cdot [(x, y) - (1, 1)] = 0$$

ou seja,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Reta normal:

$$y - 1 = 4(x - 1) \text{ ou } y = 4x - 3.$$

Ou, em forma vetorial:

$$(x, y) = (1, 1) + \lambda (1, 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercícios 13.1

1. É dada uma curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

   a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.
   b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

2. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

3. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

   a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.
   b) $e^{2x - y} + 2x + 2y = 4$ em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

4. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

5. Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

6. Utilizando argumentos geométricos, determine soluções da equação a derivadas parciais dada.

   a) $3 \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2 \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *d*) $y \dfrac{\partial f}{\partial x} - x \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

7. Determine uma função $z = f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico passe pelos pontos $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

8. Determine uma função $z = f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2 \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico contenha a imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Determine uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que passe pelo ponto $\gamma(0) = (1, 2)$ e que intercepte ortogonalmente as curvas da família $x^2 + 2y^2 = c$.

10. Determine uma função $y = y(x)$ cujo gráfico intercepte ortogonalmente as curvas da família $xy = c$, com $x > 0$ e $y > 0$, e tal que

    a) $y(1) = 1$ *b*) $y(1) = 2$

11. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $\nabla f(x, y) = g(x, y)(x, y)$, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, onde $g(x, y)$ é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada.

    a) Com argumentos geométricos, verifique que é razoável esperar que f seja constante sobre cada circunferência de centro na origem.

    b) Prove que f é constante sobre cada circunferência de centro na origem.

    (*Sugestão*. $g(t) = f(R \cos t, R \operatorname{sen} t)$ fornece os valores de f sobre a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.)

12. Seja $y = g(x)$ definida e derivável no intervalo aberto I, dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ em A.

    a) Com argumentos geométricos, mostre que é razoável esperar que g seja estritamente decrescente em I.
    b) Prove que g é estritamente decrescente em I.

13.2. Gradiente de Função de Três Variáveis: Interpretação Geométrica

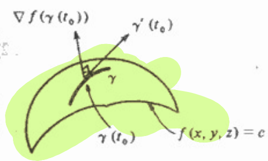
Seja $f(x, y, z)$ de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto da superfície de nível $f(x, y, z) = c$; suponhamos $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Vamos mostrar que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é *normal* em (x_0, y_0, z_0) a toda curva γ, diferenciável, passando por este ponto e cuja imagem esteja contida na superfície de nível $f(x, y, z) = c$. Seja, então, $\gamma(t)$, $t \in I$, uma tal curva, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$; como estamos supondo que a imagem de γ está contida na superfície de nível $f(x, y, z) = c$, teremos

① $$f(\gamma(t)) = c$$

para todo t no domínio de γ. Derivando, em relação a t, ambos os membros da equação ① obtemos, para todo $t \in I$,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

e, portanto, $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$, o que mostra que $\nabla f(\gamma(t_0))$ e $\gamma'(t_0)$ são ortogonais.



Fica provado assim que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *é normal em* (x_0, y_0, z_0) *a toda curva diferenciável* γ *passando por este ponto e com imagem contida na superfície* $f(x, y, z) = c$. Diremos, então, que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é *normal à superfície de nível $f(x, y, z) = c$, no ponto* (x_0, y_0, z_0). O plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ denomina-se *plano tangente*, em (x_0, y_0, z_0), à superfície $f(x, y, z) = c$. A equação deste plano é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0.$$

A reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta normal*, em (x_0, y_0, z_0), à superfície $f(x, y, z) = c$.

Seja $z = g(x, y)$ uma função diferenciável dada implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ onde $F(x, y, z)$ é suposta de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^3$; seja (x_0, y_0, z_0), $z_0 = g(x_0, y_0)$, um ponto do gráfico de g, com $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Como o gráfico de g está contido na superfície $F(x, y, z) = 0$, resulta que toda curva γ com imagem contida no gráfico de g tem, também, sua imagem contida na superfície $F(x, y, z) = 0$; assim, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é normal ao gráfico de g, em (x_0, y_0, z_0).

Observe que se $\gamma(t)$ é uma curva diferenciável com imagem contida na intersecção das superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, onde F e G são supostos de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^3$ e $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, então o vetor $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, tangente a γ em $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, é paralelo a $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0)$ (verifique).

EXEMPLO 1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z \Leftrightarrow \underbrace{xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z}_{F(x,\, y,\, z)} = 0.$$

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3).$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = (1, 5, 8).$$

Plano tangente em $(1, -1, 2)$:

$$\nabla F(1, -1, 2) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou

$$(1, 5, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou seja,

$$(x - 1) + 5(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

ou, ainda,

$$x + 5y + 8z = 12.$$

Reta normal em $(1, -1, 2)$:

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $f(x, y) = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2}$. Determine a equação do plano tangente no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

Solução

1.º processo

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

Ler

$$\begin{cases} f(1, 1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-6x}{2\sqrt{8 - 3x^2 - y^2}};\ \text{logo},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2y}{2\sqrt{8 - 3x^2 - y^2}};\ \text{logo},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$z - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

é a equação do plano tangente em $(1, 1, f(1, 1))$.

2.º processo

$$z = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 8 - 3x^2 - y^2$$

A função é então definida implicitamente pela equação

$$\underbrace{3x^2 + y^2 + z^2 - 8}_{F(x,\, y,\, z)} = 0$$

$\nabla F(1, 1, 2)$ é, então, normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

$$\nabla F(x, y, z) = (6x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla F(1, 1, 2) = (6, 2, 4).$$

A equação do plano tangente em $(1, 1, 2)$ é:

$$(6, 2, 4) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 2)] = 0$$

ou

$$6(x-1)+2(y-1)+4(z-2)=0,$$

ou, ainda,

$$z-2=-\frac{3}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1).$$

EXEMPLO 3. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção das superfícies $x^2+2y^2+z=4$ e $x^2+y+z=3$. Suponha $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq\vec{0}$.

a) Determine a reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)$.
b) Determine uma curva $\gamma(t)$ nas condições acima.

Ler

Solução

a) Sejam $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z$ e $G(x,y,z)=x^2+y+z$.
Para todo t no domínio de γ devemos ter

$$F(\gamma(t))=4 \quad \text{e} \quad G(\gamma(t))=3,$$

pois a imagem de γ está contida nas superfícies de nível $F(x,y,z)=4$ e $G(x,y,z)=3$. Segue que

$$\nabla F(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)=0 \quad \text{e} \quad \nabla G(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)=0,$$

ou seja, $\gamma'(t_0)$ é normal aos vetores $\nabla F(1,1,1)$ e $\nabla G(1,1,1)$; logo, $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial $\nabla F(1,1,1)\wedge\nabla G(1,1,1)$. Temos:

$$\nabla F(1,1,1)\wedge\nabla G(1,1,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{k}.$$

A equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ é:

$$(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(3,0,-6),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) $\begin{cases}x^2+2y^2+z=4\\ x^2+y+z=3\end{cases}$

$x^2+y+z=3 \Rightarrow z=3-x^2-y$. Substituindo na 1.ª equação vem:

$$x^2+2y^2+3-x^2-y=4$$

e, portanto, $2y^2-y-1=0$, ou seja, $y=1$ ou $y=-\frac{1}{2}$; isto é, y não depende de x. Como a curva deve passar pelo ponto $(1,1,1)$, vamos tornar $y=1$. Segue que $z=3-x^2-1$, ou seja, $z=2-x^2$. A imagem da curva $\gamma(t)=(t,1,2-t^2)$ está contida na intersecção das superfícies e passa pelo ponto $(1,1,1)$. Sugerimos ao leitor desenhar a imagem de γ.

Exercícios 13.2

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.
   a) $x^2+3y^2+4z^2=8$ em $(1,-1,1)$
   b) $2xyz=3$ em $\left(\frac{1}{2},1,3\right)$
   c) $ze^{x-y}+z^3=2$ em $(2,2,1)$

2. A função diferenciável $z=f(x,y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3+y^3+z^3=10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

3. Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2+3y^2+2z^2=\frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x+y+z=10$.

4. É dada uma função diferenciável $z=f(x,y)$ cujo gráfico está contido na superfície $x^2+y^2+z^2=1$. Sabe-se que $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=3$ e $x^2+3y^2-z^2=3$. Suponha $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq\vec{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

6. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção da superfície cilíndrica $x^2+y^2=2$ com a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=3$. Suponha $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq 0$.
   a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma'(t_0)$.
   b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

7. É dada uma curva $\gamma(t)$ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2+y^2=1$ e $x+y+z=1$. Suponha $\gamma(t_0)=(0,1,0)$ e $\gamma'(t_0)\neq 0$.
   a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.
   b) Determine uma parametrização para a intersecção acima.

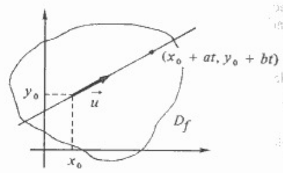
8. Considere a função $z=\frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$.
   a) Determine uma função $F(x,y,z)$, que *não envolva radicais*, tal que a função dada seja definida implicitamente pela equação $F(x,y,z)=0$.
   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função dada no ponto $(2,2,1)$.

9. Determine a equação do plano normal, em $(1,2,3)$, à intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=14$ e $xyz=6$.

10. Determine um plano que passe pelos pontos $(5, 0, 1)$ e $(1, 0, 3)$ e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

13.3. Derivada Direcional

Sejam $z = f(x, y)$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de D_f e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário. Suponhamos que exista $r > 0$ tal que para $|t| < r$ os pontos da reta $(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ pertençam ao domínio de f. Como estamos supondo $\vec{u} = (a, b)$ unitário, a distância de $(x_0 + at, y_0 + bt)$ a (x_0, y_0) é $|t|$ (verifique).



Pois bem, definimos a *taxa média* de variação de f, na direção $\vec{u} = (a, b)$, entre os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + at, y_0 + bt)$ por

① $$\frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Vamos destacar, a seguir, o limite de ① para $t \to 0$.

Definição. O limite

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{u} = (a, b)$*, com $\vec{u}$ unitário.

A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ denomina-se, também, *taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{u}$*. Observe:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \cong \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for $|t|$.

As derivadas parciais de f, em (x_0, y_0), são particulares derivadas direcionais. De fato:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e

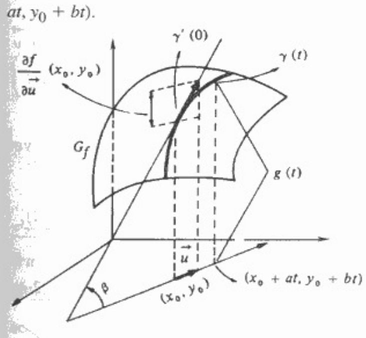
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Deste modo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são, respectivamente, as derivadas direcionais de f, no ponto (x_0, y_0), e nas direções dos vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

A seguir, vamos interpretar geometricamente $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$. Para isto, consideremos a curva $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = g(t) \end{cases}$$

onde $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$.



Observe que a imagem de γ está contida no gráfico de f. Temos:

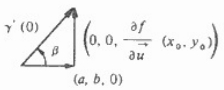
$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

ou seja,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

Segue que $\gamma'(0) = (a, b, g'(0)) = \left(a, b, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right)$. Então,

$$\gamma'(0) = (a, b, 0) + \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right).$$



Como (a, b) é unitário, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$ (veja figura anterior).

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de

a) $\vec{v} = (-1, 1)$ *b)* $\vec{v} = (1, 2)$ *c)* $\vec{v} = (1, 1)$

Solução

Inicialmente, vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário qualquer

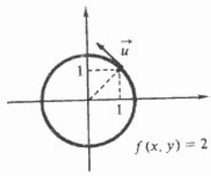
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + at, 1 + bt) - f(1, 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + at)^2 + (1 + bt)^2 - 2}{t} = 2a + 2b.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2a + 2b.$$

a) $\vec{u} = \frac{(-1, 1)}{\|(-1, 1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\vec{u}$ é tangente em $(1, 1)$ à curva de nível $f(x, y) = 2$ ou seja, $x^2 + y^2 = 2$ (verifique).



Portanto, é razoável esperar que, nesta direção t, a taxa de variação de f, em $(1, 1)$, seja nula. (Por quê?) De fato

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

b) $\vec{u} = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

c) $\vec{u} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; observe que $\vec{u}$ é o versor do vetor gradiente $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$. Temos:

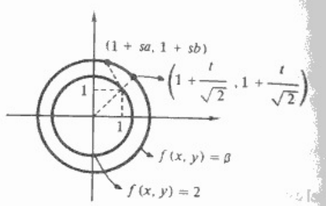
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Note que o valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é maior que para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Provaremos, na próxima seção que, sendo f diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ assumirá valor máximo para $\vec{u}$ igual ao versor do vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 2. São dados uma função $f(x, y) = x^2 + y^2$, um vetor unitário (a, b) e um real $\beta > 0$. Suponha que $(1 + sa, 1 + sb)$ e $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, com $s > 0$ e $t > 0$, pertençam à curva de nível $f(x, y) = \beta$. Compare a taxa média de variação de f entre os pontos $(1, 1)$ e $(1 + sa, 1 + sb)$ e entre os pontos $(1, 1)$ e $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

Solução



Sendo (a, b) unitário, a distância de $(1 + sa, 1 + sb)$ a $(1, 1)$ é s; a distância de $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ a $(1, 1)$ é t. Se $(a, b) \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, teremos $t < s$. Como $f(1 + sa, 1 + sb) = f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ resulta, para $(a, b) \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\frac{f(1 + sa, 1 + sb) - f(1, 1)}{s} < \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 1)}{t}.$$

É razoável, portanto, esperar que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ assuma valor máximo para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

EXEMPLO 3. Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário dado. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ onde

Ler

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução

$$\frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = \frac{\dfrac{a^3t^3}{(at)^2 + (bt)^2}}{t} = \frac{a^3}{\underbrace{a^2 + b^2}_{1}} = a^3, \; t \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = a^3$$

ou seja, para todo vetor unitário (a, b)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = a^3.$$

Já vimos que f é contínua em $(0, 0)$, mas não diferenciável em $(0, 0)$. Este exemplo mostra-nos que *uma função pode ser contínua num ponto, ter derivada direcional em todas as direções neste ponto, e mesmo assim não ser diferenciável neste ponto.*

13.4. Derivada Direcional e Gradiente

O objetivo desta seção é destacar mais algumas propriedades do vetor gradiente. Inicialmente, vamos provar que se f for *diferenciável* em (x_0, y_0), então f admitirá derivada direcional em todas as direções, no ponto (x_0, y_0), e cada derivada direcional se exprime de modo bastante simples em termos do gradiente de f em (x_0, y_0).

> ***Teorema 1.*** Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, $(x_0, y_0) \in A$ e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário. Se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivada direcional em (x_0, y_0), na direção $\vec{u}$, e
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Demonstração

Seja g dada por $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$; da diferenciabilidade da f em (x_0, y_0) segue a diferenciabilidade da g em $t = 0$ e, pela regra da cadeia,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

resulta,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \quad ■$$

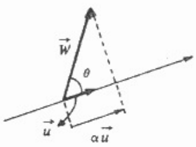
O teorema acima conta-nos que se $f(x, y)$ for *diferenciável* em (x_0, y_0), então

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.}$$

Entretanto, se f *não* for diferenciável em (x_0, y_0) esta relação não tem nenhuma obrigação de se verificar. (Veja Exerc. 21.)

De agora em diante, quando nada for dito sobre uma função $f(x, y)$ ficará implícito que se trata de uma função definida num aberto e diferenciável.

Vimos na Seç. 6.4 que se $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles, então $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cos\theta$; se $\vec{u}$ for unitário, $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \cos\theta$. Na figura a seguir, $\alpha \vec{u}$ é a *projeção de* $\vec{w}$ *na direção* $\vec{u}$, onde $\alpha = \|\vec{w}\| \cos\theta$. Diremos que o número $\alpha = \|\vec{w}\| \cos\theta$ é a *componente escalar de* $\vec{w}$ *na direção* $\vec{u}$.

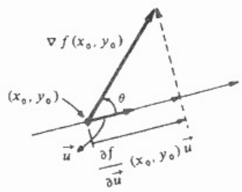


Veremos a seguir que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *é a componente escalar de* $\nabla f(x_0, y_0)$ *na direção* $\vec{u}$.

Suponhamos $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ e $\vec{u}$ unitário. Seja θ o ângulo entre $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\vec{u}$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cos\theta.$$

Como $\vec{u}$ é unitário



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta.$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *é a componente escalar de* $\nabla f(x_0, y_0)$ *na direção* $\vec{u}$.

ATENÇÃO: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é número.

Teorema 2. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, diferenciável em (x_0, y_0) e tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Então, o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ ocorre quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(x_0, y_0)$, isto é, $\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$, e o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

Demonstração

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ terá valor máximo para $\theta = 0$, ou seja, quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(x_0, y_0)$.

O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é então $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. ■

O teorema acima nos diz, ainda, que, *estando em* (x_0, y_0), *a direção e sentido que se deve tomar para que f cresça mais rapidamente é a do vetor* $\nabla f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$, onde $f(x, y) = x^2 + xy$, e $\vec{u}$ o versor de

a) $\vec{v} = (1, 1)$

b) $\vec{w} = (3, 4)$

Solução

Como f é diferenciável

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u}.$$

$\nabla f(x, y) = (2x + y, x)$; logo, $\nabla f(1, 2) = (4, 1)$.

a) $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

b) $\vec{u} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = x^2 y$.

a) Determine $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ seja máximo.

b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$?

c) Estando-se em $(1, 1)$, que direção e sentido deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente?

Solução

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\right) = (2, 1).$$

a) Como f é diferenciável em $(1, 1)$ e $\nabla f(1, 1) \neq (0, 0)$, segue que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é máximo para $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|}$, ou seja, $\vec{u} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é $\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{5}$.

c) $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$ aponta a direção e sentido em que f cresce mais rapidamente em $(1, 1)$.

EXEMPLO 3. Admita que $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy: $T(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) (supondo T em °C, x e y em cm).

a) Estando-se em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual a taxa de crescimento nesta direção?

b) Estando-se em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, qual a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura? Qual a taxa de decrescimento nesta direção?

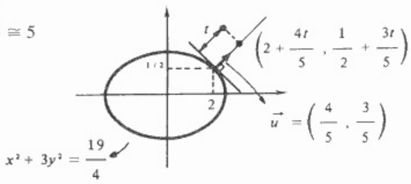
Solução

a) $\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = (4, 3) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ aponta, em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a direção e sentido de maior crescimento de temperatura. Nesta direção, $\vec{u} = \dfrac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|}$, a taxa de variação da temperatura é máxima:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\| = 5 \text{ (°C/cm)},$$

o que significa que, a partir do ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e na direção e sentido de $\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a temperatura está aumentando a uma taxa aproximada de 5°C por cm:

$$\frac{T\left(2 + \frac{4t}{5}, \frac{1}{2} + \frac{3t}{5}\right) - T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{t} \cong 5$$



sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o t.

b) $-\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = -(4\vec{i} + 3\vec{j})$ aponta, em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura. Nesta direção, $\vec{u} = -\dfrac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|}$, a taxa de variação da temperatura é mínima:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\| \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) \right\|} \right) = -\left\| \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) \right\|$$

ou seja,

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = -5 \text{ (°C/cm)}.$$

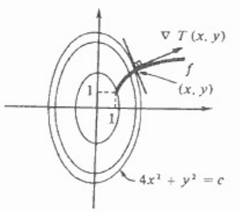
Nesta direção e sentido, a partir de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, a temperatura está decrescendo a uma taxa aproximada de 5°C por cm.

EXEMPLO 4. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir de $(1, 1)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

Solução

Por considerações geométricas, é razoável esperar que a trajetória descrita por P coincida com o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $f(1) = 1$.

Ler



O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em (x, y) é $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Como $\nabla T(x, y) = (8x, 2y)$ deve ser tangente ao gráfico de f, em (x, y), devemos ter

① $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{8x}.$$

$\left(\text{Observe que a direção do vetor } \nabla T(x, y) = 8x\vec{i} + 2y\vec{j} \text{ tem coeficiente angular } \frac{2y}{8x}\right)$

Separando as variáveis em ① e integrando, obtemos,

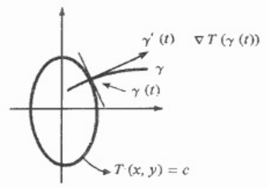
$$\ln y = \frac{1}{4} \ln x + k \left(\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{4x} dx \right).$$

Para que a condição $f(1) = 1$ seja satisfeita, devemos tomar $k = 0$; assim,

$$\ln y = \frac{1}{4} \ln x \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[4]{x}.$$

Segue que $\gamma(t) = (t, \sqrt[4]{t})$, $t \geq 1$, é uma parametrização para a trajetória descrita por P. Um outro modo de resolver o problema é determinar funções $x(t)$ e $y(t)$ tais que a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaça as condições

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 1). \end{cases}$$



Temos:

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \Leftrightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (8x(t), 2y(t)).$$

Deste modo, $x(t)$ e $y(t)$ devem satisfazer as condições

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x \\ \dot{y} = 2y \\ x(0) = 1 \quad \text{e} \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Deixamos a seu cargo verificar que $x = e^{8t}$ e $y = e^{2t}$ satisfazem as condições acima. Assim,

$$\gamma(t) = (e^{8t}, e^{2t}), \; t \geq 0,$$

é, também, parametrização da trajetória descrita por P.

EXEMPLO 5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2)$ e na direção do vetor $2\vec{i} - \vec{j}$.

Ler

Solução

O que queremos aqui é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4) \quad \text{e} \quad \vec{u} = \frac{(2, -1)}{\|(2, -1)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (2, 4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Observação. Tudo o que dissemos nesta seção generaliza-se para funções reais de três ou mais variáveis.

EXEMPLO 6. Calcule a derivada direcional de $f(x, y, z) = xyz$ no ponto $(1, 1, 3)$ e na direção $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Ler

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = \nabla f(1, 1, 3) \cdot \vec{u}$$

onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{u} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{e} \quad \nabla f(1, 1, 3) = (3, 3, 1)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = (3, 3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Exercícios 13.4

1. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, sendo dados:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(3, 4)$.

c) $f(x, y) = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (3, 3)$ e $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$.

b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

3. Seja $f(x, y) = x \,\text{arc tg}\,\dfrac{x}{y}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

4. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ no ponto $(2, 2)$ e na direção

a) $\vec{v} = (1, 2)$ *b)* $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$, no ponto $(-1, 1)$ e na direção $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

6. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$ Calcule

a) $\nabla f(1, 1)$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

7. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

8. Seja $f(x, y) = xy$. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento de f.

9. Seja $f(x, y) = xy$. Determine a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 2, f(1, 2))$, que forma com o plano xy ângulo máximo.

10. Seja $f(x, y) = x + 2y + 1$. Determine a reta contida no gráfico de f, passando pelo ponto $(1, 1, 4)$ e que forma com o plano xy ângulo máximo.

11. Um ponto P descreve uma trajetória sobre o gráfico de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano xy ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória admitindo que ela passe pelo ponto $(1, 1, 5)$.

12. Admita que o gráfico de $z = xy$ represente uma superfície própria para a prática do esqui. Admita, ainda, que um esquiador deslize pela superfície sempre na direção de maior declive. Se ele parte do ponto $(1, 2, 2)$, em que ponto ele tocará o plano xy?

13. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$. Suponha que o gráfico de $z = 5 - x^2 - 4y^2$, $(x, y) \in A$, represente a superfície de um monte. (Adote o km como unidade de medida.) Um alpinista que se encontra na posição $(1, 1, 0)$ pretende escalá-lo. Determine a trajetória a ser descrita pelo alpinista admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclive. Sugerimos ao leitor desenhar o monte e a trajetória a ser descrita pelo alpinista.

14. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em °C.) Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

    a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.
    b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
    c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item *b*?
    d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção $\vec{j}$?

15. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.

    a) $f(x, y, z) = xyz$ em $(1, 1, 1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
    b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1, 2, -1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

16. A função diferenciável $f(x, y, z)$ tem, no ponto $(1, 1, 1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ e igual a zero na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1)$.

17. Seja $f(x, y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$, unitários e ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}.$$

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\right.$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$ são os componentes de $\nabla f(x, y)$ em relação à base $\left.(\vec{u}, \vec{v})\right)$

18. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Mostre que

    a) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$.

    b) $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}$.

    c) $\|\nabla f(x, y)\|^2 = \left[\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\right]^2$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$.

19. Calcule $\|\nabla f(1, 1)\|$ sendo $f(x, y) = \left[\text{arc sen}\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]^4$.

    (*Sugestão*. Faça $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ e utilize o item *c*) do exercício anterior.)

20. Suponha $f(x, y)$ diferenciável no aberto A. Sejam (s, t) as coordenadas do vetor (x, y) em relação à base $(\vec{u}, \vec{v})$, onde $\vec{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $\vec{v} = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$. Considere a função g dada por $g(s, t) = f(x, y)$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) \text{ e } \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y).$$

Interprete.

21. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}, \text{ onde } \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \text{ Explique.}$$

22. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A de $\mathbb{R}^2$ e sejam $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ duas curvas definidas e diferenciáveis num intervalo aberto I e com imagens contidas em A. Suponha $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$, $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, $\|\delta'(t_0)\| = 1$, $\nabla f(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$ e $\gamma'(t_0)$ o versor de $\nabla f(\gamma(t_0))$. Suponha, ainda, que $\gamma'(t_0)$ não seja paralelo a $\delta'(t_0)$. Prove que existe $r > 0$ tal que

$$f(\gamma(t)) > f(\delta(t)) \text{ para } t_0 < t < t_0 + r$$

e

$$f(\gamma(t)) < f(\delta(t)) \text{ para } t_0 - r < t < t_0.$$

Interprete.

23. Seja $f(x, y, z)$ diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^3$ e sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^3$, unitários e dois a dois ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y, z)\,\vec{v} + \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x, y, z)\,\vec{w}.$$

24. Seja $F(r, \theta, z) = f(x, y, z)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, onde f é suposta diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^3$. Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, z)\,\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, z)\,\vec{v} + \frac{\partial F}{\partial z}(r, \theta, z)\,\vec{k}$$

onde $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

25. Seja $F(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$, com $x = r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta$ e $z = r\cos\varphi$, onde f é suposta diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^3$. Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi)\,\vec{u} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\varphi}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)\,\vec{v} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi)\,\vec{w}$$

onde $\vec{u} = (\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \cos\varphi)$, $\vec{v} = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$ e $\vec{w} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\,\text{sen}\,\theta, -\text{sen}\,\varphi)$.

14

Derivadas Parciais de Ordens Superiores

14.1. Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Seja a função $z = f(x, y)$; na Seç. 10.1 vimos como construir as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Da mesma forma, podemos, agora, construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\ \text{etc.}$$

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$. Calcule todas as derivadas parciais de 2.ª ordem.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x^4y^4 - 12xy \ \ e\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 16x^5y^3 - 6x^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x.$$

EXEMPLO 1. Seja B o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Sejam $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, e seja $g : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Como g é integrável em B (verifique), segue que $\iint_B \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ existe e

$$\iint_B \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \iint_B g(x, y)\, dx\, dy.$$

■

EXEMPLO 2. Seja B o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e seja D a fronteira de B, isto é, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Sejam

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(1 - x^2 - y^2)}{1 - x^2 - y^2},\ (x, y) \notin D,$$

e $g : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(1 - x^2 - y^2)}{1 - x^2 - y^2} & \text{se } (x, y) \notin D, \\ 1 & \text{se } (x, y) \in D. \end{cases}$$

A função g é limitada em B, pois para todo $(x, y) \in B$, $|g(x, y)| \leqslant 1$ (verifique) e é contínua em todo (x, y), com $x^2 + y^2 < 1$. Como D tem conteúdo nulo, segue que g é integrável em B. Assim,

$$\iint_B \frac{\operatorname{sen}(1 - x^2 - y^2)}{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \iint_B g(x, y)\, dx\, dy.$$

(Deixamos a seu cargo verificar que g é contínua em todos os pontos de B.) ■

3

CÁLCULO DE INTEGRAL DUPLA. TEOREMA DE FUBINI

3.1. CÁLCULO DE INTEGRAL DUPLA. TEOREMA DE FUBINI

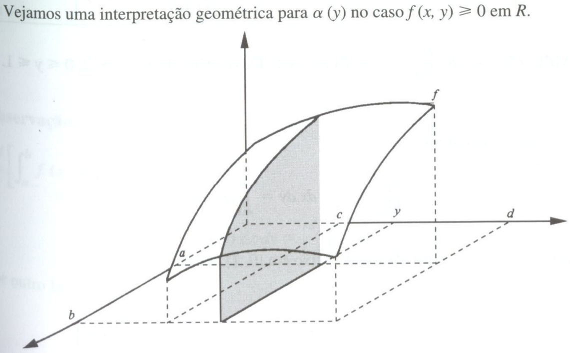
Seja o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ e seja $f(x, y)$ integrável em R. Para cada y fixo em $[c, d]$, podemos considerar a função na variável x, definida em $[a, b]$ e dada por

① $$x \mapsto f(x, y).$$

Se, para cada $y \in [c, d]$, ① for integrável em $[a, b]$, podemos, então, considerar a função dada por

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,\ y \in [c, d].$$

Vejamos uma interpretação geométrica para $\alpha(y)$ no caso $f(x, y) \geqslant 0$ em R.



$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ é a área da região hachurada

O teorema que enunciamos a seguir e cuja demonstração é deixada para o Apêndice 1, conta-nos que se $f(x, y)$ for integrável em R e se, para todo $y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y)\,dx$ existir, então $\alpha(y)$ será integrável em $[c, d]$ e

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

ou

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \alpha(y)\,dy$$

Segue da igualdade acima que se $f(x, y) \geq 0$ em R, então $\int_c^d \alpha(y)\,dy$ será o volume do conjunto limitado pelo gráfico de f e pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ e $z = 0$, que concorda com a definição apresentada na Seção 13.3 do Vol. 1, 5.ª edição.

Teorema (de Fubini). Seja $f(x, y)$ integrável no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Suponhamos que $\int_a^b f(x, y)\,dx$ exista, para todo $y \in [c, d]$, e que $\int_c^d f(x, y)\,dy$ exista, para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\iint_R (x + y)\,dx\,dy$, onde R é o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

Solução

Pelo teorema de Fubini

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \alpha(y)\,dy$$

onde $\alpha(y) = \int_1^2 (x + y)\,dx$. Para cada y fixo em $[0, 1]$, temos:

$$\alpha(y) = \int_1^2 (x + y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2} + 2y\right) - \left(\frac{1}{2} + y\right)$$

ou seja,

$$\alpha(y) = \frac{3}{2} + y. \text{ (Interprete geometricamente } \alpha(y).)$$

Então,

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_1^2 (x + y)\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + y\right) dy.$$

Como $\int_0^1 \left(\frac{3}{2} + y\right) dy = \left[\frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2$, resulta

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = 2.$$

Interprete geometricamente $\iint_R (x + y)\,dx\,dy$.

Vamos, agora, efetuar o cálculo da integral acima, invertendo a ordem de integração.

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = \int_1^2 \beta(x)\,dx, \text{ onde } \beta(x) = \int_0^1 (x + y)\,dy.$$

Assim,

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^1 (x + y)\,dy\right] dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx.$$

Ou seja,

$$\iint_R (x + y)\,dx\,dy = 2.$$

Observação. A notação $\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$ é usada para indicar a integral *iterada* $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$, isto é,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy.$$

Por outro lado,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2\,dx\,dy.$ *b)* $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} xy^2\,dy\,dx.$

Solução

a) $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{2} xy^2\,dx\right]dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2}{2}\,y^2\right]_0^2 dy = \int_{-1}^{1} 2y^2\,dy.$$

Como $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2y^2\,dy = 4\int_{0}^{1} y^2\,dy = \frac{4}{3}$, resulta $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2\,dx\,dy = \frac{4}{3}.$

b) $$\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} xy^2\,dy\,dx = \int_{0}^{2}\left[\int_{-1}^{1} xy^2\,dy\right]dx = 2\int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{1} xy^2\,dy\right]dx$$
$$= 2\int_{0}^{2}\left[x\,\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{2} x\,dx.$$

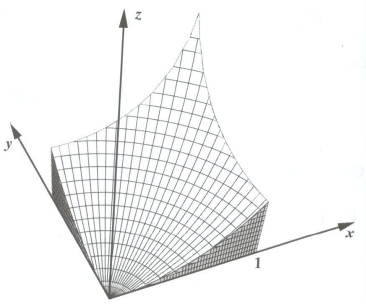
Como $\displaystyle\int_{0}^{2} x\,dx = 2$, resulta $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} xy^2\,dy\,dx = \frac{4}{3}.$ ■

EXEMPLO 3. Calcule o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$.

Solução

O volume de tal conjunto é

$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$



onde B é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Temos:

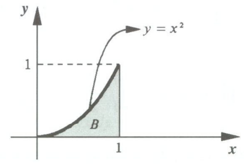
$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^1 (x^2 + y^2)\,dx\right]dy = \int_0^1\left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^1 dy = \int_0^1\left[\frac{1}{3} + y^2\right]dy.$$

Como $\displaystyle\int_0^1\left[\frac{1}{3} + y^2\right]dy = \left[\frac{1}{3}\,y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, resulta $\displaystyle\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{2}{3}.$ ■

EXEMPLO 4. Calcule $\displaystyle\iint_B xy\,dx\,dy$, onde B é o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

Solução

Seja R o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Seja $F(x, y)$ definida em R e dada por



$$F(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Assim,

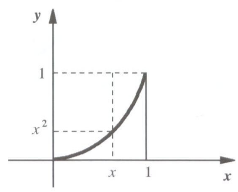
$$\iint_B xy\,dx\,dy = \iint_R F(x, y)\,dx\,dy.$$

Pelo teorema de Fubini,

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^1 F(x, y)\,dy\right]dx.$$

Para cada x fixo em $[0, 1]$,

$$\beta(x) = \int_0^1 F(x, y)\,dy = \int_0^{x^2} F(x, y)\,dy + \int_{x^2}^{1} F(x, y)\,dy.$$



Como $F(x, y) = 0$ para $x^2 \leqslant y \leqslant 1$, resulta

$$\beta(x) = \int_0^{x^2} F(x, y)\, dy = \int_0^{x^2} xy\, dy.$$

Segue que

$$\iint_B xy\; dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xy\; dy\right] dx.$$

Como

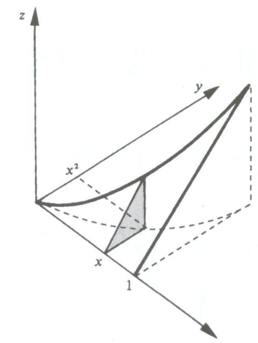
$$\int_0^{x^2} xy\; dy = \left[x\, \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} = \frac{x^5}{2}$$

resulta

$$\iint_B xy\; dx\, dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2}\; dx = \frac{1}{12}.$$

Observação. $\beta(x) = \int_0^{x^2} xy\, dy$ é a área da região hachurada. Por outro lado,

$$\iint_B xy\, dx\, dy = \int_0^1 \beta(x)\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xy\; dy\right] dx$$



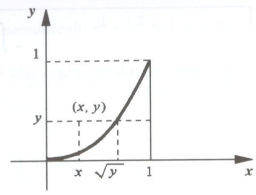
é o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$ e $0 \leqslant z \leqslant xy$.

Vamos, agora, calcular $\iint_B xy\, dx\, dy$, invertendo a ordem de integração. Temos:

$$\iint_R F(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\; dx\right] dy.$$

Para cada y fixo em $[0, 1]$,

$$\alpha(y) = \int_0^1 F(x, y)\, dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{y}} F(x, y)\, dx + \int_{\sqrt{y}}^1 F(x, y)\, dx.$$



Como $F(x, y) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$, resulta

$$\alpha(y) = \int_{\sqrt{y}}^1 F(x, y)\, dx = \int_{\sqrt{y}}^1 xy\; dx.$$

(Observe que $(x, y) \notin B$ para $0 \leqslant x < \sqrt{y}$; logo $F(x, y) = 0$ para $0 \leqslant x < \sqrt{y}$.) Segue que

$$\iint_B F\,(x, y)\; dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 xy\; dx\right] dy$$

ou seja,

$$\iint_B xy\; dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 xy\; dx\right] dy$$

Tendo em vista que

$$\int_{\sqrt{y}}^1 xy\; dx = \left[\frac{x^2}{2}\, y\right]_{\sqrt{y}}^1 = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}$$

resulta

$$\iint_B xy\; dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{12}.$$ ■

Com raciocínio análogo ao do exemplo anterior, provam-se as seguintes conseqüências do teorema de Fubini.

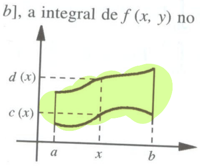
Corolário 1. Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a, b]$ e tais que, para todo x em $[a, b]$, $c(x) \leqslant d(x)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $a \leqslant x \leqslant b$ e $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B, então

$$\iint_B f\,(x, y)\; dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f\,(x, y)\; dy\right] dx.$$

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = ?$$

Primeiro calcula-se, para cada x fixo em $[a, b]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[c(x), d(x)]$:

$$\beta(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy.$$



Tem-se, então:

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \beta(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

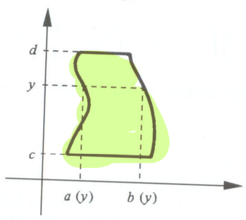
Corolário 2. Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c, d]$ e tais que, para todo $y \in [c, d]$, $a(y) \leqslant b(y)$. Seja B o conjunto de todos (x, y) tais que $c \leqslant y \leqslant d$, $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$. Nestas condições, se $f(x, y)$ for contínua em B, então

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = ?$$

Primeiro calcula-se, para cada y fixo em $[c, d]$, a integral de $f(x, y)$ no intervalo $[a(y), b(y)]$:

$$\alpha(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$



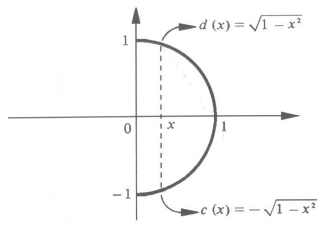
Em seguida, calcula-se a integral de $\alpha(y)$, para y variando em $[c, d]$:

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \alpha(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

EXEMPLO 5. Calcule $\iint_B (x - y)\, dx\, dy$, onde B é o semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

Solução

Para cada x em $[0, 1]$,



$$\beta(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} (x - y)\, dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x - y)\, dy = \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

ou seja,

$$\beta(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Então,

$$\iint_B (x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \beta(x)\, dx = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x - y)\, dy\right] dx$$

ou seja,

$$\iint_B (x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} u = 1 - x^2;\ du = -2x\, dx \\ x = 0;\ u = 1 \\ x = 1;\ u = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}.$$

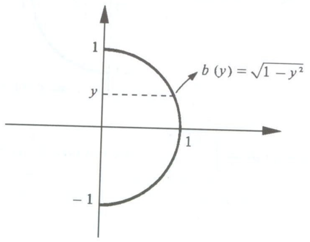
Portanto,

$$\iint_B (x - y)\, dx\, dy = \frac{2}{3}.$$

Vamos, agora, calcular $\iint_B (x-y)\, dx\, dy$ invertendo a ordem de integração.

Para cada y em $[-1, 1]$,

$$\alpha(y) = \int_0^{b(y)} (x-y)\, dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x-y)\, dx$$



(Observe que $a(y) = 0$.)

ou seja,

$$\alpha(y) = \left[\frac{x^2}{2} - xy\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{2} - y\sqrt{1-y^2}.$$

Então,

$$\iint_B (x-y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \alpha(y)\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x-y)\, dx\right] dy$$

ou seja,

$$\iint_B (x-y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1-y^2}{2} - y\sqrt{1-y^2}\right] dy$$

Observe que $\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\, dy = 0$, pois o integrando é uma função ímpar; por outro lado, como $\frac{1-y^2}{2}$ é uma função par, resulta

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}\, dy = \int_0^1 (1-y^2)\, dy = \frac{2}{3}.$$

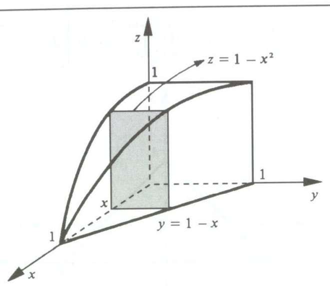
Portanto, $\iint_B (x-y)\, dx\, dy = \frac{2}{3}$. ■

EXEMPLO 6. Calcule o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$.

Solução

O volume do conjunto é

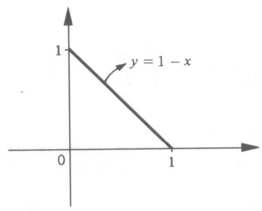
$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$$



$\beta(x) = \int_0^{1-x} (1-x^2)\, dy$ é a área da região hachurada

onde $f(x, y) = 1 - x^2$ e B o triângulo $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$. Para cada x fixo em $[0, 1]$,

$$\beta(x) = \int_0^{1-x} (1-x^2)\, dy = (1-x^2)\int_0^{1-x} dy.$$



Assim, $\int_0^{1-x} (1-x^2)\, dy = (1-x^2)(1-x) = 1 - x - x^2 + x^3$. Segue que

$$\iint_B (1-x^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \beta(x)\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x^2)\, dy\right] dx$$