Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 02/04/2019

Exemplo.3:

"Se meus óculos estão sobre a mesa da cozinha, então eu os vi no café da manhã. Eu estava lendo o jornal na sala ou eu estava lendo o jornal na cozinha. Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão sobre a mesa de café. Eu não vi meus óculos no café da manhã. Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão sobre a mesa da cozinha." "Onde estão meus óculos?".

definir as proposições e premissas:

p: *Meus óculos estão sobre a mesa da cozinha;*
q: *Eu vi meus óculos no café da manhã;*
r: *Eu estava lendo o jornal na sala;*
s: *Eu estava lendo o jornal na cozinha;*
t: *Meus óculos estão sobre a mesa do café*

1. $P_1 : p \rightarrow q$
2. $P_2 : r \vee s$
3. $P_3 : r \rightarrow t$
4. $P_4 : \neg q$
5. $P_5 : s \rightarrow p$
6. Q :???

Exemplo.3: SEGUNDO PASSO: **Aplicando as Leis e Regras**

- $P_1 : p \to q$
- $P_2 : r \vee s$
- $P_3 : r \to t$
- $P_4 : \neg q$
- $P_5 : s \to p$
- $P_6 : \neg p$ "Modus Tollens" (1) e (4)
- $P_7 : \neg s$ "Modus Tollens" (5) e (6)
- $P_8 : r$ "Silogismo Disjuntivo" (2) e (7)
- $P_9 : t$ "Modus Ponens" (3) e (8)
- $Q : t$; logo, meus óculos estão sobre a mesa do café.

Exemplo: Verifique a validade do seguinte Agumento:

"Todos nesta turma fizeram bem a primeira prova. Mas, tem um nesta turma que não estudou. Então, alguém que fez bem a primeira prova não estudou."

- $T(x)$: "x está nesta turma"
- $E(x)$: "x estudou"
- $P(x)$: "x fez bem a primeira prova"

- $P_1 : (\forall x)(T(x) \rightarrow P(x))$
- $P_2 : (\exists x)(T(x) \wedge \neg E(x))$
- $Q : (\exists x)(P(x) \wedge \neg E(x))$

ARGUMENTO: "Se $P_1 \wedge P_2$ então Q"

Lógica de Predicados - Argumentos Válidos

- $T(x)$: "x está nesta turma"
- $E(x)$: "x estudou"
- $P(x)$: "x fez bem a primeira prova"

- $P_1 : (\forall x)(T(x) \to P(x))$
- $P_2 : (\exists x)(T(x) \wedge \neg E(x))$
- $Q : (\exists x)(P(x) \wedge \neg E(x))$

ARGUMENTO: "Se $P_1 \wedge P_2$ então Q"

- $P_1 : (\forall x)(T(x) \to P(x))$
- $P_2 : (\exists x)(T(x) \wedge \neg E(x))$
- $P_3 : (T(a) \wedge \neg E(a))$ "Instanciação Existencial" em (2)
- $P_4 : (T(a) \to P(a))$ "Instanciação Universal" em (1)
- $P_5 : T(a)$ "Simplificação" em (3)
- $P_6 : P(a)$ "Modus Ponens" em (4) e (5)
- $P_7 : \neg E(a)$ "Simplificação" em (3)
- $P_8 : P(a) \wedge \neg E(a)$ "Conjunção" em (6) e (7)
- $Q : (\exists x)(P(x) \wedge \neg E(x))$ "Generalização Existencial" em (8)

Técnicas de Demonstração

TEOREMA: $P \Rightarrow Q$

- DEMONSTRAÇÃO DIRETA: Assume-se a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q; utilizando os resultados conhecidos.
- **Demonstração por** CONTRAPOSIÇÃO:
  "$P \Rightarrow Q$ é um teorema então a contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$ também o é."
  Assim, vamos assumir a HIPÓTESE $\neg Q$ como verdadeira e deduzir a TESE $\neg P$.
- **Demonstração por** CONTRADIÇÃO (OU **Absurdo**):
  Considerando a seguinte equivalência: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q) \rightarrow F$
  - Se $P \rightarrow Q$ é um teorema, é suficiente mostrar $P \wedge (\neg Q) \rightarrow F$.
  - Então, assumimos que tanto a HIPÓTESE P quanto à negação da TESE $\neg Q$ são "*verdadeiras*"; e chegamos a algumas CONTRADIÇÕES.
- **O papel do** CONTRA-EXEMPLO **é sempre "*refutar*" a afirmação; ou seja, "***se tivermos pelo menos um exemplo mostrando que a afirmação não é satisfeita***", então "a afirmação não pode mais ser demonstrada".**

Técnicas de Demonstração

OBSERVAÇÃO: Seja a condicional $P \to Q$

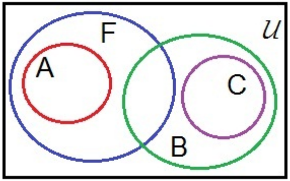
- $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
  "A CONTRAPOSITIVA da Condicional é equivalente à Condicional"
- $P \to Q \not\Leftrightarrow Q \to P$
  "A RECÍPROCA da Condicional não é equivalente à Condicional"
- $P \to Q \not\Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$
  "A INVERSA da Condicional não é equivalente à Condicional"
  Observe que a Inversa é equivalente à Recíproca, pois uma é a contrapositiva da outra:
  $Q \to P \Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$.

Lógica de Predicados - Diagrama de Venn

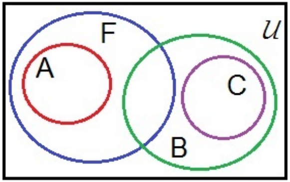
Exemplo.1: Verifique a validade do seguinte Agumento, representando-o pelo Diagrama de Venn:

"Todos os computadores do DCC estão funcionando. Alguns computadores do DMAT não estão funcionando. Não existem computadores do DMAT que estejam no DCC. Todos os computadores do DE estão no DMAT e não estão funcionando. Portanto, nenhum computador do DE está no DCC."

- A: "Conjunto dos Computadores do DCC"
- B: "Conjunto dos Computadores do DMAT"
- C: "Conjunto dos Computadores do DE"
- F: "Conjunto dos Computadores que estão funcionando "



Exemplo.1:



P_1 :"Todos os computadores do DCC estão funcionando": $(A \cap F) = A$
P_2 :"Alguns computadores do DMAT não estão funcionando":
$(B \not\subset F) \wedge (B \cap F \neq \emptyset)$
P_3 :"Não existem computadores do DMAT que estejam no DCC": $(A \cap B) = \emptyset$
P_4 :"Todos os computadores do DE estão no DMAT e não estão funcionando":
$(C \cap B = C) \wedge (C \cap F = \emptyset)$
Q :"Portanto, nenhum computador do DE está no DCC": $C \cap A = \emptyset$; Logo, o Argumento é válido.

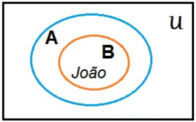
Observação: No Diagrama podemos notar que se excluíssemos P_3 e P_4 fosse alterada para "Todos os computadores do DE estão no DMAT", poderíamos ter como Conclusão: "Existem computadores do DE que estão no DCC". Assim, o Argumento não seria válido pois poderíamos obter mais de uma conclusão.

Lógica de Predicados - Diagrama de Venn

Exemplo.2: Verifique a validade do seguinte Agumento, representando-o pelo Diagrama de Venn:

" *Todos na turma de Cálculo II já cursaram Cálculo I* " e " *João é um estudante na turma de Cálculo II* " implicam na CONCLUSÃO: " *João já cursou Cálculo I* ."

- A: "Conjunto da turma de Cálculo I"
- B: "Conjunto da turma de Cálculo II"



P_1 :"Todos na turma de Cálculo II já cursaram Cálculo I": $(A \cap B) = B$ pois, $B \subset A$
P_2 :"João é um estudante na turma de Cálculo II": $(João \in B)$
Q :"João já cursou Cálculo I": $(João \in A)$; Logo, o Argumento é válido.