Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 13/06/2019

Exercícios:

1. Quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, sendo que cada x_i; $i = 1, 2, 3$, é um inteiro não negativo?
2. Quantas soluções existem para a equação $p + q + r + s + t = 50$; sendo p, q, r, s e t números inteiros ≥ 5.

Exercícios(Respostas):

(1) $x_i \geq 0; i = 1, 2, 3$ Este problema pode ser resolvido separadamente como:

$$\left.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20 \end{cases}\right\} n = 3; p = 0, 1, 2, \cdots, 20$$

ou, de modo equivalente; $y_1 + y_2 + y_3 \leq 23$, sendo que cada $x_i = y_i - 1; i = 1, 2, 3; y_i > 0$; então, resolvendo separadamente:

$$\left.\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ \vdots \\ y_1 + y_2 + y_3 = 23 \end{cases}\right\} n = 3; p = 3, 4, 5, \cdots, 23$$

$$\sum_{p=3}^{23} \binom{p-1}{n-1} = \sum_{p=3}^{23} \binom{p-1}{p-n} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{22}{20} = \binom{23}{20} = 1771;$$ pois,

pela proposição.8: $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

Exercícios(Respostas):

(1) OBSERVAÇÃO: Este problema também pode ser resolvido do seguinte modo: "Vamos transformar a desigualdade em uma igualdade inserindo mais uma variável x_4 ao problema; onde esta variável assume os possíveis valores das desigualdades".
Assim, é equivalente determinar o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

ou seja, $n = 4$ e $p = 20$.
Daí temos: $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+4-1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 20 \end{pmatrix} = 1771.$

Números Binomiais

Exercícios(Respostas):

(2) Quantas soluções existem para a equação $p+q+r+s+t=50$; onde p, q, r, s e t são números inteiros ≥ 5; ou seja, $p \geq 5, q \geq 5, r \geq 5, s \geq 5$ e $t \geq 5$.
Assim, temos o problema equivalente:
$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 50-5(4) = 30$, pois; $y_i > 0; i = 1,2,3,4,5$, onde;
$p = y_1+4, q = y_2+4, r = y_3+4, s = y_4+4, t = y_5+4$.
Logo; $\begin{pmatrix} 30-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix} = 23751.$
OBSERVAÇÃO: Podemos pensar também que cada variável é uma gaveta que inicialmente tem 5 unidades. Devemos distribuir as outras 25 unidades restantes entre estas cinco gavetas.
O que é equivalente a resolver o seguinte problema:
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 25$, onde ; $x_i \geq 0; i = 1,2,3,4,5$.
$$\begin{pmatrix} p+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \end{pmatrix} = 23751.$$

Números Binomiais - Binômio de Newton

Teorema:(Binômio de Newton)

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n; \forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

Demonstração: Observe que $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n}$.

Vamos calcular o termo da direita: $(x+y)\cdot \ldots \cdot (x+y)$.
A fim de obter cada termo deste produto, escolhemos em cada parênteses a variável x ou y e; em seguida, pelo P.F.C. multiplicamos as possibilidades de cada decisão. Então, $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, se escolhemos em k parênteses a variável y, obrigatoriamente, devemos escolher em $(n-k)$ parênteses a variável x. O que resulta no termo $x^{n-k}\cdot y^k$. E ainda, se estamos escolhendo de um conjunto com n objetos, k objetos do tipo y; podemos fazer esta escolha de $\binom{n}{k}$ maneiras.

Logo, $(x+y)^n$ é a soma destes termos; $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$.

Corolário:(Binômio de Newton)

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Demonstração: Observe que $2^n = (1+1)^n$; utilizando o teorema do Binômio de Newton: $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Observação: O teorema do Binômio de Newton também é válido para quando quisermos obter $(x-y)^n$.

Neste caso, temos que;

$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-y)^k =$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 +$

$\binom{n}{2} x^{n-2}y^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} y^n; \forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Observação: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^2 = ?$
Sabemos que $(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$; utilizando o teorema do Binômio de Newton, obtemos estes coeficientes calculando os correspondentes coeficientes binomiais:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} y^2$$

e para calcular os coeficientes binomiais utilizamos o triângulo de Pascal, pois; "a n-ésima linha do triângulo de Pascal representa o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos". Então, utilizamos a linha-2 do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & & & & & & \text{Linha-}n \\
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Assim, chegamos ao mesmo resultado:
$(x+y)^2 = 1.x^2 + 2x.y + 1.y^2$.

Exemplo.1: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^5 = ?$

Sabemos que $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k =$

$$\binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

Agora, utilizando a linha-5 do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & \text{Linha-}n \\
 & & & & & 1 & & & & & & 0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Logo;

$(x+y)^5 = 1.x^5 + 5x^4.y^1 + 10x^3.y^2 + 10x^2.y^3 + 5x^1.y^4 + 1.y^5.$

Exemplo.2: Como calcular os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton: $(x+y)^7 = ?$

Como no exemplo anterior, utilizamos a linha-7 do triângulo de Pascal:

								Linha-n
1								0
1	1							1
1	2	1						2
1	3	3	1					3
1	4	6	4	1				4
1	5	10	10	5	1			5
1	6	15	20	15	6	1		6
1	7	21	35	35	21	7	1	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

e obtemos;

$(x+y)^7 = 1.x^7 + 7x^6.y^1 + 21x^5.y^2 + 35x^4.y^3 + 35x^3.y^4 + 21x^2.y^5 + 7x^1.y^6 + 1.y^7.$

Exercícios:

1. Encontre a expansão de $(x+y)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
2. Encontre a expansão de $(2x+3y)^3$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
3. Encontre o sexto termo da expansão de $(2x-3)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
4. Encontre o terceiro termo da expansão de $(4x-2y)^5$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
5. Encontre o coeficiente de x^3y^4 na expansão de $(2x-y+5)^8$.
6. Determine o coeficiente do termo x^2 na expansão de $(x^3-x^{-2})^9$.
7. Mostre que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k$

Exercícios (Respostas):

(1) $(x+y)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{9-k} y^k =$

$\binom{9}{0} x^9 + \binom{9}{1} x^8 y^1 + \binom{9}{2} x^7 y^2 + \binom{9}{3} x^6 y^3 + \binom{9}{4} x^5 y^4 +$
$\binom{9}{5} x^4 y^5 + \binom{9}{6} x^3 y^6 + \binom{9}{7} x^2 y^7 + \binom{9}{8} x^1 y^8 + \binom{9}{9} y^9$

e pelo triângulo de Pascal:

										Linha-n
1										0
⋮	⋮									⋮
1	6	15	20	15	6	1				6
1	7	21	35	35	21	7	1			7
1	8	28	56	70	56	28	8	1		8
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$(x+y)^9 = 1.x^9 + 9x^8.y^1 + 36x^7.y^2 + 84x^6.y^3 + 126x^5.y^4 + 126x^4.y^5 +$
$84x^3.y^6 + 36x^2.y^7 + 9x^1.y^8 + 1y^9$

Exercícios (Respostas):

(2) $(2x+3y)^3 = (a+b)^3$; para $a = 2x, b = 3y$;
então,
$(a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2b^1 + 3.a^1b^2 + 1.b^3$
substituindo a e b;
$(2x+3y)^3 = 1.(2x)^3 + 3.(2x)^2(3y)^1 + 3.(2x)^1(3y)^2 + 1.(3y)^3 =$
$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

Exercícios (Respostas):

(3) Encontre o sexto termo da expansão de $(2x-3)^9$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
$(2x-3)^9 = \sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) (2x)^{9-k}(-3)^k$.
O sexto termo é obtido para o valor de $k=5$, então temos que calcular
$\left(\begin{array}{c} 9 \\ 5 \end{array} \right) (2x)^{9-5}(-3)^5 = -(126)2^4 3^5 x^4 == -489.888x^4$.

(4) Encontre o terceiro termo da expansão de $(4x-2y)^5$ utilizando o teorema do Binômio de Newton.
$(4x-2y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \left(\begin{array}{c} 5 \\ k \end{array} \right) (4x)^{5-k}(-2y)^k$.
O terceiro termo é obtido para o valor de $k=2$, então temos que calcular
$\left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) (4x)^{5-2}(-2y)^2 = (10)4^3(-2)^2x^3y^2 = 2560x^3y^2$.

Exercícios (Respostas):

(5) Encontre o coeficiente de x^3y^4 na expansão de $(2x - y + 5)^8$.
Podemos desenvolver a expressão do seguinte modo:
$(2x - y + 5)^8 = \sum_{k=0}^{8} \left(\begin{array}{c} 8 \\ k \end{array} \right) (2x - y)^{8-k}(5)^k$.
Note que para o termo com $x^3y^4 \Rightarrow k = 4$ e $n - k = 3 \Rightarrow n = 7$.
Então, na expansão de $(2x - y)^7 = \sum_{k=0}^{7} \left(\begin{array}{c} 7 \\ k \end{array} \right) (2x)^{7-k}(-y)^k$.
para $k = 4$ obtemos o termo: $\left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) (2x)^{7-4}(-y)^4 =$
$\left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) (2x)^{7-4}(-y)^4 = (35)(2)^3(-1)^4x^3y^4 = 280x^3y^4$.
Substituindo na expressão inicial,
$\left(\begin{array}{c} 8 \\ k \end{array} \right) (2x - y)^{8-k}(5)^k = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array} \right) (2x - y)^7(5)^1 = (8)(280x^3y^4)(5)^1 =$
$11.200x^3y^4$.

Exercícios(Respotas):

(6) Determine o coeficiente do termo x^2 na expansão de $(x^3 - x^{-2})^9$.

$(x^3 - x^{-2})^9 = \sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) (x^3)^{9-k}(-x^{-2})^k =$

$\sum_{k=0}^{9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) x^{27-3k}(-1)^k x^{-2k} = \sum_{k=0}^{9}(-1)^k \left(\begin{array}{c} 9 \\ k \end{array} \right) x^{27-5k}$

O coeficiente a ser determinado é do termo x^2 temos que identificar k; i.é., $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$. Então, para $k = 5$, obtemos o coeficiente de x^2;

$(-1)^5 \left(\begin{array}{c} 9 \\ 5 \end{array} \right) = -126.$

(7) Mostre que $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k$

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) 1^{n-k} x^k \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k.$