Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Primeira unidade – 6 de dezembro de 2017

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Seja $\prec$ a relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$(a, b) \prec (c, d) \text{ se, e somente se, } \exists n((a + d + n = b + c) \wedge (n \neq 0)).$$

Verifique quais, entre as propriedades reflexiva, irreflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva, valem para $\prec$. Consequentemente, determine se ela é uma relação de equivalência, de ordem, de ordem estrita, ou nenhuma dessas.

2. Demonstre, usando o princípio de indução, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n + 3$ é múltiplo de 3.

3. Demonstre, usando apenas os axiomas da Aritmética de Peano, a seguinte formula:

$$\forall x \forall y((x + s(y) = s(x) + y).$$

4. Verifique que as seguintes equações diofantinas são solucionáveis e encontre os conjuntos das soluções.

(a) $35x + 42y = 56$;

(b) $122x + 94y = 2$.

Escreva, também, as duas equações congruenciais (uma na incógnita x e a outra em y) associadas a cada equação diofantina, com os respectivos conjuntos de soluções.

SOLUÇÕES.

1. $\forall a, b, n \in \mathbb{N}$, $a+b+n = b+a$ implica $a+b+n = a+b+0$ e, pela propriedade cancelativa da soma dos naturais, $n = 0$. Segue que $(a,b) \not\prec (a,b)$ para todo $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, então $\prec$ é irreflexiva. Por isso, não é reflexiva.

A relação não é simétrica pois, por exemplo, $(0,0) \prec (1,0)$ mas $(1,0) \not\prec (0,0)$ pelo primeiro axioma de Peano. De fato, $1+0+n = 0+0$ implicaria que 0 é um natural sucessor, o que é proibido por PA1.

A relação é antissimétrica por vacuidade (ou seja, é assimétrica): não existem (a,b) e (c,d) tais que $(a,b) \prec (c,d)$ e $(c,d) \prec (a,b)$. Se existissem, as condições $a+d+n = b+c$ e $c+b+n' = d+a$ implicariam $n+n' = 0$, mas isso é impossível pois $n \neq 0$ e $n' \neq 0$.

Sejam $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ tais que $(a,b) \prec (c,d)$ e $(c,d) \prec (e,f)$. Então existem $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $a+d+m = b+c$ e $c+f+n = d+e$. Somando b a ambos os lados da última igualdade, temos: $b+d+e = b+c+f+n$. Substituindo $b+c$ usando a primeira igualdade, segue $b+d+e = a+d+m+f+n$. Agora, usando a propriedade cancelativa da soma para cancelar d, obtemos $b+e = a+f+m+n$, com $m+n \neq 0$ pois $m \neq 0$ e $n \neq 0$. Logo, $(a,b) \prec (e,f)$ e $\prec$ é transitiva.

Em conclusão, $\prec$ é irreflexiva e transitiva, então é uma relação de ordem estrita.

2. É preciso provar a seguinte:

$$\forall n \exists a (n^3 + 5n + 3 = 3 \cdot a).$$

Base de indução: $n = 0$.

$$0^3 + 5 \cdot 0 + 3 = 3 = 3 \cdot 1 \quad \text{verificada.}$$

Hipótese de indução: $n = k$.

$$\exists a (k^3 + 5k + 3 = 3 \cdot a).$$

Tese: $n = k+1$.

$$\exists a' ((k+1)^3 + 5(k+1) + 3 = 3 \cdot a').$$

Vamos calcular $(k+1)^3 + 5(k+1) + 3$:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^3 + 5(k+1) + 3 = \\
&= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 + 3 = \\
&= k^3 + 5k + 3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5 = \\
&= (k^3 + 5k + 3) + (3k^2 + 3k + 6) \overset{\text{HP}}{=} \\
&\overset{\text{HP}}{=} 3 \cdot a + 3 \cdot (k^2 + k + 2) = \\
&= 3(a + k^2 + k + 2)
\end{aligned}$$

Então a tese vale com $a' = a + k^2 + k + 2$.

3. Vamos usar o princípio de indução (PA7) na variável y.

Base: $y = 0$.

Para todo x, valem $x + s(0) \overset{PA4}{=} s(x+0) \overset{PA3}{=} s(x)$ e $s(x) + 0 \overset{PA3}{=} s(x)$, então a base de indução é verificada.

Hipótese de indução: $y = k$. $\forall x(x + s(k) = s(x) + k)$.

Tese: $y = s(k)$. $\forall x(x + s(s(k)) = s(x) + s(k)$.

Para todo x, vale o seguinte argumento:

$x + s(s(k)) \overset{\text{PA4}}{=} s(x + s(k)) \overset{\text{HP}}{=} s(s(x) + k) \overset{\text{PA4}}{=} s(x) + s(k)$,

o que prova a tese de indução. Logo, a asserção segue do axioma PA7.

4. (a) O mdc positivo de 35 e 42 é 7, e $56 = 8 \cdot 7$. Então a equação é solucionável. Temos, também: $42 = 6 \cdot 7$ e $35 = 5 \cdot 7$.

O algoritmo das divisões sucessivas de Euclides retorna $7 = 35 \cdot (-1) + 42 \cdot 1$, o que implica $35 \cdot (-8) + 42 \cdot 8 = 56$. Logo, o conjunto das soluções é

$$\{(-8 + 6k, 8 - 5k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

As equações congruenciais associadas à equação diofantina dada são as seguintes:

$35x \equiv 56 \pmod{42}$, cujo conjunto das soluções é

$$\{-8 + 6k : k \in \mathbb{Z}\}, \text{ e}$$

$42y \equiv 56 \pmod{35}$, cujo conjunto das soluções é

$$\{8 + 5k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) O mdc positivo de 122 e 94 é 2, então a equação é solucionável.

O algoritmo das divisões sucessivas de Euclides retorna $2 = 122 \cdot (-10) + 94 \cdot 13$. Logo, o conjunto das soluções é

$$\{(-10 + 47k, 13 - 61k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

As equações congruencias associadas à equação diofantina dada são as seguintes:

$122x \equiv 2 \pmod{94}$, cujo conjunto das soluções é

$$\{-10 + 47k : k \in \mathbb{Z}\}, \text{ e}$$

$94y \equiv 2 \pmod{122}$, cujo conjunto das soluções é

$$\{13 + 61k : k \in \mathbb{Z}\}.$$