Departamento de Ciência da computação
MATA53 – Teoria dos Grafos – 2018.2
Professor: Roberto Freitas Parente

Gabarito Avaliação I – 2018.2

Teorema 1 (Mantel'1907)**.** *A quantidade máxima de arestas em um grafo livre de triângulo com n vértices é $\lfloor n^2/4 \rfloor$.*

Questão 1 (2.5 pontos)**.** *Defina formalmente de forma* **clara e precisa** *os itens abaixo:*

- *Grafo bipartido completo.*
  Resposta: *Seja (A, B) uma partição dos vértices de G, G é bipartido quando só teremos arestas cruzando de A para B e não temos arestas internas na parte A nem na parte B. Ademais, um grafo é bipartido completo se têm todas as arestas possíveis entre A e B.*
- *Componente (conexa) de um grafo G.*
  Resposta: *É um subgrafo induzido de G maximal conexo.*
- *Grafo k-regular.*
  Resposta: *G é k-regular se para todo $v \in V$ temos $d(v) = k$, ou seja, o grau de v é k.*
- *Árvore e árvore geradora de um grafo G.*
  Resposta: *Árvore é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore geradora de G é um subgrafo de G que é uma árvore que tem conjunto de vértices igual a G*
- *Conjunto independente de um grafo G.*
  Resposta: *Seja $X \subset V(G)$, dizemos que X é um conjunto independente se para todo par de vértice $u, v \in X$ temos que não existe a aresta uv em G.*

Questão 2 (1.5 pontos)**.** *Explique por que a seguinte "prova" para o Teorema 1 está errada e explique sucintamente como consertar o problema. Obs: não precisa provar o resultado, mas consertar a estrutura da prova.*

Demonstração errada. Vamos provar o Teorema 1 por indução em n. Caso base: $n \leq 2$. Aqui o grafo completo K_n tem a quantidade máxima de arestas e não tem triângulo. Passo de indução: $n > 2$. Suponha que a afirmação vale para $n = k$, então $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$ é o o grafo livre de triângulos com k vértices com a maior quantidade de arestas possíveis. Adicionamos um novo vértice x para formar um grafo livre de triângulo com $k+1$ vértices. Fazendo x adjacente a todos os vértices da maior parte de $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$. Fazendo isso criamos o grafo $K_{\lfloor k+1/2 \rfloor \lceil k+1/2 \rceil}$ e isso completa a prova. □

Resposta: A prova está errada pelo fato de que a tentativa partiu do grafo $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$ que é um grafo que o teorema funciona e construíu um grafo com mais um vértice que contém $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$. A prova está errada porque não mostrou que para qualquer grafo livre de triângulo tem a configuração dessejada e sim

O argumento está errado porque não consideramos todos os grafos livres de triângulo com $k+1$ vértices. Consideramos sobre os que contém $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$ como subgrafo induzido. Esse grafo deve aparecer no grafo extremal com $K+1$ vértice, mas não podemos usar esse fato antes de provar isso.

Para consertar, precisamos supor que um grafo genérico com $k+1$ vértice e ao retirar o vértice usamos a indução para mostrar que tal grafo gerado é o extremal $K_{\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil}$.

Questão 3 (3.0 pontos (ida ($\Rightarrow$): 1.0 e volta ($\Leftarrow$):2.0))**.** *Prove que um grafo G é bipartido se e somente se todo subgrafo H de G tem um conjunto independente com pelo menos a metade de $V(H)$.*

Resposta:

IDA ($\Rightarrow$): Seja G um grafo bipartido. Qualquer subgrafo $H \subseteq G$ também será um grafo bipartido. Suponha que A_H seja o lado com maior quantidade de vértices de H, então temos que $|A_H| \geq |H|/2$ e pela definição de bipartido temos que A_H é um conjunto independente.

VOLTA ($\Leftarrow$): Mostraremos a seguinte contrapositiva: Se G não é bipartido, então existe um $H \subseteq G$ onde não existe um conjunto indepedente com mais que a metade dos vértices. Vimos em sala que se G não é bipartido, então existe um ciclo C de tamanho ímpar. Fazendo $H = C$ o resultado segue.

Questão 4 (2.0 pontos)**.** *Prove que um grafo bipartido regular de grau pelo menos 2 não contém uma ponte.*

Resposta:

Demonstração. Seja G um grafo bipartido k-regular com bipartição (A, B). Por simplicidade, suponha que G é conexo e que existe uma aresta e que é um ponte de G. Desta forma ao retirarmos a aresta e temos duas componenctes conexas H_1 e H_2 que também são bipartidos. Seja a bipartição (X, Y) do conjunto de vértice de H_1. Seja $S_X = \sum_{v \in X} d(v) = k(|X|) - 1$ e $S_Y = \sum_{v \in Y} d(v) = k(|Y|)$. como H_1 é um grafo bipartido, então temos que $S_X = S_Y$, mas isso só é verdade quando $k = 1$ o que nos leva a uma contradição e assim não pode existir a ponte e. $\square$

Questão 5 (1.5 pontos (ida ($\Rightarrow$): 0.5 e volta ($\Leftarrow$):1.0))**.** *Mostre que um grafo G é uma floresta se e somente se $|E| = |V| - c(G)$, onde $c(G)$ denota o número de componentes conexas de G.*

Resposta: **IDA($\Rightarrow$)** Como G é uma floresta, então G não contém ciclos e é desconectado. Seja $c(G)$ a quantidade de componentes conexas de G. Observe que cada componente conexa C_i, para $1 \geq i \geq c(G)$, é uma árvore com $|C_i|$ vértices. Sabemos uma árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas, então

$$|E(G)| = \sum_i |C_i| - 1 = \sum_i |C_i| - \sum_i 1 = |V| - c(G).$$

Volta($\Leftarrow$) Provaremos por indução na quantidade de componente conexas $c(G) = k$. Para $k = 1$ o resultado já foi provado em sala. Seja T uma componente conexa de G com n vértices. Sabemos que todo grafo conexo tem pelo menos $n - 1$ arestas e G tem $|V| - k$ arestas, então T deverá ter $n - 1$ arestas (caso contrário não teremos k componentes conexas). Ademais $G - T$ tem $|V| - k - (n - 1) = (|V| - n) - (k - 1)$ arestas e por indução $G - T$ é uma floresta e T é uma árvore, então G é uma floresta.

Questão 6 (1.5 pontos)**.** *Prove que todo grafo conexo $G = (V, A)$ contém pelo menos $|E| - |V| + 1$ ciclos.*
Dica: *Utilize fatos sobre árvores e/ou árvores geradora.*

Resposta: Uma árvore geradora de G é uma subgrafo T de G onde T é árvore e $V(T) = V(G)$. Como foi visto em sala, toda árvore T tem quantidade de arestas $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Vimos que toda árvore é maximal acíclica, ou seja, qualquer aresta adicionada resultará em um ciclo. Desta forma, dada uma árvore geradora T de G, cada aresta de G inserida constituirá um ciclo, então teremos $E(G) - V(T) - 1 = E(G) - V(T) - 1$ arestas que não estarão na árvore geradora T e assim temos um limitante inferior para quantidade de ciclos em G.

Questão 7 (1.0 pontos)**.** *Um homem em sua jornada está com um desafio envolvendo seus pertences. O homem deseja atravessar um rio com seu cachorro, sua cabra e seu alface gigante, mas o barco é muito pequeno e ele só consegue carregar uma das suas posses por vez. Por questões óbvias, que complicam a situação, a cabra não pode ficar em compania do cachorro ou do alface sem a presença do homem.*

Desenhe um grafo simples que representa as situações permissíveis e explique como o homem pode utilizar tal grafo para atravessar todos de uma margem para outra.

Resposta: Uma possível resolução para a questão é criarmos um grafo bipartido onde cada parte contém todas as $2^3 = 8$ possibilidades de configurações envolvendo "cachorro", "cabra" e "alface gigante". Assim cada aresta do bipartido seria uma viagem permissível do homem. O grafo resultado terá todas as viagens possíveis e o utilizamos para encontrar um caminho entre o vértice que represente "cachorro,cabra,alface" de um lado da bipartição para o vértice análogo no outro lado.