UFBa - IME - DMAT —- Matemática Discreta I(MATA42) - Profa: Isamara

Respostas Lista de Exercícios.4

---

1. Resposta: (alternativa E)

Os casais 1 e 2 podem se sentar de duas maneiras distintas (2!):

casal1 casal2 ou casal2 casal1

No primeiro caso, as quatro pessoas podem se sentar em 4 ordens:

homem1, mulher1, homem2, mulher2

homem1, mulher1, mulher2, homem2

mulher1, homem1, homem2, mulher2

mulher1, homem1, mulher2, homem2

No segundo caso, obtemos da mesma maneira outras 4 ordens. Logo os casais podem se sentar no banco de $4 + 4 = 8$ maneiras distintas.

Podemos pensar também que cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas (2!). Então temos: $2!.2!.2! = 8$.

---

2. Resposta: (alternativa E)

Os casais 1, 2 e 3 podem sentar-se em seis ordens distintas (3!): 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas (2!): com o namorado à direita ou à esquerda de sua namorada.

Logo, em cada uma das 6 ordens possíveis para os casais, temos $2.2.2 = 8$ possibilidades.

Logo o número de ordens distintas em que as seis pessoas podem sentar-se é $6.8 = 48$, ou seja, $3!.2!.2!.2! = 48$.

---

3. Reposta: (alternativa C)

Para que o produto seja 100, cada algarismo deve ser um divisor de 100. Os algarismos divisores de 100 são 1, 2, 4 e 5. Não é possível obter o produto 100 com números que tenham apenas 1 ou 2 algarismos, logo os números procurados têm 3 ou 4 algarismos, por serem menores que 10000. Vejamos como obter o produto 100 com 3 ou 4 desses algarismos. Para facilitar a listagem observamos que 8 não é divisor de 100, donde os algarismos 2 e 4 não podem aparecer num mesmo número. Logo os números procurados são: números de 3 algarismos: 455, 545, 554 números de 4 algarismos: 1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541, 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225. num total de 21 números.

---

4. Resposta: Os divisores naturais de 200 são do tipo $2^a.5^b$. (por exemplo: $2^2.5^2 = 100$ é um divisor de 200). Assim, temos $a \in \{0,1,2,3\}$ e $b \in \{0,1,2\}$. Portanto, o número 200 possui $4.3 = 12$ divisores naturais.

---

5. Respota: Vamos decompor N em fatores primos: $N = 2^3.3^2.5^1$;
assim um divisor de N é um número do tipo:
$2^a.3^b.5^c; a \in \{0,1,2,3\}, b \in \{0,1,2\}$ e $c \in \{0,1\}$.
a) Temos $4 = C_4^1$ modos distintos de escolher o valor de a, $3 = C_3^1$ modos distintos de escolher o valor de b e, $2 = C_2^1$ modos distintos de escolher o valor de c; logo, temos $4.3.2 = 24$ divisores naturais para N.
b) para identificar os divisores ímpares de N temos que retirar do total de divisores (24) os divisores que possuem o fator 2 na sua composição; i.é, para os divisores pares faremos $a = 0$:
$2^a.3^b.5^c; a = 0, b \in \{0,1,2\}$ e $c \in \{0,1\}$.
Logo, temos $1.3.2 = 6$ divisores naturais de N que são ímpares.
c) para identificar os divisores pares de N temos que retirar do total de divisores (24) os divisores ímpares.
Logo, pelo itens (a) e (b), temos $24 - 6 = 18$ divisores naturais de N que são pares.
d) um número natural é um quadrado perfeito se, e somente se, na sua decomposição só aparecem fatores primos com expoente par, assim, considerando os divisores de N: $2^a.3^b.5^c; a \in \{0,2\}, b \in \{0,2\}$ e $c \in \{0\}$.
Logo, temos $2.2.1 = 4$ divisores naturais de N que são quadrados perfeitos.

---

6. Respota: São 26 letras para a primeira casa, 25 para a segunda e 24 para a terceira. Como o número é divisível por 5, ele termina em 5, e cada casa pode ser formada por qualquer um dos 4 algarismos.
$\underline{\ 26\ }\ \underline{\ 25\ }\ \underline{\ 24\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 5\ }$
Total: $26.25.24.4.4.4 = 998400$

---

7. Respostas: Temos 6 algarismos: 3 algarismos pares e 3 algarismos ímpares. Assim, temos os números com 2 algarismos: $\underline{\ 3\ }$ pares $\underline{\ 3\ }$ ímpares : $3.3 = 9$;
com 3 algarismos: $\underline{\ 3\ }$ pares $\underline{\quad}$ $\underline{\ 3\ }$ ímpares : $3.4.3 = 36$

com 4 algarismos: $\underline{\ 3\ }$ pares $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\ 3\ }$ ímpares : $3.4.3.3 = 108$

com 5 algarismos: $\underline{\ 3\ }$ pares $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\ 3\ }$ ímpares : $3.4.3.2.3 = 216$

com 6 algarismos: $\underline{\ 3\ }$ pares $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\ 3\ }$ ímpares : $3.4.3.2.1.3 = 216$

Total: $9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585$; 585 números.

---

8. Resposta: $(6.5.4.3).(4.3.2) = 8640$ maneiras.

---

9. Resposta: Os números 3, 5, 7, 11, 17 e 23 são números primos. Então temos que escolher dois desses números tais que sejam distintos, e um será para o numerador e o outro para o denominador: $6.5 = 30$ frações.

---

10. Resposta: a) $7.6.5.4.3.2.1 = 7! = 5040$

b) $\underline{\ L\ }$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$: $6.5.4.3.2.1 = 6! = 720$

c) $\underline{\ L\ }$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\ E\ }$: $5.4.3.2.1 = 5! = 120$

d) $\underline{\ vogais\ }$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$: $4.6.5.4.3.2.1 = 4.6! = 2880$

e) $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\ ANE\ }$: $5.4.3.2.1 = 5! = 120$

f) $(3!).(5.4.3.2.1) = 3!.5! = 720$

11.

Respostas: Podemos resolver este problema pensando nos anagramas formados pela palavra: **DDDDCCC**; onde 'D - representa andar para direita' e 'C - representa andar para cima'. Assim resolvemos considerando todos os anagramas possíveis das 7 letras, mas não podemos esquecer das letras repetidas (D $\rightarrow$4 e C $\rightarrow$3) temos então a solução: $\frac{7!}{4!3!} = 35$.

12.

Resposta: (alternativa D)

A formiguinha deve mover-se em três quadradinhos para a direita e três para baixo, total de possibilidades: $\frac{(3+3)!}{3!3!} = 20$:

---

13. Resolução: Se o teste tem 15 afirmações, temos que acertar 80% de 15, i.é., $0,8.15 = 12$ questões.

Assim, temos que acertar no "mínimo" 12 questões, mas podemos acertar também 13, 14 ou 15 questões. Portanto, temos que calcular de quantas maneiras se pode acertar 12, 13, 14 ou 15 questões da prova.

Portanto, temos que acertar 12 das 15 questões (C_{15}^{12}) ou temos que acertar 13 das 15 questões (C_{15}^{13}) ou temos que acertar 14 das 15 questões (C_{15}^{14}) ou temos que acertar todas as questões (C_{15}^{15}). Utilizando o princípio aditivo, já que estes eventos são disjuntos, temos:

$C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15} = 455 + 105 + 15 + 1 = 576$ maneiras de acertar no mínimo 12 questões (pelo menos 80% de acertos).

---

14. Resposta: relação de Stieffel: $\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 20 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \end{pmatrix}$

---

15. Resposta: $\sum_{k=0}^{6} \begin{pmatrix} 6 \\ \text{k} \end{pmatrix} = 2^6 = 64$

---

16. Resposta: $\begin{pmatrix} \text{n} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{n} \end{pmatrix} = 4096$

$\begin{pmatrix} \text{n} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{n} \end{pmatrix} = 2^n$

$4096 = 2^{12} = 2^n \Rightarrow n = 12.$

---

17. Resposta: Note que: $1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}, 9 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, 36 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, 84 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$; então, $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 126$, e $y = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 126.$

---

18. Resposta: $\begin{pmatrix} \text{n} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{n} \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \text{n} \\ \text{n} \end{pmatrix} = 32768$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$32768=2^{15}=2^n \Rightarrow n=15.$

---

19. Resposta: Pela relação de Stiffel: $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$

$\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{9}{4}$

$\binom{9}{4}+\binom{9}{5}=\binom{10}{5}$

$\binom{10}{5}+\binom{10}{6}=\binom{11}{6}=462.$

---

20. Resposta: $(4+\sqrt{2})^4=\binom{4}{0}4^4(\sqrt{2})^0+\binom{4}{1}4^3(\sqrt{2})^1+\binom{4}{2}4^2(\sqrt{2})^2+\binom{4}{3}4^1(\sqrt{2})^3+$
$\binom{4}{4}4^0(\sqrt{2})^4=256+256\sqrt{2}+192+32\sqrt{2}+4=452+288\sqrt{2}.$

---

21. Resposta: temos que $(a+b)^6=4096=2^{12} \Rightarrow (a+b)^3=2^6=64.$

---

22. Resposta: comparando com os coeficientes binomiais na linha-5 do triângulo de Pascal; temos que $91^5+5.91^4+10.91^3+10.91^2+5.91+1=(91+1)^5$.
daí, $N=(92)^5$. Como queremos saber os divisores positivos de N : $N=(92)^5=(2^2.23)^5=(2^{10}).(23^5)$.
note que: $N=(2^a).(23^b); a\in\{0,1,2,\ldots,10\}$ e $b\in\{0,1,2,\ldots,5\}$; o que resulta no cálculo dos divisores: $C^1_{11}.C^1_6=11.6=66.$

---

23. Resposta: Para acharmos a soma dos coeficientes, basta determinarmos os valores para $x=1$ e $y=1$; então: $(5x+y)^3=(5+1)^3=6^3=216$

---

24. Resposta: Para $x=1$ e $y=1$; então: $(2x+y)^5=(2+1)^5=3^5=243$

---

25. Resposta: (alternativa B)

Para $x = 1$ e $y = 1$; então: $(1+1)^m = 1024 = 2^{10} \Rightarrow 2^m = 2^{10} \Rightarrow m = 10$.

Assim, $A(10,2) = \frac{10!}{8!} = 10.9 = 90$ arranjos.

---

26. Resposta: (alternativa B)

O termo geral de um binômio é dado por $T_{p+1} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} y^p x^{n-p}$.

Como um dos termos possui parte literal x^6y^9, temos: $\begin{cases} n-p=6 \\ p=9 \end{cases} \Rightarrow n = 15$.

Assim, $T_{p+1} = \begin{pmatrix} 15 \\ p \end{pmatrix} x^{15-p}y^p$.

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{\begin{pmatrix} 15 \\ p \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ p+1 \end{pmatrix}} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{p+1}{15-p} = \frac{7}{9} \Rightarrow 16p = 96 \Rightarrow p = 6,$$

então é o 7o termo.

---

27. Resposta: $x_1 + x_2 + x_3 = 20; x_1 \geq 5, x_2 \geq 5, x_3 \geq 5$. Assim distribuindo 5 para cada criança, restam $20 - 15 = 5$ para serem distribuídos; o que equivale a resolver : $x_1 + x_2 + x_3 = 5; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$. Logo, calculamos: $\begin{pmatrix} 5+3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 21$.

---

28. Resposta: Assim distribuindo 3 para cada variável, restam $30 - 15 = 15$; o que equivale a resolver : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 15$; sendo que x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são números inteiros ≥ 0. temos que resolver as equações:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \end{array}\right\}$$ Neste caso, $n = 5$ e p varia de 0 a 15, ou seja,

$$\sum_{p=0}^{15} \begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{15} \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = 3876.$

Assim, este problema é equivalente a determinar o número de soluções para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15;$$

ou seja, $n = 6$ e $p = 15$. Note que **a variável** x_6 **assume os possíveis valores das desigualdades**.

Daí temos: $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+6-1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = 3876.$