Lista de exercícios

Fábio Braga, João Lucas Lima, Luca Argolo, Thiago Vieira

September 3, 2021

Questão 1. No caso φ, por ordem de precedência, a inserção de parêntesis se dará na forma:

$$p \vee q \rightarrow p \rightarrow r$$

$$(p \vee q) \rightarrow p \rightarrow r$$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\varphi = ((p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

No caso ψ, por ordem de precedência, a inserção de parêntesis se dará na forma:

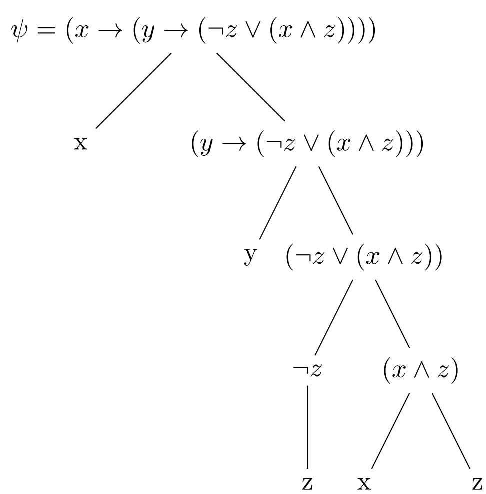
$$x \rightarrow y \rightarrow \neg z \vee x \wedge z$$

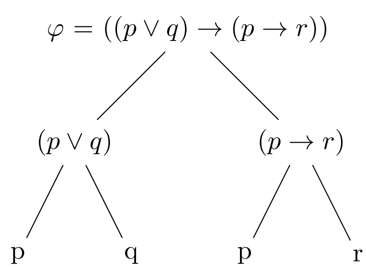
$$x \rightarrow y \rightarrow \neg z \vee (x \wedge z)$$

$$x \rightarrow y \rightarrow (\neg z \vee (x \wedge z))$$

$$x \rightarrow (y \rightarrow (\neg z \vee (x \wedge z)))$$

$$\psi = (x \rightarrow (y \rightarrow (\neg z \vee (x \wedge z))))$$





Questão 2 (Fórmulas do Exemplo 3.5 do script.)**.** Seja $\varphi = (\psi \wedge \chi)$. Pela hipótese da indução, ψ tem um número par de parênteses que vamos chamar de 2m. Também pela hipótese, temos que χ tem um número par de parênteses que chamaremos de 2n. Logo φ tem um número de parênteses igual à $2+2n+2m = 2(1+n+m)$. Este número é par.

Seja $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$. Pela hipótese da indução, ψ tem um número par de parênteses que vamos chamar de 2m. Também pela hipótese, temos que χ tem um número par de parênteses que chamaremos de 2n. Logo φ tem um número de parênteses igual à $2+2n+2m = 2(1+n+m)$. Este número é par.

Questão 3 (Exercício 3.8(a))**.** Seja M um conjunto, $S \subseteq M$ um subconjunto de M, $Pw(M)$ o conjunto potência de M, e χ um elemento de $Pw(M)$. $\{0,1\}^M$ é o conjunto dado por funções que podem ser descritas por $f_s : M \rightarrow \{0,1\}$, $f_s :=$ $m \mapsto \begin{Bmatrix} 1, m \in S, \, S \subseteq M \\ 0, c.c. \end{Bmatrix}$(chamada de funções indicativas ou características).
Podemos criar a função que relaciona f_s e χ:
$h : \{0,1\}^M \rightarrow Pw(M)$
$h := f_s \mapsto \chi, se\ s = \chi$. Essa função é bijetora pelo fato de que, para cada s em $\{0,1\}^M$, existe um χ igual em $Pw(M)$.

Questão 4.

1. i $\Rightarrow$ ii
   Seja Φ insatisfazível, ou seja, $Mod(\Phi) = \varnothing$
   Por definição de consequência lógica,

$$\Phi \Vdash \varphi \text{ se } Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\varphi\})$$

   Por definição, $\varnothing$ está contido em qualquer conjunto.
   Portanto, $\forall \varphi$, $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\varphi\})$, ou seja:

$$\Phi \Vdash \varphi, \forall \varphi \in \Phi$$

2. ii $\Rightarrow$ iii
   Seja Φ um conjunto de fórmulas e uma fórmula φ tal que

$$\Phi \Vdash \varphi, \forall \varphi \in \Phi$$

   Assumindo $\varphi = \perp$, podemos afirmar, pela hipótese adotada que

$$\Phi \Vdash \perp$$

3. iii $\Rightarrow$ i
   Seja Φ um conjunto de fórmulas tal que

$$\Phi \Vdash \perp$$

   Por definição de consequência lógica,

$$\Phi \Vdash \perp \text{ se } Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\perp\})$$

Por definição de modelo, temos

$$Mod(\Phi) := \{v \in 2^v | v \vDash \Phi\}$$

No entando, no caso de $\{\perp\}$, $\perp$ nunca é satisfeita por nenhuma valoração. Ou seja,

$$v \nvDash \perp :\Leftrightarrow v(\perp) = 0, \text{ logo}$$

$$Mod(\{\perp\}) = \varnothing$$

Como

$$\Phi \ \Vdash \perp \text{ e}$$

$$\phi \Vdash \perp \text{ se } Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\perp\}) \text{ e}$$

$$Mod(\{\perp\}) = \varnothing$$

Temos que

$$Mod(\Phi) = \varnothing$$

Questão 5.

1. $\Vdash \varphi$
   Para toda $v \in 2^V, v \vDash \varnothing$ (uma vez que para $v \vDash \Phi$, para um conjunto de fórmulas Φ, é necessário que $v \vDash \varphi, \forall \varphi \in \Phi$. Como $\nexists \varphi \in \varnothing, v \vDash \varnothing$).
   Portanto, basta que $Mod(\{\varphi\})(\varphi$ seja válida) para que $\Vdash \varphi$

2. $\{\varphi\} \Vdash \varphi \vee \psi$
   Seja $v \in 2^v$ tal que $v \vDash \varphi$. De imediato, pela definição de $\vee$, segue que $v \vDash \varphi \vee \psi$

3. $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \Vdash \psi$
   Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \varphi$ e $v \vDash \varphi \rightarrow \psi$
   A partir de $v \vDash \varphi \rightarrow \psi$, pela definição de $\rightarrow$, temos

   $$v \nvDash \varphi \text{ ou}$$

   $$v \vDash \psi$$

   Como, por hipótese, $v \vDash \varphi$, então:

   $$v \vDash \psi$$

4. $\{\varphi \to \psi\} \Vdash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$
   Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash \varphi \to \psi$
   A partir de $v \vDash \varphi \to \psi$, pela definição de $\to$, temos:

   (a) $v \nvDash \varphi$
   Se $v \vDash \chi$, então $v \vDash (\chi \vee \varphi)$ e $v \vDash (\chi \vee \psi)$. Assim, vale a consequência lógica.
   Se $v \nvDash \chi$, então $v \nvDash (\chi \vee \varphi)$. Pela definição de $\to$, portanto, $v \vDash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$ e, portanto, valeria a consequência lógica.

   (b) $v \vDash \psi$
   Então, $v \vDash \chi \vee \psi$. Portanto, valeria a sequência lógica.

   Vale a sequência lógica.

5. $\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \theta \to \psi\} \Vdash (\varphi \wedge \theta) \to \chi$
   Seja $v \in 2^V$ tal que $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$ e $v \vDash \theta \to \psi$
   A partir de $v \vDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$ e pela definição de $\to$ e $\wedge$, temos:

   (a) $v \vDash \psi$
   Nesse caso, pela definição de $\wedge$, temos:

   $$v \nvDash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$$

   Já que não satisfaz o consequente, satisfazendo o antecedente.

   (b) $v \vDash \psi$
   Nesse caso, pela definição de $\to$, temos:

   $$v \nvDash \theta \to \psi$$

   Já que não satisfaz o antecedente, satisfazendo o consequente.

   Portanto, podemos afirmar que

   $$\exists \alpha \in \{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \theta \to \psi\} \text{ tal que } v \nvDash \alpha$$

   Logo, não vale a sequência lógica.

Questão 6. Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \wedge \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi) = v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \wedge \chi)$ (por def.) $= f_\wedge(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\wedge(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\wedge(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \wedge \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.
Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \vee \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi) = v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \vee \chi)$ (por def.) $= f_\vee(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\vee(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\vee(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \vee \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.
Sejam $\varphi, \psi, \chi \in F_m$ tal que $\varphi = \psi \to \chi$. Supomos que $v_1(\psi) = v_2(\psi)$ e $v_1(\chi) = v_2(\chi)$ (por hipótese). Aplicando a definição de $v_1(\varphi) = v_1(\psi \to \chi)$ (por def.) $= f_\to(v_1(\psi), v_1(\chi))$, usando a hipótese $f_\to(v_1(\psi), v_1(\chi)) = f_\to(v_2(\psi), v_2(\chi))$, que por definição, é $v_2(\psi \to \chi)$ que é $v_2(\varphi)$. o que prova a indução.