UFBa - IME - DMAT —- Matemática Discreta I(MATA42) - Profa: Isamara

Respostas - Lista de Exercícios.3 - Relações

1.

(a) $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA, ou seja, o dobro de qualquer elemento $x \in \mathbb{N}$ resultará num número par; portanto $\mathcal{R}$ é IRREFLEXIVA.

$\mathcal{R}$ é SIMÉTRICA pois considerando o par $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$, tais que x é par e y é ímpar (ou x é ímpar e y é par) a soma será um número ímpar, então garantimos que o par $\langle y; x\rangle \in \mathcal{R}$ pois a soma é comutativa; e assim, $\mathcal{R}$ não é ASSIMÉTRICA.

$\mathcal{R}$ não é ANTI-SIMÉTRICA pois temos os pares $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y; x\rangle \in \mathcal{R}$ com $x \neq y$.

$\mathcal{R}$ não é TRANSITIVA: considerando os pares $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y; z\rangle \in \mathcal{R}$ não garantimos $\langle x; z\rangle \in \mathcal{R}$; contra-exemplo: $\langle 1; 2\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle 2; 1\rangle \in \mathcal{R} \not\Rightarrow \langle 1; 1\rangle \in \mathcal{R}$,pois $1 + 1 = 2$ é par.

$\mathcal{R}$ não é CONECTADA porque não conseguiremos uma conecção entre todos os números naturais, i.é, não teremos pares ordenados formados entre os números pares ou entre os números ímpares; consequentemente, $\langle x; y\rangle \notin \mathcal{R}$ se x for par e y par ou, se x for ímpar e y ímpar, ou se $x = y$.

$\mathcal{R}$ não é de EQUIVALÊNCIA porque não é reflexiva e nem transitiva.

(b) $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA, ou seja, $\forall x \in \mathbb{Z}^*, \langle x; x\rangle \notin \mathcal{R}$ pois $x \neq 2x$. $\mathcal{R}$ não é IRREFLEXIVA porque o par $\langle 0; 0\rangle \in \mathcal{R}$ pois $0 = 2.0$.

$\mathcal{R}$ não é SIMÉTRICA pois considerando o par $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$, tais que x é múltiplo de y o par $\langle y; x\rangle \notin \mathcal{R}$; pois $y = \frac{1}{2}x$; e assim, $\mathcal{R}$ é ASSIMÉTRICA.

$\mathcal{R}$ é ANTI-SIMÉTRICA pois, como $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y; x\rangle \notin \mathcal{R}$ não precisamos concluir $x = y$.

$\mathcal{R}$ não é TRANSITIVA: considerando os pares $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}; x = 2y$ e $\langle y; z\rangle \in \mathcal{R}; y = 2z \Rightarrow \langle x; z\rangle \notin \mathcal{R}$, pois $x = 2y = 2(2z) = 4z$.

$\mathcal{R}$ não é CONECTADA porque não conseguiremos pares ordenados entre todos os números inteiros, i.é, não teremos pares ordenados formados entre os números inteiros tais que o primeiro não seja o dobro do segundo.

$\mathcal{R}$ não é de EQUIVALÊNCIA porque não é reflexiva, nem simétrica e nem transitiva.

(c) $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \langle x; x\rangle \notin \mathcal{R}$ pois $x \neq -x$. $\mathcal{R}$ não é IRREFLEXIVA porque o par $\langle 0; 0\rangle \in \mathcal{R}$ pois $0 = -0$.

$\mathcal{R}$ é SIMÉTRICA pois considerando o par $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$, tais que x é o oposto de y o par $\langle y; x\rangle \in \mathcal{R}$; pela comutatividade; e assim, $\mathcal{R}$ não é ASSIMÉTRICA.

$\mathcal{R}$ não é ANTI-SIMÉTRICA pois, $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle y; x\rangle \in \mathcal{R}$ para $x \neq y$.

$\mathcal{R}$ não é TRANSITIVA; porque considerando a condição: $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}; x = -y$ e $\langle y; z\rangle \in \mathcal{R}; y = -z(sse, z = x) \Rightarrow \langle x; z\rangle \notin \mathcal{R}; (i.é, \langle x; x\rangle \notin \mathcal{R})$.

$\mathcal{R}$ não é CONECTADA porque não conseguiremos pares ordenados entre todos os números reais, i.é, não teremos pares ordenados formados entre os números reais iguais diferentes de zero, entre os positivos, e entre os negativos.

$\mathcal{R}$ não é de EQUIVALÊNCIA porque não é reflexiva e nem transitiva.

(d) $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}, \langle x; x\rangle \notin \mathcal{R}$ pois $x \neq x + 1$. $\mathcal{R}$ é IRREFLEXIVA.

$\mathcal{R}$ não é SIMÉTRICA pois considerando o par $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}$, tal que $x = y+1$; o par $\langle y; x\rangle \notin \mathcal{R}$; pois $y = x - 1$; e assim, $\mathcal{R}$ é ASSIMÉTRICA.

$\mathcal{R}$ é ANTI-SIMÉTRICA pois, $\langle x; y\rangle \notin \mathcal{R}$ e $\langle y; x\rangle \notin \mathcal{R}$ então não precisa verificar a conclusão $x = y$.

$\mathcal{R}$ não é TRANSITIVA: considerando os pares $\langle x; y\rangle \in \mathcal{R}; x = y + 1$ e $\langle y; z\rangle \in \mathcal{R}; y = z + 1 \Rightarrow \langle x; z\rangle \notin \mathcal{R}$, pois $x = y + 1 = (z + 1) + 1 = z + 2$.

$\mathcal{R}$ não é CONECTADA porque não conseguiremos pares ordenados entre todos os números reais, i.é, não teremos pares ordenados formados entre os números tais que $x \neq y + 1$.

$\mathcal{R}$ não é de EQUIVALÊNCIA porque não é reflexiva e nem transitiva.

2.

(a) $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_{\mathbb{N}} = \mathcal{R} \cup \{\langle x; x\rangle\,; \forall x \in \mathbb{N}\}$

$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$

$tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}^m = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 = \nabla_{\mathbb{N}}$;

pois, $\mathcal{R}^2 = RoR = \{\langle x; y\rangle\,; \forall x, y \in \mathbb{N} \mid x + y \text{ é par }\} = \overline{\mathcal{R}}$;

$\mathcal{R}^3 = RoR^2 = \mathcal{R}, \ldots$

(b) $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_{\mathbb{Z}} = \mathcal{R} \cup \{\langle x; x\rangle\,; \forall x \in \mathbb{Z}\}$

$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \cup \{\langle y; x\rangle \mid \langle x; y\rangle \in \mathcal{R}\} = \mathcal{R} \cup \{\langle y; x\rangle \mid y = \frac{1}{2}x\}$

$tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}^m = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^2\cup\mathcal{R}^3\cup\mathcal{R}^4\cup\mathcal{R}^5\cup\ldots = \{\langle x;y\rangle \mid x=2y\vee x=4y\vee x = 8y\vee x=16y\vee\ldots\} = \{\langle x;y\rangle \mid x=2^m y;\forall m\in\mathbb{N}^*\}$;

pois, $\mathcal{R}^2 = \{\langle x;y\rangle \mid x=4y\}, \mathcal{R}^3 = \{\langle x;y\rangle \mid x=8y\}, \mathcal{R}^4 = \{\langle x;y\rangle \mid x=16y\}, \mathcal{R}^5 = \{\langle x;y\rangle \mid x=32y\}$;

$\vdots$

$\mathcal{R}^m = \{\langle x;y\rangle \mid x=2^m y; m\in\mathbb{N}^*\}$

(c) $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\cup\Delta_{\mathbb{R}} = \mathcal{R}\cup\{\langle x;x\rangle;\forall x\in\mathbb{R}\}$

$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$

$tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}^m = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^2\cup\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^2\cup\ldots = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^2 =$

$\mathcal{R}\cup\Delta_{\mathbb{R}} = \{\langle x;y\rangle\in\mathbb{R}\mid x=-y\vee x=y\}$.

(d) $ref(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\cup\Delta_{\mathbb{N}} = \mathcal{R}\cup\{\langle x;x\rangle;\forall x\in\mathbb{R}\}$

$sim(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\cup\{\langle y;x\rangle \mid \langle x;y\rangle\in\mathcal{R}\} = \mathcal{R}\cup\{\langle y;x\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y=x-1\}$

$tra(\mathcal{R}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}^m = \mathcal{R}\cup\mathcal{R}^2\cup\mathcal{R}^3\cup\mathcal{R}^4\cup\ldots = \{\langle x;y\rangle\in\mathcal{R}\mid x=y+1\vee x=y+2\vee x = y+3\vee\ldots\} = \{\langle x;y\rangle\in\mathcal{R}\mid x=y+n;\forall n\in\mathbb{N}^*\}$.

---

3. $\mathcal{R} := \{\langle 3;3\rangle,\langle 3;5\rangle,\langle 3;7\rangle,\langle 5;3\rangle,\langle 5;5\rangle,\langle 5;7\rangle,\langle 7;3\rangle,\langle 7;5\rangle,\langle 7;7\rangle\}$ e $\mathcal{S} := \{\langle 3;3\rangle,\langle 5;5\rangle,\langle 7;7\rangle\}$; note que $\mathcal{R}=\nabla_A$ e $\mathcal{S}=\Delta_A$.

(a) $\widetilde{\mathcal{R}} = \{\langle 3;3\rangle,\langle 5;3\rangle,\langle 7;3\rangle,\langle 3;5\rangle,\langle 5;5\rangle,\langle 7;5\rangle,\langle 3;7\rangle,\langle 5;7\rangle,\langle 7;7\rangle\} = \mathcal{R}$;

$\widetilde{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{R}}\cup\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{R}\cup\mathcal{S} = \mathcal{R}$; e $\widetilde{\widetilde{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$.

(b) $\overline{\mathcal{R}} = \emptyset$; $\overline{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} = \emptyset$; $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$.

(c) $\mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}$; $\mathcal{R}\circ\mathcal{S} = \mathcal{R}$; $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}$; $\mathcal{S}^3 = \mathcal{S}^2\circ\mathcal{S} = \mathcal{S}\circ\mathcal{S} = \mathcal{S}$.

(d) $[A]_{\mathcal{R}} = \{[3]_{\mathcal{R}},[5]_{\mathcal{R}},[7]_{\mathcal{R}}\} = \{\{3,5,7\}\}$ pois, $[3]_{\mathcal{R}} = [5]_{\mathcal{R}} = [7]_{\mathcal{R}} = \{3,5,7\} = A$.

$[A]_{\mathcal{S}} = \{[3]_{\mathcal{S}},[5]_{\mathcal{S}},[7]_{\mathcal{S}}\} = \{\{3\},\{5\},\{7\}\}$ pois, $[3]_{\mathcal{S}} = \{3\}, [5]_{\mathcal{S}} = \{5\}, [7]_{\mathcal{S}} = \{7\}$.

4.

(a) Considerando $A_1 = \{0,6,8\}, A_2 = \{2,4\}, A_3 = \{10\}$ então, o conjunto $\mathcal{P}$ é uma cobertura para A pois $A = A_1\cup A_2\cup A_3$.

(b) $\mathcal{R} = \{\langle 0;0\rangle, \langle 0;6\rangle, \langle 0;8\rangle, \langle 6;0\rangle, \langle 6;6\rangle, \langle 6;8\rangle, \langle 8;0\rangle, \langle 8;6\rangle, \langle 8;8\rangle,$
$\langle 2;2\rangle, \langle 2;4\rangle, \langle 4;2\rangle, \langle 4;4\rangle, \langle 10;10\rangle\}$ é uma relação de equivalência.

---

5. É possível determinar por $\mathcal{R}$ uma partição de A porque é uma relação de Equivalência. Para tal, vamos determinar as classes de equivalência : $[1]_{\mathcal{R}} = [3]_{\mathcal{R}} = [5]_{\mathcal{R}} = \{1,3,5\}$,; $[7]_{\mathcal{R}} = \{7\}$, $[9]_{\mathcal{R}} = [11]_{\mathcal{R}} = \{9,11\}$, $[13]_{\mathcal{R}} = \{13\}$, Assim, uma partição $\mathcal{P} = \{[1]_{\mathcal{R}}, [7]_{\mathcal{R}}, [9]_{\mathcal{R}}, [13]_{\mathcal{R}}\}$; i.é., $\mathcal{P} = \{\{1,3,5\},\{7\},\{9,11\},\{13\}\}$.

---

6. É possível determinar por $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid x+y \text{ é par }\}$ uma partição de $A := \{0,1,2,3\}$ porque é uma relação de Equivalência em A.
Determinando as classes de equivalência: $[0]_{\mathcal{R}} = [2]_{\mathcal{R}} = \{0,2\}$,; $[1]_{\mathcal{R}} = [3]_{\mathcal{R}} = \{1,3\}$, Assim, uma partição $\mathcal{P} = \{[0]_{\mathcal{R}}, [1]_{\mathcal{R}}\}$; i.é., $\mathcal{P} = \{\{0,2\},\{1,3\}\}$.

7.

(a) $[0]_{\equiv_4} = \{\ldots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\ldots\}$
$[1]_{\equiv_4} = \{\ldots,-11,-7,-3,1,5,9,13,\ldots\}$
$[2]_{\equiv_4} = \{\ldots,-10,-6,-2,2,6,10,14,\ldots\}$
$[3]_{\equiv_4} = \{\ldots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\ldots\}$

(b) = (c) $\mathcal{P} = [\mathbb{Z}]_{\equiv_4} = \{[0]_{\equiv_4}, [1]_{\equiv_4}, [2]_{\equiv_4}, [3]_{\equiv_4}\}$.

8.

(a) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid x \text{ é mais alto que } y\}$.
$\mathcal{R}$ é IRREFLEXIVA, ASSIMÉTRICA , ANTI-SIMÉTRICA e TRANSITIVA.

(b) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid x \text{ e } y \text{ nasceram no mesmo dia }\}$.
$\mathcal{R}$ é REFLEXIVA, SIMÉTRICA e TRANSITIVA.

(c) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid x \text{ e } y \text{ tem um avô em comum }\}$.
$\mathcal{R}$ é REFLEXIVA, SIMÉTRICA e TRANSITIVA.

9.

(a) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid$ Todos que visitaram a página x também visitaram a página $y\}$.

$\mathcal{R}$ é REFLEXIVA e TRANSITIVA.

(b) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid$ Não existem links em comum na página x e na página $y\}$.

$\mathcal{R}$ é SIMÉTRICA.

(c) $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \mid$ Existe pelo menos um link em comum nas duas páginas x e $y\}$.

$\mathcal{R}$ é SIMÉTRICA.

---

10. (V) $\mathcal{R}$ é uma relação REFLEXIVA se, e somente se, $\forall x \in A; \langle x;x\rangle \in \mathcal{R}$.

(F)Se $\mathcal{R} := \{\langle 1;1\rangle, \langle 1;2\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 2;1\rangle\}$ uma relação em $A = \{1,2,3\}$; então $\mathcal{R}$ não é REFLEXIVA pois o par ordenado $\langle 3;3\rangle \notin \mathcal{R}$; e $\text{ref}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \triangle_A = \mathcal{R} \cup \{\langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle\}$.

(F)Se uma relação $\mathcal{R}$ em A não é REFLEXIVA então $\exists x \in A$ tal que $\langle x;x\rangle \notin \mathcal{R}$ e para $\mathcal{R}$ ser IRREFLEXIVA temos que $\forall x \in A, \langle x;x\rangle \notin \mathcal{R}$. Contra-exemplo: $\mathcal{R} := \{\langle 1;1\rangle, \langle 1;2\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 2;1\rangle\}$ uma relação em $A = \{1,2,3\}$; $\mathcal{R}$ não é reflexiva (porque $\langle 3;3\rangle \notin \mathcal{R}$) e não é irreflexiva ($\langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle \in \mathcal{R}$).

(F)Se $\mathcal{S}$ uma relação em A é SIMÉTRICA então $\mathcal{S}$ não é ASSIMÉTRICA mas $\mathcal{S}$ pode ser uma relação ANTI-SIMÉTRICA.

(F) Contra-exemplo: $\mathcal{R} := \{\langle 1;1\rangle, \langle 1;2\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 2;1\rangle, \langle 3;3\rangle, \}$ uma relação em $A = \{1,2,3\}$; é REFLEXIVA todavia, $\mathcal{R}$ não é ANTI-SIMÉTRICA.

(V)Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A; então $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva, logo os seus fechos: $\text{ref}(\mathcal{R}) = \text{sim}(\mathcal{R}) = \text{tra}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

(F) Uma relação $\mathcal{R}$ é dita ser conectada se, e somente se, $\nexists x, y \in A$ tais que $\langle x;y\rangle \notin \mathcal{R} \wedge \langle y;x\rangle \notin \mathcal{R}$. Neste caso, $\mathcal{R} := \{\langle x;y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$ é CONECTADA pois garantimos uma conecção entre todos os elementos do conjunto, enquanto que $\mathcal{S} := \{\langle a;b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b+1\}$ não é CONECTADA porque teremos elementos do conjunto que não estarão conectados num par ordenado em $\mathcal{S}$, por exemplo nem o par $\langle 1;3\rangle \in \mathcal{S}$ e nem o par $\langle 3;1\rangle \in \mathcal{S}$.

(V) $\forall \mathcal{R}$ em A, temos que: $\text{ref}(\mathcal{R})$ é a menor relação reflexiva em A que contém $\mathcal{R}$; $\text{sim}(\mathcal{R})$ é a menor relação simétrica em A que contém $\mathcal{R}$; e $\text{tra}(\mathcal{R})$ é a menor relação transitiva em A que contém $\mathcal{R}$; porém, nada nos garante que a união destes conjuntos será uma relação de EQUIVALÊNCIA. Por exemplo: Seja $\mathcal{R} := \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;2\rangle\}$ uma relação em $A = \{1,2,3\}$; assim temos: $\text{ref}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \triangle_A = \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;2\rangle, \langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle\}$; $\text{sim}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \widetilde{\mathcal{R}} = \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;2\rangle, \langle 3;1\rangle, \langle 2;3\rangle\}$; e $\text{tra}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 = \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;2\rangle, \langle 1;2\rangle\}$; fazendo a união destes conjuntos: $\text{ref}(\mathcal{R}) \cup \text{sim}(\mathcal{R}) \cup \text{tra}(\mathcal{R}) =$

$\{\langle 1;3\rangle, \langle 3;2\rangle, \langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle, \langle 3;1\rangle, \langle 2;3\rangle, \langle 1;2\rangle\}$ temos uma relação que não é de equivalência.

---

11. (i) Por definição, uma FAMÍLIA $\{A_i\}_{\{i\in I\}}$ de subconjuntos não vazios de A é uma COBERTURA de A se, e somente se, $\bigcup_{\{i\in I\}}\{A_i\} = A$. Logo a afirmação é falsa.
(ii) Uma COBERTURA de A será também uma PARTIÇÃO de A quando tivermos que os elementos da família $\{A_i\}_{\{i\in I\}}$ são dois a dois disjuntos. Logo a afirmação é falsa.
(iii) Uma relação $\mathcal{R}$ definida em A determinará uma PARTIÇÃO de A apenas quando $\mathcal{R}$ for uma relação de equivalência em A.

12.

(i) $\mathcal{R}\cup\mathcal{S} = \{\langle x;y\rangle \mid \langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \vee \langle x;y\rangle \in \mathcal{S}\}$.

(1) $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ é relação reflexiva:
$\forall x \in A \Rightarrow \langle x;x\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S}$; pois, $\langle x;x\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow (V)$ ou $\langle x;x\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow (V)$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são reflexivas.

(2) $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ é relação simétrica:
$(\forall x,y \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S})$; pois, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}$ ou $\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são simétricas.

(3) $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ não é relação transitiva:
$(\forall x,y,z \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}\cup\mathcal{S})$; pois, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}$ ou $\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são transitivas.
Todavia, podemos ter $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{S} \not\Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R} \vee \langle x;z\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \notin \mathcal{R}\cup\mathcal{S}$.

Logo, generalizando, por (1),(2) e (3) concluimos que $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ não é relação de Equivalência.

(ii) $\mathcal{R}\cap\mathcal{S} = \{\langle x;y\rangle \mid \langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x;y\rangle \in \mathcal{S}\}$.

(1) $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ é relação reflexiva:
$\forall x \in A \Rightarrow \langle x;x\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S}$; pois, $\langle x;x\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x;x\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são reflexivas.

(2) $\mathcal{R}\cap\mathcal{S}$ é relação simétrica:
$(\forall x,y \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S})$; pois, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}$ e

$\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;x\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são simétricas.

(3) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é relação transitiva:

$(\forall x,y,z \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S})$; pois, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}$ e $\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são transitivas.

Logo, por (1),(2) e (3) concluimos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é relação de Equivalência.

(iii) $\mathcal{R} - \mathcal{S} = \{\langle x;y\rangle \mid \langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x;y\rangle \notin \mathcal{S}\}$.

(1) $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ não é relação reflexiva.

$\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são reflexivas; então, $\forall x \in A \Rightarrow \langle x;x\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x;x\rangle \in \mathcal{S}$; logo, $\langle x;x\rangle \notin \mathcal{R} - \mathcal{S}$.

(2) $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ é relação simétrica:

$(\forall x,y \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}\cap\mathcal{S})$; verificando esta afirmação:

$\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}$ pois $\mathcal{R}$ é relação simétrica. Temos que, $\mathcal{S}$ também é relação simétrica porém, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;x\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;y\rangle \notin \mathcal{R} - \mathcal{S} \wedge \langle y;x\rangle \notin \mathcal{R} - \mathcal{S}$ o que nos levaria a uma contradição.

(3) (i) Supondo que $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ é relação transitiva:

$(\forall x,y,z \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S})$.

Neste caso, $\mathcal{R}$ é relação transitiva; $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}$. E, assim, os pares $\langle x;y\rangle \notin \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \notin \mathcal{S} \wedge \langle x;z\rangle \notin \mathcal{S}$ já que pertencem ao conjunto $\mathcal{R}$.

(ii) por outro lado, $\forall x,y,z,w \in A$ tais que $x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq w \wedge z \neq w$; $\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}$. E os pares, $\langle x;z\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle z;w\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle x;w\rangle \in \mathcal{S}$; então, $(\forall x,y,z \in A)(\langle x;y\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ mas $\langle x;z\rangle \notin \mathcal{R} - \mathcal{S})$. Logo, não é transitiva.

Logo, por (1),(2) e (3) concluimos que $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ não é relação de Equivalência.

(iv) $\mathcal{R}o\mathcal{S} = \{\langle x;z\rangle \mid \langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R}\}$.

(1) $\mathcal{R}o\mathcal{S}$ é relação reflexiva:

$\forall x \in A \Rightarrow \langle x;x\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S}$; pois, $\langle x;x\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle x;x\rangle \in \mathcal{S}$ visto que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são reflexivas.

(2) $(\forall x,y,z \in A)(\langle x;z\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \Rightarrow \langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R})$; como, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são simétricas temos que $((\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle y;x\rangle \in \mathcal{S}) \wedge (\langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle z;y\rangle \in \mathcal{R})$. Então, para $\mathcal{R}o\mathcal{S}$

ser uma relação simétrica: $\langle x;z\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \Rightarrow \langle z;x\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \Rightarrow \langle z;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;x\rangle \in \mathcal{R}$ o que seria uma falsidade. Logo, $\mathcal{R}o\mathcal{S}$ não é relação simétrica.

(3) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são transitivas; temos que,

$(\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;w\rangle \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle x;w\rangle \in \mathcal{S}) \wedge (\langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle z;t\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle y;t\rangle \in \mathcal{R})$;

consequentemente, $\langle x;y\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle y;z\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow \langle x;z\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S}$.

Agora, verificando a composta: $\langle x;z\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \wedge \langle z;w\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \not\Rightarrow \langle x;w\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S}$.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, e as relações de equivalência em A:

$\mathcal{R} = \{\langle 1;2\rangle, \langle 2;1\rangle, \langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle\}$ $\mathcal{S} = \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;1\rangle, \langle 1;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle\}$,

e a composta $\mathcal{R}o\mathcal{S} = \{\langle 1;3\rangle, \langle 3;1\rangle, \langle 3;2\rangle, \langle 1;2\rangle, \langle 1;1\rangle, \langle 2;1\rangle, \langle 2;2\rangle, \langle 3;3\rangle\}$.

Note que: $\langle 2;1\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \wedge \langle 1;3\rangle \in \mathcal{R}o\mathcal{S} \wedge \langle 2;3\rangle \notin \mathcal{R}o\mathcal{S}$; pois $\langle 2;2\rangle \in \mathcal{S} \wedge \langle 2;3\rangle \notin \mathcal{R}$, consequentemente, a composta $\mathcal{R}o\mathcal{S}$ não é transitiva.

Concluimos por (1),(2) e (3) que a composta $\mathcal{R}o\mathcal{S}$ não é relação de equivalência.

(v) $\mathcal{R}^m$ =R o R^{m-1}; m $\in \mathbb{N}^*$.