Definição Sejam S e T conjuntos.

Uma função $f: S \to T$ (f de S em T) é um par $(S \times T, G)$, com $G \subseteq S \times T$ t.q.
$\forall x \in S \; \exists! \, y \in T \; ((x,y) \in G)$.

Se $f = (S \times T, G)$ é uma função, S é dito domínio de f e T contradomínio. G é chamado de gráfico de f.

Se $f : S \to T$ é uma função, o conjunto

$$f[S] \text{ ou } \mathrm{Im} f = \{ y \in T : \exists x \in S \, (f(x) = y) \} = \{ f(x) : x \in S \}$$

é dito *imagem* de f. $\mathrm{Im} f \subseteq T$

Se $\mathrm{Im} f = T$, f é dita *sobrejetora*.

Se $\forall x, x' \in S \, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$, f é *injetora*

f é *bijetora* se é injetora e sobrejetora.

Def: Uma relação entre S e T é um subconjunto R do produto cartesiano $S \times T$.

Em particular, uma relação (binária) em S é um subconjunto R de S^2.

É muito comum escrever xRy no lugar de $(x,y) \in R$.

x está na relação R com y

Uma relação R em S é dita:

- reflexiva se $\forall x \in S \left((x,x) \in R \right)$;
- irreflexiva se $\forall x \in S \left((x,x) \notin R \right)$;
- simétrica se $\forall x,y \in S \left((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \right)$;
- antissimétrica se $\forall x,y \in S \left(((x,y) \in R \text{ e } (y,x) \in R) \Rightarrow x = y \right)$;
- transitiva se $\forall x,y,z \in S \left(((x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R \right)$.

Exemplos (1) Seja $\Delta = \{(x,x) : x \in S\}$ é reflexiva (aliás, uma relação R é reflexiva sse $\Delta \subseteq R$); não é irreflexiva desde que $S \neq \emptyset$; é simétrica, pois:

$$\forall x,y \in S \, \big((x,y) \in \Delta \Rightarrow x=y \Rightarrow (y,x)=(x,x)=(x,y) \in \Delta\big).$$

Δ é antisimétrica também. De fato:

$$\forall x,y \in S \, \Big(\big((x,y) \in \Delta \; \boxed{\text{e } \cancel{(y,x)} \in \Delta}\big) \Rightarrow x=y\Big).$$

Uma relação R é simétrica e antisim. sse $R \subseteq \Delta$.

Δ é transitiva. $\forall x,y,z \in S$: se (x,y) e $(y,z) \in \Delta$, então $x=y$ e $y=z$, logo $x=z$ e isso implica $(x,z)=(x,x) \in \Delta$.

(1) A relação vazia ϕ.
ϕ é reflexiva sse $S = \phi$.
ϕ é simétrica, antis. , transitiva e irreflexiva.

(3) S^2 também denotada por ∇ (lê-se "nabla")
"relação total".
∇ não é irreflexiva (se $S \neq \phi$)
$\nabla \supseteq \Delta$ e, então, é reflexiva
∇ é simétrica pois $\forall x, y \in S\ ((y, x) \in \nabla)$ e o mesmo vale para a propriedade transitiva.
∇ é antissimétrica sse $S = \phi$ ou S é unitário.

(4) $S = \mathbb{N}$

$\forall x,y \in \mathbb{N} \left((x,y) \in R \text{ sse } \exists a \in \mathbb{N} \left(x + a = y \right) \right)$.

$R = \{ (x,y) : \exists a \in \mathbb{N} (x+a=y) \} =$

$= \{ (x, x+a) : x, a \in \mathbb{N} \}$

R é reflexiva?

$\forall x \in \mathbb{N},\ x+0 = x \Rightarrow x R x \Rightarrow$ R é reflexiva.

R é simétrica? Dado $x \in \mathbb{N}$ $\exists a \in \mathbb{N} \left((x+1) + a = x \right)$?

Já que $x R x+1$, vale $x+1 R x$?

Não é simétrica.

R é antissimétrica. $xRy \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N}\,(x+a=y)$,
$yRx \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N}\,(y+b=x)$. Logo, se xRy e $yRx \Rightarrow$
$x = y+b = (x+a)+b = x+(a+b) \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=b=0$
$\Rightarrow x=y$.

R é transitiva? Sejam $x,y,z \in \mathbb{N}$ t.q. xRy e yRz.
Então $\exists a,b \in \mathbb{N}$ t.q. $x+a=y$ e $y+b=z$. Logo:
$z = y+b = (x+a)+b = x+(a+b)$ e $a+b \in \mathbb{N}$, então
xRz pois $\exists c = a+b$ t.q. $x+c=z$.

$x \leq y$ sse $\exists a \in \mathbb{N}\ (x + a = y)$

Def.

Uma relação R em um conjunto S é uma relação de ordem (parcial) se R é reflexiva, antisim. e transitiva.

R é uma ordem estrita se é irreflexiva e transitiva.

R ordem $\Rightarrow$ $R \setminus \Delta$ é ordem estrita
$R - \Delta$

R ordem estrita $\Rightarrow$ $R \cup \Delta$ é ordem

Obs. R irrefl. e trans. $\Rightarrow$ R antis.

Relembrando R é antiss. sse:
$\forall x,y \in S\ ((xRy \text{ e } yRx) \Rightarrow x = y)$ sse
$\forall x,y \in S\ ((xRy \text{ e } x \neq y) \Rightarrow y \not R x)$

Provando a observação:
Sejam $x,y \in S$ t.q. $x \neq y$ e xRy. Se, por absurdo, yRx, como R é transitiva, seguiria xRx. Mas isto é absurdo pois R é irreflexiva. Logo $y \not R x$ e, então, R é antiss.

Seja S um conjunto e consideremos a relação $\subseteq$ em $\mathbb{P}(S)$. Ou seja:

$$X \subseteq Y \text{ sse } \forall x \in S \, (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

Exercício: Prove que $\subseteq$ é uma <u>ordem</u> em $\mathbb{P}(S)$.