

Lista de exercícios do Módulo II
(cai na prova 2)

1) Usando a definição de função diferenciável, verifique se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

são diferenciáveis em $(0,0)$.

— (2) Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de

$$f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$$

em $(2,2, f(2,2))$.

— (3) Determine o plano que seja paralelo à $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de

$$f(x,y) = x^2 + xy.$$

— (4) Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03 \text{ m}$.

As medidas internas são: altura $= 2 \text{ m}$ e raio da base $= 1 \text{ m}$. A caixa é sem tampa.

Calcule o valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

? (5) Suponha que, para todo x , $f(3x, x^3) = \arctg x$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$

(b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1, f(3,1))$.

? (6) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta

$$4x + 5y = 17.$$

? (7) Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1/6$

e paralelo ao plano $x+y+z=10$.

— (8) Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ no ponto $(2,2)$ e na direção de $\vec{v} = (1,2)$.

? (9) Admita que $T(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano (x,y) . Determine uma parametrização descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

— (10) Calcule o volume do conjunto dado.

— (a) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x+2y$.

— (b) $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}$

(11) Calcule $\iint_B f(x,y) dx dy$ sendo dados:

— (a) $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ e B é o retângulo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

? (b) $f(x,y) = (\cos 2y)\sqrt{4 - \cos^2 x}$ e B sendo o triângulo de vértices $(0,0), (0,\pi/2)$ e $(\pi/2, \pi/2)$.

— (c) $f(x,y) = \frac{y}{x+y^2}$ e B é o conjunto dos (x,y) tais que $1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

(12) Calcule o volume do conjunto dado:

— (a) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x+y \leq z \leq x+y+1$.

— (b) $x \leq z \leq 1-y^2$ e $x \geq 0$.

(13) Calcule:

(a) $\iint_B \sin(4x^2 + y^2) dx dy$ onde B é o conjunto $4x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

(b) $\iint_B (2x+y) \cos(x-y) dx dy$ onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\pi}{3})$ e $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$.

(14) Passe para coordenadas polares e calcule:

(a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$

(b) $\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy dx \quad (a > 0)$.

(15) Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ e $b > 0$).

(6) Sejam $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1+x^2 \leq y \leq 2+x^2, x \geq 0 \text{ e } y \geq x+x^2 \}$ e

$$B = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq v \leq 2, v \geq u \text{ e } u \geq 0 \}.$$

(a) Verifique que $B = \varphi(A)$ onde $(u,v) = \varphi(x,y)$, com $u = x$ e $v = y - x^2$.

(b) Verifique que a área de A é igual à área de B .