Lista de Exercícios Sobre Sequências e Séries

5. Determine os quatro primeiros termos de cada sequência, analise a sua convergência e encontre o limite caso exista:
a) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$, b) $x_n = (-1)^{n+1}e^n$, c) $b = \left\{\frac{\sqrt{n}}{n!}\right\}$, d) $y_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, e) $c_n = \frac{e^n+n^2}{e^{2n}-2n}$, f) $t_n = \frac{\text{sen}(2n+1)+n}{2n+1}$

6. Seja a sequência definida pela recorrência $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2+3}{2x_n} \end{cases}$. Sabendo que ele converge para valor positivo, encontre o seu limite.

7. Verifique a convergência das seguintes séries
(a) $\sum \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (c) $\sum \frac{2^{n+1}}{n^n}$, (d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$, (e) $\sum \frac{2+\cos n}{n}$, (f)$\sum \frac{1+(-1)^n}{4^{2n}}$, (g) $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$,
(h)$\sum \frac{2^n}{n!}$, (i) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$, (j) $\sum \frac{n!}{n^n}$.

8. Podemos aplicar o teste da razão no item (f) da questão acima? Justifique.

9. Analise a convergência das seguintes séries através do teste da raiz ou do teste da integral.
(a)$\sum \frac{1}{n^2}$, (b)$\sum (2n)^n$, (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$, (d) $\sum \frac{(-1)^n n}{(2n)^n}$

10. Obtenha o valor, usando séries geométricas:
(a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-7}$, (b) $2.5\,\underline{31}\,\underline{31}\,\ldots$

13. Encontre o centro e o raio de convergência das séries de potências
a) $\sum (-1)^n \sqrt{n} x^n$ b) $\sum \frac{e^n}{n!} x^n$ c) $\sum \frac{e^n}{2^{2n}} (x - \sqrt{3})^{3n-5}$

14. Determine o intervalo de convergência
a) $\sum n! x^n$ b) $\sum \frac{1}{n!} x^n$ c) $\sum \frac{n^3}{n+1} (x-2)^n$ d) $\sum \frac{\ln n}{2^n} (x - \sqrt{2})^n$

15. Encontre a série de potência de
(a) $\arctan(x^2)$, sabendo que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
(b) $\text{arcsen} x$, usando $\text{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e a série binomial $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$

16. Mostre que $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$

17. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

18. Mostre que a função $f(x) = \text{sen} x$ pode ser representado como série de Taylor em torno de $\frac{\pi}{2}$para todo x.

19. Seja $f(x) = \frac{1}{(2-x)^3}$

   (a) Encontre a Série de Maclaurin de f (sem usar a série binomial) e mostre que a série representa a função em $[-1, 1]$.

   (b) Usando a série obtida acima, encontre a expressão de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2-x)^3}dx$

20. Encontre a série de Taylor de $\cos x$ em torno de $\frac{\pi}{2}$.

21. Encontre a representação em série de potências e determine o seu raio de convergência
    a) $\ln\left(\frac{1}{2} + 3x\right)$ b) $f(\sqrt{x})$ onde $f(0) = 1$, $(f'(0) = 0$ e $f''(x) = \frac{1}{1+x^4}$

22. Verifique a convergência das séries
    a) $\sum \frac{(-1)^n}{e^n}$ b) $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{sen} n + \cos\frac{n}{2}}{n^2}$

23. Encontre o centro e o raio de convergência das series de potencias
    a) $\displaystyle\sum \frac{n^{2n}}{(n!)^n}x^n$ b) $\sum e^{-n}(x-3)^{2n}$

24. Encontre o limite da sequência convergente a_n tal que $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ para $n > 0$.

Respostas e dicas

5. a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \nexists$, c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, d) $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, e) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, f) $\lim_{n\to\infty} t_n = \dfrac{1}{2}$.

6. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. Dica: Chame o limite de L e aplique o limite na fórmula de recorrência.

7. (a), (b) e (e) divergem. (c), (d), (f), (g), (h) e (j) convergem absolutamente. (i) converge condicionalmente. Dica para (j): Mostre que $n! \leq n^{n-2} \times 2 \times 1$

8. Não. Porquê?

9. (a), (c) e (d) convergem, (b) diverge

10. (a) é $\frac{8\pi}{3}$ (b) é $\frac{25}{10} + \frac{31}{990} = \frac{2506}{990}$. Dica: $2.5\,\underline{31}\,\underline{31}\,\ldots = 2.5 + 0.031 + 0.00031 + \cdots$

13. Sendo c o centro e R o raio, será a) $c = 0$, $R = 1$, b) $c = 0$, $R = \infty$, c) $c = \sqrt{3}$, $R = \sqrt[3]{\frac{4}{e}}$

14. a) $\nexists$, b) $I = \mathbb{R}$, c) $I = (1, 3)$, d) $I = \left(\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} + 2\right)$

15. a) $\arctan x$ é a soma da série de potências. Integrando, teremos a série de $\arctan x$. Substitua o x^2 nesta série.
    b) Integrando a serie binomial que representa o $\text{arcsen}' x$, teremos o $\text{arcsen} x$.

16. Use a série de Maclaurin.

17. Obter a séries de Maclaurin diretamente não é fácil. Encontre a séries de Maclaurin de e^t e partir dele, obtenha a series de e^{-t^2} e calcule a integral.

18. Mostre que todas derivadas são limitadas.

19. a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2 \times 2^{n+3}} x^n$, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$ para $|x| < 1$. Depois mostre que a séries converge para $|x| = 1$ e use o Teorema de Abel (a séries de potências é contínua o intervalo de convergência).
    b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{2 \times 2^{n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{2 \times 2^{n+3}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$

21. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 6^{n+1} x^n$, raio $= \frac{1}{6}$ b) $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2n(2n-1)}$, $r = 1$

22. Todas convergem.

23. a) raio $= \infty$, b) raio $= \frac{1}{e}$

24. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Dica: Mostre que $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}$ (aplicar limite em ambos lados da relação de recorrência não resolve).