UFBa - IME - DMAT —- Matemática Discreta I(MATA42) - Profa: Isamara

Respostas - Lista de Exercícios.2 - Lógica Matemática

---

1. p: O Aluno assiste às aulas de Matemática Discreta.
   q: O Aluno resolve todos os exercícios da lista de Matemática Discreta.
   r: O Aluno aprende os assuntos da Matemática Discreta.

   (a) $(p \wedge q) \rightarrow r$

   Se o Aluno assiste às aulas e resolve todos os exercícios então ele aprende os assuntos da Matemática Discreta.

   (b) $\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)$

   O Aluno não aprendeu os assuntos da Matemática Discreta, então ele não assistiu às aulas ou ele não resolveu os exercícios

   (c) $r \rightarrow (p \wedge q)$

   Se o Aluno aprendeu os assuntos da Matemática Discreta então ele assistiu às aulas e resolveu todos os exercícios.

   (d) $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg r$

   Se o Aluno não assiste às aulas ou não resolve todos os exercícios então, ele não aprende os assuntos da Matemática Discreta.

   (e) $(p \vee q) \rightarrow r$

   Se o Aluno assiste às aulas ou resolve todos os exercícios então, ele aprende os assuntos da Matemática Discreta.

---

2. p: O Aluno assiste às aulas de Matemática Discreta.
   q: O Aluno resolve todos os exercícios da lista de Matemática Discreta.
   r: O Aluno aprende os assuntos da Matemática Discreta.

   (a) "O Aluno aprendeu os assuntos da Matemática Discreta mas o Aluno não resolveu todos os exercícios da lista."

   $r \wedge \neg q$

(b) “O Aluno não aprendeu os assuntos da Matemática Discreta mas assistiu Ã s aulas de Matemática Discreta.”

$\neg r \wedge p$

(c) “ Para o Aluno aprender os assuntos da Matemática Discreta, é necessário que ele assista às aulas e resolva todos os exercícios.”

$r \to (p \wedge q)$

(d) “ O Aluno aprenderá os assuntos da Matemática Discreta se, e somente se, ele assitir às aulas ou resolver todos os exercícios.”

$r \leftrightarrow (p \vee q)$

(e) “Não é necessário o Aluno assistir às Aulas para resolver todos os exercícios.”

$q \to \neg p$

---

3. Construa a tabela-verdade para cada fbf abaixo.

(a) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg Q \leftrightarrow \neg P)$

(b) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \oplus Q)$

(c) $(P \to Q) \oplus (\neg P \to \neg Q)$

---

4. Verifique, utilizando a tabela-verdade, se as fbfs abaixo são uma TAUTOLOGIA.

(a) $P \to Q \leftrightarrow \neg Q \to \neg P$ “CONTRAPOSITIVA da Condicional”

Tautologia. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$.

(b) $P \to Q \leftrightarrow Q \to P$ “RECÍPROCA da Condicional”

Não é uma Tautologia.

(c) $P \to Q \leftrightarrow \neg P \to \neg Q$ “INVERSA da Condicional”

Não é uma Tautologia. Observe que a Inversa é equivalente à Recíproca, pois uma é a contrapositiva da outra: $Q \to P \Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$.

(d) $(P \to Q) \wedge P \leftrightarrow Q$ “MODUS PONENS”

Tautologia.$(P \to Q) \wedge P \Leftrightarrow Q$.

(e) $(P \to Q) \wedge \neg Q \leftrightarrow \neg P$ “MODUS TOLLENS”

Tautologia.$(P \to Q) \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg P$.

(f) $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

V (Lei da Bicondicional)

(g) $(P \to Q) \land (\neg P \to Q) \leftrightarrow Q$

V (Lei do Dilema)

(h) $P \to (Q \to R) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor \neg Q) \to R$

V (Lei da Exportação - Importação)

5.

$$(p \land (\neg(\neg p \lor q))) \lor (p \land q)$$

$(p \land (\neg(\neg p \lor q))) \lor (p \land q)$ "De Morgan "

$(p \land (p \land \neg q)) \lor (p \land q)$ "Associatividade"

$((p \land p) \land \neg q) \lor (p \land q)$ "Idempotência"

$((p \land \neg q) \lor (p \land q)$ "Distributividade"

$p \land (\neg q \lor q)$ "Complemento"

$p \land V$ "Identidade(Elemento Neutro)"

p

6.
- $P_1 : \neg p \to (r \land \neg s)$
- $P_2 : t \to s$
- $P_3 : u \to \neg p$
- $P_4 : \neg w$
- $P_5 : u \lor w$
- $Q : \neg t \lor w$

- $P_1 : \neg p \to (r \land \neg s)$
- $P_2 : t \to s$
- $P_3 : u \to \neg p$
- $P_4 : \neg w$
- $P_5 : u \lor w$
- $P_6 : u$ Silogismo Disjuntivo em (4) e (5)
- $P_7 : \neg p$ Modus Ponens em (3) e (6)
- $P_8 : r \land \neg s$ Modus Ponens em (1) e (7)
- $P_9 : \neg s$ Simplificação Conjuntiva em (8)

- $P_{10} : \neg t$ Modus Tollens em (2) e (9)
- $P_{11} : \neg t \vee w$ Adição Disjuntiva em (10)
- $Q : \neg t \vee w$ é verdadeira, ou seja o argumento é válido.

7.
- $P_1 : \neg p \to (r \wedge \neg s)$
- $P_2 : t \to s$
- $P_3 : u \to \neg s$
- $P_4 : \neg w$
- $P_5 : u \vee w$
- $Q : \neg t \wedge w$

- $P_1 : \neg p \to (r \wedge \neg s)$
- $P_2 : t \to s$
- $P_3 : u \to \neg s$
- $P_4 : \neg w$
- $P_5 : u \vee w$
- $P_6 : u$ Silogismo Disjuntivo em (4) e (5)
- $P_7 : \neg s$ Modus Ponens em (3) e (6)
- $P_8 : \neg t$ Modus Tollens em (2) e (7)
- $P_9 : \neg t \wedge w$ $\neg t$ de (8), mas w contradiz a afirmação (4). Assim, não podemos utilizar a "Adição Conjuntiva".

  E, além disso, observe que a afirmação (1) não pôde ser utilizada pois p e r não estão nas outras premissas.
- $Q : \neg t \wedge w$ é falsa, ou seja o argumento não é válido.

---

8. (a) "Se p é número primo então $p = 2$ ou p é ímpar".

   CONTRAPOSITIVA: Se $p \neq 2$ e p não é ímpar então p não é primo.

   RECÍPROCA: Se p não é primo então $p \neq 2$ e p não é ímpar.

(b) "Se x é divisível por 5 então x é múltiplo de 10".

CONTRAPOSITIVA: Se x não é múltiplo de 10 então x não é divisível por 5.

RECÍPROCA: Se x não é divisível por 5 então x não é múltiplo de 10.

(c) "O Aluno não efetivou a matrícula em MATA42 somente se, ele não foi aprovado em MATA42."

CONDICIONAL: Se o Aluno não efetivou a matrícula em MATA42 então ele não foi aprovado em MATA42.

CONTRAPOSITIVA: Se o Aluno foi aprovado em MATA42 então ele efetivou a matrícula em MATA42.

RECÍPROCA: Se o Aluno efetivou a matrícula em MATA42 então ele foi aprovado.

(d) "Se um número somado a ele próprio resulta no próprio número, então o número é zero."

CONTRAPOSITIVA: "Se um número não é zero então um número somado a ele próprio não resulta no próprio número."

RECÍPROCA: "Se um número somado a ele próprio não resulta no próprio número, então o número não é zero."

---

9. Transforme as fbfs dos argumentos abaixo, em fbfs apenas com os conectivos de negação e disjunção. (utilize, se necessário as leis de equivalência para simplificá-las)

(a) $P_1 : P \to Q \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee Q$,

$P_2 : P \to (Q \to R) \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$,

conclusão:$P \to R \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee R$

(b) $P_1 : P \to Q \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee Q$,

$P_2 : Q \to (R \to S) \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg Q \vee (\neg R \vee S) \Longleftrightarrow \neg Q \vee \neg R \vee S$,

$P_3 : P \to (Q \to R) \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$,

conclusão:$P \to S \overset{LeidaCondicional}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee S$

---

10. "Se os alunos assistem às aulas então gostam de estudar." "Se os alunos gostam de estudar então passam com média." "Os alunos assistem às aulas ou os alunos não passam

com média.” Conclusão: “Os alunos assistem às aulas se, e somente se, os alunos gostam de estudar”. Sejam as proposições:

p : “Os alunos assistem às aulas.”

q : “Os alunos gostam de estudar.”

s : “Os alunos passam com média”.

$P_1 : p \to q$

$P_2 : q \to s$

$P_3 : p \vee \neg s$

$Q : p \leftrightarrow q$

$P_4 : \neg s \vee p$ (Equivalência Comutatividade em (3))

$P_5 : s \to p$ (Equivalência Lei Condicional em (4))

$P_6 : q \to p$ (Silogismo Hipotético em (2) e (5))

$P_7 : (p \to q) \wedge (q \to p)$ (Conjunção em (1) e (6))

$P_8 : p \leftrightarrow q$ (Equivalência Lei Bicondicional em (7))

---

11. “Eu assisto às aulas ou participo das monitorias. Eu assisto às aulas se participo das monitorias. Se eu assisto às aulas ou estudo em casa então eu obtive uma boa média. Eu obtive uma boa média.”

    p: eu assisto às aulas;

    t: eu participo das monitorias;

    r: eu estudo em casa;

    s: eu obtive uma boa média.

    $P_1 : (p \vee t)$

    $P_2 : (t \to p)$

    $P_3 : (p \vee r) \to s$

    $Q : s$

    $P_4 : (\neg t \vee p)$ Lei da condicional em (2)

    $P_5 : (p \vee \neg t)$ Lei da Comutativa em (4)

    $P_6 : p$ Regra Simplif. Disjuntiva (1) e (5)

    $P_7 : p \vee r$ Regra Ampliação Disjuntiva em (6)

    $P_8 : s$ Regra Modus Ponens em (3) e (7)

---

12. (a) $n > 1 : \{2, 3, 4, \cdots\}$ conj verdade e $\{0, 1\}$ conj falsidade. Logo é SATISFATÍVEL.

(b) $n! < 10 : \{0, 1, 2, 3\}$ conj verdade e $\{n \in \mathbb{N} | n > 3\}$ conj falsidade. Logo é SATISFATÍVEL

(c) $(n + 1) > n : \mathbb{N}$ é o conj verdade e $\emptyset$ é o conj falsidade. Logo é uma TAUTOLOGIA

(d) $2n$ é ímpar: $\emptyset$ é o conj verdade e $\mathbb{N}$ é o conj falsidade. Logo é uma CONTRADIÇÃO.

---

13. (a) "Todo natural é ímpar".

 $(\forall x \in \mathbb{N})(x = 2n + 1; n \in \mathbb{N})$

 (b) "Todos os inteiros são divisíveis por 5".

 $(\forall x \in \mathbb{Z})(5|x)$

 (c) "Algum natural é divisível por 7".

 $(\exists x \in \mathbb{N})(7|x)$

 (d) "O quadrado de qualquer inteiro é não negativo".

 $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 \geq 0)$

 (e) "Qualquer que seja o número natural, existe sempre outro natural maior que ele".

 $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(y > x)$

 (f) "Existem dois inteiros x e y tais que $x/y = 4$".

 $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(x/y = 4)$

 (g) "Existe um único número natural par que é menor do que 1".

 $(\exists! x \in \mathbb{N})((x = 2n; n \in \mathbb{N}) \wedge (x < 1))$

---

14. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, determine o valor lógico de cada proposição predicativa abaixo.

 (a) $\exists x \in A | x^2 + x - 6 = 0$: conj. verdade $= \{2\}$ V

 (b) $\forall x \in A | x^2 - 1 < 0$: conj. verdade $= \emptyset$ F

 (c) $\neg(\forall x \in A | x^2 + x = 6) \Leftrightarrow \exists x \in A | x^2 + x \neq 6)$: conj. verdade $= \{1, 3\}$ V

 (d) $\neg(\exists x \in A || x - 1| \leq 2) \Leftrightarrow \forall x \in A || x - 1| > 2$: conj. verdade $= \emptyset$ F

---

15. Determine o valor-verdade de cada proposição predicativa abaixo sobre $\mathbb{N}$.

 (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)$ F

 (b) $(\forall n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ F

 (c) $(\forall n \in \mathbb{N})((n + 1) > n)$ V

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})$ V

(e) $(\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)$ V

(f) $(\exists n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ V

(g) $(\exists n \in \mathbb{N})((n+1) > n)$ V

(h) $(\exists n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})$ V

(i) $(\exists! n \in \mathbb{N})(n < 1)$ V

(j) $(\exists! n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ F

(k) $(\exists! n \in \mathbb{N})((n+1) > n)$ F

(l) $(\exists! n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})$ F

---

16. (a) $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow$
$(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq 1)$ V

(b) $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow$
$(\exists n \in \mathbb{N})(n! \geq 10)$ V

(c) $\neg((\forall n \in \mathbb{N})((n+1) > n)) \Leftrightarrow$
$(\exists n \in \mathbb{N})((n+1) \leq n)$ F

(d) $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})) \Leftrightarrow$
$(\exists n \in \mathbb{N})(2n \text{ não é par})$ F

(e) $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow$
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 1)$ F

(f) $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow$
$(\forall n \in \mathbb{N})(n! \geq 10)$ F

(g) $\neg((\exists n \in \mathbb{N})((n+1) > n)) \Leftrightarrow$
$(\forall n \in \mathbb{N})((n+1) \leq n)$ F

(h) $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})) \Leftrightarrow$
$(\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ não é par})$ F

---

17. $C(x)$: x é Computador;
$F(x)$: x está funcionando;

$D(x)$: x é doado.

$P_1 : (\forall x)((C(x) \wedge \neg F(x)) \rightarrow D(x))$

$P_2 : (\exists x)(C(x) \wedge \neg D(x))$

$Q : (\exists x)(C(x) \wedge F(x))$

$P_3 : (C(a) \wedge \neg D(a))$ Instanciação Existencial em (2)

$P_4 : ((C(a) \wedge \neg F(a)) \rightarrow D(a))$ Instanciação universal em (1)

$P_5 : \neg D(a) \rightarrow \neg(C(a) \wedge \neg F(a))$ Contrapositiva em (4)

$P_6 : \neg D(a)$ Simplificação Conjuntiva em (3)

$P_7 : \neg(C(a) \wedge \neg F(a))$ Modus Ponens em (5) e (6)

$P_8 : \neg C(a) \vee \neg(\neg F(a))$ Lei de De Morgan em (6)

$P_9 : (\neg C(a) \vee F(a))$ Lei da Dupla Negação em (8)

$P_{10} : C(a)$ Simplificação Conjuntiva em (3)

$P_{11} : C(a) \wedge (\neg C(a) \vee F(a))$ Conjuņao em (10) e (11)

$P_{12} : (C(a) \wedge \neg C(a)) \vee (C(a) \wedge F(a))$ Lei da Distributividade (11)

$P_{13} : (F) \vee (C(a) \wedge F(a))$ Lei do Complemento (12)

$P_{14} : C(a) \wedge F(a)$ Lei do Elemento Neutro (Identidade) em (13)

$P_{15} : (\exists x)(C(x) \wedge F(x))$ Generalização existencial em (14)

---

18. $C(x)$: x é calouro;

    $V(x)$: x é veterano.

    $P_1 : (\forall x)(\neg C(x) \rightarrow V(x))$

    $P_2 : \neg V(Paulo)$

    $Q : C(Paulo)$

    $P_3 : (\neg C(Paulo) \rightarrow V(Paulo))$ Instanciação universal em (1)

    $P_4 : \neg V(Paulo) \rightarrow \neg(\neg C(Paulo))$ Contrapositiva em (3)

    $P_5 : \neg(\neg C(Paulo))$ Modus Ponens em (2) e (4)

    $P_6 : C(Paulo)$ Lei da Dupla Negação em (5)

---

19. "A soma de cinco números naturais consecutivos é divisível por 5."

    Sejam os cinco naturais consecutivos: $n, n+1, n+2, n+3, n+4, \forall n \in \mathbb{N}$. A soma entre eles:

    $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2) \Rightarrow 5|(5(n+2))$. Logo, a soma é divisível por 5. A afirmação é verdadeira.

20. "A soma de quatro números naturais consecutivos é divisível por 4."

Sejam os quatro naturais consecutivos: $n, n+1, n+2, n+3; \forall n \in \mathbb{N}$. A soma entre eles: $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4(n+1) + 2 \Rightarrow 4|(4(n+1))$ mas restam 2. Logo, a soma não é divisível por 4. a afirmação é falsa.

---

21. (a) "Um inteiro x é positivo se, e somente se, $x+1$ é positivo."

    Se tomamos como exemplo o inteiro $x = 0$ temos que $0 + 1 = 1$ que é um inteiro positivo; mas, $x = 0$ não é um inteiro positivo. Logo, a afirmação é uma falsidade.

    (b) "Se x é primo então x é ímpar." Para $x = 2$ primo temos que x é par. Consequentemente, a afirmação é uma falsidade.

    (c) Sejam a e b inteiros. "Se $a|b$, então $a \leq b$ e, se $b|a$, então $b \leq a$, portanto, $a = b$."

    Considerando $a = -b$, por exemplo $a = -2$ e $b = 2$ temos que, $2| - 2$ e $-2|2$ mas, $2 \not\leq -2$. Chegamos numa contradição.

    (d) "Se a, b e c são inteiros positivos com $a|(bc)$, então $a|b$ ou $a|c$."

    Tomando-se o exemplo: $a = 6, b = 3, c = 10$. Verificamos que $b.c = 30$ e $6|30$; porém $6 \not| 3$ ou $6 \not| 10$. Portanto, a afirmação é falsa.

---

22. Prove que: "Se x e y números reais tais que $x > 0$ e $x < y$ então $x^2 < y^2$."

Por hipótese, $x > 0$ e $x < y$. Considerando as duas desigualdades simultaneamente e aplicando a propriedade transitiva: $0 < x < y \Rightarrow y > 0$.

Agora, podemos multiplicar a última desigualdade por y e ela não altera pois y é positivo: $0.y < x.y < y.y \Rightarrow 0 < x.y < y^2 \quad (1)$.

Vamos então efetuar a multiplicação por x que também é positivo e não altera a desigualdade: $0 < x < y \Rightarrow 0.x < x.x < y.x \Rightarrow 0 < x^2 < x.y \quad (2)$.

Deduzimos das desigualdades (1) e (2) pela propriedade transitiva que; $0 < x^2 < x.y < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$.

---

23. Sejam x, y números reais arbitrários. Sabe-se por propriedade no conjunto dos reais que (1) $x < y$ ou (2) $x = y$ ou (3) $x > y$.

Considerando os três casos e obtendo os valores max e min:

(1) $\min(x, y) = x$ e $\max(x, y) = y \Rightarrow \min(x, y) + \max(x, y) = x + y$;

(2) $\min(x, y) = x = y$ e $\max(x, y) = y = x \Rightarrow \min(x, y) + \max(x, y) = x + y$;

(3) $\min(x, y) = y$ e $\max(x, y) = x \Rightarrow \min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

Portanto, a afirmação é verdadeira nos três casos.
