Exercício 4 Teoria Grafos

João Lucas Lima de Melo

Setembro 2022

Questão 5: Procure nas referências as definições de "circuito euleriano" em digrafos (seção 1.4 do Livro do Douglas West). Ademais, seja $d^+(v)$ o grau de saída de v e $d^-(v)$ o grau de entrada de v (ver definição formal nas referências). Por fim, prove que um digrafo D é euleriano se, e somente se, $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v e o grafo subjacente de D contém apenas uma componente conexa não trivial.

Ida: Seja D um digrafo euleriano e G seu grafo subjacente. Por definição, D possui um circuito euleriano, ou seja, há uma trilha fechada contendo todas as arestas. Havendo a trilha fechada, afirmamos que em D há uma componente conexa não trivial. Por definição, as propriedades de caminho, trilha e circuito de um digrafo se extendem ao seu grafo subjacente. Logo, G é euleriano e contém apenas uma componente conexa não trivias. Além disso, seja $C = v_1, v_2, ..., v_n$ a trilha fechada que passa por todos os vértices de G. Todos os vértices da trilha estão conectados ao sucessor assim como ao seu antecessor, contribuindo em 1 para o grau de entrada e saída. Portanto, para todo vértice v em G e D, $d_D^+(v) = d_D^-(v)$.

Volta: Suponhamos que $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v em um digrafo D e seu grafo subjacente G contém apenas uma componente conexa não trivial. Será realizada a prova por indução na quantidade m de arestas do digrafo D.

Para o caso base, $m = 2$. Nesse caso, como G contém apenas uma componente conexa não trivial e $d_D^+(v) = d_D^-(v)$, onde para todo vértice v está ligado a um antecessor e um sucessor, então existe uma trilha fechada em D. Portanto, D é um digrafo euleriano.

Suponhamos agora um digrafo D contendo $m \geq 2$ arestas. Por hipótese, todos os vértices de G (e, portanto, D) estão conectados a um vértice sucessor e antecessor. Portanto, $d_D^+(v) = d_D^-(v) \geq 1$, para todo v.

Seja P um caminho maximal em D e u o último vértice de P. Como P não pode ser extendido e $d_D^+(u) \geq 1$, o sucessor v de u deve estar contido em P. Logo, a aresta uv existe em D, garantindo que exista no digrafo um ciclo.

Seja um ciclo C em D e um digrafo $D' = D \backslash C$. Todo vértice v em C possui grau de entrada igual ao de saída, onde $d^+_C(v) = d^-_C(v) = 1$. Portanto, a propriedade $d^+_{D'}(v) = d^-_{D'}(v)$ em D' está mantida.

Se o grafo subjacente G' de D' tiver apenas uma componente conexa não trivial, por hipótese de indução, podemos afirmar que há uma trilha fechada que contenha todas as arestas de G', sendo o digrafo euleriano. Ao inserir novamente o ciclo C em D', é mantida a existência da trilha euleriana. Portanto, D é euleriano.

Caso o grafo subjacente G' de D' conter mais de uma componente conexa não trivial, por hipótese de indução, cada componente conterá uma trilha fechada que contenha todas as arestas de G'.

Podemos contruir uma trilha fechada entre os componentes conexos e o ciclo removido. Para construir a trilha fechada T, podemos passar pelas arestas de C, comecando pelo primeiro vértice v_1 do ciclo, de forma que quando um componente conexo de G' é interceptado pela primeira vez, sua trilha euleriana é incorporada à trilha que estamos construindo. A trilha T terminará após incorporar as demais trilhas fechadas dos componentes conexos e terminar no vértice de início v_1. Dessa forma, a reinserção de C em D' garante a existência de uma trilha euleriana no digrafo. D é, portanto, euleriano.