10.2. Derivadas Parciais de Funções de Três ou Mais Variáveis Reais

EXEMPLO. Calcule as derivadas parciais da função $s = f(x, y, z, w)$ dada por

$$s = e^{xyzw}$$

Solução

$$\frac{\partial s}{\partial x} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial x}(xyzw) = yzwe^{xyzw} \qquad (y, z \text{ e } w \text{ são olhadas como constantes}).$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial y}(xyzw) = xzwe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial z}(xyzw) = xywe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial w}(xyzw) = xyze^{xyzw}$$

11.1. Função Diferenciável: Definição

áveis reais.

Definição. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, A aberto de $\mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

O próximo teorema nos diz que *diferenciabilidade* implica *continuidade*.

Teorema 1. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f será contínua em (x_0, y_0).

Teorema 2. Seja $f: \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}$ aberto, e seja $(x_0, y_0) \in \boldsymbol{A}$. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.

Seg

Corolário. Seja $f(x, y)$ definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$. Tem-se:

$$f \text{ diferenciável em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \ f \text{ admite derivadas parciais em } (x_0, y_0); \\ b) \ \lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \dfrac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \end{cases}$$

$$\left(E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k \right)$$

EXEMPLO 1. Prove que $f(x, y) = x^2 y$ é uma função diferenciável.

Solução

Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(D_f = \mathbb{R}^2)$. f admite derivadas parciais em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

Por outro lado, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
E(h, k) &= f(x+h, y+k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k = \\
&= (x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k = \\
&= 2xhk + h^2y + h^2k.
\end{aligned}
$$

Como, para $(h, k) \neq (0, 0)$, $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant 1$, resulta

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} =
$$

$$
= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[2x\overset{0}{h} \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} + hy\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0.
$$

Portanto, f é diferenciável em todo (x, y) de $\mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável.

Teorema. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável neste ponto.

Seja $f(x, y)$ uma função. Dizemos que f é de *classe* C^1 no aberto A se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A.

Segue do teorema anterior o seguinte

Corolário. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^1 em A, então f será diferenciável em A.

EXEMPLO 1. $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2)$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Observação. O teorema anterior conta-nos que se f admite derivadas parciais em A e se estas são *contínuas* no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável em (x_0, y_0). A recíproca, entretanto, não é verdadeira: existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas neste ponto. O exemplo seguinte exibe-nos uma tal função

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *não* são contínuas em $(0, 0)$.

c) Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) Prove que f é uma função diferenciável.

$a)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}}{x}$, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \overset{0}{x} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

De modo análogo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,t)$ não existe. (Verifique.) Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

De modo análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

c) $\dfrac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} = \dfrac{(h^2+k^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$$= \sqrt{h^2+k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{h^2+k^2}.$$

Como $\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \overset{0}{\sqrt{h^2+k^2}} \underbrace{\operatorname{sen} \dfrac{1}{h^2+k^2}}_{\text{limitada}} = 0$, resulta que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) f é diferenciável em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, pois, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Conclusão. f é uma função diferenciável em todo $(x, y) \in D_f$ $(D_f = \mathbb{R}^2)$.

11.3. Plano Tangente e Reta Normal

Definição. Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

① $$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

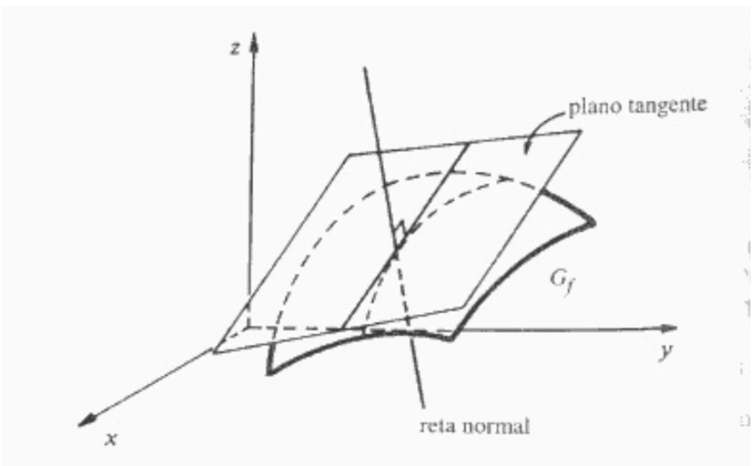
denomina-se *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Em notação de produto escalar, o plano ① se escreve:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0.$$

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

② $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$



EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Solução

Plano tangente

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3. \end{cases}$$

A equação do plano tangente é

$$\boxed{z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)}$$

Reta normal

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 5) + \lambda(11, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}.}$$

11.4. DIFERENCIAL

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

EXEMPLO. Seja $z = x^2 y$.

a) Calcule a diferencial.
b) Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 2$ para $x = 1{,}02$ e $y = 2{,}01$.
c) Calcule o erro cometido na aproximação acima.

Solução

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$; assim, $dz = 2xy\, dx + x^2\, dy$.
b) $\Delta z \cong dz$ ou $\Delta z \cong 2xy\, dx + x^2\, dy$.
Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}02$ e $dy = 0{,}01$ resulta $\Delta z \cong 0{,}09$.
c) $\Delta z = (x + dx)^2 (y + dy) - x^2 y = (1{,}02)^2 (1{,}01) - 2 = 0{,}091204$ (valor exato).
O erro cometido na avaliação acima é $0{,}001204$.

11.5. O VETOR GRADIENTE

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

denomina-se *gradiente* de f em (x_0, y_0). Outra notação usada para o gradiente de f em (x_0, y_0) é: grad $f(x_0, y_0)$. Geometricamente, interpretaremos $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor *aplicado* no ponto (x_0, y_0).

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

REGRA DA CADEIA

Teorema. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, tais que $\gamma(t) \in A$ para todo t no intervalo I. Nestas condições, se γ for diferenciável em t_0 e f em $X_0 = \gamma(t_0)$, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia

$$F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

EXEMPLO 2. Sejam $z = x^2 y$, $x = e^{t^2}$ e $y = 2t + 1$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,\ \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2} \text{ e } \frac{dy}{dt} = 2.$$

$$\frac{dz}{dt} = 4xyte^{t^2} + 2x^2$$

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{t^2}(2t+1)e^{t^2} + 2e^{2t^2} = 2e^{2t^2}[4t^2 + 2t + 1].$$

EXEMPLO 3. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \operatorname{sen} t)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

a) Expresse $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Calcule $F'(0)$ supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

Solução

a) $F(t) = f(x, y)$ onde $x = e^{t^2}$ e $y = \operatorname{sen} t$.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Daí

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \operatorname{sen} t)\, 2te^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \operatorname{sen} t) \cos t.$$

b) $F'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \cdot 1$; logo

$$F'(0) = 5.$$

EXEMPLO 11. Suponha $z = f(x, y)$ de classe C^1, $f(1, 2) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Admita que a imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, 3t - 1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, esteja contida no gráfico de f.

a) Calcule $z'(t)$.
b) Ache a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

Solução

a) $(x, y, z) \in G_f \Leftrightarrow z = f(x, y)$. Como a imagem de γ está contida no gráfico de f, para todo t, $(t^2, 3t - 1, z(t)) \in G_f$, logo, $z(t) = f(t^2, 3t - 1)$.