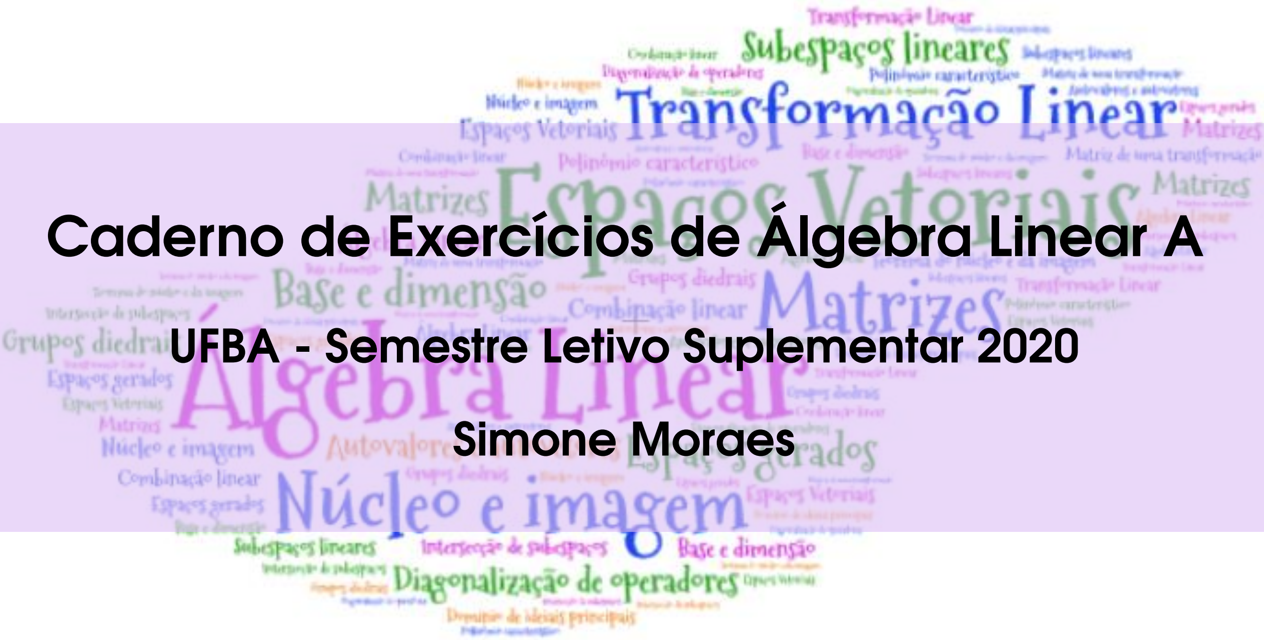
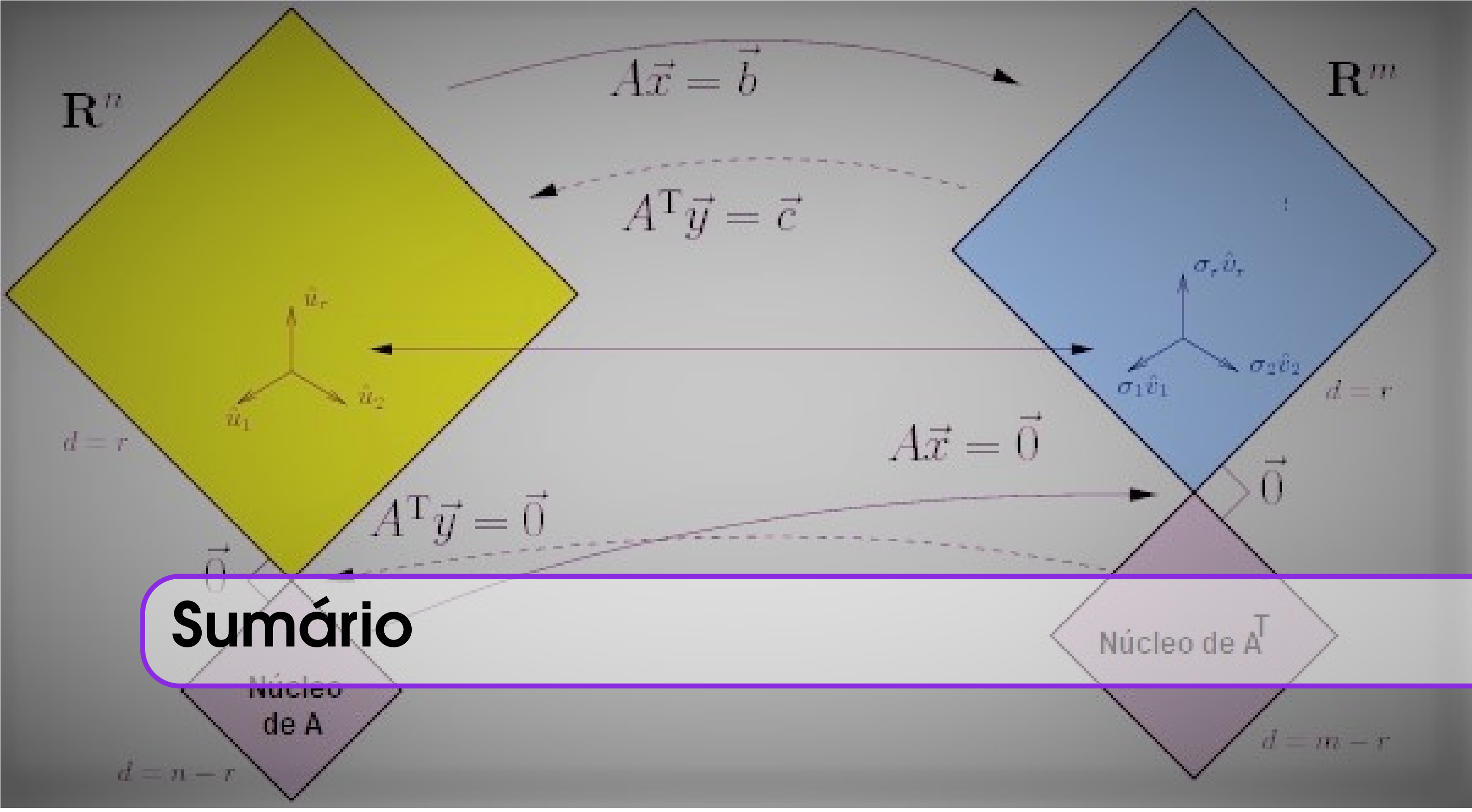


Caderno de Exercícios de Álgebra Linear A

UFBA - Semestre Letivo Suplementar 2020

Simone Moraes



Sumário

I Matrizes e Sistemas Lineares

Matrizes e Sistemas Lineares

1. Matrizes

1.1 Definição de Matrizes

1. As matrizes $A,\ B,\ C,\ D$ e E tem ordens 4×3, 4×5, 3×5, 2×5 e 3×5, respectivamente. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e a ordem de cada uma:

   (a) $AE+B^T$; (b) $C(D^T+B)$; (c) $AC+B$; (d) $E^T(CB)$.

   Solução:

   (a) AE tem ordem 4×5, mas não é possível somar com B^T que tem ordem 5×4, distintas.

   (b) Não é possível somar $D^T_{5\times 2}$ e $B_{4\times 5}$ pois têm ordens distintas.

   (c) $\left(A_{4\times 3}\cdot C_{3\times 5}\right)_{4\times 5}+B_{4\times 5}$ tem ordem 4×5;

   (d) Não é possível multiplicar C por B, pois o número de colunas de C é igual 5 que é diferente do número de colunas de B, que é igual a 4.

2. Sejam $A,\ B,\ C$ e D matrizes tais que AB^T de ordem 5×3 e que $(C^T+D)B$ de ordem 4×6.

   Determine a ordem de cada uma destas matrizes.

   Solução:

   AB^T que tem ordem $5\times 3 \Longrightarrow A_{5\times k}$ e $B^T_{k\times 3} \Longrightarrow B_{3\times k}$.

   Como $(C^T+D)B$ de ordem $4\times 6 \Longrightarrow C^T$ e D têm ordem $4\times l$ e $B_{l\times 6}$.

   Logo, $B_{3\times 6}$, $A_{5\times 6}$, C^T e D são de ordem 4×3 e portanto $C_{3\times 4}$.

3. Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2\\ -4 & 0 & 11 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, determine:

   (a) A ordem de A;

   (b) Os elementos a_{23}, a_{35} e a_{43}.

Solução:

(a) A matriz A tem ordem 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas.

(b) $a_{23}=11$, $a_{35}=3$ e $a_{43}=-4$, pois são os elementos localizados, respectivamente, 2ª linha e 3ª coluna; 3ª linha e 5ª coluna e 4ª linha e 3ª coluna.

4. Determine a matriz quadrada, $A=(a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i-3j, & \text{se } i<j \\ i^2+2j, & \text{se } i=j \\ -3i+4j, & \text{se } i>j \end{cases}.$$

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2+2\times 1 & 2\times 1-3\times 2 & 2\times 1-3\times 3 & 2\times 1-3\times 4 \\ -3\times 2+4\times 1 & 2^2+2\times 2 & 2\times 2-3\times 3 & 2\times 2-3\times 4 \\ -3\times 3+4\times 1 & -3\times 3+4\times 2 & 3^2+2\times 3 & 2\times 3-3\times 4 \\ -3\times 4+4\times 1 & -3\times 4+4\times 2 & -3\times 4+4\times 3 & 4^2+2\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 & -10 \\ -2 & 8 & -5 & -8 \\ -5 & -1 & 15 & -6 \\ -8 & -4 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

5. Determine números reais x, y, z e t tais que $\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y &= 3 \\ t &= -1 \\ z-t &= 0 \\ y+2z &= 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= -1 \\ z=t &= -1 \\ y=3-2z &= 5 \\ x=\dfrac{3-y}{2} &= -1 \end{cases}$$

6. (a) A **matriz de Hilbert** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $H_n=[h_{ij}]$ definida por: $h_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$, determine a matriz de Hilbert para $n=4$.

(b) A **matriz de Pascal** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $P_n=[p_{ij}]$ definida por: $p_{ij}=\dfrac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$, determine a matriz de Pascal para $n=5$.

Solução:

(a) $$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \frac{1}{1+3-1} & \frac{1}{1+4-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \frac{1}{2+3-1} & \frac{1}{2+4-1} \\ \frac{1}{3+1-1} & \frac{1}{3+2-1} & \frac{1}{3+3-1} & \frac{1}{3+4-1} \\ \frac{1}{4+1-1} & \frac{1}{4+2-1} & \frac{1}{4+3-1} & \frac{1}{4+4-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

é a matriz de Hilbert para $n=4$.

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{(1+1-2)!}{(1-1)!(1-1)!} & \frac{(1+2-2)!}{(1-1)!(2-1)!} & \frac{(1+3-2)!}{(1-1)!(3-1)!} & \frac{(1+4-2)!}{(1-1)!(4-1)!} & \frac{(1+5-2)!}{(1-1)!(5-1)!} \\ \frac{(2+1-2)!}{(2-1)!(1-1)!} & \frac{(2+2-2)!}{(2-1)!(2-1)!} & \frac{(2+3-2)!}{(2-1)!(3-1)!} & \frac{(2+4-2)!}{(2-1)!(4-1)!} & \frac{(2+5-2)!}{(2-1)!(5-1)!} \\ \frac{(3+1-2)!}{(3-1)!(1-1)!} & \frac{(3+2-2)!}{(3-1)!(2-1)!} & \frac{(3+3-2)!}{(3-1)!(3-1)!} & \frac{(3+4-2)!}{(3-1)!(4-1)!} & \frac{(3+5-2)!}{(3-1)!(5-1)!} \\ \frac{(4+1-2)!}{(4-1)!(1-1)!} & \frac{(4+2-2)!}{(4-1)!(2-1)!} & \frac{(4+3-2)!}{(4-1)!(3-1)!} & \frac{(4+4-2)!}{(4-1)!(4-1)!} & \frac{(4+5-2)!}{(4-1)!(5-1)!} \\ \frac{(5+1-2)!}{(5-1)!(1-1)!} & \frac{(5+2-2)!}{(5-1)!(2-1)!} & \frac{(5+3-2)!}{(5-1)!(3-1)!} & \frac{(5+4-2)!}{(5-1)!(4-1)!} & \frac{(5+5-2)!}{(5-1)!(5-1)!} \end{bmatrix}$$

(b)

$$= \begin{bmatrix} \frac{0!}{0!0!} & \frac{1!}{0!1!} & \frac{2!}{0!2!} & \frac{3!}{0!3!} & \frac{4!}{0!4!} \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{2!}{1!1!} & \frac{3!}{1!2!} & \frac{4!}{1!3!} & \frac{5!}{1!4!} \\ \frac{2!}{2!0!} & \frac{3!}{2!1!} & \frac{4!}{2!2!} & \frac{5!}{2!3!} & \frac{6!}{2!4!} \\ \frac{3!}{3!0!} & \frac{4!}{3!1!} & \frac{5!}{3!2!} & \frac{6!}{3!3!} & \frac{7!}{3!4!} \\ \frac{4!}{4!0!} & \frac{5!}{4!1!} & \frac{6!}{4!2!} & \frac{7!}{4!3!} & \frac{8!}{4!4!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Pascal para $n = 5$.

1.2 Operações com Matrizes

1. Determine números reais x e y tais que $\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x^3 - x & y^2 + 3y \\ y^2 + 4y & x^2 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x^3 - x & = & 0 \\ y^2 + 3y & = & 4 \\ y^2 + 4y & = & 5 \\ x^2 + 2x & = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(x^2 - x) & = & 0 \\ y & = & 1 \\ (x+1)^2 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 1 \end{array} \right. .$$

2. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A \cdot B$ e $D = B \cdot A$, determine os elementos c_{32} e d_{43}.

Solução:

$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} = 1\times3+2\times1+(-1)\times2+5\times3 = 3+2-2+15 = 18;$

$d_{43} = b_{41}a_{13} + b_{42}a_{23} + b_{43}a_{33} = 4\times3+3\times4+1\times(-1) = 12+12-1 = 23.$

3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine A^2; A^3; A^{31}; A^{42}.

Solução:

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+(-1)\times3 & 2\times(-1)+(-1)\times(-2) \\ 3\times2+(-2)\times3 & 3\times(-1)+(-2)\times(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, $A^3 = A^2\cdot A = I_2\cdot A = A$.

De modo geral, para $k\in\mathbb{N}$, $k\geq1$ temos: $A^k = \begin{cases} I_2 & \text{se} \quad k \text{ é par} \\ A & \text{se} \quad k \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Consequentemente, $A^{31} = A$ e $A^{42} = I_2$.

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível:

(a) $4E-2D$; (b) $2A^T+C$; (c) $\left(2E^T-3D^T\right)^T$; (d) $\left(BA^T-2C\right)^T$;

(e) $(-AC)^T+5D^T$; (f) $B^T\left(CC^T-A^TA\right)$; (g) $D^TE^T-(ED)^T$.

Solução:

(a) $$4E-2D = 4\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 \\ -4 & 4 & 8 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $$2A^T+C = 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(c) $$(2E^T-3D^T)^T = 2E-3D = 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

(d) $$(BA^T-2C)^T = AB^T-2C^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

(e) $(-AC)^T+5D^T=-C^TA^T+5D^T=-\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}^T+5\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}^T$

$$=-\begin{bmatrix}1&3\\4&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&0&2\\2&1&4\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}3&5&4\\12&-2&5\\6&8&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&-5&15\\25&0&10\\10&5&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-10&11\\13&2&5\\4&-3&13\end{bmatrix}.$$

(f) $B^T(CC^T-A^TA)=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}^T\left(\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}^T-\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}\right)$

$$=\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\4&1\\2&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}21&17\\17&35\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11&-1\\-1&5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10&18\\18&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40&72\\26&42\end{bmatrix}.$$

(g) $D^TE^T-(ED)^T=D^TE^T-D^TE^T=0_{3\times3}$.

5. Uma matriz A em $M_n(\mathbb{K})$ é chamada idempotente se $A^2=A$, mostre que:

(a) Se $A,\ B\in M_n(\mathbb{K})$ são tais que $A\cdot B=A$ e $B\cdot A=B$, então A e B são idempotentes.

(b) A matriz $\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ é idempotente.

Solução:

(a) $A^2=A\cdot A\overset{AB=A}{=}(AB)\cdot(AB)=A(BA)B\overset{BA=B}{=}(AB)B\overset{AB=A}{=}AB=A$, logo A é idempotente.

Analogamente mostramos que B é idempotente.

(b) $\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$, portanto é idempotente.

6. Determine, se possível:

(a) Números reais x e y tais que $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0&1\\x&y\end{bmatrix}$ comutam.

(b) Todas as matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.

Solução:

(a) As matrizes A e B comutam se, e somente se, $\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\x&y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}2x&1+2y\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\x+y&2x\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2x&=&1\\x+y&=&1\\1+2y&=&0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}\\y&=&-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

(b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a+c &= a \\ b+d &= a+b \\ c+d &= d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ a &= d \end{cases}.$$

Logo, as matrizes que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

7. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $A + A^T$ e $A \cdot A^T$.

Solução:

Observemos que a matriz A é simétrica, pois $A = A^T$, logo

$$A + A^T = A + A = 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot A^T = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 & 8 \\ 20 & 29 & 11 \\ 8 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$, se $A \cdot B = B \cdot A$, mostre que:

   (a) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;

   (b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

   (c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

Solução:

(a) $(A \pm B)^2 = (A \pm B) \cdot (A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 \pm 2AB + B^2$.

(b) $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 - B^2$.

(c)
$$\begin{aligned} (A-B)(A^2+AB+B^2) &= A^3 + A^2B + AB^2 - BA^2 - BAB - B^3 \\ &= A^3 + A(AB) + (AB)B - (BA)A - (BA)B - B^3 \\ &\overset{AB=BA}{=} A^3 + A(AB) + (AB)B - (AB)A - (AB)B - B^3 = A^3 - B^3. \end{aligned}$$

1.3 Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais

1. Determine, em cada um dos casos abaixo, números reais x, y e z tais que a matriz A seja simétrica.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ x & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = 4.$$

(b) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 & y-2 \\ x+3 & -5 & 2z \\ -10 & -8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x+3 & = & 15 \\ y-2 & = & -10 \\ 2z & = & -8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 12 \\ y & = & -8 \\ z & = & -4 \end{array} \right. .$$

(c) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & y+x \\ x^2+3 & -9 & z+3x \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x^2+3 & = & 7 \\ y+x & = & -5 \\ z+3x & = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=2, \quad y=-7, \quad z=-2 \\ \text{ou} \\ x=-2, \quad y=-3, \quad z=10 \end{array} \right. .$$

2. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em simétrica e anti-simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A, \text{ logo } A \text{ é anti-simétrica.}$$

Se B fosse matriz simétrica teríamos $b_{ij} = b_{ji}$, para todos i e j, mas $b_{12} = 1-i \neq 1+i = b_{21}$, portanto B não é simétrica.

Se B fosse matriz anti-simétrica teríamos $b_{ij} = -b_{ji}$, para todos i e j, em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $b_{11} = 1 \neq 0$, portanto B não é anti-simétrica.

$$C^T = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix} = C, \text{ portanto } C \text{ é simétrica.}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} = D, \text{ portanto } D \text{ é simétrica.}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 0 & -2+i & 3 \\ 2-i & 0 & -i \\ -3 & i & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix} = -E, \text{ portanto } E \text{ é anti-simétrica.}$$

Se F fosse matriz simétrica teríamos $f_{ij} = f_{ji}$, para todos i e j, mas $f_{13} = -3+6i \neq 3+6i = b_{31}$, portanto F não é simétrica.

Se F fosse matriz anti-simétrica teríamos $f_{ij} = -f_{ji}$, para todos i e j, em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $f_{22} = 20i \neq 0$, portanto F não é anti-simétrica.

3. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{K})$, com $n > 1$ e α e β escalares em $\mathbb{K}$, mostre que:
   (a) $A + A^T$ é simétrica e $A - A^T$ é anti-simétrica.
   (b) Se A e B são simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
   (c) Se A e B são anti-simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
   (d) Se A e B são simétricas, então $A \cdot B$ é simétrica se, e somente se, A e B comutam.

   Solução:

   (a) $(A + A^T)^T \overset{T_2}{=} A^T + (A^T)^T \overset{T_1}{=} A^T + A = A + A^T$, portanto $A + A^T$ é simétrica.
   $(A - A^T)^T \overset{T_2}{=} A^T - (A^T)^T \overset{T_1}{=} A^T - A = -(A - A^T)$, portanto $A - A^T$ é anti-simétrica.

   (b) $(\alpha A + \beta B)^T \overset{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \overset{A,\, B \text{ simét.}}{=} \alpha A + \beta B$, portanto $\alpha A + \beta B$ é simétrica.

   (c) $(\alpha A + \beta B)^T \overset{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \overset{A,\, B \text{ anti-sim.}}{=} \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B)$, portanto $\alpha A + \beta B$ é anti-simétrica.

   (d) Se $A \cdot B$ é simétrica, então $(A \cdot B)^T = A \cdot B$, mas $(A \cdot B)^T \overset{T_4}{=} B^T \cdot A^T \overset{A,\, B \text{ simét.}}{=} B \cdot A$, logo $A \cdot B = B \cdot A$.

   Reciprocamente, se A e B são simétricas e comutam, então $(A \cdot B)^T \overset{T_4}{=} B^T \cdot A^T \overset{A,\, B \text{ simét.}}{=} B \cdot A = A \cdot B$, ou seja, $A \cdot B$ é simétrica

4. Determine, se possível, números reais x e y de modo que a matriz A seja ortogonal, nos seguintes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

   Solução:

   (a) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

   (b) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

   $$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}(y + x) \\ \sqrt{2}(y + x) & 2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Mas, como $x \in \mathbb{R}$ a equação $2 + x^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = -1$ não tem solução.

   Portanto, não existem x e y números reais tal que a matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ seja ortogonal.

5. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Solução:

$A\cdot A^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, portanto A é ortogonal.

$B\cdot B^T=\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&\\&\end{bmatrix}\neq I_2$, portanto B não é matriz ortogonal.

$$C\cdot C^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}+\frac{8}{9}&\frac{2\sqrt{2}}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\\\frac{2\sqrt{2}}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}&\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, C é matriz ortogonal.

$$\begin{aligned}D\cdot D^T&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto, D é matriz ortogonal.

6. Sejam A e B em $M_n(\mathbb{R})$, mostre que se A e B são ortogonais, então $A\cdot B$ também o é.

Solução:

Suponhamos que A e B em $M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, logo:

$$(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^T\overset{T_4}{=}(A\cdot B)\cdot(B^T\cdot A^T)\overset{M_2}{=}A\cdot(B\cdot B^T)\cdot A^T\overset{B\text{ é ortog.}}{=}A\cdot A^T\overset{A\text{ é ortog.}}{=}I_n.$$

7. Dado θ número real considere a matriz $T_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$.

(a) Dados θ e ϕ em $\mathbb{R}$, mostre que $T_\theta\cdot T_\phi=T_{\theta+\phi}$.

(b) Calcule $T_{(-\theta)}$.

(c) Mostre que para todo número θ a matriz T_θ é ortogonal.

Solução:

(a) Sejam θ e ϕ números reais, então:

$$\begin{aligned}T_\theta\cdot T_\phi&=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi&-\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi\\\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi&-\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}.\\&=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\phi)&-\sin(\theta+\phi)\\\sin(\theta+\phi)&\cos(\theta+\phi)\end{bmatrix}=T_{\theta+\phi}\end{aligned}$$

(b) Dado $\theta \in \mathbb{R}$, então:

$$T_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(c) Seja θ um número real qualquer, então:

$$\begin{aligned} T_\theta \cdot T_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, T_θ é matriz ortogonal.

8. Em $M_2(\mathbb{R})$ determine todas as matrizes que são simultaneamente:
   (a) Simétricas e ortogonais.
   (b) Anti-simétricas e ortogonais.

Solução:

(a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é simétrica se, e somente se,

$$A = A^T \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow b = c.$$

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se,

$$A \cdot A^T = I_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 &= 1 \\ b(a+d) &= 0 \\ b^2+d^2 &= 1 \end{cases}.$$

Como a e b são números reais tais que $a^2+b^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\begin{cases} a &= \cos\theta \\ b &= \sin\theta \end{cases}$ e como $b(a+d) = 0$ segue ainda que $b = 0$ ou $a = -d$.

Mas, temos também $b^2+d^2 = 1$, então existe $\phi \in [0, 2\pi)$ tal que $\begin{cases} d &= \cos\phi \\ b &= \sin\phi \end{cases}$, assim temos: $\begin{cases} a = \cos\theta = -\cos\phi = -d \\ b = \sin\theta = \sin\phi \end{cases} \Longrightarrow \phi = \pi - \theta$, pois

$$\begin{aligned} b &= \sin\phi = \sin(\pi-\theta) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos\theta - \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\sin\theta = \sin\theta \\ d &= \cos\phi = \cos(\pi-\theta) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\theta + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\theta = -\cos\theta = -a. \end{aligned}$$

Logo, as matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ que são simétricas e ortogonais simultaneamente são do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é anti-simétrica, então $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff b^2 = 1 \iff b = 1 \text{ ou } b = -1.$$

Logo, as únicas matrizes reais quadradas de ordem 2 que são simultaneamente anti-simétricas e ortogonais são

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4 Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais

1. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em hermitiana e anti-hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

Vimos no exercício 2 da Seção 1.3 que:

- A é matriz real anti-simétrica, logo $A = -A^T = -\overline{A}^T = -A^*$, portanto A é anti-hermitiana.
- C é matriz complexa simétrica, logo $C = C^T$.

  Porém $C \neq C^* = \overline{C}^T$, ou seja, C não é hermitiana, por exemplo

  $$c_{12} = 3+2i \neq \overline{c_{21}} = \overline{3+2i} = 3-2i.$$

  A matriz C tampouco é anti-hermitiana, pois $C = C^T \neq -C^* = -\overline{C}^T$, por exemplo

  $$c_{23} = 8+2i \neq -\overline{c_{32}} = -\overline{8+2i} = -(8-3i) = -8+2i.$$

- D é matriz real simétrica, logo $D = D^T = \overline{D}^T = D^*$, portanto D é hermitiana.
- E é matriz complexa anti-simétrica, logo $E = -E^T$.

  Porém, $E \neq -E^* = -\overline{E}^T$, ou seja, E não é anti-hermitiana, por exemplo,

  $$-\overline{e_{21}} = \overline{-2+i} = -(-2-i) = 2+i \neq 2-i = e_{12}.$$

  A matriz E tampouco é hermitiana, pois $E \neq E^* = \overline{E}^T$, por exemplo

  $$\overline{e_{12}} = \overline{2-i} = 2+i \neq -2+i = e_{21}.$$

$$B^* = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 10 & -5i \\ 2 & 5i & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, a matriz B é hermitiana.

$$\begin{aligned} F^* &= \overline{\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} -3i & i & -3-6i \\ i & -20i & 1-\sqrt{5}i \\ 3-6i & -1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -3i & i & 3-6i \\ i & -20i & -1-\sqrt{5}i \\ -3-6i & 1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -F. \end{aligned}$$

Logo, a matriz F é anti-hermitiana.

2. Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$, mostre que:
   (a) Se A é matriz real e simétrica (ou anti-simétrica), então A é matriz normal.
   (b) Se A é matriz hermitiana (ou anti-hermitiana), então A é matriz normal.
   (c) As matrizes $A+\overline{A}^T$ e $A\cdot\overline{A}^T$ são matrizes hermitianas.

   Solução:

   (a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, se A é simétrica, então $A^T = A$, logo

   $$A\cdot A^T \overset{A\text{ simét.}}{=} A\cdot A \overset{A\text{ simét.}}{=} A^T\cdot A.$$

   Agora, se A é anti-simétrica, então:

   $$A\cdot A^T \overset{A\text{ anti-sim.}}{=} A\cdot(-A) = (-A)\cdot A = \overset{A\text{ anti-sim.}}{=} A^T\cdot A.$$

   Logo, se A é matriz real simétrica ou anti-simétrica, então A é matriz normal.

   (b) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, se A é hermitiana $A^a st = A$, então:

   $$A\cdot A^a st \overset{A\text{ herm.}}{=} A\cdot A \overset{A\text{ herm.}}{=} A^*\cdot A.$$

   Já se A é anti-hermitiana, então $A^a st = -A$ e temos:

   $$A\cdot A^a st \overset{A\text{ anti-herm.}}{=} A\cdot(-A) = (-A)\cdot A = \overset{A\text{ anti-herm.}}{=} A^*\cdot A.$$

   Logo, se A é matriz complexa hermitiana ou anti-hermitiana, então A é matriz normal complexa.

   (c) Observemos que $A+\overline{A}^T = A+A^*$ e

   $$(A+A^*)^* = (A+\overline{A}^T)^* = \overline{A+\overline{A}^T}^T = \left(\overline{A}+\overline{\overline{A}^T}\right)^T = (\overline{A}+A^T)^T = \overline{A}^T + (A^T)^T = \overline{A}^T + A = A^* + A.$$

   Portanto, $A+\overline{A}^T$ é matriz hermitiana.

   $$(A\cdot A^*)^* = (A\cdot\overline{A}^T)^* = \overline{A\cdot\overline{A}^T}^T = \left(\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}^T}\right)^T = (\overline{A}\cdot A^T)^T = (A^T)^T\cdot\overline{A}^T = A\cdot\overline{A}^T = A\cdot A^*.$$

   Portanto, $A\cdot\overline{A}^T$ também é matriz hermitiana

3. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em normais e unitárias:

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Analogamente mostramos que $A^* \cdot A = I_2$.

Portanto, a matriz A é normal e unitária.

$$\begin{aligned} B \cdot B^* &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1-i \\ -1+i & 3+i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix} \neq I_2. \end{aligned}$$

Logo, B não é matriz unitária.

Como $B^* \cdot B = \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix}$, segue que B é matriz normal complexa.

$$C * C^* = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5i \\ -5i & 13 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Mas $C^* \cdot C = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \neq C \cdot C^*$, portanto C também não é normal.

1.5 Determinante

1. Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a -3.
   (a) Calcule o determinante da matriz P dada por $P = 4A^{-1}A^T$, P é invertível?
   (b) Calcule o determinante da matriz B obtida de A após serem realizadas as seguintes operações: $L_3 \leftrightarrow L_2$; $L_1 \to L_1 + 2L_5$; $L_4 \to -3L_4$.

Solução:

(a) $\det P = \det(4A^{-1}A^T) = 4^5 \ \det A^{-1} \det A^T = 1.024 \ \dfrac{1}{\det A} \det A = 1.024.$

(b) Como $\det P \neq 0$, segue que P é invertível.

(c) Ao efetuar a operação elementar $L_3 \leftrightarrow L_2$ o sinal do determinante é alterado, ao efetuar a operação $L_1 \to L_1 + 2L_5$ o determinante não se altera e ao efetuar $L_4 \to -3L_4$ o determinante deve ser multiplicado por -3 a operação elementar, portanto

$$\det B = (-1) \times (-3) \times \det A = 3 \times (-3) = -9.$$

2. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Teorema de Laplace (usando cofatores de uma linha ou de uma coluna de A).

(b) Usando operações elementares sobre as linhas de A.

Solução:

(a)
$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\text{pela 2ª linha}}{=} -(-1)\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\left[4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&= (9+2) + 4(5-6) - 3\big(4(8-3) + 5(4-6) + 2(1-4)\big) \\
&= 11 - 4 - 3(20 - 10 - 6) = 7 - 12 = -5.
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 + 2L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 + 5L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{10}L_3 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} L_4 \to L_4 + 45L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$, pelas operações elementares temos:

$$-\frac{1}{2} = (-1)(-1)\frac{1}{10}\det A \iff \det A = -\frac{10}{2} = -5.$$

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$ utilizando as operações elementares sobre as linhas de A;

(b) $\det A^T$; (c) $\det A^2$; (d) $\det A^{-1}$; (e) $\det(-A)$; (f) $\det(3AA^T)$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 6L_1 \\ L_4 \to L_4 - 5L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -23 & 9 & -19 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_2 \sim$$

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \to L_3 + 7L_2 \\ L_4 \to L_4 - 22L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & -83 & 165 \end{bmatrix} L_4 \to \tfrac{83}{25}L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{vmatrix} = -58$, pelas operações elementares temos:

$$-58 = (-1)\det A \iff \det A = 58.$$

(b) $\det A^T = \det A = 58$.

(c) $\det A^2 = (\det A)^2 = 58^2 = 3.364$.

(d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{58}$.

(e) $\det(-A) = (-1)^4\, 58 = 58$.

(f) $\det(3AA^T) = 3^4 \det A \det A^T = 3^4 58^2 = 272.484$.

4. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{pela 3ª linha}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} 3 \times (4-45) = 4 \times (-41) = -123.$

(b) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{pela 3ª linha}}{=} -(-1)\begin{vmatrix} 1+a & c \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= c + (1+a) + b = 1+a+b+c. \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 &= \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 0 & c-3 & 2-2c^2 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{pela 3ª linha}}{=} -(c-3)\begin{vmatrix} c & 3 \\ 2 & c^2 \end{vmatrix} + (2-2c^2)\begin{vmatrix} c & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3-c)(c^3-6) + (2-2c^2)(c+8) \\ &= -c^4 + 3c^3 + 6c - 18 + 2c + 16 - 2c^3 - 16c^2 \\ &= c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2. \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_5 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{matrix} &= (-1)\times(-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times 2 \times (-1) \times (-4) \times (-3) = -120. \end{aligned}$$

5. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0;$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16;$

(c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x(x+1)(2x1) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou} \\ x+1=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-1 \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \Longleftrightarrow 5\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ x-1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2x+3 & 4 \end{vmatrix} = 16$

$$\Longleftrightarrow 5\big(4(x-2) - 3(x-1)\big) - (8 - 3(2x+3)) = 16$$

$$\Longleftrightarrow 5(x-5) + 1 + 6x = 16 \Longleftrightarrow 5x - 25 + 1 + 6x = 16$$

$$\Longleftrightarrow 11x = 40 \Longleftrightarrow x = \frac{40}{11}.$$

(c) $$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} \Longleftrightarrow x(1-x)+3 = \begin{vmatrix} x & -6 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow -x^2+x+3 = x(x-5)+18+(-3)(6-x)$$
$$\Longleftrightarrow -x^2+x+3 = x^2-5x+18+-18+3x$$
$$\Longleftrightarrow 2x^2-3x+3=0 \Longleftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9+24}}{4} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

6. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\det(xI-A)=0$.

Solução:

$$\det(xI-A)=0 \Leftrightarrow \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & -2 & -3 \\ 2 & x-3 & -2 \\ 4 & -2 & x-5 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow (x+2)\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow (x+2)(x-3)(x-5)-4(x+2)+4(x-5)+16+12+12(x-3)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+2)(x-3)(x-5)-4x-8+4x-20+16+12+12x-36=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+2)(x-3)(x-5)+12x-36=0 \Longleftrightarrow (x-3)\big((x+2)(x-5)+12\big)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x-3)(x^2-3x-10+12)=0 \Longleftrightarrow (x-3)(x^2-3x+2)=0$$
$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} x-3=0 \\ \text{ou} \\ x^2-3x+2=0 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=1 \\ \text{ou} \\ x=2. \end{cases}$$

7. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Generalize o resultado para uma matriz $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ na qual $a_{ij}=0$ sempre que $i+j \leq n$.

Solução:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{14} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = a_{14} \times (-a_{23}) \times \begin{bmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \\ &= a_{14} \times (-a_{23}) \times (-a_{32} \times a_{41}) = a_{14} \times a_{23} \times a_{32} \times a_{41}, \end{aligned}$$

ou seja, se A é matriz quadrada de ordem 4 com $a_{ij}=0$ sempre que $i+j \leq 4$, então $\det A$ é o produto dos elementos da diagonal secundária.

Observemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = (-a_{13}) \times \left[\begin{array}{cc} 0 & a_{22} \\ a_{31} & a_{42} \end{array}\right] = (-a_{13}) \times (-a_{22} \times a_{31}) = a_{13} \times a_{22} \times a_{31}.$$

Logo, a generalização deste é resultado é: se A é matriz quadrada de ordem n, com $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$ e $n > 4$, então $\det A$ é o produto dos elementos da diagonal secundária, mas os elementos da diagonal secundária de A são os elementos A_{ij} tal que $i + j = n + 1$, logo temos:

$$\det A = a_{1n} \times a_{2(n-1)} \times \cdots \times a_{(n-1)2} \times \cdots \times a_{n1} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,(n+1)-i}.$$

8. Diz-se que uma matriz A é semelhante à matriz B quando existe uma matriz invertível P tal que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.

   (a) Mostre que se A é uma matriz semelhante a B, então B é semelhante a A.

   (b) Mostre que se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

   (c) Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

   Solução:

   (a) $B = PAP^{-1} \iff P^{-1}BP = P^{-1}(PAP^{-1})P \iff P^{-1}BP = (P^{-1}P)A(P^{-1}P) = A$.

   Logo, $A = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$, ou seja, B é semelhante a A.

   (b) Suponhamos que $B = PAP^{-1}$ e $C = QBQ^{-1}$, então

   $$C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1},$$

   portanto A é semelhante a C.

   (c) $\det B = \det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det P \det A \dfrac{1}{\det P} = \det A$.

1.6 Matriz Inversa

1. Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis, em caso afirmativo determine as inversas.

   $$A = \left[\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{array}\right]; \qquad B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

   Solução:

   Como $\det A = 30 - 24 = 6 \neq 0$, segue que A é invertível.

   Vimos que para $A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]$ com $\det A \neq 0$ a inversa de A é dada por

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left[\begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array}\right].$$

   Logo, no nosso caso temos $A^{-1} = \dfrac{1}{6} \cdot \left[\begin{array}{cc} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{array}\right]$.

Como $\det B = 2 \neq 0$, então B é invertível, vamos determinar B^{-1} efetuando operações sobre as linhas de B e de I_3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \; L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}.$$

Portanto, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os valores de a para que a matriz seja invertível em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Vimos que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = a - 4 - (2a-2) + 4 - 1 = -a + 1.$

Logo, $\det A \neq 0 \iff -a+1 \neq 0 \iff a \neq 1$.

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq 1$.

(b)
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 0 & a-4 & a-4 \end{vmatrix} \\ &= -(a-4)\begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (a-4)\begin{vmatrix} a+3 & 7 \\ -1 & a-5 \end{vmatrix} \\ &= (a-4)(6(a+3) - 6 + (a+3)(a-5) + 7) \\ &= (a-4)(6a + 18 + a^2 - 2a - 15 + 1) \\ &= (a-4)(a^2 + 4a + 4) = (a-4)(a+2)^2. \end{aligned}$$

Logo, $\det A \neq 0 \iff (a-4)(a+2)^2 \neq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} a-4 \neq 0 \\ \text{ou} \\ (a+2)^2 \neq 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a \neq 4 \\ \text{ou} \\ a \neq -2 \end{array} \right.$.

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq -2$ ou $a \neq 4$.

3. Sejam A, B e C matrizes invertíveis em $M_n(\mathbb{K})$, encontre a expressão da matriz X, nos seguintes casos:

(a) $AB^TX = C$; (b) $AB + CX = I_n$; (c) $(CB)^{-1}AX = I_n$; (d) $(AB)^TXC = I_n$.

Solução:

(a) Multiplicando a igualdade $AB^TX = C$ por A^{-1} à esquerda obtemos $B^TX = A^{-1}C$, multiplicando esta igualdade por $(B^T)^{-1}$ à esquerda obtemos $\boxed{X = (B^T)^{-1}A^{-1}C.}$

(b) Somando o oposto de AB na igualdade $AB + CX = I_n$ obtemos $CX = I_n - AB$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à esquerda obtemos $\boxed{X = C^{-1}(I_n - AB).}$

(c) Multiplicando a igualdade $(CB)^{-1}AX = I_n$ por CB à esquerda obtemos $AX = CB$, multiplicando esta igualdade por A^{-1} à esquerda obtemos $\boxed{X = A^{-1}CB.}$

(d) Multiplicando a igualdade $(AB)^TXC = I_n$ por $\left((AB)^T\right)^{-1}$ à esquerda obtemos $XC = \left((AB)^T\right)^{-1}$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à direita obtemos $\boxed{X = \left((AB)^T\right)^{-1}C^{-1}.}$

4. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz diagonal com $a_{11},\ a_{22}, \cdots,\ a_{nn}$ todos não nulos, determine A^{-1}, a inversa de A, se existir.

Solução:

Como $a_{11},\ a_{22}, \cdots,\ a_{nn}$ são todos não nulos, então $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$, logo existe A^{-1}.

Mas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

5. Em cada caso verifique se A é invertível; determine cof$A$, a matriz co-fatora de A, e A^{-1}, a matriz inversa de A, se esta existir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta & 0 \\ -\text{sen }\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) Lembrando que a matriz cofatora de A, $\text{cof}(A) = [\text{cof}(a_{ij})]$, com $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ e A_{ij} a matriz obtida de A retirando a i-ésima linha e j-ésima coluna, por exemplo

$$\text{cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 21 = 27,$$

$$\text{cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-18) = 19.$$

Com cálculos análogos aos acima concluímos que $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$, como $\det A = 152 \neq 0$, então existe A^{-1} e vimos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{cof}(A))^T.$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{152} \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{1}{8} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

(b) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\ \theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\ \theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, como $\det A = 1 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \left(\mathrm{cof}(A)\right)^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\ \theta & 0 \\ \mathrm{sen}\ \theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} \frac{2}{18} & 2 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ -\frac{4}{18} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, como $\det A = \dfrac{1}{6} \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = 6 \begin{bmatrix} \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 2 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -2 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & -72 & 60 & 128 \\ 18 & 36 & -39 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$, como $\det A = 72 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & -72 & 36 & 0 \\ 12 & 60 & -39 & 0 \\ 16 & 128 & -106 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{24} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{53}{36} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Mostre que se A é invertível e $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$.

Solução:

$$AB = AC \overset{\text{existe } A^{-1}}{\Longrightarrow} A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Longleftrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Longleftrightarrow I \cdot B = I \cdot C \Longleftrightarrow B = C.$$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) A^{-1}; (c) B^{-1}; (d) $(AB)^{-1}$.

Solução:

Sabemos que o determinante de uma matriz quadrada triangular é o produto dos elementos da diagonal principal, logo $\det A = \det B = 24$.

(a) Portanto, $\det(AB) = \det A \det B = 24^2 = 576$.

(b) Determinemos A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \; L_4 \to \tfrac{1}{3}L_4 \quad \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 2L_4 \\ L_2 \to L_2 - 4L_4 \\ L_3 \to L_3 + 2L_4 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; L_3 \to \tfrac{1}{4}L_3 \quad \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; L_2 \to \tfrac{1}{2}L_2 \quad \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & -5 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \; \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + 5L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Analogamente, obtemos $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

(d)
$$(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{17}{24} & \frac{31}{36} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{3} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & -\frac{35}{12} & \frac{55}{18} \\ -\frac{25}{24} & -\frac{67}{24} & -\frac{119}{48} & \frac{187}{72} \end{bmatrix}$$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, mostre que:
   (a) Se A satisfaz a igualdade $A^2-3A+I=0$, então $A^{-1}=3I-A$.
   (b) Se A é tal que $A^{n+1}=0$ para $n\in\mathbb{N}$, então $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^n$.

   Solução:

   (a) Primeiro observemos que
   $$A^2-3A+I=0 \iff A(A-3I)=-I \iff A(3I-A)=I.$$
   Portanto, A é invertível e $A^{-1}=3I-A$.

   (b) Basta mostrar que $(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^n)=I$.
   Mas,
   $$\begin{aligned}(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^n) &= I+A+A^2+\ldots+A^n-A-A^2-\ldots-A^n-A^{n+1}\\ &= I-A^{n+1} \overset{A^{n+1}=0}{=} I.\end{aligned}$$

9. Supondo que A e B são matrizes quadradas de ordem n invertíveis, prove as seguintes igualdades:
   (a) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.
   (b) $(I+AB)^{-1}A=A(I+BA)^{-1}$.
   (c) $(A+BB^T)^{-1}B=A^{-1}B(I+B^TA^{-1}B)^{-1}$.

   Solução:

   (a) $A(A+B)^{-1}B=\left(B^{-1}(A+B)A^{-1}\right)^{-1}=\left(B^{-1}AA^{-1}+B^{-1}BA^{-1}\right)^{-1}=\left(B^{-1}+A^{-1}\right)^{-1}.$

   (b) $(I+AB)^{-1}A=\left(A^{-1}(I+AB)\right)^{-1}=\left(A^{-1}+A^{-1}AB\right)^{-1}=\left(A^{-1}+B\right)^{-1}$
   $=\left((I+BA)A^{-1}\right)^{-1}=A(I+BA)^{-1}.$

   (c) $A^{-1}B(I+B^TA^{-1}B)^{-1}=\left((I+B^TA^{-1}B)B^{-1}A\right)^{-1}=\left(B^{-1}A+B^T\right)^{-1}$
   $=\left(B^{-1}(A+BB^T)\right)^{-1}=(A+BB^T)^{-1}B.$

10. Mostre que:

(a) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

(b) Se A é invertível, então adj$A$ é invertível e $(\text{adj}A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A = \text{adj}(A^{-1})$.

(c) Se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$.

Solução:

(a) A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$

$$\iff (\det A)^2 \neq 0 \iff \det A \cdot \det A \neq 0 \overset{\det A^T = \det A}{\iff} \det A^T \cdot \det A \neq 0$$

$$\overset{\det B \det C = \det(BC)}{\iff} \det(A^TA) \neq 0.$$

Portanto, A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

(b) Sabemos que se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}A.$$

Logo, multiplicando a igualdade acima por $(\text{adj}A)^{-1}$ à direita obtemos:

$$A^{-1}(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\,I_n.$$

Agora multiplicando a última igualdade por A à esquerda obtemos:

$$(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\,A.$$

(c) Pelo item anterior temos $(\text{adj}A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A$, então

$$\det\left((\text{adj}A)^{-1}\right) = \det\left(\frac{1}{\det A}\,A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\right)^n \det A = \frac{1}{(\det A)^n}\,\det A = \frac{1}{(\det A)^{n-1}}.$$

Como $\det(\text{adj}A) = \dfrac{1}{\det\left((\text{adj}A)^{-1}\right)} = (\det A)^{n-1}$.

11. Determine A^{-1}, se existir, utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz, em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) Como $\det A = 12+2 = 14 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_2:

$$\begin{array}{rr|rrl} 3 & -1 & 1 & 0 & L_1 \longrightarrow \frac{1}{3}L_1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & \end{array} \sim \begin{array}{rr|rrl} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 2 & 4 & 0 & 1 & L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rr|rrl} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & L_2 \longrightarrow \frac{3}{14}L_2 \end{array} \sim \begin{array}{rr|rrl} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-10)-(12-4)+3(20-4) = 32 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3:

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|rrrl} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 & L_2 \longrightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \longrightarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrr|rrrl} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 - 3L_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrr|rrrl} 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \end{array} \sim \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(c) Como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1)+(1-0) = 1 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3:

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -L_3 \longrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \end{array} \sim \begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & L_3 \longrightarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \; L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \quad \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(d) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(2-12)-(8+12)-4(-8-2) = -20-20+40 = 0$, portanto A não invertível e não existe A^{-1}.

(e) Como $\det A = 1 \neq 0$, pois A é matriz triangular e o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Determinemos a inversa de A efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_2 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 - 4L_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to L_4 - 2L_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}.$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Considere as seguintes matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre a expressão de X tal que $BAX = C$.

(b) Determine, caso exista, a inversa da matriz X do item acima.

Solução:

(a) Multiplicando a igualdade $BAX = C$ por $(BA)^{-1}$ à esquerda obtemos $X = (BA)^{-1}C$.

(b) Como as matrizes A, B e C são invertíveis segue que $(BA)^{-1}$ é invertível e também $X = (BA)^{-1}C$.

Além disso, $X^{-1} = \left((BA)^{-1}C\right)^{-1} = C^{-1}BA$.

No exercício 11 (c) temos: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e com cálculos simples concluímos que $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

1.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

1. ( ) Se a soma de matrizes $A \cdot B + B \cdot A$ está definida, então as matrizes A e B têm a mesma ordem.
2. ( ) Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então A não é invertível.
3. ( ) Se A é invertível de ordem n e $A \cdot B_{n\times m} = 0_{n\times m}$, então B é a matriz nula de ordem $n \times m$.
4. ( ) A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.
5. ( ) Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^4 = 0$, então $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.
6. ( ) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2\det A$.
7. ( ) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(I_n + A) = 1 + \det A$.
8. ( ) Não existe matriz quadrada real A para a qual $\det(A \cdot A^T) = -1$.
9. ( ) Se $\det(A^T \cdot A) = 4$, então $\det A = 2$.
10. ( ) $\det(A+B) = \det A + \det B$.
11. ( ) Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det A = -\dfrac{1}{2}$, então $\det\left(-2A^2A^T \cdot A^{-1}\right) = -4$.
12. ( ) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, com $n > 1$, então $\det(-A) = -\det A$.
13. ( ) Toda matriz diagonal é invertível.
14. ( ) Dadas A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então $\left(I + A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} \cdot A^{-1} = \left(A + B^T\right)^{-1}$.
15. ( ) Se A^{100} é invertível, então $3A$ também o é.
16. ( ) Se A é uma matriz anti-simétrica, então a matriz A^k é anti-simétrica para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
17. ( ) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então A é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
18. ( ) Toda matriz complexa simétrica é uma matriz normal.
19. ( ) Se A é uma matriz real simétrica, então A é matriz normal.
20. ( ) O conjugado da soma de duas matrizes simétricas é uma matriz normal.
21. ( ) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

22. ( ) A soma de matrizes reais hermitianas é uma matriz simétrica.
23. ( ) A transposta do produto de matrizes ortogonais é o produto de suas inversas.
24. ( ) A soma de matrizes idempotentes é uma matriz idempotente.
25. ( ) Se A e B matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AB = A$ e $BA = B$, então A e B são matrizes idempotentes.
26. ( ) A soma de duas matrizes hermitianas é uma matriz normal.
27. ( ) O traço de uma matriz quadrada é igual ao traço de sua transposta.
28. ( ) O traço de uma matriz ortogonal é igual ao traço de sua inversa.
29. ( ) O traço de uma matriz quadrada complexa é igual ao traço de sua conjugada transposta.
30. ( ) O conjugado do traço de uma matriz hermitiana é igual ao traço da matriz.

Solução:

1. (V) Dizer que a diferença de matrizes $AB - BA$ está definida, é equivalente a dizer que AB e BA têm a mesma ordem.
Já que estão definidos os produtos AB e BA, então o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, ou seja, A e B são matrizes de ordens $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente.
Consequentemente, $(AB)_{n\times n}$ e $(BA)_{m\times m}$.
Portanto, AB e BA têm a mesma ordem se, e somente se, $m = n$, ou seja, se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem.
2. (V) Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então
$$\det(A \cdot A^T) = 0 \overset{\det(BC)=\det B \det C}{\iff} \det A \cdot \det A^T = 0 \overset{\det A^T = \det A}{\iff} (\det A)^2 = 0 \iff \det A = 0.$$
Portanto, A não é invertível.
3. (V) Se A é invertível e $A \cdot B = 0$, então multiplicando por A^{-1} à esquerda obtemos $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0_{n\times m} \iff B = 0_{n\times m}$, ou seja, B é a matriz nula $n \times m$.
4. (F) As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ são invertíveis, pois $\det A = \det B = -6 \neq 0$, porém $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ que não é uma matriz invertível.
5. (V) De fato, $(I_n + A + A^2 + A^3) \cdot (I_n - A) = I_n + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 \overset{A^4=0}{=} I_n$, consequentemente, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.
6. (F) Se A é matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2^n \det A \overset{n\geq 2}{\geq} 2\det A$ e a igualdade só ocorre se $\det A = 0$, logo tomando A tal que $\det A \neq 0$ a igualdade não se verifica.
7. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $1 + \det A = 1 + 3 = 4$, porém $\det(I_3 + A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 1 + 3$.
8. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \overset{\det A \in \mathbb{R}}{\geq 0}$.
Portanto, não existe matriz quadrada real A tal que $\det(A \cdot A^T) = -1$.

9. (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = 4 \iff \det A \cdot \det A^T = 4$

$$\iff (\det A)^2 = 4 \iff \begin{cases} \det A = 2 \\ \text{ou} \\ \det A = -2 \end{cases}.$$

10. (F) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det(A+B) = 10 \neq 5 = 2+3 = \det A + \det B$.

11. (F) Pois,

$$\begin{aligned} \det\Big(-2A^2A^T \cdot A^{-1}\Big) &\overset{*}{=} (-2)^4 \cdot \det(A^2) \cdot \det A^T \cdot \det A^{-1} \\ &\overset{**}{=} 16 \cdot \big(\det A\big)^2 \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = 16 \cdot \big(\det A\big)^2 \\ &= 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4 \neq -4. \end{aligned}$$

$*$ $\det(kA) = k^n \det A$ e $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

$**$ $(\det A)^k = \det A^k$, $\det A^T = \det A$ e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

12. (F) Se A é uma matriz quadrada invertível de ordem n, com n número par, então:

$$\det(-A) = (-1)^n \det A \overset{n \text{ é par}}{=} \det A \overset{\det A \neq 0}{\neq} -\det A.$$

13. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então A é matriz diagonal, mas $\det A = 0$ e portanto A não é invertível.

14. (V) Se estão em A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então A e B são invertíveis e:

$$\left(I + A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} \cdot A^{-1} = \Big(A \cdot \big(I + A^{-1} \cdot B^T\big)\Big)^{-1} = \left(A + A \cdot A^{-1} \cdot B^T\right)^{-1} = (A + B^T)^{-1}.$$

15. (V) Se A^{100} é invertível, então $\det(A^{100}) \neq 0 \iff (\det A)^{100} \neq 0 \iff \det A \neq 0$.

Como $\det(3A) = 3^n \underbrace{\det A}_{\neq 0} \neq 0$, consequentemente $3A$ é matriz invertível.

16. (F) Pois, A é uma matriz quadrada anti-simétrica, se, e somente se, $A = -A^T$.

Logo, dado $k \in \mathbb{N}^*$, então $A^k = (-A^T)^k = (-1)^k (A^T)^k = (-1)^k (A^k)^T$.

Portanto, se k é ímpar temos $A^k = -(A^k)^T$ e A^k é anti-simétrica, mas se k é par temos $A^k = (A^k)^T$ e A^k é simétrica e não anti-simétrica.

17. (V) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz qualquer, então podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2}\Big(A + A + A^T - A^T\Big) = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{anti-simétrica}}.$$

18. (F) Se A é simétrica, então $A = A^T$, portanto $A\cdot A^* = A\cdot \overline{A}^T = A\cdot \overline{A^T} \overset{A^T=A}{=} A\cdot \overline{A}$, analogamente $A^*\cdot A == \overline{A}\cdot A$.

Por exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, no entanto

$$A\cdot A^* = A\cdot \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1+i & 2i \\ 1+i & 4 & 1-i \\ -2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A^*\cdot A = \overline{A}\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1-i & -2i \\ -1+i & 4 & 1+i \\ i & 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A\cdot A^* \neq A^*\cdot A$ e A não é matriz complexa normal.

19. (V) Se A é uma matriz real simétrica, então $A = A^T$, logo $A\cdot A^T = A\cdot A = A^T\cdot A$ e A é matriz real normal.

20. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 0 & i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}$ são simétricas e $\overline{A+B} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$, como vimos no item 18 esta matriz não é normal.

21. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes reais simétricas, porém o elemento $ab_{12} = 8 \neq 7 = ba_{12}$, logo $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T = B\cdot A \neq A\cdot B$, portanto $A\cdot B$ não é simétrica.

22. (V) Se A é matriz real hermitiana, então $A = A^* = \overline{A}^T \overset{A\in M_n(\mathbb{R})}{=} A^T$, portanto A é simétrica e a soma de matrizes reais simétricas é uma matriz simétrica.

De fato, se $A^T = A$ e $B^T = B$, matrizes de mesma ordem, então $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$.

23. (F) Sejam A e B matrizes ortogonais em $M_n(\mathbb{R})$, então $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$, logo $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T = B^{-1}\cdot A^{-1}$ é o produto das inversas de B e A, porém como o produto de matrizes não é comutativo, em geral $(A\cdot B)^T \neq A^{-1}\cdot B^{-1}$.

24. (F) A matriz $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ é idempotente, no entanto $I_n + I_n = 2I_n$ não é idempotente, pois $(2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n$.

25. (V) De fato,

$$A^2 = A\cdot A = (AB)\cdot(AB) = Aa\cdot(BA)\cdot B = A\cdot B\cdot B = (AB)\cdot B = A\cdot B = A,$$

$$B^2 = B\cdot B = (BA)\cdot(BA) = B\cdot(AB)\cdot A = B\cdot A\cdot A = (BA)\cdot A = B\cdot A = B.,$$

Portanto,A e B são matrizes idempotentes.

26. (V) Sejam A e B matrizes hermitianas, então $A^* = A$ e $B^*B = B$, logo:

$$\begin{aligned}(A+B)\cdot(A+B)^* &= (A+B)\cdot(B^*+A^*) = AB^*+BB^*+AA^*+BA^* \\ &\underset{A^*=A\ B^*=B}{=} AB+B^2+A^2+BA = (A+B)^2.\end{aligned}$$

Analogamente, $(A+B)^*\cdot(A+B) = (A+B)^2$.

Portanto, $A+B$ é uma matriz normal.

27. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então a diagonal principal de A é igual à diagonal principal de A^T, como

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \operatorname{tr}(A^T).$$

28. (V) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então $A^{-1} = A^T$, logo $\operatorname{tr}(A^{-1}) = \operatorname{tr}(A^T) \overset{item27}{=} \operatorname{tr}(A)$.

29. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{bmatrix}$, então $\operatorname{tr}(A) = 1+i+2+i+3-i = 6+i$ e $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix}$, logo $\operatorname{tr}(A^*) = 1-i+2-i+3+i = 6-i$, portanto $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(A^*)$.

30. (V) Seja A uma matriz hermitiana, então $\overline{\operatorname{tr}(A)} = \operatorname{tr}(\overline{A}) = \operatorname{tr}(\overline{A}^T) = \operatorname{tr}(A^*) = \operatorname{tr}(A)$.

1.8 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

Observação: Nesta seção, dada uma matriz A vamos indicar por $p(A)$ o posto de A e $n(A)$ a nulidade de A.

1. Encontre a forma escalonada reduzida (forma escada) das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \to -\tfrac{1}{6}L_2$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 - 4L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 + 2L_1 \;\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 + L_3$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \;\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \\ \\ L_2 \to \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \;\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \;\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 - 2L_1 \;\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 \to \frac{1}{5}L_2$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 + 3L_2 \;\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, a forma reduzida da matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$.
- Como $\det E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6+8) + 3(6-2) - 14 + 12 = -2 \neq 0$, segue que a forma reduzida de E é a matriz identidade I_3.

2. Verifique, se possível, para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ as matrizes abaixo são linhas equivalentes à matriz identidade I_3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Uma matriz A quadrada de ordem n termo forma reduzida a matriz identidade I_n se, e somente se, $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5-1) + m(2+5) = -12 + 7m.$$

Logo, $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow -12 + 7m \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq \dfrac{12}{7}$.

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} \\ &= m(2-m) - 2(4-2) + m(2m-2) = 2m - m^2 - 4 + 2m^2 - 2m = m^2 - 4.\end{aligned}$$

Logo, $\det B \neq 0 \Longleftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Longleftrightarrow m^2 \neq 4 \Longleftrightarrow m \neq 2$ e $m \neq -2$.

3. Determine o posto e a nulidade de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- Pelo item (a) do exercício 1 $p(A) = 3$ e $n(A) = 1$.
- A matriz B está na forma escalonada e não tem linhas nulas, logo $n(B) =$ número de linhas de $B =$ 2, consequentemente $n(B) =$ número de linhas de $B - p(B) = 4 - 2 = 2$.
- $\det C = 2 \neq 0$, logo $p(C) =$ número de linhas de $C = 2$ e $n(C) = 0$.
- A forma escalona de D é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(D) = 2$ e $n(D) = 0$.
- A forma escalona de E é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(E) = 3$ e $n(E) = 0$.

4. Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições em cada um dos seguintes casos:

(a) $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$; (b) $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$;

(c) $A \in M_{2\times4}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$; (d) $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 2$;

(e) $A \in M_{4\times3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$; (f) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$;

(g) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$.

Solução:

(a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$ é tal que $p(A) = 2$.

(b) Dada $A_{m\times n}$ vimos que $p(A) \leq min\{m,n\}$, logo se $A_{3\times2}$, então $p(A) \leq min\{3,2\} = 2$, portanto não há matriz $A_{3\times2}$ com $p(A) = 3$.

(c) Pelo mesmo argumento do item anterior não há matriz $A_{2\times4}$ com $p(A) = 3$.

(d) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ é tal que $n(A) = 2$.

(e) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.

(f) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.

5. Dada a matriz $B_{m\times n}$, determine a matriz N, linha forma reduzida de B (forma escada) e a matriz invertível M, de ordem m, tal que $N = M \cdot B$, em cada um dos seguintes casos:

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

Solução:

Para determinar as matrizes N e M basta efetuar operações elementares, simultaneamente, na matriz B e na matriz identidade I_m até B estar forma escalonada reduzida.

(a)

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \to L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}.$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(b)

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - (1+i)L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(5+i) & -\frac{1+i}{2} & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ L_2 \longrightarrow -\frac{1}{5+i}L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+2i}{26} & 1\frac{-5+i}{26} \end{array}.$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3+2i}{26} & 1\frac{-5+i}{26} \end{bmatrix}$.

2. Sistemas de Equações Lineares

2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

1. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ x & - & 2y & = & 4 \end{array}\right.$,

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & -7 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$,

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \\ 4x & - & 7y & = & 2 \end{array}\right.$,

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3t & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8t & = & 10 \end{array}\right.$.

Solução:

(a) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2.2 Classificação e Solução de Sistemas Lineares

1. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado seja compatível.

$$\text{(a)} \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}.$$

Solução:

(a) A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + {}^5\!/\!_4\, L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + {}^1\!/\!_2\, L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -{}^1\!/\!_4 & {}^5\!/\!_2 \\ 0 & {}^1\!/\!_2 & k+1 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow L_3 + {}^1\!/\!_2\, L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -{}^1\!/\!_4 & {}^5\!/\!_2 \\ 0 & 0 & k+6 \end{array}\right].$$

Pelo escalonamento $p(A) = 2 = p(M) \Longleftrightarrow k+6 = 0 \Longleftrightarrow k = -6$
Portanto, o sistema é compatível se, e somente se, $k = -6$, neste caso o sistema é compatível determinado.

(b) A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & k-3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow L_3 + {}^1\!/\!_2\, L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & k-3 \\ 0 & 0 & {}^{(k-13)}\!/\!_2 \end{array}\right].$$

Pelo escalonamento $p(A) = 2 = p(M) \Longleftrightarrow \dfrac{k-13}{2} = 0 \Longleftrightarrow k - 13 = 0 \Longleftrightarrow k = 13$
Portanto, o sistema é compatível se, e somente se, $k = 13$, neste caso o sistema é compatível determinado.

2. Determine os valores de a e b que tornam o sistema linear $S:\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & a \\ x & + & y & = & b \\ 5x & + & 3y & = & 5a+2b \\ x & + & 2y & = & a+b-1 \end{array}\right.$ compatível e determinado.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{rrcc} 3 & -7 & | & a \\ 1 & 1 & | & b \\ 5 & 3 & | & 5a+2b \\ 1 & 2 & | & a+b-1 \end{array}\right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrcc} 3 & -7 & | & a \\ 1 & 1 & | & b \\ 5 & 3 & | & 5a+2b \\ 1 & 2 & | & a+b-1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrcc} 1 & 1 & | & b \\ 3 & -7 & | & a \\ 5 & 3 & | & 5a+2b \\ 1 & 2 & | & a+b-1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3-5L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4-L_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrcc} 1 & 1 & | & b \\ 0 & -10 & | & a-3b \\ 0 & -2 & | & 5a-3b \\ 0 & 1 & | & a-1 \end{array}\right] L_2 \longleftrightarrow L_4 \sim \left[\begin{array}{rrcc} 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & | & a-1 \\ 0 & -2 & | & 5a-3b \\ 0 & -10 & | & a-3b \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \longrightarrow L_3+2L_2 \\ L_4 \longrightarrow L_4+10L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrcc} 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & | & a-1 \\ 0 & 0 & | & 7a-3b-2 \\ 0 & 0 & | & 11a-3b-10 \end{array}\right].$$

Pelo escalonamento $p(A)=2=p(M) \Longleftrightarrow k+6=0 \Longleftrightarrow k=-6$
Portanto, o sistema é compatível se, e somente se,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7a-3b-2 & = & 0 \\ 11a-3b-10 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 3b=7a-2 \text{ e } 3b=11a-10 \Longrightarrow 7a-2=11a-10$$

$$\Longleftrightarrow 4a=8 \Longleftrightarrow a=2 \Longrightarrow 3b=14-2=12 \Longleftrightarrow b=4.$$

Logo, o sistema é compatível determinado se, e somente se, $a=2$ e $b=4$.

3. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right.$. Mostre que:
   (a) se $ad-bc \neq 0$, então o sistema tem uma única solução, dada por

$$x=\frac{de-bf}{ad-bc} \text{ e } y=\frac{af-ce}{ad-bc};$$

   (b) se $ad-bc=0$ e $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{e}{f}$, então o sistema não tem solução.

   (c) se $ad-bc=0$ e $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{e}{f}$, então o sistema tem infinitas soluções.

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, logo existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Portanto, multiplicando a igualdade $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ por $\dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{I_2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{de-bf}{ad-bc} \\[2ex] \dfrac{af-ce}{ad-bc} \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } \quad x = \frac{de-bf}{ad-bc} \text{ e } y = \frac{af-ce}{ad-bc}.$$

(b) $ad - bc = 0 \Longleftrightarrow ad = bc$, supondo $c \neq 0$, então $b = \dfrac{ad}{c}$, logo no sistema temos: $\begin{cases} ax & + & \dfrac{ad}{c}y & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{cases}$, multiplicando a 2ª equação por $-\dfrac{a}{c}$ obtemos o sistema equivalente: $\begin{cases} ax & + & \dfrac{ad}{c}y & = & e \\ -ax & + & -\dfrac{ad}{c}y & = & -\dfrac{af}{c} \end{cases}$.

Somando a 1ª equação e a 2ª equação obtemos: $0 = e - \dfrac{af}{c} = \dfrac{ce-af}{c}$.

Como $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{e}{f} \Longleftrightarrow af \neq ce \Longleftrightarrow ce - af \neq 0$, portanto temos $0 = \dfrac{ce-af}{c} \neq 0$, uma contradição, consequentemente o sistema linear não tem solução.

(c) Fazendo o desenvolvimento do item anterior obtemos: $0 = e - \dfrac{ad}{c} = \dfrac{ce-af}{c}$, como $\dfrac{a}{c} = \dfrac{e}{f} \Longleftrightarrow af = ce \Longleftrightarrow ce - af = 0$, logo temos $0 = \dfrac{0}{c} = 0$.

Portanto, temos $ax + \dfrac{ad}{c}y = e$.

- Se $a = 0$, então como estamos supondo $c \neq 0$, segue de $af = ce$ que $e = 0$, portanto temos $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, como x e y são números reais quaisquer.
- Se $a \neq 0$, então $ax = e - \dfrac{ad}{c}y \Longleftrightarrow x = \dfrac{e}{a} - \dfrac{d}{c}y$, com $y \in \mathbb{R}$.

Logo, o sistema linear tem infinitas soluções.

4. Dado o sistema linear $S : \begin{cases} 2x & + & 3y & - & z = & 0 \\ x & - & 4y & + & 5z = & 0 \end{cases}$.

(a) Verifique que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ e $z_1 = -1$ é uma solução de S;

(b) Verifique que $x_2 = -2$, $y_1 = 2$ e $z_1 = 2$ também é uma solução de S;

(c) É verdade que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$ é uma solução de S?

(d) É verdade que $3x$, $3y$ e $3z$, onde x, y e z são como no item (c), é uma solução de S?

(e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

Solução:

(a) Como $2\times 1+3\times(-1)-(-1)=2-3+1=0$ e $1-4\times(-1)+5\times(-1)=1+4-5=0$, segue que $x_1=1$, $y_1=-1$ e $z_1=-1$ é uma solução de S.

(b) Como $2\times(-2)+3\times 2-2=-4+6-2=0$ e $-2-4\times 2+5times2=-2-8+10=0$, segue que $x_2=-2$, $y_1=2$ e $z_1=2$ também é uma solução de S.

(c) Como

$$2\times(x_1+x_2)+3\times(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=\underbrace{2\times x_1+3\times y_1-z_1}_{=0}+\underbrace{2\times x_2+3\times y_2-z_2}_{=0}=0;$$

$$(x_1+x_2)-4\times(y_1+y_2)+5(z_1+z_2)=\underbrace{x_1-4\times y_1+5z_1}_{=0}+\underbrace{x_2-4\times y_2+5z_2}_{=0}=0.$$

Seque que $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$ e $z=z_1+z_2$ é uma solução de S.

(d) Como

$$2\times(3x)+3\times(3y)-(3z)=3\times\underbrace{(2\times x+3\times y-z)}_{=0}=3\times 0=0;$$

$$(3x)-4\times(3y)+5(3z)=3\times\underbrace{(x-4\times y+5z)}_{=0}=3\times 0=0.$$

Portanto, $3x$, $3y$ e $3z$, onde x, y e z são como no item (c), é uma solução de S.

(e) Isso ocorre por que em um sistema linear homogêneo, nas variáveis x, y e z, se (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) são soluções, então

$$k_1(x_1,y_1,z_1)+k_2(x_2,y_2,z_2) \quad \text{com} \quad k_1,\ k_2\in\mathbb{R}$$

também é solução.

2.3 Teorema do Posto

1. Considere os sistemas lineares abaixo, determine o posto e a nulidade das matrizes: **matriz dos coeficientes** e **matriz ampliada**, para os diferentes valores de $m\in\mathbb{R}$.

(a) $S:\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & mz & = & 0\\ 2x & + & y & + & z & = & 0\\ 2x & + & my & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$, (b) $S:\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 5y & + & z & = & 0\\ x & + & y & + & z & = & 0\\ 2x & & & + & mz & = & 0\end{array}\right.$.

Solução:

Como ambos os sistemas são homogêneos, então $p(A)=p(M)$.

(a) $$\begin{bmatrix} m & 2 & m\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & m & 2\end{bmatrix} \overset{L_1\longleftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ m & 2 & m\\ 2 & m & 2\end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2\to L_2-{}^{m}\!/_{2}\,L_1\\ L_3\to L_3-L_1\end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 0 & -{}^{(m-4)}\!/_{2} & {}^{m}\!/_{2}\\ 0 & m-1 & 1\end{bmatrix} \quad L_3\overset{m-4\neq 0}{\longrightarrow} L_3+{}^{(2(m-1))}\!/_{m-4}\,L_2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 0 & -{}^{(m-4)}\!/_{2} & {}^{m}\!/_{2}\\ 0 & 0 & {}^{(m^2-4)}\!/_{m-4}\end{bmatrix}.$$

Logo,

- Se $m-4=0 \Longleftrightarrow m=4$ e no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A)=p(M)=3$.

- Se $m-4 \neq 0$ e $m^2-4=0$, então $m=-4$ e no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(m-4)/2 & m/2 \\ 0 & 0 & (m^2-4)/m-4 \end{bmatrix} \stackrel{m=-4}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A)=p(M)=2$.

- Se $m-4 \neq 0$ e $m^2-4 \neq 0$, então $\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \underbrace{-(m-4)}_{\neq 0}/2 & m/2 \\ 0 & 0 & \underbrace{(m^2-4)}_{\neq 0}/m-4 \end{bmatrix},$

consequentemente $p(A)=p(M)=3$.

(b) $$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & m-1 \end{bmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 + 5/7\, L_2 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & (7m-12)/7 \end{bmatrix}.$$

Logo,

- Se $7m-12=0 \Longleftrightarrow m=\dfrac{12}{7}$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A)=p(M)=2$.

- Se $7m-12 \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq \dfrac{12}{7}$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{(7m-12)}_{\neq 0}/7 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A)=p(M)=3$.

2. Seja o sistema de equações linear $S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} mx & + & 2y & + & mz & = & 0 \\ mx & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & my & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$.

   (a) Estude o conjunto solução do sistema S utilizando o posto e a nulidade das matrizes relacionadas para os diferentes valores de $m \in \mathbb{R}$.

(b) Para $m = 1$, determine o conjunto solução deste sistema utilizando, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes.

Solução:

(a) $\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \quad \sim$

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - {}^{m}/_{2}\, L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -{}^{(m^2-4)}/_{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1-m \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \ \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & -{}^{(m^2-4)}/_{2} & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - {}^{(m^2-4)}/_{2}\, L_2 \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & {}^{(m^2-4)(m-1)}/_{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

- Se $(m^2-4)(m-1) = 0 \Longleftrightarrow m^2-4 = 0$ ou $m-1 = 0 \Longleftrightarrow m = 4$ ou $m = -4$ ou $m = 1$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 2$.

- Se $(m^2-4)(m-1) \neq 0 \Longleftrightarrow m^2-4 \neq 0$ e $m-1 \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq 4,\ \ m \neq -4$ e $m \neq 1$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{{}^{(m^2-4)(m-1)}/_{2}}_{\neq 0} \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 3$.

(b) Se $m = 1$, então $p(A) = 2 < 3$, logo A não é invertível, portanto não é possível determinar o conjunto solução utilizando a inversa da matriz dos coeficientes, pois esta não existe.

Se $m = 1$, então $\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e esta matriz corresponde ao sistema linear: $S' : \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ \quad\ \ - y \qquad\ = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}.$

Portanto, se $m = 1$, então $Sol(S) = Sol(S') = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -z \ \text{ e } \ y = 0\right\}$.

3. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial:

(a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$.

Solução:

Como ambos os sistemas são homogêneos, então $p(A) = p(M)$.

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & 3 \end{bmatrix} \; L_3 \longrightarrow L_3 + (k+2)L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogêneo tem solução não trivial, se e somente se, $p(A)$ não é máximo, ou seja, se e somente se, $p(A) < 3 \iff -k+1 = 0 \iff k = 1$.

Portanto, o sistema tem solução não trivial, se e somente se, $k = 1$.

(b) $$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix} \; L_1 \longleftrightarrow L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & k-2 \end{bmatrix} \; L_3 \longrightarrow L_3 + {}^{5}/_{7}\, L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogêneo tem solução não trivial, se e somente se, $p(A)$ não é máximo, ou seja, se e somente se, $p(A) < 3 \iff k-2 = 0 \iff k = 2$.

Portanto, o sistema tem solução não trivial, se e somente se, $k = 2$.

4. Determine k de modo que o sistema linear $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = k \end{cases}$ admita solução.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right]$ logo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right] L_1 \longleftrightarrow L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & k \\ 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - {}^{5}/_{2}\, L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & k \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & -{}^{5k}/_{2} \\ 0 & 1 & 2k+2 \end{array}\right] L_2 \longleftrightarrow L_3 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & -{}^{3}/_{2} & -{}^{5k}/_{2} \end{array}\right] L_3 \longrightarrow L_3 + {}^{3}/_{2}\, L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & {}^{(k+6)}/_{2} \end{array}\right].$$

Pelo desenvolvimento acima $p(A) = 2$, para que o sistema tenha solução devemos $p(A) = p(M)$ e $p(M) = 2$ se e somente se, $\dfrac{k+6}{2} = 0 \iff k+6 = 0 \iff k = -6$.

Portanto, o sistema tem solução, se e somente se, $k = -6$.

5. Determine os valores reais de a e b para que o sistema linear $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$

tenha: (a) uma única solução; (b) infinitas soluções; (c) nenhuma solução:

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 0 \end{array}\right]$, escalonando M obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & a-1 & 3 & 0 \end{array}\right] L_3 \longrightarrow L_3 + (a-1)L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 5a-2 & b(a-1) \end{array}\right].$$

(a) O sistema tem uma única solução se, e somente se,

$$p(A) = p(M) = 3 \iff 5a - 2 \neq 0 \iff a \neq \frac{2}{5}.$$

(b) O sistema tem infinitas soluções se, e somente se,

$$p(A) = p(M) < 3 \iff 5a - 2 = 0 \text{ e } b(a-1) = 0 \iff a = \frac{2}{5} \text{ e } b = 0.$$

(c) O sistema não tem solução se, e somente se,

$$p(A) \neq p(M) \iff 5a - 2 = 0 \text{ e } b(a-1) \neq 0 \iff a = \frac{2}{5} \text{ e } b \neq 0.$$

6. Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, tais que o sistema linear dado tenha:

(i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

(a) $S: \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 22x - y = k \end{cases}$, (b) $S: \begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases}$,

(c) $S: \begin{cases} 2x - 2y + kz = 2 \\ 2x - y + kz = 3 \\ x - ky + z = 0 \end{cases}$, (d) $S: \begin{cases} x + kz = -2 \\ x - y - 2z = k \\ x + ky + 4z = -5 \end{cases}$,

(e) $S: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$, (f) $S: \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$,

(g) $S: \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$, (h) $S: \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$.

Solução:

(a) $M = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 22 & -1 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & k+166 \end{array}\right].$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff k + 166 = 0 \iff k = -166$, segue que se $k \neq -166$ o sistema S tem uma única solução e se $k = -166$ o sistema S não tem solução.

(b) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ k & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ 0 & -k+1 & k^2-1 & 2 \end{array}\right].$

Como $p(M) = 2$, $p(A) = 2 \Longleftrightarrow -k+1 \neq 0$ ou $k^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 1$ e S tem três variáveis, segue que se $k \neq 1$ o sistema S tem infinitas soluções e se $k = 1$ o sistema S não tem solução.

(c) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 2k-1 & k-2 & 3 \end{array}\right].$

- Se $2k - 2 = 0 \Longleftrightarrow k = 1$, então

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right],$$

portanto $p(A) = p(M) = 3$ é máximo, consequentemente S tem uma única solução.

- Se $2k - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 1$, então

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 2k-1 & k-2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 0 & -(k-2)/2k-2 & (k-2)/k-1 \end{array}\right].$$

Se $k-2 = 0 \Longleftrightarrow k = 2$, então $p(A) = p(M) = 2 < 3$, consequentemente S tem infinitas soluções.

Se $k - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 2$, então $p(A) = p(M) = 3$, consequentemente S tem uma única solução.

Portanto, S tem uma única solução se $k \neq 2$ e S tem infinitas soluções se $k = 2$.

(d) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -2 \\ 1 & -1 & -2 & k \\ 1 & k & 4 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & -k-2 & k-2 \\ 0 & 0 & -k^2-3k+4 & k^2-2k-7 \end{array}\right].$

Como $p(A) = 2 \Longleftrightarrow -k^2 - 3k + 4 = 0 \Longleftrightarrow k = 1$ ou $k = -4$, neste caso $p(M) = 3$, pois $k^2 - 2k - 7 = 0 \Longleftrightarrow k = 1 + 2\sqrt{2}$ ou $k = 1 - 2\sqrt{2}$, portanto se $k = 1$ ou $k = -4$ o sistema S não tem solução.

Se $k \neq$ e $k \neq -4$, então $p(A) = 3 = p(M)$, como o sistema tem três variáveis segue que tem uma única solução.

(e) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & -k+2 \end{array}\right].$

Como $p(A) = 2 \Longleftrightarrow -k^2 - k + 6 = 0 \Longleftrightarrow k = 2$ ou $k = -3$, se $k = 2$, então $p(M) = 2$ e o sistema tem infinitas soluções, pois tem três variáveis, porém se $k = -3$, então $p(M) = 3 \neq p(A)$ e o sistema S não tem solução.

Se $k \neq 2$ e $k \neq -3$, então $p(A) = 3 = p(M)$, como o sistema tem três variáveis segue que tem uma única solução.

(f) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & -k+1 & k-1 & 0 \end{array}\right].$

- Se $-k^2+1=0 \iff k^2=1 \iff k=1$ ou $k=-1$, se $k=1$, então

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e $p(A)=p(M)=1$, portanto S tem infinitas soluções.

Se $k=-1$,

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

e $p(A)=p(M)=3$, portanto S tem uma única solução.

- Se $-k^2+1 \neq 0 \iff k^2 \neq 1 \iff k \neq 1$ e $k \neq -1$, então

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & -k+1 & k-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & 0 & (k^2+k-2)/k+1 & (k-1)/k+1 \end{array}\right],$$

logo se $k^2+k-2 \neq 0 \iff k \neq -2$ e $k \neq 1$, então $p(A)=p(M)=3$ e o sistema S tem uma única solução.

Se $k=-2$ teremos $p(A)=2 \neq p(M)=3$ e o sistema S não tem solução.

Portanto, S tem uma única solução se $k \neq -2$ e $k \neq 1$, S tem infinitas soluções se $k=1$ e S não tem solução $k=-2$.

(g) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & -2k+8 & 1 \end{array}\right].$

Como $p(M)=2$, $p(A)=2 \iff k-4 \neq 0$ ou $-2k+8 \neq 0 \iff k \neq 4$ e S tem três variáveis, segue que se $k \neq 4$ o sistema S tem infinitas soluções e se $k=4$ o sistema S não tem solução.

(h) $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & -3k+2 & k-6 \\ 0 & 0 & k-3 & -k+3 \end{array}\right].$

Como $p(A)=2 \iff k-3=0$, neste caso $p(M)=2$, pois $-k+3=0 \iff k=3$, portanto se $k=3$ o sistema S tem infinitas soluções, pois tem três variáveis .

Se $k \neq 3$, então $p(A)=3=p(M)$, portanto S tem uma única solução.

7. Determine a condição que os números reais a, b e c devem satisfazer para que, em cada um dos casos abaixo, o sistema dado tenha solução.

(a) $S: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right.$, (b) $S: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c \end{array}\right.$,

(c) $S:\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & a \\ 2x & + & 3y & - & z & = & b \\ 3x & + & y & + & 2z & = & b \end{array}\right.$, (d) $S:\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 7y & = & a \\ x & + & y & = & b \\ 5x & + & 3y & = & 5a+2b \\ x & + & 2y & = & a+b-1 \end{array}\right.$,

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & a \\ -3x & + & 4y & = & b \\ 2x & - & y & = & c \end{array}\right.$, (f) $\left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & 3b & = & x \\ 2a & - & b & = & y \\ -2a & + & b & = & z \\ 3a & + & b & = & t \end{array}\right.$.

Solução:

(a) $M=\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{array}\right]$.

Como $p(A)=2$ e $p(M)=2 \Longleftrightarrow -5a+2b+c=0 \Longleftrightarrow c=5a-2b$, segue que se $c=5a-2b$ o sistema S tem infinitas soluções, pois o tem três variáveis, e se $c\neq 5a-2b$ o sistema não tem solução.

(b) $M=\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -2 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right]$.

Como $p(A)=2$ e $p(M)=2 \Longleftrightarrow 2a-b+c=0 \Longleftrightarrow c=b-2a$, segue que se $c=b-2a$ o sistema S tem infinitas soluções, pois o tem três variáveis, e se $c\neq b-2a$ o sistema não tem solução.

(c) $M=\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & 3 & -1 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 7 & -9 & -2a+b \\ 0 & 0 & -1 & -a-b+c \end{array}\right]$.

Como $p(A)=3=p(M)=2$ e S tem três variáveis, segue que para quaisquer valores de a, b e c o sistema tem uma única solução.

(d) $M=\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & b \\ 3 & -7 & a \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & b \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & 0 & (24a-12b)/5 \\ 0 & 0 & (11a-3b-10)/10 \end{array}\right]$.

Como $p(A)=2$ e $p(M)=2 \Longleftrightarrow 24a-12b=0$ e $11a-3b-10=0 \Longleftrightarrow b=2a$ e $b=\dfrac{11a-10}{3}$, mas se $b=2a$, então $11a-3b-10=11a-6a-10=5a-10$, logo $11a-3b-10=0 \Longrightarrow 5a-10=0 \Longleftrightarrow a=2$ e $b=4$.

Se $a=2$ e $b=4$ então $p(A)=p(M)=2$, como S tem três variáveis, segue que S tem infinitas soluções.

Se $a=2b$ e $a\neq 2$, como então $p(A)=2\neq p(M)=3$, portanto S não tem solução.

Se $b\neq 2a$, então $p(M)=3\neq p(A)=2$, consequentemente S não tem solução.

Logo, S tem infinitas soluções se $a=2$ e $b=4$, caso contrário S não tem solução.

(e) $M=\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & a \\ -3 & 4 & b \\ 2 & -1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrc} 1 & 2 & a \\ 0 & 10 & 3a+b \\ 0 & 0 & (-a+b+2c)/2 \end{array}\right]$.

Como $p(A)=2$ e $p(M)=2 \Longleftrightarrow -a+b+2c=0 \Longleftrightarrow a=b+2c$, segue que se $a=b+2c$ o sistema S tem infinitas soluções, pois tem três variáveis, e se $a\neq b+2c$ o sistema não tem solução.

(f) $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & | & x \\ 2 & -1 & | & y \\ -2 & 1 & | & z \\ 3 & 1 & | & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & | & x \\ 0 & 5 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & y+z \\ 0 & 0 & | & t-x-2y \end{bmatrix}.$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \Longleftrightarrow y+z = 0$ e $t-x-2y = 0 \Longleftrightarrow z = -y$ e $t = x+2y$,, portanto S tem uma única solução, porém se $z \neq -y$ ou $t \neq x+2y$, então $p(M) = 3 \neq p(A)$, daí que S não tem solução.

8. Seja o sistema de equações lineares $S : \begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & kz & = & 4 \\ x & + & 3y & + & kz & = & 3 \end{cases}$. com $k \in \mathbb{R}$.

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

(a) Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.

(b) Para $k = -1$, determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema S utilizando esta matriz.

(c) Para $k = 0$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss.

(d) Para $k = -2$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & k & | & 4 \\ 1 & 3 & k & | & 3 \end{bmatrix}$, escalonando M obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & k & | & 4 \\ 1 & 3 & k & | & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & k+2 & | & 2 \\ 0 & 1 & k+1 & | & 2 \end{bmatrix} \; L_2 \longleftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+1 & | & 2 \\ 0 & -2 & k+2 & | & 2 \end{bmatrix} \; L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3k+4 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Pelo desenvolvimento acima temos:

$$p(A) = p(M) = 3 \Longleftrightarrow 3k+4 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -\frac{4}{3}, \text{ neste caso } \operatorname{null}(A) = 0.$$

Se $k = -\dfrac{4}{3} \Longrightarrow p(A) = 2 \neq p(M) = 3,$ neste caso $\operatorname{null}(A) = 1.$

(b) Se $k = -1$, então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

como as operações elementares efetuadas foram $L_2 \longleftrightarrow L_3$ e as demais do tipo $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$, segue que det $A = -1 \neq 0$, portanto existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo método da matriz inversa a solução do sistema é

$$X = A^{-1} \cdot B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, $Sol(S) = \big\{(3,\ 2,\ 6)\big\}$.

(c) Se $k = 0$, pelo desenvolvimento ao escalonarmos M obtemos:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \longleftarrow 4z = 6$$

Logo, $z = \dfrac{3}{2}$, substituindo em $y + z = 2$ obtemos $y = \dfrac{1}{2}$, substituindo em $x + 2y - z = 1$, obtemos: $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

Logo, $Sol(S) = \left\{\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

(d) Se $k = -2$, prosseguimos o escalonamento acima a fim de obter a forma escada de M:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \longrightarrow -{}^1\!/_2\, L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + L_3 \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Portanto, $Sol(S) = \big\{(0,\ -1, -3)\big\}$.

9. Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 + kx_4 = 9 \end{cases},$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

(a) Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.

(b) Para $k = 2$, determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema S utilizando esta matriz.

(c) Para $k = 1$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss.

(d) Para $k = 0$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 & -1 & | & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & | & 9 \end{bmatrix}$, escalonando M obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 & -1 & | & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 3 & 5 & 12 & -1 & | & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & | & 9 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 3L_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 15 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & | & 9 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & -10 \\ 0 & 0 & 2 & k & | & 9 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & | & 19 \end{bmatrix}.$$

(a) Pelo desenvolvimento acima temos:

$$p(A) = p(M) = 4 \Longleftrightarrow k+1 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -1, \text{ neste caso } \operatorname{null}(A) = 0.$$

Se $k = -1 \Longrightarrow p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, neste caso $\operatorname{null}(A) = 1$.

(b) Se $k = 2$, então

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

como as operações elementares efetuadas foram $L_1 \longleftrightarrow L_2$ e as demais do tipo $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$, segue que $\det A = -12 \neq 0$, portanto existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -7/2 & -2 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo método da matriz inversa a solução do sistema é

$$X = A^{-1} \cdot B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -7/2 & -2 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/2 \\ 7/6 \\ -11/6 \\ 19/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, \frac{7}{6}, -\frac{11}{6}, \frac{19}{3} \right) \right\}$.

(c) Se $k = 1$, pelo desenvolvimento ao escalonarmos M obtemos:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow 2x_4 \;=\; 19 \end{array}$$

Logo, $x_4 = \frac{19}{2}$, substituindo em $2x_3 - x_4 = -10$ e em $2x_2 + 2x_4 = 15$ obtemos $x_3 = -\frac{1}{4}$ e $x_2 = -2$, substituindo em $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{4}$ e $x_4 = \frac{19}{2}$ em $x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6$, obtemos: $x_1 = \frac{13}{2}$.

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, -2, -\frac{1}{4}, \frac{19}{2} \right) \right\}$.

(d) Se $k = 0$, prosseguimos o escalonamento acima a fim de obter a forma escada de M:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_4 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_4 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow 1/2\, L_2 \\ L_3 \longrightarrow 1/2\, L_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 - 4L_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 13/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right].$$

Portanto, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, -\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, 19 \right) \right\}$.

2.4 Resolução de Sistemas Lineares

1. Determine a solução do sistema linear $S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & (1-i)y & & & + & w & = & 0 \\ & & 3y & - & 2iz & + & 5w & = & 0 \end{array} \right.$, no conjunto dos números complexos.

Solução:

A matriz ampliada de S é:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2i & 5 & 0 \end{array} \right],$$

que já está forma escalonada, da 2ª equação obtemos: $y = \frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w$.

Na 1ª equação temos $x = \frac{1-i}{2}y - \frac{1}{2}w$, substituindo em y a igualdade acima obtemos:

$$x = \frac{1-i}{2}\left(\frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w\right) - \frac{1}{2}w = \frac{1+i}{3}z - \frac{5-5i}{6}w - \frac{1}{2}w = \frac{1+i}{3}z - \frac{8-5i}{6}w.$$

Portanto, $Sol(S) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4;\ x = \frac{1+i}{3}z - \frac{8-5i}{6}w \text{ e } y = \frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w\right\}$.

2. Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método de Gauss** ou o **Método de Gauss-Jordan**. Classifique-os.

(a) $S: \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$, (b) $S: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 3y + 2z = 9 \\ 3x - y + 4z = 13 \end{cases}$,

(c) $S: \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$, (d) $S: \begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$,

(e) $S: \begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ -x - y + 2z - 3t + w = 0 \\ x + y - 2z - w = 0 \\ z + t + w = 0 \end{cases}$, (f) $S: \begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$,

(g) $S: \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$, (h) $S: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$,

(i) $S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$, (j) $S: \begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$,

(k) $S: \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - 2y + z + t = 2 \end{cases}$, (l) $S: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$,

(m) $S: \begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ 2x - 3y - 4z = 15 \\ 3x + 4y + 5z = -8 \end{cases}$, (n) $S: \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$,

(o) $S: \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$, (p) $S: \begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$,

(q) $S: \begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 5y = -8 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$, (r) $S: \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$,

(s) $S: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$, (t) $S: \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0 \\ 4x - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$,

(u) $S:\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$, (v) $S:\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases}$,

(x) $S:\begin{cases} x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14 \\ 2x + 6y + z - 2t + 5w = -2 \\ x + 3y - z + 2w = -1 \end{cases}$.

Solução:
Vamos resolver os sistemas lineares pelo método de Gauss.

(a) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & -1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $2z = 0 \iff z = 0$.
- Na 2ª equação temos $-3y - 3z = 0 \overset{z=0}{\Longrightarrow} y = 0$.
- Na 1ª equação temos $x + y + z = 0 \overset{y=z=0}{\Longrightarrow} x = 0$.

Logo, $Sol(S) = \{(0,0,0)\}$.

(b) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 2 & -1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 3 & 2 & | & 9 \\ 3 & -1 & 4 & | & 13 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 18/5 & | & 36/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $\frac{18}{5}z = \frac{36}{5} \iff z = 2$.
- Na 2ª equação temos $-5y + 3z = 1 \overset{z=2}{\Longrightarrow} y = \frac{6-1}{5} = 1$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y - z = 2 \overset{y=1,\ z=2}{\Longrightarrow} x = 2$.

Logo, $Sol(S) = \{(2,1,2)\}$.

(c) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 3 & 5 & 4 & | & 4 \\ 5 & 3 & 4 & | & -10 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & -4 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -14 \end{bmatrix} \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z = -14 \iff 0 = -14$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(d) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & -2 \end{array}\right] \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $-6y + 12z = -2 \Longleftrightarrow y = 2z + \frac{1}{3}$.
- Substituindo na 1ª equação $x + 6y - 8z = 1$ obtemos

$$x = 1 - 6y + 8z = 1 - 12z - 2 + 8z = -1 - 4z.$$

Logo, $Sol(S) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 2z + \frac{1}{3} \text{ e } x = -1 - 4z\right\}$.

(e) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $-3t = 0 \Longleftrightarrow t = 0$.
- Na 3ª equação temos $z + t + w = 0 \overset{t=0}{\Longrightarrow} z = -w$.
- Na 2ª equação temos $y + z - 3t + 2w = 0 \overset{t=0,\ z=-w}{\Longrightarrow} y = -w$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y - z + w = 0 \overset{y=z=-w}{\Longrightarrow} x = 0$.

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5;\ x = 0,\ y = -w,\ z = -w \text{ e } t = 0\}$.

(f) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $10z - t = -3 \Longleftrightarrow t = 10z + 3$.
- Substituindo na 2ª equação $-y + 7z - 4t = 2$ obtemos

$$y = 7z - 4t - 2 = 7z - 40z - 12 - 2 = -33z - 14.$$

- Substituindo $t = 10z + 3$ e $y = -33z - 14$ na 1ª equação $x + y - 3z + t = 1$ obtemos

$$x = -y + 3z - t + 1 = 33z + 14 + 3z - 10z - 3 + 1 = 26z + 12.$$

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = 12 + 26z;\ y = -14 - 33z \text{ e } t = 3 + 10z\}$.

(g) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -10/3 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & -16/5 & -34/5 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $-\frac{16}{5}z = -\frac{34}{5} \iff z = \frac{17}{8}$.
- Na 2ª equação temos

$$-\frac{10}{3}y + z = \frac{7}{3} \overset{z={}^{17}\!/_{8}}{\Longrightarrow} y = \frac{3}{10} \times \frac{17}{8} - \frac{7}{10} = \frac{51-56}{80} = -\frac{1}{16}.$$

- Na 1ª equação temos

$$3x + 5y = 1 \iff x = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}y \overset{y=-{}^{1}\!/_{16}}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{16+5}{3 \times 16} = \frac{7}{16}.$$

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{7}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{17}{8} \right) \right\}$.

(h) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 2 & 5 & -2 & | & 3 \\ 1 & 7 & -7 & | & 5 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 11 \end{bmatrix} \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + oz = 11 \iff 0 = 11$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(i) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $-4z = 0 \iff z = 0$.
- Na 2ª equação temos $-3y - 3z = 0 \overset{z=0}{\Longrightarrow} y = 0$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y + 3z = 0 \overset{y=z=0}{\Longrightarrow} x = 0$.

Logo, $Sol(S) = \{(0,0,0)\}$.

(j) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 11 \\ 4 & -3 & 2 & | & 6 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -7 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & {}^{13}\!/_{7} & | & {}^{59}\!/_{7} \\ 0 & 0 & 0 & | & {}^{114}\!/_{13} \end{bmatrix} \sim M$.

Como $p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 4ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z = \frac{114}{13} \iff 0 = \frac{114}{13}$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(k) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 \end{array}\right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $-3t = 8 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{8}{3}$.
- A 3ª equação nos fornece $-2z = -4 \Longleftrightarrow z = 2$.
- Substituindo $t = -\dfrac{8}{3}$ na 2ª equação $2y - 2t = 4 \Longleftrightarrow y = t + 2 = -\dfrac{8}{3} + 2 = -\dfrac{2}{3}$.
- Substituindo $t = -\dfrac{8}{3}$, $z = 2$ e $y = -\dfrac{2}{3}$ na 1ª equação $x + y + z + t = 0 \Longleftrightarrow x = -y - z - t$ obtemos $x = \dfrac{2}{3} - 2 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, 2, -\dfrac{8}{3} \right) \right\}$.

(l) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 3/2 \end{array}\right] \sim M$.

Como $p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, segue que o sistema linear S não tem solução, de fato:

- A 4ª equação nos fornece $\dfrac{2}{3}z = \dfrac{3}{2} \Longleftrightarrow z = \dfrac{9}{4}$.
- A 3ª equação nos fornece $0x + 0y + 0z = 2 \Longleftrightarrow 0 = 2$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(m) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 27 \\ 0 & 0 & -8/7 & 16/7 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $\dfrac{-8}{7}z = \dfrac{16}{7} \Longleftrightarrow z = -2$.
- Na 2ª equação temos $-7y - 10z = 27 \overset{z=-2}{\Longrightarrow} y = \dfrac{-27+20}{7} = -1$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y + 3z = -6 \overset{y=-1,\ z=-2}{\Longrightarrow} x = -6 + 2 + 6 = 2$.

Logo, $Sol(S) = \{(2, -1, -2)\}$.

(n) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 2 & | & 8 \\ 1 & -1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 6 & -2 & | & -8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 \end{bmatrix} \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $z = 10$.
- Na 2ª equação temos $6y - 2z = -8 \overset{z=10}{\Longrightarrow} y = \dfrac{-8+20}{6} = 2$.
- Na 1ª equação temos $x - y + z = 4 \overset{y=2,\ z=10}{\Longrightarrow} x = 4 + 2 - 10 = -4$.

Logo, $Sol(S) = \big\{(-4,\ 2,\ 10)\big\}$.

(o) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 13 \\ 1 & -2 & | & 3 \\ 5 & 2 & | & 27 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 13 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim M$.

- Na 2ª equação temos $y = 1$.
- Na 1ª equação temos $2x + 3y = 13 \overset{y=1}{\Longrightarrow} x = \dfrac{13-3}{2} = 5$.

Logo, $Sol(S) = \big\{(5,\ 1)\big\}$.

(p) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 12 \\ 3 & 8 & -2 & | & 4 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 12 \\ 0 & -4 & 1 & | & -32 \end{bmatrix} \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $-4y + z = -32 \Longleftrightarrow z = 4y - 32$.
- Substituindo na 1ª equação $x + 4y - z = 12$ obtemos

$$x = 12 - 4y + z = 12 - 4y + 4y - 32 = -20.$$

Logo, $Sol(S) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = -20 \ \text{ e } \ z = 4y - 32\big\}$.

(q) A matriz ampliada do sistema é: $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & | & a \\ 2 & 3 & -1 & | & b \\ 3 & 1 & 2 & | & c \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -4 \\ 2 & 5 & | & -8 \\ 1 & 3 & | & -5 \end{bmatrix}$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -4 \\ 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix} \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y = -1 \Longleftrightarrow 0 = -1$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(r) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $2t = -4 \Longleftrightarrow t = -2$.
- A 3ª equação nos diz que $-2y = -4 \Longleftrightarrow z = 2$.
- Na 2ª equação temos $7y - 5z + 7t = -10 \overset{z=2,\ t=-2}{\Longrightarrow} y = \dfrac{-10+10+14}{7} = 2$.
- Na 1ª equação temos $2x - y + z - t = 4 \overset{y=z=2,\ t=-2}{\Longrightarrow} x = \dfrac{4+2-2-2}{2} = 1$.

Logo, $Sol(S) = \big\{(1,\ 2,\ 2,\ -2)\big\}$.

(s) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -13 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $-t = 0 \Longleftrightarrow t = 0$.
- A 2ª equação nos diz que $9y - 13z + t = 7 \overset{t=0}{\Longrightarrow} y = \dfrac{7}{9} + \dfrac{13}{9}z$.
- Substituindo $t = 0$ e $y = \dfrac{7}{9} + \dfrac{13}{9}z$ na 1ª equação obtemos $3x + 3y - 2z - t = 2 \Longrightarrow x = \dfrac{2-3y+2z}{3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{9} - \dfrac{13}{9}z + \dfrac{2}{3}z = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{7}{9}z$.

Logo, $Sol(S) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{7}{9}z,\ y = \dfrac{7}{9} + \dfrac{13}{9}z \ \text{ e } \ t = 0\right\}$.

(t) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 12 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 79 & 0 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $33z + 79t = 0 \Longleftrightarrow z = -\dfrac{79}{33}t$.
- Substituindo $z = -\dfrac{79}{33}t$ na 2ª equação $-7y + 12z - 5t = 0$ obtemos:

$$y = \frac{12z - 5t}{7} = \frac{12}{7} \times \left(-\frac{79}{33}t\right) - \frac{5}{7}t = \frac{-316-55}{77}t = -\frac{371}{77}t = -\frac{53}{11}t.$$

- Substituindo $z = -\dfrac{79}{33}t$ e $y = -\dfrac{53}{11}t$ na 1ª equação $x + 2y - 5z + 4t = 0$, obtemos:

$$x = -2 \times \left(-\frac{53}{11}t\right) + 5\left(-\frac{79}{33}t\right) - 4t = \frac{106}{11}t - \frac{395}{33}t - 4t = -\frac{209}{33}t = -\frac{19}{3}t.$$

Logo, $Sol(S) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = -\frac{19}{3}t,\ y = -\frac{53}{11}t \text{ e } z = -\frac{79}{33}t\right\}$.

(u) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right] \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z + 0t = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 0 = -\frac{3}{2}$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(v) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos sua forma escada: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $y - 2z + 2t = 1 \Longleftrightarrow y = 1 - 2z + 2t$.
- A 1ª equação $x + z - 2t = 0 \Longleftrightarrow x - z + 2t$.

Logo, $Sol(S) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = -z + 2t, \text{ e } y = 1 - 2z + 2t\}$.

(x) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 19 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 15 \end{array}\right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $5t - 10w = 15 \Longleftrightarrow t = 3 + 2w$.
- Substituindo $t = 3 + 2w$ na 2ª equação $-3z - 8t + 19w = -30$, obtemos

$$z = \frac{30 - 8t + 19w}{3} = \frac{30 - 8(3 + 2w) + 19w}{3} = \frac{6 + 3w}{3} = 2 + w.$$

- Substituindo $z = 2 + w$ e $t = 3 + 2w$ na 1ª equação $x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14$ obtemos:

$$x = 14 - 3y - 2(2 + w) - 3(3 + 2w) + 7w = 1 - 3y - w.$$

Logo, $Sol(S) = \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5;\ x = 1 - 3y - w,\ z = 2 + w \text{ e } t = 3 + 2w\}$.

2.5 Método da Matriz Inversa

1. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**:

(a) $S: \left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 2y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$, (b) $S: \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & 16 \end{array}\right.$.

Solução:

(a) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $Sol(S) = \{(2,\ 3)\}$.

(b) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -10 & 8 \\ -7 & -17 & 13 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 44 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $Sol(S) = \{(29,\ 44,\ 3)\}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$, encontre os valores reais de λ para os quais o sistema homogêneo $S : A \cdot X_{3\times 1} = 0_{3\times 1}$ admite apenas a solução trivial.

Solução:

O sistema homogêneo S tem uma única solução se, e somente se, $\det A \neq 0$, observemos que

$$\det A = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, \text{ ou } \lambda = 1, \text{ ou } \lambda = -1.$$

Portanto, o sistema homogêneo S têm uma única solução se, somente se, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, se possível, a inversa de A.

(b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1, 2, 3$.

Solução:

(a) Como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, segue que existe A^{-1} e $A^{-1} == \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $AX = B_k \Longleftrightarrow X = A^{-1} \cdot B_k$ para $k = 1,2,3$.

- Para $k = 1$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Para $k = 2$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

- Para $k = 3$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.6 Regra de Cramer

1. Resolva os seguintes sistemas utilizando a **Regra de Cramer**:

(a) $S: \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$, (b) $S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$,

(c) $S: \begin{cases} 2x + 5z + 2w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 3y - z + w = 1 \end{cases}$.

Solução:

(a) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \end{bmatrix}, \text{ com } D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 38 \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -19.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38/19 \\ -19/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $Sol(S) = \{(2,\ -1)\}$.

(b) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, \; D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22 \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66/22 \\ -22/22 \\ 44/22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $Sol(S) = \{(3, -1, 2)\}$.

(c) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \\ D_4/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \quad \text{e} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 30.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/12 \\ -12/12 \\ -18/12 \\ 30/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1 \\ -3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{5}{4}, -1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\}$.

2. Considere o sistema de equações lineares: $S : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad\;\; y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, verifique se é um sistema de Cramer. Em caso afirmativo, determine o conjunto solução do sistema utilizando a regra de Cramer.

Solução:

A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Portanto, podemos aplicar a regra de Cramer, obtendo: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -2/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right) \right\}$.

2.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

1. ( ) Se o sistema de equações lineares $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ possui apenas a solução trivial, $X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$, então S é também um sistema de Cramer.
2. ( ) Um sistema de equações lineares homogêneo é sempre compatível.
3. ( ) Um sistema de equações lineares $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ possui uma única solução se, e somente se, o posto de A é igual a n.
4. ( ) Se S é sistema de equações lineares homogêneo que possui solução diferente da solução trivial, então S é um sistema incompatível (impossível).
5. ( ) Se o sistema linear $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ admite as soluções X_1 e X_2, então também admite $k_1X_1 + k_2X_2$ como solução, quaisquer que sejam os números reais k_1 e k_2.
6. ( ) Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ tenha somente a solução trivial é que $\det A \neq 0$.
7. ( ) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$, com B matriz não nula, então $X_1 + X_2$ também é solução de S.
8. ( ) Se um sistema de equações lineares $S_0: A_n \cdot X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ tem apenas a solução trivial, então todo sistema de equações lineares $S: A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$, com $B \neq 0_{n\times 1}$, tem uma única solução.
9. ( ) Se um sistema de equações lineares S é compatível indeterminado, então toda forma linha-reduzida da matriz ampliada de S contém alguma linha nula.
10. ( ) Existem números reais a, b e c tais que o sistema de equações lineares:

$$S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & + & z & = & b \\ x & + & 15y & + & 11z & = & c \end{array} \right. \quad \text{é compatível determinado.}$$

Solução:

1. (V) Como a matriz dos coeficientes do sistema homogêneo é A_n, matriz quadrada, e este possui apenas a solução trivial, então $\det A_n \neq 0$, logo S é também um sistema de Cramer.

2. (V) Sim, pois todo sistema de equações lineares homogêneo possui pelo menos a solução trivial.

3. (V) Sabemos que um sistema de equações lineares $S : A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ possui uma única solução se, e somente se, a matriz A_n dos coeficientes é invertível, e isto é equivalente a dizer que $p(A_n)$ é máximo, ou seja, o posto de $p(A_n) = n$.

4. (F) Pois, todo sistema linear homogêneo é compatível.

5. (V) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $S : A_n \cdot X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$, então

$$A\cdot(k_1X_1 + k_2X_2) = A\cdot(k_1X_1) + A\cdot(k_2X_2) = k_1\underbrace{(A\cdot X_1)}_{0_{n\times 1}} + k_2\underbrace{(A\cdot X_2)}_{0_{n\times 1}} = k_1\cdot 0_{n\times 1} + k\cdot 0_{n\times 1} = 0_{n\times 1}.$$

Portanto, $k_1X_1 + k_2X_2$ também é solução de S, quaisquer que sejam k_1 e k_2.

6. (V) Pelo teorema do posto o sistema linear S tem uma única solução, a solução trivial, se, e somente se, $p(A) = p(M) = n$, mas como S é homogêneo segue que $p(A) = p(M)$ e $p(A) = n \iff A$ é invertível $\iff \det A \neq 0$.

7. (F) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear dado matricialmente por: $S : A\cdot X = B$, com B matriz não nula, então

$$A\cdot(X_1 + X_2) = A\cdot X_1 + A\cdot X_2 = B + B = 2B \neq B,$$

pois B não é matriz nula.

Portanto, $X_1 + X_2$ não é solução de S.

8. (V) O sistema linear homogêneo S_0 tem apenas a solução trivial se, e somente se, $\det A_n \neq 0$ e isto é equivalente a dizer todo sistema linear $S : A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ tem uma única solução, qualquer que seja a matriz $B_{n\times 1}$.

9. (F) O sistema linear $S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 6y & - & 8z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$ tem matriz ampliada M com forma escalonada reduzida $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 \end{array} \right] \sim M$, sem linhas nulas, no entanto como $p(A) = p(M) = 2 < 3 =$ número de variáveis de S , segue que S tem infinitas soluções

10. (F) A matriz ampliada escalonada do sistema linear S é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & a \\ 0 & 8 & 7 & -2a + b \\ 0 & 0 & 0 & 3a - 2b + c \end{array} \right].$$

Logo, a matriz dos coeficientes de S tem posto 2 para quaisquer valores de a, b e c, porém o sistema tem três variáveis livres, portanto pelo teorema do posto o sistema não pode ser compatível determinado.

2.8 Aplicações de Sistemas Lineares

Resolva os seguintes problemas utilizando sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução. Em cada caso construa o sistema linear correspondente ao problema e estude o seu conjunto solução utilizando posto e nulidade das matrizes relacionadas ao sistema.

1. Uma refinaria de petróleo processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo de baixo teor necessita de 5 minutos no setor de mistura e 4 minutos no setor de refinaria; já o petróleo com alto teor são necessários 4 minutos no setor de mistura e 2 minutos no setor de refinaria. Se o setor de mistura está disponível por 3 horas, e o setor de refinaria por 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de combustível devem ser processadas de modo que os dois setores não fiquem ociosos?

   Solução:

   Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em minutos)	Petróleo de baixo teor	Petróleo de baixo teor
Mistura	5	4
Refinaria	4	2

   Indicando por x a quantidade, em toneladas, de petróleo de baixo teor de enxofre e y a quantidade, em toneladas, de petróleo de alto teor de enxofre, como a refinaria dispõe de 3 horas para mistura e 2h para refinaria temos o seguinte sistema linear:

   $$S : \begin{cases} 5x + 4y = 180 \\ 4x + 2y = 120 \end{cases},$$

   Como $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

   Portanto, devem processadas 20 T de cada tipo de combustível.

2. Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: normal e especial. Para produzir uma tonelada de plástico especial são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico normal são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?

   Solução:

   Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em horas)	Plástico normal	Plástico especial
Fábrica A	2	2
Fábrica B	3	5

Indicando por x a quantidade, em toneladas, de plástico normal e y a quantidade, em toneladas, de plástico especial, como a Fábrica A funciona 8 horas por dia e a Fábrica B funciona 15 horas por dia temos o seguinte sistema linear:

$$S : \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases},$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devem ser produzidas $1,5\ T$ de plástico normal e $2,5\ T$ de plástico especial.

3. Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento no alimento C encontramos 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em unidades)	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Proteína	2	3	3
Gordura	3	2	3
Carboidrato	4	1	2

Indicando por x a quantidade de Alimento A, y a quantidade de Alimento B e z a quantidade de Alimento C, na refeição, como a refeição deve ter 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato temos o seguinte sistema linear:

$$S : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 25 \\ 3x + 2y + 3z = 24 \\ 4x + y + 2z = 21 \end{cases},$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & -8 & 10 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & -8 & 10 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 24 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/5 \\ 21/5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devem ser utilizadas $3,2\ g$ do alimento A, $4,2\ g$ do alimento B e $2\ g$ do alimento C.

4. Um cooperativa produz três tipos de ração: A, B e C, utilizando farelo de soja, gordura animal e milho. Cada quilograma da ração A contém 100 g de farelo de soja e 200 g de milho e não contém gordura animal; cada quilograma da ração B contém 300 g de farelo de soja, 100 g de gordura animal e 400 g de milho; cada quilograma da ração C contém 200 g de farelo de soja, 200 g de gordura animal e 100 g de milho.

   Sabendo que a disponibilidade destes produtos na cooperativa nos meses de abril, maio e junho foi dada como na tabela abaixo. Pede-se para determinar qual a quantidade de cada tipo de ração foi produzido em cada um destes meses.

Quant./ Mês (em tonelada)	Farelo de Soja	Gordura Animal	Milho
Abril	1,3	0,8	1,3
Maio	1,8	1,2	1,7
Junho	1,7	0,6	2,3

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em quilogramas)	Ração A	Ração B	Ração C
Farelo de soja	0,1	0,3	0,2
Gordura animal	0	0,1	0,2
Milho	0,2	0,4	0,1

Indicando por x a quantidade de Ração A, y a quantidade de Ração B e z a quantidade de Ração C, produzidas por mês.

Pela tabela do problema, em abril há $1,3\ T$ de farelo de soja, $0,8\ T$ de gordura vegetal e $1,3\ T$ de milho, assim temos o seguinte sistema linear:

$$S:\begin{cases} 0,1x + 0,3y + 0,2z = 1300 \\ \qquad\quad\ 0,1y + 0,2z = 800 \\ 0,2x + 0,4y + 0,1z = 1300 \end{cases},$$

com as quantidades em quilograma.

Como $\begin{vmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/10 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{1000} \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -70 & 50 & 40 \\ 40 & -30 & -20 \\ -20 & 20 & 10 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 & 50 & 40 \\ 40 & -30 & -20 \\ -20 & 20 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1300 \\ 800 \\ 1300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \end{bmatrix}.$$

Portanto, no mês de abril devem ser produzidas $1\ T$ de ração A, $2\ T$ de ração B e $3\ T$ de ração C.

Analogamente, concluímos que em maio serão produzidas $2\ T$ de ração A, $2\ T$ de ração B e $5\ T$ de ração C e em junho serão produzidas $3\ T$ de ração A, $4\ T$ de ração B e $1\ T$ de ração C.

5. Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela abaixo.

Alimento	Bactéria I	Bactéria II	Bactéria III
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Determine quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento.

Solução:

Designando por:

- x - quantidade de bactérias I no tubo de ensaio;
- y - quantidade de bactérias II no tubo de ensaio;
- z - quantidade de bactérias III no tubo de ensaio,

temos o seguinte sistema linear:

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 4z & = & 2300 \\ x & + & 2y & & & = & 800 \\ x & + & 3y & + & z & = & 1500 \end{array}\right.,$$

com as quantidades em quilograma.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 10 & -8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 10 & -8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2300 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 350 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podem coexistir no tubo de ensaio 100 bactérias I, 350 bactérias II e 350 bactéria III.

6. Num torneio de triatlon as competições: nado, corrida e ciclismo foram pontuadas com pesos x, y e z, respectivamente. A tabela abaixo apresenta a pontuação dos quatro primeiros colocados em cada categoria e sua respectiva classificação final.

	Nado	Corrida	Ciclismo	Classificação Geral
Atleta 1	7,5	9	9	8,4
Atleta 2	8	7	9	8
Atleta 3	9	7,5	8,5	7,9
Atleta 4	7,5	8	8	7,8

O terceiro atleta alegou que se as classificações dos 1, 2 e 4 atletas estivessem corretas, então sua classificação estaria incorreta. Sabendo que a classificação geral foi obtida pela média ponderada da pontuação de cada uma das competições e supondo que alegação do terceiro atleta está correta determine:

(a) o peso de cada competição;

(b) a classificação do terceiro atleta.

Solução:

(a) Pelos dados da tabela acima temos o seguinte sistema linear:

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7,5x & + & 9y & + & 9z & = & 8,4 \\ 8x & + & 7y & + & 9z & = & 8 \\ 7,5x & + & 8y & + & 8z & = & 7,8 \end{array}\right.,$$

com x, y e z pesos de nado, corrida e ciclismo, respectivamente.

Como $\begin{vmatrix} 7,5 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7,5 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -16/15 & 0 & 6/5 \\ 7/30 & -1/2 & 3/10 \\ 23/30 & 1/2 & -13/10 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/15 & 0 & 6/5 \\ 7/30 & -1/2 & 3/10 \\ 23/30 & 1/2 & -13/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,4 \\ 8 \\ 7,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/10 \\ 3/10 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o peso de nado é $0,4$, corrida e ciclismo têm o mesmo peso $0,3$.

(b) A nota do 3º atleta é $9 \times 0,4 + 7,5 \times 0,3 + 8,5 \times 0,3 = 8,4$, portanto ele fica empatado com o 1º atleta.

7. No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos supermercados pagarei $R\$31,00$. Determine x, y e z.

Solução:

Pelos dados da tabela acima temos o seguinte sistema linear:

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & + & 2z & = & 31 \\ x & + & 6y & + & 4z & = & 31 \\ x & + & 4y & + & 7z & = & 31 \end{array}\right.,$$

com x, y e z pesos de nado, corrida e ciclismo, respectivamente.

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 31 \\ 1 & 6 & 4 & 31 \\ 1 & 4 & 7 & 31 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 2 & 31 & L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ 1 & 6 & 4 & 31 & \\ 1 & 4 & 7 & 31 & \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} 1 & 4 & 7 & 31 & \\ 1 & 6 & 4 & 31 & L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \\ 3 & 4 & 2 & 31 & L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 7 & 31 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & -19 & -62 \end{array} \; L_3 \longrightarrow L_3 + 4L_2 \quad \sim \begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 7 & 31 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & -62 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $-31z = -62 \iff z = 2$, substituindo na 2ª equação $2y - 3z = 0 \iff 2y = 3z = 6 \Longrightarrow y = 3$, finalmente na 1ª equação $x + 4y + 7z = 31$ obtemos $x = -4y - 7z + 31 = -12 - 14 + 31 = 5$.
Portanto, $x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$.

8. Uma firma fábrica dois produtos: A e B. Cada um deles passa por duas máquinas: I e II. Para se fabricar uma unidade de A gasta-se $1h$ da máquina I e $1,5h$ da máquina II. Cada unidade de B gasta $3h$ de I e $2h$ de II. Quantas unidades de cada produto poderão ser fabricadas em um mês se, por motivos técnicos, I só funciona 300 horas e II só 250 horas por mês?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em horas)	Produto A	Produto B
Máquina I	1	3
Máquina II	1,5	2

Indicando por x a quantidade de produto A e y a quantidade de produto B, produzidos por mês, como, por mês, a máquina I funciona 300 horas e a máquina II funciona 250 horas temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 3y = 300 \\ 1,5x + 2y = 250 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{5}{2} \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 6/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Portanto, por mês serão fabricados 60 unidades do produto A e 80 unidades do produto B.

9. Dois metais x e y são obtidos de dois tipos de minérios I e II. De 100 kg de I se obtém 3 gramas de x e 5 gramas de y e de 100 kg de II obtém-se 4 gramas de x e $2,5$ gramas de y. Quantos quilos de minério de cada tipo serão necessários para se obter 72 gramas de x e 95 gramas de y, usando-se simultaneamente os dois minérios?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em gramas)	100 kg de minério I	100 kg de minério II
Metal x	3	4
Metal y	5	2,5

Indicando por a a quantidade de minério I e b a quantidade de minério II para se obter 72 g de x e 95 g de y, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 3a + 4b = 72 \\ 5a + 2,5b = 95 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5/2 \end{vmatrix} = -\dfrac{25}{2} \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 8/25 \\ 2/5 & -6/25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 72 \\ 95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, são necessários 1600 kg de minério I e 600 kg de minério II para produzir 72 g do metal x e 95 g do metal y.

10. Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira pessoa perde para as outras duas pessoas a mesma quantia que cada uma delas tinha no início do jogo. Na 2ª rodada, a segunda pessoa perde para cada uma das outras a mesma quantia que elas tinham no final da 1ª rodada. Na terceira rodada, o 1º e o 2º jogadores ganham do 3º a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui $R\$24,00$. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?

Solução:

Designando por:
- x - quantia que a 1ª pessoa tinha no inicio do jogo;
- y - quantia que a 2ª pessoa tinha no inicio do jogo;
- z - quantia que a 3ª pessoa tinha no inicio do jogo,

temos a seguinte tabela:

	1ª Pessoa	2ª Pessoa	3ª Pessoa
Início	x	y	z
Final da 1ª rodada	x-y-z	2y	2z
Final da 2ª rodada	2x-2y-2z	2y-(x-y-z)-2z =-x+3y-z	4z
Final da 3ª rodada	4x-4y-4z	-2x+6y-2z	4z-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z) = -x-y+7y

Como ao final da 3ª rodada todas as pessoas ficam com $R\$24,00$ temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} -x & - & y & + & 7z & = & 24 \\ -2x & + & 6y & - & 2z & = & 24 \\ 4x & - & 4y & - & 4z & = & 24 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 & | & 24 \\ -2 & 6 & -2 & | & 24 \\ 4 & -4 & -4 & | & 24 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rrrcrl} -1 & -1 & 7 & | & 24 & \\ -2 & 6 & -2 & | & 24 & L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ 4 & -4 & -4 & | & 24 & L_3 \longrightarrow L_3 + 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrl} -1 & -1 & 7 & | & 24 & \\ 0 & 8 & -16 & | & -24 & \\ 0 & -8 & 24 & | & 120 & L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \end{array} \qquad \sim \begin{array}{rrrcr} -1 & -1 & 7 & | & 24 \\ 0 & 8 & -16 & | & -24 \\ 0 & 0 & 8 & | & 96 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos

$$8z = 96 \Longleftrightarrow z = 12,$$

substituindo na 2ª equação

$$8y-16z=-24 \overset{z=12}{\Longrightarrow} 8y=-24+16z=168 \Longrightarrow y=21,$$

finalmente na 1ª equação $-x-y+7z=24$ obtemos

$$x=-24-y+7z \overset{y=21,\ z=12}{\Longrightarrow} x=-24-21+84=39.$$

Portanto, no início do jogo a 1ª pessoa tinha $R\$39,00$, a 2ª pessoa tinha $R\$21,00$ e 3ª pessoa tinha $R\$12,00$.

11. Uma indústria produz três produtos, A, B e C, utilizando dois tipos de insumos, X e Y. Para a manufatura de cada quilo de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y; para cada quilo de B, 1 grama do insumo X e 1 grama do insumo Y e, para cada quilo de C, 1 grama do insumo X e 4 gramas do insumo Y. O preço da venda do quilo de cada um dos produtos A, B e C é de $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$5,00$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A, B e C manufaturada com 1 quilo de X e 2 quilos de Y, essa indústria arrecadou $R\$2500,00$. Determine quantos quilos de cada um dos produtos A, B e C foram vendidos.

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Produto A	Produto B	Produto C
Insumo X	1	1	1
Insumo X	2	1	4
Preços	2	3	5

Designando por:
- x - quantidade do produto A;
- y - quantidade do produto B;
- z - quantidade do produto C,

em quilograma, assim para 1 kg do insumo X, 2 kg do insumo Y e $R\$2500,00$ temos o seguinte sistema linear:

$$S:\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + y + 4z = 2000 \\ 2x + 3y + 5z = 2500 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1000 & \\ 2 & 1 & 4 & 2000 & L_2 \longrightarrow L_2-2L_1 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 & L_3 \longrightarrow L_3-2L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1000 & \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 3 & 500 & L_3 \longrightarrow L_3+L_2 \end{array} \qquad \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos

$$5z=500 \Longleftrightarrow z=100,$$

substituindo na 2ª equação

$$8-y+2z=0 \overset{z=100}{\Longrightarrow} 8y = 2z = 200,$$

substituindo esses valores na 1ª equação $x+y+z=1000$ obtemos

$$x = 1000-y-z \overset{y=200,\ z=100}{\Longrightarrow} x = 700.$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto A, 200 kg do produto B e 100 kg do produto C.

12. Uma cooperativa produz três tipos de ração, as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G) em cada 10 kg de cada ração estão indicadas na tabela abaixo à esquerda, e as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G), em toneladas, que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo à direita

Quantidade (em quilograma)	P	C	G
Ração 1	1	0	2
Ração 2	3	1	4
Ração 3	2	2	1

Quant./mês (em tonelada)	P	C	G
Dezembro 2019	15	10	14
Janeiro 2020	13	5	17

Nestas condições determine a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês.

Solução:

Designando por:
- x - quantidade da ração 1;
- y - quantidade da ração 2;
- z - quantidade da ração 3,

em 10 quilograma, assim pela tabela acima à direita, em dezembro, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 2z & = & 15000 \\ & & y & + & 2z & = & 10000 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 14000 \end{array} \right. .$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 2 & 4 & 1 & 14000 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 3 & 2 & 15000 & \\ 0 & 1 & 2 & 10000 & \\ 2 & 4 & 1 & 14000 & L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} 1 & 3 & 2 & 15000 & \\ 0 & 1 & 2 & 10000 & \\ 0 & -2 & -3 & -16000 & L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 0 & 0 & 1 & 4000 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $z = 4000$, substituindo na 2ª equação $y+2z = 10000 \overset{z=4000}{\Longrightarrow} 8y = 10000 - 2z = 2000$, substituindo esses valores na 1ª equação $x+3y+2z = 15000$ obtemos

$$x = 15000-3y-2z \overset{y=200,\ z=4000}{\Longrightarrow} x = 4000.$$

Portanto, em dezembro foram produzidos 10 T da ração 1, 20 T da ração 2 e 40 T da ração 3.

Analogamente, concluímos que, em janeiro foram produzidos 20 T da ração 1, 30 T da ração 2 e 10 T da ração 3.

13. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada 10 m^2 140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:
    (i) Cada quilograma do adubo I custa $R\$5,00$ e contém 10g de nitrato, 10g de fosfato e 100g de potássio.
    (ii) Cada quilograma do adubo II custa $R\$15,00$ e contém 10g de nitrato, 100g de fosfato e 30g de potássio.
    (iii) Cada quilograma do adubo III custa $R\$5,00$ e contém 50g de nitrato, 20g de fosfato e 20g de potássio.
    (iv) Cada quilograma do adubo IV custa $R\$10,00$ e contém 20g de nitrato, 40g de fosfato e 35g de potássio.

    Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar $R\$40,00$ a cada 10 m^2 com a adubação?

    Solução:

    Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Adubo I	Adubo II	Adubo III	Adubo IV
Preços	5	15	5	10
Nitrato	10	10	50	20
Fósforo	10	100	20	40
Potássio	100	30	20	35

Designando por:
- x - quantidade do adubo I;
- y - quantidade do adubo II;
- z - quantidade do adubo III;
- t - quantidade do adubo IV,

para 10 m^2, como para essa área se dispõe a gastar $R\$40,00$ e são necessárias 140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio temos assim o seguinte sistema linear:

$$S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & + & 15y & + & 5z & + & 10t & = & 40 \\ 10x & + & 10y & + & 50z & + & 20t & = & 140 \\ 10x & + & 100y & + & 20z & + & 40t & = & 190 \\ 100x & + & 30y & + & 20z & + & 35t & = & 205 \end{array} \right. .$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{rrrrcr} 5 & 15 & 5 & 10 & | & 40 \\ 10 & 10 & 50 & 20 & | & 140 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & | & 190 \\ 100 & 30 & 20 & 35 & | & 205 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{rrrrcrl} 5 & 15 & 5 & 10 & | & 40 & \\ 10 & 10 & 50 & 20 & | & 140 & L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & | & 190 & L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \\ 100 & 30 & 20 & 35 & | & 205 & L_4 \longrightarrow L_4 - 20L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrl} 5 & 15 & 5 & 10 & | & 40 & \\ 0 & -20 & 40 & 0 & | & 60 & \\ 0 & 70 & 10 & 20 & | & 110 & L_3 \longrightarrow L_3 + {}^7\!/_2 L_1 \\ 0 & -270 & -80 & -165 & | & -595 & L_4 \longrightarrow L_4 - {}^{27}\!/_2 L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrl} 5 & 15 & 5 & 10 & | & 40 & \\ 0 & -20 & 40 & 0 & | & 60 & \\ 0 & 0 & 150 & 20 & | & 320 & \\ 0 & 0 & -620 & -165 & | & -1405 & L_4 \longrightarrow L_4 + {}^{62}\!/_{35} L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcr} 5 & 15 & 5 & 10 & | & 40 \\ 0 & -20 & 40 & 0 & | & 60 \\ 0 & 0 & 150 & 20 & | & 320 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^{247}\!/_3 & | & -{}^{247}\!/_3 \end{array}.$$

Da 4ª equação temos $t=1$, substituindo na 3ª equação $150z+20t=320 \Longrightarrow z=2$ substituindo $t=1$ e $z=2$ na 2ª equação $-20y+40z=60$ obtemos $20y=20 \Longrightarrow y=1$, substituindo esses valores na 1ª equação obtemos:

$$5x+15y+5z+10t=40 \Longleftrightarrow x=8-3y-z-2t \overset{y=1,\, z=2,\, t-1}{\Longrightarrow} x=1.$$

Portanto, para fazer a mistura para 10 m^2 devem ser utilizados 1 kg do adubo I, 1 kg do adubo II, 2 kg do adubo I, e 1 kg do adubo IV.

14. Uma florista oferece três tamanhos de arranjos de flores com rosas, margaridas e crisântemos.
   (i) Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três crisântemos.
   (ii) Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis crisântemos.
   (iii) Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis crisântemos.
   Um dia a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos de cada tipo ela fez neste dia?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Arranjo P	Arranjo M	Arranjo G
Rosa	1	2	4
Margarida	3	4	8
Crisântemo	3	6	6

Designando por:
- x - quantidade de arranjos P;
- y - quantidade de arranjos M;
- z - quantidade de arranjos G,

se neste dia a florista tinha 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos, então temos o seguinte sistema linear:

$$S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 24 \\ 3x & + & 4y & + & 8z & = & 50 \\ 3x & + & 6y & + & 6z & = & 48 \end{array} \right. .$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 4 & 24 & \\ 3 & 4 & 8 & 50 & L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ 3 & 6 & 6 & 48 & L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $-6z = -24 \Longleftrightarrow z = 4$, substituindo na 2ª equação $-2y - 4z = -22 \overset{z=4}{\Longrightarrow}$ $8y = 11 - 2z = 3$, substituindo esses valores na 1ª equação $x + 2y + 4z = 24$ obtemos

$$x = 24 - 2y - 4z \overset{y=3,\ z=4}{\Longrightarrow} x = 2.$$

Portanto, foram feitos 2 arranjos pequenos, 3 arranjos médios e 4 arranjos grandes.

15. Um comerciante vende três tipos distintos de caixas com chocolates. A caixa tipo-I contém 2 unidades do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e 4 unidades do chocolate amargo. A caixa tipo-II contém 1 unidade do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e não contém chocolate amargo. A caixa tipo-III contém 1 unidade do chocolate branco, 3 unidades do chocolate ao leite e a unidade do chocolate amargo; $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo. Quantas caixas de cada tipo o comerciante consegue preparar utilizando todos os chocolates?

    Verifique também se é possível, para quais valores de $a \in \mathbb{R}$, que o sistema correspondente ao problema do comerciante seja um sistema de Cramer.

    Solução:

    Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Caixa Tipo I	Caixa Tipo II	Caixa Tipo III
Chocolate branco	2	1	1
Chocolate ao leite	2	2	3
Chocolate amargo	4	0	a

Designando por:
- x - quantidade de caixas tipo I;
- y - quantidade de caixas tipo II;
- z - quantidade de caixas tipo III,

como o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 50 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 100 \\ 4x & & & + & az & = & 60 \end{array}\right..$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 2 & 3 & 100 \\ 4 & 0 & a & 60 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 50 & \\ 2 & 2 & 3 & 100 & L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \\ 4 & 0 & a & 60 & L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 50 & \\ 0 & 1 & 2 & 50 & \\ 0 & -2 & a-2 & -40 & L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & a+2 & 60 \end{array}$$

Logo, temos as seguintes situações:

- Se $a+2 \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq -4$, então $p(A) = p(M) = 3$ e o sistema linear S tem uma única solução, e é um sistema de Cramer.

  Neste caso, da 3ª equação temos $(a+2)z = 60 \Longleftrightarrow z = \dfrac{60}{a+2}$, substituindo na 2ª equação

  $$y + 2z = 50 \Longleftrightarrow y = 50 - 2z = 50 - \frac{120}{a+2} = \frac{50a-20}{a+2},$$

  substituindo esses valores na 1ª equação $2x + y + z = 50$ obtemos

  $$2x = 50 - y - z = 50 - \frac{50a-20}{a+2} - \frac{60}{a+2} = \frac{60}{a+2} \Longleftrightarrow x = \frac{30}{a+2}.$$

  Observemos que x e y são quantidades não negativas, portanto $50a - 20 \geq 0 \Longleftrightarrow a \geq 2/5$, e como

  $$x = \frac{30}{a+2}, \quad y = \frac{50a-20}{a+2} \quad \text{e} \quad z = \frac{60}{a+2} \quad \text{são inteiros,}$$

  as possibilidades de quantidades de caixas são as seguintes:

  ❊ $a = 1 \Longrightarrow x = 10\ y = 10$ e $z = 20$;

  ❊ $a = 4 \Longrightarrow x = 5\ y = 0$ e $z = 10$;

  ❊ $a = 13 \Longrightarrow x = 2\ y = 42$ e $z = 4$;

  ❊ $a = 28 \Longrightarrow x = 1\ y = 46$ e $z = 2$,

- Se $a+2 = 0 \Longleftrightarrow a = -2$, então $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, portanto o sistema linear S não tem solução.

16. Um comerciante de café vende três misturas de grãos.
    (i) Um pacote com a mistura da casa contém $300g$ de café colombiano e $200g$ de café tostado tipo francês.
    (ii) Um pacote com a mistura especial contém $200g$ de café colombiano, $200g$ de café queniano e $100g$ de café tostado tipo francês.
    (iii) Um pacote com a mistura gourmet contém $100g$ de café colombiano, $200g$ de café queniano e $200g$ de café tostado tipo francês.

    O comerciante tem $30kg$ de café colombiano, $15kg$ de café queniano e $25kg$ de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura ele deve preparar?

    Solução:

    Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em gramas)	Mistura da Casa	Mistura Especial	Mistura Gourmet
Café colombiano	300	200	100
Café francês	200	100	200
Café queniano	0	200	200

Designando por:

- x - quantidade de mistura da casa;
- y - quantidade de mistura especial;
- z - quantidade de mistura gourmet,

em pacotes, como o comerciante dispõe de $30kg$ de café colombiano, $15kg$ de café queniano e $25kg$ de café tipo francês, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 300x + 200y + 100z = 30000 \\ 200x + 100y + 200z = 15000 \\ \quad\quad\;\; 200y + 200z = 25000 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 200 & 100 & 200 & 15000 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{ccc|cl} 300 & 200 & 100 & 30000 & L_1 \longrightarrow {}^1\!/_{100}L_1 \\ 200 & 100 & 200 & 15000 & L_2 \longrightarrow L_2 - {}^2\!/_3 L_1 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} 3 & 2 & 1 & 300 & \\ 0 & -{}^{100}\!/_3 & {}^{400}\!/_3 & 5000 & L_2 \longrightarrow {}^3\!/_{100}L_2 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 & L_3 \longrightarrow L_3 + 6L_3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 4 & 150 \\ 0 & 0 & 1000 & 45000 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $100z = 45000 \Longleftrightarrow z = 45$, substituindo na 2ª equação

$$8 - y + 4z = 150 \Longleftrightarrow y = 4z - 150 \overset{z=45}{\Longrightarrow} 8y = 180 - 150 = 30,$$

substituindo esses valores na 1ª equação $3x + 2y + z = 30$ obtemos

$$3x = 300 - 2y - z \overset{y=30,\ z=45}{\Longrightarrow} 3x = 195 \Longleftrightarrow x = 65.$$

Portanto, podem ser preparados 65 pacotes de mistura da casa, 30 pacotes de mistura especial e 45 pacotes de mistura gourmet.

17. Faça o balanceamento da equação química para a seguinte reação:

$$C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

"Queima do gás butano na presença de oxigênio para formar dióxido de carbono e água."

Solução:

Devemos encontrar números x_1, x_2, x_3, x_4 tais que a quantidade de átomos seja a mesma em ambos os lados da equação:

$$x_1C_4H_{10} + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_4H_2O,$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcll} 4x_1 & = & x_3 & \text{equação do carbono} \\ 10x_1 & = & 2x_4 & \text{equação do hidrogêneo} \\ 2x_2 & = & 2x_3 + x_4 & \text{equação do oxigênio,} \end{array}$$

assim temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 4x_1 - x_3 = 0 \\ 10x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \; L_2 \longrightarrow L_2 - {}^5\!/_2 L_1$$

$$\sim \begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^5\!/_2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \; L_2 \longleftrightarrow L_3 \sim \begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^5\!/_2 & -2 & 0 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $\frac{5}{2}x_3 - 2x_4 = 0 \Longleftrightarrow x_3 = \frac{4}{5}x_4$, na 2ª equação temos

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \Longleftrightarrow 2x_2 2 = 2x_3 + x_4 = 2\frac{4}{5}x_4 + x_4 = \frac{13}{5}x_3 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{13}{10}x_4.$$

Na 1ª equação temos: $4x_1 - x_3 = 0 \Longleftrightarrow 4x_1 = x_3 = \frac{4}{5}x_4 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{5}x_4$.

Assim, como $x - 1 = \frac{1}{5}x_4$, $x_2 = \frac{13}{10}x_4$, $x_3 = \frac{4}{5}x_4$, x_4 são inteiros não negativos, não todos nulos, devemos ter x_4 múltiplo de 10, por exemplo para $x_4 = 10$ obtemos $x_1 = 2$, $x_2 = 13$ e $x_3 = 8$ e temos a seguinte equação balanceada:

$$2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O.$$

18. Um aluno de *Álgebra Linear A* precisa distribuir o seu tempo no mês a fim de revisar os seguintes assuntos: matrizes, sistemas de equações lineares e métodos de solução. Para revisar matrizes ele necessita na semana de 1h na segunda-feira, 3h na quarta-feira e 3h na sexta-feira. Para revisar sistemas de equações lineares ele necessita na semana de 2h na segunda-feira, 4h na quarta-feira e 6h na sexta-feira; e, para revisar métodos de solução ele necessita na semana de 4h na segunda-feira, 8h na quarta-feira e 6h na sexta-feira. Organizando o seu tempo de estudo, ele constatou que tem disponível no mês: 24 horas/mês na segunda-feira, 50 horas/mês na quarta-feira e 48 horas/mês na sexta-feira. Agora ele deseja saber quantas vezes no mês ele conseguirá revisar cada assunto.

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em horas)	Segunda-feira	Quarta-feira	Sexta-feira
Matrizes	1	3	3
Sistemas Lineares	2	4	6
Métodos de solução	4	8	6

Designando por:
- x - tempo dedicado ao estudo de matrizes;
- y - tempo dedicado ao estudo de sistemas lineares;
- z - tempo dedicado ao estudo de métodos de solução,

em horas, como o aluno dispõe de 24 horas/mês na segunda-feira, 50 horas/mês na quarta-feira e 48 horas/mês na sexta-feira, temos o seguinte sistema linear:

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 24 \\ 3x & + & 4y & + & 8z & = & 50 \\ 3x & + & 6y & + & 6z & = & 48 \end{array} \right. .$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 50 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Portanto, por vez, o aluno deve dedicar 2 horas para revisar matrizes, 3 horas para revisar sistemas lineares e 4 horas para revisar métodos de solução.