Exercícios de Lógica 2

6 de abril de 2021

1 Prove o seguinte (sem tabela verdade): $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, $\varphi \to \psi \to \chi \equiv \varphi \wedge \psi \to \chi$, $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \equiv \psi$, $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \equiv \psi$ (não use distributividade para provar as regras de absorção).

2 Prove que para qualquer conjunto A existe uma bijeção entre as relações de equivalência sobre A e as partições de A (veja Exercício 3.27 do script). Mostre que a relação $\equiv$ da equivalênca lógica é uma relação de congruência sobre Fm, isto é, $\equiv \subseteq Fm \times Fm$ é uma relação de equivalência que satisfaz o seguinte: Se $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\varphi_2 \equiv \psi_2$, então $\neg\varphi_1 \equiv \neg\psi_1$ e $(\varphi_1 \Box \varphi_2) \equiv (\psi_1 \Box \psi_2)$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \to\}$. (A relação $\equiv$ é 'compatível' com os conectivos.)

3 Resolva o Exercício 3.42 do script.

4 Seja $Fm_\wedge$ o menor conjunto que contém todas as variáveis V e é fechado sob a condição seguinte: se $\varphi, \psi \in Fm_\wedge$, então $(\varphi \wedge \psi) \in Fm_\wedge$. Prove por indução que nenhuma fórmula de $Fm_\wedge$ é válida. Por que isso implica que $\{\wedge\}$ não é base de conectivos?

5 Desenvolva uma FND e uma FNC de
$\varphi = p \to \neg(q \to r)$,
$\psi = x \vee y \to \neg x$,
$\xi = x \wedge y \to \neg x$, respectivamente.

6 Mostre que os axiomas (A2)–(A4) (mais precisamente: todas as instâncias dos esquemas (A2)–(A4)) do cálculo de Hilbert são tautologias (não use tabela verdade).

7 Teorema: Se $\Phi \vdash_H \varphi \to \psi$, então $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_H \psi$.
Prove o Teorema justificando detalhadamente os 4 passos seguintes considerando o cálculo de Hilbert:
1. $\Phi \vdash_H \varphi \to \psi$, 2. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_H \varphi \to \psi$, 3. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_H \varphi$, 4. $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_H \psi$.