Problemas propostos

1. Dados os vetores $\vec{u}=(2,-3,-1)$ e $\vec{v}=(1,-1,4)$, calcular:

   a) $2\vec{u}\cdot(-\vec{v})$

   b) $(\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{v}-2\vec{u})$

   c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

   d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u})$

2. Sejam os vetores $\vec{u}=(2,a,-1)$, $\vec{v}=(3,1,-2)$ e $\vec{w}=(2a-1,-2,4)$. Determinar *a* de modo que $\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{w})$.

3. Dados os pontos A (4, 0, –1), B (2, –2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u}=(2,1,1)$ e $\vec{v}=(-1,-2,3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que:

   a) $3\vec{x}+2\vec{v}=\vec{x}+(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u})\vec{v}$

   b) $(\overrightarrow{BC}\cdot\vec{v})\vec{x}=(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}-3\vec{x}$

4. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u}=(2,-1,3)$, tal que $\vec{v}\cdot\vec{u}=-42$.

5. Determinar o vetor $\vec{v}$ do espaço, sabendo que $|\vec{v}|=5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v}\cdot\vec{w}=6$ e $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v}\cdot\vec{v}_1=8$ e $\vec{v}\cdot\vec{v}_2=-3$, sendo $\vec{v}_1=(3,1,-2)$ e $\vec{v}_2=(-1,1,1)$.

7. Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,-3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ e $\vec{w}=(3,1,0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\cdot\vec{u}=-16$, $\vec{x}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{x}\cdot\vec{w}=3$.

8. Sabendo que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$, calcular:

   a) $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot\vec{u}$

   b) $(2\vec{v}-\vec{u})\cdot(2\vec{v})$

   c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-4\vec{u})$

   d) $(3\vec{u}+4\vec{v})\cdot(-2\vec{u}-5\vec{v})$

9. Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11. O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2.

    Calcular:

    a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

    b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

    c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

    d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

    e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

    f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

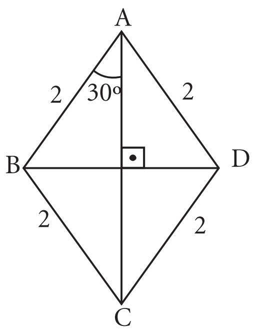

Figura 2.16

12. Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

13. Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar:

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$ **b)** $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14. Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15. Qual deve ser o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16. Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17. Dados os pontos A(−1, 0, 5), B(2, −1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x − 3).

18. Provar que os pontos A(−1, 2, 3), B(−3, 6, 0) e C(−4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19. Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m − 1, 2m, 2) e C(1, 3, −1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20. Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4,1-2)$.

21. Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, sendo o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ igual a 45° e $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

22. Seja o vetor $\vec{v}=(2,-1,1)$. Obter:

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23. Sendo $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{a}|=6$ e $|\vec{b}|=8$, calcular $|\vec{a}+\vec{b}|$ e $|\vec{a}-\vec{b}|$.

24. Demonstrar que, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ **b)** $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2$

25. Determinar o ângulo entre os vetores:

a) $\vec{u}=(2,-1,-1)$ e $\vec{v}=(-1,-1,2)$ **b)** $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$

26. Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, −3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

27. Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, −1) e C(−1, 2, 1).

28. Calcular o valor de *m* de modo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(-2,1,m+1)$ seja 120°.

29. Calcular *n* para que o ângulo entre os vetores $\vec{v}=(-3,1,n)$ e $\vec{k}$ seja de 30°.

30. Se $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ e construir uma figura correspondente a esses dados.

31. Seja o cubo de aresta *a* representado na Figura 2.17. Determinar:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ **d)** $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ **e)** $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{CG}$

c) $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$ **f)** $(\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$

g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;

h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

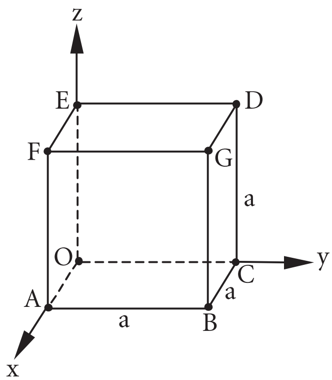

Figura 2.17

32. Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v}=(6,-2,3)$.

33. Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}|=2$. Determinar $\vec{a}$.

34. Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

35. Mostrar que existe vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

36. Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60° com o vetor $\vec{i}$.

37. Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38. Determinar o vetor $\vec{v}$ nos seguintes casos:

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}|=8$, forma ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}|=2$, forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}=(1,2,0)$ e $\vec{w}=(2,0,1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}|=\sqrt{21}$.

40. Dados os vetores $\vec{u}=(3,0,1)$ e $\vec{v}=(-2,1,2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41. Determinar os vetores projeção de $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42. Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u}=(1,2,-2)$ e $\vec{v}=(3,-2,1)$

b) $\vec{u}=(1,1,1)$ e $\vec{v}=(3,1,-1)$

c) $\vec{u}=(2,0,0)$ e $\vec{v}=(3,5,4)$

d) $\vec{u}=(3,1,-3)$ e $\vec{v}=(2,-3,1)$

43. Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18) responda:

a) Para qual valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

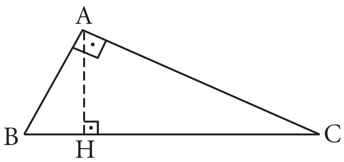

Figura 2.18

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

44. Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u}=(-2,3)$ e $\vec{v}=(k,-4)$ sejam:

a) paralelos

b) ortogonais

45. Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores:

a) $4\vec{i}+3\vec{j}$

b) $(-2, 3)$

c) $(-1, -1)$

46. Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

47. Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores:

a) $\vec{u}=(2,1)$ e $\vec{v}=(4,-2)$

b) $\vec{u}=(1,-1)$ e $\vec{v}=(-4,-2)$

c) $\vec{u}=(1,1)$ e $\vec{v}=(-1,1)$

48. Dados os vetores $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ **c)** $\vec{u}+\vec{v}$ **e)** $\vec{v}-\vec{u}$

b) $\vec{v}$ **d)** $\vec{u}-\vec{v}$

49. Determinar o valor de *a* para que seja 45° o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(2,1)$ e $\vec{v}=(1,a)$.

50. Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(4,3)$ **b)** $\vec{u}=(1,1)$ e $\vec{v}=(2,5)$ **c)** $\vec{u}=(4,3)$ e $\vec{v}=(1,2)$

Respostas de problemas propostos

1. **a)** -2 **b)** 21 **c)** -4 **d)** 4

2. $a=\frac{5}{8}$

3. **a)** $(3, 6, -9)$ **b)** $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$

4. $\vec{v}=(-6,3,-9)$

5. $\vec{v}=(0,3,4)$ ou $\vec{v}=(0,3,-4)$

6. $\vec{v}=(2,0,-1)$

7. $\vec{x}=(2,-3,4)$

8. **a)** 7 **b)** 38 **c)** -4 **d)** -181

9. -19

10. 200 e -200

11. **a)** 0 **b)** 2 **c)** -2 **d)** 2 **e)** 4 **f)** -4

12. $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13. **a)** 37 **b)** $\sqrt{50}$

15. $\alpha = -5$

16. $\alpha = 3$ ou $\alpha = -6$

17. $x=\frac{25}{2}$

18. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

19. $m = 1$ e $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

20. $(0, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

21. $\vec{u} = (1, -1, \sqrt{2})$ ou $\vec{u} = (1, -1, -\sqrt{2})$

22. **a)** Entre os infinitos possíveis: $(1, 1, -1)$

b) Um deles: $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ **c)** Um deles: $(\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{\sqrt{3}}, -\dfrac{4}{\sqrt{3}})$

23. 10 e 10

25. **a)** $120°$ **b)** $150°$

26. $45°$ e $135°$

27. $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$ e $\hat{C} \cong 72°2'$

28. $m = 0$ ou $m = -18$

29. $n = \sqrt{30}$

30. $\text{arc cos}\dfrac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31. **a)** 0 **c)** 0 **e)** a^2 **g)** $\text{arc cos}\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 **d)** $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ **f)** (a^3, a^3, a^3) **h)** $\text{arc cos}(\dfrac{1}{3}) \cong 70°31'$

32. $\alpha = \text{arc cos}(\dfrac{6}{7}) \cong 31°$, $\beta = \text{arc cos}(-\dfrac{2}{7}) \cong 107°$ e $\gamma = \text{arc cos}(\dfrac{3}{7}) \cong 65°$

33. $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34. Não, pois $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35. $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36. $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

37. $\vec{a} = (-2\sqrt{5}, 0, -\sqrt{5})$

38. **a)** $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ **b)** $(0, 1, \sqrt{3})$

39. $\vec{v}=(-2,1,4)$

40. $proj_{\vec{v}}\vec{u}=(\frac{8}{9},-\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$ e $proj_{\vec{u}}\vec{v}=(-\frac{6}{5},0,-\frac{2}{5})$

41. $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42. **a)** $\vec{v}_1=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}),\vec{v}_2=(\frac{10}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1=(1,1,1)$ e $\vec{v}_2=(2,0,-2)$

c) $\vec{v}_1=(3,0,0)$ e $\vec{v}_2=(0,5,4)$

d) $\vec{v}_1=(0,0,0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2=\vec{v}$

43. **a)** m = 3 **b)** $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ **c)** $H(\frac{51}{26},\frac{87}{26},\frac{94}{26})$

44. **a)** $\frac{8}{3}$ **b)** -6

45. **a)** $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ **b)** $(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

46. $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

47. **a)** $\text{arc cos}(\frac{3}{5})\cong 53°$ **b)** $\text{arc cos}(-\frac{1}{\sqrt{10}})\cong 108°$ **c)** 90°

48. **a)** $\sqrt{2},45°$ **d)** $\sqrt{5},\text{arc cos}(-\frac{1}{\sqrt{5}})=117°$

b) $\sqrt{5},\text{arc cos}(\frac{2}{\sqrt{5}})\cong 26°$ **e)** $\sqrt{5},\text{arc cos}(\frac{1}{\sqrt{5}})\cong 63°$

c) 3,0°

49. $\alpha = 3$ ou $\alpha = -\frac{1}{3}$

50. **a)** $\vec{v}_1=(4,0)$, $\vec{v}_2=(0,3)$ **b)** $\vec{v}_1=(\frac{7}{2},\frac{7}{2}),\vec{v}_2=(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

c) $\vec{v}_1=(\frac{8}{5},\frac{6}{5}),\ \vec{v}_2=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$