Método diagonal de Cantor

- Publicado em 1891;
- Mostra como obter um conjunto diferente de todos os conjuntos de uma dada coleção de conjuntos, seja ela finita ou infinita;
- Cada um dos conjuntos dessa coleção, por sua vez, pode conter um número finito ou infinito de elementos;
- O número de elementos usados para caracterizar tais conjuntos também pode ser finito ou infinito;
- Bastante usado até os dias de hoje.

Método diagonal de Cantor

Características:

- Matriz com linhas e colunas;
- Cada coluna representa um certo elemento (podem existir infinitas colunas);
- Cada linha representa um conjunto criado com esses elementos (se a quantidade de colunas for infinita, podem existir infinitos conjuntos);
- O cruzamento de uma linha com uma coluna é marcado para indicar se aquele elemento pertence (1) ou não pertence (0) ao respectivo conjunto;
- Considere a diagonal e troque 0s por 1s e vice-versa;
- O conjunto assim obtido é diferente de todos os conjuntos representados na matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

- Suponha que os elementos são números naturais;
- Cada coluna representa um número natural;
- Cada linha representa um subconjunto dos números naturais.
- Quaisquer que sejam os conjuntos considerados nas linhas, a complementação da diagonal principal produz um novo subconjunto desses mesmos elementos que difere de todos os considerados nas linhas da matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	...
S_1	1	1	1	0	1	...
S_2	1	1	0	0	1	...
S_3	1	0	0	1	0	...
S_4	0	1	1	1	0	...
S_5	0	0	1	0	0	...
...	...	...	...	...		...

Método diagonal de Cantor
Exemplo

Na figura anterior, temos:

- $S_1 = \{0, 1, 2, 4, ...\}$;
- $S_2 = \{0, 1, 4, ...\}$;
- $S_3 = \{0, 3, ...\}$;
- $S_4 = \{1, 2, 3, ...\}$;
- $S_5 = \{2, ...\}$;
- Diagonal: $11010...$;
- Diagonal complementada: $00101...$;
- Conjunto obtido: $X = \{2, 4, ...\}$;
- $X \neq S_i, i \geq 0$.

Método diagonal de Cantor

Aplicações

Serve, por exemplo, para demonstrar que $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$:

- Suponha que $|\mathbb{N}| = |2^{\mathbb{N}}|$;
- Então, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $2^{\mathbb{N}}$;
- As colunas representam os números naturais;
- Cada linha representa um subconjunto dos números naturais dessa bijeção; suponha que eles sejam rotulados por números naturais, a partir de zero;
- Sempre é possível obter um novo subconjunto que não foi considerado pela bijeção;
- A hipótese é falsa e não existe tal bijeção;
- $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$.