Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 21/02/2019

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Introdução e Motivação
  - Relevância da Matemática para a Computação.
  - Técnicas de Demonstração.
  - Lógica Proposicional.
- Conjuntos
  - Operações sobre conjuntos.
  - Produto Cartesiano.
  - Relações e funções, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; exemplos.
  - Operações sobre funções (composição, inverso, produto).
  - Conjuntos finitos, contáveis e não-contáveis; enumerabilidade de conjuntos.
  - Prova de Cantor (diagonalização).
  - Propriedades de conjuntos enumeráveis (contáveis).
  - Cardinalidade de conjuntos.
- Os números naturais
  - Os axiomas de Peano.
  - Definição da adição e propriedades.
  - Introdução de ordem nos naturais.
  - O princípio da indução (primeira e segunda formas)
  - Exemplos de provas por indução.
  - O princípio da definição recursiva de funções.
  - Teorema da recursão. Exemplos de definições recursivas de funções.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Propriedades de relações binárias
  - Simetria, reflexividade e transitividade de relações.
  - Relações de equivalência, partições de conjuntos, propriedades básicas.
  - Equivalência entre partição e relação de equivalência.
  - Exemplos de relações de equivalência.
  - Fecho transitivo e reflexivo de uma relação; exemplos.
- Análise combinatória
  - Princípios elementares de contagem
  - Coeficientes fundamentais de contagem (coeficiente binomial, número de Stirling da segunda ordem)
  - Permutações (ciclos, pontos fixos, números de Stirling da primeira ordem)
  - Problema da escolha de k-elementos de um conjunto de n elementos (escolha ordenada, não ordenada, sem repetição, com repetição)
  - Recursão e o Triângulo de Pascal (o Teorema Binomial, a Identidade de Vandermonde)
  - Recursão e os números de Stirling

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL

1. Kenneth H. Rosen: Matemática Discreta e suas Aplicações; Mc-Graw Hill Brasil.
2. Kenneth H. Rosen: Discrete Mathematics and its Applications; Mc-Graw Hill.
3. Coleção Schaum: Teoria dos Conjuntos.
4. E. Alencar Filho: Teoria dos Conjuntos.
5. J. Monteiro: Elementos de Álgebra.
6. L. Lovasz: Matemática Discreta.
7. D. Stuart e D. McAllister: Discrete Mathematics in Computer Science.
8. J. Gersting: Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.

Avaliações

- 1^a Prova: 04/04/2019 (quinta-feira) - sala:207 - PAFI
- 2^a Prova: 16/05/2019 (quinta-feira) - sala:207 - PAFI
- 3^a Prova: 27/06/2019 (quinta-feira) - sala:207 - PAFI
- 2^a chamada: 04/07/2019 (quinta-feira) - sala:207 - PAFI

- Cálculo da Média:
  A Média Final(MF) incluirá a nota das Provas($P1, P2, P3$):

$$MF = \frac{(3.(P1) + 3.(P2) + 4.(P3))}{10}$$

Teoria Ingênua de Conjuntos

Definição:

Um CONJUNTO é uma coleção não ordenada de objetos denominados "*elementos*" (ou "membros").
Notação: os conjuntos serão denotados por letras maiúsculas ($A, B, C, \cdots$).

EXEMPLOS:

1. $A := \{$Paulo, Rita, Mateus, João$\}$
2. $V := \{$a, e, i, o, u$\}$ "*Conjunto das vogais*"
3. $P := \{x | x$ é par $\}$ "*Conjunto dos números pares*"
4. $O := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 9\}$

Observação: Os conjuntos A e V estão na forma EXPLÍCITA; enquanto que P e O estão na forma IMPLÍCITA.

Relação de Pertinência:

- Se x é elemento de um conjunto A, escrevemos:
  $x \in A$ (lê-se: "x pertence ao conjunto A".)
- Se x não é elemento de um conjunto A, escrevemos:
  $x \notin A$ (lê-se: "x não pertence ao conjunto A".)

EXEMPLO:
Seja o conjunto $D := \{1, 3, 5, 7, 9\}$ na sua forma explícita.
Assim, podemos dizer que: $1 \in D$ e $2 \notin D$.

Teoria de Conjuntos - Conjuntos Importantes

1. Conjunto dos Naturais:
   $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$
2. Conjunto dos Inteiros:
   $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \cdots\}$
3. Conjunto dos Inteiros Positivos:
   $\mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$;
   O conjunto dos Inteiros Não-Negativos: $\{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$;
4. Conjunto dos Inteiros Negativos:
   $\mathbb{Z}^- := \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$;
   O conjunto dos Inteiros Não-Positivos: $\{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$;

Teoria de Conjuntos - Conjuntos Importantes

1. Conjunto dos Racionais:
   $\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$
2. Conjunto dos Irracionais:
   $\mathbb{I} := \{x \mid x \text{ é dízima não periódica } \}$
3. Conjunto dos Reais:
   $\mathbb{R} := \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$
4. Conjunto dos Complexos:
   $\mathbb{C} := \{x \mid x = a + bi; a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}\}$

Ingenuamente podemos dizer que um conjunto tem a seguinte forma:

$$\{x \mid \psi(x)\};$$

onde, $\psi(x)$ é uma propriedade bem escolhida do elemento x.

EXEMPLOS:

1. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par } \}$
2. $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 7\}$

Axioma da Extensionalidade

Dois conjuntos A e B são IGUAIS se, e somente se, contêm os mesmos elementos. NOTAÇÃO: $A = B$.
Caso contrário, dizemos que A e B são DIFERENTES.
NOTAÇÃO: $A \neq B$.

EXEMPLOS:

1. $A := \{1, 3, 5\}$ e $B := \{3, 3, 1, 5, 1, 5\}; A = B$
2. $A := \{a\}$ e $B := \{a, b\}; A \neq B$
3. $A := \{a, \{a\}\}$ e $B := \{a\}; A \neq B$

NOTE QUE: a *ordem* e a *repetição* dos elementos em um conjunto são irrelevantes:
$A := \{1, a, a, 1, 1, H\} = \{a, H, 1\}$.

Definição: (Conjunto Vazio)

Dizemos que o conjunto que não possui elemento é o Conjunto Vazio. Notação: $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplos:

1. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 1\} = \emptyset$;
2. $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\} = \emptyset$

Definição: (Conjunto Unitário)

Dizemos que o conjunto que possui um único elemento é o Conjunto Unitário. Notação: $\{x\}$; onde x é um objeto.

Exemplos:

1. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 = 3\} = \{2\}$;
2. $B := \{\emptyset\}$

Definição: (Sunconjunto)

Dizemos que o conjunto A é subconjunto do conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A pertencem ao B ; ou seja, se $x \in A$ então $x \in B$.

Notação: $A \subseteq B$. lê-se: "A **está contido** em B".

- Observação.1: Neste caso, dizemos também que: $B \supseteq A$. lê-se: B contém A.
- Observação.2: Se existe pelo menos um elemento de A que **não** pertença a B, então A não é subconjunto de B. Notação: $A \not\subseteq B$; lê-se: "A **não está contido** em B". ou seja, B **não** contém A. Notação: $B \not\supseteq A$

Teoria de Conjuntos - Relação de Inclusão

- OBSERVAÇÃO.3: A relação de inclusão é uma RELAÇÃO TRANSITIVA : Sejam os conjuntos A, B, C.
  Se $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq C)$ então $(A \subseteq C)$.
- OBSERVAÇÃO.4: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A: $\emptyset \subseteq A$.
- OBSERVAÇÃO.5: Todo conjunto A é subconjunto dele próprio; ou seja, $A \subseteq A$.

- OBSERVAÇÃO.6: O AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE constata que para os conjuntos A e B com $A = B$, temos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

DEFINIÇÃO: (Sunbconjunto Próprio)

Sejam os conjuntos A e B quaisquer. Dizemos que A é SUBCONJUNTO PRÓPRIO de B se, e somente se, A é subconjunto de B e $A \neq B$.

NOTAÇÃO: $A \subset B$; ou seja, $B \supset A$.

- OBSERVAÇÃO.7: Note que neste caso, todos os elementos de A pertencem ao B; porém, existe elemento em B que não pertence ao A.

EXEMPLOS:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
2. Seja $A := \{x \mid x$ é um inteiro não negativo $\}$; $\mathbb{N} \subseteq A$.

Definição: (Intersecção)

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que o conjunto $C := \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ é a Intersecção de A e B.
Notação: $A \cap B$.

Exemplos:

1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 6\}$ e $B := \{1, 3, 4, 5\}$ então $(A \cap B) := \{1, 4\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \cap B) := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 15\}$

Definição: (Conjuntos Disjuntos)

Dizemos que dois conjuntos A e B são disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

DEFINIÇÃO: (União)

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que o conjunto $C := \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ é a UNIÃO de A e B.
NOTAÇÃO: $A \cup B$.

EXEMPLOS:

1. Sejam $A := \{0, 2, 4, 6\}$ e $B := \{1, 3, 5\}$ então $(A \cup B) := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \cup B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \text{ ou } 10 < x < 20\}$
3. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par }\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar }\}$ então $(A \cup B) := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par ou } x \text{ é ímpar }\} = \mathbb{N}$

PROPRIEDADES: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então;

(i) IDEMPOTÊNCIA: $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

(ii) ASSOCIATIVIDADE: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(iii) COMUTATIVIDADE: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

(iv) DISTRIBUTIVIDADE: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$

(vi) ABSORÇÃO: $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$

- OBSERVAÇÃO.8:
  Se $(A \subset B)$ então $(A \cap B) = A$ e $(A \cup B) = B$.

Definição: (Diferença)

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Dizemos que o conjunto $C := \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ é a Diferença de A com B, também denominada Complemento de B relativo ao A.

Notação: $A - B$ ou $A \backslash B$.

Exemplos:

1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 5, 6\}$ e $B := \{1, 3, 5\}$ então $(A \backslash B) := \{0, 4, 6\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$ e $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então $(A \backslash B) := \{10, 20\}$

OBSERVAÇÃO.9: Sejam A e B conjuntos quaisquer então $A \backslash B \neq B \backslash A$.

EXEMPLOS:

1. Sejam $A := \{0, 1, 4, 5, 6\}$ e $B := \{1, 3, 5\}$ então
   $(A \backslash B) := \{0, 4, 6\}$ e,
   $(B \backslash A) := \{3\}$
2. Sejam $A := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 20\}$ e
   $B := \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$ então
   $(A \backslash B) := \{10, 20\}$ e,
   $(B \backslash A) := \emptyset$

Definição: (Cardinalidade)

Seja A um conjunto qualquer e seja $n \in \mathbb{N}$. Se existem exatamente n elementos distintos em A, dizemos que A é um CONJUNTO FINITO e que n é a CARDINALIDADE de A.

Notação: $|A|$ ou $\#A$.

Exemplo:

- $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$; $|A| = 10$
- $|\emptyset| = 0$
- $A := \{x \mid x \text{ é uma vogal }\}$; $|A| = 5$

Observação.10: Dizemos que um conjunto A é INFINITO se, e somente se, A não é finito.

DEFINIÇÃO: (Potência)

Seja A um conjunto qualquer. Dizemos que o conjunto de *todos os subconjuntos do conjunto* A é o CONJUNTO POTÊNCIA de A.
NOTAÇÃO: $\mathcal{P}(A)$.

EXEMPLO:

- $A := \{1, 2, 3\}$
  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

OBSERVAÇÃO.11: Sejam A um conjunto qualquer e $n \in \mathbb{N}$.Se A possui n elementos então seu conjunto potência, $\mathcal{P}(A)$, possui 2^n elementos.

EXEMPLO:

- $A := \{1, 2, 3\}$
  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
  $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^1 = 2$

DEFINIÇÃO: (Partição)

Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{P}$ um conjunto cujos elementos são subconjuntos de A, ou seja, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(A)$. Dizemos que o conjunto $\mathcal{P}$ é uma PARTIÇÃO de A se, e somente se, os elementos de $\mathcal{P}$ são não vazios, disjuntos dois a dois, e a união de todos os elementos de $\mathcal{P}$ é A.

NOTAÇÃO: $\mathcal{P}$.

EXEMPLO:

$A := \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$; e

$\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ou $\mathcal{P} = \{\{1, 2, 3\}\}$

OBSERVAÇÃO.12:

- A é sempre uma PARTIÇÃO de A.
- Se $B \subset A$ e $B \neq \emptyset$ então o conjunto $\{B, A \backslash B\}$ também é uma partição de A.