MATA51 – Teoria da Computação

Profa. Laís Salvador

Alunos: Adrielle Andrade Carvalho, Fernando Franco de Lacerda Neto, João Lucas Lima de Melo e Thiago Vieira Souza Andrade

Atividade 3

1.a) Seja R uma máquina de Turing para a linguagem universal e D uma máquina de Turing decisora para $\overline{L_d}$. Agora construa R da seguinte forma:

Primeiro, construa uma nova máquina M_i que tem entrada x, sendo x uma palavra, se x for diferente de w_i M_i rejeita, se não utiliza M como subrotina da seguinte maneira:

- M_i aceita w_i se e somente se M aceita w (M e w vem da entrada de R);
- M_i rejeita w_i se M rejeita w;
- M_i entra em loop com w_i se e somente se M entra em loop com w.

Agora chame D com entrada w_i dentro de R.

- Se D aceitar, significa que w_i pertence a linguagem de M_i, logo M aceita w, então R aceita < M,w >;
- Se D rejeitar, significa que w_i não pertence a linguagem de M_i, logo M não aceita w, então R rejeita < M,w >.

Dessa maneira, mostramos que a linguagem universal é decidível, uma contradição.

b) Seja R uma máquina de Turing para a linguagem da parada e D uma máquina de Turing decisora para L_{MTdec}. Agora construa R da seguinte forma:

Primeiro, construa uma nova máquina M’ que tem entrada x, e M’ vai utilizar M como subrotina da seguinte maneira:

- M’ aceita x se e somente se M aceita w (M e w vem da entrada de R);
- M’ rejeita x se e somente se M rejeita w;
- M’ entra em loop com x se e somente se M entra em loop com w.

Agora chame D com entrada <M’> dentro de R.

- Se D aceitar, significa que M’ sempre para, ou seja, M aceita ou rejeita w, então R aceita < M,w >;
- Se D rejeitar, significa que M’ entra em loop, ou seja, M entra em loop com w, então R rejeita < M,w >.

Dessa maneira, mostramos que a linguagem da parada é decidível, uma contradição.

c) Seja R uma máquina de Turing para a linguagem universal e D uma máquina de Turing decisora para L_{MTfin}. Agora construa R da seguinte forma:
Primeiro, construa uma nova máquina M’ que tem entrada x. Se x = 1 , M’ aceita. Se x ≠ 1 M’ vai utilizar M como subrotina da seguinte maneira:

- M’ aceita x se e somente se M aceita w (M e w vem da entrada de R);
- M’ rejeita x se e somente se M rejeita w;
- M’ entra em loop com x se e somente se M entra em loop com w.

Assim, se M aceita w temos que L(M’) = Σ* e se M não aceita w temos que L(M’) = {1}
Agora chame D com entrada <M’> dentro de R.

- Se D aceitar, significa que L(M’) = {1}, ou seja, M não aceita w, então R rejeita < M,w >;
- Se D rejeitar, significa que L(M’) = Σ*, ou seja, M aceita w, então R aceita < M,w >;

Dessa maneira, mostramos que a linguagem universal é decidível, uma contradição.

2. Podemos facilmente gerar uma mT M’ não determinística da seguinte forma:

1) M’ recebe a entrada <M>
2) Por ser não determinística, M’ irá gerar todas as palavras possíveis para o alfabeto de M em paralelo, testando as palavras como entradas em M.
3) Se M aceitar w , M’ aceita M.

Dessa forma, M’ aceita M se e somente se M aceita alguma palavra w. Então, se M não aceitar alguma palavra w, M’ não irá aceitar M. Ainda, caso M entre em loop, M’, na sua versão determinística, entrará em loop. Logo $L(M') = \overline{L_0}$ e como M’ pode parar ou pode entrar em loop, $\overline{L_0}$ é RE .

3. Vamos definir S como um conjunto de linguagens. Se S não é trivial então existe uma máquina de Turing que reconhece uma das linguagens que pertence a S e uma outra mT que reconhece uma linguagem que não está em S. Desse modo, o Teorema de Rice afirma que é indecidível determinar se uma linguagem decidível pertence a S. Esse teorema pode ser utilizado para provar a indecidibilidade de uma propriedade não trivial. Temos como exemplo $L = \{< M > | L(M)\ \text{é}\ uma\ linguagem\ regular\}$, tendo em vista que temos mTs que reconhecem linguagens regulares (pertencem a S) e mTs que reconhecem linguagens não regulares (não pertencem a S), portanto, o Teorema de Rice garante que L é indecidível.

4. O problema da Correspondência de Post é um problema indecidível definido por Emil Post, o qual consiste em duas listas finitas de palavras $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sob algum alfabeto Σ que contém pelo menos 2 símbolos. Nesse problema, busca-se decidir se existe uma sequência de índices $(i_k)_{1 \le k \le n}$ de forma que para todo k: $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k} = \beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k}$. O problema da Correspondência de Post (PCP) é indecidível pelo fato de que podemos reduzir um problema indecidível já conhecido, como o problema da parada, ao PCP. Uma vez que vale a redução, a indecidibilidade do problema se expressa a partir do fato de que se ele for decidível, implica em afirmar que o problema da parada também o é. O que é um absurdo, já que é conhecido que o problema da parada é indecidível. Portanto, o PCP é indecidível.

REFERÊNCIAS

HOPCROFT, John E.; ULLMAN, Jeffrey D.; MOTWANI, Rajeev. Introdução à teoria de autômatos, linguagens e computação. Editora Campus, 2002.

Problema da correspondência de Post, Wikipédia, 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_da_correspond%C3%AAncia_de_Post>. Acesso em 24 de agosto de 2022.

SIPSER, Michael. Introdução à teoria da computação. Thomson Learning, 2007.

Teorema de Rice, Wikipédia, 2015. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Rice>. Acesso em 23 de agosto de 2022.