Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Segunda unidade, segunda chamada – 21 de fevereiro de 2018

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Usando os critérios de divisibilidade e o crivo de Eratóstenes, encontre a decomposição, no produto de potências de primos, do número 90145. Encontre também a expressão na base 14 do mesmo número (algarismos: $0, \dots, 9, A, B, C, D$).

2. Verifique se o seguinte sistema de equações congruenciais é solucionável e, em caso afirmativo, encontre o conjunto das soluções:

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod 7 \\ x \equiv 14 \pmod 5 \\ x \equiv 21 \pmod 8 \end{cases}.$$

3. Seja $I_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, ordenado com a ordem usual dos números naturais $\leq$, e consideremos o quadrado cartesiano I_4^2 com a ordem lexicográfica (ou seja, $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ sse $a < c$ ou $a = c$ e $b \leq d$).

(a) Desenhe os diagramas de Hasse dos conjuntos ordenados $(D_{216}, |)$ e $(I_4^2, \leq_{\text{lex}})$.

(b) $(I_4^2, \leq_{\text{lex}})$ é um reticulado? Como são definidos $\vee$ e $\wedge$?

(c) D_{216} é uma álgebra de Boole?

(d) Defina uma função bijetora e monótona de domínio D_{216} e contradomínio I_4^2.

1. No número dado, o último algarismo é impar, então 36267 não é múltiplo de 2.

$9 + 0 + 1 + 4 + 5 = 19$ que é primo, então 90145 não é múltiplo de 3.

O último algarismo de 90145 é 5, então o número é divisível por 5: $90145 = 18029$. O último algarismo de 18029 não pertence a $\{0, 5\}$, então 90145 não é divisível por 5^2.

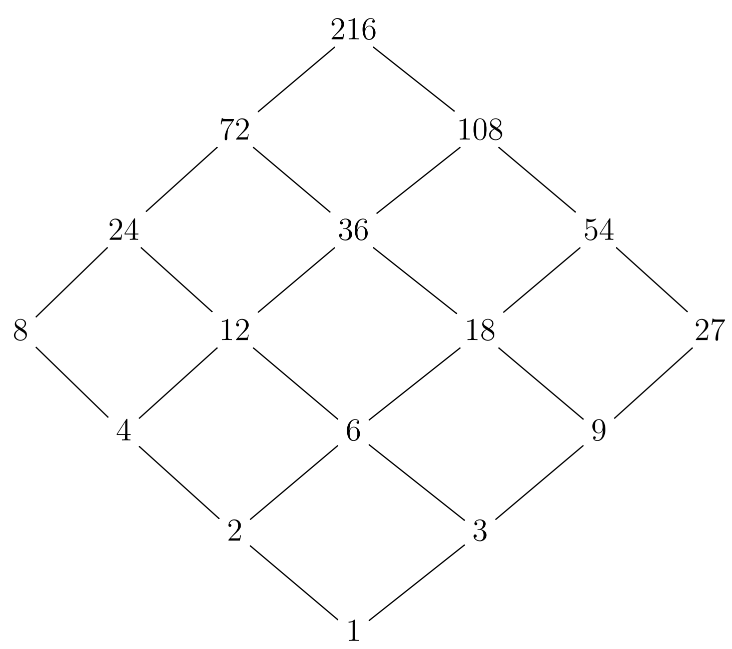
$1802 - 2 \cdot 9 = 1784$ e $178 - 2 \cdot 8 = 170 = 17 \cdot 10$, logo, 18029 não é divisível por 7.

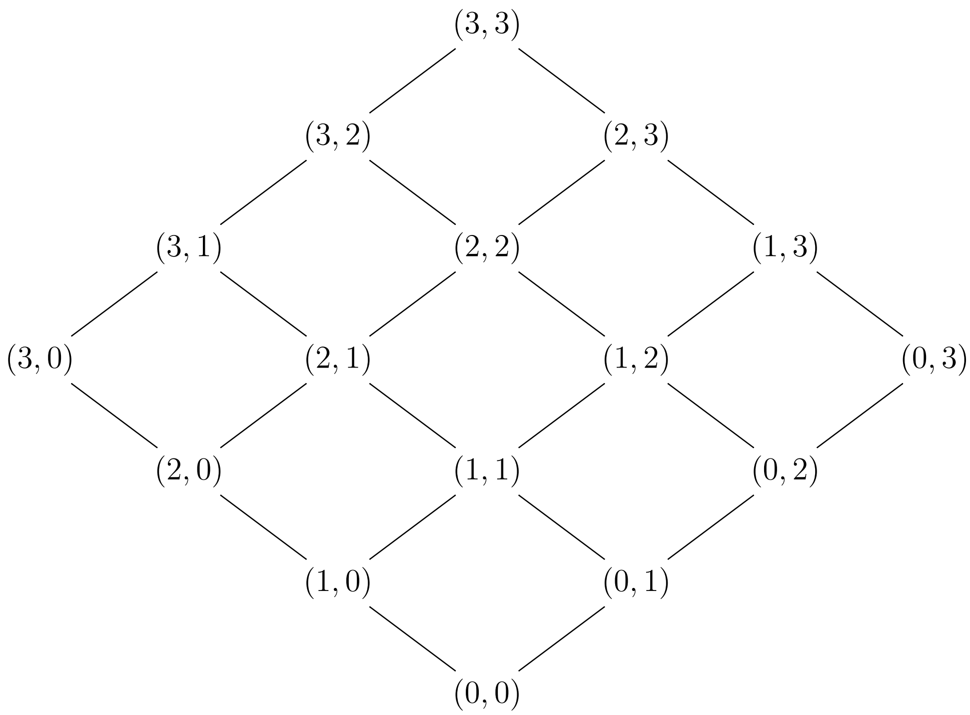
$9 + 0 + 1 - (2 + 8) = 0$, que é múltiplo de 11, então 18029 é divisível por 11: $18029 = 11 \cdot 1639$. Além disso, $9 + 6 - (3 + 1) = 11$, então 1639 também é múltiplo de 11: $90145 = 5 \cdot 11^2 \cdot 149$. Essa é a decomposição de 90145 em produto de potências de primos dois a dois distintos, pois 149 é primo pelo crivo de Eratóstenes. De fato, 149 não é múltiplo de 11, pois $9 + 1 - 4 = 6$, e de nenhum primo menor que 11. Como $\sqrt{149} < 13$, 149 é primo.

$$\begin{aligned}
&90145 = 6438 \cdot 14 + 13 \\
&6438 = 459 \cdot 14 + 12 \\
&459 = 32 \cdot 14 + 11 \\
&32 = 2 \cdot 14 + 4 \\
&2 = 0 \cdot 14 + 2;
\end{aligned}$$

segue que $(24BCD)_{14} = 90145$.

2. (a) Os diagramas de Hasse de D_{216} e I_4^2 são os seguintes:





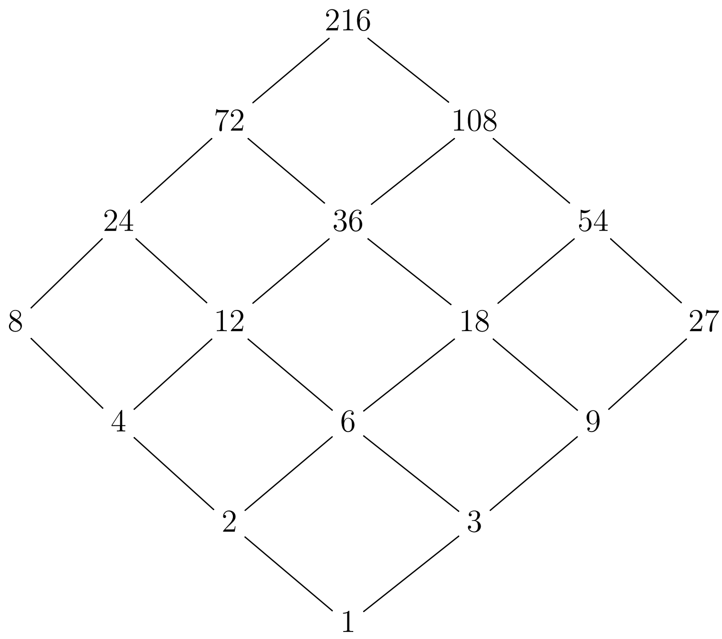
(b) I_4^2 é um reticulado, pois a ordem é definida coordenada por coordenada e, em cada coordenada, é uma ordem total. Portanto, também supremos e ínfimos são definidos coordenada por coordenada:
$$(x, y) \vee (x', y') = (\max\{x, x'\}, \max\{y, y'\})$$
$$(x, y) \wedge (x', y') = (\min\{x, x'\}, \min\{y, y'\})$$

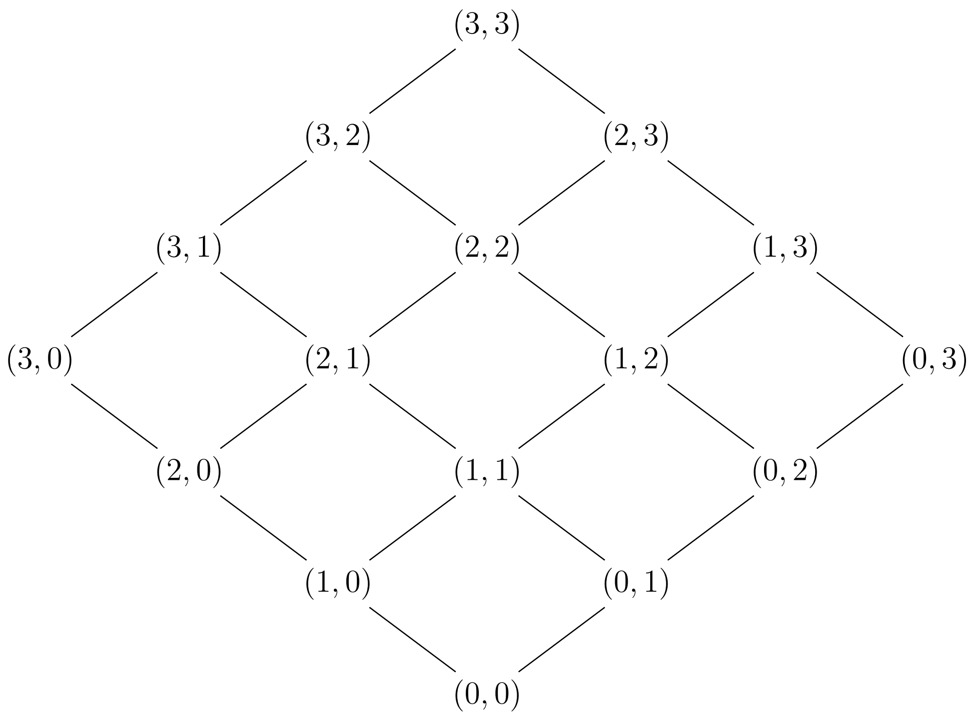
(c) $D_2 16$, apesar de ter cardinalidade potência de 2, não é uma álgebra de Boole pois, pela caracterização dos reticulados D_n que são álgebras de Boole, 216 deveria ser produto de primos dois a dois distintos, enquanto $216 = 2^3 \cdot 3^3$.

(d) Os diagramas de Hasse apresentados são sobreponíveis, o que sugere que os conjuntos ordenados seriam isomorfos.

(e) A função $f : 2^x \cdot 3^y \in D_{216} \mapsto (x, y) \in I_4^2$ é um isomorfismos de reticulados e, então de ordem.

3. (a) Os diagramas de Hasse de D_{216} e I_4^2 são os seguintes:





(b) I_4^2 é um reticulado, pois a ordem é definida coordenada por coordenada e, em cada coordenada, é uma ordem total. Portanto, também supremos e ínfimos são definidos coordenada por coordenada:

$$(x, y) \vee (x', y') = (\max\{x, x'\}, \max\{y, y'\})$$
$$(x, y) \wedge (x', y') = (\min\{x, x'\}, \min\{y, y'\})$$

(c) D_216, apesar de ter cardinalidade potência de 2, não é uma álgebra de Boole pois, pela caracterização dos reticulados D_n que são álgebras de Boole, 216 deveria ser produto de primos dois a dois distintos, enquanto $216 = 2^3 \cdot 3^3$.

(d) Os diagramas de Hasse apresentados são sobreponíveis, o que sugere que os conjuntos ordenados seriam isomorfos.

(e) A função $f : 2^x \cdot 3^y \in D_{216} \mapsto (x, y) \in I_4^2$ é um isomorfismos de reticulados e, então de ordem.