Universidade Federal da Bahia
Departamento de Matemática

Matemática Discreta II
Prof. Ciro Russo
Segunda unidade – 5 de fevereiro de 2018

Atenção: é preciso justificar todas as respostas.

1. Usando os critérios de divisibilidade e o crivo de Eratóstenes, encontre a decomposição, no produto de potências de primos, do número 36267. Encontre também a expressão na base 15 do mesmo número (algarismos: $0, \ldots, 9, A, B, C, D, E$).

2. Verifique se o seguinte sistema de equações congruenciais é solucionável e, em caso afirmativo, encontre o conjunto das soluções:

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod 7 \\ x \equiv 14 \pmod 6 \\ x \equiv 21 \pmod{11} \end{cases}.$$

3. Seja $I_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, ordenado com a ordem usual dos números naturais $\leq$, e consideremos o quadrado cartesiano I_4^2 com a ordem produto (ou seja, $(a, b) \leq (c, d)$ sse $a \leq c$ e $b \leq d$).

(a) Desenhe os diagramas de Hasse dos conjuntos ordenados $(D_{216}, |)$ e $(I_4^2, \leq)$.

(b) $(I_4^2, \leq)$ é um reticulado? Como são definidos $\vee$ e $\wedge$?

(c) D_{216} é uma álgebra de Boole?

(d) Qual relação entre esses conjuntos ordenados sugerem seus diagramas de Hasse?

(e) Se possível, defina um isomorfismo de ordem entre D_{216} e I_4^2.

1. No número dado, o último algarismo é impar, então 36267 não é múltiplo de 2.

$3+6+2+6+7 = 24 = 3 \cdot 8$, então 36267 é múltiplo de 3: $36267 = 3 \cdot 12089$. Como $1+2+0+8+9 = 20 = 2 \cdot 5$, 3^2 não divide 36267.

O último algarismo de 12089 não pertence a $\{5, 0\}$, então o número não é divisível por 5.

$1208 + 5 \cdot 9 = 1253$ e $125 + 5 \cdot 3 = 140 = 7 \cdot 20$, logo, o 36267 é divisível por 7: $36267 = 3 \cdot 12089 = 3 \cdot 7 \cdot 1727$. $172 - 2 \cdot 7 = 158$, $15 - 2 \cdot 8 = -1$ e -1 não é múltiplo de 7, então 7^2 não divide 36267.

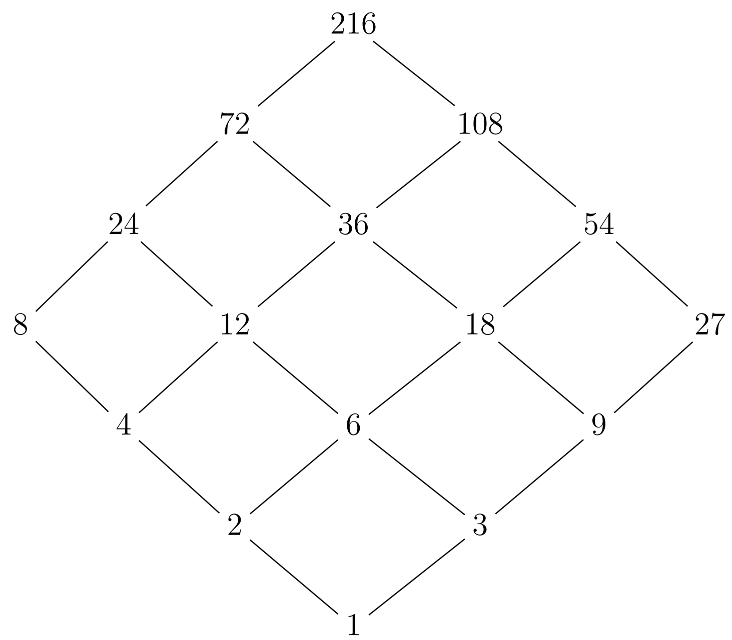
$7 + 7 - (2 + 1) = 11$, então 1727 é divisível por 11: $1727 = 11 \cdot 157$ e $36267 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 157$. $7 + 1 - 5 = 3$, então 11 não divide 157.

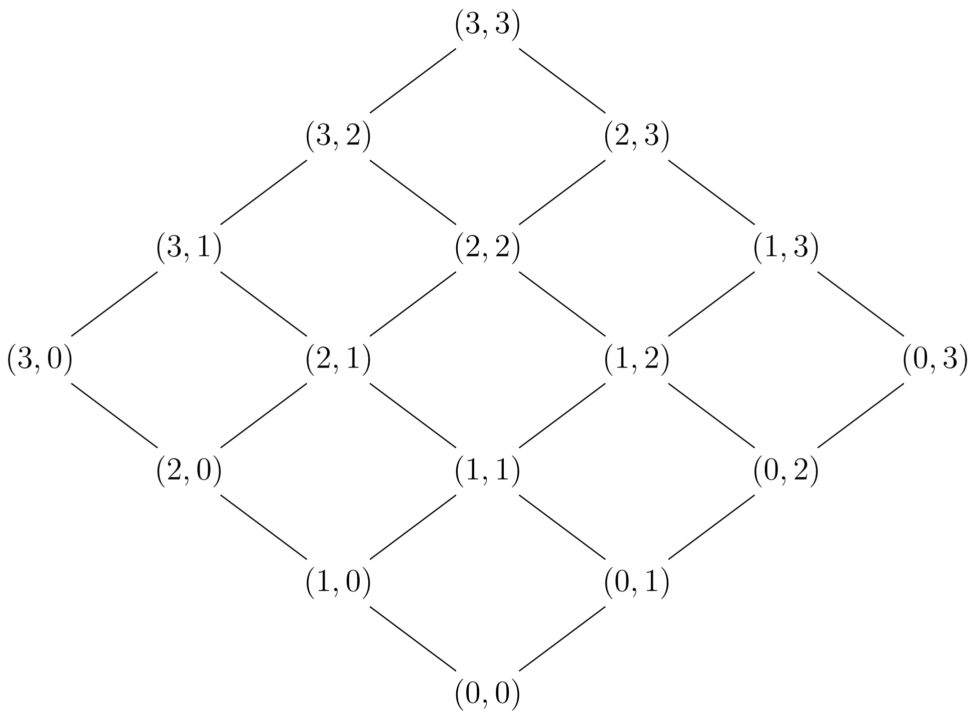
Como o primo seguinte é 13, $13^2 = 169 > 157$ e nenhum primo menor que 13 divide 157, pelo Crívo de Eratóstenes, 157 é número primo. Logo, a fatoração de 36267 em produto de potências de primos é $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 157$.

$$
\begin{aligned}
36267 &= 2417 \cdot 15 + 12 \\
2417 &= 161 \cdot 15 + 2 \\
161 &= 10 \cdot 15 + 11 \\
10 &= 0 \cdot 15 + 10;
\end{aligned}
$$

segue que $(AB2C)_{15} = 36267$.

2. (a) Os diagramas de Hasse de D_{216} e I_4^2 são os seguintes:





(b) I_4^2 é um reticulado, pois a ordem é definida coordenada por coordenada e, em cada coordenada, é uma ordem total. Portanto, também supremos e ínfimos são definidos coordenada por coordenada:

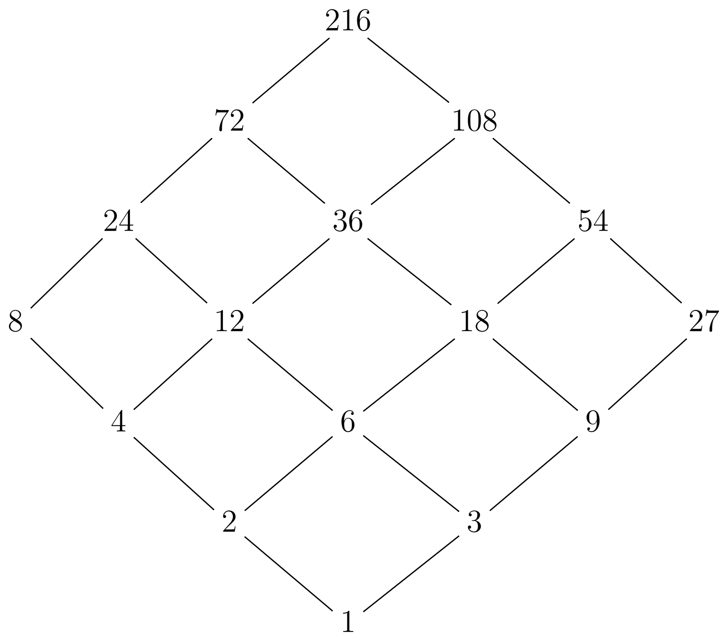
$$(x, y) \vee (x', y') = (\max\{x, x'\}, \max\{y, y'\})$$
$$(x, y) \wedge (x', y') = (\min\{x, x'\}, \min\{y, y'\})$$

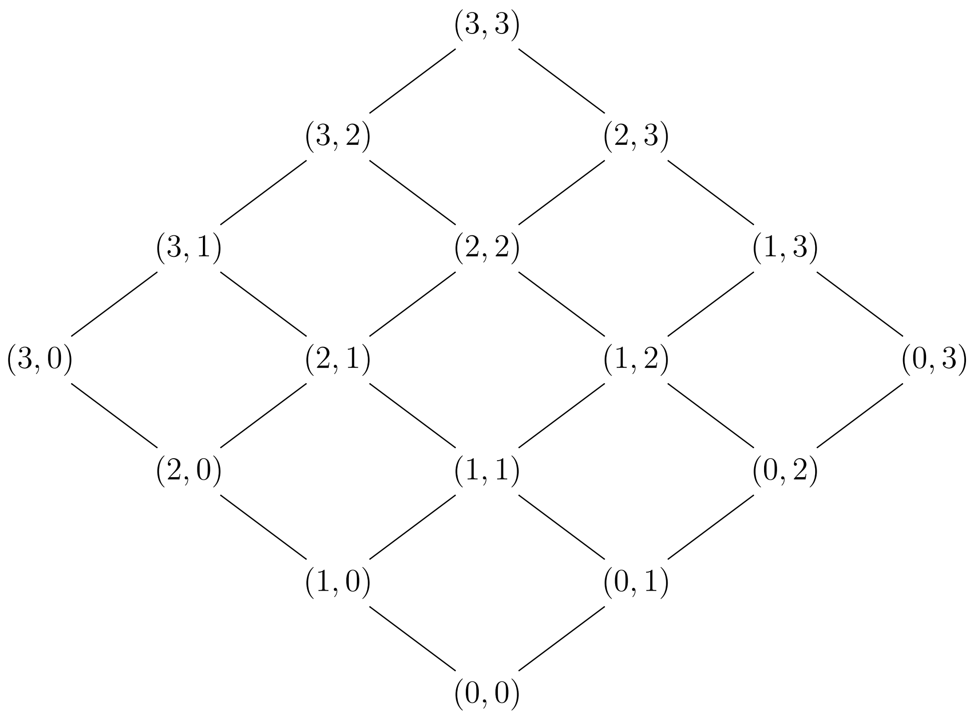
(c) D_216, apesar de ter cardinalidade potência de 2, não é uma álgebra de Boole pois, pela caracterização dos reticulados D_n que são álgebras de Boole, 216 deveria ser produto de primos dois a dois distintos, enquanto $216 = 2^3 \cdot 3^3$.

(d) Os diagramas de Hasse apresentados são sobreponíveis, o que sugere que os conjuntos ordenados seriam isomorfos.

(e) A função $f : 2^x \cdot 3^y \in D_{216} \mapsto (x, y) \in I_4^2$ é um isomorfismos de reticulados e, então de ordem.

3. (a) Os diagramas de Hasse de D_{216} e I_4^2 são os seguintes:





(b) I_4^2 é um reticulado, pois a ordem é definida coordenada por coordenada e, em cada coordenada, é uma ordem total. Portanto, também supremos e ínfimos são definidos coordenada por coordenada:

$$(x, y) \vee (x', y') = (\max\{x, x'\}, \max\{y, y'\})$$
$$(x, y) \wedge (x', y') = (\min\{x, x'\}, \min\{y, y'\})$$

(c) $D_2$16, apesar de ter cardinalidade potência de 2, não é uma álgebra de Boole pois, pela caracterização dos reticulados D_n que são álgebras de Boole, 216 deveria ser produto de primos dois a dois distintos, enquanto $216 = 2^3 \cdot 3^3$.

(d) Os diagramas de Hasse apresentados são sobreponíveis, o que sugere que os conjuntos ordenados seriam isomorfos.

(e) A função $f : 2^x \cdot 3^y \in D_{216} \mapsto (x, y) \in I_4^2$ é um isomorfismos de reticulados e, então de ordem.