$\overset{(1)}{ax+by=c}$ | $\overset{(2)}{ax \equiv c \pmod b}$, $\overset{(3)}{by \equiv c \pmod a}$

---

1) Calcular $d \in mdc(a,b)$ e verificar que divida c.

2) Se e somente se $d \mid c$, existem soluções.

3) Calcular $e = c/d$ e encontrar u e v t.q.

$au + bv = d$.

4) $aue + bve = c \Rightarrow (\overset{x_0}{ue}, \overset{y_0}{ve})$ é uma solução da equação (1)

$x_0 = ue$ é sol. da eq. (2) e $y_0 = ve$ é sol. da eq. (3).

5) $S_1 = \{(x_0 + k\frac{b}{d}, y_0 - k\frac{a}{d}) : k \in \mathbb{Z}\}$

$S_2 = \{x_0 + k\frac{b}{d} : k \in \mathbb{Z}\}$

$S_3 = \{y_0 + k\frac{a}{d} : k \in \mathbb{Z}\}$

$ax_0 \equiv c \pmod b \Leftrightarrow ax_0 - c = hb \quad (h \in \mathbb{Z})$

$$a\left(x_0 + k\frac{b}{d}\right) - c = ax_0 - c + ka\frac{b}{d} = hb + ka\frac{b}{d} = hb + k\frac{a}{d}b = \left(h + k\frac{a}{d}\right)b$$

Exercícios

$6x + 9y = 15 \quad | \quad 6x \equiv 15 \pmod 9, \quad 9y \equiv 15 \pmod 6$

$d = 3 \qquad 3 \mid 15 \qquad 15 = 3 \cdot 5$

9	6	3	0
	1	2	

$3 = 9 - 6 = 6 \cdot (\underset{u}{-1}) + 9 \cdot \underset{v}{1}$

$6 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 = 3$ mult. tudo por 5

$6 \cdot (-5) + 9 \cdot 5 = 15 \qquad (x_0, y_0) = (-5, 5)$

$S_1 = \{(-5 + k \cdot 3,\ 5 - k \cdot 2) : k \in \mathbb{Z}\}$

$S_2 = \{-5 + 3k : k \in \mathbb{Z}\} \qquad S_2 = \{5 + 2k : k \in \mathbb{Z}\}$

(x_0, y_0) $\quad ax+by=c$

Seja (x_1, y_1) outra solução da equação

$$ax_0+by_0=c \quad e \quad ax_1+by_1=c$$

$$\Rightarrow \quad a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=c-c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a(x_0-x_1)=-b(y_0-y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d\frac{a}{d}(x_0-x_1)=-d\frac{b}{d}(y_0-y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a}{d}(x_0-x_1)}=-\frac{b}{d}(y_0-y_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{d}x_0-\frac{a}{d}x_1=-\frac{b}{d}y_0+\frac{b}{d}y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{d}x_1=\frac{a}{d}x_0-\frac{b}{d}(y_0-y_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_0-\frac{b}{a}(y_0-y_1)=x_0-\frac{b}{d}\cdot\boxed{\frac{d}{a}(y_0-y_1)}$$

$$y_1=\underbrace{y_0+\frac{a}{d}\cdot\boxed{\frac{d}{b}(x_0-x_1)}}$$

$$\left(x_0+k\frac{b}{d}, y_0-k\frac{a}{d}\right) \text{ é sol. } \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$a\left(x_0+k\frac{b}{d}\right)+b\left(y_0-k\frac{a}{d}\right)=ax_0+\cancel{k\frac{ab}{d}}+by_0-\cancel{k\frac{ab}{d}}$$

$$=ax_0+by_0=c$$

$ax_0 + by_0 = c$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $a\left(x_0 + \frac{b}{d}k\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}k\right) =$

$= ax_0 + \frac{ab}{\cancel{d}}k + by_0 - \frac{ab}{\cancel{d}}k = ax_0 + by_0 = c$

$\Rightarrow \left(x_0 + \frac{b}{d}k, y_0 - \frac{a}{d}k\right)$ é solução da equação

$S = \left\{\left(x_0 + \frac{b}{d}k, y_0 - \frac{a}{d}k\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ é um conjunto de soluções da equação. $\left(\frac{a}{d} = a', \frac{b}{d} = b'\right)$

Se (x_1, y_1) é uma solução da equação, então

$ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1 \rightarrow a(x_0 - x_1) = -b(y_0 - y_1)$

$\Rightarrow a'd(x_0 - x_1) = -b'd(y_0 - y_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a'(x_0 - x_1) = -b'(y_0 - y_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x_0 - x_1 = -\frac{b'(y_0 - y_1)}{a'}}$ mas $x_0 - x_1 \in \mathbb{Z}$,

enquanto $-\frac{b'}{a'}$ não é, elviás $\boxed{mdc(b', a') = \{\pm 1\}}$,

então $y_0 - y_1$ é múltiplo de a', digamos:

$y_0 - y_1 = ka' \Rightarrow x_0 - x_1 = -b'k \Rightarrow x_1 = x_0 + b'k$

$a'(x_0 - x_1) = -b'(y_0 - y_1) \Rightarrow a'(\cancel{b'}k) = -\cancel{b'}(y_0 - y_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0 - y_1 = a'k \Rightarrow y_1 = y_0 - a'k$

Então $(x_1, y_1) = (x_0 + b'k, y_0 - a'k)$ com k inteiro qualquer.

$\in S$

$$174x - 64y = 34$$

174	64	46	18	10	8	2	0
	2	1	2	1	1	4	

$$2 \mid 34 \qquad 34 = 2 \cdot 17$$

$$a' = \frac{a}{d} = 87 \qquad b' = \frac{b}{d} = -32$$

$$2 = 10 - 8 = 46 - 2\cdot 18 - (18 - 10) = 174 - 2\cdot 64 - 3\cdot 18 + 10 =$$

$$= 174 - 2\cdot 64 - 3(64 - 46) + 46 - 2\cdot 18 = 174 - 5\cdot 64 + 4\cdot 46 - 2\cdot 18 =$$

$$= 174 - 5\cdot 64 + 4(174 - 2\cdot 64) - 2\cdot(64 - 46) = 5\cdot 174 - 15\cdot 64 + 2\cdot 46 =$$

$$= 5\cdot 174 - 15\cdot 64 + 2\cdot(174 - 2\cdot 64) = 7\cdot 174 - 19\cdot 64 \Rightarrow$$

$$174\cdot 7 - 64\cdot 19 = 2 \Rightarrow 174\cdot 119 - 64\cdot 323 = 34$$

$$(x_0, y_0) = (119, 323)$$

$$S = \{(119 - 32k, 323 - 87k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$211x + 17y = 9$$

$$211x \equiv 9 \pmod{17}, \quad 17y \equiv 9 \pmod{211}$$

$$a' = a, \quad b' = b$$

211	17	7	3	1
	12	2	2	

$$1 = 7 - 2\cdot 3 = 211 - 12\cdot 17 - 2(17 - 2\cdot 7) =$$

$$= 211 - 14\cdot 17 + 4\cdot 7 = 211 - 14\cdot 17 + 4(211 - 12\cdot 17) = 5\cdot 211 - 62\cdot 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 211\cdot 5 + 17\cdot(-62) = 1 \Rightarrow 211\cdot 45 + 17\cdot(-558) = 9$$

$$(x_0, y_0) = (45, -558) \qquad S = \{(45 + 17k, -558 - 211k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S_1 = \{45 + 17k : k \in \mathbb{Z}\} \qquad S_2 = \{-558 + 211k : k \in \mathbb{Z}\}$$