i) *Se $L > 0$, então as séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

ii) *Se $L = 0$ e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge, então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também converge.*

iii) *Se $L = \infty$ e* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge, então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também diverge.*

A demonstração desta propriedade é exercício para o leitor.

Exemplo 1.23.

Determine se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$ *converge ou diverge.*

Solução.

Seja $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ e consideremos $b_n = \dfrac{1}{2^n}$; sabe-se que a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ é convergente $\left(r = \dfrac{1}{2} < 1\right)$.

Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2}{n}\right]^n = 0.$

Pela parte **ii)** da *Propriedade* (1.18) segue que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ é convergente.

1.2 Séries de funções

As linguagens de programação de computadores fornecem certas funções tais como seno, cosseno, logaritmo, exponencial, etc.

No entanto, muitas vezes não temos a função pré-definida e recorremos ao desenvolvimento em série de potências para fazer nossos cálculos.

Na seção anterior estudamos séries de números da forma $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ onde cada a_n é um número real. Em analogia a essas séries podemos estudar séries de funções da forma $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$ onde os $a_n(x)$ são funções. Um exemplo típico desta classe de séries é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \cdots$$

Evidentemente quando substituímos um valor para x, por exemplo, $x = 2$, retornamos ao estudo da série numérica.

Nossa atenção estará centrada nas somas particulares infinitas de equações tais como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

referentes a somas de quantidades que dependem de x. Em outras palavras estamos interessados em funções definidas mediante equações da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots \tag{1.5}$$

Em tal situação $\{f_i\}$ será uma sequência de funções; para cada valor de $x = x_0$ obteremos uma sequência $\{f_i(x_0)\}$ de números reais (ou complexos).

Para analisar tais funções tem-se que lembrar que cada soma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots$$

é por definição o limite da sequência

$$f_1(x), \quad f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \quad f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots$$

Se definirmos uma nova sequência de funções $\{s_n\}$ mediante

$$s_n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_n$$

então podemos expressar mais sucintamente este fato escrevendo

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} s_n(x)$$

Assim estaremos concentrados em funções definidas como limites.

De modo natural, existem duas perguntas importantes respeito de uma série de funções.

1^a **pergunta:** Para quais valores de x a série (1.5) converge?

2^a **pergunta:** A qual função converge a série de funções (1.5) ?

Isto é, qual é a soma $f(x)$ da série ?

Para obter resposta a nossa preocupação será estudada as séries de potências.

Definição 1.6. *Série de potências.*

Uma série infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{1.6}$$

onde a_n é número que não depende de x, denomina-se série de potências de x.

Pela sua forma, a igualdade (1.6) podemos imaginar como uma função polinômica de variável x. As séries de potências de x são uma generalização da noção de polinômio.

Mais geralmente, em matemática, uma série de potências de $(x - \mathbf{c})$, (de uma variável) é uma série infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \tag{1.7}$$

onde a_n representa o coeficiente do n-ésimo termo chamado "*coeficiente da série de potência*", $\mathbf{c}$ é uma constante, e x varia entorno de $\mathbf{c}$ (por esta razão, algumas vezes a série é dita "*série centrada em* $\mathbf{c}$"). Por convenção $(x - \mathbf{c})^0 = 1$ quando $x = \mathbf{c}$. O número $\mathbf{c}$ é chamado "*centro da série*".

Note que não se trata de uma série numérica. Uma série da forma (1.7) pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores. Assim, faz sentido falar em "*domínio de convergência*", o qual denotamos por $\mathrm{D}(s)$, que é o conjunto dos valores de x que tornam a série (1.7) convergente.

Essas séries de potências aparecem primariamente em análise matemática, também ocorre em análise combinatória (sob o nome de funções geradoras) e em engenharia elétrica (sob o nome de *Transformada*-**Z**), também as séries de potências aparecem em muitos problemas da Física-Matemática, como, por exemplo, em fenômenos ondulatórios, onde recorremos as "*Funções de Bessel*".

Definição 1.7.

Chama-se domínio de convergência $\mathrm{D}(s)$ *da série de potências* (1.7) *ao conjunto dos valores reais que, substituídos na série, originam uma série numérica convergente.*

Exemplo 1.24.

O domínio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ *é* $\mathrm{D}(s) = (-1, 1)$

O valor 0 *(zero) pertence sempre ao domínio de convergência* $\mathrm{D}(s)$ *desta série, mais, para qualquer* $x \in (-1,\ 1)$ *tem-se que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ *define a função* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. *Esta é chamada "série geométrica", é um dos exemplos mais importantes de séries de potência.*

A igualdade (1.7) permite imaginar que qualquer polinômio pode ser facilmente expresso como uma série de potências entorno de um centro $x = c$, embora um ou mais coeficientes sejam iguais a zero. Como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.25.

O polinômio $p(x) = x^2 + 2x + 3$ *pode ser escrito como a série de potência entorno de* $c = 0$ *assim:*

$$p(x) = 3 + 2x + 1 \cdot x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots$$

ou entorno do centro $c = 1$ *como*

$$p(x) = 6 + 4(x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 + 0(x-1)^3 + 0(x-1)^4 + \cdots$$

ou mesmo entorno de qualquer outro centro c.

Exemplo 1.26.

São exemplos de série de potências.

- *A fórmula da função exponencial:* $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

- *A fórmula do seno:* $\text{sen}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Exemplo 1.27.

Considere-se a série: $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{2}{3})^k (x - \frac{1}{2})^k$

Para $x = 1$ *obtém-se:* $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{2}{3})^k (\frac{1}{2})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^k$ *é série convergente.*

Para $x = 3$ *obtém-se:* $\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{2}{3})^k (\frac{5}{2})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{5}{3})^k$ *é série divergente*

Para os valores de x em que a série de potências é convergente, a soma define uma função de variável x.

Observação 1.7.

- *Potências negativas não são permitidas em uma série de potências, por exemplo*

  $$1 + x^{-1} + x^{-2} + \cdots$$

  não é considerada uma série de potência (embora seja uma série de Laurent).

- *Similarmente, potências fracionais, tais como* $x^{1/2}$, *não são consideradas séries de potências (veja série de Puiseux).*

- *Existem séries de potências da forma:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k[\varphi(x)]^k = a_0 + a_1[\varphi(x)] + a_2[\varphi(x)]^2 + a_3[\varphi(x)]^3 + \cdots + a_k[\varphi(x)]^k + \cdots$$

onde $\varphi(x)$ é função de x.

Tal série é chamada de série de potência em $\varphi(x)$.

1.2.1 Raio de convergência

Dizemos que uma série de potências $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$ pode convergir para alguns valores conforme os valores tomados da variável x, e pode divergir para outros. Sempre há um número r com $0 \leq r \leq +\infty$ tal que a série converge quando $|x-c| < r$ e diverge para $|x-c| > r$.

Definição 1.8. *Intervalo de convergência.*

Chama-se intervalo de convergência da série de potências (1.7) *ao subconjunto de* $\mathbb{R}$ *de todos os valores para os quais a série converge.*

O intervalo de convergência e o domínio de convergência são sinônimos quando estudamos séries em $\mathbb{R}$; isso não acontece com as séries em $\mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 2$ neste último caso se estuda discos ou esferas de convergência, geralmente se entende como região de convergência.

O intervalo de convergência de uma série de potências pode ser de um dos seguintes tipos

$$(c-r,\ c+r) \quad \text{ou} \quad [c-r,\ c+r) \quad \text{ou} \quad (c-r,\ c+r] \quad \text{ou} \quad [c-r,\ c+r]$$

isso depende da convergência da série nos extremos.

Definição 1.9. *Raio de convergência.*

O número r que é a metade do comprimento do intervalo de convergência da série (1.7) *é chamado "raio de convergência da série de potências "*(1.7)*.*

Em casos particulares $r = +\infty$, logo a série (1.7) converge em todo $\mathbb{R}$, para o caso $r = 0$ a série de potências só converge em $x = c$.

O raio de convergência r pode ser encontrado utilizando na série dos módulos correspondentes, o critério da razão ou outro critério utilizado na determinação da natureza de uma série numérica.

Também é costume determinar o intervalo e o raio de convergência r da série de potências $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^{kn}$ usando um dos seguintes procedimentos:

1. Se $a_k \neq 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, isto é a série só tem potências positivas de $(x - c)$, então

$$r^{-1} = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \tag{1.8}$$

sempre que o limite exista.

2. Se série tem a forma $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^{kp}$ onde $p \in \mathbb{N}$ então

$$r^{-1} = \sqrt[p]{\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} \tag{1.9}$$

e a sequência dos expoentes

3. Para o caso da série de potências (1.7) tiver coeficientes iguais a zero, e a sequência dos $x - c$ que ficaram é qualquer[3], então o raio de convergência podemos determinar pela fórmula

$$r^{-1} = \lim_{k\to+\infty} sup.|a_k|^{\frac{1}{k}} \tag{1.10}$$

ou, equivalentemente,

$$r = \lim_{k\to+\infty} inf.|a_k|^{-\frac{1}{k}}$$

na qual somente se usan valores de a_k diferentes de zero. Esta fórmula também é útil nos dois primeiros casos.

4. Em todos os casos, o intervalo de convergência pode-se determinar aplicando diretamente o critério de D'Alembert ou o de Cauchy a uma série determinada pelos valores absolutos dos termos da série inicial

A série converge absolutamente para $|x - c| < r$ e converge uniformemente em todo subconjunto compacto[4] de $\{\, x \,/. \quad |x - c| < r \,\}$.

Propriedade 1.19.

O raio de convergência r de uma série de potências $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^{kn}$ *é dado por:*

- $r^{-1} = \sqrt[n]{\lim\limits_{k\to+\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$ *desde que o limite exista ou seja zero.*
- $r^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty} sup.|a_k|^{\frac{1}{kn}}$ *desde que o limite exista ou seja zero.*

Além disso,

[3] Isto é não forma uma P.G. como no caso anterior

[4] Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se diz compacto, se A é fechado e limitado

1. *Se $r = 0$, a série converge só quando $x = c$;*

2. *Se $r = +\infty$ a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;*

3. *Se $r \in (0, +\infty)$ então a série converge pelo menos para todos os valores de $x \in (c - r,\ c + r)$.*

A demonstração é exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.28.

a) *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ tem raio de convergência $r = 1$. Para $x = 1$ diverge para $+\infty$ e para $x = -1$ é oscilante.*

b) *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ tem raio de convergência $r = 1$. Para $x = 1$ diverge para $+\infty$ e para $x = -1$ converge (não absolutamente).*

c) *A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ tem raio de convergência $r = 1$. Para $x = 1$ e para $x = -1$ converge absolutamente.*

Exemplo 1.29.

Determine o raio de convergência e, o intervalo de convergência da $\sum_{k=0}^{+\infty} k!x^k$.

Solução.

Tem-se $r^{-1} = \lim_{k \to +\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \dfrac{(k+1)!}{k!} \right| = \lim_{k \to +\infty} (k+1) = +\infty$ de onde $r = 0$.
Como o raio de convergência é 0 (zero), a série dada converge apenas quando $x = 0$.

Exemplo 1.30.

Calcular o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Solução.

Tem-se $r^{-1} = \lim_{k \to +\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \dfrac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k \to +\infty} \dfrac{1}{k+1} = 0$ de onde $r = +\infty$.
O raio de convergência é $r = +\infty$, logo a série converge quando $x \in \mathbb{R}$. ■

Esta última série converge para todo $x \in \mathbb{R}$, logo podemos definir uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$.

Formalmente, derivando em relação à variável x obtém-se

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f'(x)$$

como $f(x) \neq 0$, podemos escrever $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ para logo integrando obter $\text{Ln}f(x) = x$ de onde $f(x) = e^x$.

Assim, obtivemos uma série de potências para representar a função exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exemplo 1.31.

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2}$.

Solução.

Tem-se $r^{-1} = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 1$ de onde $r = 1$.

Como o raio de convergência é $r = 1$ a série dada converge pelo menos para x tal que $|x-5| < 1$ isto é $x \in (4,\ 6)$.

Quando $x = 4$, a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4-5)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ é apenas uma série absolutamente convergente (justificar!) e por isso é convergente.

Quando $x = 6$, a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6-5)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma série de Dirichlet[5] com $p = 2$ e por isso é convergente.

Portanto, o intervalo de convergência é $[4,\ 6]$.

Propriedade 1.20.

Se a série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ *converge quando* $x_1 \neq 0$, *então converge para todo* y *tal que* $|y| < |x_1|$.

Demonstração.

Tem-se que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_1^k$ converge, logo $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k x_1^k = 0$. Aplicando a definição de limite ao infinito, tem-se que para $\epsilon = 1 > 0$ existe $M > 0$ tal que $|a_k x_1^k| < 1$ sempre que $k \geq M$

Se y é tal que $|y| < |x_1|$ então $\quad |a_k y^k| = |a_k y^k \cdot \dfrac{x_1^k}{y^k}| = |a_k y^k| \cdot |\dfrac{x_1^k}{y^k}| < \left|\dfrac{x_1}{y}\right|^k \qquad \forall k \geq M.$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x_1}{y}\right|^k$ converge, pois seu raio $r = |\dfrac{y}{x_1}| < 1$, e temos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k y^k| < \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x_1}{y}\right|^k$, pelo critério de comparação Propriedade (1.11) a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k y^k|$ converge absolutamente quando $|y| < |x_1|$.

[5]Dirichlet $1805 - 1859$ nasceu na Alemanha, foi educado na Alemanha e na França, onde foi aluno dos mais renomados matemáticos da época. Sua primeira publicação foi sobre o "Último teorema de Fermat"

Portanto, se a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge quando $x_1 \neq 0$, então converge para todo y tal que $|y| < |x_1|$.

Propriedade 1.21.

Se a série de potências $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ *diverge quando* $x_2 \neq 0$, *então diverge para todo* y *tal que* $|y| > |x_2|$.

Demonstração.

Suponhamos que a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ seja convergente, para algum x_1 tal que $|x_2| < |x_1|$, pela Propriedade (1.20) a série converge quando x_2. Isto é contradição !

Portanto, a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ diverge para todo y tal que $|y| > |x_2|$

Teorema 1.1. *de Abel.*

Seja $y = x - c$, *se temos a série* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k y^k$ *nas condições da Propriedade* (1.21) *então:*

1. *A série converge somente quando* $x = c$. ou:

2. *Existe um número* $r > 0$ *tal que a série converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x - c| < r$ *e diverge* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x - c| > r$.

Logo o intervalo de convergência será um dos intervalos:

$$(c - r,\ c + r), \quad (c - r,\ c + r], \quad [c - r,\ c + r), \quad [c - r,\ c + r]$$

Neste teorema, ao verificar o 1^o caso tem-se $r = 0$ e, se verifica o 2^o caso tem- se $r = +\infty$.

Um dos corolários do Teorema de Abel é o fato que para toda série de potências existe um intervalo de convergência $|x - c| < r$ para o qual a série de potências converge absolutamente e fora do intervalo diverge. Nos extremos do intervalo isto é em $x = c \pm r$ diversas séries de potências se comportam de um modo diferente, umas convergem absolutamente em ambos os extremos; outras convergem condicionalmente em ambos os extremos, o bem em um dos extremos convergem condicionalmente e no outro divergem; umas terceiras divergem em ambos os extremos.

Consequência deste teorema é a seguinte propriedade.

Propriedade 1.22.

Seja a série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, *então uma e somente uma das condições cumpre*

1. *A série converge só se $x = 0$.*

2. *A série converge absolutamente para todos os valores de x.*

3. *Se r é o raio de convergência da série, então a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.*

Demonstração.

1. Se $x = 0$, então $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$, a série converge.

2. Suponhamos que a série dada seja convergente para $x = x_1$, onde $x_1 \neq 0$, então a série converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |x_1|$.

Se não existe outro valor de x para o qual a série dada seja divergente, podemos concluir que a série converge absolutamente para todo x

3. Suponhamos que a série dada seja convergente para $x = x_1$, onde $x_1 \neq 0$, e divergente para $x = x_2$ onde $|x_2| > |x_1|$, então pela Propriedade (**??**) a série diverge para todos x tal que $|x| > |x_1|$.

Portanto, $|x_2|$ é um limite superior do conjunto de valores de $|x|$ para o qual a série converge absolutamente. Logo pelo Axioma do Supremo[6], este conjunto tem um supremo que é o número r.

Esta propriedade nada afirma sobre a convergência da série nos extremos do intervalo de convergência. O intervalo de convergência é o maior intervalo aberto em que a série é convergente.

Exemplo 1.32.

Determine o raio de convergência de cada uma das seguintes séries:

1. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$ 2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{5^{k+1}}$ 3. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^k}{2^k k^2}$.

Solução.

1. $r^{-1} = \sqrt{\lim\limits_{k\to++\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \sqrt{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k}\right|} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1^2 = 1.$

A série converge absolutamente se $|x| < 1 = r$. Se $x = \pm 1$ a série diverge, logo o intervalo de convergência é $(-1,\ 1)$.

2. $r^{-1} = \sqrt{\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \sqrt{\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{5^{k+2}}}{\frac{1}{5^{k+1}}}\right|} = \sqrt{\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{5^{k+1}}{5^{k+2}}\right|} = \sqrt{\left|\dfrac{1}{5}\right|} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5}.$

[6] Ver "Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$ " do mesmo autor.

$|x^2| < \sqrt{5} \Longrightarrow |x| < \sqrt[4]{5}$ = raio de conv.

3. $r^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{2^k k^2}{2^{k+1}(k+1)^2}\right| = \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad r=2 \quad\Rightarrow\quad |x-2|<2.$

$x = 4$ ou $x = 0$

A série converge absolutamente se $|x-2|<2=r$. série converge, logo o intervalo de convergência é $[0,\ 4]$.

Exemplo 1.33.

Determine o domínio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n (x-2)^{2n}$.

Solução.

Seja $k\in\mathbb{N}$, observe que, se $n=2k-1$ tem-se que $a_n=0$ e, se $n=2k$ tem-se $a_k=\left[\dfrac{n+1}{2n+1}\right]^n$. Para determinar o raio de convergência devemos usar a fórmula (1.9)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

como $|x-2|^{2^n}<2, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$, então $|x-2|^2<2$, e o raio de convergência é $r=\sqrt{2}$.

La série converge se $|x-2|<\sqrt{2}$ um estudo nos extremos leva a estudar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n(\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n 2^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{2n+1}]^n$$

Como $\lim\limits_{n=1}[1+\dfrac{1}{2n+1}]^n=\sqrt{e}\neq 0$ a série diverge. O mesmo acontece com $x=-\sqrt{2}$.

Portanto, o domínio de convergência é o intervalo $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

Exemplo 1.34.

Determine o domínio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}\frac{(x-1)^{k(k+1)}}{k^k}$.

Solução.

Aplicando a Propriedade (**??**) (critério da raiz ou de Cauchy) considerando $a_k = \dfrac{(x-1)^{k(k+1)}}{k^k}$ então

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{(x-1)^{(k+1)}}{k}, \qquad \text{logo} \qquad \lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x-1|\leq 1 \\ \infty & \text{se } |x-1|>1 \end{cases}$$

assim, a série converge quando $|x-1|\leq 1$

Portanto, a série converge em $[0,\ 2]$.

Exercícios 1-1

1. Mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge sempre que $p > 1$ e diverge se $0 \leq p \leq 1$.

2. Demonstre a condição de Cauchy: Se $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ é uma sequência de números reais, a série $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ é convergente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $|s_m - s_n| < \varepsilon$ sempre que $m,\ n > n_0$.

3. Determine a convergência das séries: **1.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{9\sqrt{n} - 1}{n^2 + 3,n}$

   2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\text{Ln}(n+1)}$

4. Suponhamos temos uma série de termo geral a_n de modo que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Demonstre que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ também converge.

5. Verificar que o produto infinito $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ com $a_n > 0$ converge sempre $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

6. Demonstre que se $\{a_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ é uma sequência com $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{\in\mathbb{N}^+}$ é limitada.

7. Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre o seguinte:

   1. Se as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ são convergentes, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n$ também convergem.

   2. Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e convergente e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

   3. Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente e $\beta \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \beta \cdot a_n$ é também divergente.

8. Critério de comparação: Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Demonstre o seguinte:

1. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

2. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e $a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}^+$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também diverge.

9. Demonstre que, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente e: $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

10. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries absolutamente convergentes, demonstre o seguinte:

1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente.

2. O produto $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente, e:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big)$$

11. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tais que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries e $|a_n| \leq K|b_n|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+, \quad K > 0$:

1. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é absolutamente convergente.

2. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é absolutamente convergente.

12. Demonstre que uma série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é absolutamente convergente, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente.

13. Critério de Leibniz: Seja a série alternada $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ uma série de termos alternados, com $a_n \geq 0$. Demonstre que esta série que satisfaz as condições:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ é decrescente. **2.** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

14. Critério D'Alembert's: Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$ e suponhamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \in \mathbb{R}$. Demonstre o seguinte:

    1. Se $r < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

    2. Se $r > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

15. Critério de Cauchy: Suponhamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$. Demonstre o seguinte:

    1. Se $r < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

    2. Se $r > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

16. Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponhamos que f seja não negativa e monótona decrescente; isto é:

    1. $f(x) \geq 0, \ \forall\, x \geq 1.$ **2.** $f(x) \geq f(y)$, sempre que $1 \leq x \leq y$.

    Nessas condições, demonstre que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente se e somente se, a integral $\int\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ for convergente.

17. Consideremos a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponhamos que $f(x)$ seja não negativa e monótona decrescente. Demonstre que se a integral $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge, e: $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx.$

18. Critério de comparação no limite: Sejam $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos e seja $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

    1. Se $L > 0$, então as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

    2. Se $L = 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

3. Se $L = \infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge.

19. Determine os intervalos de convergência para as seguintes séries de potências:

1. $2x + \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + \frac{128}{7}x^7 + \cdots$ **2.** $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2^3 \cdot 5} + \cdots$

3. $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$

20. Calcule o raio de convergência das seguintes séries de potências:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ **4.**

21. Encontre a região de convergência das seguintes séries de potências:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ **2.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left[\frac{x}{2}\right]^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\mathrm{Ln}(n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Ln}n}{n+1} (x-5)^n$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

22. Determine o maior intervalo aberto em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ é convergente.

23. Determine a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{2n+1}\right]^n (x-2)^n$

24. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ é convergente em $\mathbb{R}$.

25. Considere a série de potências $\sum_{n-0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$; com $a \in \mathbb{R}^+$:

1. Determine o raio de convergência da série e estude a sua natureza nos extremos do intervalo de convergência.

2. Considere a série numérica que se obtém fazendo $x = -3$. Justifique que existe um único valor de a para o qual a série numérica correspondente é simplesmente convergente e determine-o.

1.3 Desenvolvimento em séries de potências

Seja a um número real (não nulo) e considere-se a sequência $u_k = a^k, \quad k \in \mathbb{N}$.

Considere-se uma nova sequência, obtida de u_k, a qual designamos por S_n, de tal modo que para cada n é a soma dos $n+1$ primeiros termos de u_k, onde $k = 0$ até $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

Embora é imediato compreender o seu significado (soma dos $n+1$ primeiros termos da sequência u_k), tal como a sequência S_n esta escrita, não nos revela muito sobre o seu comportamento. Esta sequência S_n é limitada? É convergente?

Podemos então tentar escrevê-la de outra forma.

$$S_n = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n = a^0 + a(1 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}) = 1 + aS_{n-1}$$

também

$$S_n = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n = (a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}) + a^n = S_{n-1} + a^n$$

deste modo $\quad S_{n-1} + a^n = 1 + aS_{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_{n-1} = \dfrac{1 - a^n}{1 - a} \quad$ se $\quad a \neq 1$, sabemos que

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |a| < 1 \\ \infty & \text{se} \quad |a| \geq 1 \end{cases}$$

Assim, $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{se} \quad |a| < 1 \\ \infty & \text{se} \quad |a| \geq 1 \end{cases}$.

Portanto, $\quad \displaystyle S = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k \right] = \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = \frac{1}{1-a} \quad$ se $|a| < 1$

Logo desenvolvemos $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ em série de potências de x entorno de $x = 0$, obtendo, para $|x| < 1$, a soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Deste desenvolvimento obtemos outros. Escrevamos então o mesmo desenvolvimento mas em ordem a uma nova variável y:

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \quad \text{se} \quad |y| < 1 \tag{1.11}$$

Suponhamos que dada uma constante c, $\quad y = x - c$, então podemos escrever

$$g(x) = \frac{1}{1-(x-c)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(x-c)^n \quad \text{se} \quad |x-c| < 1$$

Admitindo que no interior do intervalo de convergência de uma série de potências de x, a derivada da série é igual à série das derivadas e que a primitiva da série é igual à série das primitivas. Isto vai-nos permitir obter desenvolvimentos em série de potências de x como por exemplo para funções $\text{Ln}(1+x)$ e $\arctan(x)$.

De fato, quando $y = -x$, na igualdade (1.11) tem-se

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad \text{se} \quad |x| < 1$$

logo

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n dx \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{se} \quad |x| < 1$$

Quando $y = -x^2$, na igualdade (1.11) tem-se

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{se} \quad |x^2| < 1$$

logo

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} dx \quad \Rightarrow \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + C \quad \text{se} \quad |x^2| < 1$$

1.3.1 A função exponencial

Podemos admitir que uma maneira de definir a função exponencial é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{1.12}$$

que faz sentido para todo número x real, ou melhor, como a série (1.12) em questão converge para todo número real x então define um função de domínio $\mathbb{R}$. A essa função de x chamamos "*função exponencial de x*".

Lembrar que graças à Propriedade (1.14), se existe o limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |r| < 1$

então a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

converge absolutamente para todo x em $(c-r, c+r)$ e diverge para todo x no intervalo $(-\infty, c-r) \cup (c+r, +\infty)$ a convergência em $x = r$ tem que ser averiguada para cada caso específico de a_n.

Nesta abordagem informal, introduzamos a variável xi na definição (1.12) acima de exponencial (onde $i^2 = -1$). Sabe-se que:

$$i^0 = 1, \ \ i^1 = i, \ \ i^2 = -1, \ \ i^3 = -i, \ \ i^4 = 1, \ \ i^5 = i, \ \ i^6 = -1, \ \ i^7 = -i, \cdots$$

assim, $i^{2k} = (-1)^k, \quad i^{2k+1} = (-1)^k i, \quad k \in \mathbb{N}$. então

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(xi)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(xi)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(xi)^{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

lembrando que $e^{ix} = \cos x + i\text{sen}x$ segue:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \qquad \text{e} \qquad \text{sen}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \tag{1.13}$$

Como podemos observar, para determinar a soma de séries de potências, é comum partir de uma das seguintes séries:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Através de processos como substituição de variáveis, multiplicação, integração e diferenciação, efetuados em ambos os membros da igualdade, é possível chegar à série cuja soma queremos determinar.

Exemplo 1.35.

Calcular o limite $\quad L = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right]$.

Solução.

Tem-se $\quad \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x = \dfrac{(\text{sen}x - x\cos x)(\text{sen}x + x\cos x)}{x^2\text{sen}^2 x}$.

Por outro lado $\quad \text{sen}x - x\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - x \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$, isto é

$$\text{sen}x - x\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!}\right]\cdot x^{2n+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{-2n\cdot(-1)^n}{(2n+1)!}\right]\cdot x^{2n+1}$$

também

$$\text{sen}x + x\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!}\right]\cdot x^{2n+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{2(n+1)\cdot(-1)^n}{(2n+1)!}\right]\cdot x^{2n+1}$$

Logo

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{-2n\cdot(-1)^n}{(2n+1)!}\right]x^{2n+1}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{2(n+1)\cdot(-1)^n}{(2n+1)!}\right]x^{2n+1}}{x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}}\right] = \frac{2}{3}$$

Exemplo 1.36.

Calcular o limite $\quad L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \text{sen}x}$.

Solução.

Das igualdades (1.12) e (1.13) em séries de potências temos

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \text{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{2[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n] - 2 - 2x - x^2}{x - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n+1)!}(x)^{2n+1}} =$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \cdots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots} = 2$$

Portanto, $\quad L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \text{sen}x} = 2.$

1.4 Operações com série de potências

Cada série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ define uma função f

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{1.14}$$

o domínio da função f é o intervalo de convergência da série.

Consequência do Teorema de Abel (Teorema (1.1) é que qualquer função definida por uma série de potências de $x-c$, com raio $r > 0$, é indefinidamente derivável em $(c-r, c+r)$ e as suas derivadas podem ser calculadas derivando a série termo a termo.

Propriedade 1.23.

Dada uma série de potências como em (1.14) cujo raio de convergência é $r \neq 0$, então sua função derivada é definida por $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ em cada número x do intervalo aberto $(-r, r)$.

A demonstração é exercício para o leitor.

Observação 1.8.

Se o raio de convergência da série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $r > 0$, então r também é o raio de convergência da série $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

Propriedade 1.24.

Dada uma série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cujo raio de convergência é $r \neq 0$, então para $|x| < r$ tem-se:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Demonstração.

Sejam $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ então pela Propriedade (1.23) $g(t)$ tem o mesmo raio de convergência de $f(t)$ e $g'(x) = f(x)$. Como $g(0) = 0$, pelo teorema fundamental do cálculo integral segue que

$$\int_0^x f(t)dt = g(x)$$

∎

As Propriedades (1.23) e (1.24) apresentam vários aspectos. Afirmam que f é derivável e integrável e implica que o raio de convergência da série derivada e integrada é o mesmo raio de convergência da série original (não afirma nada respeito dos extremos do intervalo de convergência).

Exemplo 1.37.

Obter uma representação em série de potências para $\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Solução.

Sabemos pela igualdade (1.11) que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\,, \qquad \text{se} \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow$$

derivando respeito de x segue

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots\,, \qquad \text{se} \quad |x| < 1$$

Portanto, $\displaystyle \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$

Exemplo 1.38.

Verificar que $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$

Solução.

Sabe-se que se $f(x) = e^x$, então sua derivada $f'(x) = e^x = f(x)$.

Seja $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$

Portanto, $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$ ■

O teorema a seguir é uma complementação das Propriedades (1.23) e (1.24).

Teorema 1.2.

Seja a série $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *com raio de convergência* r*, isto é, a série converge no intervalo aberto* $(a-r, a+r)$*. Então, definindo* $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ *tem-se que:*

1. $f(x)$ *é contínua em* $(c-r, c+r)$.

2. *Existe* $f'(x)$ *tal que* $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n(x-c)^{n-1}$

3. *Existe* $h(x)$ *tal que* $\displaystyle h(x) = \int \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n\Big)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1}$

A demonstração é exercício para o leitor.

Exemplo 1.39.

Determine uma representação em séries de potências para o $\arctan x$

Solução.

Sabe-se que $\dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n$ quando $|y| < 1$. Considerar $y = -t^2$, logo

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + t^n + \cdots)dt, \qquad |-x^2| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots, \qquad |x| < 1$$

Propriedade 1.25.

Sejam $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *e* $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *convergentes em* $|x| < r$. *Ao se realizar operações de adição, subtração e multiplicação com estas séries como se forem polinômios, então a série resultante converge em* $|x| < r$ *e representa;* $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ *e* $f(x) \cdot g(x)$ *respectivamente. Quando* $b_0 \neq 0$ *o resultado também vale para a divisão, sendo* $|x|$ *suficientemente pequeno.*

A demonstração deste teorema é exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.40.

Multiplicar a série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ *com o desenvolvimento em série de* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *para obter uma série de potências de* $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Solução.

Sabe-se que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ sempre que $|x| < 1$, e sejam

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + x^3 = \cdots + x^n + \cdots; \qquad |x| < 1, \qquad a_n = 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + x^3 = \cdots + x^n + \cdots; \qquad |x| < 1, \qquad b_n = 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

logo $f(x) \cdot g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = n + 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Então pela Propriedade (1.25)

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad |x|<1$$

Exemplo 1.41.

Determine uma série de potências para $e^{\arctan x}$.

Solução.

Sabe-se que $e^y=1+y+\dfrac{y^2}{2!}+\dfrac{y^3}{3!}+\dfrac{y^4}{4!}+\cdots$. De onde

$$e^{\arctan x}=1+\arctan x+\frac{(\arctan x)^2}{2!}+\frac{(\arctan x)^3}{3!}+\frac{(\arctan x)^4}{4!}+\cdots=$$

$$=1+(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)+\frac{(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)^3}{3!}+\cdots$$

logo

$$e^{\arctan x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\cdots$$