Seja $(S, \leq)$ um poset. Para qualquer $X \subseteq S$, a relação $\leq_X = \leq \cap X^2$, em X, é uma ordem em X, dita <u>herdada</u> ou <u>induzida</u> por aquela de S.

$X \subseteq S$, $\quad u_S(X) = \{y \in S : \forall x \in X (x \leq y)\}$ cotas superiores ou majorantes

$\quad\quad l_S(X) = \{y \in S : \forall x \in X (y \leq x)\}$ cotas inferiores ou minorantes.

$\bar{x} = \max X$ sse $\bar{x} \in X \cap u_S(X)$ e

$x' = \min X$ sse $x' \in X \cap l_S(X)$.

$\sup_S X = \min u_S(X)$ e $\inf_S X = \max l_S(X)$

extremo superior de X em S — extremo inferior de X em S.

$\sup_S X$ e $\inf_S X$ não necessariamente existem, assim como $\max X$ e $\min X$.

Se $\exists \max X \Rightarrow \exists \sup_S X = \max X$ e se $\exists \min X \Rightarrow \exists \inf_S X = \min X$.

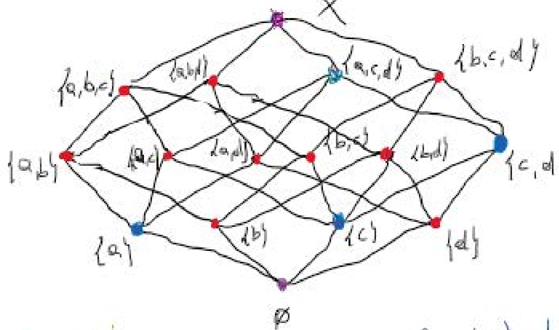
<u>Obs.:</u> Podem existir $\sup_S X$ ou $\inf_S X$ sem que existam, respectivamente, $\max X$ ou $\min X$.

<u>Def.</u> Um elemento x de S é dito:

- <u>maximal</u> se $\forall y \in S (x \leq y \Rightarrow x = y)$, ou seja, $\nexists y \in S (x < y)$;
- <u>minimal</u> se $\forall y \in S (y \leq x \Rightarrow x = y)$, ou seja, $\nexists y \in S (y < x)$.

Exemplos $X=\{a,b,c,d\}$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$$A = \{\{a\},\{c\},\{c,d\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



$$u_{\mathcal{P}(X)}(A) = \{\{a,c,d\}, X\} \qquad l_{\mathcal{P}(X)}(A) = \{\emptyset\}$$

$$\sup_{\mathcal{P}(X)} A = \min u_{\mathcal{P}(X)} A = \{a,c,d\} \qquad \inf_{\mathcal{P}(X)} A = \min l_{\mathcal{P}(X)} A = \emptyset$$

$$A \cap u_{\mathcal{P}(X)}(A) = \emptyset \Rightarrow \nexists \max A$$

$$A \cap l_{\mathcal{P}(X)}(A) = \emptyset \Rightarrow \nexists \min A$$

maximais de A: $\{a\}$ e $\{c,d\}$

minimais de A: $\{a\}$ e $\{c\}$

Em $\mathcal{P}(X)$, $\sup_{\mathcal{P}(X)} A = \bigcup_{Y\in A} Y$ e $\inf_{\mathcal{P}(X)} A = \bigcap_{Y\in A} Y$

Em $(\mathbb{N}, |)$, seja $A = \{15, 12, 3, 21\} = \{3\cdot 5, 3\cdot 2^2, 3, 3\cdot 7\}$

Um $x\in\mathbb{N}$ é cota superior de A sse $y|x \ \forall y\in A$ e, então, sse:

$3\cdot 5|x$, $3\cdot 2^2|x$, $3|x$, $3\cdot 7|x$ sse $3|x$, $2^2|x$, $5|x$, $7|x$ sse

sse $420|x$. Logo, $u_{\mathbb{N}}(A)=\{x\in\mathbb{N} : 420|x\} = \{420\cdot k : k\in\mathbb{N}\}$

Um $x\in\mathbb{N}$ é cota inferior de A sse $x|3\cdot 5$, $x|3\cdot 2^2$, $x|3$ e $x|3\cdot 7$

Logo, $l_{\mathbb{N}}(A) = \{1, 3\}$

$\sup_{\mathbb{N}} A = \min u_{\mathbb{N}}(A) = 420 \notin A \Rightarrow \nexists \max A$ | maximais de A: $12, 15, 21$

$\inf_{\mathbb{N}} A = \max l_{\mathbb{N}}(A) = 3 \in A \Rightarrow 3 = \min A \Rightarrow 3$ é único minimal

(Se $\exists \min X \Rightarrow \min X$ é o único minimal de X.
Se $\exists \max X \Rightarrow \max X$ é o único maximal de X)

Não valem os $\Leftarrow$ destes

Em $(\mathbb{N}, |)$, seja $B = \{3\} \cup \{2^n : n\in\mathbb{N}\}$

Este conjunto <u>não tem máximo</u> pois $u_{\mathbb{N}}(B) = \{0\}$ e $0\notin B$. $\sup_{\mathbb{N}} B = 0$.

B tem mínimo: $1 = \min B$, pois $l_{\mathbb{N}}(B) = \{1\}$ e $1\in B$. (1 é tb. o único minimal)

O único maximal de B é 3 mas ele não é o máximo de B.

Em $(\mathbb{N}, |)$, $\sup_{\mathbb{N}} X = \text{mmc}\, X$ e $\inf_{\mathbb{N}} X = \text{mdc}\, X$

$$\sup_S X = x' \quad \text{sse} \quad \underbrace{\forall x\in X\,(x\le x')}_{x'\in \mathcal{M}_S(X)} \;\wedge\; \underbrace{\forall y\in S\,\big(\forall x\in X\,(x\le y)\to x'\le y\big)}_{x'=\min \mathcal{M}_S(X)}$$

e

$$\operatorname{mcm}\{a,b\} = m \quad \text{sse} \quad a\mid m \wedge b\mid m \;\wedge\; \forall n\in\mathbb{N}\,\big((a\mid n \wedge b\mid n)\to m\mid n\big)$$

$$\operatorname{mcm} X = m \quad \text{sse} \quad \forall x\in X\,(x\mid m) \;\wedge\; \forall n\in\mathbb{N}\,\big(\forall x\in X\,(x\mid n)\to m\mid n\big)$$

$$\inf_S X = x'' \quad \text{sse} \quad \forall x\in X\,(x''\le x) \;\wedge\; \forall y\in S\,\big(\forall x\in X\,(y\le x)\to y\le x''\big)$$

$$\operatorname{mcd} X = d \quad \text{sse} \quad \forall x\in X\,(d\mid x) \;\wedge\; \forall n\in\mathbb{N}\,\big(\forall x\in X\,(n\mid x)\to n\mid d\big)$$

Um poset $(S, \leq)$ é **bem ordenado** se todo subconjunto não vazio de S tem mínimo.
Neste caso, $\leq$ é dita **boa ordem**.

Se $\leq$ é uma boa ordem, $\forall x, y \in S$, $\exists \min\{x, y\}$. Se $x = \min\{x, y\}$, então $x \leq y$; se $y = \min\{x, y\}$, então $y \leq x$. Logo, $\leq$ é ordem total.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ é totalmente ordenado mas não bem ordenado.

$(\mathbb{N}, \leq)$ é bem ordenado.

$(S, \leq)$ é um **reticulado** se $\forall x, y \in S$ $\exists \inf_S\{x, y\}$ e $\exists \sup_S\{x, y\}$.

Neste caso, denotaremos por $x \vee y$ o sup de x e y e por $x \wedge y$ o inf de x e y.

<u>Exemplos</u> Todo conjunto totalm. ordenado é um reticulado, pois

$\forall x, y$, $x \leq y$ ou $y \leq x$ e, então, $\exists\, x \vee y = \max\{x, y\}$ e $\exists\, x \wedge y = \min\{x, y\}$.

$(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado pois $\forall x, y \in \mathbb{N}$ $\exists$ mdc(x, y) e mmc(x, y)

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um reticulado pois $\forall Y, Z \in \mathcal{P}(X)$, $\exists\, Y \cup Z \in \mathcal{P}(X)$ e
$\exists\, Y \cap Z \in \mathcal{P}(X)$.

$B = \{3, 12, 15, 21\} \subseteq \mathbb{N}$ com a rel. $|$ não é reticulado,

pois $\nexists$ $\mathrm{mdc}_B(12, 15)$.

$(S, \leq)$ poset e $(X, \leq_X)$ subconjunto de S com a relação herdada por S.

Se S é $\begin{Bmatrix} \text{totalmente} \\ \text{bem} \end{Bmatrix}$ ordenado, então X é $\begin{Bmatrix} \text{totalm.} \\ \text{bem} \end{Bmatrix}$ ordenado

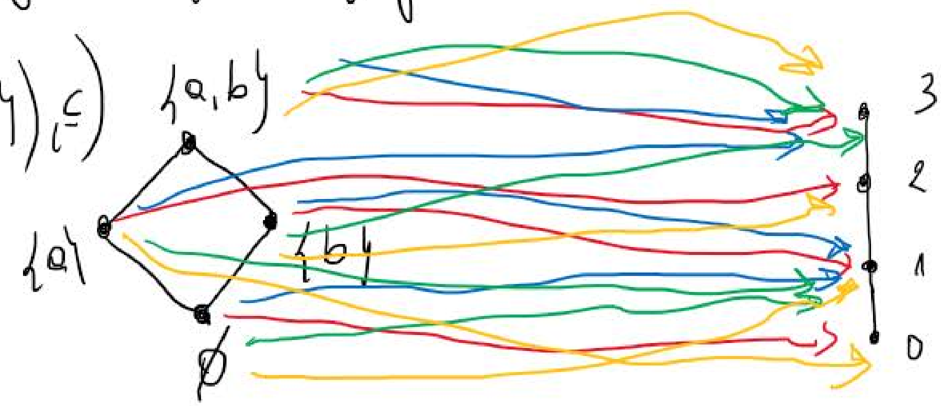
Se S é reticulado, X não é necessariamente reticulado.

<u>Def.</u> Sejam $(S,\leq)$ e $(T,\leq)$ posets.

Uma função $f:S\to T$ é monótona se $\forall x,y\in S$,

$$x\leq y \to f(x)\leq f(y).$$

<u>Exemplos</u> $(\mathcal{P}(\{a,b\}),\subseteq)$



$(\{0,\dots,3\},\leq)$

monótonas

não monótona pois $\emptyset\subseteq\{a\}$ mas $1\not\leq 0$.

Uma função constante é sempre monótona.

$\forall x,y\in S$, $f(x)=f(y)$. Logo, se $x\leq y$, $f(x)\leq f(y)$.