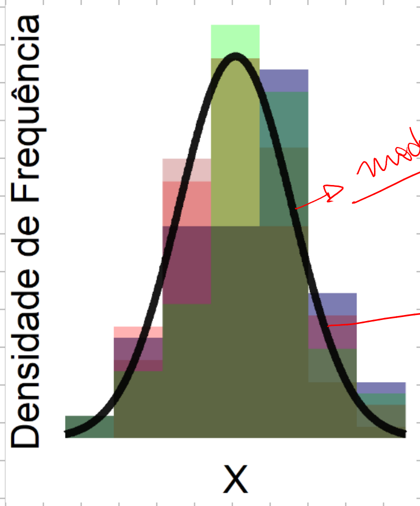
Variável Aleatória Contínua



- Para cada amostra, temos um histograma! de msm tamanho
- Existe uma curva que aproxima bem todos histogramas!
- Esta curva é chamada de função densidade ou função densidade de probabilidade.

função densidade ou função densidade de probabilidade //

fdp

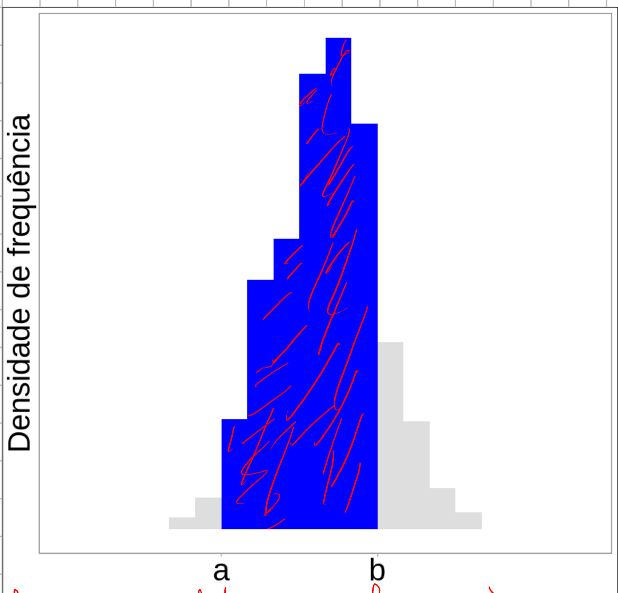
Variável quantitativa contínua

Para Amostra: Densidade de Frequência

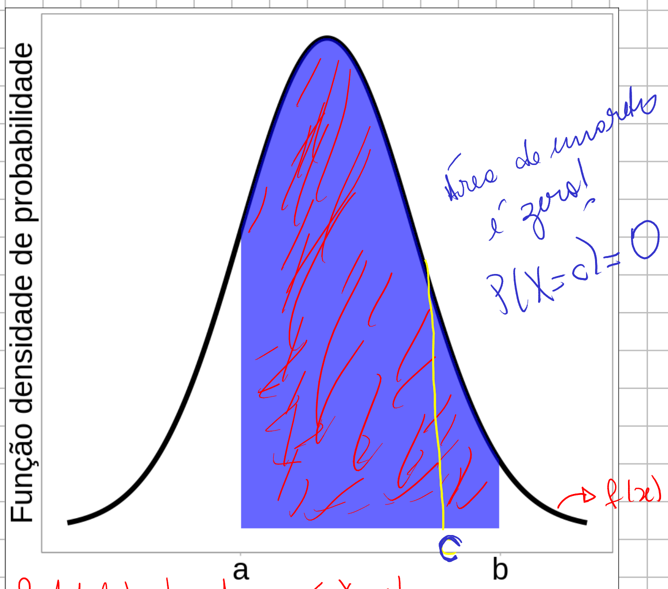
Variável aleatória contínua

Probabilidade = Frequência relativa na População

Para população: Função densidade de probabilidade



frequência relativa na faixa [a,b)



Probabilidade de $a < X < b$

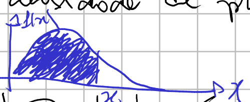
$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P(X=a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b)$$

Nomenclatura: $X: \Omega \to \mathbb{R}$

- Suporte: $X(\Omega) = \mathcal{X}$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{X} \\ 0, & x \notin \mathcal{X} \end{cases}$
- Função densidade de probabilidade: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$



- Função de Distribuição Acumulada: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$
- Pelo Teorema fundamental do Cálculo: $F'(x) = f(x), x \in \mathcal{X}$

Para especificar X, precisamos fornecer o suporte, a função densidade de probabilidade ou a função de distribuição Acumulada

Distribuição Exponencial: $X \sim Exp(\alpha)$, α = taxa de decaimento

$\alpha = \frac{1}{\mu}$; μ: tempo médio de ocorrência (na população)

Quando usar: Tempo até a ocorrência ↳ Quebra de máquina; morte; queima de lâmpada; tempo até ser atendido

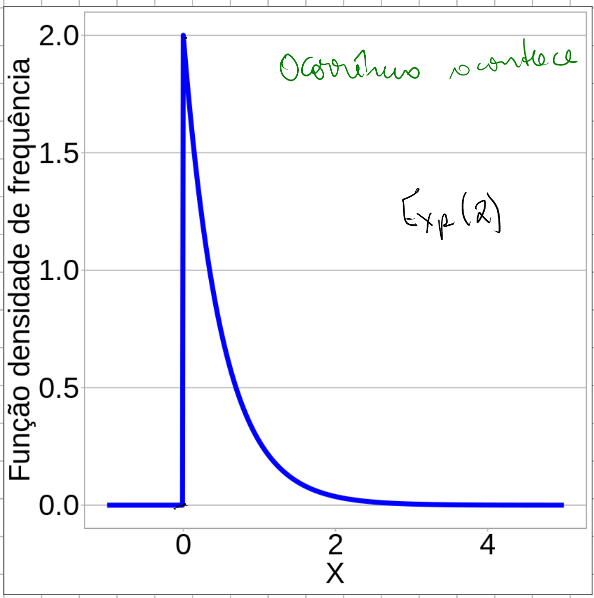
Suporte: $\mathcal{X} = [0, \infty)$

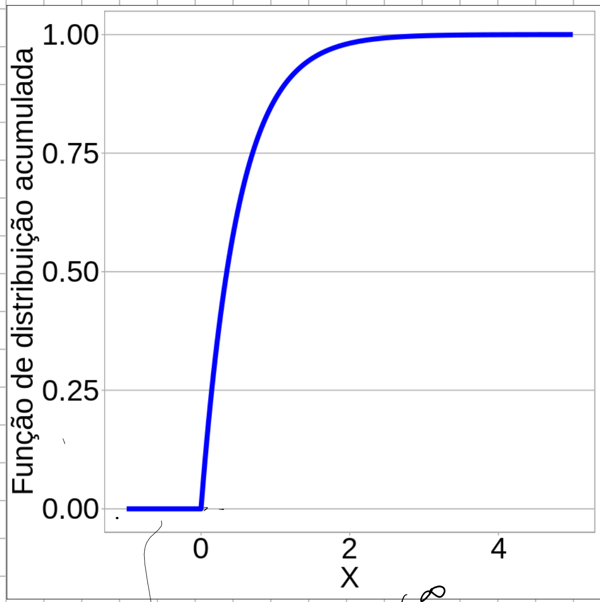
Função Densidade: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0. \end{cases}$

Função de Distribuição Acumulada: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha u}\,du = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0. \end{cases}$

Função Densidade de Probabilidade

Função de Distribuição Acumulada





Média: $\mu = \int x f(x)\,dx$; $\mu = 1/2$; Variância: $\sigma^2 = \int (x-\mu)^2 f(x)\,dx$; $\sigma^2 = \mu$; Desvio Padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Mediana: $Md = -\frac{\ln(0,5)}{\alpha}$, Quantil de ordem p: $Q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\alpha}$

$\hookrightarrow$ Resolver $\int_{-\infty}^{Q(p)} f(x)\,dx = p$

Distribuição Normal

Quando usar: { • Valores da população estão concentrados em torno da média
• Valores longe da média são menos prováveis

$X \sim N(\mu; \sigma^2)$

Suporte: $X = \mathbb{R}$

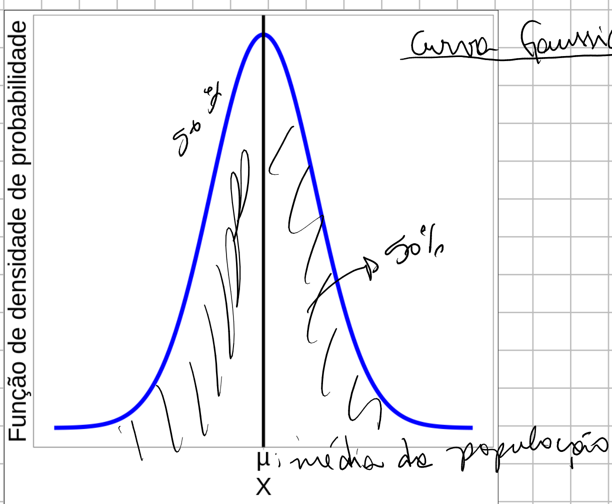
Função densidade de probabilidade: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$

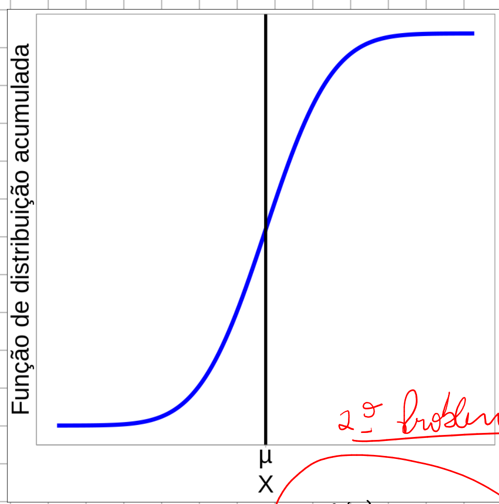
Função de distribuição Acumulada: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \rightarrow$ Método Numérico!

Função densidade de probabilidade

Função de distribuição acumulada

1º problema





2º problema

Média: μ; Variância: σ^2; Desvio Padrão: σ; Mediana: μ; Quantil de ordem p: $Q(p) \,\Big|\, \int_{-\infty}^{Q(p)} f(u)\,du = p.$

Tabela de distribuição normal:

• Calcular $F(x)$
• Encontrar quantis

Resolução os problemas 1 e 2:

• Recursos computacionais
• Usar uma tabela! (1930)

Tabela para $P(Z \leq z) = \Phi(z), z \geq 0$. $Z \sim N(0,1)$

$X \sim N(5,3)$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051

parte inteira e 1ª casa decimal

e 2ª casa decimal

$F(7) = 0{,}875893461$

$Q(0,68) = 5{,}810078083$

Dá pra provar: $\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z} \sim N(0,1)$ | $F(7) = P(X \leq 7) = P\left(\frac{X-5}{\sqrt{3}} \leq \underbrace{\frac{7-5}{\sqrt{3}}}_{z}\right) = P(Z \leq 1,15)$

$F(7) = 0,8749$

$P(X \leq Q(0,68)) = 0,68 \Rightarrow P\left(\frac{X-5}{\sqrt{3}} \leq \frac{Q(0,68)-5}{\sqrt{3}}\right) = 0,68$ |

$Q(0,68) = 5{,}81406388$

$\frac{Q(0,68)-5}{\sqrt{3}} = 0,47$

$Q(0,68) = 0,47 \cdot \sqrt{3} + 5 =$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ | Ideia: conectar probabilidade c/os dados | Variável aleatória.

- $X(\Omega) = \mathcal{X}$: Suporte de X
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathcal{X}$ é um intervalo

25. O tempo, em minutos, de utilização de uma caixa eletrônico por clientes de um certo banco, foi modelado por uma variável aleatória contínua T com modelo exponencial com taxa de decaimento $\alpha = 3$. Determine:

 (a) $P(T < 1)$;
 (b) $P(T > 1 \mid T \leq 2)$;
 (c) Um número a tal que $\underbrace{P(T \leq a)}_{F(a)} = 0,4$.

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-3 \cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\alpha = 3$

a) $P(T < 1) = P(T \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-3 \cdot 1} = 0{,}950212932$

b) $P(T > 1 \mid T \leq 2) = \frac{P([T > 1] \cap [T \leq 2])}{P(T \leq 2)} = \frac{P(1 < T \leq 2)}{F(2)} = \frac{\int_1^2 3 \cdot e^{-3 \cdot x}\, dx}{1 - e^{-3 \cdot 2}} =$

$$= \frac{0.047308316191197584556297248219245108740193112602889270516749103 5\ldots}{1-e^{-6}}$$

$= 0{,}047116791 \approx 0{,}05$

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-3 \cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$= 0{,}4 \Rightarrow x$ não é negativo

$0{,}4 = 1 - e^{-3 \cdot x} \Rightarrow 0{,}6 = e^{-3 \cdot x}$

$\ln(0{,}6) = -3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{\ln(0{,}6)}{-3}$

$x = 0{,}170275208$

$\mu = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3} = 0{,}33$

$\sigma^2 = \mu = 0{,}33$

$Md = -\frac{\ln(0{,}5)}{3} = 0{,}23104906$

29. A durabilidade de um tipo de pneu da marca *Rodabem* é descrita por uma variável aleatória contínua Normal de média 60.000 km e desvio padrão 8.300 km.

(a) Se a *Rodabem* garante os pneus pelos primeiros 48.000 km, qual a proporção de pneus que deverão ser trocados pela garantia?

(b) Qual deveria ser a garantia com a proporção do item (a), se a garantia fosse para os primeiros 45.000 km?

(c) Qual deveria ser a garantia (em km) de tal forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 2% dos pneus?

(d) Se você comprar 4 pneus *Rodabem*, qual será a probabilidade de que você utilizaria a garantia (45.000 km) para trocar um ou mais desses pneus?

X: durabilidade $\mid X \sim N(60.000;\ 8300)$

a) $P(X \leq 48.000) = P\left(\frac{X - 60.000}{8.300} \leq \frac{48.000 - 60.000}{8300}\right) = P(Z \leq -1{,}44)$

$= 0{,}0749$

b) $P(X \leq 45.000) = 0{,}035363297$

c) $P(X \leq Q(0{,}02)) = 0{,}02$

$Q(0{,}02) = 42953{,}88404$

d) Y: nº de pneus trocados $\mid Y \sim b(4;\ 0{,}04)$

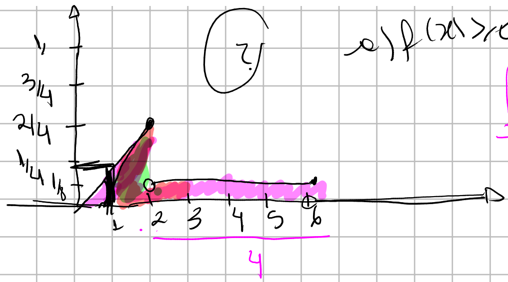
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 0{,}15065344$

21. O tempo adequado de troca do conjunto de amortecedores de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado como uma variável contínua, medida em anos. Suponha que a função densidade é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{8} & 2 < x \leq 6; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Verifique que a função acima é, de fato, uma densidade;

(b) Qual é a probabilidae de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? E entre 1 e 3 anos?



2)

a) $f(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{8} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

b) $P(X \leq 1) = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$

$P(1 \leq X \leq 3) = 1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{(1/8 + 1/2) \cdot 1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{4}{8}\right)}{2} = \frac{1}{8} + \frac{5}{16} = \frac{2+5}{16} = \frac{7}{16}$