$$\forall x \forall y \exists z (x+z=y \vee x=y+z) \qquad (t)$$

Ind. em x

Base $x=0$: $\forall y \exists z (0+z=y \vee 0=y+z)$

Verdadeira com $z=y$: $0+y=y$ ✓

Passo:

Hp.: $\forall y \exists z (x+z=y \vee x=y+z)$

Tese: $\forall y \exists w (s(x)+w=y \vee s(x)=y+w)$

Vamos supor que $x=y$. Neste caso $s(x)=y+s(0)$ ✓ $w=s(0)$

Vamos supor que $\exists z \neq 0 (x+z=y)$. Como $z\neq 0$ $\exists w$:
$s(w)=z$. Então $y=x+z=x+s(w)=s(x)+w$. Logo,
$\exists w (s(x)+w=y)$. ✓

Suponha-se, agora, que $\exists z (x=y+z)$. Então
$s(x)=s(y+z)=y+s(z)$. Logo, pondo $w=s(z)$,
temos que $\exists w (s(x)=y+w)$ ✓

Exercício Prove a seguinte:

$$\forall x \forall y \forall z \left(\left(\neg (z=0) \wedge (xz = yz) \right) \to x = y \right)$$

Dem.

Indução em z.

Base ($z=0$) $\forall x \forall y \left(\underbrace{\underbrace{(0 \neq 0 \wedge (xz=yz))}_{\text{falsa}} \to x=y}_{\text{verdadeira}} \right)$ ✓

Passo

Hp.: $\forall x \forall y \left(\left(z \neq 0 \wedge (xz = yz) \right) \to x = y \right)$

Tese: $\forall x \forall y \left(\left(s(z) \neq 0 \wedge (x s(z) = y s(z)) \right) \to x = y \right)$

$$x s(z) = y s(z) \to xz + x = yz + y$$

Pela (†) $\exists w \, (x + w = y \vee x = y + w)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $x + w = y$.

$$xz + x = yz + y = (x+w)z + x + w = xz + wz + x + w$$

pela propriedade

$$\forall x \forall y \left(x+y=0 \rightarrow (x=0 \wedge y=0) \right) . (H)$$

$$\forall x \forall y \left((x \neq 0 \vee y \neq 0) \rightarrow x+y \neq 0 \right)$$

Sem perda, vamos supor $x \neq 0$.
Por uma propriedade já demonstrada, $\exists z (x = s(z))$.
Então $x+y = s(z)+y = s(z+y)$. Pelo axioma (PA1), segue $x+y \neq 0$.

$$\forall x \forall y \forall z \left(\left((z \neq 0) \wedge (xz = yz) \right) \rightarrow x = y \right)$$

Dem.

Como $z \neq 0$, $\exists w \left(z = s(w) \right)$. Então

$$xz = yz \Rightarrow x\,s(w) = y\,s(w) \rightarrow xw + x = yw + y.$$

Pela (†), $\exists t \left(x + t = y \vee x = y + t \right)$. Sem perda, vamos supor $x + t = y$.

$$xz = yz \rightarrow xw + x = yw + y = (x+t)w + x + t = xw + x + tw + t$$

Pela propr. cancelativa da soma, de $xw + x = (xw + x) + tw + t$ segue $0 = tw + t$. Pela (††), $tw + t = 0$ implica $t = 0$ e $tw = 0$.

Como $y = x + t$, segue $y = x + 0 = x$.

Def. Seja $\leq$ a relação definida por:

$x \leq y$ sse $\exists z \, (x + z = y)$.

$\forall x \, (x + 0 = x) \rightarrow x \leq x$ e $\leq$ é reflexiva.

$\forall x \forall y$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $\exists z \exists w \, (x + z = y \wedge y + w = x)$.

Daí $y = x + z = (y + w) + z = y + (w + z) \rightarrow w + z = 0 \xrightarrow{(\dagger\dagger)} w = z = 0$

$\rightarrow x = y$. $\leq$ é antissimétrica

$\forall x \forall y \forall z$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $\exists t \exists w \, (x + t = y \wedge y + w = z)$

Logo, $z = y + w = (x + t) + w = x + (t + w)$ e portanto $x \leq z$.

$\leq$ é transitiva. Então é uma ordem, dita ordem __canônica__, ou usual, dos naturais.

__Obs.__ Pela $(\dagger)$, $\forall x \forall y \, (x \leq y \vee y \leq x)$, ou seja, $\leq$ é uma ordem total.

(1) $\forall x \left(x^0 = s(0) \right)$

(2) $\forall x \forall y \left(x^{s(y)} = x^y \cdot x \right)$

potências com base e expoente naturais.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

$$0 = \emptyset \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(s(n) = n \cup \{n\} \right)$$

$$0 = \emptyset$$

$$1 = s(0) = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = ss(0) = 1 \cup \{1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = sss(0) = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

Algoritmo da divisão euclidiana.

$$\forall x \forall y \left((y \neq 0) \rightarrow \exists q \exists r \left(x = qy + r \wedge 0 \leq r < y \right) \right)$$

Dem.

Ind. em x.

Base $(x=0)$ $\exists q \exists r \left(0 = qy + r \wedge 0 \leq r < y \right)$

Vale pois $0 = 0 \cdot y + 0$, então com $q = r = 0$.

Passo

Hp.: $\exists q' \exists r' \left(x = q'y + r' \wedge 0 \leq r' < y \right)$

Tese $\exists q \exists r \left(s(x) = qy + r \wedge 0 \leq r < y \right)$.

Pela hp. de indução, $s(x) = s(q'y + r') \overset{S2}{=} q'y + s(r')$.

1º caso: $s(r') = y$. $s(x) = q'y + s(r') = q'y + y = s(q')y + 0$

Vale a tese com $q = s(q')$ e $r = 0$

2º caso $s(r') < y$. $s(x) = q'y + s(r')$ e $0 \leq s(r') < y$, então

a tese vale com $q = q'$ e $r = s(r')$.

Obs.: q e r são unicamente determinados, ou seja,

se $x = qy + r = q'y + r'$, com $0 \leq r < y$ e $0 \leq r' < y$, então

$q' = q$ e $r' = r$.

Teorema

$$\forall x \forall y \left((ss(0) \leq y) \to \exists z \exists t_0 \dots \exists t_z \left(x = t_z y^z + \dots + t_{s(0)} y + t_0 \wedge \right.\right.$$
$$\left.\left. \wedge \ \forall w \left((w \leq z) \to (0 \leq t_w < y) \right) \right) \right)$$

Seja $y > 1$. $\forall x \ \exists z \exists t_0 \dots \exists t_z$ tais que

$x = t_z y^z + \dots + t_1 y + t_0$ e $0 \leq t_w < y \ \forall w = 0, \dots, z$.

Dem. Ind. em x.

Base $(x=0)$ $\quad z=0$ e $t_0 = 0 \qquad 0 = t_0 \quad$ ✓

Passo

Hp. $\quad x = t'_0 + t'_1 y + \dots + t'_{z'} y^{z'}$

Tese $\exists z \exists t_0, \dots, t_z \left(s(x) = t_0 + t_1 y + \dots + t_z y^z \right)$

Pela hp., $s(x) = s\left(\sum_{w=0}^{z'} t'_w y^w \right) = t'_{z'} y^{z'} + \dots + t'_1 y + s(t'_0)$

1° caso: $s(t'_0) < y$, então vale com $t_0 = s(t'_0)$, $t_1 = t'_1, \dots, t_z = t'_z$

e $z' = z$

2° caso $s(t'_0) = y$, então $t_0 = 0$,

$$\forall w, \ t_{s(w)} = \begin{cases} t'_{s(w)} & \text{se } s(t'_w) < y \\ s(t'_{s(w)}) & \text{se } s(t'_w) = y \text{ e } s(t'_{s(w)}) < y \\ 0 & \text{se } s(t'_w) = y \text{ e } s(t'_{s(w)}) = y \end{cases}$$

$$s(x) = s(t'_0) + t'_1 y + \dots + t'_{z'} y^{z'}$$
$$\Big\downarrow \text{se } s(t'_0) = y$$
$$0 + s(t'_1) y + \dots + t'_{z'} y^{z'}$$
$$\Big\downarrow \text{se tb é} = y$$
$$0 + 0 + s(t'_2) y^2 + \dots + t'_{z'} y^{z'}$$

Sistema decimal

$0 = 0, \quad 1 = s(0), \quad 2 = s(1), \quad 3 = s(2), \quad 4 = s(3), \ \ldots, \ 9 = s(8)$

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Com $y = 10$. $\forall x \, \exists n \, \exists t_0 \ldots \exists t_n \left(x = \sum_{i=0}^{n} t_i 10^i \right) =$

$= t_n 10^n + \cdots + t_1 \cdot 10 + t_0$, com $0 \leq t_i < 10 \ \forall i$

x será denotada por $t_n \ldots t_1 t_0$

$21795 = 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5$