Álgebra Linear IA - MATA07

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA.5 - 2020.01 - MATRIZES: Inversa, Ortogonal, Unitária

Definição:

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A matriz A é invertível se, e somente se, existe uma matriz D de mesma ordem, tal que

$$AD = DA = I_n;$$

onde, D é a MATRIZ INVERSA de A.
NOTAÇÃO: $D = A^{-1}$.
Assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Inversão de Matrizes

Definição:

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A matriz A é invertível se, e somente se, existe uma matriz D de mesma ordem, tal que

$$AD = DA = I_n;$$

onde, D é a MATRIZ INVERSA de A.
NOTAÇÃO: $D = A^{-1}$.
Assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Propriedades:

P_1 : Se a inversa de A existe então ela é **única**.

P_2 : Se A é invertível então A^{-1} também o é; e assim, vale a igualdade: $(A^{-1})^{-1} = A$.

P_3 : Se A tem pelo menos uma linha(e/ou coluna) nula então A não é invertível.

Propriedades(continuação):

P_4 : Se A e B são matrizes invertíveis então (AB) também o é; e vale a igualdade: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
D]: Note que, pela definição de matrizes invertíveis;
$(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I_n$.
Então, supondo que; $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, temos;
$(AB)(AB)^{-1} = (AB)(A^{-1}B^{-1}) = (ABA^{-1}B^{-1}) = I_n$??? "Nada podemos afirmar".
Enquanto que; se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)(AB)^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

P_5 : Se A é invertível então A^t também o é; e assim, vale a igualdade: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
D]: Por definição de matrizes invertíveis, temos que:
$A^t(A^t)^{-1} = (A^t)^{-1}A^t = I_n$.
Então, se
$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow A^t(A^t)^{-1} = A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}.A)^t = (I_n)^t = I_n$
Do mesmo modo, $(A^t)^{-1}A^t = (A^{-1})^tA^t = (A.A^{-1})^t = (I_n)^t = I_n$.

Propriedades(continuação):

P_6 : Se A é invertível então λA também o é; e vale a igualdade:
$(\lambda A)^{-1} = (\frac{1}{\lambda})A^{-1}; \lambda \in \mathbb{C}; \lambda \neq 0.$
D]: Por definição de matrizes invertíveis, temos que:
$(\lambda A)(\lambda A)^{-1} = (\lambda A)^{-1}(\lambda A) = I_n.$
Então, se $(\lambda A)^{-1} = (\frac{1}{\lambda})A^{-1}; \lambda \neq 0 \Rightarrow (\lambda A)(\lambda A)^{-1} = (\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) =$
$\lambda(\frac{1}{\lambda})(A.A^{-1}) = 1.I_n = I_n.$

P_7 : Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e B com inversa B^{-1} então $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$.
D]: Observe que nesta propriedade, afirmamos que B é invertível mas A pode ou não ser invertível.
Assim, para B: $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$; e pela propriedade de traço:
$tr(AB) = tr(BA)$.
Então, $tr(B^{-1}AB) = tr((B^{-1}A)B) = tr(B(B^{-1}A)) = tr((BB^{-1})A) =$
$tr(I_nA) = tr(A)$.

Propriedades(continuação):

P_8 : Se A é invertível então $\overline{A}$ também o é; e vale a igualdade: $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

D]: Por definição de matrizes invertíveis, temos que:
$(\overline{A})(\overline{A})^{-1} = (\overline{A})^{-1}(\overline{A}) = I_n$.
Então, se
$(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})} \Rightarrow (\overline{A})(\overline{A})^{-1} = (\overline{A})\overline{(A^{-1})} = \overline{(AA^{-1})} = \overline{(I_n)} = I_n$
Do mesmo modo,
$(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})} \Rightarrow (\overline{A})^{-1}(\overline{A}) = \overline{(A^{-1})}(\overline{A}) = \overline{(A^{-1}A)} = \overline{(I_n)} = I_n$

Matrizes Ortogonais

Definição:

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz invertível. Dizemos que A é uma MATRIZ ORTOGONAL se, e somente se, $A^{-1} = A^t$. Assim, as matrizes A e A^t comutam, ou seja; $A.A^t = A^t.A = I_n$.

1. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $A_3^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_3$, e;
   $A_3.A_3^t = A_3^t.A_3 = I_3 \Rightarrow A_3^{-1} = A_3^t$
2. $A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{-sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$; $A_2^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{-sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ e;
   $A_2.A_2^t = A_2^t.A_2 = I_2 \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^t$

Definição:

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz invertível. Dizemos que A é uma MATRIZ UNITÁRIA se, e somente se, $A^{-1} = A^* = \overline{A}^t$. Assim, as matrizes A e A^* comutam, ou seja; $A.A^* = A^*.A = I_n$.

1. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \overline{A_3}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_3^t$, e;
   $A_3.A_3^* = A_3^*.A_3 = I_3 \Rightarrow A_3^{-1} = A_3^*$
2. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}; \overline{A_3}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A_3^t$, mas;
   $A_3.A_3^* = A_3^*.A_3 = I_3 \Rightarrow A_3^{-1} = A_3^*$

Questão.1: Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine para quais valores dos escalares $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ a matriz A é uma matriz ortogonal.

Questão.2: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B = A + A^t$. Mostre que B é uma matriz simétrica.

Questão.1: (Respostas)

$$AA^t = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{a} & \text{b} \\ \text{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{a} & \text{-1} \\ \text{b} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{a}^2 + b^2 = 1 & \text{-a} = 0 \\ \text{-a} = 0 & 1 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{b}^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 & \text{a} = 0 \\ \text{a} = 0 & 1 = 1 \end{bmatrix},$$

logo, A é ortogonal sse $a = 0$ e $b = \pm 1$.

Exercícios

Questão.2: (Respostas)

D]: Hipóteses: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B = A + A^t$;
Tese: $B = B^t$.
Vamos demonstrar de forma direta: $\mathrm{B}^t = B$.
Então, $B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$.
Observação: Note que para provar de formar genérica, não poderíamos provar o resultado com exemplos porque ficaríamos limitados aos exemplos.

Questão.2: (Respostas)

D]: Hipóteses: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B = A + A^t$;
Tese: $B = B^t$.
Vamos demonstrar de forma direta: $\mathrm{B}^t = B$.
Então, $B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$.
Observação: Note que para provar de formar genérica, não poderíamos provar o resultado com exemplos porque ficaríamos limitados aos exemplos.
Todavia, podíamos mostrar utilizando outras notações para a matriz:
Hipóteses: $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tais que $A = (a_{ij})$, $C = A^t \Rightarrow c_{ij} = a_{ji}$ e $B = (b_{ij}) = a_{ij} + c_{ij}; \forall i = 1, \cdots n$ e $\forall j = 1, \cdots, n$.
Tese: $B = B^t$, sse, $b_{ij} = b_{ji}$.
Então, $B = (b_{ij}) = (a_{ij} + c_{ij})$; e
$B^t = (b_{ji}) = (a_{ji} + c_{ji}) = (c_{ij} + a_{ij}) = (a_{ij} + c_{ij}) = B$.
Ou ainda,

Questão.2: (Continuação)

D]: $B = A + A^t =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{21}+a_{12} & \cdots & a_{n1}+a_{1n} \\ a_{12}+a_{21} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{n2}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+a_{n1} & a_{2n}+a_{n2} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{bmatrix} = B^t.$$