MATA51: Teoria da Computação
Semestre 2021.1
Profa. Laís Salvador
Atividade 1 – Conjuntos e Linguagens
Alberto Lucas e Renata Ribeiro

1 – Mostre que para qualquer alfabeto ∑, o conjunto ∑* de todas as sequências de símbolos de ∑ é enumerável.

Base:
Considerando ∑* o conjunto de todas as cadeias que podem ser formadas com o alfabeto ∑ e sendo w uma sequência de símbolos de ∑*. Supondo que w = ε. Ou seja, para a | ∑* | = 0 há uma associação direta entre a mesma e o número natural (neste caso 0).

Hipótese:
É possível atrelar qualquer palavra em ∑* a um número natural n.

Passo Indutivo:
Para | ∑ | > 0 e sabendo que {a, b} são os únicos símbolos de ∑ . Então, apenas as palavras em ∑* que não começam com ε (exceto o próprio ε) são suficientes para representar todos os números naturais. Portanto, ∑* é pelo menos tão grande quanto os números naturais.

Usando a lógica do Hotel de Hilbert, considerando, por exemplo ∑' (∑ + um símbolo qualquer s), é possível pegar qualquer palavra em ∑* e acrescendo s obter uma representação | ∑ | +1 de um número natural. Prova-se que há uma maneira de atribuir um número natural único a qualquer palavra em ∑*. Existe, portanto, uma relação 1 para 1 e tanto os naturais quanto ∑* possuem a mesma cardinalidade. Assim prova-se a enumerabilidade.

2 – Uma linguagem L definida sobre um alfabeto ∑ é enumerável? Justifique a sua resposta.

Se a linguagem L é finita, então sim, por definição é enumerável tendo em vista que ambos (alfabeto e linguagem) são finitos. Caso contrário, teremos duas opções: (1) a linguagem L é infinita e é possível fazer uma bijeção com os naturais e é, portanto, enumerável; (2) a linguagem L é infinita e **não** é possível fazer uma bijeção com os naturais e é, neste caso, não enumerável.

3 – Suponha ∑ = { a, b}. Escreva um programa/algoritmo que, quando recebe como entrada o natural i, determina a cadeia wi ∈ ∑*.

Usando um pseudocódigo baseado na ordenação lexicográfica, temos:

início

ler natural x
count = 1
se x é igual a 0
imprime a palavra vazia
senao
enquanto count < x
repete a e b a quantidade de vezes de count para que o tamanho da palavra seja igual a count
(ex: count = 1 repete a e b somente uma vez)
guarda resultado de cada palavra em um vetor
count = count + 1
faz uma ordenação simples (insert/bubble)
imprime a palavra correspondente ao vetor (ex: vetor[x-1])

fim

4 – Mostre que o conjunto dos número racionais é enumerável

O conjunto Z dos números inteiros é enumerável visto que podemos pensar na função que leva N em Z associando os números naturais aos inteiros na seguinte ordem: 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, etc. Essa função pode ser dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n/2: & \textbf{se n é par;} \\ -(n-1)/2 & \textbf{se n é ímpar;} \end{cases}$$

(mostrando q é bijeção)

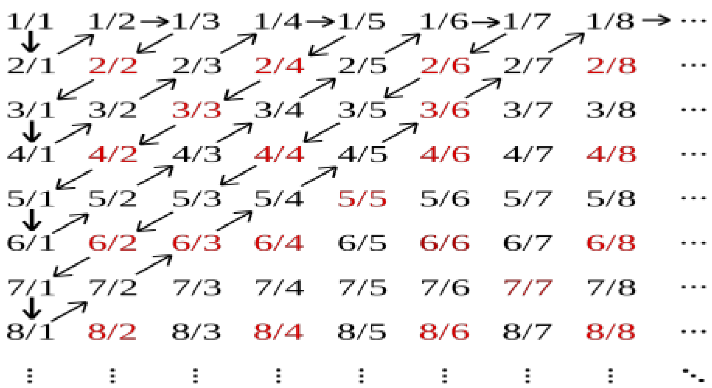
Daí, seja Z* o conjunto dos inteiros não nulos, desta forma, temos que Z* ⊂ Z é enumerável, pois:

Seja B um conjunto enumerável, e A ⊆ B. Por hipótese, existe uma enumeração b1, b2, b3,... para B. Eliminando os termos $b_i \notin A$ desta enumeração, obtém-se uma enumeração para A.

Obs: tome B como Z e A como Z*

Portanto, segue do teorema de que **todo subconjunto de um conjunto é enumerável**, então Z* também é enumerável. Agora, seja **φ** : Z × Z* → Q, com **φ**(p, q) = p/q , temos que, supondo X, Y conjuntos enumeráveis, o produto cartesiano X × Y é enumerável. Daí Z × Z* é enumerável e como **φ** é sobrejetiva, segue que se f : X → Y é sobrejetiva e X é enumerável, então Y é enumerável.

Ilustrando:



A figura acima fornece uma maneira intuitiva de listarmos os números racionais, de modo a obter uma bijeção com os números naturais. Desta forma, seguindo as indicações das setas formamos a seguinte sequência:

(1 , 2 , 1/2 , 1/3 , 3 , 4 , 3/2 , 2/3 , 1/4 , · · ·)

Portanto, conclui-se intuitivamente, por ilustração e por definição que Q é enumerável.

5 – Seja ∑ = { a, b}, o que podemos afirmar sobre 2∑* (conjunto de linguagens sobre ∑) ? Ele é um conjunto enumerável? Justifique a sua resposta.

Não é um conjunto enumerável. Sigma estrela é um conjunto infinito e P(∑*) é o conjunto das partes deste. P(∑*) possui, obviamente, mais elementos que ∑*, por definição de conjunto das partes. Então P(∑*) é um conjunto não-enumerável tendo em vista que não é possível fazer uma bijeção com os naturais pois ∑* é um conjunto infinito e P(∑*) é muito maior que o conjunto dos naturais.

6 – Representações de linguagens (gramáticas e reconhecedores) são cadeias finitas sobre um alfabeto finito. O que podemos afirmar sobre a cardinalidade do conjunto de representações de linguagens? É um conjunto enumerável ou não enumerável?

A cardinalidade de uma gramática é finita tendo em vista que existem finitos símbolos pertencentes à gramática. A gramática é um conjunto enumerável, visto que é possível contar os finitos símbolos pertencentes à ela. Por exemplo: uma gramática G (N, ∑ , P, S) em que é $\sum = \{a, b\}$, N é o conjunto de estados {P, S}, P é o estado inicial e S é o estado final.

A cardinalidade dos reconhecedores é finita se considerarmos o conjunto de estados. Se considerarmos a quantidade de palavras que é possível reconhecer, pode ser enumerável ou não enumerável.