Departamento de Ciência da Computação
Teoria dos Grafos – Gabarito da Lista 3 – 2019.1
Professor: Roberto Freitas Parente

Exercício 1. *Seja G um grafo conexo. Mostre que os vértices de G podem ser enumerados, a saber, $v_1, v_2, \dots, v_n$ tal que $G[v_1, \dots, v_i]$ é conexo para todo $i \in [n]$.*

Resposta. Vamos provar por indução na enumeração. Observe que para $i = 1$ é trivial, pois $G[v_1]$ terá apenas um vértice. Suponha que já tenhamos enumerado v_i de forma que $G[v_1, \dots, v_i]$ seja conexo. Como G é conexo, existe um caminho $P = x_1 x_2 \dots x_k$ entre v_i e um vértice v não enumerado. Escolha para ser v_{i+1} o primeiro vértice na ordem $x_1, x_2, \dots, x_k$ que não está enumerado. Desta forma, $G[v_1, \dots, v_i, v_{i+1}]$ é conexo pelo fato de existe um caminho entre v_i e v_{i+1}. $\square$

Exercício 2 (M. Aritmética / M. Geométrica)**.** *Para qualquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ positivos, temos*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Resposta. Para $n = 2$ observe que $\sqrt{a}_1 \geq 0$ e $\sqrt{a}_2 \geq 0$. Assim temos $(\sqrt{a}_1 - \sqrt{a}_2)^2 \geq 0$

$$(\sqrt{a}_1 - \sqrt{a}_2)^2 = a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0 \implies a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$$

Assim segue. que $(a_1 + a_2)/2 \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Agora provaremos para o caso onde n é potência de dois. Vamos provar por indução para $n = 2^i$. O caso base quando $i = 1$ já provamos anteriormente. Suponha que vale para $n = 2^{i-1}$. Assim, temos o seguinte.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n/2}}{n/2} + \frac{a_{n/2+1}+\ldots+a_n}{n/2}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n/2}}{n/2}\right)\left(\frac{a_{n/2+1} + \ldots + a_n}{n/2}\right)} && (1)\\
&\geq \sqrt{\sqrt[n/2]{(a_1 a_2 \dots a_{n/2})}\ \sqrt[n/2]{(a_{n/2+1} \dots a_n)}} && (2)\\
&= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} && (3)
\end{aligned}$$

A estratégia para provar os casos quando n não é potência de 2 precisamos transformar n em potência de 2. Para o caso $n = 5$, faça $A = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)/5$ Assim, somando $3A$ em cada lado temos $5A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \implies 8A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 3A$.

Ademais, usando o resultado quando n é potência de 2 temos que

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 3A}{8} \geq \sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 A^3}.$$

Por fim, $A^8 \geq a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 A^3 \implies A \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$. De resto, a generalização segue a mesma linha. $\square$

Exercício 3. *O Teorema de Mantel visto em sala afirma que todo grafo livre de triângulos tem no máximo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas. Ademais, afirma que único grafo livre de triângulo com exatamente $\lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas é o bipartido completo balanceado. Baseado nas provas vista em sala, descubra o valor de* $\mathrm{ex}(n, K_4)$ *e prove a unicidade do grafo escolhido. Por simplicidade, não precisa se preocupar com questões relacionadas a divisibilidade*

Resposta. Afirmamos que o grafo livre de K_4 que maximiza a quantidade de arestas é o 3-partido completo balanceado que denotaremos por $T_3(n)$. Observe que $e(T_3(n)) = n/3(2)n/2 = n^2/3$. Para provar que $T_3(n)$ é de fato o grafo extremal para K_4 usaremos indução na quantidade de vértices n. Para $n \geq 3$ é trivial.

Suponha que G é um grafo livre de K_4 maximal nas arestas, então certamente G tem uma cópia de K_3, caso contrário podemos inserir arestas. Seja X uma cópia de K_3 de G e faça $H = G \setminus X$. Observe que cada vértice de H pode se ligar ao máximo 2 vértices de X, caso contrário formaria uma cópia de K_4, X tem 3 arestas e pela hipótese de indução $e(H) \leq (n-3)^3/3$

$$e(G) \leq 3 + (n-3) \cdot 2 + (n-3)^2/3 = n^2/3.$$

Para provar a unicidade temos que provar a seguinte afirmação: Para G livre de K_4, $e(G) = n^2/3$ se, e somente se, $G = T_3(n)$. A volta $(\Leftarrow)$ é fácil mostrar com a mesma prova de indução, pois o K_3 retirado será um vértice de cada partição de $T_3(n)$ e a conta segue na igualdade. Para mostrar a ida $(\Rightarrow)$, basta usar indução na estrutura do grafo, ou seja, teremos que para H com $(n-3)^2/2$ livre de K_4 será isomorfo a $T_3(n-3)$ e quando colocamos cada vértice de X em uma parte de $T_3(n-3)$ teremos um grafo isomorfo a $T_3(n)$.

$\square$

Exercício 4. *Dada uma sequência* $\mathtt{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ *de inteiros tais que* $d_i \geq 1$ *para todo* $1 \leq i \leq n$. *Dizemos que* $\mathtt{d}$ *é uma sequência de graus de uma árvore se, e somente se,* $\sum_i d_i = 2(n-1)$.
Obs: *Note que precisamos apenas mostrar a existência de uma árvore com dada sequência de grau.*

Resposta. IDA $(\Rightarrow)$: Vimos em sala quetoda árvore T tem $e(T) = n-1$, então segue o resultado $\sum_{v \in T} d_v = 2e(T) = 2(n-1)$.

Volta $(\Leftarrow)$: Como $d_i \geq 1$ temos que não existirão vértice isolados. Provaremos por indução em n. Para $n = 1, 2$ é trivial. Podemos supor sem perda de generalidade que $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Observe que $d_1 = 1$ e $d_n \geq 2$, pois caso contrário, $d_i = 1$ para todo i, teremos $\sum_v d(v) = n$ que é absurdo com a nossa hipótese. Seja $\mathtt{d}' = (d_2, d_3, \ldots, d_n - 1)$ temos que satisfaz as condições da nossa hipótese e assim existe uma T' com $n-1$ vértice com a sequência D'. Adicionando um vértice 1 e ligando-o com o vértice n teremos uma árvore T com a sequência de graus $\mathtt{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. $\square$

Exercício 5. *Mostre que se G é uma árvore com $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k vértices de grau um.*

Resposta. Seja x um vertice G tal que $d(x) = \Delta(G) \geq k$. Observe que ao removermos o vértice x teremos $\Delta(G)$ componentes conexas, pois caso contrário existiria um ciclo. Existem dois tipos de componente conexas. Se uma componente conexas só tem um vértice, então esse vértice era folha em G. Por outro lado, se uma componente conexa tem mais que um vértice, então não é uma árvore trivial e com isso temos que tal componente conexa tem duas folhas. Cada componente só pode conectar com x por 1 vértice, caso contrário teríamos um ciclo em G. Desta forma, pelo menos 1 folha da componente conexa também será folha no grafo original.

Por fim, como cada componente conexa contribui com pelo menos 1 folha, então a quantidade de vértices folhas em G é pelo menos $\Delta(G) \geq k$.

$\square$