Matemática Discreta I - MATA42

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

AULA - 06/06/2019

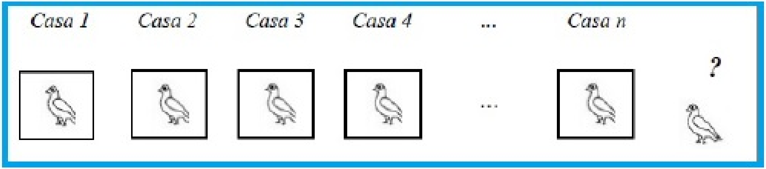
Princípio da Casa dos Pombos

Teorema: (Princípio da Casa dos Pombos)

Se tivermos $n + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter 2 ou mais pombos.

Demonstração:

Se temos n casas para $n + 1$ pombos, na pior das hipóteses, se distribuirmos exatamente um pombo para cada casa, sobrará um pombo para ser colocado em qualquer casa.



Logo, uma das casas deverá conter pelo menos 2 pombos. ■

Observação: Esse teorema também é conhecido como PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET e pode ser reenunciado da seguinte forma:

PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

Temos n objetos para serem guardados em m gavetas. Se $n > m$, então pelo menos 1 gaveta deverá conter 2 ou mais objetos.

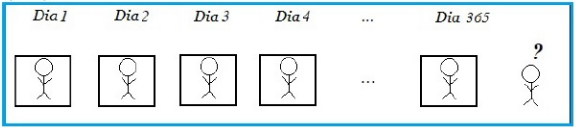
Princípio da Casa dos Pombos

Exemplo.1: Mostre que em um ano não-bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas há pelo menos duas que farão aniversário no mesmo dia.

Demonstração: Podemos resolver esse problema utilizando o Princípio da Casa dos Pombos.

- 365 dias no ano não-bissexto equivale às casas dos pombos;
- 366 pessoas equivalem aos pombos;
- Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário, assim como os pombos estão associados às casas.

Se temos 365 dias do ano para $365 + 1 = 366$ pessoas, ao distribuirmos exatamente uma pessoa para cada dia do ano, sobrará uma pessoa para ser colocada em qualquer dia do ano. Logo, pelo menos 2 pessoas farão aniversário no mesmo dia. ■



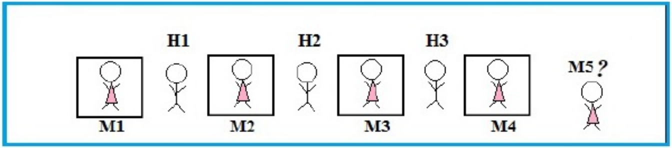
Exercícios

1. Temos n pares distintos de sapatos num mesmo closet. Mostre que se escolhermos $n + 1$ sapatos neste closet, então teremos pelo menos um par de sapatos escolhido.
2. Temos 3 homens e 5 mulheres numa festa. Mostre que se estas pessoas são arrumadas numa fila, ao menos 2 mulheres estarão próximas uma da outra.

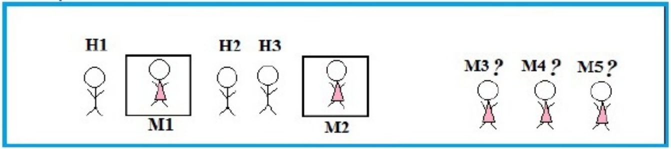
Soluções - Exercícios

1. Se temos n pares distintos de sapatos e $n+1$ sapatos escolhidos, podemos associar às n casas de pombos e aos $n+1$ pombos, respectivamente. Portanto, deve existir ao menos uma casa de pombos com 2 sapatos; e assim, pelo menos um par de sapatos terá sido escolhido.
2. Vamos assumir, inicialmente, o caso no qual os homens são alocados na fila de tal modo que 2 homens não fiquem um ao lado do outro e nem fiquem no início ou no final da fila. Neste caso, os 3 homens geram 4 "lugares"(casa dos pombos) para alocarmos as mulheres. Como existem 5 mulheres (pombos) para alocarmos, pelo menos 2 delas ficarão uma ao lado da outra na fila.

Soluções - Exercícios



Agora vamos assumir, o caso no qual os homens podem ser alocados na fila um ao lado do outro e também podem ficar no início ou no final da fila. Neste caso, os 3 homens geram um número menor de "lugares"(casa dos pombos) para alocarmos as 5 mulheres (pombos). Assim, como no primeiro caso, teremos que pelo menos 2 delas ficarão uma ao lado da outra na fila. Por exemplo:



Exercícios

1. Uma caixa contém 3 tipos distintos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos 2 bolas da mesma cor?
2. Em uma floresta existem 106 jaqueiras. É conhecido que cada uma dessas jaqueiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem pelo menos 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

Soluções - Exercícios

1. Se temos 3 cores distintas de bolas e queremos ter 2 da mesma cor, então devemos retirar 4. Podemos associar as cores às casas dos pombos e as bolas retiradas aos pombos; assim teremos garantido que ao menos uma cor será retirada duas vezes.
2. Neste caso, atribuimos às casas dos pombos a quantidade de frutos: $0, 1, 2, 3, \ldots, 92$; e aos pombos a quantidade total de jaqueiras: 106. Assim, a cada jaqueira associamos a quantidade de frutos que ela contém. Temos então 106 pombos e 93 casas; ou seja, a k-ésima casa conterá a jaqueira que contém exatamente k frutos; onde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 92$. Como existem 106 jaqueiras; $106 > 94 = 93 + 1$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos duas jaqueiras estarão na mesma casa-k, i.é., terão a mesma quantidade k de frutos.

Teorema: (Princípio Geral da Casa dos Pombos)

Seja $k \in \mathbb{N}$. Se tivermos $\mathsf{nk} + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, $\mathsf{k}+1$ pombos.

Demonstração:

Temos n casas para $\mathsf{nk} + 1$ pombos. Se distribuirmos no máximo k pombos para cada casa; então teríamos nk pombos distribuidos. Como temos $\mathsf{nk} + 1$ pombos, então pelo menos uma casa conterá pelo menos $\mathsf{k} + 1$ pombos. $\blacksquare$

Princípio da Casa dos Pombos

Exemplo.2: Numa festa de aniversário com 37 crianças, mostre que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês.

Demonstração:

Podemos resolver esse problema utilizando o Princípio da Casa dos Pombos.

- 12 meses no ano equivale às casas dos pombos;
- 37 crianças equivalem aos pombos;
- Cada criança está associada ao mês de seu aniversário.

Se temos n casas para serem ocupadas por $nk + 1$ pombos, onde $n = 12$ e $nk + 1 = 37$) $k = 3$. Logo, temos que pelo menos $k + 1 = 4$ crianças nasceram no mesmo mês. ■

Exemplo.5:

Calcular o número de soluções inteiras e positivas da seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

.

Resolução:

Cada uma de suas soluções é uma lista da forma (x_1, x_2, x_3, x_4), na qual as incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 são números inteiros e positivos, $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0$; cuja soma vale 7.
Vamos utilizar uma "estratégia" a fim de determinar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação.

Soluções inteiras de uma Equação

- Vamos "parcelar" o número 7 em unidades, ou seja;

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Note que há 6 espaços entre as 7 unidades e; estão ocupados pelos sinais de adição.

- Agora, cada solução pode ser obtida separando as unidades com três vírgulas, porque temos 4 incógnitas.
  Assim, devemos colocar as "vírgulas" em 3 dos 6 espaços. Por exemplo:

Posições das vírgulas	Soluções
1+1,1 ,1+1+1 ,1	(2, 1, 3, 1)
1 ,1+1+1+1 ,1 ,1	(1, 4, 1, 1)
1 ,1 ,1 ,1+1+1+1	(1, 1, 1, 4)
1+1 ,1+1 ,1+1 ,1	(2, 2, 2, 1)

- Visto os exemplos anteriores, para contar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação, vamos então determinar de quantos modos distintos 3 posições podem ser escolhidas dentre as 6 disponíveis.
  Note que a ordem de escolha das vírgulas não importa.

Portanto, calculamos :

$$C_6^3 = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right) = 20.$$

Conclusão: Então, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ tem 20 soluções inteiras e positivas.

Observação:

Podemos também resolver o problema anterior considerando, por exemplo, 4 gavetas distintas G_1, G_2, G_3, G_4 para guardar 7 objetos "iguais" a ■. Assim, calculamos de quantos modos distintos é possível arrumar os objetos nessas gavetas, considerando que **cada gaveta deve ficar com pelo menos um objeto**.

Resolução:

Vamos então alinhar os objetos ■ e separá-los em 4 grupos que devem ser colocados respectivamente nas gavetas.
Notemos que entre os objetos há 6 espaços, sendo que escolhemos 3 desses espaços para colocar uma barra || de separação. Por exemplo:

Posições da barra ||	Soluções
■ ■ || ■ || ■ ■ ■ || ■	$G_1: 2, G_2: 1, G_3: 3, G_4: 1$
■ || ■ ■ ■ ■ || ■ || ■	$G_1: 1, G_2: 4, G_3: 1, G_4: 1$

Soluções inteiras de uma Equação

Generalizando:

Calcular o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p; n \in \mathbb{N}^*; p \geq n$, corresponde a calcular o número de modos de arrumar "p objetos iguais" em "n gavetas distintas", de tal forma que cada gaveta contenha "pelo menos um objeto".

As p unidades (ou p objetos), organizados lado a lado, geram $p-1$ espaços. Para separar n grupos, colocam-se $n-1$ vírgulas (ou $n-1$ barras).

Portanto, o "número total de soluções" pode ser representado por

$$C_{p-1}^{n-1} = \left(\begin{array}{c} p-1 \\ n-1 \end{array} \right) = \frac{(p-1)!}{(n-1)!(p-n)!}.$$

Soluções inteiras e não negativas de uma Equação

Agora, iremos calcular o número de soluções **inteiras e não negativas** da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p; n \in \mathbb{N}^*; p \in \mathbb{N}; x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Considerando a equação do exemplo anterior:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Assim, podemos obter algumas soluções como:
$(0, 0, 3, 4), (1, 0, 0, 6), (0, 0, 0, 7), (1, 2, 1, 3)$.
Faremos agora uma SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS a fim de obtermos as incógnitas **inteiras positivas**; ou seja,
$x_i = (y_i - 1); y_i > 0; i = 1, 2, 3, 4 \;\Rightarrow\; (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + (y_4 - 1) = 7$
$\Rightarrow\; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 + 4 = 11; y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0, y_4 > 0$.
Observação: O número de soluções inteiras e não negativas da equação de incógnitas $x_i; x_i \geq 0$ é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação de incógnitas $y_i; y_i > 0$.
Logo, $\begin{pmatrix} 11\text{-}1 \\ 4\text{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(10)!}{(3)!(7)!} = \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7!)}{(3 \times 2 \times 1)7!} = 120$ soluções.

Podemos também resolver este último problema considerando, por exemplo, 4 gavetas distintas G_1, G_2, G_3, G_4 para guardar 7 objetos "iguais" a ■. Assim, calculamos de quantos modos distintos é possível arrumar os objetos nessas gavetas, considerando que **cada gaveta pode ficar sem objetos ou no máximo com** 7 **objetos**.
Podemos então obter a seguinte solução: $G_1 : 3, G2 : 0, G3 : 1, G4 : 3$.
Imaginemos, agora um objeto colocado em cada uma das 4 **gavetas e distribuir mais** 7**; ou seja, arrumamos no total** 11 **objetos em** 4 **gavetas distintas sendo que cada gaveta contenha pelo menos um objeto.**
Assim, recairemos no caso anterior; i.é, temos
$\left(\begin{array}{c} 10 \\ 3 \end{array}\right) = 120$ modos de arrumar as gavetas; ou seja, 120 soluções possíveis.

Soluções inteiras de uma Equação

Generalizando:

Calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p; n \in \mathbb{N}^*; p \in \mathbb{N}$, é igual ao número de soluções inteiras e positivas de $(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + ... + (y_n - 1) = p; n \in \mathbb{N}^*; p \geq n$ ou de $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n = p + n$.
Esse resultado corresponde ao número de modos de guardar p objetos iguais em n gavetas (cada uma delas pode conter até todos os objetos) e corresponde a calcular

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exercícios

1. Encontre o número de soluções em **inteiros positivos** da equação
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

2. Encontre o número de soluções em **inteiros não negativos** da equação
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

3. Encontre o número de soluções em **inteiros não negativos** da equação
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12.$$

Soluções - Exercícios

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9; x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0.$ Temos que $p = 9$ e $n = 5$; calculando $\begin{pmatrix} 9\text{-}1 \\ 5\text{-}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{(8)!}{(4)!(4)!} = 70.$

2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$
   Fazendo a mudança de variáveis $y_i = x_i + 1; y_i > 0; \forall i = 1, 2, 3, 4, 5.$
   Assim, temos
   $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9 + 5 = 14; y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0, y_4 > 0, y_5 > 0.$
   Temos que $p = 14$ e $n = 5$; calculando
   $\begin{pmatrix} 14-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{(13)!}{(4)!(9)!} = 715.$
   ou
   $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+9-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. Calculando : $\begin{pmatrix} 5+12-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = 1820.$

   Note que esta mesma equação possui apenas $\begin{pmatrix} 12-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = 330$ soluções em inteiros positivos.