Matemática Discreta I - MATA42 - II^a *Unidade*

Profa. Isamara Alves (DMAT/IME/UFBA)

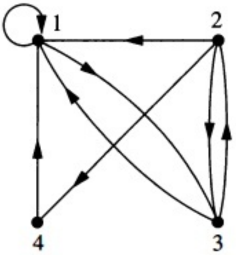
AULA - 25/04/2019

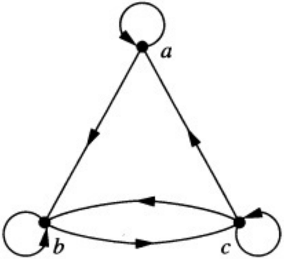
DEFINIÇÃO: (Grafo Orientado ou Dígrafo)

Um GRAFO ORIENTADO ou DÍGRAFO consiste em um conjunto $\mathcal{V}$ de VÉRTICES(NÓS) e um conjunto E de ARESTAS que são os ARCOS DIRECIONADOS conectando os vértices.

NOTAÇÃO: $G(\mathcal{V}, E)$

Exemplos:

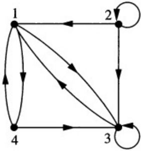




Representação de uma Relação por Grafos

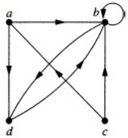
Uma Relação $\mathcal{R}$ em um conjunto $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ pode ser representada por um GRAFO ORIENTADO: $G(\mathcal{V}, E)$.
Cada elemento do conjunto A é representado por um PONTO(nó), e cada par ordenado $\langle x_i, x_j \rangle \in \mathcal{R}$ é representado utilizando um ARCO com sua direção indicada por uma SETA de x_i para x_j; onde x_i e x_j são denominados VÉRTICE INICIAL e VÉRTICE FINAL deste arco, respectivamente.
Observação: Um par ordenado $\langle x_i, x_i \rangle \in \mathcal{R}$ é representado por um ARCO DIRECIONADO que sai de x_i e retorna para x_i. Denominamos este arco de LOOP.

Exemplo.1: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e
$\mathcal{R} = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$



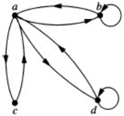
Exemplo.2:

$A = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{R} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, b\rangle\}$



Exemplo.3:

$A = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{S} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, d\rangle\}$

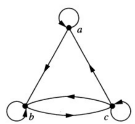


Observação: Verificando o Grafo da relação $\mathcal{S}$; é fácil ver que ela não é reflexiva (porque não tem o loop nos nós a e c), é simétrica (porque sempre que um arco sai de um nó para um destino, existe outro que retorna ao nó saindo do mesmo destino), e não é transitiva (porque nem todos os arcos dos nós x_i para x_j e de x_j para x_k garantem a existência do arco de x_i para x_k).

Relações - Repressentação por Grafos

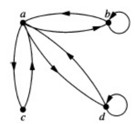
Relação Reflexiva - Grafo

O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ reflexiva é identificado pela "existência do loop em todos os nós".



Relação Simétrica - Grafo

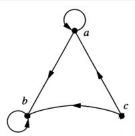
O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ simétrica é identificado quando "sempre que houver um arco saindo de um determinado nó para um destino, deve existir outro que retorna ao nó saindo do mesmo destino".



Relações - Representação por Grafos

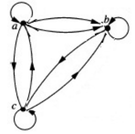
Relação Transitiva - Grafo

O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ transitiva é identificado quando "sempre que houver um arco direcionado do nó x_i para x_j e um arco de x_j para x_k deve existir um arco direcionado de x_i para x_k".



Relação Equivalência - Grafo

O Grafo de uma relação $\mathcal{R}$ de equivalência é identificado quando "satisfaz às condições dos grafos da relação reflexiva, simétrica e transitiva, simultaneamente".



(1) Seja uma relação $\mathcal{R}$ representada por $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva, conectada.

(2) Seja uma relação $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ representada pela matriz de adjacência $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. Represente cada relação abaixo por DÍGRAFOS.

(a) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) Seja $A = \{3, 4, 6, 7\}$ e seja uma relação $\mathcal{R}$ em A definida em cada item abaixo.

(i) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \leq y\}$
(ii) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x + y = 10\}$
(iii) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x + y \geq 10\}$
(iv) $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x = y + 1\}$

(a) Classifique cada relação em reflexiva, irreflexiva, assimétrica, simétrica, anti-simétrica, transitiva, conectada, equivalência. (JUSTIFIQUE AS SUAS RESPOSTAS)
(b) Determine para cada relação; os fechos *ref*$(\mathcal{R})$, *sim*$(\mathcal{R})$, e *tra*$(\mathcal{R})$.
(c) Determine para cada relação; as relações $\mathcal{R}^{-1}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} o \mathcal{R}^{-1}$, e $\mathcal{R} o \overline{\mathcal{R}}$.
(d) Ache, se possível, uma partição de A determinada por cada relação.
(e) Represente cada relação dos itens (i),(ii),(iii),(iv),(b) e (c) por uma matriz de adjacência; e também por um dígrafo.