1. Resposta: O primeiro carro tem 6 opções para estacionar, o segundo 5, o terceiro 4, o quarto 3, o quinto 2 e o sexto apenas 1. Logo, pelo princípio multiplicativo, as possibilidades são em número de $6.5.4.3.2.1 = 6! = 720$.

---

2. Resposta: A ordem é fundamental, pois números com dígitos trocados não são os mesmos. Os algarismos podem, entretanto, repetir-se para a formação de um número, assim temos 5 possibilidades para o primeiro e segundo algarismo: $5.5 = 25$.
Podemos, neste caso simples, listar os números que são pedidos. São eles: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54 e 55. Portanto, podemos formar 25 números diferentes com dois algarismos:

---

4. Resposta: Há 4 possibilidades para o campeão do torneio e 3 possibilidades para o vice-campeão, ou vice-versa. Logo existem $4.3 = 12$ modos em que os prêmios podem ser distribuídos.

---

5. Resposta: Se fossem com todas as 23 letras teríamos pelo princípio multiplicativo(produto das decisões em cada posição): $23.22.21.\ldots.2.1 = 23!$ anagramas.
Porém, se queremos usar as 23 letras para anagramas de 2 letras temos apenas que decidir em duas posições: $23.22 = 506$. Como a ordem aqui é importante, a solução pode ser dada pelos arranjos de 23 elementos dois a dois: $A(23,2) = \frac{23!}{(23-2)!} = 506$.

---

6. Resposta: (a) $5! = 5.4.3.2.1 = 120 = A(5,5) = \frac{5!}{0!}$ anagramas.
(b) Tais agrupamentos são do tipo: L _ _ _ O .
Temos que decidir com as 3 letras restantes para os três espaços entre as letras L e O. Logo, temos $3! = 3.2.1 = 6 = A(3,3) = \frac{3!}{0!}$ anagramas.
(c) Se as letras RO ficarem juntas, nessa ordem, temos:RO _ _ _ .
As letras RO são contadas como sendo uma só letra e, junto com as três letras restantes, teremos um total de 4 letras para serem agrupadas 4 a 4. Assim, obtemos: $4! = 4.3.2.1 = 24 = A(4,4) = \frac{4!}{0!}$ anagramas.

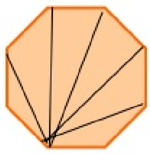
7. Resposta: Os números entre 100 e 1000 são constituídos por 3 dígitos. Devemos preencher as casas das unidades, das dezenas e das centenas. A casa das unidades só pode ser preenchida pelos algarismos 2 ou 4, pois queremos números pares. As casas das dezenas e das centenas podem ser preenchidas de qualquer modo, mas não devemos utilizar o dígito já empregado na casa das unidades, pois o número tem dígitos distintos. O melhor é utilizar o Princípio Aditivo dividindo-se o problema em dois casos disjuntos:

Caso 1: O dígito das unidades é 2. Neste caso, as casas das centenas e das unidades podem ser preenchidas com os dígitos 1, 3, 4 e 5. Existem 4 possibilidades para a casa da centena e assim 3 para a casa da unidade: $4.3 = 12 = A(4,2) = \frac{4!}{2!}$ maneiras.

Caso 2: O dígito das unidades é 4. Existem também 12 maneiras de se fazer isto, pois só podemos utilizar os dígitos 1, 2, 3 e 5.

Pelo Princípio Aditivo, o número total de possibilidades é $12 + 12 = 24$.

---

8. Resposta: Observe a figura: 

O vértice assinalado pode ser ligado a qualquer outro não adjacente por meio de uma diagonal. Cada vértice pode gerar então $5 = 8 - 3$ diagonais.

Como existem 8 vértices teremos $8.5 = 40$ diagonais.

Entretanto, agindo desta forma, contamos duas vezes uma mesma diagonal, pois o segmento que liga um ponto P a outro Q é o mesmo que liga Q a P.

Devemos então dividir o resultado por 2. Assim: $\frac{8.5}{2} = 20$ é o número total de diagonais de um polígono regular de 8 lados.

Generalizando: para um polígono de n lados teremos: $\frac{n.(n-3)}{2}$ diagonais

---

9. Resposta: Como não existem três pontos sobre a mesma linha, basta escolhermos 3 pontos quaisquer e traçar um triângulo com esses vértices. Observe que queremos saber o número de subconjuntos com 3 elementos do conjunto com 14 pontos. Então, o número total de triângulos que podemos traçar é: $C_{14}^{3} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{14!}{3!11!} = 364$.

---

10. Resposta: O primeiro grupo pode ser formado de C_8^4 modos diferentes. Escolhido o primeiro grupo, só existe uma maneira de se escolher o segundo grupo. Entretanto, procedendo desta maneira contamos as divisões: $\{a,b,c,d\}\{e,f,g,h\}$ como sendo diferente da divisão $\{e,f,g,h\}\{a,b,c,d\}$. Assim, a resposta correta é: $\frac{C_8^4}{2} = \frac{8!}{2.4!4!} = 35$.

---

11. Resposta: Este problema pode ser resolvido enumerando-se todas as possibilidades. São elas: $\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\}$ e $\{3,5\}$.
Existem então 6 maneiras de se obter os subconjuntos.
Primeiro, vamos pensar do seguinte modo: representaremos os elementos que fazem parte do conjunto com $+$ e os que não fazem com $-$, i.é, o conjunto $\{1,3\}$ será uma sequência: $+-+--$ enquanto que $\{2,5\}$ será uma sequência: $-\ +\ -\ -\ +$. Note que para formar os conjuntos temos que ter 3 $-$ e 2 $+$ (sem estarem lado a lado), assim para formar cada subconjunto com dois elementos não consecutivos, vamos posicionar os 3 $-$ e deixar os espaços entre eles para escolhermos onde posicionar os 2 $+$: $?-?-?-?$, ou seja, teremos que escolher 2 dos 4 espaços livres. Isto nos leva à combinação simples $C_4^2 = 6$.
Generalizando para n elementos no conjunto e p o número de elementos não consecutivos nos subconjuntos; $n \geq p \geq 0$. Teremos, de acordo com a nossa simbologia, $(n-p)$ '$-$' e p '$+$' para representar cada subconjunto. Como são $(n-p)$ '$-$' teremos $(n-p+1)$ espaços entre eles para serem escolhidos e posicionar os p '$+$', o que resulta na combinação simples $C_{n-p+1}^p; n \geq p \geq 0$.
Segundo, analisando os casos :
Caso.1: se o número começar por 1 temos C_3^1 possibilidades;
Caso.2: se o número começar por 2 temos C_2^1 possibilidades;
Caso.3: se o número começar por 3 temos C_1^1 possibilidade;
Caso.4: se o número começar por 4 temos 0 possibilidades;
Caso.5: se o número começar por 5 temos 0 possibilidades;
Pelo princípio aditivo, temos: $C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = 3+2+1 = 6$ maneiras.
Agora, observando os números binomiais: $C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = C_4^2 = \frac{4.3.2!}{2!2.1} = 6$; devido à seguinte relação entre os números binomiais:

$$\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k+2 \\ k \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} k+n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, para este exercício temos $k=1$ e $n=2$.

Considerando um conjunto com n elementos e queremos subconjuntos com 2 elementos onde não aparecem números consecutivos. Assim,

$$\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-3)+1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

. Generalizando também para subconjuntos com p elementos onde não aparecem números consecutivos. Daí;

$$\begin{pmatrix} n-p \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-p-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-p-2 \\ p-1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} p-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-2p+1)+(p-1)+1 \\ p-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-p+1 \\ p \end{pmatrix}$$

Então, para o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ temos C^p_{n-p+1} subconjuntos com p elementos onde não aparecem números consecutivos.

---

12. Resposta: É fácil enumerar todas as possibilidades. São elas:

(i) as pessoas P1 e P2 ficam no quarto A e P3 no quarto B, ou

(ii) as pessoas P1 e P3 ficam no quarto A e P2 no quarto B, ou

(iii) as pessoas P2 e P3 ficam no quarto A e P1 no quarto B.

Existem portanto 3 possibilidades. Poderíamos ter raciocinado da seguinte maneira: devemos colocar 2 pessoas no quarto A e isto corresponde a escolher 2 entre 3. Portanto, existem $C^2_3 = 3$ possibilidades de escolha. Uma vez que as duas pessoas estejam acomodadas no quarto A, só existe uma possibilidade de acomodar a terceira pessoa no quarto B. Ao todo, teremos 3 possibilidades.

---

13. Resposta: Existem C^3_7 maneiras de três pessoas ocuparem o quarto A. Uma vez feito isto, existem C^2_4 maneiras de se ocupar o quarto B, restando somente uma maneira de se ocupar o terceiro quarto. Logo a quantidade total de possibilidades é: $C^3_7.C^2_4.C^2_2 = 210$.

---

14. Resposta: Existem C^2_7 maneiras de duas pessoas cuidarem do jardim, restando somente uma opção para as outras cinco pessoas, que é a de pintar a casa. Logo, a quantidade total de possibilidades é: $C^2_7.C^5_5 = 21$.

---

15. Resposta: Devemos arrumar 5 letras A, 3 letras R, 1 letra Q e 1 letra U em 10 lugares

diferentes. Ao todo teremos: $C_{10}^5.C_5^3C_2^1.C_1^1 = 5040$ possibilidades.

---

16. Resposta: (a) Para cada um dos três símbolos temos duas possibilidades, ou seja, $2.2.2 = 2^3 = 8$ possibilidades.

(b) Variando a quantidade de símbolos, temos as seguintes possibilidades:

com 1 símbolo $\to$ 2 possibilidades; com 2 símbolos $\to 2^2 = 4$ possibilidades; com 3 símbolos $\to 2^3 = 8$ possibilidades; com 4 símbolos $\to 2^4 = 16$ possibilidades; com 5 símbolos $\to 2^5 = 32$ possibilidades; com 6 símbolos $\to 2^6 = 64$ possibilidades; com 7 símbolos $\to 2^7 = 128$ possibilidades; com 8 símbolos $\to 2^8 = 256$ possibilidades.

Portanto, com 8 símbolos obteremos, no máximo, $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510$ possibilidades.

---

17. Resposta: Cada número telefônico consiste em uma seqüência de 7 dígitos do tipo: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6, a_7)$ em que $a_1 \in A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $\ldots$; $a_7 \in A_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Logo, o número de seqüências é $10.10.10.10.10.10.10 = 10^7 = 10000000$.

---

18. Resposta: (a) O número de seqüências é: $52.52.52.52.52 = 52^5 = 380204032$.

(b) O número de seqüências é: $52.51.50.49.48 = 311875200$.

---

19. Resolução: É possível resolver este problema enumerando todas as possibilidades. São elas: CC CF CM CR; FF FM FR; MM MR; RR.

Observe que aí estão listadas todas as possibilidades e que CF é igual a FC, não importando a ordem do primeiro com o segundo bilhete, mas incluindo repetições.

Se não fossem permitidas repetições o resultado seria $C_4^2 = 6$ (neste cálculo não se inclui a hipótese do menino comprar dois bilhetes repetidos).

O número correto de possibilidades é $10 = 6 + 4$ (quatro repetições foram adicionadas).

Outro modo de resolver:

Sejam; x_1 = o número de bilhetes de C (chapéu mexicano),

x_2 = o número de bilhetes de F (trem fantasma),

x_3 = o número de bilhetes de M (montanha russa) e

x_4 = o número de bilhetes de R (roda gigante).

Como o número total de bilhetes que o menino quer comprar é 2, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. O número de soluções inteiras e não negativas desta última equação é $C^{4-1}_{4+2-1} = C^3_5 = 10$.

---

20. Resposta: Os três vasos podem ser pintados de uma mesma cor. Estamos novamente com um problema de combinações com repetição. Se x_1 é o número de vasos pintados de branco e x_2 é o número de vasos pintados de preto, então $x_1 + x_2 = 3$. O número de soluções positivas ou nulas desta equação é $C^{2-1}_{3+2-1} = C^1_4 = 4$.
No caso de 4 cores e 5 vasos, o número de combinações possíveis é igual ao número de soluções positivas ou nulas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, que é dado por $C^{4-1}_{4+5-1} = C^3_8 = 56$.

---

21. Resposta: Identifique as pessoas como A, B, C, D e E. Somente as posições relativas importam já que não existe uma identificação de assento na mesa. Por exemplo, comece com A e considere todos os arranjos das outras pessoas em relação a A. As pessoas B a E podem se sentar em volta de A de todas as formas possíveis. Assim, existem $4! = 24$ formas de arranjar o grupo.

---

22. Resposta: Existem três letras (T, R e A) que podem aparecer separadas e duas que devem aparecer juntas (E e L) em qualquer ordem. Temos, então, $2 \times 4! = 48$ formas diferentes de arranjar essas letras.

---

23. Resposta: Existem 8! possibilidades de oito pessoas se sentarem em qualquer ordem. Dessa quantidade, temos que subtrair os casos em que as duas pessoas não vão se sentar uma ao lado da outra, i.é., $2 \times 7!$ (as oito posições são transformadas em sete, como se tivéssemos uma posição dupla em que temos duas ordens possíveis). Assim, temos $8! - 2 \times 7! = 40320 - 2 \times 5040 = 30240$ possibilidades.

---

24. Resposta: Podemos ter comitês com três a favor e três contra, quatro a favor e dois contra, cinco a favor e um contra e, finalmente, seis a favor: $\begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} = 528105$.

---

25. As peças do dominó têm “dois números”, um em cada extremidade da peça, sendo que

repetição é permitida (pode haver uma peça com o mesmo número nos dois extremos). Neste caso temos $n = d + 1$ categorias (números inteiros de 0 a d) e multiconjuntos de tamanho 2 ($r = 2$): $\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+r \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para o caso de $d = 6$ (dominó tradicional com números inteiros de 0 a 6), temos $C_8^2 = 28$.

---

26. Resposta: A torre deve mover sete quadrados para a direita e sete para cima. Assim, $\#T = \frac{14!}{7!7!} = 3432$:

---

27. Resposta: Temos neste problema: $x_i \geq 0; i = 1, 2, 3; p = 30$ e $n = 3$.

$\begin{pmatrix} (n+p)-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+3-1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{32.31}{2} = 496.$

---

28. Resposta: Neste caso, $x_i > 0; i = 1, 2, 3; p = 30$ e $n = 3$.

$\begin{pmatrix} p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{29.28}{2} = 406.$

---

29. Resposta: O problema $x_i \geq 3; i = 1, 2, 3; n = 3$ e $9 \leq p \leq 30$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 = 30 \end{cases}$$

fazendo a mudança de variável:

para $x_i = y_i + 3; y_i \geq 0; i = 1, 2, 3$

então, $y_1 + y_2 + y_3 \leq 21; (21 = 30 - 3(3))$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 9 - 9 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 10 - 9 = 1 \\ \vdots \\ y_1 + y_2 + y_3 = 30 - 9 = 21 \end{cases},$$

note que agora $0 \leq p \leq 21$; calculando o número de soluções: $\sum_{p=0}^{21} \begin{pmatrix} (n+p)-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{21} \begin{pmatrix} (n-1)+p \\ p \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{21} \begin{pmatrix} 2+p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+21+1 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \end{pmatrix} = \dfrac{24.23.22}{3.2} = 2024.$

De modo equivalente, acrescentando uma variável de folga:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 21$; onde, $y_i \geq 0; i = 1, 2, 3, 4; n = 4$ e $p = 21$.

Calculando,

$$\left(\begin{array}{c} n+p-1 \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 4+21-1 \\ 21 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 24 \\ 21 \end{array} \right) = \frac{24.23.22}{3.2} = 2024.$$