Análisis Potencial Amortizado

Jorge Luis Huanca Mamani

Enero 2021

1 Table Doubling

Se define una funcion potencial que se adecue a la estructura ya mencionada, entonces:

$$\phi(n) = 2 \cdot \#(elems) - size(T)$$

Inicialmente la funcion potencial esta en cero, como se menciona en clase, entonces:

$$\phi(n_0) = 0$$

Para justificar este modo inicial se debe entender que la tabla esta vacia.
Como la tabla siempre estara media llena se deduce que para cualquier estado siempre sera mayor igual a cero.

Ahora bien se tiene que analizar el costo de amortización para dos casos.

1. Para cuando se inserta y no hay expansión.

2. Para cuando se inserta y si hay expansión.

entonces se hace referencia a la fórmula.

$$amortización = CostoActual + \phi(end) - \phi(beginning)$$

$$amortización = CostoActual + \phi(n_1) - \phi(n_{i-1})$$

determinamos que el costo actual es uno, por que al no haber expansión se agrega un elemento a la tabla.
Ahora debemos calcular la diferencia del potencial que se hace analizando cual es la funcion potencial y cual es el tamaño de la tabla en cada caso, entonces.

$$\phi(n_1) = 2 \cdot \#(T_i) - size(T_i)$$

$$\phi(n_{i-1}) = 2 \cdot \#(T_{i-1}) - size(T_{i-1})$$

notemos que el tamaño de las tablas es la misma por que no hay expansión

$$size(T_i) = size(T_{i-1})$$

tambien notese que la cantidad de elementos esta relacionada en la cantidad de elementos en un estado anterior mas uno.

$$\#(T_i) = \#(T_{i-1}) + 1$$

se expresa de la siguiente manera

$$amortización = 1 + [2\#(T_i) - size(T_i)] - [2\#(T_{i-1}) - size(T_{i-1})]$$

$$amortización = 1 + 2[\#(T_{i-1}) + 1] - 2\#(T_{i-1})$$

$$amortización = 1 + 2 \cdot \#(T_{i-1}) + 2 - 2\#(T_{i-1})$$

$$amortización = 1 + 2$$

$$amortización = 3$$

Ahora se analiza para el caso dos, cuando se inserta y si hay una expansión entonces:

$$amortización = CostoActual + \phi(n_1) - \phi(n_{i-1})$$

El costo actual de la operacion es la cantidad de elementos que hay en la tabla, por que se debia copiar la cantidad elementos que habia antes mas la insercion del nuevo elemento, por o tanto:

$$\phi(n_1) = 2 \cdot \#(T_i) - size(T_i)$$

$$\phi(n_{i-1}) = 2 \cdot \#(T_{i-1}) - size(T_{i-1})$$

notemos lo siguiente, al hacer una expansion la capacidad actual es el doble de la capacidad anterior, tambien se observa que la cantidad de elementos aumento en uno, entonces.

$$2size(T_{i-1}) = size(T_i)$$

$$\#(T_i) = \#(T_{i-1}) + 1$$

$$size(T_{i-1}) = \#(T_{i-1})$$

entonces.

$$amortización = \#(T_i) + [2\#(T_i) - size(T_i)] - [2\#(T_{i-1}) - size(T_{i-1})]$$

reemplazando valore tenemos

$$amortización = \#(T_i) + [2\#(T_i) - 2size(T_{i-1})] - [2\#(T_{i-1}) - \#(T_i - 1)]$$

resolviendo

$$amortización = 3$$

entonces concluimos que el costo de amortizacion en ambos casos es 3.

2 Multipop

Se define una funcion potencial que se adecue a la estructura ya mencionada no olvidando que se tiene una pila S y un numero de iteraciones k que empieza en 0 y llega hasta que

$$k = size(S)$$

entonces:

$$\phi(n) = size(S) - k$$

Inicialmente la funcion potencial esta en cero, como se menciona en clase, entonces:

$$\phi(n_0) = 0$$

tambien se tiene que cuando se hace pop se sabe que existe un elemento por lo tanto

$$\phi(n_i) \geq 0$$

como se menciono al plantear este problema el peor caso seria cuando

$$k$$

sea exactamente igual a la cantidad de elementos en S por lo tanto reemplazando tenemos.

$$amortización = CostoActual + \phi(end) - \phi(beginning)$$

$$amortización = 0 + k + (-k)$$

$$amortización = 0$$