Filtro de Kalman

Jorge Huanca Mamani, Juan Flores Huanqui,
Carl Villachica Villachica, Alexander Baylon

Noviembre 2020

Resumen

El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva eficiente. Esta solución permite calcular un estimador lineal y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento k-1, y corregir, con la información adicional disponible en el momento k, dichas estimaciones.

1. Introducción

El filtro de Kalman se sitúa dentro de los problemas de filtrado, en la teoría de procesos estocásticos. Los problemas de filtrado se ocupan de la estimación de una variable interferida por el ruido. El filtro de Kalman proporciona el estimador lineal con menor error, combinando la evolución de la variable con observaciones recogidas. Es además un proceso recursivo [1].

2. Definición del Problema

Dado un fenómeno físico, lo intentamos modelizar, y lo haremos utilizando leyes físicas conocidas u observaciones recogidas, las cuales relacionaremos entre sí para obtener una salida del sistema [1]. Sin embargo, un sistema determinista no es suficiente para llevar a cabo este análisis. Por un lado, los sistemas dinámicos no quedan definidos simplemente por las características que recogemos, sino que también existen ruidos que no podemos modelar de forma determinista. Por ejemplo, en el lanzamiento de una pelota hay factores como la velocidad del viento que no somos capaces de controlar. Esto formaría parte de la aleatoriedad que un sistema determinista no recoge. Además, otra de las deficiencias es que los aparatos de medida no proporcionan datos exactos sobre el sistema. Entonces ¿como podemos recoger en un modelo las incertidumbres descritas? ¿Cómo optimizar un modelo a pesar de observaciones ruidosas o insuficientes? Es necesario adentrarse en los modelos estocásticos. Un proceso estocástico es aquel cuyo comportamiento no es determinista, en la medida en que el subsiguiente estado del sistema se obtiene tanto por las acciones predecibles del proceso como elementos aleatorios [3].

3. Kalman Discreto

3.1. Modelo del Sistema

Describe la evolución en el tiempo de la cantidad que se desea estimar, esta cantidad es expresada mediante un vector de estado

$$\mathbf{x}_k$$

Ecuación en diferencias lineal estocástica:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k\mathbf{U}_k + \mathbf{W}_{k-1}$$

Donde:

- Vector de estados: $\mathbf{x}_k$
- Matriz de transición:$\mathbf{A}_k$
- Adicción de ruido gaussiano: $\mathbf{W}_k$
- Matriz de Co-varianza: $\mathbf{Q}$
- Entrada del sistema: $\mathbf{U}_k$

3.2. Modelo de medición

Relaciona el vector de medida $\mathbf{z}_k$ con el estado del sistema $\mathbf{x}_k$ a través de la matriz de medición $\mathbf{H}_k$ y la adicción de un ruido gaussiano $\mathbf{v}_k$ con la matriz de co-varianza $\mathbf{R}$.

Ecuación de modelo de Medición:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

4. Origen Computacional del Filtro de Kalman

Estima el proceso anterior utilizando una especie de control de retroalimentación, es decir estima el proceso en algún momento en el tiempo y luego obtiene la retro-alimentación por medio de los datos observados. Tenemos dos tipos de Estados:

4.1. Estado a priori $\hat{\mathbf{x}}_k^-$

Estado declarado en el paso k a a partir del conocimiento del proceso antes del paso k.

- Error: $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$
- Co-varianza: $\mathbf{P}_k^- = E\left[\mathbf{e}_k^-\ \mathbf{e}_k^{-T}\right]$

4.2. Estado a posteriori $\hat{\mathbf{x}}_k$

Estado estimado en el paso k a partir de la medida $\mathbf{z}_k$

- Error: $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$
- Co-varianza: $\mathbf{P}_k^- = E\left[\mathbf{e}_k\ \mathbf{e}_k^T\right]$

4.3. Ganancia de Kalman ó Ecuación de peso

La ganancia de Kalman es un número entre cero y uno:

$$0 \leq K \leq 1$$

Reescribamos la ecuación de corrección de estado con $\mathbf{z}_k$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1}^{-} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_{k-1}^{-})$$

$$\mathbf{x}_k = (1 - \mathbf{H}_k\mathbf{K}_k)\mathbf{x}_{k-1}^{-} + \mathbf{K}_k\mathbf{z}_k$$

Como se puede ver la ganancia de Kalman ($\mathbf{K}_k$) es el peso que le damos a la medición y $(1 - \mathbf{H}_k$ es el peso que le damos a la estimación. Entonces cuando la incertidumbre de medición es muy grande y la incertidumbre estimada es muy pequeña, la ganancia de Kalman es cercana a cero. Por lo tanto, le damos un gran peso a la estimación y un pequeño peso a la medición.

Por otro lado, cuando la incertidumbre de medición es muy pequeña y la incertidumbre estimada es muy grande, la ganancia de Kalman está cerca de uno. Por lo tanto, le damos un pequeño peso a la estimación y un gran peso a la medición.

4.4. Innovación

Es el residuo que refleja la diferencia entre la Medida $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^{-}$ y la medida real $\mathbf{z}_k$. Un residuo igual a cero.Lo que significa que las dos partes están en completo acuerdo.

4.5. Minimización

La matriz $\mathbf{K}$ de $\mathbf{n}$ $\mathbf{x}$ $\mathbf{m}$ es seleccionada para ser el factor de ganancia de mezcla que minimiza la ecuación de co-varianza del error a posteriori. Esto se puede lograr a partir de la ecuación $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1}^{-} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_{k-1}^{-})$ sustituyendo en $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_{k-1}^{-})$ calculando los valores esperados, tomando la derivada de la traza del resultado con respecto a $\mathbf{K}$ igualando el resultado a cero, y luego resolviendo para $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{-}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^{-}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^{-}\mathbf{H}^T}{(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^{-}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})}$$

Podemos distinguir dos casos:

- Observamos que la co-varianza del error en la medición $\mathbf{R}$ se aproxima a cero, la ganancia $\mathbf{K}$ pondera el residuo con más peso.
  Quiere decir que la medida actual $\mathbf{z}_k$ es más confiable, mientras que la medida $\mathbf{H}\mathbf{x}_k^{-}$ es menos confiable.
  $$\lim_{\mathbf{R}_k \to 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{H}^{-1}$$
- Observamos que la co-varianza a priori $\mathbf{P}_k^{-}$ se aproxima a cero, la ganancia $\mathbf{K}$ pondera el residuo con menos peso.
  Quiere decir que la medida actual $\mathbf{z}_k$ es menos confiable, mientras que la medida $\mathbf{H}\mathbf{x}_k^{-}$ es más confiable.
  $$\lim_{\mathbf{P}_k^{-} \to 0} \mathbf{K}_k = 0$$

5. Conclusión

El filtro de Kalman en realidad es un caso específico de estimación Bayesiana recursiva. La etapa de corrección es el paso de actualización del priori a posteriori utilizando datos (información observada). Se repite este paso utilizando el nuevo posteriori como el priori y con la nueva información disponible. Este característico dinámico es muy útil en los modelos de finanzas.

La peculiaridad de utilizar el dato "mejorado" como condición inicial en el siguiente paso y así ir filtrando el ruido de la estimación.

6. Simulación

Referencias

[1] C. K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, 2009.

[2] R. E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, 1960

[3] Wikipedia, *https://es.wikipedia.org/wiki/Estocástico.*