Santiago Diaz

Juan Lucas García

Proyecto teoría de grafos

Introducción

En electrónica análoga, la resolución de circuitos es un paso indispensable para su implementación. Inicialmente se busca hacer una simplificación del problema inicial para llegar de este modo a valores de incógnitas esenciales como lo son las corrientes y voltajes. Esto se lleva a cabo mediante una serie de ecuaciones y leyes establecidas. La técnica usualmente implementada para resolver estas incógnitas consiste en el uso de las leyes de Kirchhoff y de Ohm. Este problema se puede representar mediante el uso de los conceptos de la teoría de grafos gracias a sus relaciones matriciales y su representación gráficas. Además, los teoremas y conjunto de operaciones que nos brindan estos esquemas hacen que esta resolución de incógnitas sea un proceso mucho más rápido, sencillo y último, pero no menos importante que se pueda modelar de manera computacional.

Problema

Cuando nos enfrentamos a situaciones donde tengamos como objetivo la construcción de circuitos electrónicos, en primera estancia es esencial modelar el problema para establecer las características que se deseen implementar en el sistema, tales como lo son el voltaje y corriente que, se encuentran en función de las resistencias que se posean. Mediante grafos podemos establecer las relaciones que se llevan entre los componentes y representar mediante un esquema las características físicas que estos deben respetar. El circuito original se dividirá en secciones más pequeñas(lazos) y en cada lazo se aplicarán las leyes de Kirchhoff para obtener una visión mas detallada sobre sus partes.

Objetivos

El objetivo general de este proyecto es como ya se ha venido mencionando antes, es encontrar una solución a las incógnitas que posee el circuito. Sin violar las reglas que se le interpongan.

Objetivos específicos:

- Representar un circuito de manera computacional
- Representar un grafo de manera computacional.

- Modelar el circuito mediante grafos.
- Hallar los valores de resistencia, voltajes y corrientes.

Marco teórico

Para el planteamiento del problema debemos tener claridad sobre aquellos conceptos que están relacionado con la teoría de grafos.

Nodo electrónico: Punto de conexón de dos o más elementos. *(Resistores/Fuentes de poder)*

Caminata: Secuencia finita o infinita de aristas unidas por una secuencia de vértices

Sendero: Es una caminata sin vértices repetidos.

Circuito: Es un sendero cerrado (Comienza y termina en el mismo vértice).

Ciclo: Lista de vértices tal que solo son adyacentes si y solo si aparecen de manera consecutiva en la lista. Además, el primer elemento es adyacente al último.

Grafo acíclico: Es un grafo sin ciclos.

Grafo conexo: Es un grafo donde para todos 2 vértices existe al menos un camino entre ellos.

Árbol: Grafo no dirigido, acíclico y conexo.

Subgrafo: Un subgrafo de G es un grafo tal que sus vértices y aristas son subconjuntos del grafo G.

Subgrafo de expansión: Subgrafo que contiene todos los vértices del grafo original.

Árbol de expansión: Es un subgrafo de expansión que a la vez es un árbol.

Ciclo fundamental: Sea G un grafo conexo y T un árbol de expansión de G. Sea e una arista perteneciente en G y no en T, que conecta los vértices *u-w*. Notemos que en T solo hay un camino entre *u-w* y este es distinto a *e*. Por tanto, este camino junto a *e* forman un ciclo fundamental en G.

Conjunto de ciclo fundamental: Los conjuntos de ciclos fundamentales, son tales que:

a) Su unión contiene todos los ciclos del grafo original.
b) Son independientes, en el sentido de que ningún ciclo dado del conjunto está contenido en la unión de los cualesquiera ciclos restantes.

Modelamiento del problema

Para realizar el modelamiento del problema, partimos desde un circuito simple, quiere decir, que cuenta únicamente con fuentes de alimentación y resistores. Para lograr un mejor entendimiento, vamos a utilizar como ejemplo el siguiente circuito.

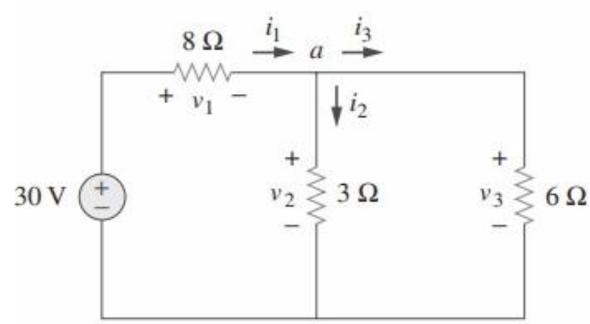

Figura 1: Circuito ejemplar

Ahora el paso siguiente es modelar el circuito anterior dentro de un grafo. En cada nodo electrónico situaremos un vértice a nuestro grafo. Las aristas representaran los elementos que contiene el circuito. Cada arista tendrá un valor ponderado que consiste en una 5-tupla con el formato siguiente:

$$(Tipo, Indice, Voltaje, Resistencia, Corriente)$$

En primera instancia las fuentes de poder se representan con una arista ponderada de valor $("v", x, Voltaje, 0, i_{v_x})$; mientras que los resistores se escriben como $("r", y, "nan", resistencia, i_{y+1})$.[1]

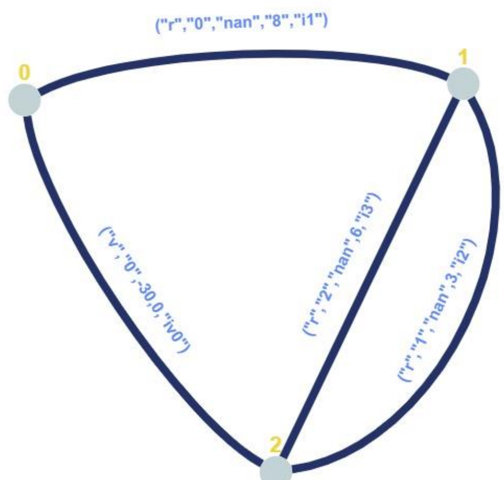

Figura 2: Por usos prácticos note que, en los valores ponderados de las fuentes de alimentación, el voltaje es negativo.

Solución propuesta

Como vimos en el anterior ejemplo, en muchos casos el resultado obtenido tras el modelamiento del circuito en un grafo puede terminar en casos donde este no sea simple. Siempre ocurrirá mientras tengamos elementos en paralelo. Los algoritmos propuestos solo trabajan con grafos que si lo sean. Por este motivo, es necesario transformarlo, quitándole aquellas aristas múltiples y bucles que nos generen conflicto, estos últimos no tendrían problemas, debido a que en electrónica nunca encontraremos estos fenómenos.

El primer paso seria tomar un par de aristas múltiples y por cada par, generar un nuevo vértice aislado. Luego tomamos una de las dos aristas del par y la eliminamos, sin embargo, se deberá añadir dos aristas nuevas al grafo, una que conecte el inicio de la arista eliminada con el nuevo vértice y otra que conecte el nuevo vértice con el final. Una de las 2 aristas nuevas heredará los valores ponderados, mientras que la otra se le asignará valores de 0, a excepción de la corriente la cual conservará igual que la del original.

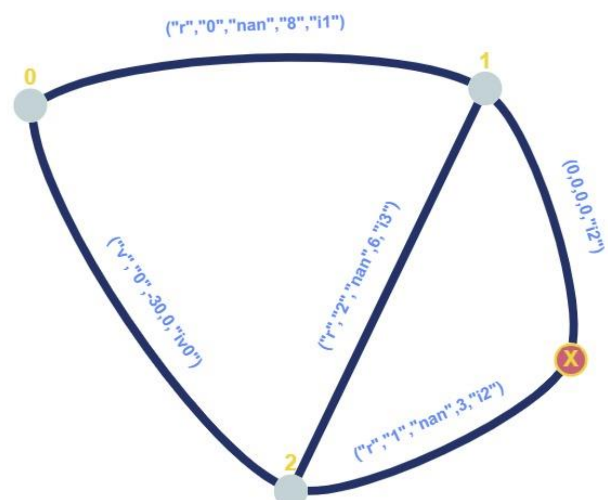

Figura 3: Grafo resultante simple.

[1]"nan" significa que el valor aún no está definido.

Lo siguiente es que debemos encontrar el conjunto de ciclos fundamentales. Para esto, tenemos un conjunto E’ = E y un conjunto P, donde P es un conjunto de grafos cíclicos. Iteramos hasta que E’ = Ø, el primer paso es construir un conjunto de corte S, donde S es un subconjunto de E’, luego, se ponen aristas de S (una a la vez) hasta crear un ciclo, sea R el nuevo ciclo, por último, actualizamos E' de modo que, E’ = E’ - S y añadimos el ciclo R al conjunto P.

El conjunto resultante P contendrá los ciclos independientes necesarios para continuar con el algoritmo.

Los grafos resultantes serían los siguientes:

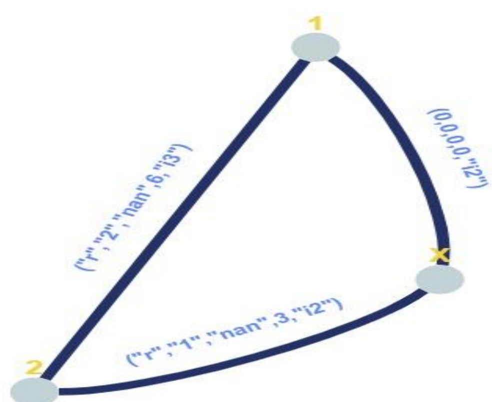

Figura 4 y 5: Ciclos independientes del grafo simple.

Lo siguiente que realizaremos es darle una orientación a cada grafo, pero se deben tener en cuenta ciertas restricciones a la hora de definirlas. Primero comenzamos por aquel ciclo que contenga a la fuente de alimentación como una de sus aristas. Recordemos que, al asignarle los pesos a las artistas, el valor de la tercera posición de la 5-tupla es quien representa a la fuente, y a este se le invirtió el signo a su voltaje. El fin de esto es asociar la dirección que tendrá dicha arista con su polarización. La orientación que le daremos será con cola en el nodo que contiene el polo negativo y cabeza en el nodo que contiene al positivo. Con esto dicho, al resto de aristas del ciclo, se les da el mismo sentido de orientación.

Figura 6: Primer ciclo independiente con orientación asignada.

Una vez sacado el dígrafo ponderado, procedemos a sacar nuestra primera ecuación de Kirchhoff, la cual dice que la sumatoria de todas las tensiones en un lazo (en el contexto de electrónica) deben ser igual a 0.

Teniendo esto claro, procedemos a sumar todos los terceros elementos de las 5-tuplas para toda artista perteneciente al ciclo fundamental actual y luego lo igualamos a 0.

Nota:

V_1, V_2 *son los voltajes "nan" en las resistencias, actualmente solo son variables.*

$$(1) \quad V_1 + V_2 - 30 = 0$$

Recordemos que la ley de ohm establece que Voltaje= Corriente * Resistencia, por tanto:

$$(1) \quad 8I_1 + 3I_2 - 30 = 0$$

Una vez sacada la primera ecuación de nuestro sistema a resolver, debemos pasar al siguiente ciclo fundamental. El siguiente ciclo para tener en cuenta debe ser, adyacente a alguno que ya hayamos trabajado, en otras palabras, debe compartir alguna arista. Para dar la solución, procedemos a establecer una orientación del nuevo ciclo, teniendo en mente que la arista que se comparte con otro ciclo debe ser orientada en sentido contrario al que ya se estableció. Como consecuencia se debe multiplicar por negativo su valor de corriente. Las demás aristas se le asigna la orientación a favor de este nuevo sentido.

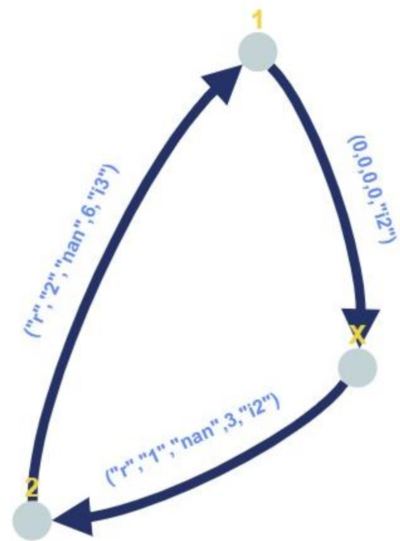

Figura 7: Segundo ciclo fundamental. Note que la arista entre 1 y 2, se le asigno una orientación contraria a la del primer ciclo fundamental.

Ahora debemos de manera similar que antes, sacar la ecuación correspondiente al ciclo.

$$(2) \quad V_2 + V_3 = 0$$

$$(2) \quad -3I_2 + 6I_3 = 0$$

Haciendo una observación, podemos notar que este sistema de ecuaciones se puede representar de la forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese, que tenemos un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y tres incógnitas, para encontrar una tercera ecuación, usaremos la ley de corrientes de Kirchhoff, la cual establece que la suma de corrientes que entran y salen de un nodo es igual a 0. Dicho nodo, lo encontramos en el grafo como, el vértice que contenga el mayor número de aristas incidentes con su tercer elemento en el peso distinto a cero, en nuestro ejemplo, dicho vértice es 1. Tenemos que, el signo de la corriente estará determinado por la entrada y salida en el vértice escogido, de modo que, si entra al vértice tendrá signo positivo, en otro caso, será negativo.

$$(3) \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Añadiendo esta última ecuación a nuestro sistema anterior tenemos lo siguiente.

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez sacado nuestro problema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas, solucionamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 3A, \qquad I_2 = 2A, \qquad I_3 = 1A$$

Con estos resultados podemos resolver el sistema de ecuaciones planteados por los voltajes.

$$V_1 = 8 * 3 = 24Volts, \qquad V_2 = 3 * 2 = 6Volts,$$
$$V_3 = 6 * 1 = 6Volts$$

Implementación

Para realizar la implementación del algoritmo, escogimos el lenguaje de programación Python. Realizamos una interfaz gráfica para que el usuario sea capaz de dibujar el circuito a resolver. Para esto utilizamos la librería tkinter.

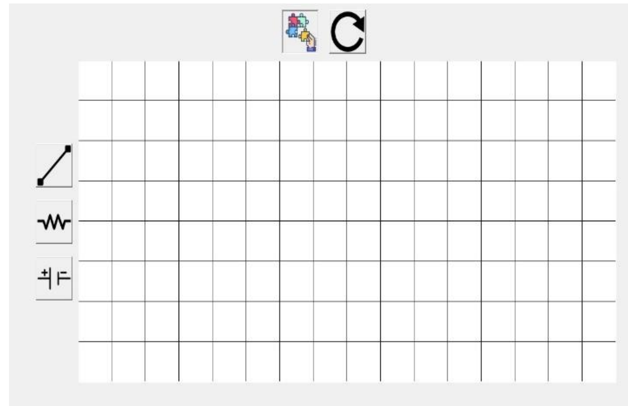

Figura 8: Diseño de la interfaz.

La interfaz se divide en tres partes, la barra de materiales, ubicada en el costado izquierdo, la barra de herramientas, ubicada en la parte superior, por último, el lienzo donde se dibujará el circuito. La barra de materiales consta de resistencias, fuentes de poder y cables de conexión. La barra de materiales sirve para rotar los materiales y para solucionar el circuito. El lienzo consta de una rejilla la cual guía el curso y permite colocar los elementos de una manera fácil e intuitiva.

Para la solución del circuito e implementación de grafos utilizamos la librería networkx, la cual nos permite la creación, dibujo y manejo de grafos. En la parte de la solución de los sistemas de ecuaciones, se usó la librería Sympy.

Referencias

Charles, K y Sadiku, M Iniciales. (2006). Fundamentos de sistemas electricos *(MGH, traducido por Aristeo Vera Bermudez) (3).*