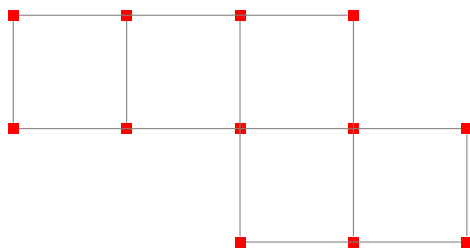


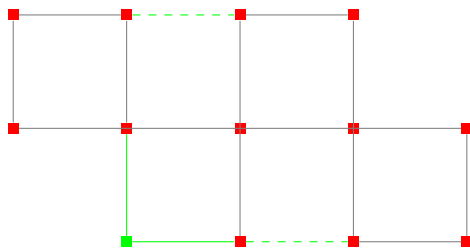
# 1 Géométrie

## 1.1 Enoncé

Les 16 segments suivants (délimités par les points rouges), forment 5 carrés. Former 4 carrés de même taille en déplaçant seulement deux segments.



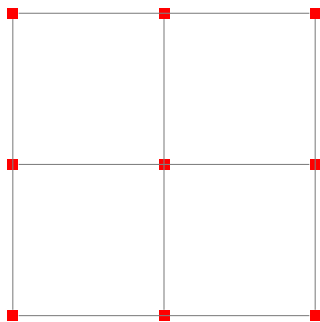
## 1.2 Solution



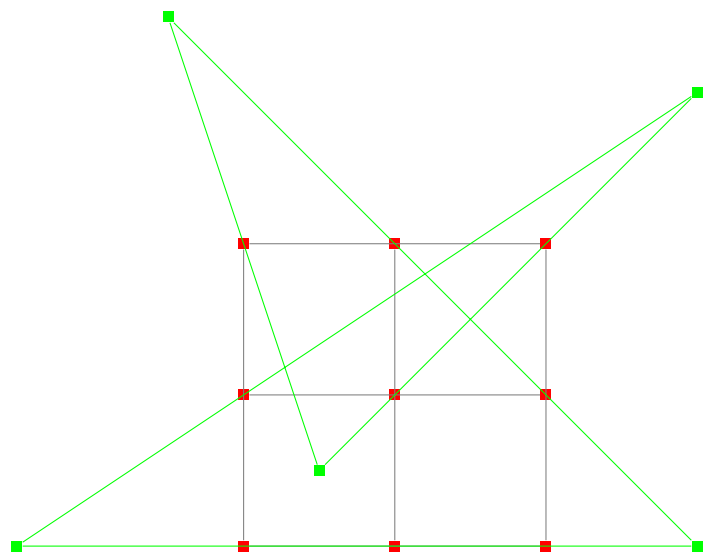
## 2 Géométrie

### 2.1 Enoncé

Tracer cinq segments de droites qui forment une courbe fermée (cinq sommets) et qui passent par les points suivants (en rouge) sans se couper en aucun d'eux :



2.2 Solution



## 3 Logique

### 3.1 Enoncé

Je propose à Kharpov et Kasparov le marché suivant :

Je joue une partie contre chacun d'entre vous. Si je perds les deux parties, je vous donne \$1M chacun. Sinon (c'est-à-dire si je gagne ou fait match nul à au moins une partie) vous me donnez \$2M. Les conditions sont celles d'un championnat mais je me réserve le droit de choisir le lieu et l'heure des parties et aussi, de choisir ma couleur (blanc ou noir).

Bien qu'en apparence, le marché leur soit favorable, ils refusent, car ils s'aperçoivent qu'ils sont nécessairement perdant. Pourquoi ?

### 3.2 Solution

En effet, il me suffit de jouer les deux parties au même moment et au même endroit (parties simultanées). Je prends les blancs contre Kharpov et les noirs contre Kasparov, puis, je me contente de reproduire les coups de Kasparov contre Kharpov et réciproquement. En fait, tout se passe comme si les deux champions jouaient l'un contre l'autre : je ne suis qu'un intermédiaire. Comme ils ne peuvent pas tous les deux perdre leur partie, je gagne selon les termes du marché.

## 4 Logique

### 4.1 Enoncé

On propose à trois prisonniers le marché suivant :

Dans ce sac, il y a trois disques blancs et deux disques noirs. Chacun d'entre vous va choisir un disque. Il pourra voir celui de ses deux compatriotes mais pas le sien propre. Ensuite, vous serez interrogés successivement sur la couleur de votre disque. L'interrogatoire se déroulera en présence de vous trois. Si l'un d'entre vous répond juste, vous êtes tous libres, sinon, c'est le cachot.

Si tous les prisonniers font preuve de logique, ils s'en sortent nécessairement. Pourquoi ?

## 4.2 Solution

Soit 1, 2 et 3 les prisonniers, dans l'ordre où ils parlent. Supposons que 1 et 2 se soient trompés.

- Si 1 et 2 ont tous les deux dit blanc, ils portent donc tous les deux des disques noirs et 3 peut par conséquent dire blanc à coup sûr.
- Si 1 a dit blanc (et porte donc un disque noir) et 2 a dit noir (et porte donc un disque blanc), 3 se dit que s'il portait un disque noir, 2 aurait vu deux disques noirs et ne se serait pas trompé. 3 peut donc répondre blanc à coup sûr.
- Si 1 a dit noir et 2 a dit blanc, même raisonnement que dans le cas précédent.
- Si 1 et 2 ont tous les deux dit noir, ils portent donc tous les deux des disques blancs. 3 se dit que s'il portait un disque noir, 2 se serait dit que s'il avait porté un disque noir, 1 aurait vu deux disques noirs et ne se serait pas trompé. 3 est donc sûr que s'il portait un disque noir, 2 ne se serait pas trompé. 3 peut donc répondre blanc à coup sûr.

Ainsi, si 1 et 2 se trompent, 3 répond à coup sûr. Donc, les trois ne peuvent se tromper en même temps.



## 5 Arithmétique

### 5.1 Enoncé

Une personne annonce qu'elle a choisi deux nombres entiers  $x$  et  $y$  compris entre 2 et 99 (inclus) et a calculé leur produit  $p$  et leur somme  $s$ . Elle révèle ensuite séparément à une personne **P** la valeur de  $p$  et à une personne **S** la valeur de  $s$ . Il s'ensuit la conversation suivante entre **P** et **S** :

- **S** : Je sais que vous ne pouvez pas déterminer les nombres  $x$  et  $y$ .
- **P** : Dans ce cas, je peux les déterminer.
- **S** : Dans ce cas, je peux les déterminer aussi.

Quelles sont les valeurs des deux nombres  $x, y$  ?

## 5.2 Solution

On suppose sans perte de généralité que  $x \leq y$ . Le domaine du problème est

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2 \leq x \leq y \leq 99\}$$

L'ensemble des solutions après la première réponse est donné par

$$E_1 = \{(x, y) \in E \mid \forall (u, v) \in E [u + v = x + y \Rightarrow \exists (u', v') \in E (u', v') \neq (u, v) \wedge u'v' = uv]\}$$

L'ensemble des solutions après la deuxième réponse est donné par

$$E_2 = \{(x, y) \in E_1 \mid \exists (u, v) \in E_1 uv = xy\}$$

L'ensemble des solutions après la troisième réponse est donné par

$$E_3 = \{(x, y) \in E_2 \mid \exists (u, v) \in E_2 u + v = x + y\}$$

Résultats (obtenus par le programme python en annexe A.1) :

$$|E| = 4851 \quad |E_1| = 145 \quad |E_2| = 86 \quad E_3 = \{(4, 13)\}$$

## **6 Logique**

### **6.1 Enoncé**

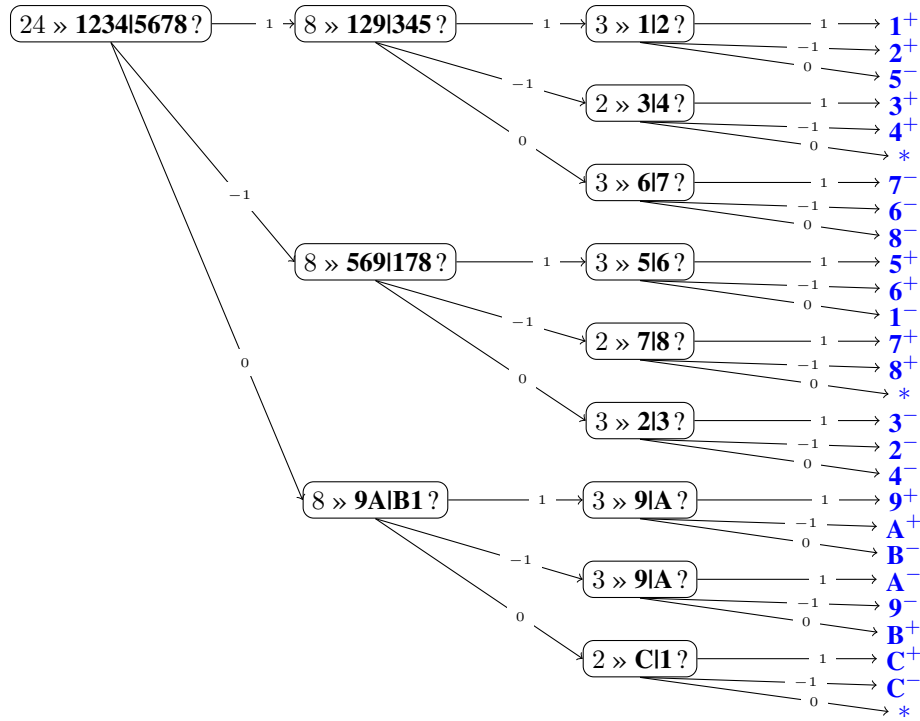
Etant données 12 pièces de monnaie, ayant toutes le même poids sauf une, déterminer celle-ci en trois pesées, avec une balance à équilibre (sans usage de poids de référence). Déterminer si la pièce distinguée est plus lourde ou plus légère que les autres.

## 6.2 Solution

Les pièces sont indexées **1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C**.

- On note  $U|V$  le résultat de la pesée entre les ensembles de pièces  $U$  et  $V$ , qui peut être  $+1$  si  $U$  est plus lourd que  $V$ , ou  $-1$  si  $U$  est plus léger, ou  $0$  s'ils ont le même poids.
- Une configuration est une paire  $x^\omega$  où  $x$  est l'index de l'unique pièce distinguée, et  $\omega$  indique si elle est plus lourde ( $\omega = +$ ) ou plus légère ( $\omega = -$ ) que les autres.
- Un test est un arbre de décision dont chaque noeud de décision est étiqueté par une pesée et les arcs sortants de ce noeud sont étiquetés par les résultats possibles de cette pesée. Chaque configuration peut être passée dans un test et retourne la liste des noeuds qu'elle traverse (son "chemin de décision").
- Une solution est un test de profondeur au plus 3, tel qu'il n'existe pas deux configurations ayant le même chemin de décision.

Il y a seulement 24 configurations en tout, et un test de profondeur 3 a  $3^3 = 27 \geq 24$  chemins complets (puisque le facteur de branchement est 3), donc l'existence d'une solution n'est pas exclue. Une solution optimale (un test qui minimise le nombre de paires de configurations partageant le même chemin de décision) est construit incrementalement en assignant une pesée à chaque noeud de l'arbre selon le principe du gain d'information maximum : étant donné l'ensemble des configurations qui atteignent un noeud donné sur leur chemin de décision, la pesée à ce noeud est choisie de façon à les répartir de manière aussi uniforme que possible sur les trois arcs sortant. L'espace de recherche est considérablement réduit par des considérations de symétrie. Résultat obtenu par le programme python en Annexe A.2 :



Dans le code, la classe `Test` représente les tests. La classe `Sift` représente de manière compacte l'ensemble des chemins de décision d'un ensemble de configurations dans un test. C'est typiquement ce qui est retourné par la méthode `Test.sift` qui calcule l'ensemble des chemins de décision de toutes les configurations.

## 7 Géométrie

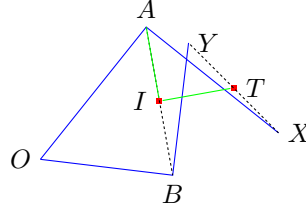
### 7.1 Enoncé

Un trésor a été caché et j'ai l'indication suivante :

- Depuis le gibet, se rendre jusqu'au platane, puis tourner à droite à  $90^\circ$  et parcourir la même distance ; planter un pieu.
- Depuis le gibet à nouveau, se rendre jusqu'au pin, puis tourner à gauche à  $90^\circ$  et parcourir la même distance ; planter un pieu.
- Le trésor se situe entre les deux pieux, à égale distance de chacun d'eux.

J'ai bien repéré le pin et le platane, mais le gibet a disparu. Comment puis-je tout de même retrouver le trésor.

## 7.2 Solution



Soit  $O$  le gibet,  $A$  le platane (et  $X$  le pieu correspondant),  $B$  le pin (et  $Y$  le pieu correspondant). Soit  $T$  le trésor (milieu de  $X, Y$ ) et  $I$  le milieu de  $A, B$ . Soit  $\phi$  la rotation vectorielle d'angle  $90^\circ$  (sens trigonométrique, i.e. inverse des aiguilles d'une montre). Vectoriellement les hypothèses se traduisent par :

$$\begin{aligned}\vec{AX} &= -\phi(\vec{OA}) \\ \vec{BY} &= \phi(\vec{OB}) \\ \vec{OI} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \\ \vec{OT} &= \frac{1}{2}(\vec{OX} + \vec{OY})\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OA} - \phi(\vec{OA}) \\ \vec{OY} &= \vec{OB} + \vec{BY} = \vec{OB} + \phi(\vec{OB})\end{aligned}$$

En additionnant, et divisant par 2, on obtient

$$\vec{OT} = \frac{1}{2}(\vec{OX} + \vec{OY}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \phi\left(\frac{1}{2}(-\vec{OA} + \vec{OB})\right) = \vec{OI} + \phi\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \vec{OI} + \phi(\vec{AI})$$

Soit, finalement

$$\vec{IT} = \vec{OT} - \vec{OI} = \phi(\vec{AI})$$

En d'autres termes, pour trouver le trésor, depuis le platane, se rendre vers le pin, tourner à gauche à mi-chemin et parcourir la même distance. La connaissance du gibet est inutile.

## 8 Géométrie

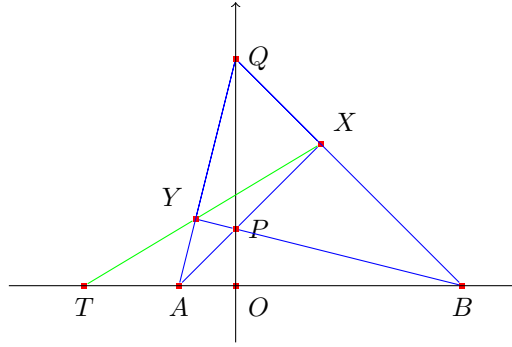
### 8.1 Enoncé

Un trésor a été caché et j'ai l'indication suivante :

- Planter un pieu à l'intersection des axes platane-puits et eucalyptus-gibet.
- Planter un pieu à l'intersection des axes platane-gibet et eucalyptus-puits.
- Le trésor se trouve à l'intersection de l'axe des deux pieux avec l'axe platane-eucalyptus.

J'ai bien repéré l'eucalyptus et le platane, mais le puits et le gibet ont disparu. En revanche, la croix à l'intersection des axes platanes-eucalyptus et puits-gibet est toujours là. Comment puis-je tout de même retrouver le trésor.

## 8.2 Solution



Soit  $O$  la croix,  $A$  et  $B$  le platane et l'eucalyptus,  $P$  et  $Q$  le puits et le gibet,  $X$  et  $Y$  les deux pieux (intersection de  $AP$  avec  $BQ$  et de  $AQ$  avec  $BP$ , respectivement). Le trésor se trouve donc en  $T$ , intersection des droites  $XY$  et  $AB$ . On travaille dans le repère centré sur la croix  $O$  et d'axes  $AB$  et  $PQ$  (ce repère est orthonormé sur la figure, mais cela n'est pas nécessaire). Les coordonnées des points  $A, B, P, Q, T$  sont donc

$$A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} \quad Q \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de  $a, b$  sont connues, celles de  $p, q, t$  inconnues. Il est facile de calculer l'équation de chacune des droites suivantes :

$$(AP) \quad px + ay = ap \quad (BQ) \quad qx + by = bq$$

En résolvant, on obtient les coordonnées de  $X$  (et celles de  $Y$  en permutant  $p$  et  $q$ ) :

$$X \begin{pmatrix} \frac{ab(p-q)}{bp-aq} \\ \frac{pq(b-a)}{bp-aq} \end{pmatrix} \quad Y \begin{pmatrix} \frac{ab(q-p)}{bq-ap} \\ \frac{pq(b-a)}{bq-ap} \end{pmatrix}$$

Les points  $T, X, Y$  sont alignés :

$$\begin{vmatrix} \frac{ab(p-q)}{bp-aq} - t & \frac{ab(q-p)}{bq-ap} - t \\ \frac{pq(b-a)}{bp-aq} & \frac{pq(b-a)}{bq-ap} \end{vmatrix} = 0$$

La résolution (fastidieuse) donne  $t$  en fonction de  $a, b, p, q$ . Il apparaît que  $p, q$  n'interviennent pas dans le résultat final :

$$t = \frac{2ab}{a+b}$$

C'est la moyenne harmonique de  $a, b$ . Donc, les positions  $p$  et  $q$  du puits et du gibet sont inutiles pour retrouver le trésor.



## 9 Optimisation

### 9.1 Enoncé

Une porte d'entrée est contrôlée par un digicode à 10 touches (0-9). Le code comporte quatre chiffres. N'importe quelle séquence contenant les quatre chiffres du code (consécutifs et dans l'ordre) ouvre la porte. Quelle est la longueur de la plus petite séquence ouvrant la porte à coup sûr ?

## 9.2 Solution

Une séquence peut être représentée par un chemin dans un graphe de l'espace des codes. Les noeuds sont les codes de quatre chiffres et un arc relie un noeud A à un noeud B si les trois derniers chiffres de A sont exactement identiques aux trois premiers chiffres de B. Une séquence ouvre la porte à coup sûr si elle constitue un chemin qui passe par tous les noeuds du graphe. Clairement, s'il existe un circuit Hamiltonien (i.e. un circuit fermé qui passe par tous les noeuds sans se recouper), alors il correspond à une séquence minimale. Un tel circuit contient 10000 arcs et correspond donc à une séquence de 10003 touches. L'existence d'un tel circuit est assurée par un théorème de théorie des Graphes :

Etant donné un graphe, si le nombre d'arcs entrant à chaque noeud est égal au nombre d'arcs sortant, alors le graphe possède un circuit Hamiltonien (qui passe par tous les noeuds sans se recouper)

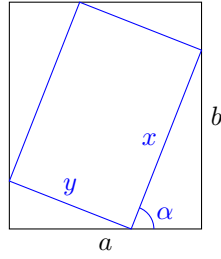
Le cas du graphe considéré ici satisfait bien l'hypothèse puisque chaque noeud  $abcd$  a 10 arcs entrant (depuis les noeuds  $abcx$  pour  $x \in 0, \dots, 9$ ) et 10 arcs sortant (vers les noeuds  $bcdx$  pour  $x \in 0, \dots, 9$ ).

## 10 Géométrie

### 10.1 Enoncé

Soit  $R$  un rectangle de cotés  $a$  et  $b$  donnés. Un rectangle de cotés  $x$  et  $y$  est dit “inscrit” dans  $R$  si tous ses sommets sont sur  $R$ . Quelle relation doit vérifier  $x, y, a, b$  dans ce cas ? Combien y a-t-il de rectangles inscrits dans  $R$  dont un des cotés est  $a$  ?

## 10.2 Solution



Soit  $\alpha$  l'angle du coté  $x$  du rectangle inscrit avec le coté  $a$  de  $R$ . Les contraintes du problème se traduisent par

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha &= a \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha &= b \end{aligned}$$

Par addition et multiplication on obtient :

$$\begin{aligned} (x + y)(\cos \alpha + \sin \alpha) &= a + b \\ (x^2 + y^2) \cos \alpha \sin \alpha + xy &= ab \end{aligned}$$

En reportant dans  $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha$ , on obtient

$$\left( \frac{a+b}{x+y} \right)^2 = 1 + 2 \frac{ab - xy}{x^2 + y^2} \quad \text{où} \quad x, y \geq 0 \quad x + y \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

C'est l'équation d'une quartique (limitée à une portion du plan). En ajoutant la condition  $x = a$ , et en développant, on obtient

$$(b-y) \underbrace{(y^3 + by^2 - 3a^2y + a^2b)}_{P(y)} = 0 \quad \text{où} \quad y \geq \max\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} - a, 0\right)$$

On obtient bien sûr la solution triviale  $y = b$  (où  $\alpha = 0$  : le rectangle interieur est identique au rectangle exterieur). Les autres solutions sont obtenues comme zéros "admissibles" de  $P$  (satisfaisant la contrainte sur  $y$ ), qui est un polynome du 3-eme degré. La règle des signes de Descartes indique qu'il a 0 ou 2 zeros positifs (en comptant les multiplicités). Les zeros de  $P$  s'obtiennent en réduisant  $P$  :

$$P(y) = b^3 Q\left(\frac{y}{b} + \frac{1}{3}\right) \quad \text{où} \quad Q(z) = z^3 - 3\left(r + \frac{1}{9}\right)z + 2\left(r + \frac{1}{27}\right) \quad r = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

On cherche donc les zeros de  $Q$  qui sont admissibles, c-a-d supérieur à  $\frac{1}{3} + \max\left(\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{r}, 0\right)$ . Le discriminant (réduit) de  $Q$  s'écrit

$$\Delta = \left(r + \frac{1}{27}\right)^2 - \left(r + \frac{1}{9}\right)^3 = -r\left(r^2 - \frac{2}{3}r - \frac{1}{27}\right) = -r \underbrace{\left(r - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)}_{<0} \underbrace{\left(r - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)}_{r^*}$$

On a  $Q(\frac{1}{3}) = r$  et  $Q'(\frac{1}{3}) = -3r$ . La valeur  $r^* = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 0.718$  est un seuil :

- Si  $0 < r < r^*$ , alors  $\Delta > 0$  et  $Q$  a trois zéros réels dont deux admissibles et un non admissible puisque  $Q(\frac{1}{3}) > 0$  et  $Q'(\frac{1}{3}) < 0$ . Donc le problème posé a exactement deux solutions non triviales.
- si  $r = r^*$  alors  $\Delta = 0$  et  $Q$  a deux zéros réels (dont un double admissible et un non admissible car négatif). Donc le problème posé a une unique solution non triviale. C'est le cas de la figure ci-dessus. On a

$$x = a = b\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \approx 0.847b \quad y = b\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - 1\right) \approx 0.577b \quad \alpha \approx 1.196 \text{ rad} = 68.53^\circ$$

- si  $r > r^*$  alors  $\Delta < 0$  et  $Q$  a un unique zéro réel, qui est non admissible puisque  $Q(\frac{1}{3}) > 0$ . Donc le problème posé n'a pas de solution non triviale.

# 11 Logique

## 11.1 Énoncé

On propose à un groupe de prisonniers le marché suivant :

- Demain, on vous mettra en file indienne et on donnera à chacun d’entre vous un chapeau blanc ou noir, tiré au hasard, de telle sorte que chacun pourra voir la couleur des chapeaux de tous ceux qui sont devant lui dans la file, mais il ne pourra pas voir la couleur de son propre chapeau ni celle de ceux qui sont derrière lui.
- Ensuite on demandera à chacun d’entre vous, en parcourant la file de l’arrière vers l’avant, de prédire la couleur de son chapeau.
- Ceux qui se seront trompés seront exécutés.

Pendant la nuit, les prisonniers établissent une stratégie qui permet à tous sauf peut-être un d’être sauvés. Quelle est cette stratégie.

## 11.2 Solution

On attribue arbitrairement un nombre modulo 2 à chaque couleur (e.g. blanc=1 et noir=0). Chaque prisonnier annonce la couleur correspondant à la somme, modulo 2, des nombres qu'il a déjà entendus (annoncés précédemment par ceux qui sont derrière lui) et des nombres associés aux chapeaux qu'il peut voir (portés par ceux qui sont devant lui). Ainsi, si  $x_i$  désigne la couleur du chapeau (entier modulo 2) du prisonnier  $i$ , et  $p_i$  sa prédiction, on a (modulo 2) :

$$\forall i \quad p_i = \sum_{j < i} p_j + \sum_{j > i} x_j$$

Donc pour  $i > 1$  on a

$$p_i = \sum_{j < i} p_j + \sum_{j > i} x_j \quad p_{i-1} = \sum_{j < i-1} p_j + \sum_{j > i-1} x_j$$

Par soustraction, on obtient  $p_i - p_{i-1} = p_{i-1} - x_i$ , soit  $p_i = 2p_{i-1} - x_i = x_i$  (modulo 2). Ainsi, tous les prisonniers sont sauvés, sauf peut-être le premier (au fond de la file). Reste à choisir le sacrifié...

## 12 Optimisation

### 12.1 Enoncé

Un camion doit traverser le désert sur une unique piste linéaire. Sa capacité totale est d'une unité de gasole. Il peut circuler sur la piste dans les deux sens, à vitesse constante, et consomme une unité de gazole par unité de distance quelque soit sa charge. Il peut aussi déposer des réserves en tout point de la piste, et les recharger plus tard (évaporation et pertes négligées). Quelle quantité minimale de gasole stockée au point de départ nécessite-t-il pour avancer de 2 unités de distance sur la piste.

## 12.2 Solution

Un trajet sur la piste peut s'exprimer par une séquence  $(x_t, q_t, u_t)_{t=0}^T$  où  $x_t \geq 0$  est un point de la piste où le camion effectue un arrêt,  $q_t \geq 0$  est le chargement du camion à l'arrivée en ce point (avec  $q_0 = 0$ ), et  $u_t$  est le nombre d'unités de gazole transférées à ce point ( $u_t > 0$  pour chargement,  $u_t < 0$  pour un déchargement, mais on accepte aussi des points d'arrêt virtuels où  $u_t = 0$ , i.e. aucun transfert n'est effectué). Les conditions suivantes doivent être remplies :

$$\begin{aligned} \forall t \in 0 : T \quad & x_0 \leq x_t \leq x_T & \text{if } t \geq 1 \quad x_t \neq x_{t-1} \\ \forall t \in 0 : T \quad & 0 \leq q_t + u_t \leq c & \text{if } t \geq 1 \quad q_t = q_{t-1} + u_{t-1} - |x_t - x_{t-1}| \\ \forall t \in 1 : T \quad \forall a \in (x_0, x_T] \quad & \sum_{t' \in 0:t} \mathbb{I}[x_{t'} = a] u_{t'} \leq 0 \end{aligned}$$

La première condition indique qu'un trajet est toujours limité à la section de piste entre son point de départ et son point d'arrivée. La deuxième condition assure qu'un trajet n'effectue jamais de sur-place. La troisième condition assure que le bilan des transferts en tout point du trajet autre que le point de départ ne peut jamais être positif. La quatrième condition indique qu'au départ de chaque point d'arrêt, la charge du camion doit respecter les contraintes de capacité. Enfin, la dernière condition exprime le bilan du camion entre l'arrivée en un point et l'arrivée au suivant.

**Definition 1.** *Un trajet est dit élémentaire s'il consiste en une séquence d'aller-retour entre deux points suivi d'un dernier aller simple, dont le résultat global est donc d'effectuer un échange de gazole entre le point de départ et le point d'arriver :*

$$\forall t \in 0 : T \quad x_t = x_0 \vee x_t = x_T$$

*Un trajet canonique est une séquence de trajets élémentaires.*

**Theorem 1.** *Tout trajet de longueur  $T$  peut être transformé en un trajet canonique ayant le même point de départ, le même point d'arrivée.*

*Démonstration.* En effet, raisonnons par récurrence sur  $T$ . Si  $T = 0$ , la propriété est évidente : un trajet de longueur nulle est déjà canonique (séquence vide de trajets élémentaires). Si  $T > 0$  et la propriété est vraie pour  $0 \dots T-1$ , il faut la montrer pour  $T$ . Considérons un trajet de longueur  $T$  et soit  $a = \min\{x_t | x_t > x_0\}$ . Si  $a = x_T$  alors le trajet est déjà canonique. Supposons donc que  $x_0 < a < x_T$ . Considérons la partie  $P$  du trajet qui se trouve en deça de  $a$ . Cette partie peut ne pas être connexe, mais, par permutation, on peut la rendre connexe. En effet, soit  $N$  le nombre d'intervalles séparés constituant  $P$ . Si  $P$  n'est pas connexe, on a donc  $N > 1$ . Le trajet se compose donc d'un interval  $I_1$  en deça de  $a$  (nécessairement, au début), puis d'un interval  $I_2$  strictement au delà de  $a$ , puis d'un nouvel interval  $I_3$  en deça de  $a$ , puis d'une partie  $P'$  avec  $N-2$  intervalles séparés en deça de  $a$ . Il suffit de permuter  $I_2$  et  $I_3$  pour obtenir un trajet global avec  $N-1$  intervalles en deça de  $a$ . La permutation consiste à remplacer  $I_2$  par un arrêt en  $a$  faisant le même échange global que lors du trajet  $I_2$  (ce ne peut être qu'un déchargement  $\Delta$ ), puis d'exécuter  $I_3$ , et enfin de rejouer  $I_2$  avec ce qui a été déposé en  $a$  (i.e.  $\Delta$ ). La juxtaposition de  $I_1$  et  $I_3$  forme un seul interval en deça de  $a$ . Celle de  $I_2$  et  $P'$  totalise  $N-2$  intervalles en deça de  $a$ , soit au total  $N-1$  intervalles en deça de  $a$ . En réitérant le processus, on se ramène à un seul interval en deça de  $a$ . Le trajet consiste donc en un interval jusqu'en  $a$  suivi d'un trajet entre  $a$  et  $x_T$  de longueur inférieure à  $T$ .  $\square$

En notant  $f(x) = \phi(0, x)$  on obtient l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + 2\lfloor f(x) \rfloor$  avec  $f(0) = 0$ . Pour une distance  $d$  donnée, la quantité  $q = f(d)$  satisfait

$$d = \int_0^q \frac{dy}{1 + 2\lfloor y \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor q \rfloor - 1} \frac{1}{2k+1} + \frac{q - \lfloor q \rfloor}{2\lfloor q \rfloor + 1}$$

Pour  $d = 2$ , on obtient  $\lfloor q \rfloor = 7$  et  $\frac{q-7}{15} = 2 - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2k+1}$ , soit  $q = 7 + \frac{2021}{3003} \approx 7.672993672993677$ .



## 13 Géométrie

### 13.1 Enoncé

En quels points de la terre peut on effectuer le circuit fermé suivant, sans passer par le pôle : 1km vers le Nord, 1km vers l'Est, 1km vers le Sud.

### 13.2 Solution

A 1km au Sud du cercle de l'hémisphère Nord, parallèle à l'équateur, et de 1km de circonférence. Ce cercle se trouve approximativement à  $\frac{1}{2\pi}$  km au Sud du pôle Nord.

## A Programmes

### A.1 Programme python pour problème 5

```
def solution(): # brute force
    from collections import defaultdict

    E = set((x,y) for x in range(2,100) for y in range(x,100))

    p = defaultdict(int); s = defaultdict(set)
    for u,v in E: p[u*v] += 1; s[u+v].add((u,v))
    E1 = set.union(*(l for l in s.values() if all(p[u*v]>1 for (u,v) in l)))

    p = defaultdict(int)
    for u,v in E1: p[u*v] += 1
    E2 = set((x,y) for x,y in E1 if p[x*y] == 1)

    s = defaultdict(int)
    for u,v in E2: s[u+v] += 1
    E3 = set((x,y) for x,y in E2 if s[x+y] == 1)

    return E,E1,E2,E3

E,E1,E2,E3 = solution()
print(f'|E|={len(E)}      |E1|={len(E1)}      |E2|={len(E2)}      E3={E3}')
```

## A.2 Programme python pour problème 6

```
from collections import defaultdict
class Test:
    coins = '123456789ABC'
    dcoins = dict((c,n) for n,c in enumerate(coins))
    def gensols(coins=coins):
        l = len(coins)*[0]
        for n,c in enumerate(coins):
            l1 = l.copy()
            l1[n] = 1 ; yield c+'+',tuple(l1)
            l1[n] = -1 ; yield c+'-',tuple(l1)
    allsols = list(gensols())
    def __init__(self,label,branches={}):
        self.label = label
        self.compare = tuple(tuple(self.dcoins[c] for c in tx) for tx in label.split('|'))
        assert len(self.compare)==2
        self.branches = branches
    def sift(self,L=None):
        scale1,scale2 = self.compare
        D = defaultdict(list)
        if L is None: L = self.allsols
        for u,x in L:
            r = 0
            for i in scale1: r += x[i]
            for i in scale2: r -= x[i]
            D[r].append((u,x))
        branches = {}
        for r,Lr in D.items():
            x = self.branches.get(r)
            branches[r] = Lr if x is None else x.sift(Lr)
        return Sift(self.label,L,branches)

class Sift:
    # ... methods to pretty print the result of method sift above

test = Test(
    '1234|5678',
    {
        1:Test('129|345',{1:Test('1|2'),-1:Test('3|4'),0:Test('6|7')}),
        -1:Test('569|178',{1:Test('5|6'),-1:Test('7|8'),0:Test('2|3')}),
        0:Test('9|A',{1:Test('9|1'),-1:Test('A|1'),0:Test('B|1')}),
    }
)
print(test.sift())
```