Ejercicios de la Memoria del Laboratorio.

Jesús María Mora Mur

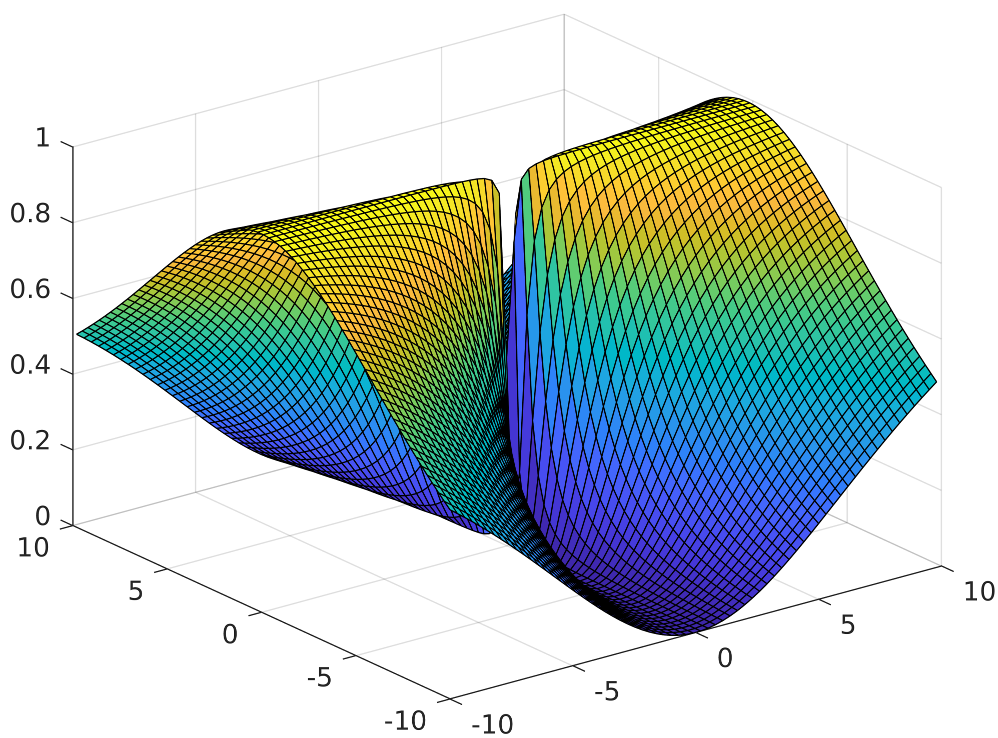
```
% Representar las siguientes funciones
% Estudiar su continuidad, derivadas parciales y cualquier aspecto que
% podrías indicar reseñable respecto a la diferenciabilidad de las mismas.


% f(x,y)=x^2/(x^2+y^2)  (x,y)!=0
% f(x,y)=0              (x,y)=(0,0)
% Dominio -1<x<1 -1<y<1

% f(x,y)=2*x*y/(x^2+y^2)  (x,y)!=(0,0)
% f(x,y)=0                (x,y)=(0,0)
% Dominio -1<x<1 -1<y<1
```

Primera función.

```
[x,y] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10);
v= x.*x./(x.^2 + y.^2); % Con x.^2 en el numerador no funciona. ¿Por qué será?
surf(x,y,v)
```




```
syms x y
g(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)
```

```
g(x, y) =
```

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Parece que en **(0,0)** hay problemas para representar. Lo vemos también al sustituir. Comprobamos con límites:

Límites. Continuidad.

```
limit(limit(g(x,y),x,0),y,0)
```

ans = 0

```
limit(limit(g(x,y),y,0),x,0)
```

ans = 1

Como salen diferentes se ve claramente que la función no es continua ni diferenciable en `(x,y) = (0,0)`. Si se restringe ese punto, la función es continua y diferenciable.

Derivadas parciales.

```
g = x^2/(x^2 + y^2)
```

g =

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

```
g1x = diff(g,x,1)
```

g1x =

$$\frac{2\,x}{x^2+y^2}-\frac{2\,x^3}{{(x^2+y^2)}^2}$$

```
g1y = diff(g,y,1)
```

g1y =

$$-\frac{2\,x^2\,y}{{(x^2+y^2)}^2}$$

```
g2xy = diff(g1x,y)
```

g2xy =

$$\frac{8\,x^3\,y}{{(x^2+y^2)}^3}-\frac{4\,x\,y}{{(x^2+y^2)}^2}$$

```
g2yx = diff(g1y,x)
```

g2yx =

$$\frac{8\,x^3\,y}{{(x^2+y^2)}^3}-\frac{4\,x\,y}{{(x^2+y^2)}^2}$$

```
g2x = diff(g,x,2)
```

```
g2x =
```

$$\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{10\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{8\,x^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

```
g2y = diff(g,y,2)
```

```
g2y =
```

$$\frac{8\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{2\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Matrices Jacobiana y Hessiana.

```
jacobiana_g = jacobian(g)
```

```
jacobiana_g =
```

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{2\,x}{x^2+y^2}-\frac{2\,x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & -\frac{2\,x^2\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{array}\right)$$

```
hessiana_g = hessian(g)
```

```
hessiana_g =
```

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{x^2+y^2}-\frac{10\,x^2}{\sigma_3}+\frac{8\,x^4}{\sigma_2} & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \frac{8\,x^2\,y^2}{\sigma_2}-\frac{2\,x^2}{\sigma_3} \end{array}\right)$$

where

$$\sigma_1=\frac{8\,x^3\,y}{\sigma_2}-\frac{4\,x\,y}{\sigma_3}$$

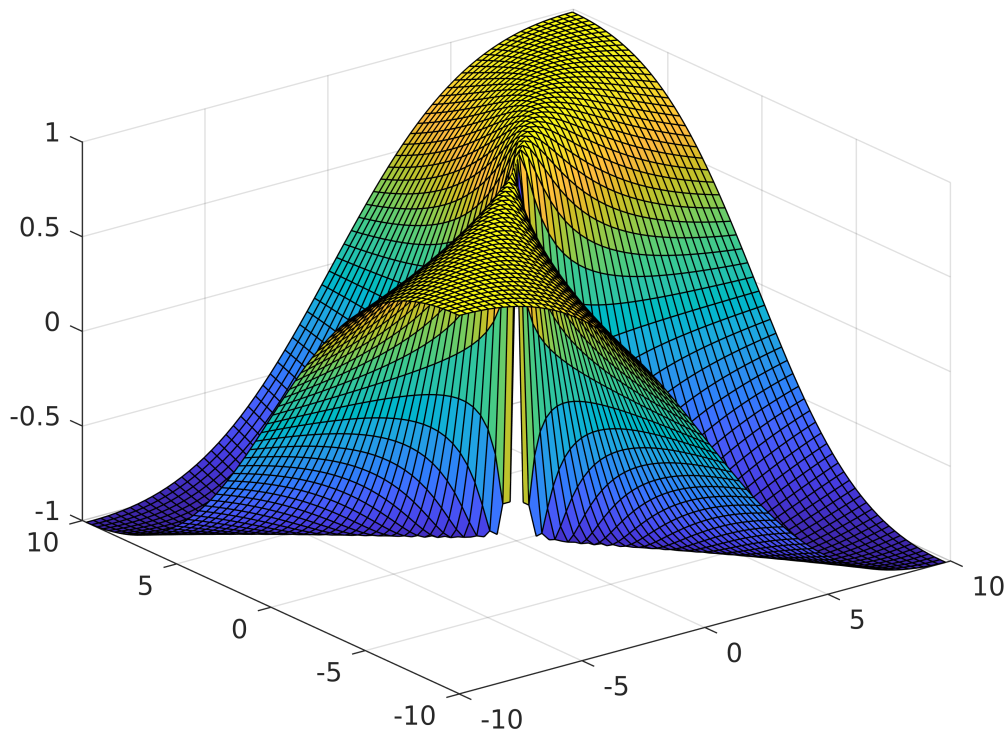
$$\sigma_2=\left(x^2+y^2\right)^3$$

$$\sigma_3=\left(x^2+y^2\right)^2$$

Comparando los elementos de las matrices con los resultados de las derivadas escritos anteriormente se puede observar que son iguales, por lo que comprobamos que son correctos.

Segunda función.

```
[x,y] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10);
z=2*x.*y./(x.^2+y.^2);
surf(x,y,z)
```




```
syms x y
f(x,y) = 2*x*y/(x^2 + y^2)
```

f(x, y) =

$$\frac{2\,x\,y}{x^2+y^2}$$

Parece que en **(0,0)** hay problemas de representación. Así se ve también al sustituir mentalmente en la función.

Continuidad. Límites.

```
limit(limit(f(x,y),x,0),y,0)
```

ans = 0

```
limit(limit(f(x,y),y,0),x,0)
```

ans = 0

Salen igual, comprobamos en haces de rectas, parábolas...

```
syms m
```

En haz de rectas `y = mx`

```
limit(f(x,m*x),x,0)
```

ans =

$$\frac{2\,m}{m^2+1}$$

Sale el límite dependiente de `m`. El límite no existe, por lo que la función no es continua ni diferenciable en **(0,0).** Si se elimina ese punto, la función es continua y diferenciable.

Derivadas parciales.

```
f = 2*x*y/(x^2 + y^2)
```

f =

$$\frac{2\,x\,y}{x^2+y^2}$$

```
f1x = diff(f,x,1)
```

f1x =

$$\frac{2\,y}{x^2+y^2}-\frac{4\,x^2\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

```
f1y = diff(f,y,1)
```

f1y =

$$\frac{2\,x}{x^2+y^2}-\frac{4\,x\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

```
f2xy = diff(f1x,y)
```

f2xy =

$$\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{4\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{16\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

```
f2yx = diff(f1y,x)
```

f2yx =

$$\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{4\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{16\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

```
f2x = diff(f,x,2)
```

f2x =

$$\frac{16\,x^3\,y}{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{12\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

```
f2y = diff(f,y,2)
```

f2y =

$$\frac{16\,x\,y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{12\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Matrices Jacobiana y Hessiana.

```
jacobiana = jacobian(f)
```

```
jacobiana =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2\,y}{x^2+y^2}-\frac{4\,x^2\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{2\,x}{x^2+y^2}-\frac{4\,x\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

```
hessiana = hessian(f)
```

```
hessiana =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{16\,x^3\,y}{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{12\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \frac{16\,x\,y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}-\frac{12\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{2}{x^2+y^2}-\frac{4\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{16\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

Comparando los elementos de las matrices con los resultados de las derivadas escritos anteriormente se puede observar que son iguales, por lo que comprobamos que son correctos.