Actividad Individual

Jesús María Mora Mur.

Curso 2025-2026.

Universidad Internacional de La Rioja.

Electromagnetismo I.

Grado en Física.

Ejercicio 1

Hemos de considerar la fuerza debida a q_1 y q_2 sobre q_3. Sobre la horizontal sabemos que las fuerzas llevan un ángulo de:

$$\alpha = \arctan \frac{0.3}{0.4}$$

en valor absoluto. Es trivial detectar que al tener q_1 y q_2 la misma carga y estar a la misma distancia del origen, las componentes verticales de la fuerza se anularán entre sí. Además, la componente horizontal de la fuerza será la misma para q_1 que para q_2. Así pues,

$$\vec{F}_y = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot q}{r^2} \cdot \arctan \frac{0.3}{0.4} = 0.92 \text{ N}$$

Ejercicio 2

Llamaremos eje y al generado por la recta perpendicular a la superficie encerrada por el anillo. Asimismo, el eje x será el paralelo al radio del anillo.

Por simetría del anillo las componentes en el eje x quedarán anuladas entre sí, teniéndose en cuenta únicamente las componentes en el eje y. Como el anillo está cargado con densidad lineal de carga λ, sabemos que:

$$dq = \lambda \cdot d\vec{l}$$

Por ende, sabemos que la fuerza en el eje y se calculará integrando, según sigue:

$$\vec{F}_y = \oint \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot d\vec{l}}{d^2} \cdot \cos \alpha$$

Donde α es el ángulo entre la fuerza y el eje y. Sabemos que su coseno es igual a:

$$\cos \alpha = \frac{a}{d}$$

Por ende, sustituimos y obtenemos una expresión para la fuerza que se ejerce sobre q:

$$\vec{F}_y = \oint \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot d\vec{l}}{d^3} \cdot a = \frac{k \cdot q \cdot \lambda \cdot 2\pi R a}{d^3}$$

Ejercicio 3

Para calcular el campo eléctrico utilizaremos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi a^2$$

Sabemos que, por la ley de Gauss:

$$\Phi = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Despejando el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi a^2}$$

Ejercicio 4

Aplicamos el Teorema de Gauss al cilindro exterior:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot 2\pi R l$$

Donde l es la longitud del cilindro. Sabiendo que:

$$\vec{E} \cdot 2\pi R l = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$

Despejamos $\vec{E}$. La carga será $\rho \cdot 4\pi R^2 l$. Despejamos:

$$\vec{E} \cdot 2\pi R l = \frac{\rho 4\pi R^2 l}{\varepsilon_0}$$

Ejercicio 5

Un campo $\vec{F}$ electrostático es irrotacional, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Al comprobar vemos que esta condición se cumple haciendo el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ {}^{\partial}\!/_{\partial x} & {}^{\partial}\!/_{\partial y} & {}^{\partial}\!/_{\partial z} \\ yz - x & xz - y & xy - z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Todo campo irrotacional tiene una función escalar, llamada *potencial*, tal que:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} V$$

Calcularemos V resolviendo las siguientes EDPs formando un sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = yz - x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = xz - y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = xy - z \end{cases}$$

Resolvemos para V, integrando y variando las constantes:

$$\int (yz - x) dx = xyz - \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}_1(y, z)$$

$$\int (xz - y)dy = xyz - \frac{y^2}{2} + \mathcal{C}_2(x, z)$$

$$\int (xy - z)dz = xyz - \frac{z^2}{2} + \mathcal{C}_3(x, y)$$

Se deducen las constantes, quedando el potencial de la forma que sigue:

$$V(x, y, z) = xyz - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$$

Podemos comprobar la corrección de la expresión aplicando el gradiente. Obtendremos el campo inicial.

Ejercicio 6

Al tener varias cargas puntuales podemos aplicar el principio de superposición:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{kq_1}{r_{1\text{A}}} + \frac{kq_2}{r_{2\text{A}}} + \frac{kq_3}{r_{3\text{A}}}$$

$$V_{\text{total}} = 8.99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left(\frac{7 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{15}} \ \frac{\text{C}}{\text{m}} - 2 \cdot 7 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{C}}{\text{m}} \right) = -1.1 \cdot 10^{-7} \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}}$$

Ejercicio 7

Si las esferas están conectadas entre sí, el potencial de cada una de ellas debe ser igual, es decir V. Igualando potenciales y dividiendo por k:

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

Como los radios de las esferas son iguales, sus cargas también deben serlo.

Ejercicio 8

Separaremos en dos condensadores, uno con cada dieléctrico. El punto de separación es r. Aplicando la ley de Gauss, sabemos que:

$$E = \frac{Q_{\text{condensador}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

para cada condensador. Sabemos también que $\Delta V = \oint E \cdot dr$. Por ende,

$$\Delta V_{\text{C1}} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{r} \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\Delta V_{\text{C2}} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{r}^{R_2} \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right)$$

Además sabemos que $C = Q/\Delta V$. Por otro lado, según especifica el problema $1/C_{\text{eq}} = 1/C_1 + 1/C_2$. Esto nos lleva a obtener la capacidad del condensador, que queda regida por la expresión siguiente:

$$C_{\text{eq}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$$

Ejercicio 9

El campo eléctrico dentro sigue la ley de Coulomb:

$$\vec{E}_{\text{dentro}} = \frac{k \cdot q}{r^2}$$

Dicho campo carga la superficie de frontera, cuyo campo en superficie es:

$$\vec{E}_{\text{esfera}} = \frac{k \cdot q}{r_{\text{esf}}^2}$$

Al tener una cavidad cargada con densidad superficial $\sigma = q \cdot 4\pi r_{\text{esf}}^2$, aplicamos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon}$$

Despejamos el campo eléctrico 2 fuera de la cavidad:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon} \Rightarrow E_{\text{fuera}} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{4\pi r^2 \varepsilon}$$

Calculamos también los campos $\vec{D}$ como $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$:

$$\vec{D}_{\text{dentro}} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{D}_{\text{fuera}} = \frac{q}{4\pi r^2}$$