

Actividad:

Métodos de resolución de ecuaciones no lineales

El objetivo de esta actividad es conocer nuevos métodos para la resolución de ecuaciones no lineales que usan estrategias distintas a los vistos en clase. Concretamente, veremos el **método de Muller** y el **método de Ridders**.

Método de Muller

El **método de Muller** [1] es un método iterativo usado para encontrar ceros de funciones continuas. La idea del método de Muller es aproximar la función por una parábola. Dados tres puntos $(x_2, f(x_2))$, $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ tales que $x_2 < x_0 < x_1$, existe una única parábola que pasa por todos ellos, como vemos en la figura siguiente: En la primera iteración del método

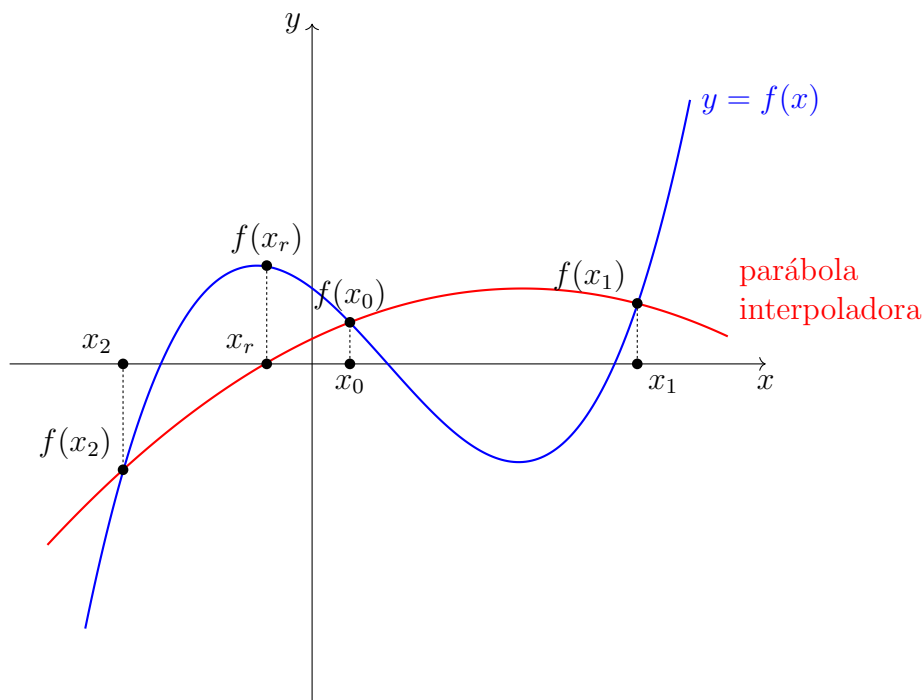


Figure 1: Método de Muller

es habitual disponer de solo dos puntos. En este caso, podemos tomar el punto medio como tercer punto. Cuando hemos encontrado la parábola interpoladora, podemos hallar fácilmente los ceros de esta parábola e iterar el procedimiento.

Dados los puntos $(x_2, f(x_2))$, $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, existe una única parábola

$$y = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$$

que pasa por ellos. Sustituyendo los puntos en la ecuación anterior, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x_0) = c \\ f(x_1) = a(x_1 - x_0)^2 + b(x_1 - x_0) + c \\ f(x_2) = a(x_2 - x_0)^2 + b(x_2 - x_0) + c \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} a &= \frac{\gamma f(x_1) - f(x_0)(1 + \gamma) + f(x_2)}{\gamma(x_1 - x_0)^2(1 + \gamma)} \\ b &= \frac{f(x_1) - f(x_0) - a(x_1 - x_0)^2}{x_1 - x_0} \\ c &= f(x_0) \end{aligned}$$

donde $\gamma = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_0}$. Los ceros de esta parábola se pueden hallar resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x_r = x_0 - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

donde hemos tomado el signo de la raíz como el signo de b para garantizar que la raíz obtenida esté entre los tres puntos de partida. Una vez hallado este punto, tenemos que descartar uno de los puntos iniciales antes de iterar el procedimiento.

Si $x_r > x_0$, los tres puntos pasan a ser x_0, x_r, x_1 . Por otro lado, si $x_r < x_0$, nos quedaremos con los puntos x_2, x_r, x_0 . Este procedimiento se detiene en el momento en que $|f(x_r)|$ o $|x_2 - x_1|$ sean tan pequeños como queramos.

El método de Muller mantiene el cero de la función acotado en todo momento, de forma que no presenta problemas de convergencia.

Método de Ridders

El **método de Ridders** [2] es un método iterativo usado para hallar un cero de una función continua definida sobre un intervalo $[x_1, x_2]$ tal que $f(x_1)f(x_2) < 0$. El metodo está basado en el método de *regula falsi* y usa una función exponencial para ir hallando mejores aproximaciones del cero de la función f .

El método empieza definiendo el punto medio del intervalo de partida $[x_1, x_2]$, $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Ahora queremos encontrar la única función exponencial $e^{(x-x_1)Q}$ tal que la nueva función

$$g(x) = f(x)e^{(x-x_1)Q}$$

cumpla la condición

$$g(x_3) = \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}.$$

Desarrollando esta última condición, llegamos a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$f(x_2)e^{2(x_3-x_1)Q} - 2f(x_3)e^{(x_3-x_1)Q} + f(x_1) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, llegamos a

$$e^{(x_3-x_1)Q} = \frac{f(x_3) + \text{sign}(f(x_2))\sqrt{(f(x_3))^2 - f(x_1)f(x_2)}}{f(x_2)}.$$

Ahora podemos aplicar el método de *regula falsi* a los puntos $(x_1, g(x_1))$ i $(x_2, g(x_2))$ y encontramos

$$x_4 = x_3 + (x_3 - x_1) \frac{\text{sign}(f(x_1) - f(x_2)) f(x_3)}{\sqrt{(f(x_3))^2 - f(x_1)f(x_2)}}.$$

Ahora disponemos de cuatro puntos x_1 , x_2 , x_3 y x_4 . Debemos descartar dos de los puntos para poder volver a empezar el método. Si hay cambio de signo de la función entre x_3 y x_4 , tomaremos el intervalo $[x_3, x_4]$ como nuevo intervalo de partida para la siguiente iteración. En caso contrario, buscaremos el cambio de signo entre x_1 y x_4 , y entre x_2 y x_4 .

El procedimiento termina en el momento en que $f(x_i)$ sea tan cercano a cero como se quiera, o cuando el intervalo de partida sea tan pequeño como se quiera.

Notemos que el método de Ridders mantiene la raíz acotada en cada iteración, de modo que no presenta problemas de convergencia. Es sustancialmente más rápido que otros métodos como el de la bisección o el de *regula falsi*, y de velocidad comparable al método de Muller o de Newton–Raphson, siendo más simple que estos dos últimos.

Se pide:

1. Crear dos funciones, llamadas `muller` y `ridders`, que reciban los parámetros necesarios (siguiendo las ideas de bisección, regula-falsi y Newton–Raphson vistos en clase) y que hallen un cero de una función dada. Deben guardar también el número de iteraciones ejecutadas.
2. Crear un programa principal que compare estos dos métodos con los métodos de la bisección, regula-falsi y Newton–Raphson vistos en clase para una cierta función. Será especialmente interesante comparar la velocidad de los distintos métodos usando el número de iteraciones.

Para este apartado puede usarse la función

$$f(x) = e^{0.75x} - 3 \sin(1.25x),$$

definida en el intervalo $[0, 1.2]$. El cero de la función está en $x \approx 0.362119323514410$.

Observación

Esta actividad puede hacerse en grupos de 1–3 personas. Cada miembro del grupo tiene que entregar el mismo archivo `*.zip` (ver Formato de entrega) y tanto en el código (por ejemplo con un comentario) como en el pdf debe aparecer el nombre de todos los integrantes del grupo.

Formato de entrega

La resolución numérica debe hacerse usando el lenguaje de programación C++. Si se desea entregar algún documento de texto, debe estar escrita usando \LaTeX , y el documento tiene que ser un PDF.

Tanto el documento con las posibles explicaciones como los ficheros de código deben entregarse en un único archivo comprimido `*.zip`.

Referencias

- [1] D.E. Muller, “A method for solving algebraic equations using an automatic computer”, *Math. Comp.* **10**: 979–980, 1956. DOI: [10.1090/S0025-5718-1956-0083822-0](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1956-0083822-0). 1
- [2] C. Ridders, “A new algorithm for computing a single root of a real continuous function”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regul. Pap.* **26**(11):979–980, 1979. DOI: [10.1109/TCS.1979.1084580](https://doi.org/10.1109/TCS.1979.1084580). 2