Monitoría Ecuaciones Simultáneas - Identificación

AUTHOR
José Miguel Arias Mejía

Identificación de un modelo de ecuaciones simultáneas

Identificación para un modelo con dos ecuaciones simultáneas

En un modelo con dos ecuaciones simultáneas, se tienen dos variables endógenas que se explican entre ellas:

$$y_1 = \beta_{1,0} + \alpha_1 y_2 + \mathbf{z_1}\boldsymbol{\beta_1} + u_1 \quad (1)$$

$$y_2 = \beta_{2,0} + \alpha_2 y_1 + \mathbf{z_2}\boldsymbol{\beta_2} + u_2 \quad (2)$$

El problema en este modelo es que uno de los regresores (el regresor endógeno) de cada ecuación, se correlacionará con el error estocástico.

Para saber si el modelo *está identificado* (es decir, si tiene una solución única), hay dos condiciones que deben cumplir **todas** las ecuaciones del modelo:

1. **Condición de orden (Necesaria):** al menos una de las variables exógenas del modelo debe estar excluida de la ecuación.

   $\mathbf{z_2}\boldsymbol{\beta_2}$ están excluidas de la ecuación (1).

   $\mathbf{z_1}\boldsymbol{\beta_1}$ están excluidas de la ecuación (2).

2. **Condición de rango (Necesaria y Suficiente):** alguna de las demás ecuaciones contiene al menos una de esas variables exógenas del modelo excluidas de la ecuación.

   $\mathbf{z_2}\boldsymbol{\beta_2}$, excluidas de la ecuación (1), están incluidas en (2).

   Por lo tanto, la ecuación (1) está identificada.

   $\mathbf{z_1}\boldsymbol{\beta_1}$, excluidas de la ecuación (2), están incluidas en (1).

   Por lo tanto, la ecuación (2) está identificada.

Identificación para un modelo con n ecuaciones simultáneas

M = Número de variables endógenas del modelo.

m_i = Número de variables endógenas en la ecuación i.

K = Número de variables exógenas del modelo.

k_i = Número de variables exógenas en la ecuación i.

1. **Condición de orden (Necesaria):**

1.1. Encuentro $K - K_i$ para cada ecuación.

1.2. Encuentro $m_i - 1$ para cada ecuación.

1.3. Si $K - k_i \geq m_i - 1$, se cumple la condición de orden. (En igualdad, identificación exacta, en desigualdad *"mayor que"*, sobreidentificación).

⚠️ Recordar que en el enfoque de MC2E se puede tener un pequeño grado de sobreidentificación.

2. **Condición de rango (Necesaria y Suficiente):**

2.1. Para cada ecuación, construyo matrices de dimensiones $(M-1),(M-1)$ con los coeficientes que tienen en las demás ecuaciones las variables **excluidas** de esta ecuación. ⚠️ Puede haber una matriz o varias.

2.2. Calculo el determinante de las matrices.

2.3. Si al menos un determinante es distinto de cero, la ecuación está identificada.

Ejemplo de varias matrices en la condición de rango

Considera un modelo con tres ecuaciones:

1. $y_1 = \alpha y_2 + \beta x_1$
2. $y_2 = \gamma y_3 + \delta x_2 + \epsilon x_3$
3. $y_3 = \zeta y_1 + \eta x_1 + \theta x_3$

Para la primera ecuación $y_1 = \alpha y_2 + \beta x_1$, las variables que no aparecen son y_3, x_2, y x_3. Esas son las variables que se pueden usar para construir las posibles submatrices $(M-1)(M-1)$.

Entonces, podrías construir diferentes submatrices excluyendo diferentes combinaciones de estas variables. Por ejemplo:

1. Excluir y_3 y x_2, formando una matriz con las columnas correspondientes a x_3.
2. Excluir y_3 y x_3, formando una matriz con las columnas correspondientes a x_2.

Ambas submatrices tendrán su propio determinante, y si uno de ellos es distinto de cero, la ecuación estará identificada. Este ejemplo muestra correctamente cómo para una misma ecuación puede haber más de una matriz.

Elaborado con ChatGPT

Ejemplo de clase, determinación de identificación de un modelo

Identificación

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea el siguiente sistema de ecuaciones donde Y son las variables endógenas y X las exógenas:

$$\begin{array}{llllllllllllllll}
Y_{1t} & - & \beta_{10} & & & - & \beta_{12}Y_{2t} & - & \beta_{13}Y_{3t} & - & \gamma_{11}X_{1t} & & & & & = & u_{1t} & (1) \\
Y_{2t} & - & \beta_{20} & & & & & - & \beta_{23}Y_{3t} & - & \gamma_{21}X_{1t} & - & \gamma_{22}X_{2t} & & & = & u_{2t} & (2) \\
Y_{3t} & - & \beta_{30} & - & \beta_{31}Y_{1t} & & & & & - & \gamma_{31}X_{1t} & - & \gamma_{32}X_{2t} & & & = & u_{3t} & (3) \\
Y_{4t} & - & \beta_{40} & - & \beta_{41}Y_{1t} & - & \beta_{42}Y_{2t} & & & & & & & - & \gamma_{43}X_{3t} & = & u_{4t} & (4)
\end{array}$$

Para facilitar las identificación se construyen las siguientes tablas:

Ecuación	**1**	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
(1)	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
(2)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
(3)	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
(4)	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Condición de orden:

Ecuación	**# de exógenas excluidas (K-k)**	**# de endógenas incluidas menos 1 (m-1)**	**¿Identificada?**
(1)	2	2	Exactamente
(2)	1	1	Exactamente
(3)	1	1	Exactamente
(4)	2	2	Exactamente

Consideremos la primera ecuación. Para que esta ecuación esté identificada, se debe obtener por lo menos un determinante diferente de cero de orden 3×3, a partir de los coeficientes de las variables excluidas de esta ecuación, pero incluidas en otras: Y_4, X_2 y X_3. Se tiene entonces la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{bmatrix}$$

El determinante de A es cero, por lo que su rango es menor que 3, con lo cual no se satisface la condición de rango y por tanto no está identificada. Queda para demostrar la condición de rango para las otras ecuaciones y determinar si están o no identificadas (ayuda: la ecuacún 2 y 3 no están identificadas, mientras que la 4 si lo está)

Diapositivas de clase del profesor Gustavo García

Ejemplo con código en R

Usaré librerías distintas a las del profesor para hallar el determinante de la condición de rango. Utilizaré el lenguaje **Yacas** que es un lenguaje para representar símbolos algebráicos y hacer operaciones matemáticas con ellos. Para utilizarlo en R, podemos instalar el paquete **Ryacas**.

```
# Cargar el paquete Ryacas
library(Ryacas)

# Definir las variables simbólicas
```

```
gamma22 <- ysym("gamma22")
gamma32 <- ysym("gamma32")
gamma43 <- ysym("gamma43")

# Crear la matriz en formato Yacas: es una lista de listas con los valores de la matriz en su inter
mat_str <- "List(List(0, -gamma22, 0), List(0, -gamma32, 0), List(1, 0, -gamma43))"

# Cálculo del determinante
determinant <- yac_str(paste("Determinant(", mat_str, ")"))

# Simplificación del determinante (innecesario en este ejemplo, pero puede ser necesario cuando el
determinant_simplified <- yac_str(paste("Simplify(", determinant, ")"))

# Mostrar el determinante hallado
print(determinant_simplified)
```

```
[1] "0"
```

Ejercicio 19.11 Gujarati

19.11. La tabla 19.3 es un modelo de cinco ecuaciones con cinco variables endógenas Y y cuatro variables exógenas X:

TABLA 19.3

	Coeficientes de las variables								
Núm. de ecuación	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	β_{12}	0	β_{14}	0	γ_{11}	0	0	γ_{14}
2	0	1	β_{23}	β_{24}	0	0	γ_{22}	γ_{23}	0
3	β_{31}	0	1	β_{34}	β_{35}	0	0	γ_{33}	γ_{34}
4	0	β_{42}	0	1	0	γ_{41}	0	γ_{43}	0
5	β_{51}	0	0	β_{54}	1	0	γ_{52}	γ_{53}	0

Determine la identificabilidad de cada ecuación con la ayuda de las condiciones de orden y de rango para la identificación.

Tomado del libro de Gujarati, capítulo 19

Condición de orden:

$$K = 4, k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2, k_4 = 2, k_5 = 2$$

$$M = 5, m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 4, m_4 = 2, m_5 = 3$$

La condición se cumple siempre que $K - k_i \geq m_i - 1$.

Para la ecuación 1: $K - k_1 \geq m_1 - 1: \qquad 4 - 2 > 2 - 1$

Para la ecuación 2: $K - k_2 \geq m_2 - 1: \qquad 4 - 2 = 3 - 1$

Para la ecuación 3: $K - k_3 \geq m_3 - 1: \qquad 4 - 2 < 4 - 1$

Para la ecuación 4: $K - k_4 \geq m_4 - 1$: $4 - 2 > 2 - 1$

Para la ecuación 5: $K - k_5 \geq m_5 - 1$: $4 - 2 = 3 - 1$

La condición de orden es necesaria, más no suficiente. Al ser necesaria, si no se cumple para alguna ecuación, podemos afirmar que no está identificada.

Condición de rango: El determinante de al menos una de las matrices $(M-1) \times (M-1)$ de las variables excluidas de cada ecuación es distinto de cero.

Para la primera ecuación:

```
# Cargar el paquete Ryacas
library(Ryacas)

# Definir las variables simbólicas
beta23 <- ysym("beta23")
beta35 <- ysym("beta35")
gamma22 <- ysym("gamma22")
gamma52 <- ysym("gamma52")
gamma23 <- ysym("gamma23")
gamma33 <- ysym("gamma33")
gamma43 <- ysym("gamma43")
gamma53 <- ysym("gamma53")

# Crear la matriz en formato Yacas: es una lista de listas con los valores de la matriz en su inter
mat_str <- "List(List(beta23, 0, gamma22, gamma23), List(1, beta35, 0, gamma33), List(0, 0, 0, gamm

# Cálculo del determinante
determinant <- yac_str(paste("Determinant(", mat_str, ")"))

# Simplificación del determinante (innecesario en este ejemplo, pero puede ser necesario cuando el
determinant_simplified <- yac_str(paste("Simplify(", determinant, ")"))

# Mostrar el determinante hallado
print(determinant_simplified)
```

```
[1] "-(gamma43*beta23*beta35*gamma52+gamma22*gamma43)"
```

Para la segunda ecuación:

```
# Cargar el paquete Ryacas
library(Ryacas)

# Definir las variables simbólicas
gamma11 <- ysym("gamma11")
```

```r
gamma14 <- ysym("gamma14")
beta31 <- ysym("beta31")
beta35 <- ysym("beta35")
gamma41 <- ysym("gamma41")
beta51 <- ysym("beta51")

# Crear la matriz en formato Yacas: es una lista de listas con los valores de la matriz en su inter
mat_str <- "List(List(1,0,gamma11,gamma14), List(beta31,beta35,0,gamma14), List(0,0,gamma41,0), Lis

# Cálculo del determinante
determinant <- yac_str(paste("Determinant(", mat_str, ")"))

# Simplificación del determinante (innecesario en este ejemplo, pero puede ser necesario cuando el
determinant_simplified <- yac_str(paste("Simplify(", determinant, ")"))

# Mostrar el determinante hallado
print(determinant_simplified)
```

```
[1] "gamma14*beta31*gamma41-(gamma14*gamma41+gamma14*gamma41*beta35*beta51)"
```

Para la tercera ecuación no podemos crear una matriz de dimensiones $(M-1) \times (M-1)$.

Para la cuarta ecuación:

Podemos crear varias matrices de dimensiones $(M-1) \times (M-1)$.

Comenzamos con Y_1, Y_3, Y_5, X_2

```r
# Cargar el paquete Ryacas
library(Ryacas)

# Definir las variables simbólicas
beta23 <- ysym("beta23")
gamma22 <- ysym("gamma22")
beta31 <- ysym("beta31")
beta35 <- ysym("beta35")
beta51 <- ysym("beta51")
gamma52 <- ysym("gamma52")

# Crear la matriz en formato Yacas: es una lista de listas con los valores de la matriz en su inter
mat_str <- "List(List(1,0,0,0), List(0,beta23,0,gamma22), List(beta31,1,beta35,0), List(beta51,0,1,

# Cálculo del determinante
determinant <- yac_str(paste("Determinant(", mat_str, ")"))

# Simplificación del determinante (innecesario en este ejemplo, pero puede ser necesario cuando el
determinant_simplified <- yac_str(paste("Simplify(", determinant, ")"))
```

```
# Mostrar el determinante hallado
print(determinant_simplified)
```

```
[1] "beta23*beta35*gamma52+gamma22"
```

Dado que ya encontré un determinante distinto de cero, paso a la siguiente ecuación.

Para la quinta ecuación:

```
# Cargar el paquete Ryacas
library(Ryacas)

# Definir las variables simbólicas
beta12 <- ysym("beta12")
gamma11 <- ysym("gamma11")
gamma14 <- ysym("gamma14")
beta23 <- ysym("beta23")
beta42 <- ysym("beta42")
beta41 <- ysym("beta41")

# Crear la matriz en formato Yacas: es una lista de listas con los valores de la matriz en su inter
mat_str <- "List(List(beta12, 0, gamma11, gamma14), List(1, beta23, 0, 0), List(0, 1, 0, gamma14),

# Cálculo del determinante
determinant <- yac_str(paste("Determinant(", mat_str, ")"))

# Simplificación del determinante (innecesario en este ejemplo, pero puede ser necesario cuando el
determinant_simplified <- yac_str(paste("Simplify(", determinant, ")"))

# Mostrar el determinante hallado
print(determinant_simplified)
```

```
[1] "gamma11*beta23*gamma14*beta42-(gamma14*gamma41+beta23*gamma14*gamma41*beta12)"
```

Podemos afirmar que hay identificación cuando al menos un determinante es distinto de cero. No hay identificación, en cambio, cuando todos los determinantes son cero, o cuando no puedo construir una de las ecuaciones.

Ejercicio 19.12 Gujarati

19.12. Considere el siguiente modelo keynesiano ampliado de determinación del ingreso:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Función de consumo:} && C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t - \beta_3 T_t + u_{1t} \\
&\textit{Función de inversión:} && I_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + u_{2t} \\
&\textit{Función de impuestos:} && T_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + u_{3t} \\
&\textit{Identidad del ingreso:} && Y_t = C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

en donde $C =$ gasto de consumo
$Y =$ ingreso
$I =$ inversión
$T =$ impuestos
$G =$ gasto gubernamental
$u =$ términos de perturbación

En el modelo, las variables endógenas son C, I, T y Y, y las variables predeterminadas son G y Y_{t-1}.

Al aplicar la condición de orden, verifique la identificabilidad de cada una de las ecuaciones en el sistema y del sistema como un todo. ¿Qué sucedería si r_t, la tasa de interés, que se ha supuesto exógena, apareciera al lado derecho de la función de inversión?

Tomado del libro de Gujarati, capítulo 19

Condición de orden:

$$K = 2, k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 1$$

$$M = 4, m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 2, m_4 = 3$$

Para la primera ecuación: $K-k_1 m_1 - 1 : -0 = 3-1 $ Para la segunda ecuación: $K - k_2 \geq m_2 - 1 : \qquad 2 - 1 = 2 - 1$ Para la tercera ecuación: $K - k_3 \geq m_3 - 1 : \qquad 2 - 0 > 2 - 1$ Para la cuarta ecuación: $K - k_4 \geq m_4 - 1 : \qquad 2 - 1 < 3 - 1$

Si agregamos la tasa de interés como variable exógena en la ecuación de la inversión:

Para la primera ecuación: $K-k_1 m_1 - 1 : -0 > 3-1 $ Para la segunda ecuación: $K - k_2 \geq m_2 - 1 : \qquad 3 - 2 = 2 - 1$ Para la tercera ecuación: $K - k_3 \geq m_3 - 1 : \qquad 3 - 0 > 2 - 1$ Para la cuarta ecuación: $K - k_4 \geq m_4 - 1 : \qquad 3 - 1 = 3 - 1$

A pesar de que en el ejercicio no me lo están pidiendo, habría que comprobar con la condición de rango si las cuatro ecuaciones están de verdad identificadas. Recordar que la condición de orden es necesaria pero no suficiente.