

Universität zu Köln



PROFESSUR FÜR NUMERISCHE SIMULATION

MATHEMATISCHES INSTITUT

Projekt 04: “First Order, not good it is!”
zur Vorlesung “Numerik
partieller Differentialgleichungen II”

Durchgeführt von der AG

“SUPREME LEADER SNOKE”

Mitglieder:

Lena Tychsen	4779096	lena.tychsen@googlemail.com
Albert Meeser	3953980	meesera@smail.uni-koeln.de
Johannes Markert	5808332	johannes.markert@jmark.de

Köln - 04.02.2016

In diesem Projekt soll das DGSEM Verfahren auf die zweidimensionalen kompressiblen linearen Eulergleichungen (kompressiblen Akustik-Gleichungen) angewandt werden. Die Gleichungen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} p \\ 0 \\ \lambda v_1 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho} p \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Dabei bezeichnet v_1 , bzw. v_2 die Geschwindigkeit einer Akustikwelle in x -, bzw. y -Richtung. Der Druck der Welle ist durch p gegeben. Zusätzlich beschreiben die Konstanten $\rho > 0$ die Dichte und $\lambda > 0$ die sogenannte „zweite Lamé Konstante“.

Ziel dieses Projekts ist es, ein zweidimensionales DGSEM Verfahren zu implementieren und zu verifizieren. Verwendet werden im Folgenden stets das Low- Storage-4th-Order Runge-Kutta-Verfahren des letzten Projektes zur Zeitintegration. Der Zeitschritt wird stets adaptiv durch die CFL-Bedingung gemäß Vorlesung bestimmt werden.

Aufgabe 1

Behauptung: Sei nun $\rho = \lambda = 1$. Es gilt, dass

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi(x - t)) \\ 4 + \cos(2\pi(y - t)) \\ 6 + \sin(2\pi(x - t)) + \cos(2\pi(y - t)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

die zweidimensionalen linearen Eulergleichungen (1) auf dem Gebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ mit periodischen Randbedingungen exakt löst.

Beweis. Unter den oben genannten Voraussetzungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -2\pi \cos(2\pi(x - t)) & \frac{dp}{dt} &= -2\pi \cos(2\pi(x - t)) + 2\pi \sin(2\pi(y - t)) \\ \frac{dv_1}{dx} &= 2\pi \cos(2\pi(x - t)) & \frac{dp}{dx} &= 2\pi \cos(2\pi(x - t)) \\ \frac{dv_2}{dt} &= 2\pi \sin(2\pi(y - t)) & \frac{dp}{dy} &= -2\pi \sin(2\pi(y - t)) \\ \frac{dv_2}{dy} &= -2\pi \sin(2\pi(y - t)) & \frac{dv_1}{dy} &= 0, \quad \frac{dv_2}{dx} = 0 \end{aligned}$$

Eingesetzt in

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ v_2 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ergibt sich somit

$$\begin{pmatrix} -2\pi \cos(2\pi(x-t)) \\ 2\pi \sin(2\pi(y-t)) \\ -2\pi \cos(2\pi(x-t)) + 2\pi \sin(2\pi(y-t)) \end{pmatrix} + \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 2\pi \cos(2\pi(x-t)) \\ 0 \\ 2\pi \cos(2\pi(x-t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi \sin(2\pi(y-t)) \\ -2\pi \sin(2\pi(y-t)) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad (5)$$

Damit wird die Behauptung, aufgestellt in Gleichung (2), bestätigt. \square

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe wurde ein DGSEM-Verfahren in starker Form für die zweidimensionalen linearen Eulergleichungen unter Verwendung der Legendre-Gauss-Lobatto Punkte implementiert. Als numerischen Fluss wurde der lokale Lax-Friedrich- bzw. Rusanov-Fluss verwendet. Die Randbedingungen wurden als periodisch angenommen. Die Ergebnisse der anhand der Erhaltungsgröße p (Druck) vorgenommenen Untersuchungen bzgl. des Konvergenzverhaltens sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengefasst.

Tabelle 1: Fehler und Konvergenzeigenschaften für $N = 5$ in $t = 1.0$ und mit $CFL = 0.1$.

N_Q	$\Delta x_{eff} = \Delta y_{eff}$	ϵ_{max}	EOC
2	8.333333333333329e-002	7.2566066459671674e-003	–
4	4.166666666666664e-002	1.5736567232416121e-004	5.5271022975099449
8	2.083333333333332e-002	3.0023273192014699e-006	5.7118957853252548
16	1.041666666666666e-002	4.8908812111392308e-008	5.9398430353746114
32	5.208333333333330e-003	7.6589579123265139e-010	5.9968025043945419

Tabelle 2: Fehler und Konvergenzeigenschaften für $N = 6$ in $t = 1.0$ und mit $CFL = 0.1$.

N_Q	$\Delta x_{eff} = \Delta y_{eff}$	ϵ_{max}	EOC
2	7.1428571428571425e-002	8.6944437855507317e-004	–
4	3.5714285714285712e-002	9.3385047357230633e-006	6.5407583591940650
8	1.7857142857142856e-002	8.6390028464222723e-008	6.7561829570347793
16	8.9285714285714281e-003	7.0123284956480347e-010	6.9448274078819257
32	4.4642857142857140e-003	5.5804250109758868e-012	6.8989603852564061

Es ist zu erkennen, dass die erhaltene Konvergenzordnung (EOC) der formalen Ordnung des Verfahrens entspricht. D.h. die experimentelle Konvergenzordnung der Implementierung ist stets $N + 1$.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wurde das zweidimensionale DGSEM-Verfahren auf das Problem *Attacke im Häuserblock* mit den gegebenen Anfangsdaten angewendet.

Abbildungen 1 und 2 zeigen den Messverlauf des Mikrophones in der Zeit für die beiden Simulationen mit jeweils $N = 6$ und $CFL = 0.8$.

Die Anfangsdaten wurden wie folgt gesetzt:

$$v_1 = 0 \tag{6}$$

$$v_2 = \begin{cases} 1, & (x, y) \in W \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

$$p = \begin{cases} 3 \exp(\frac{1}{2}(\frac{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{4})^2}{s})) + 2, & (x, y) \in W \\ 2, & \text{sonst} \end{cases} \tag{8}$$

mit $W := \{(x, y) | 0.4 \leq x \leq 0.6 \wedge 0.1 \leq y \leq 0.4\}$ und $s = 10^{-2}$.

An den äußeren Rändern sind Dirichlet-Randbedingungen angenommen worden mit $(v_1, v_2, p)^T = (0, 0, 2)^T$. Die Hauswände und der untere Rand werden als reflektierende Ränder betrachtet. An einem reflektierenden Rand wird bei einem Wert von $u = (v_1, v_2, p)^T$ der äußere Wert des entsprechenden Riemannproblems auf den orthogonal zum Rand gespiegelten Wert gesetzt, z.B. an der y-Achse auf $\hat{u} = (v_1, -v_2, p)^T$.

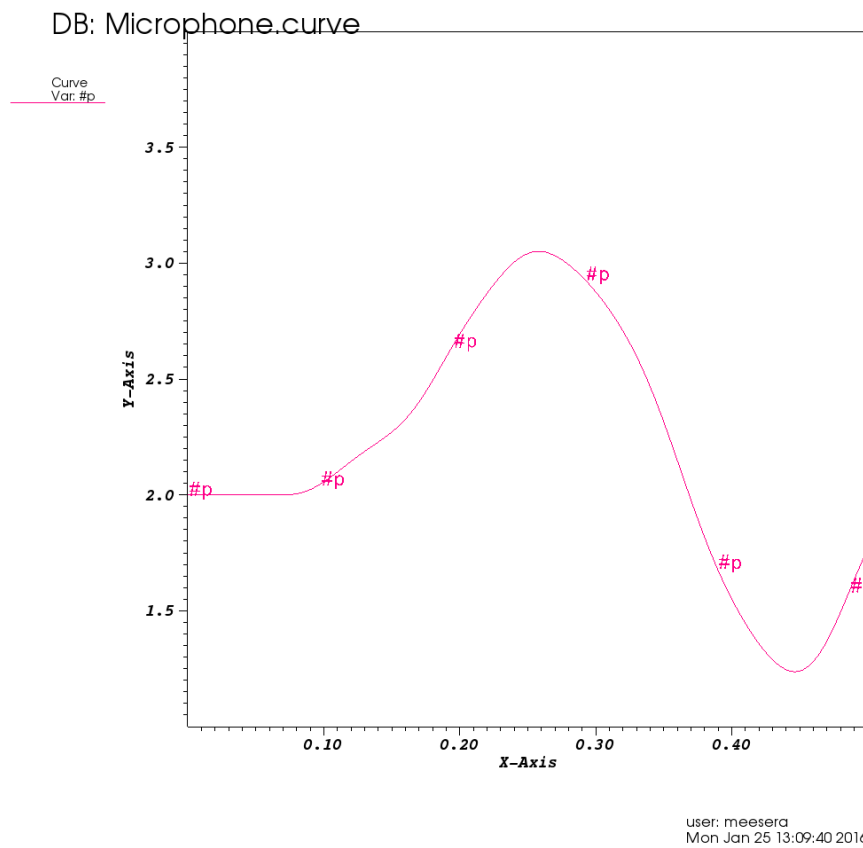


Abbildung 1: Messverlauf des Mikrophones in der Zeit für eine Diskretisierung mit 100 Zellen.

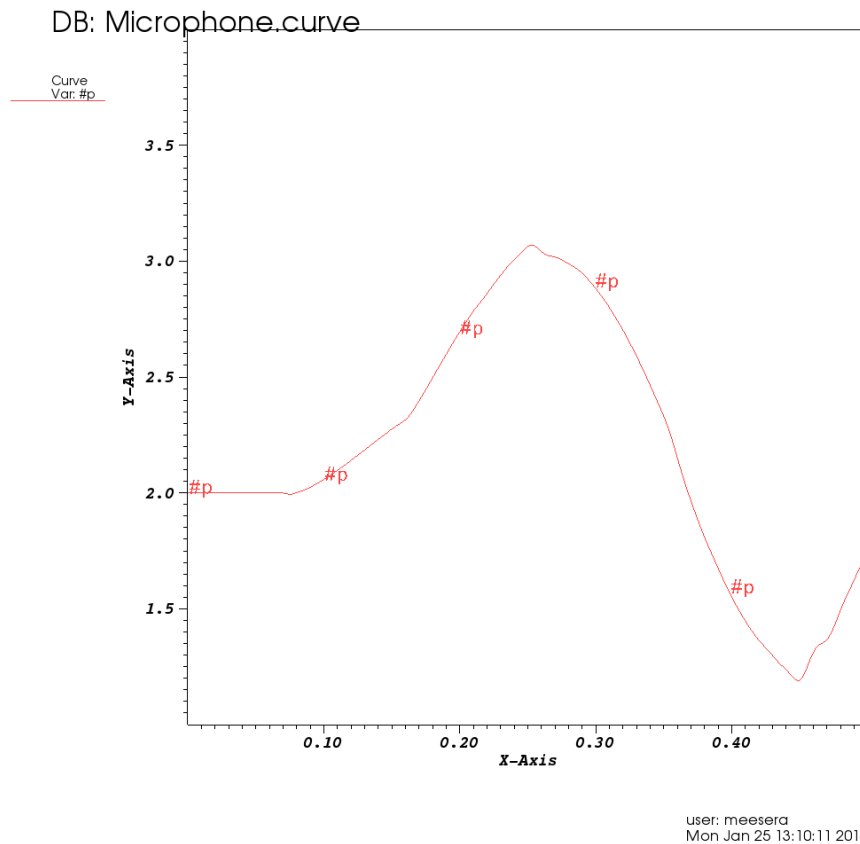
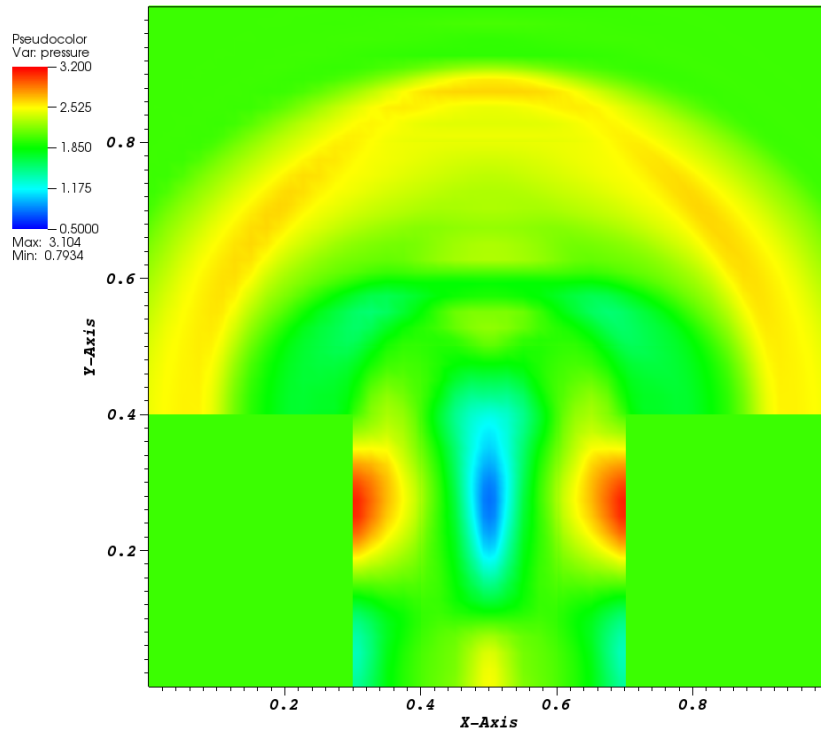


Abbildung 2: Messverlauf des Mikrophones in der Zeit für eine Diskretisierung mit 2500 Zellen.

Es ist zu erkennen wie sich der Druck von dem gezündeten Böller ausbreitet und dann das Mikrophon erreicht. Danach wird er von den reflektierenden Wänden wieder zurückgeworfen. Der Druck nimmt ab, bis er schließlich wieder zum Ausgangsniveau zurückkehrt.

Der Druck auf dem gesamten Gebiet zum Zeitpunkt $t = 0.5$ stellt sich wie in den Abbildungen 3 und 4 dar.

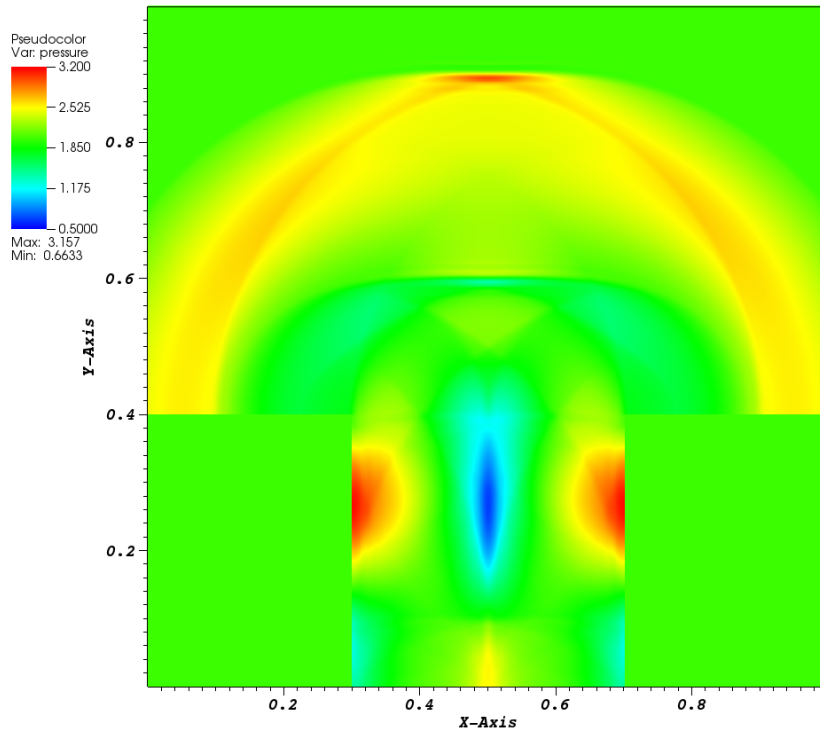
DB: U3088.tec



user: meesera
Mon Jan 25 13:16:45 2016

Abbildung 3: Druck zum Zeitpunkt $t = 0.5$ für eine Diskretisierung mit 100 Zellen.

DB: U3438.tec



user: meesera
Mon Jan 25 13:15:58 2016

Abbildung 4: Druck zum Zeitpunkt $t = 0.5$ für eine Diskretisierung mit 2500 Zellen.

Man erkennt, dass beide Diskretisierungen, fast gleiche Ergebnisse liefern. Lediglich die Stoßwelle für 2500 Zellen erscheint stärker ausgeprägt und scharfkantiger zu sein. Dies spricht für eine höhere, und damit bessere Auflösung des physikalischen Vorgangs. Auffällig ist jedoch die tieferste Stelle an der vordersten Spitze der Stoßwelle. Dies erscheint uns eher unatürlich. Dies könnte ein numerisches Artefakt sein. Interessant ist auch das Auftreten negativer Druckwerte, welche durch Überspringen des Systems entstehen. Ein höherer Normaldruck, in diesem Projekt beträgt er $p_{normal} = 2$, könnte das verhindern.