LÓGICA MATEMÁTICA

Organizador Jeferson Afonso Lopes de Souza

ser educacional
gente criando o futuro

Pearson

Lógica matemática

Lógica matemática

Organizador

Jeferson Afonso Lopes de Souza

Doutorando em engenharia mecatrônica pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP

Mestre em engenharia de controle e automação mecânica pela Escola Politécnica da USP

Graduação em engenharia mecânica com ênfase em automação e sistemas pela Escola Politécnica da USP

Professor do curso de engenharia mecânica/mecatrônica da Escola de Engenharia do Centro Universitário da Fundação Santo André

ser educacional
gente criando o futuro

PEARSON

Diretora de produtos: Gabriela Diuana
Supervisora de produção editorial: Silvana Afonso
Coordenador de produtos: Vinícius Souza
Editor: Casa de Ideias
Redação: Juliana Lambert
Projeto gráfico e diagramação: Casa de Ideias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lógica matemática / organizador Jefferson Afonso Lopes de Souza. – São Paulo : Pearson Education do Brasil, 2016.

ISBN 978-85-430-1932-1

1. Lógica simbólica e matemática I. Souza, Jefferson Afonso Lopes de.

16-06340 CDD-511.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica matemática 511.3

2016
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education
Avenida Santa Marina, 1193
CEP 05036-001 – São Paulo – SP – Brasil
Fone: 11 3821-3542
universidades.atendimento@pearson.com

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nos catálogos de livros universitários há vários títulos cuja primeira edição saiu há 40, 50 anos, ou mais. São livros que, graças à identificação da edição na capa (e somente a ela), têm sua idade revelada. E, ao contrário do que muitos podem imaginar, isso não é um problema. Pelo contrário, são obras conhecidas, adotadas em diversas instituições de ensino, usadas por estudantes dos mais diferentes perfis e reverenciadas pelo que representam para o ensino.

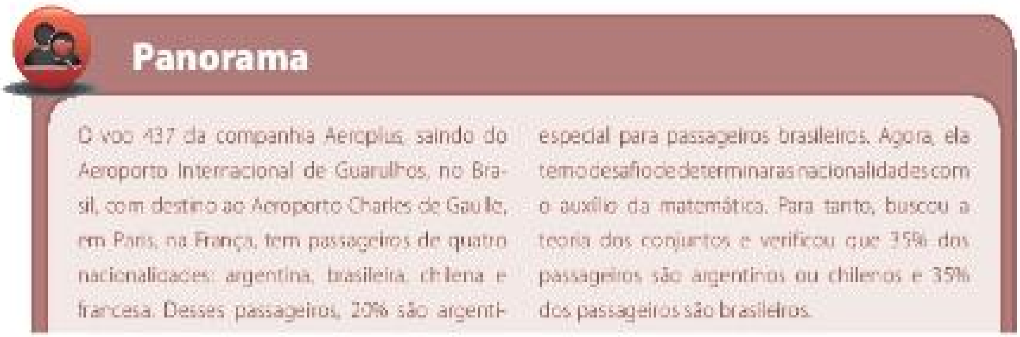
Qual o segredo de sucesso desses livros? O que eles têm de diferente de vários outros que, embora tenham tido boa aceitação em um primeiro momento, não foram tão longe? Em poucas palavras, esses livros se adaptaram às novas realidades ao longo do tempo, entendendo as mudanças pelas quais a sociedade – e, consequentemente, as pessoas – passava e as novas necessidades que se apresentavam.

Para que isso fique mais claro, vamos pensar no seguinte: a maneira como as pessoas aprendiam matemática na década de 1990 é igual ao modo como elas aprendem hoje? Embora os alicerces da disciplina permaneçam os mesmos, a resposta é: não! Nesse intervalo de tempo, ocorreram mudanças significativas – a Internet se consolidou, os celulares se popularizaram, as redes sociais surgiram etc. E todas essas mudanças repercutiram no modo de vida das pessoas, que se tornou mais rápido e desafiador, transformando os fundamentos do processo de ensino/aprendizagem.

Foi com base nisso que nasceu a Bibliografia Universitária Pearson (BUP). Concisos sem serem rasos e simples sem serem simplistas, os livros que compõem esta série são baseados na premissa de que, para atender sob medida às necessidades tanto dos alunos de graduação como das instituições de ensino – independentemente de eles estarem envolvidos com ensino presencial ou a distância –, é preciso um processo amplo e flexível de construção do saber, que leve em conta a realidade em que vivemos.

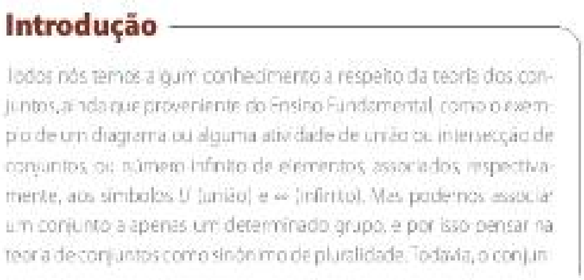
Assim, as obras apresentam de maneira clara os principais conceitos dos temas propostos, trazendo exatamente aquilo que o estudante precisa saber, complementado com aprofundamentos e discussões para reflexão. Além disso, possuem uma estrutura didática que propõe uma dinâmica única, a qual convida o leitor a levar para seu dia a dia os aspectos teóricos apresentados. Veja como isso funciona na prática:

A seção "Panorama" aprofunda os tópicos abordados ao mostrar como eles funcionam na prática, promovendo interessantes reflexões.


Panorama

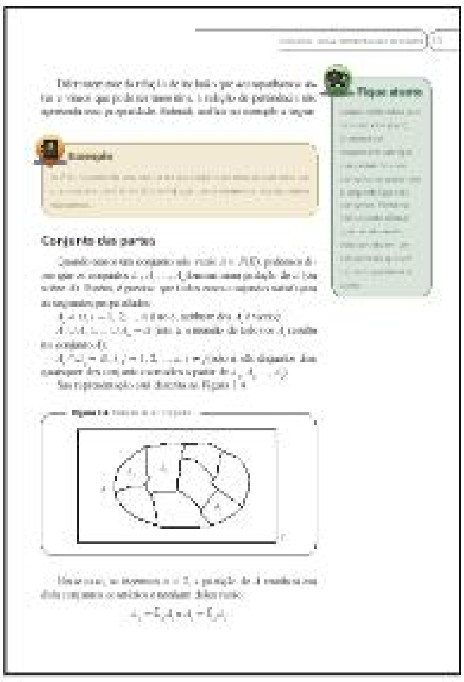
O voo 437 da companhia Aeroplus, saindo do Aeroporto Internacional de Guarulhos, no Brasil, com destino ao Aeroporto Charles de Gaulle, em Paris, na França, tem passageiros de quatro nacionalidades: argentina, brasileira, chilena e francesa. Desses passageiros, 20% são argenti- especial para passageiros brasileiros. Agora, ela tem o desafio de determinar as nacionalidades com o auxílio da matemática. Para tanto, buscou a teoria dos conjuntos e verificou que 35% dos passageiros são argentinos ou chilenos e 35% dos passageiros são brasileiros.

Ao longo do livro, o leitor se depara com vários hipertextos. Classificados como "Saiba mais", "Exemplo", "Fique atento" e "Link", esses hipertextos permitem ao aluno ir além em suas pesquisas, oferecendo-lhe amplas possibilidades de aprofundamento.


Introdução

Todos nós temos algum conhecimento a respeito da teoria dos conjuntos, ainda que proveniente do Ensino Fundamental, como o exemplo de um diagrama ou alguma atividade de união ou intersecção de conjuntos, ou número infinito de elementos, associados, respectivamente, aos símbolos U (união) e ∞ (infinito). Mas podemos associar um conjunto a apenas um determinado grupo, e por isso pensar na teoria de conjuntos como sinônimo de pluralidade. Todavia, o conjun-

A *linguagem dialógica* aproxima o estudante dos temas abordados, eliminando qualquer obstáculo para seu entendimento e incentivando o estudo.



A *diagramação* contribui para que o estudante registre ideias e faça anotações, interagindo com o conteúdo.

Todas essas características deixam claro que os livros da Bibliografia Universitária Pearson constituem um importante aliado para estudantes conectados e professores objetivos – ou seja, para o mundo de hoje – e certamente serão lembrados (e usados) por muito tempo.

Boa leitura!

PREFÁCIO

O objetivo deste livro é apresentar ao leitor os conceitos, os teoremas e as aplicações práticas da lógica matemática. O conhecimento de lógica é fundamental para a formação de qualquer profissional, independentemente de sua área de atuação. Isso é algo justificável, pois a lógica está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, desde a formulação das hipóteses para a demonstração e conclusão de teoremas na matemática, até a elaboração dos argumentos para a demonstração de uma tese de um advogado ou de um economista. Além disso, a lógica está presente na decisão da ação a ser tomada por um administrador diante de um problema.

Na área de tecnologia, a lógica é algo fundamental. Nesse campo de conhecimento, em particular, ela está associada ao controle de máquinas e processos, indo desde o sistema de controle para os empréstimos de um livro em uma biblioteca até o controle de painel elétrico de uma aeronave. Os teoremas e as regras da lógica formaram a base para o desenvolvimento da computação e dos elementos de chaveamento, tanto de hardware quanto de software em sistemas digitais. A Internet, por exemplo, não existiria, tampouco o seu smartphone, se a lógica matemática não tivesse sido desenvolvida e estudada.

Dessa forma, este livro certamente contribuirá para o correto aprendizado da lógica matemática, além de servir como guia para futuras consultas. Para sair da abstração associada aos teoremas, as quatro unidades apresentam exemplos práticos de situações do cotidiano que vão auxiliá-lo na assimilação de cada tópico abordado. Há também inúmeros boxes ilustrativos para ajudar a elucidar eventuais dúvidas ao longo do estudo.

Boa leitura!

Jeferson A. L. Souza

Conjuntos: teoria, representação e operações

Objetivos de aprendizagem

- Discutir a teoria dos conjuntos e conceitos: notação, representação, subconjuntos e diferentes tipos de conjuntos.
- Analisar as relações de igualdade, inclusão e pertinência.
- Compreender o que são conjunto das partes e conjunto complementar.
- Identificar as operações que envolvem conjuntos: união, intersecção e diferença.
- Verificar as Leis de Augustus De Morgan.
- Entender o conceito de produto cartesiano.

Temas

- **1 – Álgebra dos conjuntos**
  No primeiro tema desta unidade vamos rever a teoria dos conjuntos e sua notação e representação, além da teoria dos subconjuntos. Os conceitos de conjunto unitário, conjunto vazio, bem como conjunto finito e infinito também fazem parte deste estudo.
- **2 – Relações de igualdade e de inclusão**
  Vamos abordar conjuntos iguais e as relações de inclusão e de pertinência, além de verificar o que são conjunto das partes e conjunto complementar.
- **3 – Operações com conjuntos**
  Para finalizar esta unidade, você aprenderá as seguintes operações que envolvem conjuntos: união ou reunião; intersecção; diferença de conjuntos e diferença simétrica. Este estudo contempla ainda as Leis de Augustus De Morgan e o conceito de produto cartesiano.

Introdução

Todos nós temos algum conhecimento a respeito da teoria dos conjuntos, ainda que proveniente do Ensino Fundamental, como o exemplo de um diagrama ou alguma atividade de união ou intersecção de conjuntos, ou número infinito de elementos, associados, respectivamente, aos símbolos *U* (união) e ∞ (infinito). Mas podemos associar um conjunto a apenas um determinado grupo, e por isso pensar na teoria de conjuntos como sinônimo de pluralidade. Todavia, o conjunto pode conter um único elemento ou até mesmo ser vazio. Nesta primeira unidade, vamos enunciar a teoria dos conjuntos e rever conceitos básicos para dar o embasamento necessário para o estudo da lógica matemática.

A revisão da teoria, as notações, as representações e os símbolos serão vitais para o nosso estudo. Vamos abordar os subconjuntos e cada tipo (unitário, vazio, finito e infinito) sempre com representações e exemplos.

As relações de igualdade e de inclusão estão presentes nesta unidade, bem como a ideia de conjunto das partes e conjunto complementar.

Por fim, você vai rever as operações que envolvem conjuntos, como união ou reunião; intersecção e diferença. Terão também destaque as Leis de Augustus De Morgan e o conceito de produto cartesiano, bem como as suas propriedades.

Aproveite essa oportunidade para rever e também aprender mais sobre a teoria dos conjuntos. No fim da unidade você será convidado a testar os conhecimentos adquiridos nos exercícios.

Álgebra dos conjuntos

Teoria dos conjuntos

O tema "conjuntos" não é novidade, afinal essa matéria foi apresentada a você ainda no Ensino Fundamental I. Tal conhecimento será essencial para a melhor compreensão dos elementos de lógica que serão estudados ao longo deste livro.

Como já faz um bom tempo que você acompanhou esse conteúdo, está na hora de rever os principais conceitos. Para começar, vale entender um pouco mais a respeito do conceito matemático de conjunto. A boa notícia é que ele não foge muito da linguagem comum, entendida como um agrupamento, coleção, classe, família ou sistema. A definição de conjunto pode ser entendida do seguinte modo:

> Conjunto é todo agrupamento de objetos, flores, animais ou mesmo pessoas, desde que seus componentes tenham características semelhantes. Conjunto é, portanto, um aglomerado num todo de objetos determinados, os quais são chamados elementos do conjunto. Por exemplo, cada um de nós é um elemento do conjunto de moradores de determinada cidade (LEITE; CASTANHEIRA, 2014, p. 33).

Não há como falar em conjunto sem mencionar os elementos, isto é, os objetos que o formam. Se pensarmos em um conjunto de vogais, logo os elementos seriam a, e, i, o, u. Fica claro que b, por ser uma consoante, não faz parte desse conjunto. Um elemento de conjunto não precisa ser necessariamente uma letra. Também pode ser um número, uma carta de baralho, um país e o que mais a sua imaginação desejar.

Geralmente, um conjunto é indicado por uma letra latina maiúscula, como A, B, C, D; e os seus elementos são representados entre chaves por letras minúsculas, números ou figuras.

Se o objetivo é representar que a letra a é elemento do conjunto A, dizemos que $a \in A$ (a **pertence** a A). Se dissermos que $d \notin A$ (d **não pertence** a A), significa que a letra d não é elemento comum do conjunto A. Apenas com esses exemplos básicos provavelmente você já começou a recordar o conteúdo dos conjuntos e as principais notações.

Saiba mais

O símbolo $\in$ é uma versão da letra grega *épsilon*, o que representa na matemática a indicação de pertinência. Se a ideia é indicar que tal elemento não pertence ao conjunto, o símbolo que representa a não pertinência é representado por $\notin$.

Saiba mais

Quando utilizamos a teoria de conjuntos, temos de admitir a existência de um conjunto U (universo) ao qual pertencem todos os elementos considerados em determinado assunto. Por exemplo, um conjunto universo pode representar todos os habitantes de um país. Já os eleitores podem representar um subconjunto dos habitantes.

Exemplo

Imagine que A é um conjunto de carros, logo:

$$A = \{\text{Gol 2015, Uno 2001, Ford Ka 2010}\}$$

Saiba mais

A teoria dos conjuntos foi desenvolvida em 1872, sendo citada pela primeira vez no trabalho do matemático russo Georg Cantor. Chegou a ser denominada teoria ingênua ou intuitiva em razão da descoberta de alguns paradoxos associados à sua ideia central. Essa contribuição recebeu aperfeiçoamento no século XX, sendo complementada e desenvolvida por vários matemáticos.

Na Tabela 1.1, você confere um resumo dos principais símbolos associados à teoria dos conjuntos.

Tabela 1.1 Principais símbolos utilizados na teoria dos conjuntos.

Símbolo	Significado
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não contém
$\cup$	União
$\cap$	Intersecção
$\varnothing$	Conjunto vazio
∞	Infinito
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\mid$	Tal que
$\rightarrow$	Implica que (então)

Fonte: Leite e Castanheira (2014, p. 44).

Notação e representação

Os elementos de um conjunto ficam separados por vírgulas e entre chaves, conforme exemplo a seguir:

$$A = \{a, b, c\}$$

Quando o conjunto reúne números que não são inteiros (e que já estão separados por vírgula), é recomendável usar ponto e vírgula (;), conforme o exemplo:

$$S = \{1{,}7;\ 2{,}5;\ 3{,}4;\ 4{,}0;\ 5{,}3\}$$

No entanto, não é errado separar esses elementos por vírgulas em um conjunto. Da mesma maneira, um conjunto que reúne os meses com 30 dias pode ser representado por:

{Abril, Junho, Setembro, Novembro}

Em conjuntos infinitos, como no conjunto formado pelos números pares não negativos, também usamos essa notação, conforme verificado no exemplo:

$$\{0, 2, 4, 6, ...\}$$

Ao longo do nosso estudo, você verificará que o conjunto é determinado quando conhecemos uma propriedade característica P de seus elementos, isto é, uma propriedade que somente os elementos daquele conjunto têm. A notação, nesse caso, pode ser representada por:

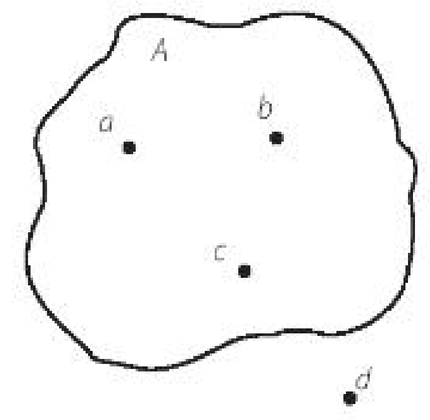
$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

onde a barra posicionada entre o símbolo x e a locução x tem a propriedade P, substituindo a expressão “tal que”.

Na prática, $\{x \mid x \text{ é vogal}\}$ é um modo de indicar o conjunto $\{a, e, i, o, u\}$.

A representação de um conjunto é feita pelo conjunto dos pontos no interior de uma linha que não se entrelaça, conforme mostra a Figura 1.1.

Figura 1.1 Representação de um conjunto.



Dessa forma, os elementos da Figura 1.1 são indicados por pontos no interior da linha. Já o elemento que não pertence ao conjunto está representado pelo ponto d, na região externa à linha. O diagrama representado na figura em questão nos ajuda a compreender a teoria dos conjuntos.

Saiba mais

Não há dúvidas de que os conjuntos numéricos são mais intuitivos e que existem subconjuntos. Como exemplos podem ser citados o conjunto dos números naturais $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, o conjunto dos números inteiros não negativos $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, o conjunto dos números inteiros $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, o conjunto dos números racionais $Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}\}$, sendo $p \in Z$, $q \in Z$, $q \neq 0$, o conjunto dos números reais R e C, além do conjunto dos números complexos. Ao acrescentar o símbolo *, dizemos que zero foi excluído do conjunto. Por outro lado, se incluirmos o símbolo + (mais), indicamos que todos os números negativos foram excluídos daquele conjunto. Do mesmo modo, se acrescentarmos − (menos), indicamos a exclusão dos números positivos.

Fique atento

Um mesmo elemento não pode ser registrado duas ou mais vezes em um mesmo conjunto. Porém, pode acontecer de dois ou mais elementos distintos serem representados pelo mesmo símbolo (nome, número ou letra). Mas é importante providenciar uma maneira de distingui-los, como:

{João (pai), Maria, João (filho)}, $\{c, a_1, s, a_2\}$

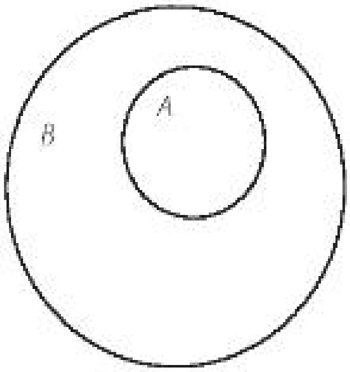
Subconjuntos

Quando temos dois conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A for também elemento de B. Sua representação é feita pela seguinte notação:

$A \subset B$ (A **está contido em** B)

Na Figura 1.2, você pode observar o diagrama de um subconjunto.

Figura 1.2 Subconjunto.



Em símbolos, podemos definir como:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemplo

Na prática, um subconjunto pode ser $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ ou $\{5\} \subset \{5, 6\}$.

Exemplo

Sendo $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6\}$ o subconjunto de A formado pelos elementos de A que são números pares, representamos por:

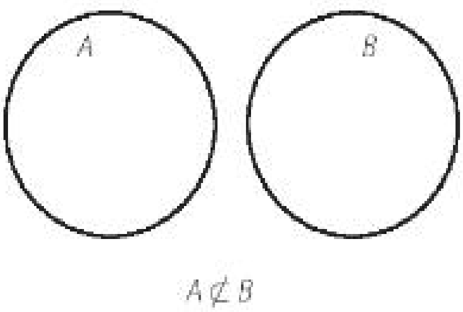
$$B = \{x \subset A \mid x \text{ é par}\}$$

Note que B é o conjunto de elementos pertencentes a A, tal que x é par.

Por outro lado, se A não for subconjunto de B, dizemos que

$A \not\subset B$ (A **não está contido em** B)

Figura 1.3 A não está contido em B.



Conjunto unitário

De maneira distinta da definição de conjunto, associada a um ou mais elementos, pode também existir um conjunto com apenas um elemento: o conjunto unitário. O conjunto representado pelo satélite natural da Terra, por exemplo, tem apenas um elemento: $\{\text{Lua}\}$. Outro exemplo de conjunto unitário pode ser representado pelo conjunto dos números primos, pares e positivos: $\{2\}$.

Conjunto vazio

Já entendemos que não é preciso ter mais de um elemento para formar um conjunto, ainda que os conjuntos nos passem a princípio a ideia de pluralidade ou existência de vários elementos. Mas será que também é possível ter um conjunto vazio? Na matemática não só é possível, como bastante comum.

O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, não tem elementos. Ele é representado pelo símbolo $\varnothing$, que é uma letra de origem greaga chamada *phi*, sendo também representado por chaves vazias: $\{\ \}$.

Na prática, $\{x \mid 0 \cdot x = 7\} = \varnothing$.

Vale lembrar que um conjunto vazio está contido em todos os conjuntos e pode ser entendido como um subconjunto de qualquer conjunto.

Conjunto finito

Dizemos que um conjunto é finito quando se tem uma quantidade limitada de elementos. O conjunto vazio é um bom exemplo, assim como um conjunto formado por todas as letras do alfabeto, que também é um conjunto finito, tendo em vista que podemos determinar com facilidade todos os seus elementos.

Exemplo

Note que o conjunto a seguir é finito, já que seus elementos 1, 2, 3 e 4 estão muito bem definidos:

$$A = \{x \in N \mid x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Nem sempre é tão fácil determinar todos os elementos de um conjunto finito. Imagine determinar um conjunto finito R formado por números inteiros que vão de 1 até 1.000. Nesse caso, a representação pode e deve ser facilitada por meio do uso de reticências:

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 999, 1.000\}$$

Conjunto infinito

Diferentemente do que foi visto até então, o conjunto infinito tem um número ilimitado de elementos. Como exemplo, observe que o conjunto $A = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ tem uma infinidade de números reais entre 0 e 1, sendo portanto um conjunto infinito.

Utilizamos o símbolo ∞ para representar o conceito de infinitos elementos no diagrama de Venn, e reticências na linguagem matemática.

Saiba mais

O símbolo que representa o infinito ∞ foi adotado pela primeira vez em 1665 pelo matemático inglês John Wallis.

Relações de igualdade e de inclusão

Conjuntos iguais

Dizemos que dois conjuntos são iguais quando todo elemento de A pertence também a B e todo elemento de B pertence a A. Isso significa que ambos devem ter exatamente os mesmos elementos, não necessariamente na mesma ordem.

Assim, conjuntos iguais são representados por:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Na prática, os conjuntos $\{1, 7, 19, 26\} = \{1, 19, 26, 7\}$ são iguais. Desse modo, verifica-se que na definição de igualdade entre conjuntos não é necessário que os elementos sigam a mesma ordem. Assim, são conjuntos iguais:

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 2, 1\}$$

Mas se A não é igual B, devemos escrever que $A \neq B$, e logo concluímos que são diferentes porque existe um elemento de A não pertencente a B ou um elemento de B não pertencente a A.

Note que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq \{2, 3, 4, 5, 6\}$, pois um dos conjuntos tem o elemento 1 e o outro não.

Relação de inclusão

Para a compreensão da relação de inclusão, vamos inicialmente avaliar o caso mais simples, quando, por exemplo, o conjunto B está contido ou incluído no conjunto A. Essa relação ocorre somente entre conjuntos. Portanto, jamais considere que um elemento está contido no conjunto. Vamos acompanhar as propriedades dessa relação de inclusão?

Assim, $B \subset A$ quando B for um conjunto vazio ou quando qualquer elemento de B for também um elemento de A. A definição pode ser representada pelos símbolos:

$$B \subset A \Leftrightarrow [B = \varnothing \vee (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

Exemplo

Dados $B = \{a; e\}$ e $A = \{a, b, c, d, e\}$, temos $B \subset A$, pois qualquer elemento de B também é de A.

Relação de pertinência

Existem dois critérios que ajudam a definir um conjunto. O primeiro é a representação de seus elementos, como:

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

O segundo está relacionado à pertinência. Mas quando você escuta essa palavra o que lhe vem à mente? Se pensou em pertencer, fez a associação correta. Nesse caso, temos de verificar se o elemento em questão satisfaz ou não à propriedade.

$$a \in \{a, b\} \text{ e não } a \subset \{a, b\}$$
$$\{a\} \subset \{a, b\} \text{ e não } \{a\} \in \{a, b\}$$
$$\varnothing \subset \{0\} \text{ e não } \varnothing \in \{0\}$$

Diferentemente da relação de inclusão que acompanhamos antes e vimos que pode ser transitiva, a relação de pertinência não apresenta essa propriedade. Entenda melhor no exemplo a seguir.

Fique atento

Jamais confunda o uso dos símbolos $\in$ e $\subset$. O primeiro é responsável por ligar um elemento a um conjunto, ao passo que o segundo liga dois conjuntos. Portanto, não se pode afirmar que um elemento está contido em um conjunto ou que um conjunto pertence a outro.

Exemplo

Se P é um ponto de uma reta r e π é um conjunto de retas ao qual pertence r, concluímos que $P \in r$ e $r \in \pi \Rightarrow P \notin \pi$, já que os elementos de π são retas e não pontos.

Conjunto das partes

Quando temos um conjunto não vazio $A \in P(E)$, podemos dizer que os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição de A (ou sobre A). Porém, é preciso que todos esses conjuntos satisfaçam às seguintes propriedades:

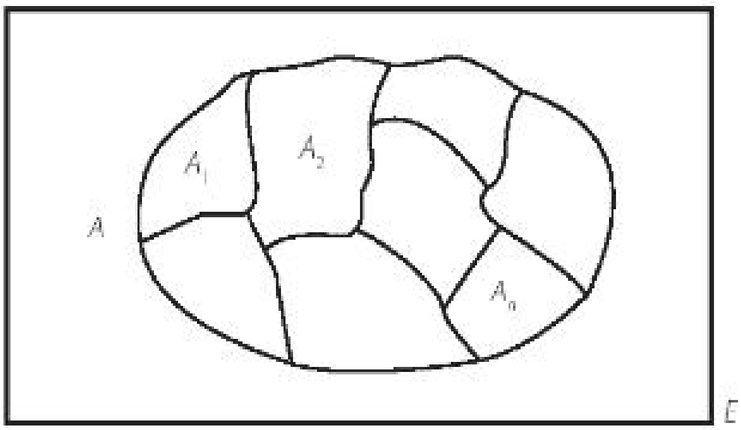
$A_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, ..., n$ (isto é, nenhum dos A_i é vazio);

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ (isto é, a reunião de todos os A_i resulta no conjunto A);

$A_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$ (isto é, são disjuntos dois quaisquer dos conjuntos somados a partir de $A_1, A_2, ..., A_n$).

Sua representação está descrita na Figura 1.4.

Figura 1.4 Partição de um conjunto.



Nesse caso, se tivermos $n = 2$, a partição de A resultará em dois conjuntos contrários e nenhum deles vazio:

$$A_1 = \complement_A A_2 \text{ e } A_2 = \complement_A A_1$$

Exemplo

Imagine que $A = \{a, b, c\}$ e os elementos de $P(A)$ são $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$, logo:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

Conjunto complementar

Para entender o conceito de conjunto complementar, considere o caso de o conjunto A estar contido em B. A diferença $B - A$ recebe o nome de complementar de A em relação a B. A notação $\complement_B A$ indica o complementar de A em relação a B, logo:

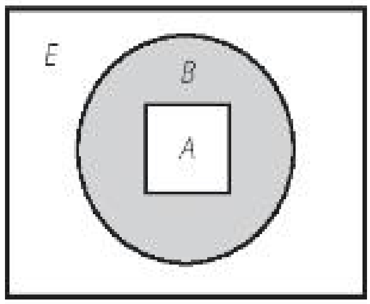
$$\complement_B A = B - A = \{x \in E \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplo

Na prática, podemos entender como conjunto complementar $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow \complement_B A = B - A = \{0, 1, 2, 7\}$.

Na Figura 1.5, você pode verificar que a parte sombreada representa a notação $\complement_B A$.

Figura 1.5 Conjunto complementar.



Fique atento

Tome nota das seguintes propriedades que envolvem a complementação:

$$\complement A \cap A = \varnothing$$
$$\complement \varnothing = E$$
$$(\complement A) \cup A = E$$
$$(\complement E) = \varnothing$$
$$\complement(\complement A) = A$$

Saiba mais

Se A e B forem subconjuntos de E, logo:

$$\left.\begin{array}{l} \complement(A\cap B)=(\complement A)\cup(\complement B) \\ \complement(A\cup B)=(\complement A)\cap(\complement B) \end{array}\right\} \text{(Leis de Augustus De Morgan)}$$

Operações com conjuntos

Agora que você já revisou todos os conceitos e notações, vamos aprender as operações que envolvem conjuntos: união, intersecção e diferença.

União ou reunião de conjuntos

A união ou a reunião de A e B é representada pelos elementos de E que pertencem a A ou a B. Observe a notação da união de A e B:

$$A \cup B \text{ (}A\text{ união }B\text{)}$$

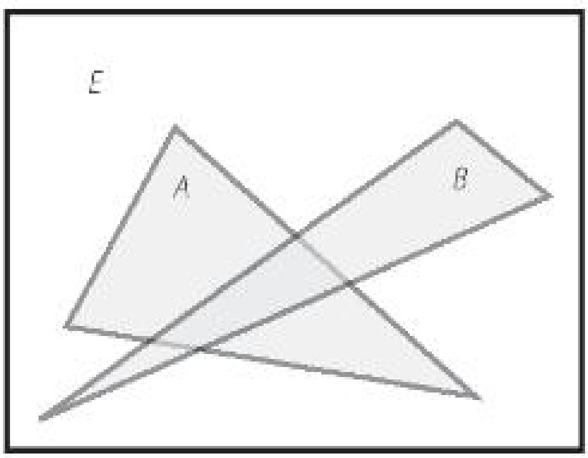
Assim:

$$A \cup B = \{x \subset E \mid x \subset A \text{ ou } x \subset B\}$$

Isso significa que se temos $A = \{4, 5, 3\}$ e $B = \{0, 3, 1\} \Rightarrow A \cup B = \{4, 5, 3, 0, 1\}$.

Note que a união é representada na Figura 1.6 pela parte sombreada.

Figura 1.6 Representação da união.



Fique atento

Essas operações com conjuntos envolvem importantes propriedades, enunciadas a seguir:

$A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

$A \cup A = A$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup E = E$, se $A \subset E$

Intersecção de conjuntos

Dizemos que a intersecção dos conjuntos A e B é representada pelo conjunto dos elementos de E, que pertencem simultaneamente tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B, sendo indicada pela notação:

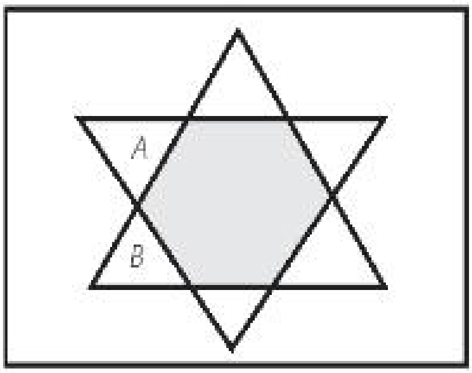
$$A \cap B \text{ (}A \text{ intersecção } B \text{ ou } A \text{ inter } B\text{)}$$

Assim:

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Na Figura 1.7, você confere a intersecção pela parte sombreada.

Figura 1.7 Intersecção de conjuntos.



Na prática, a intersecção de $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 4, 0, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{4, 6\}$.

Fique atento

Essas operações com conjuntos envolvem as seguintes propriedades:

$A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa)

$A \cap A = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cap E = A$, se $A \subset E$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva)

Diferença de conjuntos

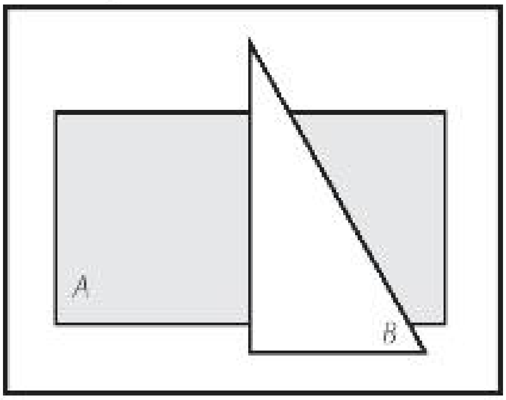
Nessa operação, a diferença $A - B$ é o conjunto de elementos de E, que pertencem a A, mas não pertencem a B, isto é:

$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Na prática, $A = \{4, 5, 3, 1\}$ e $B = \{4, 2, 1\} \Rightarrow A - B = \{5, 3\}$.

Observe a diferença entre A e B na parte sombreada da Figura 1.8.

Figura 1.8 Diferença entre A e B.



Diferença e simetria

A diferença simétrica entre conjuntos A e B pode ser entendida como o conjunto dos elementos que pertencem à união de A e B, porém estes não pertencem à intersecção de A e B. Essa diferença simétrica é representada pelo símbolo Δ. Em qualquer caso, $Q \cup R = \{x \mid x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}$. Logo, $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Se pensarmos agora nos conjuntos A, B e C, as seguintes propriedades são verificadas:

O conjunto A é um conjunto vazio somente se a diferença entre A e B for igual a B:

$$A = \varnothing \text{ se, e somente se, } B = A \,\Delta\, B$$

A *diferença simétrica* entre um dado conjunto e ele mesmo é igual ao conjunto vazio:

$$A \,\Delta\, A = \varnothing$$

Já a *propriedade comutativa* diz que a diferença simétrica entre A e B é equivalente à diferença simétrica entre B e A:

$$A \triangle B = B \triangle A$$

A propriedade distributiva diz que a intersecção de A com a diferença simétrica entre B e C é equivalente à diferença simétrica da intersecção entre A e B e a intersecção entre A e C:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

Enquanto a propriedade associativa afirma que a diferença simétrica entre A e B, e após C, equivale à diferença simétrica de A com a diferença simétrica entre B e C.

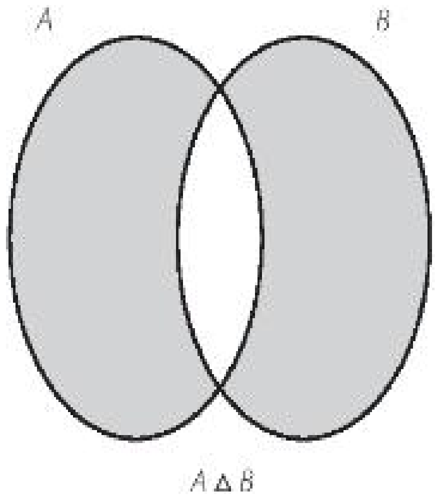
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

A diferença simétrica entre A e B está contida na diferença simétrica entre A e C, união com a diferença simétrica entre B e C.

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B pode ser representada pelo diagrama de Venn, como mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9 Diferença simétrica entre os conjuntos A e B.



Como exemplo numérico para compreensão, vamos acompanhar o modelo a seguir.

Exemplo

Nos conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 10\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$, temos:

$$A \triangle B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\} - \{1, 3, 4, 10\} = \{2, 5, 6, 7\}$$

Leis de Augustus De Morgan

Augustus De Morgan (1806-1871) foi um importante matemático e lógico britânico. Nascido na Índia, onde seu pai, John De Morgan, trabalhava como tenente-coronel do exército inglês, regressou para a Inglaterra aos sete meses de idade. Na escola, foi vítima de preconceito por ser cego de um dos olhos. Em 1823, passou a estudar no Trinity College, em Cambridge, onde foi instruído por George Peacock, de quem se tornou amigo pelo resto da vida. Um de seus primeiros trabalhos, *Elementos de aritmética* (1831), distingue-se pelo tratamento filosófico das ideias de número e magnitude. Além disso, De Morgan contribuiu para o simbolismo matemático, propondo o uso do *solidus* (traço inclinado) para a impressão das frações.

Em 1838, definiu e introduziu o termo *indução matemática* – processo que já havia sido utilizado sem suficiente clareza e com pouco rigor matemático. Em 1849, publicou a obra *Trigonometria e dupla álgebra*, na qual pôde fazer uma interpretação geométrica dos números complexos. Ele também descobriu as relações matemáticas que ficaram conhecidas como Leis de De Morgan. Porém, sua contribuição mais significativa foi a obra *Formal logic*, a partir da qual realizou uma reformulação da lógica matemática.

As descobertas de De Morgan foram fundamentais para a matemática contemporânea e, sem dúvida, para a eletrônica dos dias atuais.

Leis de De Morgan

De acordo com Leite e Castanheira (2014, p. 44), apresentaremos a seguir as Leis de Augustus De Morgan.

- **Primeira lei** – o complementar da união de dois conjuntos A e B é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- **Segunda lei** – o complementar da reunião de uma coleção finita de conjuntos é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$\overline{\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ \dots \ \cup A_n\right)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ \dots \ \cap \overline{A}_n$$

- **Terceira lei** – o complementar da intersecção de dois conjuntos A e B é a união dos complementares desses conjuntos.

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Quarta lei** – o complementar da intersecção de uma coleção finita de conjuntos é a união dos dois complementares desses conjuntos.

$$\overline{\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ \dots \ \cap A_n\right)} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \ \dots \ \cup \overline{A}_n$$

Produto cartesiano

Depois de entender cada operação e suas respectivas notações, vamos falar sobre o conceito de produto cartesiano. Considere os conjuntos A e B, e o objeto (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) recebe a denominação de *par ordenado*. Desse modo, os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais somente quando $a = c$ e $b = d$. Mas você deve estar se perguntando o que é efetivamente o produto cartesiano. Pois bem, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$ é o produto cartesiano de A por B. Pela notação, indicamos:

$$A \times B \ (A \text{ cartesiano } B \text{ ou } A \text{ vezes } B)$$

Assim:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Na prática,

$$A = \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right\}; \quad B = \{5, -1\}$$

$$A \times B = \left\{\left(\frac{1}{2},\ 5\right),\ \left(\frac{1}{2}, -1\right),\ (1, 5),\ (1, -1)\ (0, 5),\ (0, -1)\right\}$$

No exemplo a seguir, o conceito fica mais bem compreendido.

Saiba mais

Para entender melhor a ideia de par ordenado, considere o lançamento de uma moeda. Nesse caso, o conjunto dos possíveis resultados poderá ser $\{k, c\}$, sendo que k é cara e c é coroa. Com o lançamento de duas moedas, tem-se a possibilidade de vários resultados. Então $(k, c) \neq (c, k)$ embora possa parecer que tenham o mesmo resultado.

Exemplo

Os números naturais entre 10 e 99 são pares ordenados, já que o primeiro algarismo representa o algarismo de dezenas e o segundo o algarismo de unidades. Nesse caso, os conjuntos a que pertencem esses dois algarismos são, respectivamente, $\{1, 2, ..., 9\}$ e $\{0, 1, 2, ..., 9\}^2$.

Saiba mais

Você sabia que a posição de um navio em alto mar só pode ser determinada quando são dadas as suas coordenadas? Nesse caso, são a longitude (tanto graus Leste como Oeste, em relação ao meridiano de Greenwich) e a latitude (tanto graus Norte como Sul, em relação à linha do Equador).

As propriedades do produto cartesiano são:

Uniforme: Se $A, A', B, B' \in P(E) \mid A = A'$ e $B = B'$
$\Rightarrow A \times B = A' \times B'$

$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$ ou $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, $A, B \in P(E)$

Associativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C), \forall A, B, C \in P(E)$

Se A_1 tem n_1 elementos, A_2 tem n_2 elementos, ..., A_m tem n_m elementos, então o produto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$$

terá $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$ elementos.

Exercícios de fixação

1. Dados $A = \{0, 2, 1, 5\}$ e $B = \{5, 1, 6, 4\}$, determine:
a. $A \cup B$
b. $A - B$
c. $B \times A$

2. Sendo $B = \{2, 1, 9, 7, 4, 3\}$, indique quais conjuntos a seguir satisfazem a relação $A \subset B$:
a. $A = \{2, 1, 3, 8\}$
b. $A = \varnothing$
c. $A = \{4, 7, 3, 1, 6\}$
d. $A = \{2, 1, 9, 7, 4, 3, 8\}$
e. $A = \{1\}$

3. Determine os subconjuntos dos seguintes conjuntos:
a. $\varnothing$
b. $\{1\}$

4. Determine $B - A$ no caso a seguir:
a. $A = \{2, 7, 1, 3, 6\}$
b. $B = \{7, 1, 8, 9, 2, 3, 6, 11\}$

5. Se os conjuntos A e B têm, respectivamente, 20 e 30 elementos, então $B - A$ tem 10 elementos. Calcule o número de elementos de:
a. $A \cap B$
b. $A \cup B$

6. Represente um conjunto formado por seus cantores preferidos pelo diagrama de Venn.

7. Utilize os símbolos da relação de inclusão para completar as lacunas, sendo os conjuntos $B = \{1, 2, 5, 10, 11\}$ e o conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
B ______ C
C ______ B

8. Dados os conjuntos $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $F = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$, represente $E \cup F$.

9. Descreva e designe os elementos do conjunto a seguir:

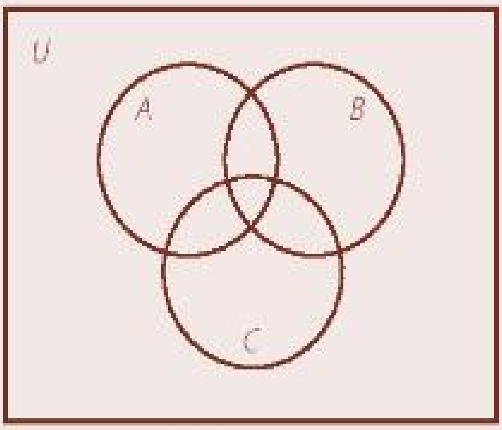
$$A = \{x \mid x^2 = 9\}$$

10. Escreva com símbolos a teoria do conjunto x é elemento de A.

11. Construa um diagrama de Venn que represente a situação a seguir entre os conjuntos A, B, C e D não vazios:

$$B \subset A,\ C \subset A,\ B \neq C,\ D \subset B,\ D \subset C$$

12. Considere o diagrama de Venn.



Assinale o seguinte conjunto $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

13. Em uma escola de 517 alunos, 290 estudam francês, 210 estudam inglês e 112 não estudam nem francês nem inglês. Quantos alunos estudam francês e inglês?

14. Escreva simbolicamente um conjunto dos divisores de 30.

15. Caracterize por propriedade os elementos dos conjuntos a seguir:

a. $A = \{2, 7, 12, 17, 22, 27\}$

b. $B = \{10, 100, 1.000, ..., 1.000.000.000\}$

c. $C = \{3, 6, 12, 24, ..., 3.072\}$

d. $D = \{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$

16. Descubra quais conjuntos a seguir são unitários:

$$A = \left\{x \in N \mid x > \frac{7}{5} \text{ e } x < \frac{10}{4}\right\}$$

a. $B = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$

b. $C = \{x \mid x^2 + 4 = 4x\}$

c. $D = \{x \in Z \mid (x^2 - 5)(2x - 5) = 0\}$

17. Diga qual proposição é falsa:

a. $A \subset (A \cup B)$

b. $(A \cup B) \subset (A \cup B)$

c. $(A \cup B) \subset [(A \cup B) \cup C]$

d. $B \in (A \cup B)$

e. $\varnothing \subset (A \cup B)$

Panorama

O voo 437 da companhia Aeroplus, saindo do Aeroporto Internacional de Guarulhos, no Brasil, com destino ao Aeroporto Charles de Gaulle, em Paris, na França, tem passageiros de quatro nacionalidades: argentina, brasileira, chilena e francesa. Desses passageiros, 20% são argentinos, há 85% de não chilenos e 70% de não franceses. A comissária de bordo faz o seu primeiro voo internacional e está muito nervosa. Ela esqueceu informações com relação ao cardápio especial para passageiros brasileiros. Agora, ela tem o desafio de determinar as nacionalidades com o auxílio da matemática. Para tanto, buscou a teoria dos conjuntos e verificou que 35% dos passageiros são argentinos ou chilenos e 35% dos passageiros são brasileiros.

Exercício

Ajude a comissária e faça uma representação desse conjunto de passageiros no diagrama de Venn.

Recapitulando

A noção matemática de conjunto pode ser entendida como um agrupamento, uma coleção, classe, família ou sistema. Os objetos que ajudam a formar um conjunto são chamados de *elementos* e não precisam ser, necessariamente, letras. Também podem ser números, cartas de baralho, países, entre outros.

Um conjunto é indicado por uma letra latina maiúscula e os elementos são representados entre chaves por letras minúsculas, números ou figuras. Quando pensamos em conjunto, temos que admitir a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados em determinado assunto, que é chamado de *conjunto universo*.

A representação de um conjunto é feita pelo conjunto dos pontos no interior de uma linha que não se entrelaça. O diagrama também nos ajuda a entender a teoria dos conjuntos. Quando temos dois conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A é elemento de B, sendo representado por:

$A \subset B$ (A **está contido em** B)

O conjunto unitário tem apenas um elemento. Já o conjunto vazio, como o próprio nome sugere, não tem elementos e é representado pelo símbolo $\varnothing$ ou por { }. Um conjunto finito tem uma quantidade limitada de elementos. Já o conjunto infinito tem um número ilimitado de elementos e é representado pelo símbolo ∞. Dois conjuntos são iguais quando todo elemento de A pertence também a B e todo elemento de B pertence a A. Isso significa que ambos devem ter exatamente os mesmos elementos.

A relação de inclusão acontece sempre entre conjuntos. Para entender, pense em um conjunto que está contido ou incluído em outro. A relação de pertinência tem a ver com a ideia de pertencer. Portanto, para constatar essa relação é preciso descobrir se o elemento em questão satisfaz ou não a propriedade. Quando temos um conjunto não vazio $A \subset P(E)$ dizemos que o conjunto $A_1, A_2, ..., A_n$ forma uma partição de A (ou sobre A). Mas é preciso que todos esses conjuntos satisfaçam as propriedades:

- $A_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, ..., n$ (isto é, nenhum dos A_i é vazio);
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$ (isto é, a reunião de todos os A_i resulta no conjunto A);
- $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$ (isto é, são disjuntos dois quaisquer dos conjuntos tomados a partir de $A_1, A_2, ..., A_n$).

Se A está contido em B, a diferença entre B e A recebe o nome de complementar de A em relação a B, cuja notação é $\complement_B A$. A união ou reunião de A e B é representada pela notação $A \cup B$ (A união B). A intersecção de conjuntos é representada por elementos que pertençam simultaneamente aos dois conjuntos $A \cap B$ (A intersecção B ou A inter B).

A diferença de conjuntos $A - B$ é o conjunto de elementos de E, que pertencem a A e não pertencem a B. A diferença simétrica entre conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem à união de A e B, porém não pertencem à intersecção de A e B. Essa diferença simétrica é representada pelo símbolo Δ. A *diferença simétrica* entre um dado conjunto e ele mesmo é igual ao conjunto vazio:

$$A \,\Delta\, A = \varnothing$$

O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$ é o produto cartesiano de A e B.

Análise combinatória e conectivos

Objetivos de aprendizagem

- Assimilar o conceito de análise combinatória e sua aplicabilidade.
- Apresentar as permutações simples, circulares e de elementos nem todos distintos.
- Diferenciar combinações simples de completas.
- Conceituar diferentes proposições.
- Determinar os valores lógicos das proposições simples e completas.
- Entender o uso dos conectivos em uma proposição.
- Analisar a construção da tabela-verdade.
- Compreender as operações lógicas com conectivos.

Temas

- **1 – Análise combinatória: distribuição, permutação e combinação**
  Vamos entender a importância da análise combinatória e apresentar as permutações simples, as circulares e de elementos nem todos distintos. Além disso, vamos exemplificar combinações simples e completas.
- **2 – Proposições**
  Aqui, vamos entender o significado das proposições a partir de diferentes exemplos, bem como determinar os valores lógicos das proposições e diferenciá-las em simples e completas.
- **3 – Conectivos**
  No terceiro tema, vamos mostrar a importância dos conectivos "e" e "ou" em uma proposição, analisando diferentes casos.
- **4 – Operações lógicas sobre conectivos (proposições)**
  Para fechar esta unidade, vamos apresentar as operações lógicas sobre conectivos: negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional.

Introdução

Não é de hoje que o estudo das probabilidades desafia cientistas e matemáticos. O tema está sempre presente em diversas áreas, tendo estas sido estudadas e pesquisadas desde o ano de 300 a.C., por exemplo, na obra *Elementos*, de Euclides, que desenvolveu o binômio $(1 + x)^n$.

A partir dessa publicação, o tema esteve presente em diversos trabalhos, como nos estudos de Galileu Galilei, George Pólya, Bhaskara, entre outros.

Vale lembrar que a análise combinatória é um conteúdo com elevada aplicação prática, estando presente até no simples jogo de Loteria Esportiva, quando buscamos determinar o número de apostas possíveis.

Nesta unidade, você vai verificar que a teoria das probabilidades é um assunto desafiador que poderá conduzi-lo a resultados inesperados.

Ao longo do estudo, vamos demonstrar a importância dos conectivos em uma proposição. Será que "e" e "ou" têm o mesmo sentido da linguagem quando o objeto de estudo é a matemática? Prepare-se para grandes surpresas!

Reunimos exemplos concretos e exercícios para você colocar em prática o conhecimento. Que tal começar a desvendar o mundo das probabilidades?

Análise combinatória: distribuição, permutação e combinação

Conceito de combinatória

Você já deve ter reparado que a análise combinatória ou apenas combinatória é uma questão prática e está presente em diferentes situações, do simples jogo na Loteria Esportiva, quando desejamos determinar o número de apostas possíveis, até o fato de estipular o número de placas distintas de automóveis em um sistema de numeração.

Mas esse conteúdo vai muito além dessas aplicações, sendo uma importante ferramenta para diversas áreas. Em 1937, o matemático húngaro George Pólya (1887-1985), a partir dos conceitos da análise combinatória, desenvolveu uma nova técnica para tratar de maneira unificada a enumeração de isômeros de uma substância química.

O primeiro relato que se teve de análise combinatória data do ano de 300 a.C., na obra *Elementos*, de Euclides. No século XXI, o conteúdo ganha aplicações vitais, como na pesquisa operacional de armazenamento de informações em bancos de dados, amplamente utilizados em softwares computacionais.

Se você perguntar a um aluno do Ensino Médio o significado de análise combinatória, provavelmente ele vai definir como o estudo das combinações, arranjos e permutações. Mas esta, no entanto, não é uma resposta completa. Embora combinações, arranjos e permutações realmente façam parte da combinatória, tais operações permitem apenas a resolução de problemas que envolvem contagem de certos subconjuntos de um conjunto finito, sem a necessidade de enumerar os elementos.

> No entanto, a análise combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de análise combinatória. Pelo menos uma delas, o princípio das gavetas de Dirichlet, é mais simples ou pelo menos tão simples quanto o estudo das combinações, arranjos e permutações. De maneira mais geral, podemos dizer que a análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas (MORGADO, CARVALHO et al., 1991, p. 2).

Antunes (1978, p. 345) define análise combinatória como:

> A análise combinatória é a parte da matemática que estuda as propriedades, o cálculo do número e o modo de formação dos agrupamentos que podem ser formados, segundo determinadas leis, com os elementos de um conjunto finito.

Mas você deve estar se perguntando qual é o objetivo prático da análise combinatória. Pois bem, a combinatória ajuda a demonstrar a existência de subconjuntos de elementos a partir de um dado conjunto finito, que satisfaz certas condições. Também é importante para contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e satisfazer certas condições dadas.

Já vimos que a análise combinatória não se limita ao estudo das combinações, arranjos e permutações. No entanto, tais operações são suficientes para a resolução de muitos problemas.

Saiba mais

Um dos primeiros problemas ligados à análise combinatória foi o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$. O caso $n = 2$ já era encontrado em 300 a.C. na obra *Elementos*, de Euclides.

Saiba mais

A análise combinatória também foi utilizada pelo matemático hindu Bhaskara (1114-1185), que calculava o número de permutações, de combinações e de arranjos de *n* objetos.

Saiba mais

A teoria das probabilidades aparece com destaque no livro *Ars Conjectandi*, de Jacob Bernoulli, no Teorema de Bernoulli, também denominado de *Lei dos Grandes Números*. Esse teorema é reconhecido como a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Segundo o teorema, se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande número de experimentos eles terão sido obtidos em aproximadamente o mesmo número de vezes. O teorema ainda permite deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, a partir de informações sobre como se comportaram em um grande número de experimentos.

Já deu para notar o quanto a teoria das probabilidades pode ser interessante e, em muitos casos, nos conduzir a resultados inesperados. Que tal acompanhar um exemplo bastante conhecido? O problema da agulha de Buffon.

Exemplo

Para entender o problema da agulha de Buffon, vamos considerar uma área plana, dividida em faixas de larguras iguais a a por retas paralelas. Vamos lançar sobre essa região, ao acaso, uma agulha cujo comprimento é $2r$, com $2r < a$. A probabilidade de que a agulha corte uma das paralelas é um resultado um tanto surpreendente em um primeiro momento: $4r/\pi a$.

Entre aqueles que contribuíram para a teoria das probabilidades, não há dúvidas de que o matemático francês Pierre Laplace (1749-1827) teve um papel de destaque em trabalhos na mecânica analítica, em que abordou a problema da estabilidade do sistema solar.

Suas inúmeras pesquisas foram incluídas em seu *tratado analítico das probabilidades*, com a introdução de técnicas, como a das funções geradoras para probabilidades, a partir do uso do cálculo integral, no qual verificamos a integral $\int e^{-t^2} dt$, associada a uma distribuição normal de probabilidades.

Permutação simples

Volte à educação infantil e tente lembrar do seu primeiro contato com os números. Provavelmente, a primeira técnica que você aprendeu foi a contagem, ou seja, a enumeração de elementos. O passo seguinte foi o contato com as operações matemáticas básicas, que também envolviam a contagem de elementos, não é mesmo?

Mas o que isso tem a ver com permutação? Pois bem, a permutação simples é entendida como um caso especial de arranjo, cuja principal diferença é a ordem dos elementos.

Considerando os elementos (1, 2, 3) de um conjunto, as seguintes ordenações são possíveis: 1,2,3; 1,3,2; 2,1,3; 2,3,1; 3,1,2; e 3,2,1. Nesse caso, o número de modos de ordenar n objetos distintos é $n(n-1) \dots 1 = n!$.

Note que cada ordenação dos n objetos é chamada permutação simples de n objetos distintos.

Representamos a permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos por P_n. Logo, $P_n = n!$, sendo $0! = 1$, definimos $P_0 = 1$.

Que tal acompanhar um exemplo de permutação simples?

Exemplo

Para determinar o número de anagramas para a palavra PRÁTICO, o primeiro passo é entender que cada anagrama é uma ordenação das letras P, R, A, T, I, C, O. Logo, o número de anagramas é $P_7 = 7! = 5.040$. Interessante, não é mesmo?

Vamos verificar mais um exemplo?

Exemplo

Marcos deseja viajar do Rio de Janeiro a São Paulo, podendo escolher ir de trem, de ônibus ou de avião. Só que ele não deseja voltar para o Rio de Janeiro com o mesmo transporte que escolheu para a ida. Para determinar de quantos modos ele pode escolher os transportes (sem escolher o mesmo na volta), o primeiro passo é entender que para ir a São Paulo ele pode escolher uma entre três opções; já na volta, terá apenas duas alternativas, isto é, $3 \times 2 = 6$.

Antes de passar para o próximo item, vamos acompanhar um último exemplo:

Exemplo

Para determinar quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), menores que 500 e divisíveis por 5 podem ser formados usando apenas os números 2, 3, 4 e 5, temos:

Último algarismo → 1 modo (tem que ser 5)
Primeiro algarismo → 3 modos (não pode ser 5)
Segundo algarismo → 4 modos
Terceiro algarismo → 4 modos

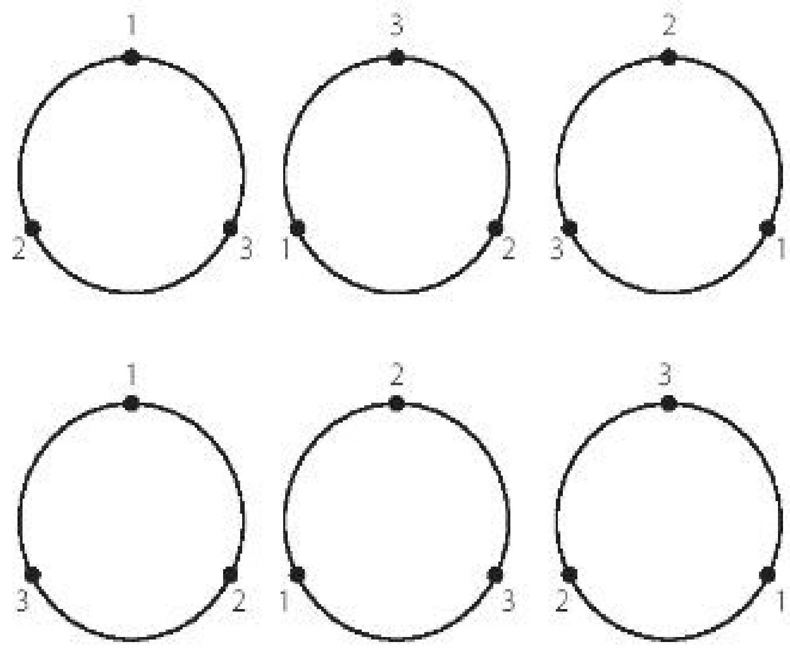
Logo, $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$.

Permutações circulares

Como o próprio nome sugere, as permutações circulares são compostas por conjuntos em ordem cíclica. Isso ocorre quando os grupos de elementos distintos formam uma circunferência.

Na prática, isso significa determinarmos de quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados ao redor de um círculo, considerando equivalentes disposições que possam coincidir por rotação. Logo, o número de permutações circulares de n objetos distintos é representado por $(PC)_n$. Assim, no caso de $n = 3$, temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares. Observe a Figura 2.1:

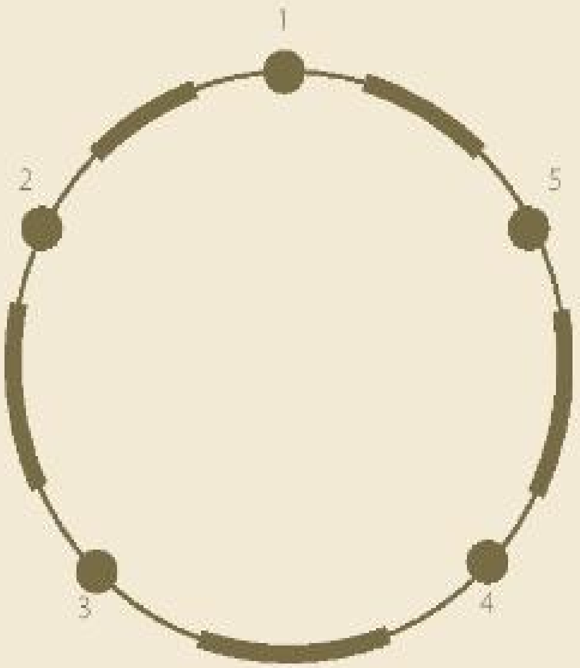
Figura 2.1 Representação da permutação circular.



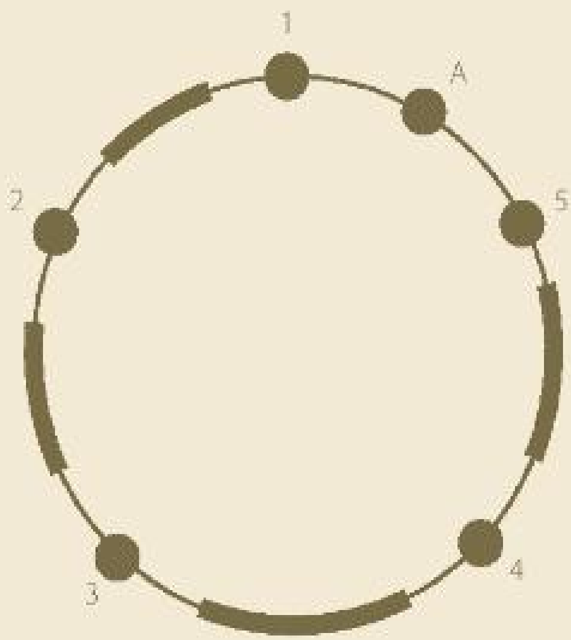
Fonte: Morgado et al. (1991, p. 41).

Exemplos

A professora de dança está preparando uma roda com sete crianças, mas existem duas crianças (aqui representadas por *A* e *B*) que não podem ficar juntas, pois acabam dispersando o restante da turma. Para tanto, a professora pode formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as cinco outras crianças.



Note, a seguir, que existem cinco modos de colocar a criança *A* na roda:



Há agora quatro modos de colocar a criança *B* na roda sem colocá-la junto de *A*, ou seja, $4! \times 5 \times 4 = 480$.

Fonte: adaptado de Morgado et al. (1991, p. 43).

Permutações de elementos nem todos distintos

Sempre que for solicitada uma análise de um agrupamento de elementos, é importante ficar atento às precondições determinadas, pois em alguns casos não podemos considerar elementos repetidos; já em outros, tal restrição não existe.

Acompanhamos até agora permutações com todos os elementos distintos, mas há um caso importante, como o cálculo de elementos nem todos distintos. Isso significa que quando existem k espécies de elementos, determinamos da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} n_1 & \text{elementos iguais a } b_1 \\ n_2 & \text{elementos iguais a } b_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ n_k & \text{elementos iguais a } b_k \end{array}$$

Tal que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Observe que esse tipo de agrupamento não pode ser considerado agrupamento completo, pois não parte do princípio de que todos os elementos do conjunto A sejam distintos e um ou mais elementos poderão ser escolhidos mais de uma vez. Veja que os próprios n elementos já não são todos distintos.

Assim, o número das permutações distintas desses n elementos será indicado por $P_n^{n_1, n_2, ..., n_k}$.

Temos de considerar que dos n elementos, apenas os iguais a b_1 aparecem mais de uma vez, em uma frequência total de n_1. O número total de permutações dos n elementos, se eles fossem todos distintos, seria $n!$.

Porém, há casos em que muitos elementos iguais foram permutados dentro de suas posições. Sendo n_1 igual a b_1 e todos os demais elementos distintos de b_1 e distintos entre si por $P_n^{n_1}$, concluímos que:

$$P_n^{n_1} \cdot (n_1)! = n!$$

Nesse caso, cada uma das permutações distintas $P_n^{n_1}$ dará origem a $n_1!$ permutações. Se permutarmos entre si os elementos iguais dentro de suas posições originais, concluímos que:

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}$$

Se nessas permutações existirem n_2 elementos iguais a b_2, indicando o número de permutações distintas por $P_n^{n_1, n_2}$, concluímos que:

$$P_n^{n_1;\, n_2} \cdot n_2! = P_n^{n_1}$$

$$P_n^{n_1;\, n_2} = \frac{P_n^{n_1}}{n_2!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$$

e assim por diante.

Logo, a equação geral:

$$P_n^{n_1;\, n_2;\, \ldots;\, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!}$$

Para entender melhor esse conceito, vamos pensar nos anagramas da palavra TARTARA. A resposta não é $P_7 = 7! = 5.040$. Note que que essa palavra apresenta letras repetidas e, portanto, será obtido um número de anagramas menor do que se todas as letras fossem distintas.

Nesse caso, o número de anagramas é representado por $P_7^{3,\, 2,\, 2}$ ou $\begin{pmatrix} 7 \\ 3,\ 2,\ 2 \end{pmatrix}$. Isso significa que nas permutações de 7 letras, 3 são iguais a "A", 2 são iguais a "R" e 2 iguais a "T".

Nesse caso, para formar um anagrama temos de ter 3 "A", 2 "R" e 2 "T" em 7 lugares. Então, o número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os "A" é C_7^3 e temos de escolher também C_4^2 modos de escolher os lugares para os "R", e, por fim, um único modo de escolher os lugares para os "T". Logo, $P_7^{3,\, 2,\, 2} = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 1 = 35 \times 6 \times 1 = 210$.

Há ainda outro modo para a solução. Pensando que se as letras fossem diferentes teríamos $P_7 = 7!$ anagramas, mas como as letras "A" são iguais, contamos então cada anagrama 3! vezes. Também contamos cada anagrama 2! vezes para os "R" e 2! para os "T". Concluímos, portanto, que:

$$P_7^{3,\, 2,\, 2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Para reforçar esse conceito, acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

Para calcular o número de anagramas distintos da palavra ARARAQUARA, temos n = dez (10 letras formam a palavra araraquara), $n_1 = 5$ (corresponde ao número de letras "A"), $n_2 = 3$ (corresponde ao número de letras "R"), $n_3 = 1$ (corresponde ao "Q") e $n_4 = 1$ (correponde ao "U"). Substituindo na equação, temos:

$$P_{10}^{5;\, 3} = \frac{10!}{5!3!} = \frac{3.628.800}{120 \cdot 6} = 5.040$$

Combinações simples

Depois de abordar as permutações, vamos entender as combinações. A combinação simples nada mais é que um tipo de agrupamento que faz parte do estudo de análise combinatória, com elementos que se diferenciam apenas por sua natureza.

Que tal acompanhar um exemplo prático?

Exemplo

A partir do conjunto {*a*, *b*, *c*} formamos inicialmente o seguinte quadro de arranjos:

$$\begin{matrix} ab & ac & bc \\ ba & ca & cb \end{matrix}$$

Note que esses agrupamentos de mesma coluna diferem pela ordem, ao passo que os agrupamentos que pertencem a colunas distintas diferem pela natureza. Se reduzirmos os arranjos da mesma coluna que diferem somente pela ordem, temos o seguinte quadro:

$$\begin{matrix} ab & ac & bc \end{matrix}$$

Veja que nesse caso os agrupamentos diferem apenas pela natureza e constituem-se em combinações simples

$$C_{3,2} = \frac{A_{3,2}}{P_2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$$

A divisão por P_2 correponde à redução de todos os arranjos de cada coluna a um só, excluindo, nesse caso, a ordem dos elementos como fator de diferenciação entre os agrupamentos.

Veja mais um exemplo:

Exemplo

Para determinar de quantos modos podemos escolher seis pessoas ao acaso, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de sete homens e quatro mulheres, temos como alternativas:

4 homens,	2 mulheres
3 homens,	3 mulheres
2 homens,	4 mulheres

Portanto, a resposta é:

$$C_7^4 \cdot C_4^2 + C_7^3 \cdot C_4^3 + C_7^2 \cdot C_4^4 = 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 371$$

Fique atento

No exemplo anterior, um erro muito comum ocorre quando escolhe-se primeiro as duas mulheres e somente depois quatro pessoas quaisquer entre as nove que sobraram. Nesse caso, a resposta obtida seria $C_4^2 \cdot C_9^4 = 6 \times 126 = 756$, que está errado. Se você considerar uma seleção com três mulheres e três homens, esta seria contabilizada três vezes. Já se considerar uma seleção com quatro mulheres, logo terá sido contabilizada seis vezes, chegando-se a um resultado muito maior que o valor correto.

Combinações completas

Para diferenciar as combinações simples das completas, considere que você está em uma sorveteria, que conta com sete sabores disponíveis. De quantos modos é possível comprar quatros sorvetes? Se você pensou que a resposta correta é $C_7^4 = 35$, portanto, 35 modos, enganou-se.

A resposta é representada por CR_7^4, isto é, o número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos. Nesse caso, estamos falando do número de modos de escolher quatro opções entre sete distintas – e aqui vale escolher o mesmo objeto mais de uma vez. Portanto, é preciso considerar também as repetições.

Note que C_n^p é o número de modos para escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados. Enquanto CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. Assim, as combinações completas de classe 3 dos objetos a, b, c, d, tomados 3 a 3, são:

$$\begin{array}{cccccc} aaa & aab & bba & cca & dda & abc \\ bbb & aac & bbc & ccb & ddb & abd \\ ccc & aad & bbd & ccd & ddc & acd \\ ddd & & & & & bcd \end{array}$$

e

$$CR_4^3 = 20$$

Que tal acompanhar a aplicação a seguir?

Exemplo

A partir dos números primos 2, 3, 5 e 7, vamos determinar quantos produtos distintos são obtidos tomando-se três fatores de cada vez. Para tanto, usamos $C'_{n,p} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$. Temos $n = 4$ e $p = 3$.

Note que é um problema de combinações completas, pois o mesmo fator pode ser escolhido mais de uma vez para formar o produto. Aqui, a ordem dos fatores não influi no valor do produto. Substituindo os valores, temos:

$$C'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

Proposições

Conceito de proposição

Você já notou que no dia a dia utilizamos diferentes tipos de sentenças, ainda que de maneira automática? Quando afirmamos que Jorge Amado é um escritor, estamos, na verdade, diante de uma sentença declarativa.

Já quando falamos: "Segure firme!", trata-se de uma sentença imperativa. Por outro lado, se perguntarmos quantos alunos temos em sala de aula hoje, estaremos diante de uma sentença interrogativa. Por fim, também temos sentenças exclamativas, como: "Parabéns!" e "Que beleza!"

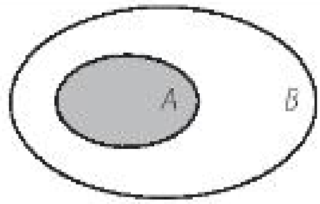
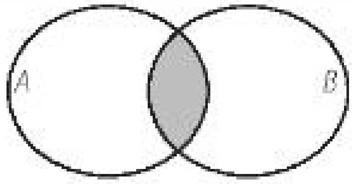
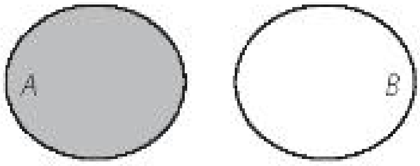
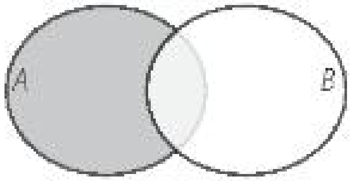
Em lógica, no entanto, só tratamos de sentenças que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas e associadas a apenas um único valor lógico (verdadeiro ou falso) a que chamamos de proposição.

No caso "O Brasil faz parte da América Latina" é uma proposição cujo valor lógico é verdadeiro. Mas na afirmação "O Rio Amazonas" não há proposição, pois não podemos classificar como verdadeira ou falsa.

Que tal lembrar proposições básicas com a ajuda de diagramas?

Nesse caso, fica claro que A é o conjunto formado por todos aqueles que têm a propriedade A e está representado pelos pontos de uma região limitada no plano. Note na Figura 2.2 que fora da região estão aqueles que não apresentam tal propriedade.

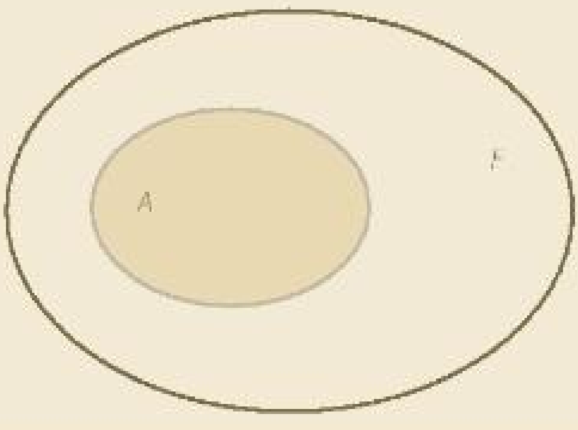
Figura 2.2 Proposições básicas.

Proposição	Diagrama de Euler
Todo *a* é *b*.	
Algum *a* é *b*	
Nenhum *a* é *b*	
Algum *a* não é *b*	

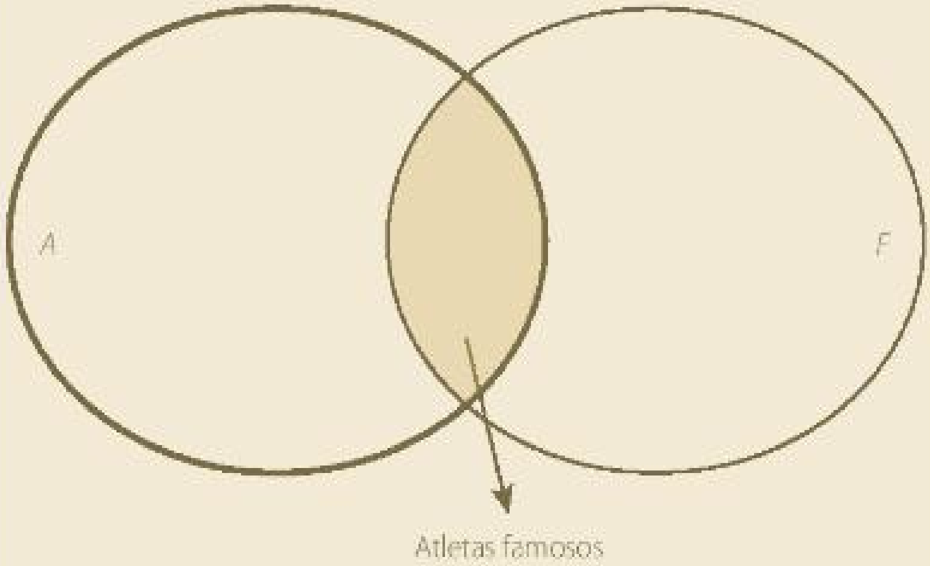
A seguir, acompanhe exemplos inspirados em Machado (1988).

Exemplos

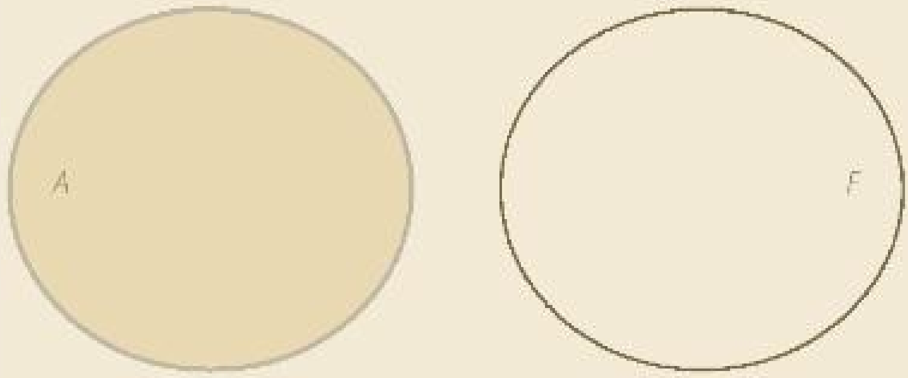
Todos os atletas que participaram da competição esportiva (*A*) são famosos (*F*):



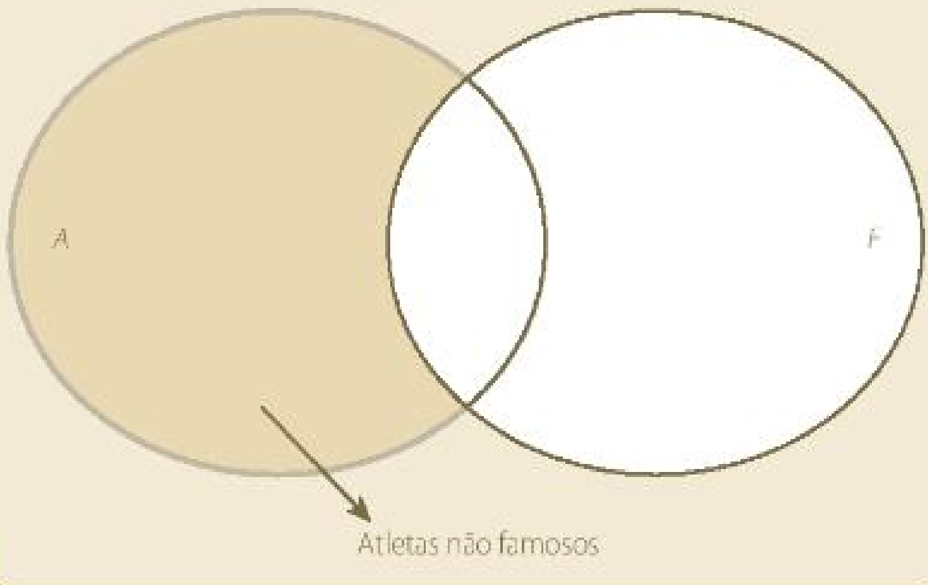
Algum atleta que participou dos jogos é famoso ou existem atletas famosos na competição:



Nenhum atleta que participou das disputas é famoso:



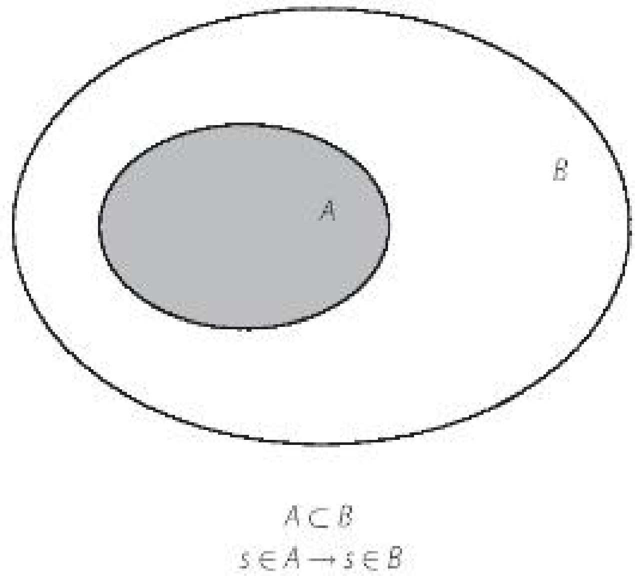
Algum atleta não é famoso ou existem atletas que não são famosos.



Todo a é b quando todos os elementos do conjunto A pertencem também ao B. Portanto, dizemos que A está contido em B ou A é um subconjunto de B: $A \subset B$.

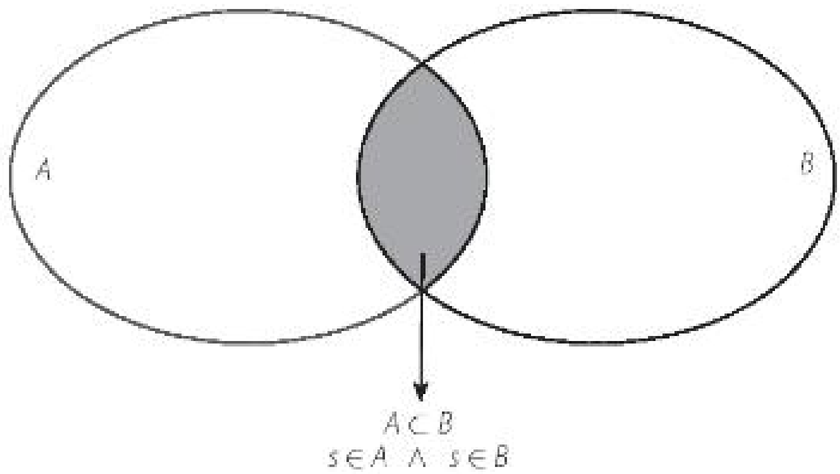
Então, a proposição $s \in A \rightarrow s \in B$ é sempre verdadeira, como podemos ver na Figura 2.3.

Figura 2.3 *A* está contido em *B*.



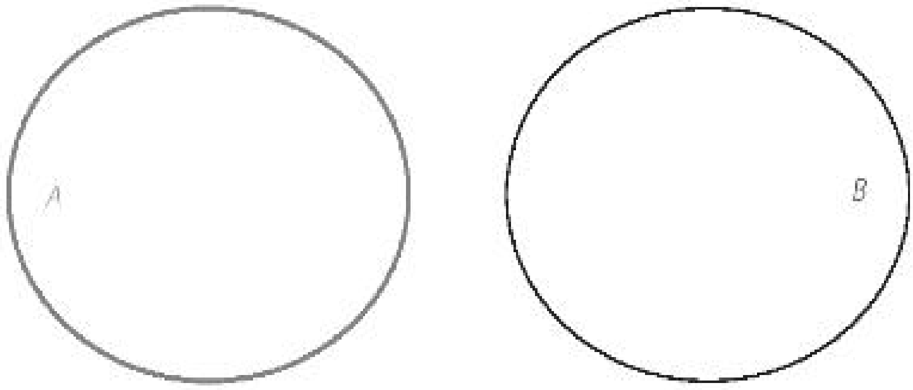
Já a proposição algum a é b é verdadeira quando existir pelo menos um elemento que pertence simultaneamente a A e a B. Nesse caso, o conjunto formado por todos os elementos s tais que seja verdadeira a proposição $s \in A \wedge s \in B$ é a intersecção de A com B, ou seja, $A \cap B$. Veja a representação na Figura 2.4.

Figura 2.4 Intersecção de *A* com *B*.



Nenhum a é b só é verdadeira quando A e B não têm elementos comuns, isto é, são disjuntos. Dizemos, então, que a intersecção de A com B é o conjunto vazio, representado por $A \cap B = \varnothing$. Na Figura 2.5 fica mais clara essa proposição, observe:

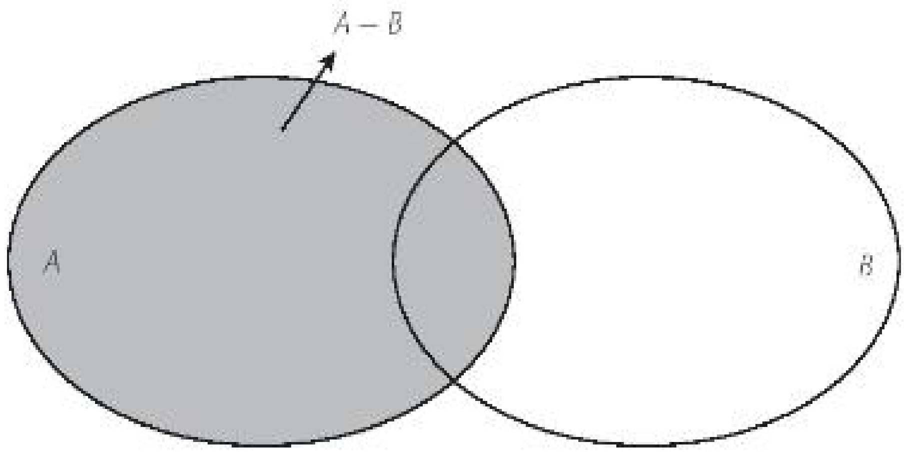
Figura 2.5 Intersecção de A com B é o conjunto vazio.



$$A \cap B = \varnothing$$
$$s \in A \rightarrow s \notin B$$

Já algum a não é b é uma proposição verdadeira quando existem elementos de A que não pertencem a B, isto é, A não é subconjunto de B e é representado por $A \not\subset B$. Então, o conjunto formado por todos os elementos s tais que seja verdadeira a proposição $s \in A \wedge s \notin B$ é o conjunto diferença $A - B$. Que tal entender melhor na Figura 2.6?

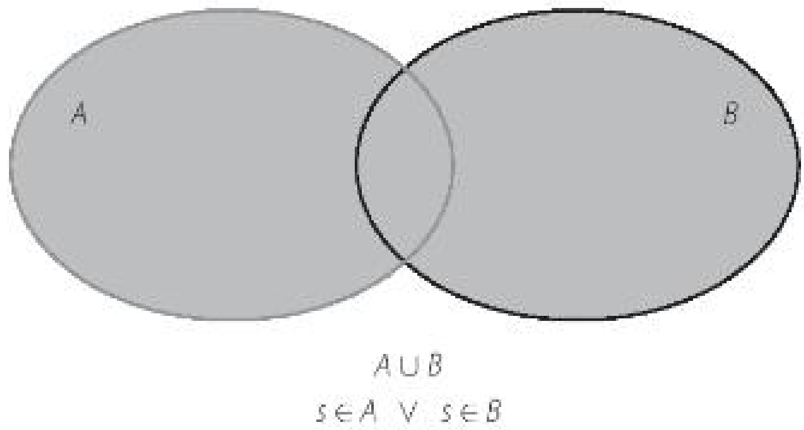
Figura 2.6 A não é subconjunto de B.



$$A \not\subset B$$
$$s \in A \wedge s \notin B$$

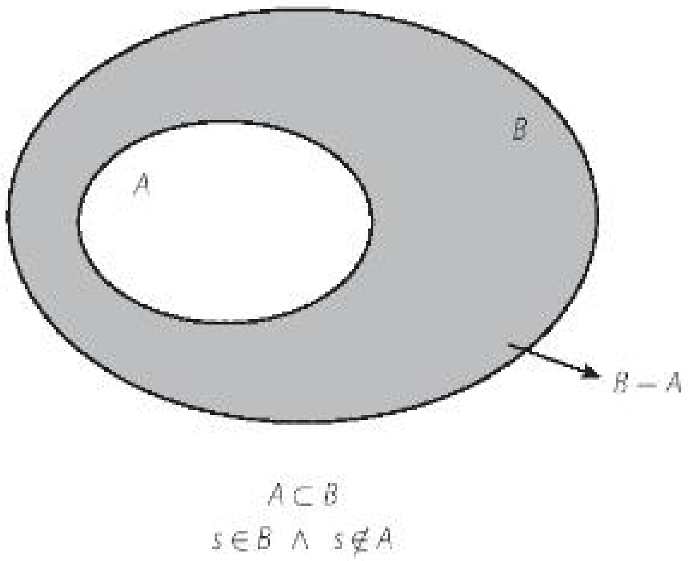
Para fechar esse estudo entre conjuntos e proposições, vale lembrar que o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B, isto é, elementos que estão em A ou em B é tido como a união de A com B, ou seja: $A \cup B$. Veja na Figura 2.7:

Figura 2.7 União de *A* com *B*.



Já quando temos $A \subset B$ se também for verdadeira $B \subset A$, os conjuntos A e B são iguais. Assim, afirmar que todo a é b e todo b é a significa dizer que $A = B$. Observe na Figura 2.8.

Figura 2.8 *A* é igual a *B*.



Também é muito importante ter claro o conceito de conjunto universo, que ocorre quando todos os conjuntos envolvidos são subconjuntos de um certo conjunto U. Nesse caso, a cada subconjunto

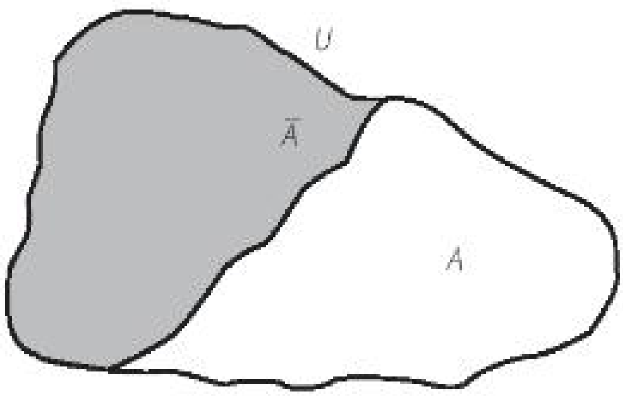
A formado pelos elementos de U que possuem a propriedade a corresponde a um outro subconjunto $\overline{A}$ de U, formado pelos elementos que apresentam a propriedade a.

Note que esse conjunto $\overline{A}$ de U é formado pelos elementos que não têm a propriedade a. Então, esse conjunto $\overline{A}$ é o complementar de A em relação a U, o que faz valer as relações:

- $\overline{A} = U - A$;
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
- $A \cup \overline{A} = U$.

Observe essa relação na Figura 2.9:

Figura 2.9 Representação gráfica da relação.



$$s \in A \leftrightarrow s \notin \overline{A}$$

Vamos entender na prática os conceitos acima? Acompanhe o exemplo a seguir, elaborado com base em Machado (1988):

Exemplo

Imagine que U é o conjunto de todos os países do mundo; E é o conjunto que representa apenas países exportadores de petróleo e I é o conjunto dos países industrializados. Então:

$E \cap I$: conjunto dos países exportadores de petróleo e industrializados.

$E \cup I$: conjunto dos países exportadores de petróleo ou industrializados.

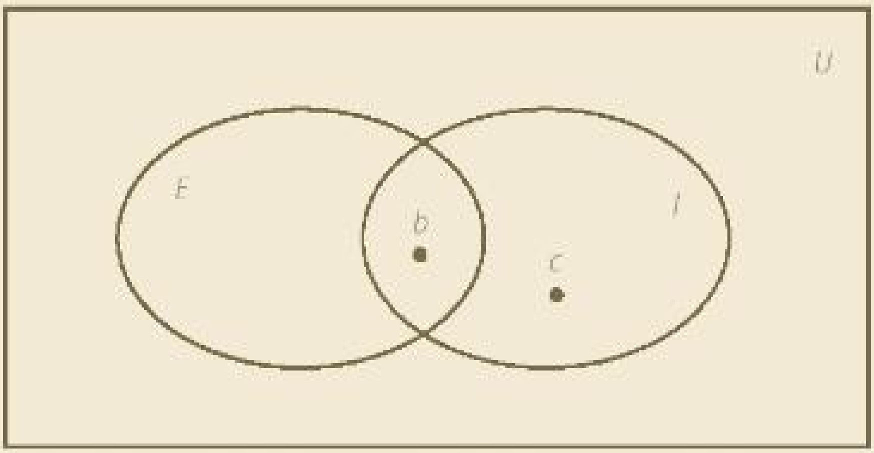
$E - I$: conjunto dos países exportadores de petróleo e não industrializados.

$I - E$: conjunto dos países industrializados que não são exportadores de petróleo.

$\overline{E}$: conjunto dos países que não exportam petróleo.

$\overline{I}$: conjunto dos países não industrializados.

Assim, E representa o conjunto de países exportadores de petróleo e não industrializados; já b reúne países exportadores de petróleo e, ao mesmo tempo, industrializados; e por fim c são os países industrializados que não exportam petróleo. Fazendo o diagrama dos conjuntos, temos a representação das proposições:



Valores lógicos das proposições

Como já vimos, em lógica só consideramos proposição as sentenças que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Se ela for verdadeira, dizemos que seu valor lógico é V; já se a sentença for falsa, seu valor lógico é F.

Portanto, a proposição $7 > 2$ é verdadeira. Observe que nesse caso o valor lógico é V (verdadeiro). Já se falarmos que $7 < 2$, o valor lógico da proposição é F (falso).

A sentença "7×2", sem informar o resultado, não é uma proposição, pois não podemos classificar como verdadeira ou falsa. Já "$7 \times 2 = 14$" é uma proposição cujo valor lógico é verdadeiro (V).

Proposições simples e compostas

Até agora só deparamos com proposições simples, que devem ter um valor lógico verdadeiro ou falso e não podem, de maneira nenhuma, ser algo contraditório, ou seja, ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo. Em uma proposição simples, dizemos que $3 + 4 = 7$, isto é, que seu valor lógico é verdadeiro para o resultado 7. No entanto, a partir de proposições simples podemos formar proposições compostas, fazendo uso dos conectivos "e" e "ou".

Exemplo

Quando dizemos que João é inteligente **e** Paulo é um bom atleta, temos uma proposição completa a partir do conectivo **e**. Note que há duas proposições simples, e por meio do conectivo, torna-se uma proposição composta.

No caso de uma proposição composta, o valor lógico (V ou F) é totalmente determinado pelos valores lógicos das proposições simples que a constituem e pela forma como estão ligadas pelo conectivo.

Conectivos

Você já teve uma ideia do quanto é importante o uso dos conectivos na proposição composta. Quando duas proposições simples são ligadas pela conjunção "**e**", a proposição composta é resultante da combinação das proposições simples iniciais.

Uma das proposições é representada por p e a outra por q. O conectivo "**e**" traduz a ideia de simultaneidade. Representamos essa proposição por $p \wedge q$.

Saiba mais

No caso do conectivo **e**, a proposição só será verdadeira quando ambas forem verdadeiras. Em qualquer outro caso, será falsa. Assim, se a primeira proposição afirmar que $2 \times 1 = 2$ **e** $2 + 2 = 3$, dizemos que essa proposição composta é falsa, já que somente a primeira é verdadeira.

Outro conectivo bastante utilizado é o "**ou**", sendo geralmente utilizado para hipóteses mutuamente exclusivas. Note que a proposição que contém o conectivo "ou" transmite a ideia de exclusão, como: "Hoje irei ao cinema ou ao estádio".

Em lógica, usaremos com um sentido não exclusivo, ou seja, não impedindo que ambas as proposições sejam simultaneamente verdadeiras. A proposição p ou q é chamada *disjunção* e é representada por $p \vee q$.

Acompanhe o esquema a seguir e veja as proposições com os conectivos "**e**" e "**ou**" (MACHADO, 1988):

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo

Se p: $3 < 4$ (verdadeira) e q: $4 < 5$ (verdadeira), então $p \wedge q$ ($3 < 4$ e $4 < 5$) é verdadeira.

Fique atento

No exemplo anterior, a disjunção será verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira. Se ambas forem falsas, ou seja, o time A não vence o time B e nem empata com o time C, dizemos que $p \vee q$ é falsa.

Vejamos, agora, um exemplo com o conectivo "ou".

Exemplo

De acordo com p: O time A vence o time B, já q afirma: O time A empata com o time C. Então $p \vee q$: O time A vence o time B ou empata com o time C. Note que nesse caso as duas proposições podem ser verdadeiras, ainda que tenha "ou", pois ele pode vencer o time B no domingo e empatar com o time C na quarta-feira.

Quando uma proposição for verdadeira, sua negação será representada por $\sim p$. Observe a seguir (MACHADO, 1988):

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela-verdade

O uso repetido dos conectivos nos leva a construir proposições compostas e gradativamente mais complexas. Portanto, fica muito mais difícil determinar os valores lógicos de maneira imediata.

Para tais casos, há um modo organizado e sistemático, que é a construção da tabela-verdade. Esse recurso reúne todas as possíveis combinações entre os valores lógicos das proposições componentes e com o correspondente valor lógico da proposição composta.

Para entender o uso da tabela-verdade, acompanhe o exemplo a seguir, construído com base em Machado (1988).

Exemplo

Para determinar todos os possíveis valores lógicos da proposição $p \wedge \sim q$ conjunção de uma proposição p com a negação de uma proposição q, temos a tabela-verdade:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Note que a primeira linha da tabela afirma que sendo p verdadeira e q falsa, então $\sim q$ será falsa e como consequência a conjunção $p \wedge \sim p$ será falsa. Veja que as demais linhas analisam todas as outras possibilidades.

Saiba mais

Chamamos tautologia quando uma proposição composta apresenta apenas o valor lógico V, quaisquer que sejam os valores lógicos das componentes.
A proposição "O céu está claro ou não está" é uma tautologia.

Operações lógicas sobre conectivos (proposições)

Negação

Um simples raciocínio já é suficiente para muitas operações sobre proposições. Essas operações lógicas obedecem às regras do cálculo proposicional.

Como já acompanhamos anteriormente, a negação de proposições é algo bastante simples, isto é, a negação de uma proposição "p" é "*não p*" ou não é verdadeira de p ou ainda é o complementar de p, pois essa variável pode assumir somente dois valores lógicos (ALENCAR FILHO, 2002).

O valor lógico de uma negação pode ser entendido como:

p	$\sim p$
V	F
F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$\sim V = F, \quad \sim F = V$$
$$V(\sim p) = \sim V(p)$$

Que tal entender na prática a partir de alguns exemplos?

Exemplos

Sendo p: $4 > 5$ a negação aponta que não é verdade que $4 > 5$ ou 4 não é > 5.

Sendo $p : a \neq 0$ e q: $b \neq 0$, $p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$. A negação diz que $a = 0$ ou $b = 0$.

Conjunção

De acordo com Alencar Filho (2002), chamamos de conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por p e q cujo valor lógico é a verdade, quando ambas são verdadeiras. De acordo com a tabela-verdade, o valor lógico de duas proposições é definido:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou pelas igualdades:

$$V \wedge V = V, \quad V \wedge F = F, \quad F \wedge V = F, \quad F \wedge F = F$$

e

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$$

Vamos acompanhar na prática o exemplo a seguir:

Exemplo

$$\begin{cases} p: \text{ A neve é branca (V)} \\ q: \ 2<5 \text{ (V)} \end{cases}$$

$p \wedge q$: A neve é branca e $2<5$ (V)

$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$

Disjunção

Já a disjunção de duas proposições p e q ocorre quando o valor lógico é a verdade (V) em ao menos uma das proposições. Por outro lado, esse valor é falso (F) quando as proposições p e q são falsas.

Segundo Alencar Filho (2002), para representar a disjunção usamos $p \vee q$ (p ou q). Definimos o valor pela tabela-verdade a seguir:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou pelas igualdades

$$V \vee V = V, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

e

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

Para que você entenda melhor, acompanhe o exemplo a seguir:

Exemplo

$$\begin{cases} p: & \text{Paris é a capital da França (V)} \\ q: & 9-4=5 \text{ (V)} \end{cases}$$

$p \vee q$: Paris é a capital da França ou $9-4=5$ (V)

$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$

Disjunção exclusiva

Quando usamos a palavra "ou", consideramos que somente uma opção é válida. Considere, por exemplo, quando falamos que Mário é paulistano ou gaúcho. Note que Mário só pode ser paulistano ou gaúcho, pois jamais terá nascido nos dois Estados simultaneamente. Portanto, aqui só uma das proposições pode ser verdadeira, e a outra necessariamente será falsa. Por outro lado, uma proposição composta que diz que Mário é médico ou professor pode ter duas proposições verdadeiras, já que Mário pode ser médico e, ao mesmo tempo, dar aulas em uma universidade, por exemplo.

Na proposição que diz que Mário é paulistano ou gaúcho, o conectivo "ou" é exclusivo, ou seja, é uma proposição exclusiva. Já a proposição que diz que Mário é médico ou professor é inclusiva. Ainda de acordo com Alencar Filho (2002), acompanhe na tabela-verdade a seguir o valor lógico da disjunção exclusiva:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou pelas igualdades

$$V \veebar V = F, \qquad V \veebar F = V, \qquad F \veebar V = V, \qquad F \veebar F = F$$

e

$$V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q)$$

Condicional e bicondicional

A proposição condicional ou apenas condicional é representada por "se p então q", cujo valor lógico é falso (F) quando q é falso e verdadeiro (V) nos demais casos.

A condicional é representada por "$p \rightarrow q$", que lemos das seguintes maneiras:

(i) p é condição suficiente para q

(ii) q é condição necessária para p

Na condicional "$p \rightarrow q$", p é o antecedente e q é o consequente. O símbolo ($\rightarrow$) entre as proposições é denominado implicação.

O valor da condicional de duas proposições é definido pela tabela-verdade apresentada a seguir.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ou pelas igualdades

$$V \to V = V, \quad V \to F = F, \quad F \to V = V, \quad F \to F = V$$

e

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q)$$

Isso quer dizer que uma condicional é verdadeira todas as vezes que seu antecedente é uma proposição falsa.

Que tal acompanhar na prática no exemplo a seguir?

Exemplo

$\begin{cases} p: \text{GALOIS morreu em duelo (V)} \\ q: \pi \text{ é um número real (V)} \end{cases}$

$p \to q$: Se GALOIS morreu em duelo, então π é um número real (V)

$V(p \to q) = V(p) \to V(q) = V \to V = V$

A proposição bicondicional ou apenas bicondicional é representada por "p se e somente q", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando p e q são verdadeiras ou falsas. Note que ambos precisam ser verdadeiros ou falsos. Nos demais casos, o valor lógico é falso (F).

A bicondicional de duas proposições é representada por $p \leftrightarrow q$, que também é lido da seguinte maneira:

(i) p é condição necessária e suficiente para q
(ii) q é condição necessária e suficiente para p

Seu valor lógico é definido pela tabela-verdade a seguir:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ou pelas igualdades

$V \leftrightarrow V = V, \quad V \leftrightarrow F = F, \quad F \leftrightarrow V = F, \quad F \leftrightarrow F = V$

e

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$$

Isso significa que uma bicondicional é verdadeira (V) somente quando as duas condicionais também são:

$$p \to q \text{ e } q \to p$$

Para entender na prática, observe o exemplo a seguir:

Exemplo

$\begin{cases} p\text{: Roma fica na Europa (V)} \\ q\text{: A neve é branca (V)} \end{cases}$

$p \leftrightarrow q$: Roma fica na Europa se e somente se a neve é branca (V)

$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$

Exercícios de fixação

1. Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas e usar apenas as cores amarela, branca e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos podem ser dispostas as cores da bandeira?
2. Dos anagramas da palavra RAMO, quantos começam com "R"?
3. Determine a quantidade de números naturais de três algarismos distintos na base 10.
4. De quantos modos três pessoas podem sentar-se em cinco cadeiras.
5. De quantos modos cinco meninos e cinco meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?
6. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?
7. Foram convocados para a seleção brasileira dois goleiros, seis zagueiros, sete meios de campo e quatro atacantes. De quantos modos diferentes é possível escalar a seleção com um goleiro, quatro zagueiros, quatro meios de campo e dois atacantes?
8. De quantos modos podemos comprar três refrigerantes em uma loja onde há cinco tipos de refrigerantes?
9. Diga quando a proposição composta $p \vee q$: "Marcos estudou a lição e fez os problemas".
10. Sejam as proposições p: A vaca foi para o brejo e q: O boi seguiu a vaca. Forme sentenças que apontem que:

    $\sim p \wedge q$

    $p \vee \sim q$

    $\sim(p \wedge q)$

    $\sim(p \vee q)$
11. Traduza para a linguagem simbólica a seguinte proposição $x = 0$ ou $x > 0$.

Panorama

Galileu e as probabilidades

O físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564--1642) também se dedicou às probabilidades ao estudar os jogos de dados para responder à pergunta de um amigo.

Galileu procurou entender como, a partir da soma do resultado de três dados, podemos obter os números 9 e 10. A experiência mostrou que o número 10 é obtido com mais frequência que o 9.

Qual seria o mistério? Para explicar tal fenômeno, o cientista estudou o caso de forma minuciosa, analisando cada probabilidade envolvida, e mostrou ao seu amigo que dos 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número 10 e 25 ao aparecimento do número 9.

Exercício

Com base no exemplo de Galileu, escolha um tipo de jogo de loteria e demonstre como é calculada a probabilidade de ganhar no jogo escolhido.

Recapitulando

A análise combinatória não é simplesmente o estudo das combinações, arranjos e permutações. O assunto engloba outros problemas e reúne técnicas para resolvê-los. De acordo com Antunes Filho (2002), esse é o ramo da matemática que estuda as propriedades, o cálculo do número e o modo de formação dos agrupamentos, conforme determinadas leis.

A permutação simples é entendida como um caso especial de arranjo, cuja principal característica é o não ordenamento dos elementos.

Como o próprio nome sugere, as permutações circulares são compostas por um ou mais conjuntos em ordem cíclica. Isso ocorre quando os grupos de elementos distintos formam uma circunferência. Na prática, isso significa que para determinarmos de quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados ao redor de um círculo, consideramos equivalentes disposições que possam coincidir em cada rotação. Logo, o número de permutações circulares de n objetos distintos é representado por $(PC)_n$.

O cálculo de elementos nem todos distintos é um caso importante. Isso significa que quando existem k espécies de elementos, determinamos da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} n_1 & \text{elementos iguais a } b_1 \\ n_2 & \text{elementos iguais a } b_2 \\ \vdots & \qquad\vdots \\ n_k & \text{elementos iguais a } b_k \end{array}$$

Tal que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n!$

Observe que esse tipo de agrupamento não pode ser considerado agrupamento completo, pois não parte da ideia de que todos os elementos do conjunto A sejam distintos e um ou mais elementos poderão ser escolhidos mais de uma vez.

A combinação simples nada mais é que um tipo de agrupamento que faz parte do estudo de análise combinatória, com elementos que se diferenciam apenas por sua natureza.

Para perceber a diferença entre combinações simples e completas, imagine que você está em uma sorveteria e há sete sabores disponíveis. De quantos modos é possível comprar quatro sorvetes? Se você pensou que a resposta correta é $C_7^4 = 35$, portanto 35 modos, enganou-se. A resposta é representada por CR_7^4 isto é, o número de combinações completas de classe quatro de sete objetos. Nesse caso, estamos falando do número de modos de escolher quatro opções entre sete distintos – e aqui vale escolher o mesmo objeto de uma vez. Portanto, é preciso considerar também as repetições.

Em lógica, só consideramos proposição as sentenças que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Se ela for verdadeira, dizemos que seu valor lógico é V; já se a sentença for falsa, o seu valor lógico é F.

As proposições simples devem ter um valor lógico verdadeiro ou falso e não podem de maneira nenhuma ser algo contraditório, ou seja, ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo.

Mas, a partir de proposições simples, podemos formar proposições compostas usando os conectivos "e" ou "ou".

Quando duas proposições simples são ligadas pela conjunção "e", a proposição é resultante das proposições simples iniciais. Uma das proposições é representada por p e a outra por q. O conectivo "e" traduz a ideia de simultaneidade. Simbolicamente, essa proposição é representada por $p \wedge q$.

O conectivo "ou" muitas vezes transmite a ideia de exclusão.

Porém, em lógica usaremos o sentido não exclusivo, ou seja, não impedindo que ambas proposições sejam simultaneamente verdadeiras.

O uso repetido dos conectivos nos leva a construir proposições compostas e gradativamente mais complexas. Portanto, fica muito mais difícil determinar os valores lógicos de maneira imediata. Para tanto, há um modo organizado e sistemático: a tabela-verdade.

A negação de proposições é algo bastante simples, isto é, a negação de uma proposição "*p*" é "*não p*" ou o complementar de *p*.

Chamamos conjunção de duas proposições p e q, a proposição representada por p e q cujo valor lógico é a verdade, quando ambas são verdadeiras.

Já a disjunção de duas proposições p e q ocorre quando o valor lógico é a verdade (V) em ao menos uma das proposições; e é falsa (F) quando as proposições p e q são falsas. Para simbolizar a disjunção usamos $p \vee q$, que se lê p ou q.

Quando usamos a palavra "ou" no dia a dia, subentende-se apenas uma opção: uma ou outra. Considere, por exemplo, que estamos falando que Mário é paulistano ou gaúcho. Note que Mário só pode ser paulistano ou gaúcho e jamais ter nascido nos dois Estados. Portanto, aqui só uma das proposições é verdadeira. Na proposição que diz que Mário é paulistano ou gaúcho, o "ou" é exclusivo, isto é, a proposição exclusiva.

A proposição condicional ou apenas condicional é representada por "se p então q". Já a proposição bicondicional é representada por "p se e somente q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas e falsa (F) nos demais casos.

A bicondicional de duas proposições é representada por $p \leftrightarrow q$, que também é lida da seguinte maneira:

(I) p é condição necessária e suficiente para q

(II) q é condição necessária e suficiente para p

Tabelas-verdade e implicações lógicas

Objetivos de aprendizagem

- Compreender a importância da tabela-verdade para determinar os valores lógicos das proposições compostas.
- Aprender a construir uma tabela-verdade.
- Usar parênteses em proposições.
- Conceituar tautologia e compreender os princípios da identidade, do terceiro excluído e da substituição.
- Diferenciar contradição e contingência.
- Entender o conceito de implicação lógica e suas propriedades.

Temas

- **1 – Construção de tabelas-verdade**
  Vamos compreender por que a tabela-verdade é fundamental para determinar os valores lógicos das proposições compostas. Veremos também como se constrói uma tabela-verdade e entenderemos a importância do número de linhas e do uso dos parentêses nas proposições compostas.
- **2 – Tautologias**
  Vamos definir tautologia, desenvolver exemplos práticos e identificar princípios fundamentais, como identidade, terceiro excluído e substituição.
- **3 – Contradições e contingências**
  Entenderemos o porquê de uma proposição composta se chamar contradição e quando ela é denominada *contingência*.
- **4 – Implicação lógica**
  Para finalizar esta unidade, você saberá identificar a validade de um argumento de premissas e quando implica logicamente a conclusão, bem como verificar propriedades importantes associadas.

Introdução

Chegamos à terceira unidade, e agora teremos a oportunidade de "colocar a mão na massa" e entender na prática a importância das tabelas-verdade para determinar os valores lógicos das proposições compostas. Para tanto, você vai aprender o método de elaboração e verificar que o número de linhas é essencial para o estudo, pois está diretamente ligado ao número de proposições associadas.

A seguir, você assimilará o valor lógico de uma proposição composta e ainda verificará o porquê do uso dos parênteses, fundamentais para indicar adequadamente uma proposição.

No segundo tema, vamos definir tautologia, acompanhar exemplos e estudar seus princípios, como o da identidade, o do terceiro excluído e o da substituição. Também vamos saber como diferenciar uma proposição "contradição" de "contingência".

Para encerrar a unidade, vamos entender quando um argumento de premissas é válido, implicando logicamente a conclusão, bem como identificar suas propriedades.

Prepare-se para acompanhar exemplos e perceber que a lógica matemática está ficando cada vez mais prática!

Construção de tabelas-verdade

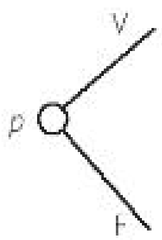
Tabela-verdade de uma proposição composta

Na unidade anterior, você aprendeu que toda proposição simples tem um valor lógico verdadeiro (V) ou falso (F) e isso se deve ao *princípio do terceiro excluído*.

Também acompanhamos que o uso repetido dos conectivos leva à construção de proposições compostas e muito mais complexas. Por esse motivo, fica ainda mais difícil determinar os valores lógicos de maneira imediata, tal como era feito nas proposições simples.

Figura 3.1 Proposição composta.

p
V
F



Fonte: Alencar Filho (2002, p. 13).

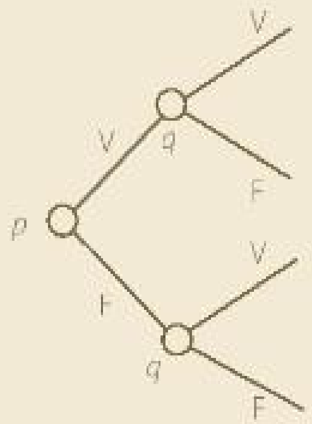
Vale lembrar que o valor lógico de qualquer proposição composta depende exclusivamente dos valores lógicos das proposições simples que a constituem.

A tabela-verdade é uma importante ferramenta para a determinação de todos os valores lógicos das proposições compostas a partir de atribuições de todos os valores lógicos das proposições simples componentes. Após a compreensão de um exemplo, você vai verificar que não estamos falando de algo muito complexo.

Exemplo

Imagine que *p* é uma proposição composta, cujas proposições simples componentes são *p* e *q*, e as únicas atribuições de valores lógicos a *p* e a *q* são:

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

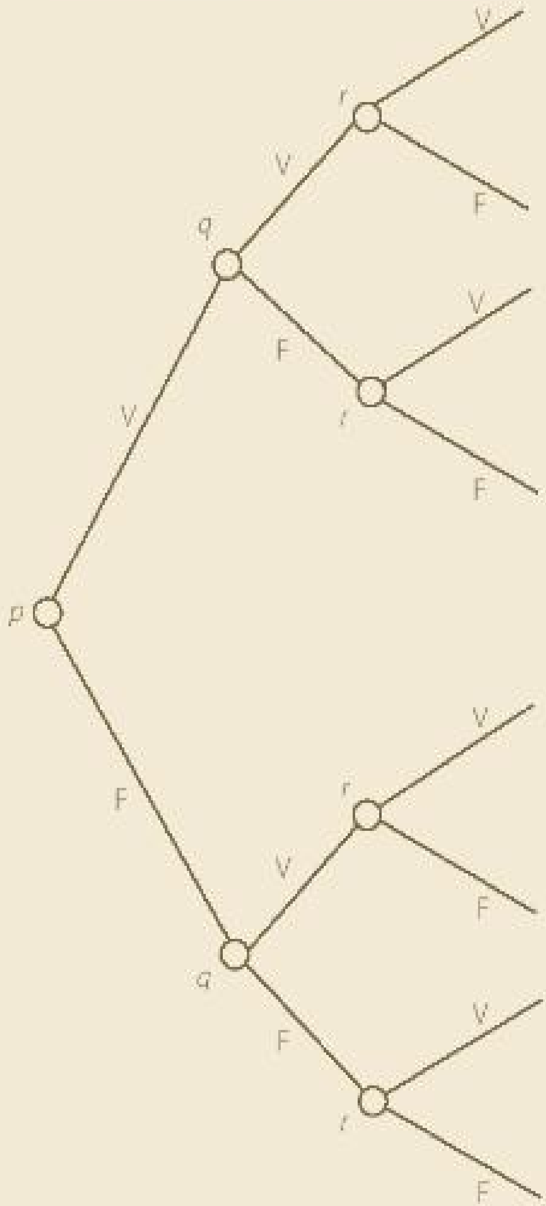


Note que no esquema acima os valores lógicos V e F se alternam de dois em dois para a primeira proposição *p* e de um em um para a segunda proposição *q*. Observe também que VV, VF, FV e FF são arranjos binários com repetição dos elementos V e F.

Exemplo

Neste outro caso, a proposição composta de proposições simples componentes *p*, *q* e *r*, as únicas atribuições de valores lógicos a *p*, a *q* e a *r* são:

	p	*q*	*r*
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F



Observe que os valores lógicos V e F se alternam de quatro em quatro para a primeira proposição *p*, de dois em dois para a segunda proposição *q* e de um em um para a terceira proposição *r*. Além disso, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF e FFF são arranjos ternários com repetição dos dois elementos V e F.

Saiba mais

Indicamos o valor lógico de uma proposição simples p como $V(p)$, ou seja, dizemos que p é verdadeira (V) quando $V(p) = V$. Por outro lado, afirmamos que é falsa quando $V(p) = F$. Da mesma maneira, indicamos uma proposição composta P por $V(P)$.

Número de linhas de uma tabela-verdade

Depois de entender a importância da tabela-verdade para determinar os valores lógicos das proposições compostas, você deve estar curioso para construir a sua própria tabela. Em primeiro lugar, é importante saber que o número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a formam. Dadas várias proposições, podemos combiná-las pelos conectivos lógicos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, e assim construir proposições compostas, tais como:

$$P(p, q) = \sim p \vee (p \rightarrow q)$$

$$Q(p, q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$$

$$R(p, q, r) = (p \rightarrow \sim q \vee r) \wedge \sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$$

Ao empregar nas tabelas-verdade as operações lógicas $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, construímos a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição.

Saiba mais

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes tem 2^n linhas.

Sabemos que toda proposição simples tem somente dois valores lógicos: V ou F. Desse modo, para uma proposição composta $P = p_1, p_2, ..., p_n$ com n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$ há tantas possibilidades de atribuição dos valores lógicos V e F a tais componentes quanto o número de arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, ou seja, $A_2, n = 2^n$.

Na prática, a construção da tabela-verdade de uma proposição composta inicia-se com a contagem do número de proposições simples que a formam. Por isso, se há n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$, a tabela-verdade tem 2^n linhas. Assim, na primeira proposição simples p_1 atribuímos $2^n/2 = 2^{n-1}$ valores V, seguidos de 2^{n-1} valores F. Já à segunda proposição simples p_2, atribuímos $2^n/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, e assim por diante.

Veja que a tabela-verdade da proposição p, composta com cinco proposições simples, tem $2^5 = 32$ linhas, e os grupos de valores V e F se alternam de 16 em 16 para a primeira proposição simples p_1, de 8 em 8 para a segunda proposição p_2, de 4 em 4 para a terceira proposição p_3, de 2 em 2 para a quarta proposição p_4, de 1 em 1 para a 5 proposição p_5, e assim por diante.

Exemplo

Para construir a tabela-verdade da proposição $P(p, q) = \sim(p \land \sim q)$, temos como opção formar um par de colunas correspondentes às duas proposições simples p e q. Na sequência formamos a coluna $\sim q$. Por fim, formamos a coluna $p \land \sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \land \sim q$	$\sim(p \land \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Podemos resolver a proposição do exemplo anterior de uma segunda maneira. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

A proposição $P(p, q) = \sim(p \land \sim q)$ também pode ser resolvida formando primeiro nas colunas correspondentes às duas proposições simples p e q. Depois, à direita, podemos formar uma coluna para cada uma das proposições, e para cada um dos conectivos que fazem parte da proposição composta. Observe a tabela-verdade:

p	q	~	$(p$	$\wedge$	~	$q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Assim, vamos completando as colunas e escrevendo em cada uma os respectivos valores lógicos. Acompanhe:

p	q	~	$(p$	$\wedge$	~	$q)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
		4	1	3	2	1

Observe que os valores lógicos da proposição composta estão na cuarta coluna. De uma maneira abreviada, os valores lógicos da proposição composta seriam:

$$P(VV, VF, FV, FF) = VFVV$$

Mas ainda há uma terceira maneira de resolver a proposição, conforme vamos acompanhar no exemplo a seguir:

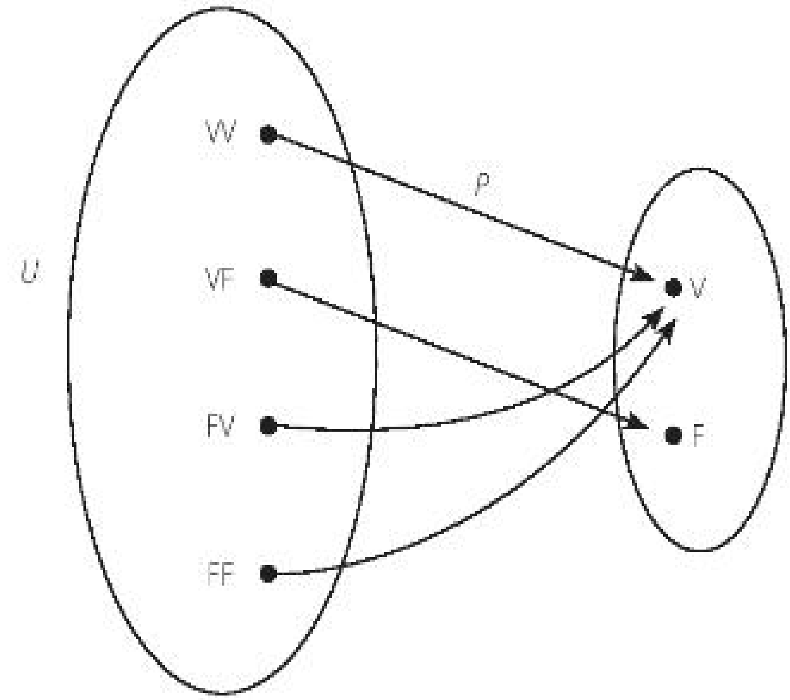
Exemplo

Ao excluírmos da tabela-verdade anterior as duas primeiras colunas da esquerda relativas às proposições simples componentes p e q, temos a seguinte tabela-verdade simplificada:

~	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	~	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
3	1	2	1	4	3	1	2	1

Note que, no exemplo anterior, os valores lógicos da proposição composta dada, correspondente a todas as atribuições dos valores lógicos V e F às proposições simples componentes p e q (VV, VF, FV, FF), são V, F, V e V, que representamos por: P(VV, VF, FV, FF) = VFVV. A proposição $P(p, q)$ associa a cada um dos elementos do conjunto $U = \{VV, VF, FV, FF\}$ um único elemento $\{V, F\}$. Logo, temos $P(p, q) : U \rightarrow \{V, F\}$. Podemos, ainda, representar no diagrama sagital, conforme mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 Diagrama sagital.



Fonte: Alencar Filho (2002, p. 32).

Exemplo

Podemos construir a tabela-verdade da proposição $P(p, q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$ a partir de três resoluções. A primeira é representada por:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

A segunda resolução é representada por:

p	q	~	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	~	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F
		3	1	2	1	4	3	1	2	1

De modo que $P(VV) = F$, $P(VF) = V$, $P(FV) = V$, $P(FF) = V$ e de maneira abreviada $P(VV, VF, FV, FF) = FVVV$. Por fim, a terceira resolução pode ser representada por:

~	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	~	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
3	1	2	1	4	3	1	2	1

Exemplo

A construção da tabela-verdade da proposição $P(p, q, r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$ tem como primeira resolução:

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Na segunda resolução, temos:

p	q	r	p	∨	~	r	→	q	∧	~	r
V	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
			1	3	2	1	4	1	3	2	1

E representamos da seguinte maneira:

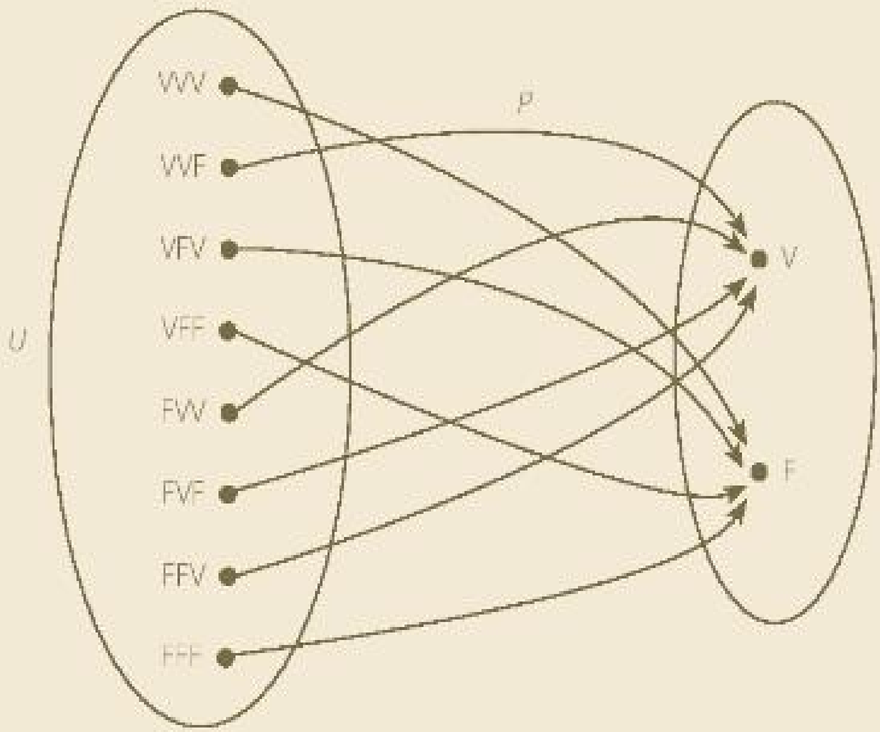
$$P(VVV) = F, \quad P(VVF) = V, \quad P(VFV) = F, \quad P(VFF) = F,$$

$$P(FVV) = V, \quad P(FVF) = V, \quad P(FFV) = V, \quad P(FFF) = F$$

De modo abreviado, temos:

$$P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = FVFFVVVF$$

Sua representação gráfica pelo diagrama sagital é



Por fim, a terceira resolução:

p	$\vee$	$\sim$	r	$\rightarrow$	q	$\wedge$	$\sim$	r
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F
1	3	2	1	4	1	3	2	1

Valor lógico de uma proposição composta

Não é novidade que dada uma proposição composta podemos sempre determinar seu valor lógico como verdadeiro (V) ou falso (F), desde que sejam conhecidos os valores lógicos das proposições componentes. Mas que tal entender na prática a partir de alguns exemplos?

Exemplo

Como os valores lógicos das proposições p e q são, respectivamente, V e F, para determinar o valor lógico V ou F da proposição $P(p, q) = \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, temos $V(P) = \sim(V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F = \sim V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V$.

Exemplo

Dadas as proposições $p : \pi = 3$ e $q : \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0$. Para determinar o valor lógico V ou F da proposição $P(p, q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$, verifica-se que as proposições componentes p e q são falsas e, portanto, concluímos que: $V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F) = V \rightarrow (F \rightarrow F) = V \rightarrow V = V$.

Exemplo

Sabendo que $V(r) = V$, determinar o valor lógico V ou F da proposição $p \to \sim q \vee r$. Como r é verdadeira (V), a disjunção $\sim q \vee r$ é verdadeira (V), já que o seu consequente é verdadeiro (V).

Exemplo

Neste outro exemplo, sabendo que $V(q) = V$, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição $(p \to c) \to (\sim q \to \sim p)$. Como q é verdadeira (V), então $\sim q$ é falsa (F). Portanto, a condicional $\sim q \to \sim p$ é verdadeira (V), já que o seu antecedente é falso (F). Consequentemente, a condicional dada é verdadeira (V), pois o seu consequente é verdadeiro.

Exemplo

Dadas as proposições $x = 0$ e $x = y$ como verdadeiras e sabendo que $y = z$ é falsa, ao determinar o valor lógico V ou F da proposição $x \neq 0 \vee x \neq y \to y \neq z$, temos:

$$\sim V \vee \sim V \to \sim F = F \vee F \to V = F \to V = V$$

Uso de parênteses

O uso de parênteses é fundamental para simbolizar uma proposição, o que evita interpretações equivocadas. Dessa forma, escrevemos a proposição $p \wedge q \vee r$ da seguinte maneira $(p \wedge q) \vee r$. Essa mesma proposição, sem os parênteses, também pode ser representada por $p \wedge (q \vee r)$. Note que $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$ não têm o mesmo significado.

Neste caso, em $p \wedge (q \vee r)$ o conectivo principal é "$\vee$", enquanto nesta proposição $(p \wedge q) \vee r$ o conectivo principal é "$\wedge$". A primeira é uma disjunção e a segunda uma conjunção.

Fique atento

Em muitos casos, os parênteses podem ser excluídos, desde que isso não altere a interpretação da proposição. Porém, essa exclusão só ocorre em conformidade com alguns critérios. O primeiro deles é a ordem de precedência para os conectivos (1) ~; (2) ∧ e ∨; (3) →; (4) ↔. Note que o conectivo (1) ~ é o mais fraco, enquanto o conectivo (4) ↔ é o mais forte. O segundo critério afirma que quando um mesmo conectivo aparece de forma repetida, podemos excluir os parênteses, fazendo a associação a partir da esquerda. Ao seguir as convenções nas quatro proposições

$$((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p)); \quad ((p \vee (\sim q)) \wedge (r \wedge (\sim p)))$$
$$(((p \vee (\sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p)); \quad ((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim(p \vee r))))$$

escrevemos:

$$\sim\sim(p \wedge q) \vee p; \quad (p \vee \sim q) \wedge (r \wedge \sim p)$$
$$(p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p; \quad \sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim(p \vee r))$$

Saiba mais

É possível, ainda, encontrar uma notação diferente utilizada por alguns autores, a saber:
"¬" para negação (~)
"·" e "&" para a conjunção (∧)
"⊃" (ferradura) para a condicional (→).

Tautologias

Na unidade anterior falamos rapidamente sobre tautologia. Você se recorda? Apesar do nome incomum, a definição é bastante simples:

> Chama-se tautologia toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (verdade) (ALENCAR FILHO, 2002, p. 43).

Isso quer dizer que tautologia é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre V (verdade) quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes $p, q, r, ...$

As proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautológicas e formam o princípio da identidade.

Outro princípio bastante conhecido é o da não contradição. Assim, a proposição "$\sim(p \wedge \sim p)$" é tautológica, conforme os resultados da tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Dessa maneira, concluímos que é sempre verdadeiro dizer que uma proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

O último princípio é o do terceiro excluído, no qual a proposição "$p \lor \sim p$" é tautológica, como podemos verificar em sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \lor \sim p$
V	F	V
F	V	V

Concluímos, portanto, que a afirmação de que toda proposição é verdadeira ou falsa é sempre verdadeira.

Saiba mais

As tautologias também são denominadas *proposições tautológicas* ou *proposições logicamente verdadeiras*.

Vamos acompanhar alguns exemplos na prática?

Exemplo

Note que a proposição "$p \lor \sim(p \land q)$" é tautológica, conforme sua tabela-verdade:

p	q	$p \land q$	$\sim(p \land q)$	$p \lor \sim(p \land q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Exemplo

A proposição "$p \lor (p \land \sim q) \leftrightarrow p$" também é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$p \vee (q \wedge \sim q)$	$p \vee (q \wedge \sim q) \leftrightarrow p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

Exemplo

Veja que proposição "$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$" é tautológica, de acordo com a sua tabela-verdade:

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$r)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	F
1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

Princípio de substituição

Para entender o princípio da substituição, é importante verificar que se $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia, e que se $P_0(p, q, r, ...)$, $Q_0(p, q, r, ...)$, $R_0(p, q, r, ...)$ são proposições quaisquer, sendo o valor lógico de $P(p, q, r, ...)$ sempre verdade, quaisquer valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r... na substituição de p por P_0, q por Q_0, r por R_0... na tautologia $P(p, q, r, ...)$ a nova proposição $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ obtida também é uma tautologia.

Exemplo

Se $P: (p \wedge q) \vee (\sim p) \vee (\sim q)$ é uma tautologia e $Pp : r \vee s$ e $Pq : r \rightarrow t$. Ao substituir p por Pp e q por Pq , temos uma nova tautologia: $((r \vee s) \wedge (r \rightarrow t)) \vee (\sim(r \vee s)) \vee (\sim(r \rightarrow t))$.

Contradições e contingências

Contradição

Chamamos de contradição toda a proposição composta que tenha valor lógico falso para todas as suas possibilidades. Isso significa que em toda a proposição composta $P(p, q, r, ...)$ o valor lógico será sempre falso (F), independentemente dos valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r...

Já sabemos que uma tautologia é sempre verdadeira (V). Da mesma forma, a negação de uma tautologia é sempre falsa (F), ou seja, é uma contradição.

Assim, $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ for uma contradição, e $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ for uma tautologia.

Saiba mais

Você sabia que as contradições também são chamadas de *proposições contraválidas* ou *proposições logicamente falsas*?

Para as contradições, há o princípio de substituição, semelhante ao que aprendemos na tautologia. Portanto, se $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, ...

Que tal entender a partir de alguns exemplos?

Exemplo

A proposição "$p \wedge \sim p$" é uma contradição, conforme observamos em sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Afirmar que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

Exemplo

Esta outra proposição "$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$" também é uma contradição, de acordo com sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Exemplo

Para finalizar os exemplos em relação às contradições, a proposição "$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$" é uma contradição, conforme se verifica em sua tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Contingência

A contingência, por sua vez, é toda a proposição composta que tenha pelo menos um valor lógico verdadeiro e um valor falso em suas possibilidades. Isto é, toda proposição composta terá na última coluna de sua tabela-verdade as letras V e F ao menos uma vez. Assim, podemos entender contingência como toda proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Saiba mais

As contingências também são chamadas *proposições contingentes* ou *proposições indeterminadas*.

Vamos identificar contingências na prática?

Exemplo

A proposição "$p \to \sim p$" é uma contingência, conforme podemos observar em sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \to \sim p$
V	F	F
F	V	V

Exemplo

A proposição "$x = 3 \wedge (x \neq y \to x \neq 3)$" também é uma contingência, segundo a sua tabela-verdade:

$x = 3$	$x = y$	$x \neq 3$	$x \neq y$	$x \neq y \to x \neq 3$	$x = 3 \wedge (x \neq y \to x \neq 3)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Implicação lógica

Definição e propriedades da implicação lógica

O que você entende por um argumento? Quando pensamos em um argumento de premissas, representamos por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e a conclusão c, representamos por $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash c$.

Quando o argumento é válido, a conjunção das premissas implica logicamente a conclusão. Nesse caso, a proposição $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots p_n \to c$ é sempre verdadeira.

Essa proposição só seria falsa se a conjunção das premissas fosse verdadeira, e a conclusão, falsa, o que não ocorre quando o argumento é válido. De acordo com Alencar Filho (2002, p. 49, grifos do original), podemos definir implicação lógica como:

Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, ...)$ *implica logicamente* ou apenas *implica* uma proposição $Q(p, q, r, ...)$, se $Q(p, q, r, ...)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p, q, r, ...)$ é verdadeira (V).

Vamos entender melhor com um exemplo?

Exemplo

O argumento $p \vee q, \sim p \vdash q$ é válido de acordo com a tabela-verdade:

		premissas		conclusão
p	q	$p \vee q$	$\sim p$	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	V	F

Note que há outra forma de verificar a validade desse argumento ao construir a tabela-verdade da condicional $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Saiba mais

Para representar a implicação lógica, podemos usar o símbolo $\vdash$ ou $\Rightarrow$.

Observe que a tabela é a resultante de uma tautologia.

A relação da implicação lógica entre proposições envolve as propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), representadas por:

(R) $P(p, q, r, ...) \Rightarrow P(p, q, r, ...)$

(T) Se $P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$ e

$Q(p, q, r, ...) \Rightarrow R(p, q, r, ...)$, então

$P(p, q, r, ...) \Rightarrow R(p, q, r, ...)$

Para melhor compreensão, reunimos alguns exemplos práticos:

Exemplo

A tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$ são:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Assim, a proposição "$p \wedge q$" é verdadeira somente na primeira linha, bem como as proposições "$p \vee q$" e "$p \leftrightarrow q$" também são verdadeiras. A primeira proposição implica cada uma das duas proposições, ou seja, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ e $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

Exemplo

As tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow q$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ são:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Note que a proposição "$p \leftrightarrow q$" é verdadeira nas linhas 1 e 4 e nestas as proposições "$p \rightarrow q$" e "$q \rightarrow p$" também são verdadeiras. A primeira proposição implica cada uma das duas proposições, ou seja, $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$.

Exemplo

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$ são:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Observe que a proposição "$p \wedge q$" é verdadeira (V) apenas na linha 1. Nesta, as proposições "$p \vee q$" e "$p \leftrightarrow q$" também são verdadeiras. A primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, ou seja, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ e $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

Observe que, no exemplo anterior, a tabela-verdade também demonstra as regras de inferência:

(i) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)
(ii) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

Exemplo

A tabela-verdade da proposição "$(p \vee q) \wedge \sim p$" é

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Observe que a proposição é verdadeira somente na linha 3. Nesta, a proposição "q" é verdadeira e a implicação lógica $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ é chamada de *regra do silogismo disjuntivo*.

Exemplo

A tabela-verdade da proposição "$(p \to q) \wedge p$" é:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Note que essa proposição é verdadeira apenas na linha 1 e nesta a proposição "q" também é verdadeira. Logo, temos a implicação lógica $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$, que chamamos de regra *modus ponens*.

Tautologias e implicação lógica

Para encerrar esta unidade, vamos falar sobre tautologias e implicação lógica. Já deu para notar que as palavras "se" e "então" com as proposições p e q na forma "se p, então q" determinam uma nova proposição, a chamada condicional de p e q. A implicação nada mais é do que a asserção (proposição que se assume como verdadeira) representada por: $p \Rightarrow q$ e assim declaramos que "p tem por consequência q", "p acarreta q" ou "p implica q".

Na prática, se "p": Fábio foi ao Rio Grande do Norte e "q": Fábio foi ao Nordeste, $p \Rightarrow q$: Fábio foi ao Rio Grande do Norte $\Rightarrow$ Fábio foi ao Nordeste.

Fique atento

Os símbolos $\to$ e $\Rightarrow$ são diferentes. O primeiro é usado na operação lógica, aplicado quando as proposições p e q dão a nova proposição $p \to q$. Já o segundo símbolo é de relação, e estabelece que a condicional $P(p, q, r, ...) \to Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Exemplo

A condicional "$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$" é tautológica, pois a última coluna de sua tabela-verdade tem apenas V, logo, a implicação lógica $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$. Assim, é denominada como regra do silogismo hipotético.

Exemplo

A condicional "$p \wedge \sim p \to q$" é tautológica de acordo com a última coluna de sua tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \wedge \sim p \to q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Note que de uma contradição $p \wedge \sim p$ deduzimos qualquer proposição q. Por isso é denominado princípio da inconsistência.

Exemplo

Note que a proposição "$(p \leftrightarrow q) \wedge p$" implica a proposição "$q$", já que a condicional "$(p \leftrightarrow p) \wedge p \to q$" é tautológica, conforme podemos constatar em sua tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Então, representamos $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

Exercícios de fixação

1. Determine o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:

O número 17 é primo.

Tiradentes morreu afogado.

As diagonais de um paralelogramo são iguais.

2. Construa tabelas verdade para:

$\sim(p \rightarrow \sim q)$

$\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

$q \leftrightarrow \sim q \wedge p$

$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$

3. Determine $P(VFV)$ nos casos a seguir:

$P(p, q, r) = p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$

$P(p, q, r) = \sim p \wedge (q \vee \sim r)$

$P(p, q, r) = \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \vee \sim r)$

$P(p, q, r) = (r \wedge (p \vee \sim q)) \wedge \sim(\sim r \vee (p \wedge q))$

4. Exclua o maior número de parênteses nas proposições:

$((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim(\sim q))))$

$((p \wedge (\sim(\sim q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$

$(((p \vee q) \rightarrow (\sim r)) \vee (((\sim q) \wedge r) \wedge r) \wedge q)))$

5. Mostre que as proposições a seguir são tautológicas:

$(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

$p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

$\sim(p \wedge \sim p) \vee (q \rightarrow \sim q)$

$\sim(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

6. Mostre que as proposições a seguir são contingentes:

$(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \sim q)$

7. Determine quais proposições abaixo são tautológicas, contingentes ou contraválidas:

$\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$

$((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$

$\sim p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow q)$

$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

$p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

$p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

$p \rightarrow (p \vee q) \vee r$

8. Dê um exemplo de argumento válido com conclusão falsa.

9. Justifique por que o argumento $p \vdash p \vee q$ é válido.

10. Prove que a proposição p implica a proposição $q (p \Rightarrow q)$ em cada um dos casos a seguir:

$p : \pi > 3$;

p : sen $30° = 1$;

p : ABCD é um losango;

q : tg $45° = 1$

$q : \sqrt{2} > \sqrt{3}$

q : ABCD é um paralelogramo

11. Explique por que $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $p \rightarrow q$.

Panorama

Para mostrar que $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $p \rightarrow q$, vamos observar as tabelas-verdade das duas proposições:

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V

Veja que "$p \leftrightarrow \sim q$" é verdadeira (V) na linha 2 e nessa mesma linha "$p \rightarrow q$" é falsa. Portanto, a primeira proposição não implica a segunda.

Recapitulando

O uso repetido dos conectivos leva à construção de proposições compostas mais complexas e que exigem o uso de uma tabela-verdade para determinar os valores lógicos das proposições a partir de todos os valores das proposições simples componentes.

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a constituem.

Para uma proposição composta $P = p_1, p_2, ..., p_n$ com n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$, há tantas possibilidades de atribuição dos valores lógicos V e F a tais componentes quanto são os arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, ou seja, $A_2, n = 2^n$. Tal resultado está em conformidade com a análise combinatória.

A construção da tabela-verdade inicia-se pela contagem do número de proposições simples que a formam. Por isso, se há n proposições simples componentes $p_1, p_2, ..., p_n$, a tabela verdade tem 2^n linhas. Dessa forma, na primeira proposição simples p_1 atribuímos $2^n/2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de 2^{n-1} valores F. Já na segunda proposição simples p_2, atribuímos $2^n/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores de F, seguidos de 2^{n-2} valores de V, seguidos de 2^{n-2} valores de F, e assim por diante.

Veja que a tabela-verdade da proposição p, composta com cinco proposições simples componentes, tem $2^5 = 32$ linhas e os grupos de valores V e F se alternam de 16 em 16 para a primeira proposição simples p_1, de 8 em 8 para a segunda proposição p_2, de 4 em 4 para a terceira proposição p_3, de 2 em 2 para a quarta proposição p_4, de 1 em 1 para a quinta proposição p_5 e assim por diante.

Dada uma proposição composta, podemos sempre determinar seu valor lógico como verdadeiro ou falso (V ou F), quando são conhecidos os respectivos valores lógicos das proposições componentes.

O uso dos parênteses é feito para simbolizar uma proposição e evitar interpretações divergentes. Assim, escrevemos a proposição $p \wedge q \vee r$ da seguinte forma: $(p \wedge q) \vee r$. Veja que essa mesma proposição, sem os parênteses, também pode ser representada como $p \wedge (q \vee r)$. Note que $(p \wedge q)\, q \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$ não têm o mesmo significado.

Nesse caso, em $p \wedge (q \vee r)$ o conectivo principal é "∨", enquanto nesta proposição $(p \wedge q) \vee r$ o conectivo principal é "∧". A primeira é uma disjunção. Já a segunda, uma conjunção.

Os parênteses podem ser excluídos em alguns casos, de acordo com convenções, como a ordem de precedência para os conectivos (1) ~; (2) ∧ e ∨; (3) →; (4) ↔. Note que o conectivo (1) ~ é o mais fraco, enquanto o conectivo (4) ↔ é o mais forte; e quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, é possível fazer a associação a partir da esquerda.

Toda proposição composta, cuja última coluna de sua tabela-verdade encerra somente a letra V (verdade), é chamada de *tautologia*. Assim, as proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautológicas. Este também é conhecido como princípio de identidade.

Outro princípio bastante conhecido é o da não contradição. Assim, a proposição "$\sim(p \wedge \sim p)$" é tautológica, de acordo com sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Concluímos, portanto, que é sempre verdadeiro afirmar que uma proposição não pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa.

O último princípio é o do terceiro excluído, caso em que a proposição "$p \vee \sim p$" é tautológica, como podemos verificar pela sua tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Concluímos, portanto, que a afirmação de que toda proposição é verdadeira ou falsa sempre será verdadeira.

De acordo com o princípio da substituição, se $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia e $P_0(p, q, r, ...)$, $Q_0(p, q, r, ...)$ $R_0(p, q, r, ...)$ proposições quaisquer, sendo o valor lógico de $P(p, q, r, ...)$ sempre verdade, com quaisquer valores lógicos das proposições simples componentes $p, q, r, ...$ na substituição p por P_0, q por Q_0, r por R_0 ... na tautologia $P(p, q, r, ...)$, a nova proposição $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ obtida é uma tautologia.

A contradição é toda a proposição composta que tenha valor lógico falso para todas as suas possibilidades. A proposição $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ for uma contradição, e $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ for uma tautologia.

Para as contradições, há o princípio de substituição, análogo à tautologia. Portanto, se $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, ...$

A contingência é toda a proposição composta que tenha pelo menos um valor lógico verdadeiro e um falso em suas possibilidades. Isto é, toda proposição composta, em cuja última coluna de sua tabela-verdade apareçam as letras V e F ao menos uma vez.

Dessa maneira, podemos entender contingência como toda proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Quando pensamos em um argumento de premissas, representamos por: $P_1, P_2, ..., P_n$ e a conclusão C, então $P_1, P_2, ..., P_n \vdash C$.

Se o argumento é válido, a conjunção das premissas implica logicamente a conclusão. Nesse caso, a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge Pn \rightarrow C$ é sempre verdadeira.

Essa proposição só seria falsa se a conjunção das premissas fosse verdadeira e a conclusão falsa, o que não ocorre quando o argumento é válido.

As palavras "se" e "então", com as proposições p e q na forma "se p, então q", determinam uma nova proposição, a chamada condicional de p e q. A implicação nada mais é do que a asserção (proposição que se assume como verdadeira) representada por: $p \Rightarrow q$, e assim declaramos que "p tem por consequência q", "p acarreta q" ou "p implica q".

Os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são diferentes. O primeiro é usado na operação lógica, aplicado quando as proposições p e q dão a nova proposição $p \rightarrow q$. Já o segundo símbolo é de relação, ele estabelece que a condicional $P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Proposições, argumentos e regras de inferência

Objetivos de aprendizagem

- Entender a equivalência de duas proposições.
- Definir as proposições associadas a uma condicional.
- Reconhecer a negação conjunta e disjunta de duas proposições.
- Apresentar as propriedades da conjunção e da disjunção.
- Definir o método dedutivo.
- Determinar a forma das proposições.
- Definir argumento e verificar sua validade.
- Estabelecer a condicional associada a um argumento.
- Entender o que são regras de inferência e compreender sua importância para demonstrar a validade de um argumento.

Temas

- **1 – Equivalência lógica**
  No primeiro tema você vai entender a equivalência de duas proposições e sua relação com tautologias; conhecer as proposições associadas a uma condicional e reconhecer quando a negação é conjunta ou disjunta de duas proposições.
- **2 – Álgebra das proposições**
  Vamos definir as propriedades da conjunção e da disjunção: idempotente, comutativa, associativa, identidade, distributiva, absorção e Regras de De Morgan.
- **3 – Método dedutivo**
  Neste tema será apresentado um modo mais eficaz de demonstrar as equivalências isto é, o método dedutivo. Vamos ainda reduzir o número de conectivos e determinar a forma das proposições, além de entender o princípio da dualidade.

- **4 – Argumentos**
  Definiremos o argumento em lógica matemática, verificaremos sua validade e determinaremos qual é a função da condicional associada a um argumento.
- **5 – Regras de inferência**
  Vamos finalizar este estudo com as regras de inferência, que são importantes para demonstrar a validade de um número maior de argumentos complexos.

Introdução

Estamos chegando ao fim de nosso estudo e sem dúvida temos muito a comemorar: a lógica matemática ganhou significado e não é mais uma ilustre desconhecida. Agora podemos aplicá-la na prática e com muitos exemplos! Mas ainda é preciso definir conteúdos importantes.
Para tanto, vamos começar a nossa última unidade falando sobre a equivalência lógica e definindo as três proposições associadas a uma condicional: recíproca, contrária e contrapositiva.
Você será capaz de determinar quando uma negação é conjunta e disjunta de duas proposições. Mas a nossa viagem pelo conhecimento vai além. Que tal conhecer as propriedades da conjunção e da disjunção: idempotente, comutativa, associativa, identidade, distributiva, absorção e Regras de De Morgan?
Nesta última unidade, você terá a oportunidade de conhecer um modo mais eficaz de demonstrar as equivalências, ou seja, o método dedutivo. Além disso, vamos descobrir como reduzir o número de conectivos e também determinar a forma das proposições.
O próximo e importante passo é entender o significado de argumento na lógica matemática e saber quando ele é válido e qual é a sua função condicional associada.
Para concluir o nosso estudo, serão abordadas as regras de inferência. Você vai descobrir o quanto elas contribuem para demonstrar a validade de um número maior de argumentos de maior complexidade.

Equivalência lógica

Definição e propriedades de equivalência lógica

Vamos iniciar nossa última unidade falando sobre equivalência lógica. No dia a dia, na hora de fazer suas escolhas, provavelmente você tem uma ideia de quais opções são as melhores, quais são as piores e quais seriam as equivalentes. No entanto, quando pensamos em lógica matemática, para qual situação duas proposições são equivalentes?

Machado (2001, p. 14) define equivalência da seguinte maneira:

> Quando, a partir das mesmas proposições simples, duas proposições compostas transmitem exatamente a mesma informação, a mesma ideia – o que se traduz no fato de assumirem o mesmo valor lógico a partir dos mesmos valores lógicos das componentes – então elas são logicamente equivalentes.

Dessa forma, as proposições se equivalem quando as suas tabelas-verdade são idênticas. Representamos assim:

$$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$$

Se as proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ fossem ambas tautologias ou ambas contradições, seriam, portanto, equivalentes.

Depois de entender a equivalência, vamos conhecer as propriedades reflexiva (R), simétrica (S) e transitiva (T), representadas a seguir:

(R) $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow P(p, q, r, ...)$
(S) Se $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$, então
$Q(p, q, r, ...) \Leftrightarrow P(p, q, r, ...)$
(T) Se $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ e
$Q(p, q, r, ...) \Leftrightarrow R(p, q, r, ...)$, então
$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow R(p, q, r, ...)$

Exemplos de equivalência lógica

Vamos acompanhar alguns exemplos de equivalência na prática?

Exemplo

As proposições "$\sim\sim p$" e "p" são equivalentes, ou seja, simbolicamente $\sim\sim p \Leftrightarrow p$. Note que a tabela-verdade

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

demonstra que a dupla negação equivale à afirmação.

Exemplo

Neste outro exemplo, vamos acompanhar a regra de Clavius. Note que as proposições "$\sim p \rightarrow p$" e "p", representadas por $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ são equivalentes. Observe a tabela verdade:

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

Exemplo

Neste, vamos conhecer a regra de absorção. As condicionais "$p \rightarrow p \wedge q$" e "$p \rightarrow q$" apresentam tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Sendo assim, essas condicionais são equivalentes e as representamos por $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$.

Exemplo

Aqui, a condicional "$p \rightarrow q$" e a disjunção "$\sim p \vee q$" têm tabelas-verdade idênticas,

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

e por consequência as duas proposições são equivalentes $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

Exemplo

A bicondicional "$p \leftrightarrow q$" e a conjunção "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$" também apresentam tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Assim, por consequência, essas duas proposições são equivalentes.

Tautologias e equivalência lógica

Para entender os conceitos de tautologia e equivalência lógica, vamos apresentar o seguinte teorema:

A proposição $P(p, q, r, ...)$ será equivalente à proposição $Q(p, q, r, ...)$, ou seja, $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ se, e somente se, a bicondicional $P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica. Dessa maneira, se as proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são equivalentes, suas tabelas-verdade também são idênticas e o valor lógico da bicondicional é sempre verdade, isto é, tautológica.

Como a bicondicional é sempre tautológica, a última coluna de sua tabela-verdade encerra somente a letra V e os valores lógicos das proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são equivalentes. Então, concluímos que toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica. Vamos entender melhor a partir de um exemplo?

Exemplo

A bicondicional "$(p \wedge {\sim}q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$", onde c é uma proposição cujo valor lógico é falso, pois a coluna, como podemos observar, é toda verdadeira:

p	q	$(p$	$\wedge$	${\sim}q$	$\rightarrow$	$c)$	$\leftrightarrow$	$(p$	~	$q)$
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F
		1	3	2	4	1	5	1	2	1

"$p \wedge \sim q \to c$" e "$p \to q$", logo as proposições são equivalentes e representadas por $p \wedge \sim q \to c \Leftrightarrow p \to q$. Nessa equivalência ocorre o método de demonstração por absurdo.

Exemplo

Note que a bicondicional "$(p \wedge q \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$" também é tautológica, pois a última coluna de sua tabela-verdade é toda verdadeira:

$(p$	$\wedge$	q	$\to$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

Assim, as condicionais "$p \wedge q \to r$" e "$p \to (q \to r)$" são equivalentes e representadas por $p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$. Essa equivalência lógica é chamada de regra de exportação importação.

Proposições associadas a uma condicional

Existem três proposições associadas à condicional $p \to q$. São elas:

1. Proposição recíproca de $p \to q$: $q \to p$.
2. Proposição contrária de $p \to q$: $\sim p \to \sim q$.
3. Proposição contrapositiva de $p \to q$: $\sim q \to \sim p$.

Nas tabelas-verdade dessas proposições existem duas importantes propriedades. A condicional $p \to q$ e a sua contrapositiva são equivalentes e representadas por $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$. Já a recíproca $q \to p$ e a contrária $\sim p \to \sim q$ da condicional $p \to q$ são equivalentes e representadas por $q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Note que as mesmas tabelas-verdade também demonstram que a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ não são equivalentes.

Saiba mais

A contrária de $p \rightarrow q$ também é conhecida como a inversa de $p \rightarrow q$. Também dizemos que $p \rightarrow q$ é a direta em relação às associadas.

Exemplo

Seja a condicional relativa a um triângulo T: $p \rightarrow q$. Se T é equilátero, então T é isósceles. Logo, a recíproca desta proposição é $q \rightarrow p$. Se T é isósceles, então T é equilátero.

Note que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira V, mas sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa F.

Exemplo

Considere que a contrapositiva da condicional $p \rightarrow q$: "Se Fábio é professor, então é pobre" é $\sim q \rightarrow \sim p$. Se Fábio não é pobre, então não é professor.

Exemplo

Para determinarmos a contrapositiva da condicional: Se x é menor que zero, então x não é positivo. Ao representarmos por p a proposição x é menor que zero e por q a propsição x é positivo, a condicional é representada por $p \rightarrow \sim q$, então sua contrapositiva é definida como $\sim\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$. Desse modo, dizemos que se x é positivo, então x é menor que zero.

Negação conjunta e disjunta de duas proposições

Dizemos que uma negação é disjunta de duas proposições p e q quando a proposição não p ou não q, que representamos por "$\sim p \vee \sim q$". Também podemos indicar a negação disjunta de duas proposições por "$p \uparrow q$". Então, temos $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

A proposição "$\sim p \vee \sim q$" é falsa somente quando p e q são ambas verdadeiras. Observe na tabela-verdade:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Saiba mais

Você sabia que os símbolos "↓" e "↑" são denominados *conectivos de Scheffer*?

Álgebra das proposições

Propriedades da conjunção e da disjunção

Chegou o momento de tratarmos das propriedades da conjunção e da disjunção, definidas como: idempotente, comutativa, associativa, identidade, distributiva, absorção e Regras de De Morgan.

Simbolicamente representada por $p \wedge p \Leftrightarrow p$, a propriedade idempotente é caracterizada por tabelas-verdade idênticas às proposições $p \wedge p$ e p. A bicondicional $p \wedge p \leftrightarrow p$ é tautológica. Observe:

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Já a propriedade comutativa é representada por $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$. Nesse caso, note que são idênticas as tabelas-verdade de $p \wedge q$ e $q \wedge p$. Isso significa que a bicondicional $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ é tautológica.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

A propriedade associativa é representada por: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$. Logo, as tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$ são idênticas. Acompanhe:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

A bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

A identidade, por sua vez, é representada por $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$. Nesse caso, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee t$ e t e $p \vee c$ e c. Assim, as bicondicionais $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$ são tautológicas.

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \leftrightarrow t$	$p \vee c \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Fique atento

Na tabela-verdade acima, t é o elemento absorvente e c é o elemento neutro da disjunção.

No caso da disjunção, a propriedade idempotente é representada por $p \vee p \Leftrightarrow p$. São idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p, isto é, a bicondicional $p \vee p \leftrightarrow p$ é tautológica. Observe:

p	$p \vee p$	$p \vee p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Também na disjunção, a propriedade comutativa é representada por $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$. As tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $q \vee p$ são idênticas. Acompanhe:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Isso significa que a bicondicional $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ é tautológica.

A propriedade associativa, representada por $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ possui tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$ idênticas. Veja:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Note que a bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

A propriedade identidade é representada por $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$. As proposições $p \vee t$ e t, $p \vee c$ e c apresentam tabelas-verdade idênticas. Observe:

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \leftrightarrow t$	$p \vee c \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Veja que as bicondicionais $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$ são tautológicas.

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \leftrightarrow t$	$p \vee c \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Saiba mais

As duas tabelas-verdade anteriores demonstram que *t* é o elemento absorvente e *c* é o elemento neutro da disjunção.

A propriedade distributiva está representada por:

(i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Veja que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são idênticas:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

A bicondicional $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é tautológica.

As tabelas-verdade de $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ também são idênticas.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Note que a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é tautológica.

Saiba mais

A equivalência $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ mostra que a conjunção é distributiva em relação à disjunção, enquanto a equivalência $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ revela que a disjunção é distributiva em relação à conjunção.

Que tal entender melhor com um exemplo?

Exemplo

Quando dizemos que Marcelo estuda e André escuta música ou lê, é equivalente à proposição "Marcelo estuda e André escuta música ou Marcelo estuda e André lê".

Para entender a absorção de

(i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

(ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

observe que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são idênticas:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Portanto, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica. Também são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p. Observe:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Isso significa que a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica.

Para finalizar, vamos falar sobre as Regras de De Morgan. Nesse caso,

(i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

são idênticas às tabelas-verdade das proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

A bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica.

observe que as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são idênticas:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Portanto, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica. Também são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p. Observe:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Isso significa que a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica.

Para finalizar, vamos falar sobre as Regras de De Morgan. Nesse caso,

(i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

são idênticas às tabelas-verdade das proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

A bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica.

Da mesma forma, são idênticas as proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$:

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Note que a bicondicional $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é tautológica.

Saiba mais

As Regras de De Morgan dizem que negar que duas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que pelo menos uma é falsa, e negar que pelo menos uma é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Fique atento

As Regras de De Morgan podem, ainda, afirmar que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção. Elas também mostram ser possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação.

Negação da condicional e da bicondicional

Sabendo que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, temos $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q$ ou $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

A equivalência é demonstrada nas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Note que são idênticas.

Fique atento

A condicional $p \rightarrow q$ não goza das propriedades idempontente, comutativa e associativa, já que as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow p$ e p, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ não são idênticas.

Para entender a negação da bicondicional $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, temos $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$, isto é, $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

A equivalência é demonstrada pelas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \leftrightarrow q)$ e $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$, que são idênticas. Observe:

$\sim$	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$
F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F

Fique atento

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ não goza da propriedade idempotente, pois as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow p$ e p não são idênticas. No entanto, essa bicondicional tem propriedades comutativa e associativa.

Método dedutivo

Conceito

Até o momento, demonstramos todas as implicações e equivalências pelo método das tabelas-verdade, mas agora temos a oportunidade de definir uma forma mais eficaz: o método dedutivo.

É importante entender que nesse método as equivalências relativas à álgebra das proposições, que estudamos anteriormente, desempenham um papel essencial.

Você vai perceber que as proposições simples p, q, r, t (verdadeira) e c (falsa) são substituídas por proposições compostas P, Q, R, T (tautologia) e C (contradição). Vamos entender melhor a partir dos exemplos a seguir?

Exemplo

Para demonstrar as implicações

(i) $c \Rightarrow p$

(ii) $p \Rightarrow t$

onde p é uma proposição qualquer e c e t são proposições cujos valores lógicos respectivos são Falso e Verdadeiro. Então, sucessivamente:

(i) $c \rightarrow p \Leftrightarrow \sim c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$

(ii) $p \rightarrow t \Leftrightarrow \sim p \vee t \Leftrightarrow t$

As tabelas-verdade de $c \rightarrow p$ e $p \rightarrow t$ mostram que as condicionais são tautológicas, acompanhe:

p	c	t	$c \rightarrow p$	$p \rightarrow t$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

Exemplo

Para demonstrar a implicação $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$, temos, sucessivamente:

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q) &\Leftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\
&\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim(p \wedge r) \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \vee \sim r) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q)) \vee \sim r \\
&\Leftrightarrow t \vee \sim r \Leftrightarrow t
\end{aligned}
$$

Exemplo

Para determinar a equivalência $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$, temos, sucessivamente:

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q) \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee C \Leftrightarrow \sim p
\end{aligned}
$$

Redução do número de conectivos

Você já teve a oportunidade de conhecer os cinco conectivos fundamentais ($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) e agora vai descobrir que podemos reduzir três deles em apenas dois dos pares a seguir:

1. $\sim$ e $\vee$.
2. $\sim$ e $\wedge$.
3. $\sim$ e $\rightarrow$.

Assim $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\vee$.

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$
$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)).$$

Os conectivos $\vee$, $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\wedge$.

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q).$$

Enquanto os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ também exprimem-se em termos de $\sim$ e $\rightarrow$:

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$$
$$p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)).$$

Fique atento

Os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ e $\leftrightarrow$ não se exprimem em termos de $\sim$ e $\leftrightarrow$. O conectivo $\vee$ exprime-se em função unicamente de $\rightarrow$ pela equivalência $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Forma das proposições

Dizemos que uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. Portanto, estão na forma normal as seguintes proposições:

$$\sim p \wedge \sim q, \qquad \sim(\sim p \vee \sim q), \qquad (p \wedge q) \vee (\sim q \vee r).$$

Você sabia que toda proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ se existirem, ou seja, pela substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$?

Existem duas espécies de FN para uma proposição. A primeira é a forma normal conjuntiva FNC e a segunda é a forma normal disjuntiva FND, como veremos a seguir.

Forma normal conjuntiva e disjuntiva

A proposição está na forma normal conjuntiva somente após verificadas as condições:

1. Conter os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.
2. O conectivo ~ não aparece repetido e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$.
3. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$.

Exemplo

Note que as proposições $\sim p \vee \sim q$, $\sim p \wedge q \wedge r$, $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$ estão na forma normal conjuntiva.

Dizemos que uma proposição está na forma normal disjuntiva FND somente depois de verificadas as condições:

1. Conter os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.
2. O conectivo ~ não aparece repetido e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$.
3. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$.

Exemplo

As proposições $\sim p \vee q$, $p \vee (\sim q \wedge r)$, $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$ estão na forma normal disjuntiva.

Saiba mais

Podemos determinar uma FND equivalente para toda proposição, desde que sejam eliminados os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ mediante a substituição $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$, eliminando negações repetidas e parênteses precedidos de ~ e substituindo $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \vee q) \wedge r$ pelas suas equivalentes respectivas $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ e $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Exemplo

Para determinar a FND da proposição $(p \to q) \wedge (q \to p)$, temos, sucessivamente, $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (p \wedge q)$.

Exemplo

No exemplo anterior, também podemos observar uma outra FND $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ equivalente à anterior. Isso quer dizer que uma mesma proposição pode ter mais de uma FND.

Princípio de dualidade

Para entender o princípio da dualidade, considere P uma proposição que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. A proposição que resulta em P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$ é chamada de dual de P. Seguindo esse princípio, a dual de $\sim((p \vee q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Mas afinal, o que é o princípio da dualidade? Se P e Q são proposições equivalentes que só contêm os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então as suas respectivas duais P_1 e Q_1 também são equivalentes.

Argumentos

Definição de argumento

Provavelmente você conhece o significado de um argumento. Em casa, na universidade ou no convívio com os amigos você certamente já teve de defender o seu ponto de vista e apresentar bons argumentos para convencer o outro. Na lógica matemática, argumentar é apresentar uma proposição como uma consequência de uma ou mais proposições.

As proposições que constituem um argumento são denominadas *premissas* e estas, por sua vez, embasam sua conclusão.

É importante entender que um argumento não é uma proposição em que devemos classificar somente como verdadeira ou falsa. O argumento estabelece uma relação entre as premissas e a conclusão, garantindo, assim, a conclusão a partir das premissas.

Um argumento de premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ e de conclusão Q é indicado por $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$.

Validade de um argumento

Mas você deve estar se perguntando quando um argumento é válido. Pois bem, dizemos que um argumento é válido quando as premissas são simultaneamente verdadeiras e, inevitavelmente, sua conclusão também será. Porém, se todas as premissas forem verdadeiras e a conclusão falsa, o argumento não é válido e, nesse caso, é denominado *sofisma*.

Que tal acompanhar um exemplo de argumento válido?

Exemplo

Se a premissa P_1 diz que todos os paulistas são brasileiros e a premissa P_2 diz que João é paulista, a conclusão Q diz que João é brasileiro. Portanto, o argumento é válido.

Agora vamos entender um sofisma:

Exemplo

Já a premissa P_1 diz que nenhum garimpeiro é atleta e a P_2 diz que todos os atletas são saudáveis. A conclusão diz que nenhum garimpeiro é saudável e não é um argumento válido: é, portanto, um sofisma.

Fique atento

Vale lembrar que ao verificar a validade de um argumento não examinamos se as premissas são verdadeiras ou falsas. Para garantir que a conclusão de um argumento seja verdadeira, devemos verificar se o argumento é válido e se as premissas são realmente verdadeiras.

Condicional associada a um argumento

Dado o argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$, cuja condicional correspondente é $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$, o antecedente, sendo a conjunção das premissas, tem como consequente a conclusão, denominada *conclusão associada ao argumento dado*. Vamos entender na prática?

Exemplo

O argumento $p \wedge \sim q, p \rightarrow \sim r, q \vee \sim s \vdash \sim(r \vee s)$ tem como condicional associada $(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \wedge (q \vee \sim s) \rightarrow \sim(r \vee s)$ e o argumento correspondente à condicional $(p \rightarrow q \vee r) \wedge \sim s \wedge (q \vee r \rightarrow s) \rightarrow (s \rightarrow p \wedge \sim q)$ é $p \rightarrow q \vee r, \sim s, q \vee r \rightarrow s \vdash s \rightarrow p \wedge \sim q$.

Argumentos válidos fundamentais

Os chamados *argumentos básicos* ou *argumentos válidos fundamentais* são tidos como uma consequência direta dos resultados das respectivas tabelas-verdade. Acompanhe os dez argumentos:

1. Adição (AD):
   (i) $p \vdash p \vee q$;
   (ii) $p \vdash q \vee p$.
2. Simplificação (SIMP):
   (i) $p \wedge q \vdash p$;
   (ii) $p \wedge q \vdash q$.
3. Conjunção (CONJ):
   (i) $p, q \vdash p \wedge q$;
   (ii) $p, q \vdash q \wedge p$.
4. Absorção (ABS):
   (i) $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$.
5. *Modus ponens* (MP):
   (i) $p \rightarrow q, p \vdash q$.
6. *Modus tollens* (MT):
   (i) $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$.

7. Silogismo disjuntivo (SD):
   (i) $p \vee q, \sim p \vdash q$;
   (ii) $p \vee q, \sim q \vdash p$.

8. Silogismo hipotético (SH):
   (i) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$.

9. Dilema construtivo (DC):
   (i) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$.

10. Dilema destrutivo (DD):
   (i) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$.

Regras de inferência

O que são regras de inferência

Os dez argumentos básicos são essenciais para as inferências, ou seja, executar os passos de uma dedução ou demonstração, sendo denominados *regras de inferência*.

Há um padrão para escrevê-los, devendo ser respeitado, colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço. Vamos verificar a seguir:

1. Regra da adição (AD):
   (i) $\dfrac{p}{p \vee q}$
   (ii) $\dfrac{p}{q \vee p}$
2. Regra da simplificação (SIMP):
   (i) $\dfrac{p \wedge q}{p}$
   (ii) $\dfrac{p \wedge q}{q}$
3. Regra da conjunção (CONJ):
   (i) $\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \wedge q}$
   (ii) $\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{q \wedge p}$

4. Regra da absorção (ABS):

(i) $\dfrac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$

5. Regra *Modus ponens* (MP):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$

6. Regra *Modus tollens* (MT):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$

7. Regra do silogismo disjuntivo (SD):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$

(ii) $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \end{array}}{p}$

8. Regra do silogismo hipotético (SH):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$

9. Regra do dilema construtivo (DC):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s}$

10. Regra do dilema destrutivo (DD):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \end{array}}{\sim p \vee \sim r}$

Saiba mais

As dez regras de inferência ajudam a demonstrar a validade de um número maior de argumentos e de maior complexidade.

Exemplos de uso

Nada melhor do que entender as regras de inferência na prática, a partir de alguns exemplos. Que tal começar pela regra da adição?

Exemplos

Dada a proposição p, podemos a partir dela deduzir a sua disjunção com qualquer outra proposição, isto é, deduzir $p \vee q$, ou $p \vee r$, ou $s \vee p$, ou $t \vee p$. Na prática, exemplificaremos a regra da adição:

$$\begin{array}{lll} (1) & p & P \\ \hline (2) & p \vee \sim q & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{lll} (1) & p \vee q & P \\ \hline (2) & (r \wedge s) \vee (p \vee q) & \end{array}$$

Agora vamos acompanhar exemplos da regra da simplificação?

Exemplos

Na regra da simplificação, a partir da conjunção $p \wedge q$ de duas proposições pode-se deduzir cada uma das proposições p ou q. Podemos exemplificar com:

$$\begin{array}{lll} (1) & (p \vee q) \wedge r & P \\ \hline (2) & p \vee q & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{lll} (1) & x \in A \wedge x \in B & P \\ \hline (2) & x \in A & \end{array}$$

A próxima regra que vamos exemplificar é a regra da conjunção, que permite deduzir a partir de duas proposições dadas p e q a sua conjunção. Vale lembrar que p e q são as premissas e $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ a conclusão. Acompanhe os exemplos a seguir:

Exemplos

São exemplos da regra da conjunção:

$$\begin{array}{lll} (1) & p \vee q & P \\ (2) & \sim r & P \\ \hline (3) & (p \vee q) \wedge \sim r & \end{array}, \quad \begin{array}{lll} (1) & p \vee q & P \\ (2) & q \vee r & P \\ \hline (3) & (p \vee q) \wedge (q \vee r) & \end{array} \text{ e } \begin{array}{lll} (1) & x \in A & P \\ (2) & x \notin B & P \\ \hline (3) & x \notin B \wedge x \in A & \end{array}$$

A regra da absorção permite que dada uma condicional como premissa, pode-se deduzir dela como conclusão, em uma outra condicional, com o mesmo antecedente p, cujo consequente $p \wedge q$ integrem a mesma premissa, ou seja, $p \rightarrow p \wedge q$. Vamos acompanhar na prática?

Exemplos

São exemplos da regra de absorção:

$$\begin{array}{lll} (1) & x=2 \rightarrow x<3 & P \\ \hline (2) & x=2 \rightarrow x=2 \wedge x<3 & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{lll} (1) & x \in A \rightarrow x \in A \cup B & P \\ \hline (2) & x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B & \end{array}$$

A regra *modus ponens*, ou regra de separação, permite deduzir a conclusão q a partir das premissas $p \rightarrow q$ e p. Veja na prática:

Exemplos

São exemplos da regra de separação:

$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \rightarrow \sim q & P \\ (2) & \sim p & P \\ \hline (3) & \sim q & \end{array} , \quad \begin{array}{lll} (1) & p \wedge q \rightarrow r & P \\ (2) & p \wedge q & P \\ \hline (3) & r & \end{array} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & x \in A \cap B \rightarrow x \in A & P \\ (2) & x \in A \cap B & P \\ \hline (3) & x \in A & \end{array}$$

No caso da regra *modus tollens* permite, a partir da premissa $p \rightarrow q$, que também é a condicional, e da negação consequente $\sim q$, deduzir como conclusão $\sim p$, que é a negação antecedente. Entenda melhor a partir dos exemplos a seguir:

Exemplos

São exemplos da regra *modus tollens*:

$$\begin{array}{lll} (1) & q \wedge r \rightarrow s & P \\ (2) & \sim s & P \\ \hline (3) & \sim(q \wedge r) & \end{array} , \quad \begin{array}{lll} (1) & p \rightarrow \sim q & P \\ (2) & \sim\sim q & P \\ \hline (3) & \sim p & \end{array} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & x \neq 0 \rightarrow x = y & P \\ (2) & x \neq y & P \\ \hline (3) & x = 0 & \end{array}$$

Já a regra do silogismo disjuntivo permite que se possa deduzir da disjunção $p \vee q$ de duas proposições e da negação $\sim p$ (ou $\sim q$) a outra proposição q (ou p).

Exemplos

São exemplos da regra do silogismo disjuntivo:

$$\begin{array}{lll} (1) & (p \wedge q) \vee r & P \\ (2) & \sim r & P \\ \hline (3) & p \wedge q & \end{array} ; \quad \begin{array}{lll} (1) & \sim p \vee \sim q & P \\ (2) & \sim\sim p & \\ \hline (3) & \sim q & \end{array} \text{ e}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & x=0 \vee x=1 & P \\ (2) & x \neq 1 & P \\ \hline (3) & x=0 & \end{array}$$

A regra do silogismo hipotético, por sua vez, permite duas condicionais, que também são as premissas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$, tais que o consequente da primeira coincida com o antecedente da segunda, de modo que seja possível deduzir uma terceira condicional $p \rightarrow r$, que é a conclusão.

Exemplos

São exemplos do silogismo hipotético:

$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \rightarrow \sim q & P \\ (2) & \sim q \rightarrow \sim r & P \\ \hline (3) & \sim p \rightarrow \sim r & \end{array} ; \quad \begin{array}{lll} (1) & |x|=0 \rightarrow x=0 & P \\ (2) & x=0 \rightarrow x+1=1 & P \\ \hline (3) & |x|=0 \rightarrow x+1=1 & \end{array} \text{ e}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \rightarrow q \vee r & P \\ (2) & q \vee r \rightarrow \sim s & P \\ \hline (3) & \sim p \rightarrow \sim s & \end{array}$$

Na regra do dilema construtivo as premissas são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes. A conclusão é a disjunção dos consequentes dessas condicionais. Observe os exemplos:

Exemplos

São exemplos da regra do dilema construtivo:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (p\wedge q)\rightarrow \neg r & P \\
(2) & s\rightarrow r & P \\
(3) & (p\wedge q)\vee s & P \\
\hline
(4) & \neg r\vee t &
\end{array}
\quad e \quad
\begin{array}{lll}
(1) & x<y\rightarrow x=2 & P \\
(2) & x\nless y\rightarrow x>2 & P \\
(3) & x<y\vee x\nless y & P \\
\hline
(4) & x=2\vee x>2 &
\end{array}
$$

Já na regra do dilema destrutivo, as premissas são duas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes. A conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes dessas condicionais.

Exemplos

São exemplos da regra do dilema destrutivo:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \sim q\rightarrow r & P \\
(2) & p\rightarrow \sim s & P \\
(3) & \sim r\vee \sim\sim s & P \\
\hline
(4) & \sim\sim q\vee \sim p &
\end{array}
\quad e
$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x+y=7\rightarrow x=2 & P \\
(2) & y-x=2\rightarrow x=3 & P \\
(3) & x\neq 2\vee x\neq 3 & P \\
\hline
(4) & x+y\neq 7\vee y-x\neq 2 &
\end{array}
$$

Validade por regras de inferência

Pode-se verificar que o método das tabelas-verdade é um caminho muito importante para demonstrar, verificar ou testar a validade de qualquer argumento. Porém, quando o número de proposições aumenta, o método torna-se muito trabalhoso. Por isso, há um processo mais eficaz: deduzir a conclusão Q a partir das premissas e das regras de inferência. Vamos entender na prática? Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo

Para verificar se o argumento $p \to q, p \wedge r \vdash q$ é válido, temos, sucessivamente:

(1)	$p \to q$	P
(2)	$p \wedge r$	P
(3)	p	2 – SIMP
(4)	q	1,3 – MP

Da segunda premissa $p \wedge r$, pela regra de simplificação, inferimos p. De p e da primeira premissa $p \to q$, pela regra *modus ponens*, inferimos q. Note que q é a conclusão do argumento.

Observe que, de acordo com o exemplo anterior, a conclusão pode ser deduzida das duas premissas do argumento dado por meio de duas regras de inferência, e, como consequência, o argumento dado é válido.

Exemplo

Para verificar se o argumento $p \wedge q, p \vee r \to s \vdash p \wedge s$ é válido, temos, sucessivamente:

(1)	$p \wedge q$	P
(2)	$p \vee r \to s$	P
(3)	p	1 – SIMP
(4)	$p \vee r$	3 – AD
(5)	s	2,4 – MP
(6)	$p \wedge s$	3,5 – CONJ

Da primeira premissa $p \wedge q$, pela regra de simplificação, inferimos p. De p, pela regra de adição, inferimos $p \vee r$. De $p \vee r$ e da segunda premissa $p \vee r \to s$, pela regra *modus ponens*, inferimos s. De s e de p (linha 3), pela regra de conjunção, inferimos $p \wedge s$, que é a conclusão.

Exercícios de fixação

1. Determine a contrapositiva da contrapositiva de $p \to q$.

2. Determine a contrapositiva da contrária $p \to q$.

3. Determine a contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$.
4. Prove que as proposições $p: 1 + 3 = 4$; $q: (1 + 3)^2 = 16$ são equivalentes.
5. Demonstre por tabela-verdade a equivalência $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$.
6. Demonstre as propriedades associativa e comutativa da bicondicional $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$.
7. Qual é a negação da proposição: "Rosas são vermelhas e violetas são azuis"?
8. Demonstre as Regras de De Morgan $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$.
9. Demonstre a equivalência $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$ pelo método dedutivo.
10. Simplifique a proposição $\sim(p \vee \sim q)$.
11. Determine a FNC de $p \leftrightarrow \sim p$.
12. Determine a FND de $p \leftrightarrow \sim p$.
13. Construa a condicional associada do argumento: $\sim p, \sim q \rightarrow p \vdash q$.
14. Use a regra *modus ponens* para deduzir a conclusão do par de premissas:
    a. $x = y \wedge y = z$
    b. $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$
15. Use a regra *modus tollens* para deduzir a conclusão do par de premissas:
    a. $x = z \rightarrow x = 6$
    b. $x \neq 6$
16. A partir da regra do silogismo disjuntivo, encontre a conclusão do par de premissas:
    a. $x = z \rightarrow x = 6$
    b. $x \neq 6$
17. Use a regra do silogismo hipotético para deduzir a conclusão do par de premissas:
    a. $s \vee t \rightarrow r \wedge q$
    b. $r \wedge q \rightarrow \sim p$
18. Verifique se é válido o argumento:

$$x = y \rightarrow x = z, \qquad x \neq y \rightarrow x < z,$$
$$x \not< z \vee y > z, \; y \neq z \wedge x \neq z \vdash y > z$$

19. Verifique se é válido o argumento:

$$\begin{array}{ll} (1) & x+8=12 \vee x \neq 4 \\ (2) & x=4 \wedge y<x \\ (3) & x+8=12 \wedge y<x \rightarrow y+8<12 \\ \hline \therefore & y+8<12 \end{array}$$

Panorama

Sofisma: nem todo argumento é válido!

Você já sabe que um argumento é válido quando as premissas são verdadeiras e, por consequência, a conclusão também é verdadeira. Por outro lado, quando todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, o argumento não é válido, e é o que chamamos *sofisma* ou *falácia*.

Dadas as premissas: P_1: Existem brasileiros que são famosos e P_2: Todas as pessoas famosas são chatas, e a conclusão C: Existem brasileiros que são chatos. Você acredita ser um argumento válido? Se você apostou em um sofisma, acertou.

Exercício

Dê um exemplo de sofisma, isto é, de argumento que não é válido, com base em uma situação do seu cotidiano.

Recapitulando

Duas proposições compostas são equivalentes quando, a partir das mesmas proposições simples, transmitem a mesma informação, assumindo o mesmo valor lógico a partir dos mesmos valores lógicos das componentes. Logo, as proposições se equivalem quando as suas tabelas-verdade são idênticas. Simbolicamente, representamos da seguinte forma:

$$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$$

Se as proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ fossem ambas tautologias ou ambas contradições, seriam, portanto, equivalentes.

As propriedades reflexiva (R), simétrica (S) e transitiva (T) são representadas da seguinte maneira:

(R) $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow P(p, q, r, ...)$

(S) Se $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$, então $Q(p, q, r, ...) \Leftrightarrow P(p, q, r, ...)$

(T) Se $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...) \Leftrightarrow R(p, q, r, ...)$, então $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow R(p, q, r, ...)$

Se as proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são equivalentes, suas tabelas verdade também são idênticas e o valor lógico da bicondicional é sempre verdade, isto é, uma tautologia.

Como a bicondicional é sempre tautológica, a última coluna de sua tabela-verdade encerra somente a letra V e os valores lógicos das proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são equivalentes.

Então, concluímos que toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica.

Existem três proposições associadas à condicional $p \rightarrow q$. São elas:

1. Proposição recíproca de $p \rightarrow q : q \rightarrow p$
2. Proposição contrária de $p \rightarrow q : \sim p \rightarrow \sim q$
3. Proposição contrapositiva de $p \rightarrow q : \sim q \rightarrow \sim p$

Dizemos que uma negação é disjunta de duas proposições p e q quando a proposição é não p ou não q, que representamos por "$\sim p \vee \sim q$". Também podemos indicar a negação disjunta de duas proposições por "$p \uparrow q$". Então, temos:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

As propriedades da conjunção e da disjunção são: idempotente, comutativa, associativa, identidade, distributiva, absorção e Regras de De Morgan.

Simbolicamente representada por $p \wedge p \Leftrightarrow p$, a propriedade idempotente tem tabelas-verdade idênticas das proposições $p \wedge p$ e p. A bicondicional $p \wedge p \leftrightarrow p$ é tautológica. Já a propriedade comutativa é representada por $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$. Nesse caso, são idênticas as tabelas-verdade de $p \wedge q$ e $q \wedge p$. Isso significa que a bicondicional $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ é tautológica.

A propriedade associativa é representada por: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$. Logo, as tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$ são idênticas. A bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

A identidade é representada por $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$. Nesse caso, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee t$ e t e $p \vee c$ e c. Assim, as bicondicionais $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$ são tautológicas.

Na disjunção, a propriedade idempotente é representada por $p \vee p \Leftrightarrow p$. São idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p, isto é, a bicondicional $p \vee p \leftrightarrow p$ é tautológica. Também na disjunção, a propriedade comutativa é representada por $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$. As tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $q \vee p$ são idênticas. Isso significa que a bicondicional $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ é tautológica.

A propriedade associativa, representada por $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, tem tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$ idênticas. Note que a bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é tautológica.

A propriedade identidade é representada por $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$. As proposições $p \vee t$ e t e t, $p \vee c$ e c apresentam tabelas-verdade idênticas.

A propriedade distributiva está representada por:

(i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(i') $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

As tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são idênticas.

A bicondicional $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é tautológica. As tabelas-verdade de $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ também são idênticas. Note que a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é tautológica. A equivalência $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ mostra que a conjunção é distributiva em relação à disjunção, enquanto a equivalência $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ exprime que a disjunção é distributiva em relação à conjunção.

Na absorção de

(i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$;

(i') $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p são idênticas. Portanto, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ é tautológica. Também são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p. Isso significa que a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é tautológica. Para finalizar, vamos falar sobre as Regras de De Morgan. Neste caso,

(i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$;

(i') $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

são idênticas às tabelas-verdade das proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

A bicondicional $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é tautológica. Da mesma maneira, são idênticas as proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$. Note que a bicondicional $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é tautológica.

Além do método das tabelas-verdade, temos outra opção mais eficaz: o método dedutivo. Nesse caso, as equivalências relativas à álgebra das proposições desempenham um papel importante.

As proposições simples p, q, r, t (verdadeira) e c (falsa) são substituídas por proposições compostas P, Q, R, T (tautologia) e C (contradição). Temos cinco conectivos fundamentais ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) e podemos exprimir três deles em apenas dois dos pares:

(1) $\sim$ e $\vee$ (2) $\sim$ e $\wedge$ (3) $\sim$ e $\rightarrow$

Dizemos que uma proposição está na forma normal (FN) somente se ela contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. Portanto, estão na forma normal as seguintes proposições:

$\sim p \wedge \sim q$, $\sim(\sim p \vee \sim q)$, $(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$.

A proposição está na forma normal conjuntiva somente depois de verificadas as condições:

1. Conter os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.
2. O conectivo $\sim$ não aparece repetido e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$.
3. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$.

Dizemos que uma proposição está na forma normal disjuntiva FND somente depois de verificadas as condições:

1. Conter os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.
2. O conectivo $\sim$ não aparece repetido e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$.
3. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$.

Para entender o princípio da dualidade, imagine que P é uma proposição que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. A proposição que resulta de P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$ é chamada dual de P. Seguindo esse princípio, a dual de $\sim((p \wedge q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Se P e Q são proposições equivalentes que só contêm os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então as suas duais respectivas P_* e Q_* também são equivalentes.

Na lógica matemática, argumentar é apresentar uma proposição como uma consequência de uma ou mais proposições. As proposições que constituem um argumento são chamadas *premissas*, e estas, por sua vez, garantem a conclusão.

Um argumento não é uma proposição que devemos classificar como verdadeira ou falsa. Ele estabelece uma relação entre as premissas e a conclusão, garantindo assim a conclusão a partir das premissas. Dizemos que um argumento é válido quando as premissas são simultaneamente verdadeiras e, inevitavelmente, a conclusão também é.

Dado o argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$, cuja condicional correspondente é $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$ e o antecedente é a conjunção das premissas, que tem como consequente a conclusão que chamamos *conclusão associada ao argumento dado*. Vamos relembrar na prática?

Os dez argumentos básicos ou válidos fundamentais são tidos como uma consequência direta das tabelas-verdade. São eles:

1. Adição (AD):
   (i) $p \vdash p \vee q$;
   (ii) $p \vdash q \vee p$.
2. Simplificação (SIMP):
   (i) $p \wedge q \vdash p$;
   (ii) $p \wedge q \vdash q$;
3. Conjunção (CONJ):
   (i) $p, q \vdash p \wedge q$;
   (ii) $p, q \vdash q \wedge p$.
4. Absorção (ABS):
   (i) $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$.
5. *Modus ponens* (MP):
   (i) $p \rightarrow q, p \vdash q$.
6. *Modus tollens* (MT):
   (i) $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$.
7. Silogismo disjuntivo (SD):
   (i) $p \vee q, \sim p \vdash q$;
   (ii) $p \vee q, \sim q \vdash p$.
8. Silogismo hipotético (SH):
   (i) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$.
9. Dilema construtivo (DC):
   (i) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$.
10. Dilema destrutivo (DD):
   (i) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$.

Esses argumentos básicos são essenciais para fazer inferências. As dez regras de inferência ajudam a demonstrar a validade de um número maior de argumentos mais complexos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. *Iniciação à lógica matemática.* São Paulo: Nobel, 2002.

ANTUNES, D. A. *Fundamentos de matemática.* São Paulo: Atlas, 1978.

GUELLI, C.; IEZZI, G.; DOLCE, O. *Conjuntos, relações, funções, inequações.* São Paulo: Moderna, [s/a].

LEITE, A. E.; CASTANHEIRA, N. P. *Teoria dos números e teoria dos conjuntos.* Curitiba: InterSaberes, 2014.

MACHADO, N. J. *Matemática por assunto:* lógica, conjuntos e funções. Vol. 1. São Paulo: Scipione, 1988.

MEDEIROS, S.; MEDEIROS, E.; MEDEIROS, E. *Matemática para economia, administração e ciências contábeis.* 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

MORGADO, A. C. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LÓGICA MATEMÁTICA

ORGANIZADOR JEFERSON AFONSO LOPES DE SOUZA

Em *Lógica matemática*, tópicos como conjuntos: teorias, representação e operações, análise combinatória e conectivos, tabelas-verdade e implicações lógicas e proposições, argumentos e regras de inferência são apresentados de um ponto de vista inusitado que possibilita ao leitor um processo intensivo (e real) de aprendizagem.

ISBN 978-85-430-1932-1