Lógica Matemática

UNIDADE 4

ser
educacional
gente criando o futuro

PARA INÍCIO DE CONVERSA

Então aluno(a), chegamos a nossa quarta e última unidade.

O que você achou até agora?

Muitas dúvidas, perguntas ou questionamentos?

O seu tutor aguarda sua sinalização. Vamos que vamos!

ORIENTAÇÕES DA DISCIPLINA

Na terceira unidade, estudamos a construção de tabelas verdade, os conceitos de tautologia, contradição e contingência, e a ideia de implicação lógica.
Nesta unidade, vamos estudar equivalência lógica, identificando quando duas proposições são equivalentes através de suas tabelas-verdade que devem ser idênticas. Veremos na álgebra das proposições algumas propriedades que são aplicadas nas operações que já conhecemos. Ainda estudaremos o método dedutivo, que é uma forma mais eficiente de as tabelas verdade para demonstrar implicações e equivalências de proposições. Por fim, vamos ver a definição de argumento e regras de inferência que são passos para deduzir ideias.

GUARDE ESSA IDEIA!

Não se esqueça que nesta quarta unidade você encontrará um vídeo que deverá ser assistido no momento indicado no Guia de Estudo. Este vídeo irá complementar, além do Guia de Estudo, os livros indicados na Biblioteca Pearson e os vídeos externos (YouTube, por exemplo) a fim de ampliar ainda mais o seu conhecimento.

Então, sigamos adiante para nossa quarta e última unidade.

FICA A DICA

Caso não tenha visto por completo a Unidade III, é importante que você retorne e estude totalmente a unidade. A nossa disciplina é construída em cima de uma sequência lógica de assuntos. Isto significa que se você avançar de unidade sem concluí-la, pode ter seu desenvolvimento comprometido. Caso já tenha estudado toda a terceira unidade, vamos em frente!

Inicialmente, vamos entender o que seria a ideia de equivalência entre proposições. Quando uma proposição é logicamente equivalente a outra. Veremos como a tautologia está ligada às proposições equivalentes; proposições associadas a uma condicional e negação conjunta e disjunta de duas proposições.

Então, vamos começar a nossa quarta unidade. Desejo a você um ótimo estudo e muita atenção nos temas tratados.

Podemos seguir? Então, vamos lá!

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Uma proposição P(p,q,r...) é dita equivalente a uma proposição Q(p,q,r...) quando as tabelas-verdade das duas proposições são idênticas. Numa notação formal indica-se que P(p,q,r...) é equivalente a Q(p,q,r...) da seguinte maneira:

$$P(p,q,r...) \Longleftrightarrow Q(p,q,r...)$$

De modo particular, proposições que são tautologias são equivalentes entre si. Da mesma forma as que são contradições, também são equivalentes umas com as outras.

PROPRIEDADES DA EQUIVALÊNCIA

A equivalência entre proposições possui algumas propriedades inerentes. São elas:

Reflexiva (R): $P(p,q,r...) \Longleftrightarrow P(p,q,r...)$ (Equivalente a si mesma).

Simétrica (S): Se $P(p,q,r...) \Longleftrightarrow Q(p,q,r...)$, então

$Q(p,q,r...) \Longleftrightarrow P(p,q,r...)$.

Transitiva (T): Se $P(p,q,r...) \Longleftrightarrow Q(p,q,r...)$ e

$Q(p,q,r...) \Longleftrightarrow R(p,q,r...)$, então

$P(p,q,r...) \Longleftrightarrow R(p,q,r...)$.

Para entender melhor as propriedades da equivalência, venha comigo analisar alguns exemplos.

EXEMPLO

(1) Regra da dupla negação. As proposições "~~p" e "p" são equivalentes. Vejamos.

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

Como vemos, a dupla negação equivale à afirmação.

(2) Regra de Clavius. As proposições “~p → p” e “p” são equivalentes.

p	~p	~p → p
V	F	V
F	V	F

(3) Regra de absorção. As proposições “p → p ^ q” e “p → q” possuem tabelas-verdade idênticas e também são equivalentes.

p	q	p ^ q	p ® p ^ q	p → q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

(4) A condicional “p → q” e a disjunção “~p v q” são equivalentes também.

p	Q	~p	p → q	~p v q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(5) A bicondicional “p ↔ q” e a conjunção “(p → q) ^ (q → p)” são equivalentes.

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p → q) ^ (q → p)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

(6) A bicondicional “p q” e a disjunção “(p ^ q) v (~p ^ ~q)” são equivalentes.

p	q	~p	~q	p ↔ q	p ^ q	~p ^ ~q	(p ^ q) v (~p ^ ~q)
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

TAUTOLOGIA E EQUIVALÊNCIA

Teorema – Uma proposição P é equivalente a uma proposição Q se e somente se, a bicondicional P Q for uma tautologia. Ou seja, se P e Q têm tabelas-verdade idênticas, o valor lógico da bicondicional entre as duas será sempre verdade (V). Reciprocamente, se a bicondicional entre duas proposições quaisquer P e Q for uma tautologia, podemos dizer que as tabelas-verdade das duas proposições são idênticas.

PARA RESUMIR

Toda equivalência corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa. GUARDE ESTE TEOREMA!

EXEMPLO

Vamos verificar a bicondicional "(p → q) ↔ (~p v q)". Verificamos em um dos exemplos anteriores que a proposição "(p → q)" era equivalente à proposição "(~p v q)". Para confirmar a equivalência, a bicondicional entre elas deve ser tautológica.

p	q	~p	p → q	~p v q	(p → q) ↔ (~p v q)
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Equivalentes Tautologia

PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS A UMA CONDICIONAL

Dada a proposição condicional "p → q", as três proposições a seguir são chamadas de proposições associadas a p → q:

1. Recíproca: q → p
2. Contrária ou inversa: ~p → ~q
3. Contrapositiva ou contra-recíproca: ~q → ~p

Quando montamos as tabelas-verdade de todas essas proposições observamos a seguinte situação:

p	q	p → q	q → p	~p → ~q	~q → ~p
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

(1) A condicional e sua contrapositiva são **equivalentes.**

(2) A recíproca e a contrária da condicional são **equivalentes.**

EXEMPLO

Qual a contrapositiva da condicional a seguir?

"Se Pedro é professor, então é músico."

R- "Se Pedro não é músico, então não é professor."

Qual a recíproca da sentença abaixo?

"Se Mônica é rica, então Ana é pobre."

R- "Se Ana é pobre, então Mônica é rica."

Qual a contrária da seguinte condicional?

"Se José é garçom, então ele mora distante."

R- "Se José não é garçom, então ele não mora distante."

Qual a recíproca da contrapositiva na condicional abaixo?

"Se Maria é casada, então Carlos é divorciado."

A contrapositiva é: "Se Carlos não é divorciado, então Maria não é casada."

Logo a recíproca é: "Se Maria não é casada, então Carlos não é divorciado."

Qual a contrária da recíproca na condicional abaixo?

"Se André viajou, então conheceu Manaus."

A recíproca é: "Se André conheceu Manaus, então viajou."

Assim, a contrária é: "Se André não conheceu Manaus, então não viajou."

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

Nesta parte da unidade, vamos ver a equivalência presente nas proposições a partir de algumas propriedades e operações realizadas com os conectivos. Esteja atento(a) tanto às propriedades como às operações, e em caso de dúvida, releia novamente antes de seguir adiante. Consulte também os vídeos e links disponíveis que vão ajudar a sanar seus questionamentos.

Propriedades da Conjunção (^)

Idempotente: $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$

p	p ^ p	p ^ p ↔ p
V	V	V
F	F	V

Exemplo: José é feliz e José é feliz $\Longleftrightarrow$ José é feliz

Comutativa: (p ^ q)   (q ^ p)

p	Q	p ^ q	q ^ p	(p ^ q) ↔ (q ^ p)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Exemplo: Paulo é sergipano e estudante $\Longleftrightarrow$ Paulo é estudante e sergipano.

Associativa: (p ^ q) ^ r $\Longleftrightarrow$ p ^ (q ^ r)

p	q	r	(p ^ q)	(p ^ q) ^ r	(q ^ r)	p ^ (q ^ r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Exemplo: (2 * 3) * 5 $\Longleftrightarrow$ 2 * (3 * 5)

O exemplo não chega a ser uma proposição lógica composta por não ter conectivos nem proposições. No entanto, a ideia de associatividade é a mesma utilizada na multiplicação.

Observe que a bicondicional entre (p ^ q) ^ r e p ^ (q ^ r) é uma tautologia, logo são equivalentes.

Identidade: Para esta propriedade vamos considerar a proposição u com valor lógico V (verdadeiro) e a proposição x com valor lógico F (Falso). Observe a seguir:

- p ^ u $\Longleftrightarrow$ p (Qualquer que seja o valor de p, o valor lógico da conjunção vai ser igual ao valor de p). Assim, se p for V, teremos V ^ V = V. Agora, se p for F, teremos F ^ V = F. É o que diz a tabela a seguir:

p	u	p ^ u
V	V	V
F	V	F

- $p \wedge x \Longleftrightarrow x$ (Qualquer que seja o valor de p, o valor lógico da conjunção vai ser igual ao valor de x, ou seja, F). Assim, se p for V, teremos V ^ F = F. Caso p for F, teremos F ^ F = F. É o que diz a tabela a seguir:

p	x	p ^ x
V	F	F
F	F	F

EXEMPLO

- Maria é cantora **e** Belém é a capital do Pará.

O valor lógico dessa conjunção é igual ao valor da primeira proposição, uma vez que a segunda é verdadeira. Se é verdade que Maria é cantora, a conjunção é verdadeira. Se é falso que Maria é cantora, a conjunção é falsa.

- Ana fala alemão **e** João Pessoa é a capital do Maranhão.

Neste segundo exemplo, o valor lógico da conjunção será sempre falso, independente de qual seja o valor da primeira proposição. Ou seja, se for verdade ou não que Ana fala alemão, não importa, sempre será falsa a conjunção.

A partir disso, a verdade V é definida como **elemento neutro** e a falsidade F é dita elemento absorvente da conjunção.

LEITURA COMPLEMENTAR

Caso você tenha muitas dúvidas ainda sobre as definições e exemplos dados até o momento, recomendo a leitura sobre este assunto que se encontra disponível para consulta neste link. Após a leitura, peço que você retorne a este Guia de Estudo.

A seguir, veremos as propriedades da disjunção.

Propriedades da disjunção (v):

Idempotente: p v p $\Longleftrightarrow$ p

p	p v p	p v p ↔ p
V	V	V
F	F	V

Exemplo: José é taxista ou José é taxista $\Longleftrightarrow$ José é taxista.

Comutativa: p v q $\Longleftrightarrow$ q v p

p	Q	p v q	q v p	(p v q) ↔ (q v p)
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Exemplo: Carlos é cantor ou médico $\Longleftrightarrow$ Carlos é médico ou cantor.

Associativa: (p v q) v r $\Longleftrightarrow$ p v (q v r)

p	q	R	(p v q)	(p v q) v r	(q v r)	p v (q v r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

A ideia de associatividade é a mesma que está presente na conjunção, na multiplicação e na soma.

Identidade: Também de modo similar à conjunção, temos aqui o elemento absorvente e o elemento neutro. No caso da disjunção, o elemento absorvente é a verdade V. Já a falsidade é o elemento neutro. Considerando novamente as proposições u e x (respectivamente V e F), temos as seguintes tabelas:

$(p \vee u) \Longleftrightarrow u$

p	u	p v u
V	V	V
F	V	V

$(p \vee x) \Longleftrightarrow p$

p	x	p v x
V	F	V
F	F	F

Exemplo:

- Maria é cantora **ou** Belém é a capital do Pará.

O valor lógico dessa disjunção sempre será verdadeiro, uma vez que ao menos uma das proposições é verdadeira. Independente de Maria ser cantora ou não, não importa, a disjunção sempre será verdadeira por causa da segunda proposição.

- Ana fala alemão ou João Pessoa é a capital do Maranhão.

Neste segundo exemplo, o valor lógico da disjunção vai depender do valor da primeira proposição, já que a segunda é falsa. Ou seja, se for verdade que Ana fala alemão, a disjunção será verdadeira também. Mas se for falso que Ana fala alemão, a disjunção vai ser falsa.

LEITURA COMPLEMENTAR

Para ajudar a esclarecer as possíveis dúvidas, recomendo também a leitura sobre este assunto que se encontra disponível para consulta neste **link**. Após a leitura, peço que você retorne a este Guia de Estudo.

A seguir, veremos as propriedades conjuntas da conjunção e da disjunção.

Propriedades conjuntas – Conjunção e Disjunção

Distributiva:

- $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$

Vejamos a equivalência através das tabelas verdade.

$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	(q v r)	p ^ (q v r)	(p ^ q)	(p ^ r)	(p ^ q) v (p ^ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

p v (q ^ r) $\Longleftrightarrow$ (p ^ q) v (p ^ r)

p	q	r	(q v r)	p ^ (q v r)	(p ^ q)	(p ^ r)	(p ^ q) v (p ^ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

EXEMPLO

p ^ (q v r) $\Longleftrightarrow$ (p ^ q) v (p ^ r)

Dizer que "Ana é professora **e** é médica **ou** advogada" equivale a dizer:

"Ana é professora **e** médica **ou** Ana é professora **e** advogada".

p v (q ^ r) $\Longleftrightarrow$ (p v q) ^ (p v r)

Dizer que "Marcos é brasileiro **ou** José é feliz **e** rico" equivale a dizer:

"Marcos é brasileiro ou José é feliz e Marcos é brasileiro ou José é rico".

<u>Absorção:</u>

- p ^ (p v q) $\Longleftrightarrow$ p
- p v (p ^ q) $\Longleftrightarrow$ p

Vejamos nas tabelas verdade a seguir:

p	q	p v q	p ^ (p v q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

p	q	p ^ q	p v (p ^ q)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Atente agora para as duas próximas regras que vamos ver!

REGRAS DE DE MORGAN

As regras de DE MORGAN mostram como podemos transformar uma conjunção em uma disjunção, ou uma disjunção numa conjunção, através da negação. Vejamos:

- ~(p ^ q) $\Longleftrightarrow$ ~p v ~q

p	q	~p	~q	p ^ q	~(p ^ q)	~p v ~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

- ~(p v q) $\Longleftrightarrow$ ~p ^ ~q

p	q	~p	~q	p v q	~(p v q)	~p ^ ~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Como podemos ver, as duas regras são equivalentes. A partir delas, é possível escrever a conjunção em função da negação com a disjunção, como também escrever a disjunção em função da negação com a conjunção. Vejamos:

- p ^ q $\Longleftrightarrow$ ~(~p v ~q)
- p v q $\Longleftrightarrow$ ~(~p ^ ~q)

Sugiro, como exercício, que você tente montar as tabelas-verdade destas proposições e verifique a equivalência.

Negação da condicional

Nos nossos primeiros exemplos de equivalência, vimos à seguinte situação demonstrada por tabela verdade:

A condicional "p → q" e a disjunção "~p v q" são equivalentes.

O que aconteceria se negássemos a condicional?

Quando negamos um lado da equivalência, negamos o outro também. Então teríamos:

~(p → q) $\Longleftrightarrow$ ~(~p v q)

Vimos acima que quando negamos uma disjunção temos uma conjunção. Logo:

~(~p v q) $\Longleftrightarrow$ ~~p ^ ~q $\Longleftrightarrow$ p ^ ~q.

E concluindo: ~(p → q) $\Longleftrightarrow$ p ^ ~q

Negação da bicondicional

E o que acontece quando negamos uma bicondicional?

Novamente, vamos recorrer para um dos primeiros exemplos de equivalência com a bicondicional no contexto. Lembra do caso abaixo?

A bicondicional "$p \leftrightarrow q$" e a conjunção "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$" são equivalentes.

$\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \sim(\,(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\,)$

Negação de conjunção – 1ª regra de DE MORGAN

$\sim(\,(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\,) \Longleftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)$

Negação de condicional vista acima

$\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Logo, $\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Comutativa de (^) na 2ª

VEJA O VÍDEO!

Então, vamos continuar estudando um pouco mais sobre estas operações. Para tanto, você deverá assistir dois vídeos; o primeiro é sobre raciocínio lógico (12 minutos e 06 segundos) e o outro sobre **lógica proposicional** (6 minutos e 44 segundos). Os vídeos abordam as operações descritas acima. Você só deve prosseguir com o estudo depois que assistir aos vídeos.

Agora que você assistiu aos vídeos, vamos continuar com nosso estudo!

MÉTODO DEDUTIVO – ARGUMENTOS. REGRAS, IMPLICAÇÕES E EQUIVALÊNCIAS

VOCÊ SE RECORDA?

Você se recorda das implicações lógicas da unidade passada? Pois é. A partir de agora, vamos utilizá-las junto com as equivalências que vimos até aqui. Por isso, é importante que caso você ainda tenha alguma dúvida, releia novamente estes assuntos para poder seguir adiante. Deste ponto em diante você só conseguirá seguir sem dificuldades se tiver em mente as implicações, as equivalências e as propriedades das operações.

Podemos continuar? Vamos lá!

Argumentos

Define-se por argumento toda afirmação que a partir de um dado conjunto finito de proposições P_1, P_2, ..., P_n (n ³ ≥1) chamadas premissas, tem como consequência uma proposição Q chamada conclusão.

Um argumento com premissas P_1, P_2, ..., P_n e conclusão Q é dado por:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \Rightarrow Q$$

e é lido de uma das seguintes maneiras:

- "P_1, P_2, ..., P_n implica Q"
- "Q se deduz de P_1, P_2, ..., P_n"

Caro(a) aluno(a), dizemos que um argumento é válido se, e somente se, a conclusão é verdadeira sempre que as premissas forem verdadeiras. Em outras palavras, sempre que o valor lógico das premissas for V, e o valor lógico da conclusão também for V, o argumento será válido.

A Lógica só se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou falsidade das premis sas e das conclusões. Portanto, não importa o valor lógico das premissas. O que basta é que elas estejam relacionadas a tal ponto com a conclusão, que não seja possível ter a conclusão com valor lógico falso e as premissas com valor lógico verdadeiro.

PARA RESUMIR

Teorema: Um argumento é válido se, e somente se, a condicional (P1 ^ P2 ... ^ Pn) ⟶ Q é tautológica.

Um argumento pode ser utilizado para fazer uma "inferência", isto é, executar os "passos" de uma dedução ou demonstração, sendo por isso também chamado de regra de inferência. O passo lógico que leva as premissas à conclusão constitui uma dedução.

A dedução, meu caro(a), consiste em uma sequencia de fórmulas. Considere como fórmulas as implicações e equivalências que já foram vistas até aqui. Quando começarmos o processo dedutivo, ficará mais clara essa sequência. Só considere apenas que cada uma dessas fórmulas é premissa ou é obtida de fórmulas anteriores pela aplicação de regras de inferência.

Dado um argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow Q$ chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas p_1, ... p_n, a sequencia finita de proposições x_1, x_2, ... x_k, tal que cada x_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequencia, e de tal modo que a última proposição x_k seja a conclusão Q do argumento dado ou uma tautologia.

Cada proposição que formos incluir na sequencia de deduções deve decorrer logicamente das anteriores; isso significa que temos que fazer uso das <u>equivalências</u> ou <u>implicações</u> sobre uma proposição ou uma série de proposições.

Em suma, estes são os passos do método dedutivo:

1) Definir as premissas;
2) Aplicar equivalências, implicações, propriedades;
3) Repetir o passo 2 até que tenhamos a conclusão Q ou T (Tautologia).

VEJA O VÍDEO!

Neste vídeo você verá regras de inferência que poderão estar presentes no método dedutivo. Ele se encontra neste **link**. Você só deve prosseguir com o estudo depois que assistir ao vídeo, ele tem aproximadamente 11 minutos e 06 segundos.

Vamos continuar o nosso estudo demonstrando a implicação a seguir:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

Para demonstrarmos, temos duas opções. A primeira é ir transformando as premissas "(p → q)" e "p" até que elas virem a conclusão "q". A segunda é ir transformando a condicional "(p → q) ^ p → q" até que tenhamos Tautologia. Para esta primeira demonstração vamos utilizar a primeira opção.

Temos (p → q) ^ p

Vimos através de equivalência que a premissa (p → q) equivale a "~p v q".

Pois bem, ao substituirmos temos:

(~p v q) ^ p (aplicamos comutação)

p ^ (~p v q) (aplicamos distributividade)

(p ^ ~p) v (p ^ q)

(p ^ ~p) é uma contradição C.

Temos:

C v (p ^ q) equivale a (p ^ q), pois C (contradição ou falsidade) é elemento neutro numa disjunção.

Por fim, (p ^ q) implica em q, através da regra de inferência SIMPLIFICAÇÃO.

Temos então q => q.

Caro(a) estudante, como pode ver, para utilizarmos o método dedutivo, vamos precisar de informações vistas na unidade anterior. Mais uma vez, é importante avisar que você só conseguirá entender o método se tiver em mente as regras de inferência vistas na parte de implicação lógica da unidade 3, bem como as equivalências já vistas nesta unidade.

Vamos para mais uma demonstração.

Dessa vez, vamos utilizar a segunda opção, ou seja, utilizar a condição com premissa e conclusão, e ir transformando as proposições até encontrarmos uma tautologia.

Uma pergunta: Por que tem que dar tautologia no fim da demonstração?

Na unidade 3, na parte de tautologia e implicação lógica, vimos o teorema que propõe que a proposição P(p,q,r...) implica a proposição Q(p,q,r...) se e somente se, a condicional P(p,q,r...) → Q(p,q,r...) é tautológica. Entendeu o porquê?

Vamos demonstrar a implicação a seguir: p => p v q (Regra da Adição).

p => p v q

p → p v q (aplicamos equivalência da condicional)

~p v (p v q) (aplicamos associativa)

(~p v p) v q (Obs: ~p v p é uma tautologia)

T v q <=> T

Próxima implicação a ser demonstrada: (p ^ q) => (p v q).

(p ^ q) => (p v q)

(p ^ q) ⟶ (p v q) (aplicamos equivalência da condicional)

~(p ^ q) v (p v q) (aplicamos 1ª regra de DE Morgan na conjunção negada)

(~p v ~q) v (p v q) (aplicamos comutação)

(~p v p) v (~q v q)

T v T <=> T

Podemos ir para mais uma demonstração de implicação? OK, vamos lá!

p => q ⟶ p

p => q ⟶ p

p ⟶ (q ⟶ p) (aplicamos equivalência da condicional)

~p v (q ⟶ p) (aplicamos novamente equivalência da condicional)

~p v (~q v p) (aplicamos comutação)

~p v (p v ~q) (aplicamos associativa)

(~p v p) v ~q

T v ~q <=> T

(p ⟶ q) ^ ~q => ~p (Modus Tollens)

Vamos demonstrar essa implicação realizando a dedução das premissas "(p ⟶ q)" e "~q" na conclusão "~p". Mas nada impede de você realizar a demonstração começando pela condicional "(p ⟶ q) ^ ~q ⟶ ~p" e encontrar uma tautologia como conclusão (Lembre-se: Teorema de Tautologia nas implicações).

(p ⟶ q) ^ ~q => ~p

(p ⟶ q) ^ ~q (aplicamos equivalência da condicional)

(~p v q) ^ ~q (aplicamos distributividade)

(~q ^ q) v (~p ^ q) (contradição em ~q ^ q)

C v (~p ^ q) (contradição é elemento neutro numa disjunção)

(~p ^ q) (aplicamos a regra de inferência SIMPLIFICAÇÃO)

(~p ^ q) => ~p

O método dedutivo não demonstra apenas implicações como vimos até agora. Também é possível demonstrar equivalências de modo semelhante. E temos duas formas para fazer isso.

A primeira é fazer uso das equivalências que já vimos para deduzir uma proposição composta na sua equivalente. Em demonstração de equivalência não usamos as regras de inferência vistas nas implicações lógicas. A segunda forma de demonstrar uma equivalência é deduzir a bicondicional das duas proposições ditas equivalentes e encontrar tautologia no fim.

Você se lembra do teorema visto na parte de equivalência e tautologia? Para encerrarmos a unidade, seguem três demonstrações de equivalência. Vamos identificar cada equivalência utilizada linha por linha.

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q)$

$\sim p \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee C$

$\sim p \vee C \Leftrightarrow \sim p$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$

$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$

$\sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

$p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee q$

$\sim(p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q$

$(\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge T$

$(\sim p \vee q) \wedge T \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$

PALAVRAS DO PROFESSOR

Então, querido(a) estudante, encerramos neste momento todo o conteúdo da Unidade IV. É importante que você tenha compreendido todo o assunto, pois ele é a base para a resolução das atividades propostas.

Caso tenha alguma dúvida você deve entrar em contato com o tutor para que as esclareça.

Desejo boa sorte e um excelente estudo!