

# Lógica Matemática

## UNIDADE 3



# LÓGICA MATEMÁTICA

## UNIDADE 3



### PARA INÍCIO DE CONVERSA

Olá caro(a) estudante, estamos juntos em mais uma unidade desta disciplina. É muito bom ter a certeza de que tudo está correndo bem. Caso você precise de ajuda, sinalize seu tutor.

A Lógica Matemática, embora seja um tema negligenciado por muitos profissionais, é importantíssima na nossa formação. Podemos perceber que cada dia mais as empresas valorizam os profissionais que demonstram ter propriedade e conhecimento sobre estes assuntos. Sendo assim, vamos continuar avançando no universo da Lógica Matemática e detalhando suas regras, propriedades e características. E, finalmente, na próxima unidade iremos unificar todos os conhecimentos.



### ORIENTAÇÕES DA DISCIPLINA

Na unidade anterior, abordamos alguns elementos importantes acerca da Análise Combinatória, Proposições, Conectivos e Operações Lógicas sobre Conectivos.

Nesta terceira unidade, vamos observar como construir as chamadas Tabelas Verdade de proposições detalhando as regras necessárias para isto, e identificar o que vem a ser Tautologias, Contradições, Contingências e a Implicação Lógica. A ideia principal, aqui neste terceiro Guia de Estudo, será trazer à tona uma abordagem mais precisa acerca das operações com os conectivos lógicos no âmbito das proposições compostas e determinar seus respectivos valores lógicos.

Prezado(a) aluno(a), não esqueça que em cada unidade você encontrará vídeos que deverão ser assistidos. Estes vídeos irão complementar, além do Guia de Estudo, os livros indicados na Biblioteca Pearson e por ventura alguma outra recomendação de leitura aqui feita. E da mesma forma como feito nas unidades anteriores, podemos ter sugestões de vídeos externos (YouTube, por exemplo) a fim de ampliar, ainda mais, o seu conhecimento acerca do tema tratado nesta terceira unidade.

Vale lembrar também que ao final de cada unidade você deverá realizar as atividades que constam no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Então, vamos dar continuidade aos nossos assuntos em mais uma unidade!



## FICA A DICA

Caso não tenha visto por completo as unidades anteriores, é importante que você retorne e as estude. A nossa disciplina é construída em cima de uma sequência lógica dos assuntos. Isto significa que se você avançar sem estudar a unidade anterior completa, isso pode comprometer todo seu estudo e consequente rendimento.

Estamos ultrapassando a metade de nossa disciplina e vamos continuar a discutir temas indispensáveis para sua formação profissional. Assim, convido você a iniciar junto comigo essa unidade e que ela seja tão proveitosa quanto foi nossas duas primeiras. Nesta terceira unidade vamos enveredar pelos caminhos das proposições compostas. Vamos lá!

Por questões práticas, nós iremos começar nosso estudo buscando entender melhor as regras necessárias para a construção das tabelas verdade e quais as relações lógicas envolvidas. Depois trataremos das tautologias, contradições e contingências. Por fim, será abordada a implicação lógica.

## TABELAS VERDADE

Considerando uma série de proposições simples,  $p, q, r, s, \dots$ , é possível combiná-las por conectivos lógicos, do tipo:

$$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Portanto, é possível construir com estes conectivos a partir de combinações entre eles, proposições compostas. Por exemplo, observem as proposições compostas  $N$  e  $S$ :

$$N(p, q, s) = (p \rightarrow \sim q \vee s) \wedge q;$$

$$S(r, s) = \sim s \vee (s \rightarrow r)$$

Para qualquer combinação de uma proposição composta, é permitido construir a tabela-verdade que indicará os possíveis valores lógicos verdadeiros (V) ou falsos (F). Lembrando, como foi visto que as proposições compostas dependem das proposições simples envolvidas. Para isto utilizaremos as tabelas verdade das operações lógicas fundamentais:

$$\sim p; p \wedge q; p \vee q; p \rightarrow q; p \leftrightarrow q.$$



### GUARDE ESSA IDEIA!

É importante saber que existe outros símbolos que também são utilizados para os conectivos lógicos. Logo adiante, estes símbolos serão apresentados para vocês. Desta maneira é muito importante conhecermos todos os símbolos que são usados na literatura para representar os conectivos lógicos.

## NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

Caro(a) estudante, como em qualquer combinação, o número de linhas de uma tabela verdade para uma proposição composta, depende da quantidade de proposições simples existentes.

Teorema: considerando  $n$  proposições simples que integram uma proposição composta, a tabela-verdade da proposição composta terá  $(2)^n$  linhas.

## CONSTRUINDO TABELA VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Primeiramente, na construção da tabela-verdade de uma proposição composta, contamos o número de proposições simples que há compõe. Como vimos, se há  $n$  proposições simples teremos  $2^n$  linhas. Agora temos, para a primeira proposição simples, metade do número de linhas correspondente ao valor lógico V(verdadeiro) e a outra metade correspondente ao valor lógico F(falso) nesta ordem, ou seja,  $2^n/2 = 2^{n-1}$  nas primeiras linhas e  $2^n/2 = 2^{n-1}$  nas linhas restantes.

Para a segunda proposição simples temos  $2^n/4 = 2^{n-2}$  para o valores lógicos V(verdade) e  $2^{n-2}$  para os valores lógicos F(falso) alternadamente. Seguindo a sequência, para a  $j$ -ésima proposição simples teremos, para  $j$  menor ou igual a  $n$ ,  $2^n/2^j = 2^{n-j}$  valores lógicos V(verdade) e  $2^{n-j}$  valores lógicos de F(falso), novamente sempre de maneira alternada.

E então? Ficou confuso? Vamos observar alguns exemplos para um melhor esclarecimento:



### EXEMPLO

Construa a tabela verdade da proposição composta  $R(r, s) = r \wedge (\sim s)$ .

Quantas linhas terá a tabela verdade da proposição acima? Vejam que ela é formada por 2 proposições simples:  $r$  e  $s$ . Então, utilizando a equação apresentada para determinar o número de linhas teremos:  $(2)^n = (2)^2 = 4$  linhas.

De acordo com este resultado, as duas primeiras colunas que correspondem a cada uma das proposições simples componentes serão preenchidas assim: a primeira coluna (proposição  $r$ ) será preenchida com duas linhas com o valor lógico (V) seguidas de duas linhas com o valor lógico (F). Desta forma: V, V, F e F. E a segunda coluna (proposição  $s$ ) preenchida por uma sequência alternada dos valores lógicos (V) e (F). Assim: V, F, V e F.

As outras colunas serão preenchidas segundo os conectivos usados na proposição e também segundo algumas táticas de resolução. Antes de montarmos a tabela verdade da proposição composta do exemplo, vamos apresentar duas possibilidades de resolução de tabelas verdade.

1ª Tática de Resolução: primeiramente, identificamos o número de proposições simples; em seguida construímos uma coluna para cada proposição simples, neste caso  $r$  e  $s$ ; depois uma coluna para  $\sim s$ ; e por fim uma coluna para a proposição composta dada. Vejamos a tabela:

$r$	$s$	$\sim s$	$r \wedge (\sim s)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Para determinar os valores lógicos da proposição dada é só observar os valores lógicos da última coluna que foi preenchida. Esses valores, preenchidos na última coluna, correspondem aos valores lógicos da proposição dada. A tabela-verdade completamente preenchida fica assim:

$r$	$s$	$\sim s$	$r \wedge (\sim s)$
V	V	F	<b>F</b>
V	F	V	<b>V</b>
F	V	F	<b>F</b>
F	F	V	<b>F</b>

Sendo assim, podemos observar todas as possibilidades de atribuições dos valores lógicos V e F às proposições simples componentes  $r$  e  $s$ :  $R(V, V) = F$ ;  $R(V, F) = V$ ;  $R(F, V) = F$ ;  $R(F, F) = F$ .

De uma forma compacta:  $R(VV, VF, FV, FF) = FVVV$ .

Vamos utilizar o mesmo exemplo para apresentar uma outra possibilidade de resolução.

2ª Tática de Resolução: primeiro, identificamos o número de proposições simples e atrelamos uma coluna para cada uma delas. E à direita delas, uma coluna para cada proposição e conectivo existente na proposição composta. Vejamos como se faz:

r	s	r	$\wedge$	$(\sim s)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Logo em seguida completamos essas colunas em uma dada ordem. Neste caso, na ordem indicada pela sequência numérica abaixo da tabela verdade. Observe:

r	s	r	$\wedge$	$(\sim s)$
V	V	V	<b>F</b>	F
V	F	V	<b>V</b>	V
F	V	F	<b>F</b>	F
F	F	F	<b>F</b>	V

**1 3 2 1**

Os valores preenchidos por último (a coluna indicada pelo número 3), correspondem aos valores lógicos que a proposição dada pode assumir.



## EXEMPLO

Construa a tabela verdade da proposição  $R(r, s, e) = r \vee (\sim e) \rightarrow s \wedge (\sim e)$ .

Vamos utilizar a 1ª Tática de Resolução apresentada no Exemplo 1. Como a proposição composta deste exemplo é formada por 3 proposições simples, o número de linhas da tabela verdade será  $(2)^n = (2)^3 = 8$ .

Preenchemos primeiro as colunas que correspondem a cada uma das proposições simples componentes:

r	s	e	$\sim e$	$r \vee (\sim e)$	$s \wedge (\sim e)$	$r \vee (\sim e) \rightarrow s \wedge (\sim e)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Em seguida preenchemos os valores lógicos das demais composições obedecendo aos conectivos envolvidos:

r	s	e	$\sim e$	$r \vee (\sim e)$	$s \wedge (\sim e)$	$r \vee (\sim e) \rightarrow s \wedge (\sim e)$
V	V	V	F	V	F	
V	V	F	V	V	V	
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	F	F	
F	V	F	V	V	V	
F	F	V	F	F	F	
F	F	F	V	V	F	

E, por fim, completamos a coluna da proposição composta que contem a condicional ( $\rightarrow$ ):

Portanto, a última coluna da tabela verdade apresenta todos os valores lógicos que a proposição composta pode assumir.

**Vamos construir a tabela-verdade deste mesmo exemplo utilizando a 2ª Tática de Resolução.**

Preenchemos as colunas que correspondem as proposições simples:

r	s	e	r	V	~	e	→	s	∧	~	e
V	V	V									
V	V	F									
V	F	V									
V	F	F									
F	V	V									
F	V	F									
F	F	V									
F	F	F									

Em seguida completamos essas colunas em uma dada ordem. Esta ordem depende do uso dos conectivos na proposição. Neste caso, na ordem indicada pela sequência numérica abaixo da tabela verdade. Observe:

r	s	r	∧	(~	s)
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F

**1   3   2   1**

Os valores preenchidos por último (a coluna indicada pelo número 4) correspondem aos valores lógicos que a proposição dada pode assumir.



## EXEMPLO

Construir a tabela verdade da proposição  $R(r, s) = \sim(r \wedge s) \vee \sim(s \longleftrightarrow r)$ .

Querido(a) estudante, da mesma maneira como feito nos exemplos anteriores, vamos utilizar a 1ª Tática de Resolução apresentada no Exemplo 1. Como a proposição composta deste exemplo é formada por 2 proposições simples, o número de linhas da tabela verdade será  $(2)^n = (2)^2 = 4$ .



Preenchemos primeiro as colunas que correspondem a cada uma das proposições simples componentes:

$r$	$s$	$r \wedge s$	$s \leftrightarrow r$	$\sim (r \wedge s)$	$\sim (s \leftrightarrow r)$	$\sim (r \wedge s) \vee \sim (s \leftrightarrow r)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Em seguida preenchemos os valores lógicos das demais composições obedecendo aos conectivos envolvidos:

$r$	$s$	$r \wedge s$	$s \leftrightarrow r$	$\sim (r \wedge s)$	$\sim (s \leftrightarrow r)$	$\sim (r \wedge s) \vee \sim (s \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	V	
F	V	F	F	V	V	
F	F	F	V	V	F	

E, por fim, completamos a coluna da proposição composta que contem a disjunção ( $\vee$ ):

$r$	$s$	$r \wedge s$	$s \leftrightarrow r$	$\sim (r \wedge s)$	$\sim (s \leftrightarrow r)$	$\sim (r \wedge s) \vee \sim (s \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	F	F	<b>F</b>
V	F	F	F	V	V	<b>V</b>
F	V	F	F	V	V	<b>V</b>
F	F	F	V	V	F	<b>V</b>

Portanto, a última coluna da tabela-verdade apresenta todos os valores lógicos que a proposição composta pode assumir.

Como foi feito nos Exemplos 1 e 2, vamos agora construir a tabela-verdade desta proposição composta utilizando a 2ª Tática de Resolução.

Primeiro, preenchemos as colunas que correspondem as proposições simples:

r	s	~	(r	^	s)	v	~	(s	↔	r)
V	V									
V	F									
F	V									
F	F									

Em seguida completamos essas colunas em uma dada ordem. Lembro que esta ordem depende do uso dos conectivos na proposição. Neste caso, na ordem indicada pela sequência numérica abaixo da tabela-verdade. Observe:

r	s	~	(r	^	s)	v	~	(s	↔	r)
V	V	F	V	V	V	<b>F</b>	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	<b>V</b>	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	<b>V</b>	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	<b>V</b>	F	F	V	F
		<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>

Os valores preenchidos por último (a coluna indicada pelo número 4) correspondem aos valores lógicos que a proposição dada pode assumir.

Leitura complementar

Se você ainda está um pouco confuso ou quer saber mais sobre a construção de tabelas-verdade, você deve interromper neste momento a leitura deste Guia de Estudo, ir até o [LINK](#) e ler a apostila sugerida da página 16 a 21.

## VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Considerando uma proposição composta  $P(p_1, p_2, p_3, \dots)$ , é possível determinar o seu valor lógico (V ou F) a partir dos valores lógicos das proposições simples  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , que integram a proposição composta.

Vamos entender melhor como funciona. Vejamos alguns exemplos:



### EXEMPLO

Considerando os valores lógicos das proposições simples  $r$  e  $s$  como V e F respectivamente, encontre o valor lógico da seguinte proposição:

Substituindo os valores lógicos definimos  $R(r, s) = \sim (r \vee s) \leftrightarrow \sim r \wedge \sim s$ .

Então o valor lógico da proposição  $R$  é Verdade. Ou, seja,  $V(R) = V$ .

$$V(R) = \sim (V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F = \sim V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V.$$



### EXEMPLO

Considerando  $V(s) = V$ , qual será o valor lógico V(verdade) ou F(falso) da proposição composta  $P(r, e, s) = r \rightarrow e \vee s$ ?

Como o valor lógico de " $s$ " é V(verdade) o conectivo ( $\vee$ ) torna " $e \vee s$ " verdadeira. Da definição do condicional ( $\rightarrow$ ), concluímos que o valor lógico da proposição  $P(r, e, s) = r \rightarrow e \vee s$  só pode ser V(verdade).

## USO DOS PARÊNTESES NAS PROPOSIÇÕES

Como em muitas operações matemáticas é natural o uso dos parênteses, isso também acontece na simbologia das proposições lógicas compostas com o objetivo de tornar clara a leitura dos signos. Como, por exemplo, na expressão " $s \vee n \rightarrow \sim r \wedge s$ ". Ela pode mudar completamente.

Podemos interpretar essa expressão de formas diferentes dependendo de onde sejam inseridos os parênteses e, conseqüentemente, teremos valores lógicos distintos para cada interpretação. Observe a seguir algumas possibilidades para a proposição composta citada acima:

- $s \vee (n \rightarrow \sim r \wedge s)$
- $(s \vee n) \rightarrow (\sim r \wedge s)$



## PALAVRAS DO PROFESSOR

Ficou claro? Daí a importância do uso de parênteses ou de qualquer outro símbolo com esta intenção. Em alguns casos, o uso dos parênteses pode até ser descartado, a fim de simplificar a expressão.

É importante também frisar que existe uma ordem de “força” entre os conectivos. Vejamos essa ordem do mais “fraco” para o mais “forte”:

$$(1) \sim ; \quad (2) \wedge \text{ e } \vee ; \quad (3) \rightarrow ; \quad (4) \leftrightarrow$$

De acordo com esta ordem, o conectivo mais “fraco” é a negação ( $\sim$ ) e o mais “forte” é a bicondicional ( $\leftrightarrow$ ).

O que isto significa? Qual o motivo desta ordem? Observe a seguinte proposição:

$$P(s, r) = s \rightarrow r \leftrightarrow s \vee r.$$

Veja que ela não possui nenhum parêntese que possa indicar como iniciaremos a sua análise. Neste caso, ela é interpretada como uma bicondicional. O conectivo que representa a bicondicional ( $\leftrightarrow$ ) é o mais forte.

Para que ela possa se tornar uma condicional ( $\rightarrow$ ) é necessário adicionar os parênteses da seguinte forma:  $s \rightarrow (r \leftrightarrow s \vee r)$ .

## OUTROS SÍMBOLOS QUE SÃO UTILIZADOS PARA OS CONECTIVOS LÓGICOS

Além dos símbolos que estamos utilizando para os conectivos nestes Guias de Estudo, são usados também para alguns destes conectivos outros símbolos. São eles:

( $\emptyset$ ) para a Negação ( $\sim$ )

( $\cdot$ ) e ( $\&$ ) para a Conjunção ( $\wedge$ )

( $\supset$ ) ferradura para a Condicional ( $\rightarrow$ )

## TAUTOLOGIA

Prezado(a) estudante, a Tautologia é um fato observado quando em uma proposição composta, o resultado lógico da última coluna da correspondente tabela verdade, são todos V(verdade).

Podemos entender que a Tautologia é um evento observado em proposições onde não importando o valor lógico de suas proposições componentes simples, o valor lógico da proposição composta será sempre verdade.

Outras denominações que são utilizadas para a Tautologia são: proposição tautológica e proposições logicamente verdadeiras. Algumas proposições como  $S \rightarrow S$  e  $S \leftrightarrow S$ , são identificadas como tautológicas.

Vejamos alguns exemplos para uma melhor compreensão.



### EXEMPLO

Considere a proposição  $P(r) = \sim (r \wedge \sim r)$ . Verifique se ela é tautológica.

Construindo a tabela verdade temos:

$r$	$\sim r$	$r \wedge \sim r$	$\sim (r \wedge \sim r)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Como você pode observar, o valor lógico da proposição é sempre verdade. Portanto, a proposição dada é tautológica.



### EXEMPLO

Considere a proposição  $Q(r, s, e) = r \wedge s \rightarrow \sim e \vee s$ . Ela representa uma Tautologia?

Vamos construir a sua tabela verdade:

$r$	$e$	$s$	$\sim e$	$r \wedge s$	$\sim e \vee s$	$r \wedge s \rightarrow \sim e \vee s$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Identificamos que a proposição dada é tautológica, pois todos os valores lógicos que a proposição pode assumir são V(verdade).

## CONTRADIÇÕES



### VOCÊ SABIA?

Você sabia que Contradição é uma proposição composta onde a última coluna da tabela verdade é formada somente pelo valor lógico F(falso)?

Desta forma, podemos concluir que a contradição é uma proposição composta que independentemente dos valores lógicos assumidos pelas proposições simples, que integram sua estrutura, o resultado é sempre F(falso).

Como já foi visto, uma tautologia assume sempre valores lógicos V(verdade) independentemente das proposições simples componentes. Podemos então verificar que para uma proposição composta  $P(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  que é uma tautologia, a negativa dela, ou seja,  $\sim P(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  é sempre F(falsa).

Logo é fácil concluir que  $P(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  é uma tautologia, se e somente se  $\sim P(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  for uma contradição.



### EXEMPLO

Considere a proposição composta  $P(r, s) = (r \wedge s) \wedge \sim (r \vee s)$ . Classifique seu resultado.

Construindo a tabela verdade, identificamos que a proposição dada é uma contradição, pois para qualquer valor lógico atribuído as proposições simples componentes seu valor lógico é sempre F(falso).

r	s	$r \wedge s$	$r \vee s$	$\sim (r \vee s)$	$(r \wedge s) \wedge \sim (r \vee s)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F



## EXEMPLO

Considere a proposição composta  $U(r, s) = \sim r \wedge (r \vee \sim s)$ . Ela representa uma Contradição?

Construindo a tabela verdade, identificamos que a proposição dada é uma contradição, pois para qualquer valor lógico atribuído as proposições simples componentes seu valor lógico é sempre F(falso).

r	s	$\sim r$	$\sim s$	$r \vee \sim s$	$\sim r \wedge (r \vee \sim s)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F



## VEJA O VÍDEO!

O vídeo sugerido apresenta alguns exemplos de como construir uma tabela verdade e identificar se é uma tautologia ou uma contradição. Ele pode ser acessado no seguinte [LINK](#). O vídeo possui 9 minutos e 36 segundos. Vale a pena você assistir.

## CONTINGÊNCIAS

Meu caro(a), Contingência é uma proposição composta em que a última coluna da tabela-verdade é formada por valores lógicos V e F, de tal maneira que ao menos um par dos valores lógicos mencionados apareçam.

Utilizando os conceitos de Tautologia e Contradição, concluímos que a contingência é uma proposição composta que não pode ser classificada como Tautologia nem tão pouco como Contradição.

Existem, ainda, duas outras denominações que são utilizadas para as Contingências. São elas: proposições contingentes e proposições indeterminadas.



## EXEMPLO

Considere a proposição composta  $Q(r, s) = r \vee s \rightarrow r$ . Construa sua tabela verdade e classifique seu resultado.

Construindo a tabela verdade, identificamos que a proposição dada é uma Contingência.

r	s	$r \vee s$	$r \vee s \rightarrow r$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Na tabela acima, observe que na última coluna para seus valores lógicos existe, pelo menos, um par V(verdade) e F(falso).



## EXEMPLO

Dada a proposição composta  $S(r, e) = r \wedge \sim e$ . Construa sua tabela verdade e classifique seu resultado.

Da mesma maneira como feito no exemplo anterior, construindo a tabela verdade para a proposição dada, ela é classificada como uma Contingência. Pois para seus valores lógicos existe, pelo menos, um par V(verdade) e F(falso).

r	e	$\sim e$	$r \wedge \sim e$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F





## VEJA O VÍDEO!

Para mais exemplos de como construir uma tabela-verdade e identificar se é uma contingência, assista ao vídeo que está no seguinte [LINK](#). O vídeo possui 10 minutos e 46 segundos.

## IMPLICAÇÃO LÓGICA

A implicação lógica ocorre entre duas proposições compostas  $R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  e  $S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  ou simplesmente  $R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  implica logicamente ou somente implica em  $S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ , quando  $S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  é V(verdade) em todas as ocasiões que  $R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  também é V(verdade).

Desta maneira, podemos concluir que: uma proposição composta  $R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  implica logicamente ou simplesmente implica uma proposição  $S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  quando, nas suas respectivas tabelas verdade, as linhas correspondentes de cada tabela verdade não aparece V e F ao mesmo tempo respectivamente.

Sendo assim, dizemos que a proposição  $R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$  implica a proposição  $S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ :

$$R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \supset S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Portanto, toda proposição implica uma tautologia e apenas uma contradição implica uma contradição.

### Propriedades da implicação lógica

As propriedades reflexivas (R) e transitiva (T) estão incluídas na implicação lógica entre proposições. Utilizando a linguagem simbólica:

$$(R) \quad R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \supset R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

$$(T) \quad \text{Se } R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \supset S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \text{ e}$$

$$S(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \supset L(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n), \text{ então}$$

$$R(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \supset L(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

## EXEMPLO

Veja a tabela-verdade das proposições  $r \wedge s$ ,  $r \vee s$ ,  $r \leftrightarrow s$ :

r	s	$r \wedge s$	$r \vee s$	$r \leftrightarrow s$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Na primeira linha da tabela verdade a proposição " $r \wedge s$ " tem um valor lógico V(verdade). Ainda nesta linha as proposições " $r \vee s$ " e " $r \leftrightarrow s$ ", ambas, assumem o valor lógico V(verdade). De tal maneira, podemos concluir que a proposição " $r \wedge s$ " implica nas proposições " $r \vee s$ " e " $r \leftrightarrow s$ ":

$$r \wedge s \Rightarrow r \vee s \quad \text{e} \quad r \wedge s \Rightarrow r \leftrightarrow s$$

Nesta tabela-verdade, podemos observar as seguintes Regras de inferência:

$$\text{Adição:} \quad r \Rightarrow r \vee s \quad \text{e} \quad s \Rightarrow r \vee s$$

$$\text{Simplificação:} \quad r \wedge s \Rightarrow r \quad \text{e} \quad r \wedge s \Rightarrow s$$



## EXEMPLO

Vejam a tabela verdade das seguintes proposições  $r \leftrightarrow s$ ,  $r \rightarrow s$  e  $s \rightarrow r$ .

r	s	$r \leftrightarrow s$	$r \rightarrow s$	$s \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Na primeira e na quarta linha da tabela verdade, a proposição " $r \leftrightarrow s$ " tem um valor lógico V(verdade). Ainda nestas linhas as proposições " $r \rightarrow s$ " e " $s \rightarrow r$ ", ambas, assumem o valor lógico V(verdade). De tal maneira, podemos concluir que a proposição " $r \leftrightarrow s$ " implica em cada uma das proposições " $r \rightarrow s$ " e " $s \rightarrow r$ ":

$$r \leftrightarrow s \Rightarrow r \rightarrow s \quad \text{e} \quad r \leftrightarrow s \Rightarrow s \rightarrow r.$$



## EXEMPLO

Vejamos agora a tabela verdade da proposição composta:  $(r \vee s) \wedge \sim r$ .

r	s	$r \vee s$	$\sim r$	$(r \vee s) \wedge \sim r$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Neste exemplo a proposição composta só assume o valor lógico V(verdade) na terceira linha e, ainda na mesma linha, a proposição simples "s" assume também o valor lógico V(verdade). Concluimos desta maneira a seguinte implicação lógica:

$$(r \vee s) \wedge \sim r \Rightarrow s$$

Tal implicação lógica recebe é denominada "Regra de Silogismo Disjuntivo".

## IMPLICAÇÃO LÓGICA E TAUTOLOGIAS

Agora que temos conhecimento sobre Tautologias e Implicações Lógicas, vamos enunciar o seguinte teorema:

Considere a proposição  $R(r, s, e, \dots)$  que implica a proposição  $L(r, s, e, \dots)$ , ou seja:

$$R(r, s, e, \dots) \vdash L(r, s, e, \dots)$$

Se e somente se a condicional:

$$R(r, s, e, \dots) \rightarrow L(r, s, e, \dots) \text{ é tautológica.}$$



## EXEMPLO

Considere a condicional " $r \wedge \sim r \rightarrow s$ ". Construindo a sua tabela verdade temos:

$r$	$s$	$\sim r$	$r \wedge \sim r$	$r \wedge \sim r \rightarrow s$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como a proposição composta é tautológica, " $r \wedge \sim r$ " implica " $s$ ", ou seja:  $r \wedge \sim r \Rightarrow s$ . Observe que de uma contradição ( $r \wedge \sim r$ ) é possível deduzir qualquer proposição " $s$ ".

Espero que você tenha fixado todo o conteúdo abordado, pois a partir da próxima (e última) unidade a disciplina de lógica matemática encontra seu ápice.

Caso algum assunto tenha deixado você com dúvidas, é importante que você releia e tente esclarecer o que não ficou bem entendido. Se algo ainda deixa dúvidas, passe todas elas para o seu tutor. Iremos ajudar a esclarecer!!!



## PALAVRAS DO PROFESSOR

Bom meu caro(a), encerramos neste momento todo o conteúdo da Unidade III. É importante que você tenha compreendido todo o assunto. Na Unidade IV, trataremos da Equivalência lógica, Álgebra das Proposições, Método Dedutivo, Argumentos e por fim, estudaremos as Regras de Inferência.

Agora, você deve ir ao Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e realizar as atividades referentes ao conteúdo aprendido nesta Unidade III. Caso tenha alguma dúvida você deve entrar em contato com o tutor para que as esclareça.

Encontramo-nos em breve na última unidade.

Bom estudo!