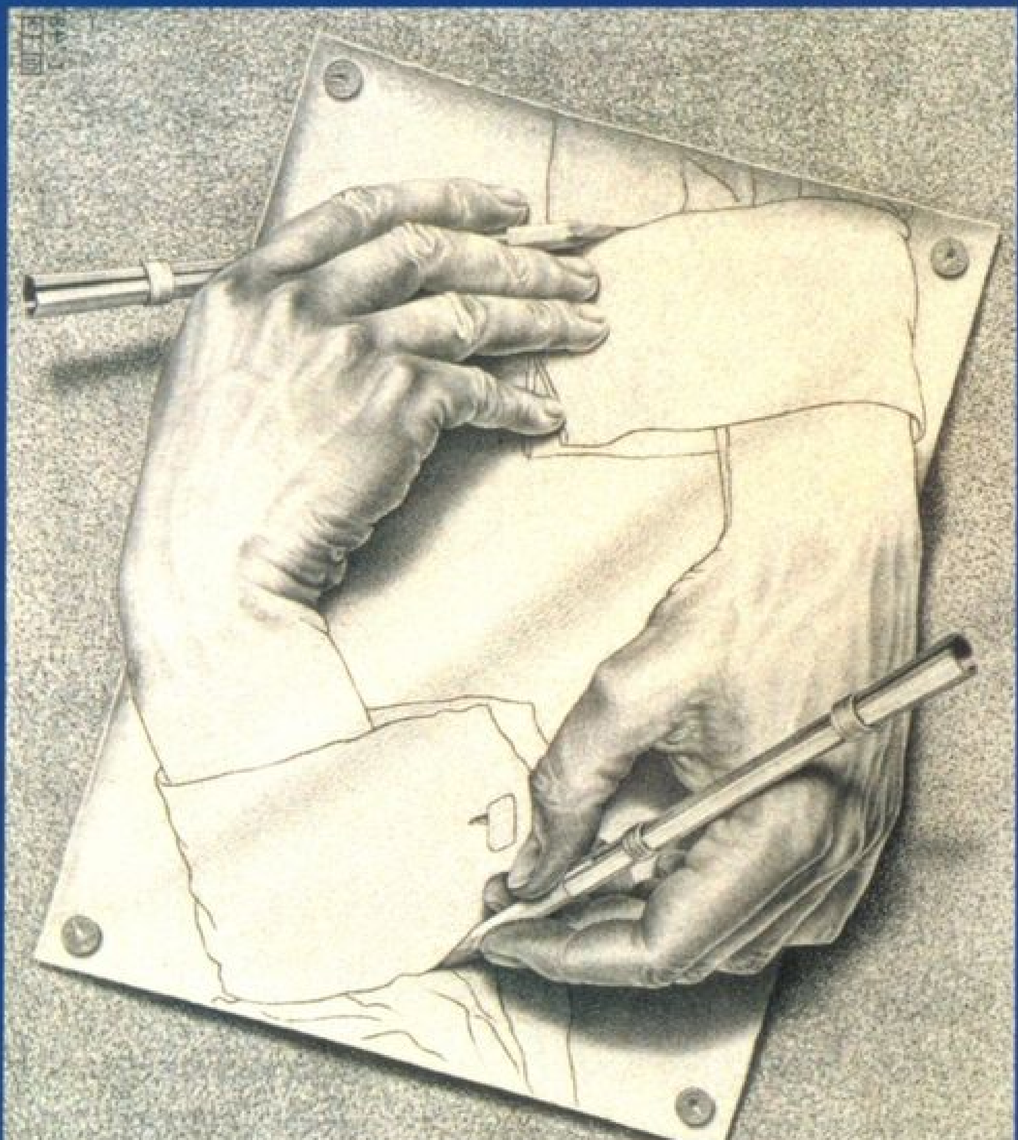
Adonai S. Sant'Anna

O que é um Axioma



série lógica matemática

Manole

O que é um Axioma

Contato com o autor
Endereço:
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Matemática – Caixa Postal 019081
Curitiba – PR – Brasil
81531-990
E-mail: adonai@ufpr.br

Adonai S. Sant'Anna

O que é um Axioma

Série Lógica Matemática

Manole

Capa: Jean Mauricio Masaoka

Imagem da capa: Drawing Hands by M. C. Escher (1898-1972).
Copyright © 2002 Cordon Art-Baarn – Holland. All rights reserved
(Todos os direitos reservados).

Projeto gráfico e editoração eletrônica: Verba Agência Editorial

---

CIP/BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

s223o

Sant'Anna, Adonai S., 1964–
O que é um axioma
/ Adonai S. Sant'Anna. — Barueri, SP: Manole, 2003
. – (Lógica matemática; v.1)

Contém: Exercícios, exercícios de iniciação científica e projetos de iniciação científica
Inclui bibliografia
ISBN: 85-204-1660-8

1. Axiomas. 2. Lógica simbólica e matemática.
I. Título. II. Série.

02.2135.	CDD 511.3
	CDU 510.6

1ª edição brasileira – 2003

Direitos adquiridos pela:
Editora Manole Ltda.
Avenida Ceci, 672 – Tamboré
06460-120 – Barueri – SP – Brasil
Fone: (0_ _11) 4196-6000 – Fax: (0_ _11) 4196-6021
www.manole.com.br
info@manole.com.br

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Minha vida teve um rumo definitivo e sensato quando conheci a mulher que um ano depois seria minha esposa. Dedicar-lhe este livro está longe de ser o bastante. Mas é um pequeno sinal do meu amor.

Dedicado a Vilma, minha esposa nota 10.

Sumário

Sobre o Autor

Nascido em São Paulo a 2 de setembro de 1964, casado e com um filho, Adonai S. Sant'Anna é licenciado em matemática e mestre em física pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Além disso, é doutor em filosofia pela Universidade de São Paulo (USP), onde defendeu tese sobre fundamentos da física, com distinção e louvor, sob a orientação do lógico-matemático Newton Carneiro Affonso da Costa. Com essa formação um tanto eclética, Sant'Anna se dedica prioritariamente aos fundamentos lógico-matemáticos de teorias da física. Nos Estados Unidos foi *Visiting Scholar* na Stanford University, onde trabalhou em parceria com Patrick Suppes e José Acácio de Barros no estudo de fundamentos da eletrodinâmica quântica. Professor há mais de dezessete anos, Sant'Anna atualmente leciona no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná. Tem artigos, notas e capítulos de livros publicados em veículos especializados de matemática, física, filosofia da ciência e educação, nos países: Brasil, Estados Unidos, Inglaterra, Bulgária, Itália, Holanda, Alemanha e Bélgica. Vários artigos foram publicados a convite de editores. Entre seus colegas de pesquisa, além dos nomes já citados, estão Germano Bruno Afonso (UFPR), Décio Krause (UFSC), Aurélio Sartorelli

(UFPR), Analice Gebauer Volkov (*in memorian*), Francisco Doria (USP) e Liangzhong Hu (UFPR e Universidade de Pequim, China), bem como alunos de graduação e pós-graduação. Também já atuou como consultor de editoras e órgãos de fomento à pesquisa e é revisor de *Mathematical Reviews*, em que já publicou cerca de sessenta resenhas de artigos sobre fundamentos da física.

Sobre a Capa

O holandês Mauritz Cornelis Escher (1898-1972) é provavelmente o gravurista preferido dos matemáticos.

Influenciado por conceitos tais como ordem, caos, simetria e infinito, Escher criou litogravuras e xilogravuras impressionantes e muito famosas como "A Fita de Möbius" (1963), "Subir e Descer" (1960), "Cascata" (1961) e "Preenchimento de Espaço" (1957).

A gravura que escolhemos para a capa deste livro é uma das mais conhecidas obras de Escher. Acreditamos que ela reflete muito bem determinadas circularidades de uso corrente em matemática, filosofia e ciência, tais como o uso de linguagens para descrever linguagens, o emprego de teorias para compreender teorias, a introspecção filosófica para entender a filosofia ou a definição de definição, entre outros possíveis exemplos.

Foreword

This book provides a splendid introduction to the axiomatic method. It has just the right mix of mathematics and science to be useful to a wide variety of readers. Although the general idea of beginning the analysis of a given area of mathematical or scientific knowledge with the basic axioms of the subject is as old as Euclid, many of the detailed features of the axiomatic method are not well known. Adonai S. Sant'Anna has done an excellent job of making a range of modern ideas about the axiomatic method, some of which are technical and complicated, easily accessible to those encountering these modern ideas for the first time.

After a brief historical introduction, the author provides in the second chapter the basic notions used on modern axiomatizations of any subject. The third chapter provides a quick and easy overview of the philosophically most popular example of such methods, namely the classical propositional calculus. The next chapter extends these ideas to the next most popular philosophical approach, namely, axiomatizing theories in first order or predicate logic. The fifth chapter expands these ideas to axiomatization as defining a set-theoretical predicate, the method with wide applicability to current mathematics and science.

The remaining three chapters expand on these ideas, both in terms of scientific applications and also in terms of such central philosophical concepts as that of truth.

To have covered so much ground in a relatively short book and at the same time to have kept the exposition at an appropriately elementary level is quite an accomplishment. Students and others of many different backgrounds will surely be appreciative.

Patrick Suppes, Ph.D.
Lucie Stern Professor of Philosophy, Emeritus
Stanford University

Apresentação

Este livro oferece uma esplêndida introdução ao método axiomático. Ele possui a combinação certa de matemática e ciência que será útil a uma vasta gama de leitores. Embora a idéia de começar a análise de uma determinada área do conhecimento matemático ou científico a partir dos axiomas básicos do assunto seja tão antiga quanto Euclides, muitos dos aspectos detalhados sobre o método axiomático não são bem conhecidos. Adonai S. Sant'Anna fez o excelente trabalho de tornar uma série de idéias modernas sobre o método axiomático, algumas bastante técnicas e complicadas, facilmente acessível àqueles que as encontram pela primeira vez.

Após uma introdução histórica, o autor oferece no segundo capítulo as noções básicas utilizadas em axiomatizações modernas de qualquer ramo do conhecimento. O terceiro capítulo provê uma rápida e fácil introdução ao exemplo filosoficamente mais conhecido destes métodos, a saber, o cálculo proposicional clássico. O capítulo seguinte estende essas idéias para o segundo exemplo mais popular, ou seja, a axiomatização de teorias em lógica de primeira ordem ou de predicados. O quinto capítulo expande tais noções para axiomatização no sentido de se definir predicado conjuntista, método com ampla aplicabilidade em matemática e ciência moderna. Os demais três capítulos exploram essas idéias em termos tanto de aplicações científicas quanto de conceitos filosóficos centrais, tais como o de verdade.

Ter abordado tantos assuntos em um livro relativamente pequeno e, ao mesmo tempo, ter mantido a exposição em um nível apropriadamente elementar é uma conquista. Estudantes e profissionais de muitas áreas certamente apreciarão.

Patrick Suppes, Ph.D.
Lucie Stern Professor of Philosophy, Emeritus
(Professor Emérito de Filosofia)
Stanford University

Prefácio

Este é o primeiro volume da série paradidática *Lógica Matemática* que a Editora Manole está publicando. Sendo assim, o presente volume não visa um curso introdutório de lógica, ainda que em certo sentido o faça. O principal objetivo de cada volume é oferecer uma referência rápida, de apoio em lógica, para aqueles que estudam matemática e áreas correlatas. Ainda que o estudante de matemática ou filosofia da ciência conviva com diversas teorias em sua vida acadêmica, acompanhadas de seus jargões usuais, isso não garante que o mesmo saiba o que de fato são teorias ou termos científicos como *axioma*, *definição, conjunto* e *teorema*. Por isso, a série trata de lógica para quem tem certa urgência em entender os princípios básicos da lógica e não deseja se aprofundar no assunto. Nesse sentido, se a urgência for muito grande, os capítulos 4 e 6 deste volume podem ser ignorados, sem maior prejuízo ao restante da leitura. Por outro lado, os volumes da série também pretendem ser suficientemente motivadores para mostrar um pouco da influência da lógica nos dias de hoje.

Textos paradidáticos são considerados ferramentas de apoio geralmente às disciplinas de ensino fundamental ou médio e não às de nível superior. A presente iniciativa visa, portanto, à difícil tarefa de preencher lacunas do sistema educacional brasileiro. A princípio, a série completa tratará dos seguintes tópicos: *O que é um axioma*, *O que é uma definição*, *O que é um conjunto* e *O que é um teorema*. A meta é suprir algumas necessidades acadêmicas dos estudantes de matemática, física, informática e filosofia que de algum modo estão interessados em lógica. Pessoas de índole autodidata também podem se interessar por este livro. Textos de matemática, física e filosofia da ciência comumente assumem que os significados de termos como "postulado", "tese" e "hipótese" são plenamente conhecidos pelos leitores, como se fossem noções óbvias, acima de qualquer dúvida. Mas essa é uma premissa geralmente falsa. O que é um axioma? Uma teoria pode ter infinitos axiomas? Existem teorias sem axiomas? Uma teoria pode ter axiomas que se contradizem? Um teorema pode ser um axioma? Qual a diferença entre axioma e postulado? Para que servem os axiomas em matemática? É correto o discurso muitas vezes empregado em sala de aula de que axiomas não são demonstráveis, mas teoremas o são? Um axioma pode ser falso? Todas essas e outras questões são analisadas neste texto introdutório. Como lógica matemática é um assunto extremamente complicado, a abordagem aqui é a mais simples e objetiva possível, mas sem perder o rigor que julga-se adequado para um curso de graduação. Não é fácil escrever sobre lógica em razão, principalmente, das suas inúmeras sutilezas e de seus intrincados detalhes. Mas me permito dizer que esta série de livros pode ser considerada uma primeira aproximação ao estudo da lógica matemática, ainda que todas as facetas dessa fascinante disciplina não estejam aqui espelhadas. Em outras palavras, assim como uma criança de quatro anos de idade aprende a somar, ignorando por completo os axiomas de Peano para a aritmética dos números naturais, aqui há uma introdução a certos ramos da lógica, ignorando os aspectos fundamentais de grande importância para quem se aprofunda nesses estudos, porém dispensáveis para o aluno de graduação. Este livro é destinado àqueles que pretendem aprender as noções básicas acerca do método axiomático. No entanto, é importante ressaltar que procuro, na medida do possível, estimular o leitor para estudos mais aprofundados.

Em geral, cada capítulo apresenta uma lista de exercícios resolvidos ou exemplos no decorrer do próprio texto. Esses exercícios ou exemplos servem tanto para motivar o aprofundamento nos conteúdos abordados como para fins de ilustração. No final de cada capítulo é apresentada uma lista de exercícios propostos que se dividem em duas categorias, a saber, exercícios regulares e exercícios de pesquisa. Os exercícios regulares podem ser resolvidos utilizando os conteúdos discutidos no livro. Já os exercícios de pesquisa, apesar de ainda estarem inseridos no contexto do livro, exigem que o estudante procure informações complementares em outras referências. No entanto, nenhuma sugestão bibliográfica é fornecida para que os exercícios de pesquisa sejam resolvidos. A idéia é criar um desafio que pode ser superado somente com muita consulta à biblioteca, à internet e até mesmo aos mestres. A idéia é refletir o espírito acadêmico de pesquisa já na graduação. Mais importante que fornecer respostas é oferecer questões que perturbem o espírito crítico do estudante e levem-no a buscar respostas. A "cultura" da crença cega (e confortável) em livros e professores deve ter um fim. Tem de ficar claro ao estudante que um curso de nível superior tem por meta formar pensadores. E desejo que este livro cumpra, ainda que em pequena porção, esse papel.

Sob outro enfoque, sendo este livro uma referência rápida na área da lógica, os exercícios de pesquisa se destinam àqueles que se deixaram seduzir pelo método axiomático e desejam maior aprofundamento nos estudos. Ainda que os exercícios em si não façam referência a obras na literatura que permitam resolvê-los, no final do livro há uma extensa e útil bibliografia comentada.

No final de alguns capítulos há também uma lista de sugestões para possíveis projetos de iniciação científica. Algumas delas são suficientemente ricas para renderem boas publicações em revistas especializadas. É cada vez mais freqüente o surgimento de alunos de graduação que, sob a orientação de seus professores, apresentam resultados de pesquisa em congressos internacionais e em revistas especializadas. Busca-se, portanto, uma sintonia com as atuais tendências acadêmicas no mundo. Minha postura é realista, pois está baseada na experiência acumulada ao longo dos anos com uma geração inteira de estudantes que tem acesso cada vez mais fácil a informações, principalmente com o advento da internet. As sugestões para projetos de iniciação científica têm, em certo sentido, um papel parecido com o dos exercícios de pesquisa. Mas levar a cabo qualquer projeto sugerido demanda um pouco mais de tempo e dedicação.

Todos os exercícios indicados, incluindo as sugestões para projetos de iniciação científica, devem ser entendidos como parte integrante deste livro, no que se refere ao aprendizado sobre o método axiomático. São poucos os exercícios, mas alguns deles têm a mais alta importância. Resolvê-los seriamente significa um passo essencial para uma compreensão progressiva da lógica.

A presente obra é resultado de vários anos de cursos e seminários ministrados predominantemente na Universidade Federal do Paraná (ufpr). Por isso agradeço o apoio do Departamento de Matemática no contexto dos Seminários Analice Gebauer Volkov; aos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática por disponibilizarem o ensino das disciplinas optativas sobre lógica e fundamentos; e ao Curso de Pós-Graduação em Física da ufpr, no qual ministrou-se uma disciplina optativa sobre lógica aplicada à física. Durante os últimos anos, idéias foram compartilhadas pelas pessoas que auxiliaram direta ou indiretamente na elaboração do presente livro. Desejo expressar gratidão a todas elas. Apenas para destacar alguns nomes, cito Décio Krause, Analice Gebauer Volkov, Patrick Suppes, Liang-zhong Hu, Carlos Roberto Vianna e Marcos Félix. A mais profunda gratidão aos professores Newton Carneiro Affonso da Costa e Aurélio Sartorelli pela paciência de criticar e revisar em detalhes alguns trechos das versões anteriores deste livro. Em razão do trabalho deles, este texto tem uma qualidade superior a qualquer empreendimento que eu ousasse realizar de forma isolada. Mas, evidentemente, quaisquer erros que ainda persistirem nesta primeira edição, são de inteira responsabilidade minha. Finalmente, mas não menos

importante, também agradeço a Editora Manole pela confiança depositada neste trabalho.* Críticas e sugestões são naturalmente bem-vindas e podem ser dirigidas aos endereços que aparecem na página de créditos.

Adonai S. Sant'Anna

* Agradeço também aos pacientes e cuidadosos parecerista e revisor da Editora Manole, que, com suas críticas e sugestões, ajudaram a melhorar a qualidade didática deste livro.

Notas do Autor

• Sempre que estiver escrito algo da forma "*p* se, e somente se, *q*" significa que *p* implica em *q* e *q* implica em *p*.

• Com certa freqüência, a expressão "com efeito" antecede breves demonstrações.

• Finalmente, quando escreve-se sobre variáveis x_i e x_j, sempre considera-se que $i \neq j$, o que não implica, evidentemente, que $x_i \neq x_j$.

1

Breve Histórico

Antes do século XX

Ousamos dizer que a primeira grande conquista para a sistematização da matemática foi a obra *Elementos* de Euclides de Alexandria. Euclides não se destacou como pesquisador. Não são atribuídas a ele conquistas matemáticas significativas. Os livros que compõem os *Elementos* de Euclides, escritos entre 330 e 320 a.C., trazem na verdade contribuições creditadas a Pitágoras, Hipócrates de Chios (que não deve ser confundido com o famoso médico Hipócrates de Cos) e outros. No entanto, o *método axiomático* utilizado para expor a geometria se estabeleceu por milênios, e até os dias de hoje é uma excelente ferramenta didática, apesar de que muitos educadores talvez discordem de nossa opinião. A famosa obra de Euclides tem uma estrutura lógico-dedutiva que permitiu a obtenção de centenas de resultados a partir de poucos "princípios" usualmente chamados de axiomas ou postulados. Essa técnica de exposição acabou se consagrando como uma poderosa ferramenta de sistematização para significativa parte do conhecimento científico. Exemplo disso são as célebres leis de Newton (datadas do século xvii), a partir das quais podemos deduzir, em particular, as leis de Kepler das órbitas planetárias. Outros exemplos são as leis da termodinâmica, as leis da teoria da evolução das espécies etc. Nesse sentido os termos “axioma” e “postulado” têm um significado bastante intuitivo e se referem essencialmente a princípios fundamentais a partir dos quais podemos deduzir outros princípios ditos derivados. Seria precipitado e até falso atribuir a Euclides a invenção do método axiomático. Mas sua obra é o exemplo de sistematização mais conhecido da antiga matemática grega.

Os *Elementos* são divididos em treze livros. Os seis primeiros tratam da geometria. Uma das dificuldades de Euclides era estabelecer definições. Para ele, um ponto, por exemplo, por definição, é aquilo que não tem partes. Os termos “aquilo”, “parte” e “ter parte” não eram esclarecidos no texto. Suas “definições” não eram exatamente definições no sentido do que hoje, em matemática, se entende por definição. Para alguns historiadores as “definições” de Euclides tinham a simples pretensão de oferecer uma visão intuitiva dos conceitos matemáticos. Para outros é possível que as definições de Euclides não tenham sido escritas originalmente por Euclides. Mas não queremos polemizar sobre esse assunto.

Usando conceitos fundamentais de ponto, reta e plano (bem como suas relações entre si), Euclides escreveu uma lista de cinco postulados e mais cinco “noções comuns” (ou axiomas), a partir dos quais muitos resultados poderiam ser obtidos. O primeiro postulado dizia que dois pontos permitem definir uma reta. Ou seja, os postulados eram sentenças que estabeleciam relações entre os conceitos fundamentais “definidos” por Euclides. Já as noções comuns eram referentes a “fatos evidentes” e não exclusivamente concernentes à geometria, apesar de lhe serem aplicados. Essa distinção entre postulados e axiomas era enfatizada por Aristóteles. A primeira noção comum dizia que coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si. É óbvio que essa geometria é ingênua sob o prisma da matemática contemporânea. Mesmo assim, trazia os fascinantes méritos da sistematização e da estrutura dedutiva inerente.

Os *Elementos* imperaram como a mais bem-sucedida obra de matemática de todos os tempos. Sua estrutura lógica e seu apelo pedagógico sobreviveram praticamente intatos por mais de dois mil anos. Mais de mil edições em inúmeros idiomas foram impressas em todo o mundo, um fenômeno literário superado talvez apenas pela Bíblia.

No entanto, a maravilha *Elementos* naturalmente despertou o senso crítico e a curiosidade dos matemáticos. O mais célebre problema (se podemos usar esse termo) era o quinto e último postulado de Euclides, que afirma:

> Se uma reta cortando duas retas faz os ângulos internos de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão do mesmo lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Esquematicamente é o que se segue:

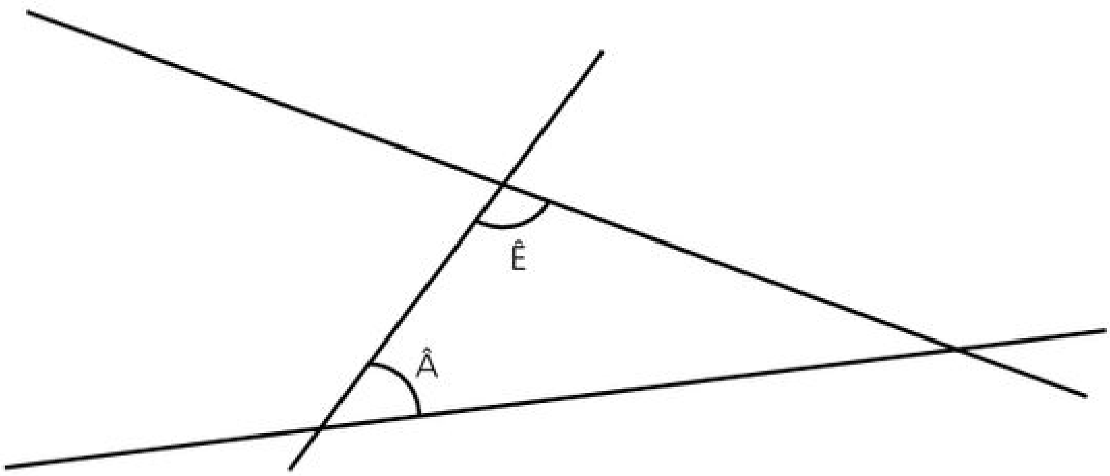


figura 1 $\hat{A} + \hat{E} < 180°$

Essa sentença é equivalente a dizer que:

Dada uma reta e um ponto que não incide sobre a mesma, existe somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo ponto dado.

Esquematicamente é o que se segue:

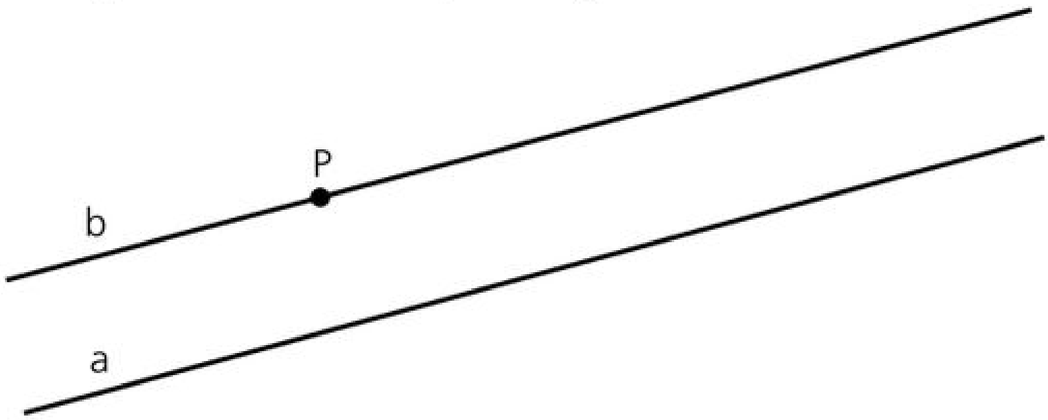


figura 2

A reta *b* que contém o ponto *P* é paralela à reta *a*, pois ambas as retas não se encontram, mesmo que sejam indefinidamente prolongadas.

Esse postulado, também chamado de *postulado das paralelas*, chamou a atenção dos matemáticos devido principalmente à sua aparente "artificialidade". Inúmeros matemáticos, durante os dois mil anos de uso dos *Elementos*, suspeitaram que o quinto postulado poderia ser deduzido a partir dos demais. Provar o postulado das paralelas seria uma interessante conquista se pensarmos no espírito do método axiomático de descrever o máximo possível a partir de um mínimo de pressupostos.

Muitas tentativas para provar o quinto postulado foram feitas por grandes nomes como Saccheri, Lambert, Legendre e Bolyai. Mas sempre resultavam em erros ou sentenças equivalentes ao postulado das paralelas. Um exemplo de sentença equivalente ao quinto postulado é a seguinte:

A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos.

Esquematicamente é o que se segue:

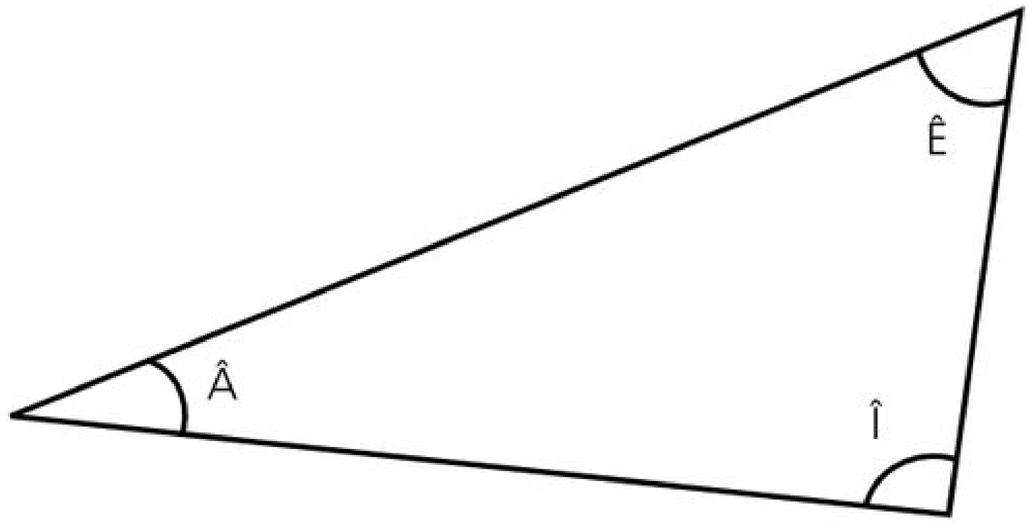


figura 3

$\hat{A} + \hat{E} + \hat{I} = 180^\circ$

Obter uma sentença equivalente ao quinto postulado não implica em prova do mesmo, pelo menos no sentido que os matemáticos buscavam. Significa apenas que o quinto postulado pode ser substituído por essa sentença equivalente e ainda assim teremos a mesma geometria de Euclides. É até um exercício interessante provar a equivalência entre as três sentenças que até aqui já apresentamos, correspondentes às figuras 1, 2 e 3. A questão, porém, era se o quinto postulado poderia ser provado a partir dos outros postulados de Euclides.

O alemão Carl Friedrich Gauss, até hoje considerado o príncipe dos matemáticos, encontrou um caminho que poderia apontar para uma solução do problema. Ele percebeu que o quinto postulado era independente dos demais postulados da geometria do matemático grego. Ou seja, os matemáticos não conseguiram provar o último postulado porque tal prova era realmente impossível de ser feita.

No entanto, Gauss não publicou seu fabuloso resultado. Ele dedicou mais atenção às suas contribuições em geometria diferencial.

Anos mais tarde, o jovem húngaro Janos Bolyai chegou ao mesmo resultado de maneira independente. Seu pai, Farkas Bolyai, matemático que tentou desencorajar o filho ao estudo do quinto postulado, após ver a descoberta do filho imediatamente mandou uma carta a Gauss, para que ele externasse sua opinião a respeito do singular resultado de Janos. Gauss respondeu dizendo que não poderia elogiar o trabalho do jovem Janos, pois isso seria um auto-elogio, tendo em vista que aquilo já fora descoberto por Gauss havia muitos anos. Janos Bolyai acabou se sentindo tão desestimulado que, por este e outros motivos, nada mais publicou a respeito de matemática em toda a sua vida. Quase que simultaneamente o russo Nicolai Lobatchevsky publicava a mesma solução de Bolyai e Gauss, também obtida de forma independente. Tal publicação, na revista *O mensageiro de Kazam*, datada de 1829, marcou o nascimento oficial da *geometria não-euclidiana*. Lobatchevsky se referia à sua descoberta como *geometria imaginária*, apesar de mais tarde ter reconhecido que não existe ramo da matemática, por mais abstrato ou "imaginário" que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Se substituirmos o quinto postulado por uma sentença que afirme:

> Dada uma reta e um ponto que não incide sobre essa reta, não existe reta paralela à reta dada que passa pelo ponto dado.

estaremos criando uma geometria que viola apenas o quinto postulado de Euclides. Essa geometria é consistente, no sentido de não conduzir a contradições, se naturalmente a geometria euclidiana for consistente. A essa consistência relativa chamamos de equiconsistência.

Também podemos substituir o quinto postulado de Euclides pela sentença:

> Dada uma reta e um ponto que não incide sobre a mesma, existem duas ou mais retas paralelas à reta dada que passam pelo ponto dado.

Nesse caso, teremos uma nova geometria que deixa de satisfazer apenas o quinto postulado (se compararmos com a geometria euclidiana), mas que é obviamente diferente da primeira geometria alternativa que exemplificamos logo acima. Essa geometria também é equiconsistente em relação à geometria euclidiana.

As conseqüências da descoberta de Lobatchevsky foram imensas:

1. A geometria imaginária representou um rompimento brutal com o paradigma (termo cunhado por Thomas Kuhn) da geometria euclidiana. Durante dois mil anos a geometria de Euclides imperou como a única possível visão de geometria, uma espécie de "verdade absoluta" geométrica, acima de qualquer questionamento. Esse rompimento de paradigma certamente incitou um senso crítico e ceticismo nos matemáticos (e, em certo grau, mesmo cientistas de outras áreas) que promoveram outros rompimentos de paradigmas. Exemplos são as álgebras não comutativas de Hamilton (rompendo o paradigma da comutatividade), as álgebras não associativas de Grassmann (rompendo o paradigma da associatividade), o estudo de espaços vetoriais de dimensão arbitrária (rompendo o paradigma do espaço de dimensão finita) e as lógicas paraconsistentes elaboradas por da Costa (rompendo o paradigma aristotélico da lógica clássica).
2. A geometria imaginária mostrou que a geometria não precisava mais estar vinculada à visão intuitiva que temos de espaço físico. O matemático pôde criar geometrias abstratas que escapassem de qualquer intuição física. A matemática caminhava para um domínio mais abstrato e mais geral, sem a necessidade de estar

diretamente comprometida com o mundo real mensurável ou o mundo real das sensações físicas.
3. A geometria imaginária contribuiu de forma significativa e pioneira para demonstrar, com o passar do tempo, que o método axiomático não era apenas uma ferramenta didática. Ele era, por seu próprio mérito, assunto de grande interesse matemático. A idéia de demonstrar a independência de postulados em um sistema axiomático demanda o uso de recursos matemáticos formais que tornam o método axiomático objeto de estudos.

Um admirável mundo novo matemático e científico nascia. William Kingdon Clifford chegou a escrever que Lobatchevsky foi o "Copérnico da geometria", devido à espantosa revolução que as idéias desse matemático russo provocaram. Essa referência a Lobatchevksy é até hoje repetida por muitos autores, sejam matemáticos ou historiadores. Eric Temple Bell vai além e diz, em seu *Men of mathematics*, (4) que Lobatchevsky foi o "Copérnico de todo o pensamento humano". Queremos ressaltar que compartilhamos o entusiasmo de Bell.

Em junho de 1899 David Hilbert publicava pela primeira vez seu clássico *Grundlagen der Geometrie*, por ocasião da inauguração do monumento em homenagem a Gauss e Weber em Göttingen. Esse livro, traduzido para diversos idiomas, inclusive para o português, estabeleceu definitivamente a geometria euclidiana como um sistema puramente formal-dedutivo e representou uma grande vitória do poder de formalização e síntese do método axiomático. Vale lembrar que Hilbert era essencialmente conhecido por seus trabalhos em álgebra e teoria dos números. Por isso o *Grundlagen* causou grande surpresa em toda a comunidade matemática. Hermann Weyl chegou a afirmar que:

> Não poderia haver uma interrupção mais completa do que a que separou o último artigo de Hilbert sobre teoria dos números de seu clássico *Grundlagen der Geometrie*.

É importante notar que Moritz Pasch, em 1882, também publicou um livro que tratava de forma sistemática a geometria euclidiana. Mas a obra de Hilbert acabou ficando bem mais famosa. Talvez porque o tratamento dado por Pasch era ainda informal, mesmo para os parâmetros matemáticos da época.

Outro marco na história do método axiomático foi instaurado pelo italiano Giuseppe Peano que, em 1889, publicou uma formulação puramente simbólica para a aritmética que resultou naquilo que hoje conhecemos como os axiomas de Peano.[1] Isso representou significativo avanço para a álgebra e a análise matemática, pois o axioma da indução (devido a Peano) serviu de base, bastante sólida, para uma série de construções nessas teorias.

A partir do século XX

Em 1900 o alemão David Hilbert apresentou no Congresso Internacional de Matemáticos de Paris uma histórica palestra contendo uma lista de 23 problemas que, em sua opinião, eram as principais questões legadas pelos matemáticos do século xix aos do século xx. Os problemas por ele enunciados serviram, e ainda servem, para direcionar relevantes trabalhos nos campos da matemática pura e da matemática aplicada. Em sua lista, é de especial interesse aqui, o sexto problema (22):

> Investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: *tratar do mesmo modo, por meio de axiomas, as ciências físicas nas quais a matemática tem importante papel: são prioritárias a teoria de probabilidades e a mecânica.*

[1] Alguns autores preferem chamar de axiomas de Dedekind-Peano, por razões históricas.

Hilbert colocava de forma muito clara que o rigor matemático poderia existir em qualquer ramo da ciência em que a matemática estivesse de alguma forma subjacente. O matemático alemão considerava que a matemática trata sempre da estrutura dedutiva de sistemas conceituais. Parte-se de alguns conceitos eventualmente vagos e intuitivos, os quais podem ou não estar associados a entidades sugeridas pela experiência. Esses conceitos primitivos estão relacionados entre si por certos princípios gerais ou axiomas, que finalmente permitem a dedução de conseqüências ou teoremas, por intermédio de uma lógica subjacente à teoria. Apesar de a visão hilbertiana se referir exclusivamente à lógica clássica, suas idéias no contexto da matemática contemporânea podem ser estendidas para lógicas diferentes da clássica, sejam elas lógicas complementares ou mesmo lógicas rivais ou heterodoxas (11).

Portanto, tais considerações motivam o estudo rigoroso, do ponto de vista axiomático, de teorias físicas, a exemplo do que já foi feito por autores tanto do século xx quanto do novo século que se inicia. Hoje já temos sistemas axiomáticos para teorias da física, da biologia, da economia e até mesmo para geociências. Alguns detalhes sobre isso podem ser vistos no livro *O conhecimento científico* (12).

O incrível é que o primeiro a usar axiomas para descrever uma teoria da física foi Arquimedes de Siracusa, dois milênios antes de Hilbert formular seu sexto problema em 1900. Em seu tratado *Sobre o equilíbrio de planos ou centros de gravidade de planos*, o matemático e engenheiro grego enunciou oito axiomas para aquilo que hoje identificamos como a *estática de Arquimedes*. Como em uma estrutura dedutiva, Arquimedes obteve diversas proposições que eram conseqüências lógicas de seus axiomas. É claro que o sexto problema de Hilbert engloba muito mais do que meramente expressar teorias físicas por meio de axiomas.

Na matemática pura existe uma preocupação, como insistiu Hilbert, no sentido de se estudar todas as teorias logicamente possíveis. É possível, por exemplo, "retirar" postulados da geometria euclidiana ou mesmo substituí-los por sentenças que não são equivalentes, de modo a obter geometrias não-euclidianas, geometrias não-paschianas (que derrogam o axioma de Pasch) etc. Analogamente é possível também desenvolver uma infinidade de teorias de conjuntos em que, por exemplo, o axioma da escolha, a hipótese generalizada do contínuo ou o axioma de Martin podem ou não ser válidos. Para Hilbert, essa riqueza de possibilidades matemáticas é aplicável também no processo de axiomatização de teorias físicas. Para uma referência sobre os problemas de Hilbert e seus desdobramentos, em especial o sexto problema, ver o livro *Mathematical developments arising from the Hilbert problems* (7).

Nos capítulos seguintes discutimos detalhes de algumas das possibilidades aqui mencionadas. O presente capítulo não fornece exercícios regulares.

Exercícios de pesquisa

1. Prove que se a sentença "dada uma reta e um ponto que não incide sobre essa reta, existe somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo ponto dado" for válida, então também é válida a afirmação de que "a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos".

2. Prove que se a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos, então, dada uma reta e um ponto que não incide sobre essa reta, existe somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo ponto dado.

3. Prove que o postulado das paralelas equivale a afirmar que duas retas paralelas são eqüidistantes.

4. Prove que se o postulado das paralelas não for satisfeito, será impossível que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer seja igual a dois ângulos retos.
5. O que diferencia a proposta de Hilbert em seu célebre sexto problema da axiomatização que Arquimedes fez para a estática?
6. Como Arquimedes definia a noção de centro de gravidade de uma figura? O que eram figuras para Arquimedes?
7. Por que o pai de Janos Bolyai desencorajou o filho a resolver o problema do quinto postulado de Euclides?

Iniciação científica

1. Faça um circunstanciado histórico das tentativas e fracassos de demonstração do quinto postulado de Euclides.
2. Discuta sobre as relações existentes entre o método axiomático e o método científico. Em outras palavras, é verdade que o método axiomático sintetiza pelo menos parte do método científico?

2

Noções Básicas

Orientações gerais

Axioma e postulado são sinônimos. Para Euclides, e mesmo para Aristóteles, eram conceitos distintos. Mas hoje em dia carece de sentido qualquer distinção.

Axiomas estão entre os ingredientes de uma *teoria axiomática*. Uma teoria axiomática, por sua vez, é um caso particular de *teoria formal*. Portanto, devemos primeiramente esclarecer o que é uma teoria formal. Tudo que aqui é dito a respeito de teorias formais está expresso em linguagem natural que, no presente caso, é o português e, portanto, informal. Técnicas de axiomatização específicas envolvendo o uso de linguagens específicas e formais são sempre situações especiais que satisfazem os critérios aqui expostos. Uma teoria formal é expressa sempre em uma linguagem não-natural, também dita artificial, na qual os conceitos de "expressão", "expressão significativa" ou "axioma" são devidamente tornados precisos.

Tudo o que for dito neste capítulo pode parecer bastante abstrato para o iniciante. E conceitos abstratos são de difícil assimilação, mesmo para a mais inteligente das pessoas. Por exemplo, a noção de "vermelho", na linguagem natural, é um conceito abstrato. É muito mais fácil pensar em objetos vermelhos do que propriamente no conceito "vermelho", dissociado de qualquer objeto ou forma. Algo parecido ocorre em matemática. A matemática comumente expressa idéias extremamente abstratas. Mas, por mais abstratas que essas idéias pareçam, cabe ao estudante cultivar a devida paciência para permitir que sejam aos poucos assimiladas. Os capítulos seguintes apresentam alguns exemplos de teorias formais, na tentativa de oferecer uma noção mais "palpável" ou "sólida" do que de fato é uma teoria formal, pelo menos do ponto de vista didático. Em suma, ainda que a matemática seja exposta em livros e artigos de modo sistemático e organizado, o processo de aprendizado não se comporta da mesma forma. Por isso os leitores devem ter paciência para ler diversas vezes os conteúdos aqui abordados e muito meditar sobre esses assuntos.

A lógica matemática, por exemplo, é repleta de sutilezas de caráter abstrato. Afirmar que a matemática é uma disciplina de fácil compreensão seria uma gigantesca leviandade. A matemática é toda formulada em linguagens artificiais com as quais a maioria das pessoas não tem familiaridade. Assim como não se pode fazer uma exegese séria da obra de Aristóteles sem o conhecimento de grego antigo, também não é possível discursar sobre idéias matemáticas sem conhecer as linguagens da matemática.

O que fazemos no presente capítulo é apresentar um esboço geral de como são formuladas teorias em matemática, apesar de que as idéias aqui discutidas também podem ser estendidas a outras disciplinas nas quais a matemática está presente, tais como física e economia.

Teoria formal

A definição que se segue é facilmente encontrada em diversos livros de lógica (18, 31).

Definição 2.1

Uma *teoria formal* T consiste dos seguintes *ingredientes*:

1. Um conjunto não vazio de símbolos, denominados os símbolos primitivos ou, simplesmente, os símbolos de T.
2. Um conjunto de expressões, as quais são simplesmente quaisquer seqüências finitas de símbolos de T.
3. Um conjunto não vazio de expressões significativas chamadas de fórmulas bem formadas de T, as quais abreviamos por wffs (do inglês *well-formed formulas*).
4. Um procedimento efetivo que permita decidir quais as expressões são fórmulas bem formadas.
5. Um conjunto de fórmulas bem formadas denominado o conjunto de axiomas de T.
6. Um conjunto não vazio e finito de relações R_1, R_2, ..., R_n entre fórmulas bem formadas.
7. Um procedimento efetivo para se decidir se uma dada m-upla ordenada de fórmulas bem formadas satisfaz ou não cada relação R_i. Tal procedimento efetivo exige que se houver seqüência de fórmulas bem formadas A_1, A_2, ... A_{m-1} tal que para uma dada relação R_i existe A_m de modo que $R_i(A_1, A_2, ..., A_{m-1}, A_m)$, ou seja, a seqüência $A_1, A_2, ..., A_{m-1}, A_m$ satisfaz a relação R_i, então a fórmula bem formada A_m é única.

O singular de wffs é wff. Alguns autores se referem às fórmulas bem formadas simplesmente como fórmulas. Quando não houver risco de confusão também adotaremos essa convenção. Seguem agora alguns comentários sobre os ingredientes de uma teoria formal, sendo que o termo "ingrediente" tem aqui um significado intuitivo.

Como tais ingredientes estão descritos em linguagem natural, fica fácil perceber que a definição de teoria formal dada acima não é, ela própria, formal. Os matemáticos reconhecem que não é possível definir tudo, assim como também não é possível ser formal em tudo. A palavra "conjunto", por exemplo, tem aqui um significado intuitivo e informal de "coleção". As palavras "seqüência" e "finito", geralmente usadas em contextos conjuntistas em matemática, também têm aqui um significado intuitivo que pode perfeitamente ser esclarecido com um bom dicionário de português. Algo semelhante ocorre com os termos "símbolo", "procedimento efetivo", "relação" e "satisfaz". O conjunto dos símbolos, por conter elementos lingüísticos, é chamado por alguns autores de *alfabeto*. Os procedimentos efetivos que citamos se referem a ferramentas de decisão, o que evidentemente é algo um tanto vago, mas que deve ser esclarecido aos poucos com os exemplos dados no livro. Já a noção de n-upla ordenada se refere a um conjunto que, em certo sentido, está previamente ordenado. Por exemplo, se a e b são fórmulas bem formadas distintas, então a 2-upla ordenada (a,b) [também dita par ordenado (a,b)] é diferente da 2-upla ordenada (b,a). É claro que novamente estamos sendo imprecisos ao utilizarmos a expressão, até aqui nova, "diferente de". Mas vamos assumir que o leitor já tem uma certa familiaridade com noções como "igualdade" e "n-upla ordenada". Afinal, é de se supor que os leitores deste livro já tenham cursado o ensino médio e, portanto, já estudaram noções de geometria analítica, disciplina que freqüentemente faz referência a pares ordenados. Obviamente não estamos estudando geometria analítica, mas de certo modo cabe a analogia. Já uma 3-upla ordenada (ou tripla ordenada) é algo da forma (a, b, c); e uma n-upla ordenada é algo da forma $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.As relações R_i são chamadas de *regras de inferência* ou *argumentos*. Se, por exemplo, temos uma m-upla ordenada $(A_1, A_2, A_3, ..., A_m)$ de fórmulas bem formadas tais que para um dado j temos

$$R_j\ (A_1, A_2, A_3, ..., A_m),$$

então dizemos que a fórmula bem formada A_m segue das fórmulas bem formadas $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$, via uso da regra (de inferência) R_j.

Também podemos dizer que A_m é conseqüência direta de A_1, A_2, ..., A_{m-1}, por virtude da regra de inferência R_j.

As regras de inferência são fundamentais no processo *lógico-dedutivo* de teorias formais. São elas que permitem a "dedução" de *teoremas*. É importante chamar a atenção para a definição da linguagem de uma teoria formal (também dita linguagem formal).

Definição 2.2

A linguagem Λ de uma teoria formal T é definida pelos mesmos ingredientes de T, exceto pelo conjunto de axiomas e pelo conjunto de regras de inferência.

Em outras palavras, os ingredientes da linguagem formal Λ de T são os itens 1, 2, 3 e 4 da definição 2.1. Essa distinção entre teoria formal e linguagem da teoria formal é da mais alta importância para abordarmos certos assuntos que são discutidos adiante.

Teoria axiomática

Definição 2.3

Uma *teoria formal axiomática* ou *teoria axiomática* T é uma teoria formal que tem o seguinte ingrediente extra:

Um procedimento efetivo para decidir quais wf f s *são axiomas.*

Uma teoria axiomática é uma teoria formal com procedimento efetivo para distinguir axiomas de outras wf f s e, intuitivamente falando, os axiomas de uma teoria axiomática constituem tão-somente elementos de uma *lista* de fórmulas bem formadas da teoria formal. Vale observar que não há qualquer exigência de consistência entre axiomas.

Isso significa que podemos ter axiomas que se contradizem entre si. Também não há exigência de que o conjunto de axiomas seja finito. Isso significa que podemos ter como axiomas *todas* as wffs de uma teoria formal, ainda que isso não seja muito útil para fins mais práticos.

Alguns autores fazem uma distinção entre *axiomáticas materiais* e *axiomáticas abstratas*. As primeiras estariam fortemente vinculadas à uma intuição, por exemplo, física; enquanto as axiomáticas abstratas deveriam se referir a sistemas lógicos que em princípio não estariam necessariamente comprometidos com nenhuma intuição. Evidentemente essa é uma classificação obscura e, portanto, questionável, mas que reflete, pelo menos em parte, uma noção hoje existente acerca de sistemas axiomáticos.

Com freqüência "teorias" consideradas científicas são formuladas de uma forma que é um misto de elementos de uma linguagem formal com linguagem natural. Podemos, a rigor, chamar essas "teorias" de *prototeorias*. Elas são na verdade um esboço de idéias ou um dado paradigma que permite orientar a mentalidade matemática para a formulação de inúmeras *teorias* axiomáticas no sentido exposto acima. Por exemplo, considere uma "prototeoria" de gravitação universal que expressa a força de atração entre corpos com massa como sendo diretamente proporcional ao produto das massas envolvidas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos com suas respectivas massas. Usualmente expressamos a força entre esses corpos como um vetor em R^3, sendo que R^3 é um conjunto de pontos que chamamos de espaço coordenado tridimensional *xyz*. Mas sabemos que existem inúmeras teorias formais de conjuntos na literatura não equivalentes entre si. São virtualmente infinitas as teorias axiomáticas de conjuntos que podem ser usadas para fundamentar a noção de espaço coordenado e, portanto, fundamentar a teoria de gravitação. Especificar qual teoria de conjuntos devemos usar para essa fundamentação significa um importante passo para definir rigorosamente uma teoria formal de gravitação universal. Essa teoria, em algum sentido difícil de explicitar, está em correspondência, pelo menos no plano intuitivo, com a visão newtoniana de gravitação, a qual não passa de uma prototeoria. Resumindo, uma prototeoria é uma classe de teorias formais que exemplificam um paradigma geralmente expresso de maneira muito intuitiva e pouco formal. Pode-se também dizer que prototeorias são *teorias não formais*, ou *teorias ingênuas* ou *teorias intuitivas*, apesar de certos filósofos da ciência talvez discordarem deste tipo de opinião. Evidentemente tais expressões podem assumir inúmeras acepções, uma vez que estamos discursando em tom bastante informal.

Isso tudo parece muito vago e pode causar certa irritação entre aqueles que insistem em chamar de teoria, por exemplo, a prototeoria de gravitação universal de Newton. Não há problema em se fazer isso, desde que se compreenda que essa "teoria" de gravitação universal pode ser formulada de infinitas maneiras não equivalentes entre si do ponto de vista matemático, que ainda assim refletem basicamente os mesmos fenômenos físicos, pelo menos em certo sentido. Vale também observar que, por abuso de linguagem, muitas vezes dizemos a expressão "axiomatizar uma teoria" no sentido de expressar na forma de teoria axiomática algum exemplo paradigmático geralmente associado a uma prototeoria ou a um "conjunto de idéias".

Vamos deixar as digressões filosóficas um pouco de lado e voltemos à perspectiva matemática das teorias axiomáticas.

Definição 2.4

Uma *demonstração* ou *prova* em uma teoria formal T é uma seqüência finita $B_1, B_2, ..., B_n$ de fórmulas bem formadas de T tal que cada B_i dessa seqüência é um axioma ou uma conseqüência direta de pelo menos alguma(s) das fórmulas bem formadas que antecedem B_i, via uso de alguma regra de inferência da teoria.

A partir disso deve ficar claro que se $B_1, B_2, ..., B_n$ é uma demonstração, então B_i necessariamente é um axioma de T.

Definição 2.5

Um *teorema* de uma teoria formal T é a última wff B de uma demonstração. Tal demonstração é dita uma *demonstração* ou *prova* de B.

Também dizemos que uma fórmula A de T é um teorema ou uma fórmula demonstrável se existe demonstração em T de modo que a fórmula A é a última de tal demonstração.

Definição 2.6

Uma teoria formal T é dita *decidível* se existe procedimento efetivo para decidir se uma dada fórmula bem formada de T é um teorema de T. Se tal procedimento efetivo não existir, então a teoria é dita *indecidível*.

A matemática é repleta de exemplos de teorias tanto decidíveis quanto indecidíveis. Se uma teoria é indecidível, isso justificaria, pelo menos em parte, porque geralmente é tão difícil fazer demonstrações. Outro motivo para justificar a dificuldade em se conseguir "demonstrar teoremas" reside no fato de que a matemática faz uso de linguagens não naturais com as quais normalmente não estamos acostumados. Discutimos um pouco mais sobre teorias decidíveis e indecidíveis no decorrer do livro.

Se B é teorema de T, denotamos isso por:

$$\vdash_T B.$$

Definição 2.7

Uma wff B é dita uma *conseqüência* em T de um conjunto Γ de wffs se, e somente se, existe uma seqüência de wffs

$$B_1, B_2, ..., B_n$$

tal que B_n é B e os demais elementos da seqüência são (1) axiomas de T ou (2) pertencentes a Γ ou (3) conseqüência direta de wffs precedentes por uso de uma regra de inferência.

A seqüência de wffs da definição acima é chamada de *prova*, *dedução* ou *demonstração* de B *a partir de* Γ. Se B é conseqüência em T de um conjunto de wffs Γ de T, denotamos isso por:

$$\Gamma \vdash_T B.$$

Os elementos de Γ são chamados de *premissas* ou *hipóteses* da prova. O caso $\varnothing \vdash_T B$ corresponde a $\vdash_T B$, sendo que $\varnothing$ denota um conjunto vazio de wffs. O caso $\{B_1, B_2, ..., B_{n-1}\} \vdash_T B$ é usualmente denotado por $B_1, B_2, ..., B_{n-1} \vdash_T B$.

Às vezes, quando não há risco de confusão, diz-se que B é um teorema demonstrado a partir das premissas de Γ. Analogamente, por abuso de notação, podemos eventualmente escrever $\Gamma \vdash B$ no lugar de $\Gamma \vdash_T B$.

Observação 2.1

Além da noção aqui dada, a palavra "demonstração" admite pelo menos mais uma acepção em matemática. Pode se referir a uma seqüência finita de sentenças expressas em linguagem natural (por exemplo, português) e complementadas com termos técnicos próprios da linguagem Λ de uma teoria formal T e que visam oferecer algum tipo de argumento (em sentido intuitivo da expressão) para uma dada declaração ou fórmula da teoria T dita teorema em T. Na prática, essa noção de "demonstração" é a mais usualmente empregada.

Três erros comuns

Já dissemos anteriormente que a definição de teoria formal nada exige acerca da consistência entre axiomas. Enfatizamos isso por ser um erro ainda comum em livros de matemática e mesmo de lógica, a afirmação de que todo sistema axiomático deve ser consistente. Se exigíssemos que não pode ocorrer uma dada fórmula como axioma tal que sua negação também é axioma, estaríamos impondo a necessidade de um símbolo de negação nas teorias formais. Isso representaria uma forte restrição nas linguagens de tais teorias. Além disso, grosseiramente falando, sabe-se hoje que não há garantias de não contradição em teorias usuais e importantes da matemática (33).

Alguns autores também afirmam que axiomas são sentenças sempre verdadeiras. Devemos observar que a noção usual de axioma em lógica não é essa. Na definição usual de teoria axiomática jamais lidamos com qualquer noção de verdade. Não há necessidade de falar em verdade. No entanto, na discussão do conceito de verdade no capítulo 6, deve ficar claro que um axioma pode ser tanto verdadeiro quanto falso, pelo menos no sentido de verdade à la Tarski.

Finalmente, outro erro comum ocorre repetidamente em livros, artigos e nas salas de aula, quando afirma-se que axiomas são sentenças aceitas sem demonstração. *Em qualquer teoria formal, todos os axiomas são teoremas, independentemente das regras de inferência adotadas.* Com efeito, considere qualquer demonstração na qual há apenas *uma* wff A. Essa wff necessariamente será um axioma, pois uma demonstração é uma seqüência de fórmulas tal que cada elemento dessa seqüência é um axioma ou conseqüência direta de fórmulas anteriores. Como em tal demonstração não há fórmulas anteriores, então A só pode ser um axioma. E sendo um teorema a última fórmula de uma demonstração, então A é também teorema.

Além disso, afirmar que um axioma deve ser aceito sem demonstração torna sem sentido as usuais questões em matemática acerca de independência de axiomas, questão essa a ser discutida em maiores detalhes no capítulo 6.

Na prática

A despeito da sistematização espelhada no estudo de fundamentos e lógica, na prática a matemática tem um perfil longe de torná-la uma atividade puramente mecânica e, desse modo, mais ou menos trivial. Além disso, nenhum dos teoremas usuais do cálculo diferencial e integral, da geometria diferencial ou da física teórica é demonstrado formalmente, levando em conta explicitamente cada detalhe, cada passo de demonstração, cada uso de regra de inferência, cada uso explícito dos elementos lingüísticos da teoria em questão. As demonstrações são, na prática, feitas de modo a convencer o profissional que deverá lê-las. Em parte esse convencimento ocorre pelo uso de procedimentos que de algum modo estão espelhados em noções mais formais como as aqui expostas. Mas em parte existem outros fatores envolvidos. Ou seja, por mais que se busque o rigor, parcialmente espelhado no formalismo, a matemática ainda é uma atividade social. E mesmo o rigor usualmente empregado em lógica está sujeito a críticas e questionamentos. A demonstração de um teorema relevante em matemática quase sempre depende de aceitação social, em parte por causa dessa falta de formalismo que ocorre na prática e em parte devido ao caráter filosófico da matemática, além de outros possíveis fatores. Também pesa o fato de que a informalidade não é, pelo menos em princípio, incompatível com o rigor. É claro que essa aceitação social não será feita pelo público leigo, mas sim por profissionais inseridos na atividade científica específica da área da matemática da qual o teorema faz parte. E essa aceitação social nem sempre ocorre de maneira rápida. Matemáticos como Georg Cantor, Évariste Galois e Hermann Grassmann somente tiveram o devido reconhecimento às suas obras após seus falecimentos. Para alguns detalhes sobre essa questão, mas sem conotação histórica, ver *A course in mathematical logic* (29). Para informações de caráter histórico ver *Men of mathematics* (4).

Ciência e, em particular, matemática, têm sido atividades profissionais e, portanto, sociais. O processo social da atividade científica teórica funciona mais ou menos assim: (1) o pesquisador tem uma idéia e a escreve na forma de artigo, nota, livro, monografia ou algo similar; (2) ele a submete para publicação em um veículo especializado, geralmente de circulação internacional; (3) em seguida dois ou mais especialistas na área irão julgar o trabalho desse pesquisador a pedido do editor do veículo especializado; (4) esses juízes darão pareceres independentes sobre o texto do pesquisador; (5) dependendo dos pareceres, o editor pode ou não aceitar o texto para publicação; (6) se o artigo for aceito, publicado, e estiver realmente correto, além de ter alguma relevância, outros pesquisadores o usarão como referência para suas pesquisas. A rigor a atividade científica não funciona de maneira tão "linear". Mas este último parágrafo pode ser aceito como uma primeira aproximação para atividades de caráter científico-teórico.

Exercícios regulares

1. Prove que se Γ é subconjunto de Δ e $\Gamma \vdash B$, então $\Delta \vdash B$. Em outras palavras, se B é demonstrável a partir de um conjunto Γ de premissas, então B continua demonstrável mesmo que acrescentemos novas premissas.

2. Sabendo que uma demonstração é uma seqüência finita de wffs, cite o que seria exemplo de uma demonstração que tem apenas *uma* wff. Cite como deveria ser uma teoria formal na qual todas as demonstrações podem ser formadas por apenas *uma* wff.

3. No capítulo 1 foi dito que o quinto postulado da geometria euclidiana não pode ser demonstrado a partir dos demais postulados da mesma teoria. Se assumirmos que esse resultado é válido mesmo em uma teoria axiomática que descreva a geometria euclidiana, o que isso quer dizer em termos mais precisos, uma vez que todo postulado em uma teoria axiomática é teorema?

Exercícios de pesquisa

1. O que é uma definição em uma teoria axiomática?
2. O que é uma relação em matemática?

Iniciação científica

Escolha alguma teoria na literatura e procure identificar se ela é uma teoria formal. Faça uma análise crítica do "nível de formalismo" dessa teoria.

3

Cálculo Proposicional Clássico

O que é lógica

Não existe definição sensata, que se dê em poucas palavras, para descrever o que é lógica. Qualquer tentativa nesse sentido resulta em poesia ou erro. A lógica matemática, ou simplesmente lógica (como iremos chamar daqui em diante), encontra hoje um gigantesco leque de assuntos que em sua totalidade descrevem o que de fato é lógica. De acordo com o *Mathematics Subject Classification* da revista *Mathematical Reviews*, o principal índice de matemática da atualidade, lógica e fundamentos da matemática se confundem como uma única disciplina. Essa disciplina aborda temas como lógica geral, teoria de modelos, computabilidade e teoria da recursão, teoria de conjuntos, teoria da demonstração e matemática construtiva, lógica algébrica e modelos não-standard. Se olharmos somente a lógica geral, nessa lista de assuntos, a mesma é ainda dividida em mais de vinte tópicos. Alguns deles são a lógica proposicional clássica, a lógica clássica de primeira ordem, a lógica de ordem superior e a teoria de tipos, sistemas dedutivos abstratos, mecanização de demonstrações e operações lógicas, lógica da crença, lógica temporal, lógica modal, lógica *fuzzy*, lógica de linguagens naturais e lógica em ciência da computação.

Alguns autores "definem" lógica como o estudo das inferências válidas ou, equivalentemente, dos argumentos válidos. Outros dizem tratar do estudo das leis do pensamento claro. Mas o parágrafo acima já deve deixar claro que essas definições, apesar de almejarem um certo conforto de poder resumir em poucas palavras todas as riquezas da lógica, estão muito longe de serem satisfatórias. Podem ser razoáveis para uma primeira aproximação, bastante informal. Mas a lógica, enquanto ciência, é bela. E sua beleza reside em sua pluralidade, em suas múltiplas facetas e em suas fronteiras bastante difíceis de alcançar. Estudar lógica é mais fácil do que tentar defini-la.

Conectivos lógicos e tabelas-verdade

Nesta seção, para fins de motivação, procuramos resolver o seguinte problema específico de lógica:

Problema 3.1

Um viajante se depara com uma bifurcação em uma dada estrada. Há um caminho para a esquerda e outro para a direita, sendo que um deles conduz ao Céu e o viajante de fato deseja ir ao Céu. Nessa bifurcação há ainda dois homens, ambos conhecedores do caminho que leva ao Céu. Um deles sempre mente e o outro sempre fala a verdade. O viajante não sabe quem é o mentiroso e quem é aquele que sempre fala a verdade. E também não sabe qual dos caminhos o levará ao Céu: esquerda ou direita? O viajante sabe que tem direito a fazer apenas *uma* pergunta de resposta sim-ou-não, a *um* dos homens, de modo a descobrir qual o caminho para o Céu. Qual a pergunta que o viajante deve fazer?

No problema acima, usamos a noção de "verdade" em acepção usual e intuitiva. Por exemplo, a afirmação "o caminho da esquerda leva ao Céu" é verdadeira se de fato o caminho da esquerda levar ao Céu. Caso contrário, diremos que a afirmação é falsa.

Para resolver esse clássico problema é necessário o conhecimento de noções básicas de lógica. A lógica que aqui precisamos se ocupa das conexões entre proposições (também chamadas de sentenças), independentemente do conteúdo em si de tais proposições. Parte dessas conexões é feita graças ao uso dos conectivos lógicos. Os conectivos lógicos mais usuais são: a negação $\neg$ (não); a conjunção $\wedge$ (e); a disjunção $\vee$ (ou); a condicional $\Rightarrow$ (se... então...); e a bicondicional $\Leftrightarrow$ (se, e somente se,). Há outros possíveis conectivos lógicos; para detalhes ver *Introduction to mathematical logic* (31).

A seqüência de símbolos $\neg p$ deve ser lida como "não p" ou "não é que p". A seqüência $p \Rightarrow q$ deve ser lida como "se p, então q". A seqüência $p \wedge q$ deve ser lida como "p e q". A seqüência $p \vee q$ deve ser lida como "p ou q". A seqüência $p \Leftrightarrow q$ deve ser lida como "p se, e somente se, q".

Os conectivos lógicos servem para conectar sentenças, as quais podemos representar por letras latinas minúsculas como p, q, r, s etc. Tais letras são também chamadas de *letras* sentenciais. Em certo sentido os conectivos lógicos atuam como operadores sobre sentenças, dando origem a outras sentenças. Toda letra sentencial é uma sentença. Mas nem toda sentença é uma letra sentencial. Exemplo disso é a sentença $\neg p$.

Eventualmente podemos usar parênteses como símbolos auxiliares, apenas para fins didáticos. Matematicamente falando, parênteses, no presente contexto, são dispensáveis, desde que adotemos certas convenções.

Esses símbolos (conectivos lógicos, letras sentenciais e parênteses) constituem o que chamamos de *símbolos sintáticos* ou *símbolos*. Tais símbolos são úteis para definir uma linguagem apropriada para o chamado *cálculo proposicional* ou *cálculo sentencial*, como preferem alguns autores. O estudo que envolve somente o uso desses símbolos sintáticos pode ser chamado de *sintática*. Essa sintática se refere à linguagem do cálculo *proposicional*, assunto que estudamos na próxima seção.

Para cada conectivo lógico podemos fazer corresponder uma tabela-verdade de valores *semânticos*, também chamados de *valores-verdade*. O termo "semântica" se refere à interpretação que damos à sintática. A diferença entre sintática e semântica será evidentemente importante em assuntos como a *metamatemática*, abordada adiante.

A semântica usual atribui os valores-verdade *V* (verdadeiro) e *F* (falso) a certas seqüências de símbolos que fazem uso dos conectivos lógicos. Afirmar que uma dada sentença não é verdadeira equivale a afirmar que a mesma é falsa. Esse uso de apenas dois valores semânticos (*V* e *F*) é geralmente chamado de *lógica bivalente*.

A seguir exibimos tabelas-verdade para os conectivos descritos acima. Essas tabelas-verdade são as usuais em lógica clássica. Mas, matematicamente falando, não há nada que as coloque em posição de privilégio em relação a outras possíveis tabelas-verdade.

A tabela-verdade usual da negação é a seguinte:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Em outras palavras, a negação de "verdadeiro" é "falso" e a negação de "falso" é "verdadeiro". Apesar de parecer bastante intuitivo, o fato é que essa atribuição semântica para a negação é arbitrária do ponto de vista matemático. Uma justificativa para essa tabela-verdade ser usualmente adotada em matemática reside simplesmente no senso comum sobre o significado da negação, ainda que lógicos-matemáticos reconheçam que uma sentença na linguagem natural ou mesmo em uma linguagem formal pode ser negada de diversas maneiras diferentes.

A tabela-verdade da conjunção é a seguinte:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou seja, se ambas as sentenças p e q são verdadeiras, então a conjunção $p \wedge q$ é verdadeira. Nos demais casos a conjunção é falsa. Do ponto de vista intuitivo novamente temos algo aparentemente sensato, apesar de novamente arbitrário do ponto de vista matemático.

A tabela-verdade da disjunção é:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Em outras palavras, a disjunção $p \vee q$ é falsa somente quando ambas as sentenças p e q são falsas. Do contrário, a disjunção é sempre verdadeira. Isso também deve estar em acordo com a própria intuição dos leitores.

Observação 3.1

Com freqüência as palavras "sim" e "não" são usadas como sinônimos de "verdadeiro" e "falso", respectivamente.

Há um clássico exemplo de anedota entre os lógicos que ilustra a tabela-verdade da disjunção: a mulher de um lógico dá à luz e um amigo desse lógico pergunta se a criança é um menino ou uma menina; o lógico prontamente responde um sonoro “sim”. Se você não conseguiu rir é porque (1) não entendeu o significado da disjunção ou (2) porque percebeu que o autor deste livro é um péssimo contador de piadas. Afinal, essa anedota é simplesmente ótima.

A tabela-verdade da condicional é um pouco menos intuitiva, pelo menos à primeira vista:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ou seja, se p é falsa, então $p \Rightarrow q$ é verdadeira, independentemente do valor semântico de q. Também observamos que $p \Rightarrow q$ é falsa somente quando p é verdadeira e q é falsa. Olhando a terceira linha da tabela, pode parecer ao iniciante que uma conclusão verdadeira pode ser obtida de uma premissa falsa. Muito cuidado tem de ser tomado com isso, pois a condicional $\Rightarrow$ não é uma inferência lógica. A condicional $\Rightarrow$ é tão-somente um conectivo lógico. Mas é um conectivo lógico certamente útil para o enunciado de regras de inferência em certas teorias formais.

Exemplo 3.1

Considere a seguinte sentença: "Se o presente livro é sobre a vida de Stanley Kubrick, então a capital do Brasil é Buenos Aires". Essa sentença pode ser escrita na forma $p \Rightarrow q$, onde p se interpreta como "o presente livro é sobre a vida de Stanley Kubrick" e q se interpreta como "a capital do Brasil é Buenos Aires". Ainda que p e q sejam falsas, no contexto dessa interpretação, a sentença $p \Rightarrow q$ é verdadeira, de acordo com a tabela-verdade da condicional.

Dado o bizarro exemplo anterior a pergunta natural dos leitores deve ser: "Como se justifica a tabela-verdade da condicional?". A maneira padrão de justificar a tabela-verdade da condicional é o fato de que na matemática usual existe um desejo, entre os matemáticos, de exigir que sentenças da forma "se p e q, então q" sejam sempre verdadeiras, independentemente dos valores-verdade de p e q. Uma vez que não há dúvidas, do ponto de vista intuitivo, sobre a tabela-verdade da conjunção, a tabela-verdade para a condicional que garante tal exigência da matemática usual é aquela que já exibimos.

A tabela-verdade da bicondicional é mais fácil:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A idéia da bicondicional é considerar que $p \Leftrightarrow q$ equivale a dizer $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

É útil neste momento estabelecer uma definição (recursiva) para sentenças.

Definição 3.1

1. Toda letra sentencial é uma sentença.
2. Se A e B são sentenças, então $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ e $(A \Leftrightarrow B)$ são também sentenças.

A definição anterior é tão-somente uma maneira mais rigorosa de definir o que se entende por sentenças, algo que apenas intuitivamente havíamos feito acima. A definição é dita *recursiva* no sentido de que permite "construir" sentenças cada vez mais complicadas, simplesmente a partir de letras sentenciais e conectivos lógicos. É claro que há uma *definição* mais rigorosa para a noção de *definição recursiva*. Mas não precisamos desse grau de detalhamento diante da proposta do livro.

Vale notar que as letras A e B, usadas na definição 3.1, constituem um recurso metalingüístico, ou seja, que escapa do domínio dos símbolos previamente dados, mas que faz parte de uma linguagem informal que empregamos para "falar" sobre a linguagem formal. Com essa definição recursiva para sentenças podemos escrever seqüências muito longas de símbolos que, por sua vez, também são sentenças.

Exemplo 3.2

Se p e q são sentenças, a seqüência de símbolos $((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$ é uma sentença. Com efeito, $(p \vee q)$ e $(p \wedge q)$ são sentenças, pela definição 3.1; logo, pela mesma definição, temos que $((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$ é uma sentença.

Exemplo 3.3

A seqüência de símbolos $(\Rightarrow p)$ não é uma sentença pois, ainda que p o seja (porque é uma letra sentencial), a definição de sentenças não contempla situações da forma $(\Rightarrow A)$, mesmo que A seja uma sentença.

Vale observar que podemos determinar a tabela-verdade para sentenças como a do exemplo 3.2, conforme ilustramos a seguir:

p	q	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Podemos, porém, refazer a tabela-verdade da mesma sentença de uma forma que por vezes pode se mostrar mais conveniente:

$((p \vee q)$	$\Rightarrow$	$(p \wedge q))$
$V\ V\ V$	V	$V\ V\ V$
$V\ V\ F$	F	$V\ F\ F$
$F\ V\ V$	F	$F\ F\ V$
$F\ F\ F$	V	$F\ F\ F$

Há quatro possíveis combinações de valores semânticos para as sentenças p e q: V e V, V e F, F e V e F e F. Para cada possibilidade, as sentenças $(p \vee q)$ e $(p \wedge q)$ têm seus próprios valores semânticos. Finalmente, o mesmo ocorre com a sentença completa

$$((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)).$$

Considere agora uma pequena alteração na sentença anterior:

$$((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)).$$

Nesse caso, nossa tabela-verdade terá 2^3 (oito) linhas. Cada linha corresponde a uma possível combinação de valores-verdade para as sentenças p, q e r (três sentenças). A tabela é a seguinte:

$((p \vee q)$	$\Rightarrow$	$(p \wedge r))$
$V\ V\ V$	V	$V\ V\ V$
$V\ V\ V$	F	$V\ F\ F$
$V\ V\ F$	V	$V\ V\ V$
$V\ V\ F$	F	$V\ F\ F$
$F\ V\ V$	F	$F\ F\ V$
$F\ V\ V$	F	$F\ F\ F$
$F\ F\ F$	V	$F\ F\ V$
$F\ F\ F$	V	$F\ F\ F$

Ou seja, olhando a quarta linha, se p, q e r são, respectivamente, V, F e F, então a sentença $((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r))$ é F (falsa).

Alguns dos conectivos dados acima podem ser definidos a partir de outros, no sentido de gerarem a mesma tabela-verdade.

Exemplo 3.4

$(p \Rightarrow q)$ equivale à sentença $(\neg (p \wedge \neg q))$, pois, olhando a tabela-verdade da condicional vemos que ela equivale a dizer que não é verdade que p é verdade e q é falso ao mesmo tempo.[2] Fica como sugestão aos leitores a elaboração das tabelas-verdade de ambas as sentenças para compará-las.

Exemplo 3.5

$(p \Leftrightarrow q)$ é equivalente à sentença $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, pois a sentença $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ significa que ambas p e q têm o mesmo valor-verdade.

Agora estamos em condições de resolver o problema do viajante que quer ir para o Céu.

A lógica que vimos até aqui não nos fornece qualquer algoritmo ou procedimento para resolver problemas como o proposto no início desta discussão sobre tabelas-verdade. Mesmo assim, com um pouco de criatividade e usando as ferramentas que aqui dispomos, já podemos resolvê-lo.

A pergunta que o viajante deve fazer, a um dos homens, é: "O caminho da esquerda leva ao Céu se, e somente se, você fala a verdade?".

Nos parágrafos seguintes justificamos nossa solução.

Essa é uma pergunta que envolve uma sentença do tipo "p se, e somente se, q", sendo que p é a sentença "O caminho da esquerda leva ao Céu" e q é a sentença "você fala a verdade". Em outras palavras, temos aqui uma bicondicional.

---

[2] O termo "ao mesmo tempo" é tão-somente uma maneira de falar, sem caráter matemático; até porque não expressamos matematicamente aqui noções de tempo.

Há apenas duas possíveis respostas à questão que propomos: "é verdade" ou "é falso", ou seja, "sim" ou "não". Mas há quatro possibilidades de combinações de valores semânticos para *p* e *q*:

Se o caminho da esquerda de fato leva ao Céu, então é verdadeiro afirmar que o caminho da esquerda leva ao Céu. Nesse caso a sentença *p* da pergunta é verdadeira. Se, porém, o homem com quem o viajante fala sempre mente então a sentença *q* é falsa. Pela tabela-verdade da bicondicional a sentença "*p* se, e somente se, *q*" é, portanto, falsa. Mas como o homem a quem o viajante se dirige sempre mente, então este homem dirá: "É verdade!".

Se o caminho da esquerda de fato leva ao Céu, então é verdadeiro afirmar que o caminho da esquerda leva ao Céu. Nesse caso a sentença *p* é verdadeira. Se, além disso, o homem a quem o viajante se dirige sempre fala a verdade então a sentença *q* é verdadeira. Pela tabela-verdade da bicondicional a sentença "*p* se, e somente se, *q*" é, portanto, verdadeira. Mas como o homem a quem o viajante se dirige jamais mente, então este homem dirá: "É verdade!".

Se o caminho da esquerda não leva ao Céu, então é falso afirmar que o caminho da esquerda leva ao Céu. Nesse caso a sentença *p* é falsa. Se, porém, o homem com quem o viajante fala sempre mente então a sentença *q* é falsa. Pela tabela-verdade da bicondicional a sentença "*p* se, e somente se, *q*" é, portanto, verdadeira. Mas como o homem a quem o viajante se dirige sempre mente, então este homem dirá: "É falso!".

Se o caminho da esquerda não leva ao Céu, então é falso afirmar que o caminho da esquerda leva ao Céu. Nesse caso a sentença *p* é falsa. Se, além disso, o homem com quem o viajante fala sempre diz a verdade então a sentença *q* é verdadeira. Pela tabela-verdade da bicondicional a sentença "*p* se, e somente se, *q*" é, portanto, falsa. Mas como o homem a quem o viajante se dirige jamais mente, então este homem dirá: "É falso!".

Observe que as primeiras duas possibilidades são as únicas que dizem que o caminho para o Céu é à esquerda. E as duas últimas possibilidades afirmam que o caminho para o Céu é à direita. Mas, coincidentemente, por virtude da questão do viajante, nas duas primeiras possibilidades a resposta que o viajante obtém é a mesma: "É verdade". E nas duas últimas possibilidades, a resposta que o viajante obtém também é constante: "É falso". Isso ocorre independentemente do homem da bifurcação ser mentiroso ou não. Portanto, se a resposta ao viajante for "É verdade" ou, equivalentemente, "Sim", então o caminho da esquerda leva ao Céu. Caso contrário, é o caminho da direita que leva ao Céu. A questão do caminho a ser seguido é resolvida, ainda que o viajante não saiba se está falando com um mentiroso ou não.

Para resolver esse problema usamos apenas dois conectivos, a saber, a bicondicional e a negação. No entanto, os demais conectivos devem ser úteis para resolver outros problemas similares.

Consideremos a seguinte situação:

Problema 3.2

Um professor pergunta a seus alunos: "Qual a melhor maneira de falar algo, com a garantia de não se falar besteira?".

Se os alunos não conhecerem lógica, provavelmente não saberão responder a essa importante e prática questão. Mas se conhecerem, saberão que para não falar besteiras, sem ficar mudo, o segredo é falar *tautologias*. Uma *tautologia* é uma sentença verdadeira, independentemente de seu conteúdo, conforme os exemplos seguintes.

Exemplo 3.6

Considere a sentença $(p \vee (\neg\ p))$. Vamos determinar sua tabela-verdade.

$(p$	$\vee$	$(\neg$	$p))$
V	V	F	V
F	V	V	F

Observe que, independentemente dos possíveis valores-verdade para p, a sentença $(p \vee (\neg\ p))$ é sempre verdadeira. Esse exemplo de tautologia se refere a frases do tipo

O Brasil está em crise, ou não.

Não importa se o Brasil está em crise ou não, a frase citada é sempre verdadeira no contexto da lógica tradicional.

Já uma *contradição* é uma sentença que é falsa, independentemente de seu conteúdo.

Exemplo 3.7

Considere a sentença:

$$(p \wedge (\neg\ p)).$$

Determinando sua tabela-verdade, vemos que:

$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$p))$
V	F	F	V
F	F	V	F

Ou seja, a sentença $(p \wedge (\neg p))$ é falsa independentemente dos valores-verdade de p. Esse exemplo de contradição se refere a frases do tipo "O conjunto x pertence e não pertence a si mesmo". Não importa se x pertence a si mesmo ou não, essa frase é sempre falsa.

Cálculo proposicional clássico

Observação 3.2

Por abuso de notação, eventualmente poderemos omitir alguns parênteses, quando não houver risco de confusão. Isso significa que sentenças como $(p \wedge (\neg p))$ podem ser escritas também como $p \wedge \neg p$.

O cálculo proposicional clássico, ou simplesmente cálculo proposicional, é usado para combinar sentenças. Seus postulados, em geral, podem ser estendidos a algo que podemos chamar de axiomas lógicos de teorias axiomáticas da matemática usual. Mas o cálculo proposicional em si pode ser descrito como um exemplo de teoria formal. Chamamos o cálculo proposicional de L.

Em L há símbolos, a saber, os conectivos lógicos $\neg$ e $\Rightarrow$, parênteses (e) e letras sentenciais (também ditas letras declarativas) A_1, A_2, A_3 etc. Em L há um procedimento efetivo para determinar quais seqüências de símbolos são significativas. Tais seqüências são as fórmulas bem formadas de L. O procedimento efetivo em questão é dado como:

1. Todas as letras sentenciais de L são fórmulas bem formadas de L.
2. Se A e B são fórmulas bem formadas de L, também são $(\neg A)$ e $(A \Rightarrow B)$.

Alguns autores acrescentam um terceiro item que afirma: "Somente as seqüências de símbolos que satisfazem os itens 1 e 2 são fórmulas bem formadas". Aqui omitimos a menção explícita a esse tipo de cláusula.

Agora já temos os elementos para a linguagem do cálculo proposicional clássico, dado axiomaticamente como:

Se A, B e C são wffs (fórmulas bem formadas) de L, então seus axiomas são:

L1 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$.

L2 $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$.

L3 $(((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Rightarrow (((\neg B) \Rightarrow A) \Rightarrow B))$.

Alguns autores se referem a L1, L2 e L3 como *esquemas de axiomas*, pois os símbolos A, B e C podem representar quaisquer fórmulas bem formadas de L. Em outras palavras, a rigor não temos apenas três, mas infinitos axiomas em L. Tais axiomas são dados pelo procedimento efetivo descrito em L1, L2 e L3. Portanto, mais que uma teoria formal, L é uma teoria axiomática.

Nossa única regra de inferência é *Modus Ponens* (mp):

mp Se tivermos A e $(A \Rightarrow B)$, então temos como conseqüência direta B.

Usando notação anteriormente sugerida, mp é uma relação ternária R_1 tal que somente triplas ordenadas da forma $(A, A \Rightarrow B, B)$ satisfazem R_1. Ou seja,

$$R_1(A, A \Rightarrow B, B)$$

é mp.

É fácil verificar que os três axiomas de L são tautologias.
Alguns comentários devem ser feitos sobre mp:

mp é uma relação ternária entre wffs. Os três elementos dessa relação ternária são A, $A \Rightarrow B$ e B. O último elemento dessa relação ternária é o que chamamos de *tese* ou *conseqüência direta* ou *conclusão* das wffs que a antecedem.
Se admitirmos que mp pode ser usada no português, podemos considerar que mp é um argumento para situações que podem ser ilustradas com o seguinte exemplo:

- wff 1: se chove, a Lua cai
- wff 2: chove
- tese: a Lua cai.

Deve ficar claro que a tese "a Lua cai" é uma conseqüência direta das afirmações "se chove, a Lua cai" e "chove".

Também é importante frisar que mp preserva tautologias. Em outras palavras, se A é uma tautologia e $(A \Rightarrow B)$ é uma tautologia, de acordo com a tabela-verdade da condicional, a conclusão B só pode ser uma tautologia. Olhando o exemplo acima, vemos que na prática a wff 1 não é verdadeira, pois não se conhece qualquer relação entre chuva e uma possível queda da Lua. No entanto, se as duas wffs que antecedem a tese acima fossem verdadeiras, a tese também seria.

É um erro pensar que todas as formas de raciocínio podem ser espelhadas no cálculo proposicional. Há inúmeros exemplos de regras de inferência que demandam o uso de outros símbolos, tais como quantificadores lógicos, assunto não contemplado aqui mas abordado adiante.

Se A é uma wff de L, então o que segue abaixo é teorema em L:

Teorema 3.1

$$A \Rightarrow A$$

Como esse é um teorema em L, para demonstrá-lo temos de usar somente os axiomas de L e mp, nada mais. Na seqüência está a demonstração. Como já dissemos, uma demonstração é uma determinada seqüência finita de wffs. Por questões didáticas associamos, a cada elemento dessa seqüência, uma breve explicação que deve ajudar no entendimento da demonstração.

Demonstração:

1. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A))$, de acordo com o axioma L1. Ou seja, fizemos uma substituição da wff B em L1, pela wff $A \Rightarrow A$. Procedimento análogo é feito nos passos a seguir.
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$, de acordo com L2.
3. $((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$, por aplicação de mp nos passos 1 e 2.
4. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A))$, novamente de acordo com L1, mas dessa vez fazendo uma substituição diferente da que fizemos no passo 1.
5. $A \Rightarrow A$, por uso de mp nos passos 3 e 4.

Formalmente, conforme vimos no capítulo 2, a demonstração é:

$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A))$,
$((A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$,
$((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$, $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A))$, $(A \Rightarrow A)$.

O teorema é a última wff da seqüência de wffs acima.

Como os axiomas são tautologias e mp preserva tautologias, então o teorema $(A \Rightarrow A)$ também é uma tautologia.

A rigor o que fizemos acima foi uma infinidade de demonstrações de uma infinidade de teoremas, sendo que o termo "infinidade" aqui tem um significado metalingüístico. Metalinguagem é a linguagem que usamos para falar a respeito da linguagem formal de L. Com efeito, como A pode ser uma wff qualquer de L e como há, em princípio, uma infinidade de wffs devido à definição recursiva que demos para wffs de L, então $(A \Rightarrow A)$ é teorema para cada possível wff A do cálculo proposicional. Em outras palavras, acabamos de enunciar e demonstrar infinitos teoremas neste pequeno livro. Esse não deixa de ser um interessante exemplo do poder de síntese da matemática, da lógica e, em particular, do método axiomático.

Observação 3.3

No cálculo proposicional L usamos somente os conectivos $\neg$ e $\Rightarrow$. Podemos definir a conjunção $A \wedge B$ como:

$$\neg(A \Rightarrow \neg B).$$

Já a disjunção $A \vee B$ pode ser definida como:

$$(\neg A) \Rightarrow B.$$

A bicondicional já foi definida quando discutimos sobre sua tabela-verdade.

Observação 3.4

Queremos chamar a atenção para o aspecto intuitivo dos axiomas de L. Uma pergunta natural seria a respeito do significado de tais axiomas. Afinal, o que eles retratam?

O que o matemático tem em mente quando enuncia axiomas tão "misteriosos"? Há um resultado muito conhecido sobre L que diz que todas as tautologias de L são teoremas em L e que todos os teoremas de L são tautologias. A prova disso é solicitada como exercício no final do capítulo. Conhecendo esse importante resultado do cálculo proposicional, deve ficar claro agora que os axiomas de L simplesmente refletem (em parceria com mp) todas as fórmulas bem formadas de L que são tautologias.

Mas como o matemático cria axiomas que desempenham um papel como o expresso na observação anterior? Essa é uma questão complicada. A criatividade ainda não foi expressa como procedimento efetivo. A criatividade ainda é algo que nos diferencia das máquinas. A escolha ou não de uma determinada fórmula como axioma pode ser justificada com argumentos simplesmente intuitivos, ancorados nos interesses do matemático. Mas cabe também ao matemático a análise das conseqüências lógicas de um dado sistema de axiomas.

Observação 3.5

Luitzen Egbertus Jan Brower, autor de importantes contribuições em matemática, especialmente em topologia, acreditava que o cálculo proposicional clássico estava errado. De acordo com Brower, para provar $A \vee B$, uma prova de A ou de B era necessária. Em virtude disso, tautologias do cálculo L como $A \vee \neg A$ não eram aceitáveis. Isso deu origem a uma escola matemática conhecida como *intuicionismo*. Os intuicionistas chegaram a desenvolver um cálculo proposicional intuicionista radicalmente diferente do clássico L, no qual wffs como $A \vee \neg A$ e $\neg\neg A \Rightarrow A$ não são teoremas. Para mais detalhes sobre o movimento intuicionista ver *Introdução aos fundamentos da matemática* (10), bem como as referências lá citadas.

Tabelas-verdade e metamatemática

Ao demonstrarmos teoremas em L, conseguimos fórmulas bem formadas que são teoremas obtidos a partir dos axiomas de L. Isso já é um montante de informações sobre o cálculo proposicional. Mas existem certas informações úteis sobre L que não conseguimos com teoremas em L. Por exemplo, grosseiramente falando, será que é possível provar que o axioma L2 é um teorema obtido apenas a partir do axioma L1? Será que L3 não é um teorema que pode ser demonstrado usando-se apenas L1 e L2 e mp? O fato de tentarmos sem sucesso tal demonstração não significa que essa demonstração não exista, ainda que levemos anos, séculos ou milênios tentando fazê-la, geração após geração de matemáticos. Pode parecer exagerada a idéia de que um problema em matemática demore milênios para ser respondido. Mas na introdução histórica do livro, já relatamos isso. O problema do quinto postulado de Euclides levou mais de dois milênios para ser resolvido.

A questão que levantamos no parágrafo anterior parece ir muito além do que a matemática de L consegue fazer por nós. Esse é um exemplo de questão *metamatemática*, pois queremos responder a uma pergunta *sobre* a teoria L. Discutir *a respeito* de teorias matemáticas é um exercício de metamatemática.

Outro exemplo de questão metamatemática que se insere no presente contexto é a seguinte: "Será que há procedimento efetivo para decidir se uma dada fórmula bem formada de L é teorema de L?". Essa última pergunta, de certo modo, generaliza as anteriores.

Sabemos que todos os axiomas de L são teoremas em L. Ou seja, se B é um axioma de L, então é também teorema de L.

Demonstração:

1. $B \Rightarrow B$, de acordo com o teorema 3.1.
2. B, pois B é um axioma de L.
3. B, por aplicação de mp em 1 e 2.

Há uma maneira bem mais rápida de demonstrar esse teorema:

Demonstração:

1. *B*, pois *B* é um axioma de *L*.

A última demonstração é um exemplo de demonstração *trivial*. Uma demonstração trivial é aquela que tem apenas *uma* wff. Já provamos anteriormente que todo axioma em uma teoria formal é teorema. Mas a novidade aqui é que apresentamos duas demonstrações diferentes para o mesmo teorema. Isso ilustra o fato de que um mesmo teorema sempre admite mais de uma demonstração.

Ou seja, todo axioma de *L* é um teorema de *L*. Mais dramático que isso, todo axioma de *L* é um teorema trivial de *L*, sendo que teorema trivial é aquele que admite demonstração trivial. O teorema anterior não respondeu a primeira questão que levantamos nesta seção. Em linguagem muito imprecisa, queremos responder se o axioma L2 pode ser provado a partir de L1 e L3, ou se L1 pode ser provado a partir de L2 e L3. Mais precisamente: será que existe demonstração não-trivial na qual L1 apareça somente na última wff da demonstração, de tal modo que L1 seja conseqüência direta de wffs anteriores por uso de *Modus Ponens*? Podemos dizer algo semelhante sobre L2 e L3? Mas a mais perturbadora questão é: será que temos ferramentas para responder a essas questões? Vale lembrar que essas questões se identificam, pelo menos em parte, com um exercício regular que sugerimos no capítulo 2.

Devemos observar que falar *sobre* uma dada teoria axiomática não é possível por meio da linguagem da própria teoria. Esse é um resultado metamatemático bem conhecido cujo significado intuitivo já deve estar claro. Porém, se não podemos usar a linguagem da própria teoria para falarmos dela, então devemos usar outra linguagem, a saber, uma metalinguagem. É nesse momento que entra a semântica. A semântica de uma teoria axiomática pode ser identificada como formada por uma linguagem que nos permite falar dessa teoria. A semântica que até aqui apresentamos para o cálculo proposicional *L* é aquela que envolve o uso de tabelas-verdade. Essa semântica, associada a um discurso informal de uma linguagem natural, nos fornece elementos de uma metalinguagem.

Em uma dada metalinguagem podemos formular metateoremas.[3] Por exemplo, se uma dada fórmula bem formada não é tautologia, então ela não é teorema em *L*, pois os axiomas de *L* são todos tautologias e mp preserva tautologias. Isso equivale a dizer que:

Metateorema 3.1

Todo teorema em *L* é uma tautologia.

A demonstração desse metateorema está esboçada no parágrafo que o antecede. Um metateorema é um teorema formulado na metalinguagem de uma dada teoria axiomática. Mas não precisamos nos restringir à metalinguagem que faz uso das tabelas-verdade que definimos para os conectivos lógicos de *L*.

Digamos que criemos tabelas-verdade diferentes para os conectivos lógicos, de tal modo que um dos valores-verdade dessas novas tabela se preserve sob *Modus Ponens*, assim como o valor verdade *V* se preserva sob mp nas tabelas-verdade usuais. Esse valor semântico que se preserva sob mp, a única regra de inferência de *L*, chamamos de 0 (zero). E toda fórmula bem formada de *L* que sempre assume o valor-verdade 0, independentemente de seu conteúdo, chamamos de *cogitabunda*, o correspondente à tautologia das tabelas-verdade usuais. Digamos ainda que os axiomas L1 e L2 sejam sempre *cogitabundas*, mas L3 não. Se isso acontecer, teremos demonstrado que L3 não pode ser teorema obtido apenas de L1 e L2, pois a única regra de inferência de *L* preserva os valores 0 de L1 e L2.

[3] A rigor, essa palavra não existe no português, no sentido de que mesmo no fabuloso dicionário Houaiss de língua portuguesa a palavra *metateorema* simplesmente não existe. Estamos apenas adotando um termo de uso corrente em lógica. Diversos outros exemplos de neologismos são empregados neste livro.

Exemplo 3.8

Considere uma semântica com três valores-verdade para os conectivos lógicos de L, a saber, 0, 1 e 2. Essa semântica chamamos de *lógica trivalente*. A semântica usual para L é uma *lógica bivalente*. Considere também as seguintes tabelas-verdade, nas quais A e B são wffs de L:

A	$\neg A$
0	2
1	0
2	1

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	1
1	1	0
2	1	1
0	2	2
1	2	2
2	2	0

A tabela-verdade para o axioma L 1 é:

A	$\Rightarrow$	$(B$	$\Rightarrow$	$A)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	0	2	2
0	0	1	0	0
1	0	1	0	1
2	0	1	2	2
0	0	2	0	0
1	0	2	1	1
2	0	2	0	2

A tabela-verdade para L 2 é

$(A$	$\Rightarrow$	$(B$	$\Rightarrow$	$C))$	$\Rightarrow$	$((A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	$C))$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2	0	0
0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0
1	2	2	0	0	0	1	2	2	0	1	0	0

(*A*	⇒	(*B*	⇒	*C*))	⇒	((*A*	⇒	*B*)	⇒	(*A*	⇒	*C*))
2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
2	1	0	1	1	0	2	0	0	1	2	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	1	0	1	0	2	1	1	0	2	1	1
0	1	2	1	1	0	0	2	2	1	0	1	1
1	0	2	1	1	0	1	2	2	0	1	0	1
2	1	2	1	1	0	2	0	2	1	2	1	1
0	2	0	2	2	0	0	0	0	2	0	2	2
1	2	0	2	2	0	1	0	0	2	1	2	2
2	0	0	2	2	0	2	0	0	0	2	0	2
0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	0	2	2
1	2	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	2
2	0	1	2	2	0	2	1	1	0	2	0	2
0	0	2	0	2	0	0	2	2	0	0	2	2
1	0	2	0	2	0	1	2	2	0	1	2	2
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2

Já a tabela-verdade para L3 é:

$(((\neg B)$	$\Rightarrow$	$(\neg A))$	$\Rightarrow$	$(((\neg B)$	$\Rightarrow$	$A)$	$\Rightarrow$	$B))$
2	0	2	0	2	0	0	0	0
2	0	0	0	2	1	1	0	0
2	1	1	0	2	0	2	0	0
0	2	2	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	2	2	1	1
1	2	2	0	1	0	0	2	2
1	0	0	2	1	0	1	2	2
1	0	1	0	1	2	2	0	2

Fica fácil perceber que L1 e L2 são *cogitabundas*, pois assumem o valor-verdade 0, não importa os valores-verdade de A, B e C. Já L3 não é *cogitabunda*, pois assume valores distintos de 0 nas linhas 4 e 8 da última tabela. Pela tabela-verdade da condicional $\Rightarrow$ percebemos que mp preserva *cogitabundisse*, pois se A e $A \Rightarrow B$ assumem ambos o valor-verdade 0, então necessariamente B também tem valor 0. Portanto, L3 não pode ser teorema obtido de L1 e L2 pelo uso de MP. Dizemos, nesse caso, que L3 é independente de L1 e L2. Em linguagem mais precisa:

> Não existe demonstração não trivial em L na qual L3 apareça apenas na última fórmula bem formada de tal demonstração e ainda seja conseqüência direta de fórmulas anteriores via mp.

Exercícios regulares

1. Faça a tabela-verdade (seguindo a lógica bivalente usual) para as seguintes sentenças, sendo que A, B e C são fórmulas bem formadas de L:

a) $A \Rightarrow (B \vee C)$

b) $A \Rightarrow (A \vee C)$

c) $\neg A \vee A$

d) $(\neg A \wedge A) \Rightarrow B$

2. Prove que $A \Rightarrow (B \vee C)$ não é teorema de L se A, B e C são wffs de L.

3. Invente uma lógica trivalente para provar a independência do axioma L1 do cálculo proposicional L.

4. Crie uma lógica trivalente para provar a independência do axioma L2 em L.

5. Invente, se possível, uma lógica bivalente para provar a independência do axioma L1 do cálculo proposicional L.

6. Invente, se possível, uma lógica bivalente para provar a independência do axioma L2 do cálculo proposicional L.

7. Invente, se possível, uma lógica bivalente para provar a independência do axioma L3 do cálculo proposicional L.

8. Prove os seguintes teoremas de L, assumindo que A é uma wff de L:

a) $\neg(\neg A \wedge A)$

b) $\neg\neg A \Rightarrow A$

c) $A \vee \neg A$

d) $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

9. Uma regra de inferência comum em lógica é *Modus Tolens*: Se temos $A \Rightarrow B$ e $\neg B$ então temos $\neg A$. Prove que *Modus Tolens* preserva tautologias. Demonstre os teoremas do exercício acima usando *Modus Tolens*.

10. O problema 3.1 do viajante, dado no texto, foi resolvido com o uso da bicondicional e da negação. Resolva o mesmo problema usando somente a conjunção e a negação.

11. Um viajante se depara com uma bifurcação em uma dada estrada. Há um caminho para a esquerda e outro para a direita, sendo que um deles conduz ao Céu e o viajante de fato deseja ir ao Céu. Nessa bifurcação há ainda três homens, ambos conhecedores do caminho que leva ao Céu. Um deles sempre mente, o outro sempre fala a verdade e um terceiro às vezes mente e às vezes fala a verdade. O viajante não sabe quem é o mentiroso, quem é aquele que sempre fala a verdade e quem é aquele que às vezes mente e às vezes não mente. E também não sabe qual dos caminhos o levará ao Céu: esquerda ou direita? O viajante sabe que tem direito a fazer apenas *duas* perguntas de resposta sim-ou-não, a apenas *um* dos homens, para *cada* pergunta, de modo a descobrir qual o caminho para o Céu. Quais as perguntas que o viajante deve fazer? Esse problema está apresentado de forma um pouco mais irônica em *Introduction to mathematical logic* (31).

12. Se o uso de parênteses fosse eliminado de L, sem qualquer outra modificação na linguagem, haveria muitas ambigüidades no cálculo proposicional. Mostre exemplos dessas ambigüidades. Crie uma convenção no cálculo proposicional L que permita a eliminação do uso de parênteses e que ainda evite ambigüidades.

Exercícios de pesquisa

1. Prove que L é uma teoria decidível, ou seja, prove que há procedimento efetivo para decidir quais wffs de L são teoremas de L. Uma sugestão para demonstrar esse metateorema é mostrar que se A é wff de L então A é teorema de L se, e somente se, A for uma tautologia. Provar que todo teorema de L é uma tautologia é algo já feito neste livro. Mas provar que toda tautologia em L é um teorema de L exige um pouco mais de esforço. Esse importante resultado foi publicado por László Kalmár em 1935.

Iniciação científica

1. Procure na literatura por axiomáticas alternativas para o cálculo proposicional e faça uma comparação entre elas. Há sistemas alternativos para o cálculo proposicional discutidos em obras de David Hilbert, Wilhelm Ackermann, John Barkley Rosser, Stephen Cole Kleene e Elliott Mendelson.

2. Crie seu próprio sistema axiomático para o cálculo proposicional. Faça uma comparação com o cálculo L. Este é um grande desafio intelectual, ótimo para o aprendizado.

4

Teorias de Primeira Ordem

Estendendo a linguagem de *L*

Considere o seguinte silogismo:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Logo, Sócrates é mortal.

A inferência aqui empregada, nesse clássico exemplo da literatura filosófica, não pode ser expressa usando simplesmente os símbolos do cálculo proposicional. É impossível representar em *L* certas declarações da linguagem natural como "alguns", "todos", "algum". Além disso, no silogismo anterior falamos de uma propriedade (ou predicado) que os homens satisfazem: ser mortal.

Coube aos matemáticos estender a linguagem do cálculo proposicional com a finalidade de dar conta de inferências que envolvem predicados e noções como "algum" e "todos". Essa extensão ainda não contempla todos os tipos de discurso da linguagem natural, mas é suficiente para permitir a formulação de muitas teorias importantes da matemática, além de ser um novo tipo de linguagem que será útil para a formulação de mais um exemplo de teoria axiomática, conhecida como *cálculo de predicados de primeira ordem Q*.

Sendo assim, o primeiro passo para falarmos formalmente sobre *Q* é listarmos os símbolos dessa teoria.

Cálculo de predicados de primeira ordem

Os símbolos de *Q* são:

1. ,, (e); ou seja, vírgula e parênteses.
2. $\neg$ e $\Rightarrow$; ou seja, conectivos lógicos análogos aos do cálculo proposicional *L*.
3. $\forall$; também conhecido como *quantificador universal*.
4. $x_1, x_2, x_3, \ldots$; símbolos estes chamados de *variáveis individuais*.
5. $a_1, a_2, a_3, \ldots$; símbolos estes chamados de *constantes individuais*.
6. $A_1^1, A_1^2, A_1^3, \ldots, A_2^1, A_2^2, A_2^3, \ldots, \ldots$; símbolos estes chamados de *letras predicativas*.
7. $f_1^1, f_1^2, f_1^3, \ldots, f_2^1, f_2^2, f_2^3, \ldots, \ldots$; símbolos estes chamados de *letras funcionais*.

Vírgulas e parênteses são chamados de *símbolos auxiliares*. Assim como parênteses podem ser eliminados do cálculo proposicional *L*, os *símbolos auxiliares* aqui também podem ser eliminados do cálculo de predicados de primeira ordem *Q*. Letras funcionais também podem comumente ser expressas por meio de letras predicativas, o que as torna igualmente dispensáveis, como vírgulas e parênteses. A razão para a existência de tantos símbolos dispensáveis reside no apelo didático que tais símbolos têm. Esse apelo didático fica evidente à medida que expomos o assunto e verifica-se como a linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem ajuda no processo de axiomatização de algumas das mais comuns teorias matemáticas.

Os conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\Leftrightarrow$ podem ser definidos de forma análoga à maneira que se faz em *L*.

Dada uma letra predicativa A_i^n , o índice *i*, que assume valores inteiros estritamente positivos, tem a função de identificar a letra predicativa. Já *n* denota o número de argumentos da letra predicativa. A igualdade pode ser expressa como um exemplo de letra predicativa binária. Se quisermos representar a igualdade como letra predicativa em *Q*, uma maneira de fazê-lo seria com o símbolo A_1^2, pois a igualdade tem dois argumentos. Dizer, por exemplo, que a variável individual x_1 é igual à variável individual x_2 no presente contexto é escrever:

$$A_1^2(x_1, x_2).$$

Observe que usamos vírgula e parênteses. O ponto no final é um recurso metalingüístico. Na prática, costuma-se denotar a sentença acima como:

$$x_1 = x_2,$$

o que é tão-somente uma abreviação. O problema evidentemente é definir de maneira clara quais as propriedades que a igualdade deve satisfazer para que a mesma corresponda ao senso comum do significado da igualdade.

Mas antes de discutirmos sobre igualdade, precisamos dar continuidade aos ingredientes de *Q*. Até agora falamos apenas dos símbolos da teoria. Precisamos ainda dizer quais são as fórmulas bem formadas da mesma. Neste momento temos algo um pouco diferente do que fizemos em *L*. Se vamos estabelecer um procedimento efetivo para definir fórmulas bem formadas, precisamos primeiramente (para fins pedagógicos) de um conceito novo que nos auxiliará, conforme vemos na definição seguinte.

Definição 4.1

Termos são recursivamente definidos como:

1. Variáveis individuais e constantes individuais são *termos*.
2. Se f_i^n é uma letra funcional e $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos, então

$$f_i^n\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

é um *termo*.

Nesse momento deve ficar claro que letras funcionais atuam como se fossem "operadores". Intuitivamente falando, as letras funcionais "atuam" sobre termos, dando origem a outros termos. A adição entre números inteiros na aritmética usual pode ser expressa como um exemplo de letra funcional binária.

Definição 4.2

Se $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e A_i^n é uma letra predicativa, então $A_i^n\,(t_1,t_2, ...,t_n)$ é dita uma *fórmula atômica*.

Definição 4.3

As *fórmulas bem formadas* do cálculo de predicados de primeira ordem Q são definidas recursivamente como:

1. Toda fórmula atômica é uma fórmula bem formada (wff).
2. Se A e B são wffs, então $\neg\,(A)$ e $(A \Rightarrow B)$ são wffs.
3. Se A é uma wff e x é uma variável individual, então $((\forall x)A)$ é uma wff.

Observação 4.1

1. Note que estamos usando os parênteses na negação de forma diferente do que fizemos no cálculo proposicional. Julgamos que aqui isso se torna conveniente. Até porque o leitor perceberá, desse modo, diferentes formas para o uso de parênteses. Também vale observar que, como anteriormente, por abuso de notação, poderemos omitir certos pares de parênteses, quando não houver risco de confusão.
2. A linguagem de Q tem os símbolos de Q e os procedimentos efetivos para identificação de termos e wffs de Q.
3. A wff $((\forall x)\ A)$ lê-se "para todo x temos A".
4. A wff A é dita o *escopo* do quantificador $\forall\ x$ em $((\forall x)A)$.
5. Dada uma wff A, uma ocorrência da variável individual x_i é dita de ocorrência *ligada* se ocorrer em $(\forall x_i)A$ ou se ocorrer em um dado escopo do quantificador universal $\forall x_i$. Caso contrário ela é dita de ocorrência *livre*. Isso naturalmente não significa que uma mesma variável individual x_i não possa ter ocorrências livres e ligadas em uma mesma wff. Por exemplo, em $A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_1)\ A_1^1\ (x_1)$, a primeira ocorrência de x_1 é livre, mas a segunda e a terceira são ligadas.
6. O *quantificador existencial* $\exists$, muito comum em matemática, pode ser definido a partir do universal. Ou seja, podemos definir

$$((\exists\ x)\ A)$$

como sendo equivalente a

$$\neg((\forall x)\neg\ (\mathrm{A})).$$

Obviamente $((\exists x)\ A)$ é uma wff na qual igualmente valem os conceitos de ocorrência livre e ligada de uma dada variável individual. A wff $((\exists x)\ A)$ deve ser lida como "existe x tal que A". Quando não há risco de confusão, podemos eventualmente omitir os parênteses externos e escrever $(\exists\ x)\ A$ ou $(\forall x)\ A$.

7. Considere uma wff A, uma variável individual x_i e um termo t. Dizemos que t é *livre* para x_i em A se, e somente se, nenhuma ocorrência livre de x_i em A está no escopo de qualquer quantificador $(\forall x_j)$, sendo x_j uma variável individual que ocorre em t. Este conceito é de interesse técnico adiante.

Exemplo 4.1

O termo $f_1^2(x_1, x_3)$ é livre para x_1 em $(\forall x_2)\ A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)$ mas não é livre para x_1 em $(\exists\ x_3)\ (\forall x_2)\ A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)$, devido ao quantificador $(\exists\ x_3)$.

É interessante motivarmos uma intuição acerca da relação entre a linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem e a linguagem natural.

Exemplo 4.2

Se quisermos "traduzir" a sentença "Tycho Brahe odeia todos aqueles que não se odeiam" para a linguagem de Q, teríamos a seguinte wff:

$$(\forall x_1)(\neg\ A_1^2(x_1, x_1) \Rightarrow A_1^2\ (a_1, x_1)).$$

Tycho Brahe é uma constante individual (uma pessoa única), representada por a_1. "Odiar" é um predicado binário, pois alguém odeia “outro” alguém. Esse predicado binário está representado pela letra predicativa A_1^2. Lendo a wff acima com essa interpretação, percebemos que está escrito:

Para todo x_1, se x_1 não odeia x_1 (ou seja, não odeia a si mesmo) então a constante individual Tycho Brahe (a_1) odeia x_1.

Observação 4.2

Note que as quatro ocorrências de x_1 na wff abaixo são ligadas:

$$(\forall x_1)(\neg A_1^2(x_1, x_1) \Rightarrow A_1^2(a_1, x_1)).$$

Note também que a wff do exemplo acima pode ser usada para inúmeras sentenças na linguagem natural, tais como “O anjo da guarda cuida daqueles que não se cuidam” ou “Se alguém é diferente de si mesmo então esse alguém é igual ao esquizofrênico da rua Morgue”.

Observação 4.3

Admitir que a linguagem de Q pode ser interpretada em uma linguagem natural (como o português), demanda uma justificativa que aqui não apresentamos. Mas não fazemos isso com qualquer propósito matemático. Nosso objetivo aqui é simplesmente didático, ou seja, oferecer uma intuição acerca da linguagem de Q.

Se A, B e C são fórmulas bem formadas de Q, então os axiomas de Q são:

Q1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

Q2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

Q3 $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.

Q4 $(\forall x_i)A(x_i) \Rightarrow A(t)$ se $A(x_i)$ é uma wff de Q e t é um termo livre para x_i em $A(x_i)$.

Q5 $(\forall x_i)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x_i)\, B)$ se x_i não ocorre livre em A.

O significado intuitivo dos três primeiros axiomas está, de certo modo, esclarecido no capítulo anterior, uma vez que Q1, Q2 e Q3 são análogos aos axiomas de L. É claro que tal significado intuitivo depende da noção de verdade em teoria da quantificação, questão abordada em capítulo posterior. Afinal, não há tabelas-verdade para teorias envolvendo quantificadores. Mas como a noção de verdade usual ainda se refere a uma atribuição de valores semânticos V e F para wffs, a intuição ainda é similar. Detalhes veremos no capítulo 6 referente à noção de verdade. Já Q4 tem a função, grosseiramente falando, de dar conta de situações do tipo:

> Se todos são matemáticos então, em particular, um determinado t também é.

O axioma Q5 é um esquema que permite lidar com situações como a seguinte:

> Se para todos os homens, o fato de existir lei, garante a segurança deles, então o fato de existir lei garante a todos os homens a segurança deles.

Os axiomas Q1, Q2 e Q3 ditam o "comportamento" dos conectivos lógicos $\neg$ e $\Rightarrow$. Já os axiomas Q4 e Q5 ditam o "comportamento" do quantificador universal e ainda estabelecem a maneira como o quantificador universal se relaciona com os conectivos lógicos $\neg$ e $\Rightarrow$. Esse é um exemplo bastante interessante de que na prática os axiomas de uma teoria axiomática têm a finalidade de estabelecer as relações entre os símbolos da teoria.

O axioma Q4 merece uma última nota de esclarecimento. Se o termo t for coincidente com x_i, então $(\forall x_i)\ A \Rightarrow A$ também é axioma de Q. Na verdade, mais deve ser dito sobre Q4 e Q5. Mas faremos isso somente quando abordarmos as questões acerca do conceito de verdade.

Finalmente, para terminarmos de definir a teoria formal Q, enunciamos agora as duas únicas regras de inferência (assumindo que A e B são fórmulas de Q):

1. *Modus Ponens* (mp), regra essa já conhecida em L e agora estendida a Q, ou seja, de A e $A \Rightarrow B$ temos B.
2. Generalização (gen): De A temos $(\forall x_i)\ A$.

Generalização é uma inferência que envolve explicitamente o quantificador universal.

Existem, na litertura, formulações alternativas para o cálculo de predicados de primeira ordem com outros conjuntos de axiomas e outros conjuntos de regras de inferência. Mas não queremos nos estender com essa discussão.

Definição 4.4

Uma *teoria de primeira ordem* na linguagem de Q é uma teoria axiomática cuja linguagem é a mesma de Q (têm os mesmos símbolos e os mesmos procedimentos efetivos para termos e wffs), cujas regras de inferência são as mesmas de Q e cujos axiomas são divididos em dois conjuntos: os *axiomas lógicos* e os *axiomas próprios*. Os axiomas lógicos são os axiomas de Q e os axiomas próprios variam de teoria para teoria, conforme o interesse do matemático que a formula. Se o conjunto de axiomas próprios for vazio, a teoria de primeira ordem em questão coincide com o *cálculo predicativo de primeira ordem*, também conhecido como *cálculo de predicados de primeira ordem*.

Observação 4.4

O cálculo de predicados de primeira ordem é uma teoria de primeira ordem.

Observação 4.5

Os axiomas lógicos de uma teoria de primeira ordem, bem como suas regras de inferência, correspondem à *lógica subjacente* à teoria. Essa lógica subjacente comumente se identifica com a chamada *lógica clássica*. Mas como existem formulações alternativas para Q, também existem formulações alternativas para a lógica clássica.

Observação 4.6

Aqui convencionamos que uma *linguagem de primeira ordem* é a linguagem de Q, com seus símbolos, termos, fórmulas bem formadas e procedimentos efetivos para termos e wffs. Eventualmente podemos enriquecer uma linguagem de primeira ordem com outros símbolos definidos como, por exemplo, o quantificador existencial.

Observação 4.7

É importante notar que o quantificador universal em teorias de primeira ordem se aplica somente sobre variáveis individuais. Se permitirmos o uso de quantificadores sobre letras predicativas não temos mais uma teoria de primeira ordem, pois quantificadores sobre predicados não constituem fórmulas bem formadas em teorias de primeira ordem.

Em termos mais intuitivos, mas menos precisos, uma teoria de primeira ordem é aquela que aplica o quantificador universal (ou existencial) somente sobre variáveis individuais, ou cujas letras predicativas se aplicam somente a variáveis individuais, ou a constantes individuais ou a termos.

Exemplo 4.3

Considere a seqüência de símbolos

$$(\forall A_1^1)\ A_1^1\ (x_1) \Leftrightarrow A_1^1\ (x_2).$$

Tal seqüência não é uma wff de Q ou mesmo de uma teoria de primeira ordem qualquer, pois o quantificador universal está "ligado" a uma letra predicativa. A seqüência anterior é uma seqüência de símbolos de uma teoria de primeira ordem mas que carece de sentido na mesma.

É como se disséssemos: "O dinossauros conseguirá conseguiu consegue preto as". Ainda que tenhamos usado palavras do português, essa seqüência de palavras carece de sentido em nosso idioma. Esse é um exemplo interessante que nos faz lembrar de situações do dia-a-dia. O fato de alguém estar usando terminologia científica para algo, não significa que esteja de fato usando alguma argumentação científica que faça sentido. Nosso exemplo é evidentemente radical. Mas a analogia não deixa de ser interessante.

Se, porém, queremos quantificar letras predicativas (ligar o quantificador universal a uma letra predicativa), algo que freqüentemente se faz necessário em matemática, podemos recorrer àquilo que os matemáticos chamam de *linguagens de ordem superior*, o que permite definir teorias de ordem superior. Uma descrição detalhada sobre *teorias de ordem superior* se encontra em *Principles of mathematical logic* (23).

Definição 4.5

Uma *teoria de primeira ordem com igualdade* é uma teoria de primeira ordem com uma letra predicativa A_1^2 tal que, para fins de abreviação, denotamos a fórmula atômica $A_1^2(x_i, x_j)$ por $x_i = x_j$ e que admite as seguintes wffs como teoremas:

ID1 $(\forall x_i)(x_i = x_i)$;

ID2 $(\forall x_i)(\forall x_j)\ (x_i = x_j \Rightarrow (A(x_i,x_i) \Rightarrow A(x_i, x_j)))$;

sendo que $A(x_i, x_i)$ é uma wff e $A(x_i, x_j)$ é obtida de $A(x_i, x_i)$ por substituição de pelo menos uma das ocorrências livres de x_i por x_j, desde que x_j seja livre para x_i em $A(x_i, x_i)$.

Observação 4.8

1. Em particular, se ID1 e ID2 forem axiomas próprios de uma teoria de primeira ordem, então a mesma é uma teoria de primeira ordem com igualdade. Com efeito, todo axioma de uma teoria formal é teorema.
2. O axioma ID1 é chamado de *reflexividade* da igualdade. Já o axioma ID2 se chama *substitutividade* da igualdade. É relativamente fácil provar que a igualdade também é transitiva e simétrica, ou seja, uma relação de equivalência. Isso é deixado como exercício de pesquisa no final do capítulo.
3. Deve ficar evidente que teorias de primeira ordem podem, ou não, ter uma letra predicativa correspondente à igualdade. As teorias da matemática usual fazem uso do conceito de igualdade. Mas existem teorias de primeira ordem sem igualdade, como a teoria de quase-conjuntos (24), que chegam a encontrar aplicações em física (26) (42).
4. No axioma ID2 há referência a uma wff $A(x_i, x_i)$. Como essa fórmula depende das letras predicativas da teoria que, por sua vez, dependem dos axiomas próprios, isso significa que cada teoria tem sua própria igualdade. O que essas teorias têm em comum é o teorema ID1 e o *esquema de teoremas* ID2.

A noção de igualdade em outros contextos da matemática e mesmo em filosofia é complicada e a literatura sobre o assunto é extensa. Mas para os propósitos deste livro nossa breve discussão deve bastar.

Um exemplo: teoria de grupos

A seguir axiomatizamos em uma linguagem de primeira ordem uma teoria muito conhecida em matemática e que encontra inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento: a teoria de grupos.

Definição 4.6

A *teoria de grupos de primeira ordem* é uma teoria de primeira ordem com igualdade que admite uma letra funcional f_1^2 e uma constante individual a_1 como símbolos. Para fins de abreviação denotamos o termo $f_1^2(x_i, x_j)$ por $x_i \mathrm{U} x_j$ e o termo a_1 por 0. Os axiomas próprios da teoria de grupos, além de ID1 e ID2, são:

G1 $(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)(x_i \mathrm{U} (x_j \mathrm{U} x_k) = (x_i \mathrm{U} x_j) \mathrm{U} x_k)$.
G2 $(\forall x_i)(0 \mathrm{U} x_i = x_i)$.
G3 $(\forall x_i)(\exists x_j)(x_j \mathrm{U} x_i = 0)$.

O axioma G1 é conhecido como o *axioma da associatividade* da operação binária U de um grupo. Em outras palavras, ele diz que o uso de parênteses na operação U de um grupo é dispensável. Outra maneira de entender o axioma da associatividade é que ele permite escrever, sem ambigüidade, termos da forma $x_1 \mathrm{U} x_2 \mathrm{U} x_3$, ainda que a letra funcional (operação) U seja binária e não ternária. O axioma G2 diz que 0 (zero) é um elemento neutro à esquerda em relação à operação U. Finalmente, o axioma G3 estabelece a existência de um simétrico à esquerda relativamente a $\sqcup$ para cada variável individual (e, portanto, para cada constante individual).

Para os leitores mais aflitos, por tanta sintática, fazemos uma breve discussão no capítulo 6 sobre possíveis semânticas para a teoria de grupos, bem como para teorias de primeira ordem em geral. Em outras palavras, no capítulo 6 oferecemos uma maneira de obter *exemplos* de grupos.

Observação 4.9

1. Alguns autores se referem às teorias de primeira ordem como *teorias elementares*. Isso significa que a teoria de grupos que axiomatizamos é também conhecida entre muitos como *teoria elementar de grupos*. É claro que a palavra "elementar" comumente tem uma conotação de algo simples, de fácil compreensão, mesmo em matemática. Mas a expressão "elementar", no sentido de se referir a uma teoria de primeira ordem, não é um conceito de tão fácil assimilação. Esperamos que o leitor concorde conosco.
2. Entre as teorias de primeira ordem, existem teorias decidíveis e indecidíveis. Entre as decidíveis há, por exemplo, a teoria elementar de grupos abelianos, que corresponde à teoria elementar de grupos acrescida do axioma próprio que diz $(\forall x_i)(\forall x_j)(x_i \sqcup x_j = x_j \sqcup x_i)$. Já um exemplo de teoria indecidível é a teoria de conjuntos nbg (von Neumann-Bernays-Gödel). Mas esses são resultados avançados, cujas demonstrações não indicamos como exercício.

Exercícios regulares

1. Traduza as seguintes sentenças para a linguagem de Q e analise se as variáveis individuais quantificadas têm ocorrências livres ou ligadas:

a) Todos os políticos são honestos.

b) Todos os políticos são desonestos.

c) Existem políticos honestos.

d) Não existem políticos desonestos.

e) Se você quer ser amado por alguém, deve amar a si mesmo.

f) Se todos no mundo fossem como você, nosso planeta já estaria destruído.

g) Todo mundo ama alguém e ninguém odeia a todos.

h) Se todas as estrelas caíssem do céu, alguma delas acertaria minha cabeça.

i) Se todas as mulheres de minha cidade resolvessem casar, eu seria casado.

2. Quantos axiomas tem a teoria de grupos, que formulamos neste capítulo? Justifique sua resposta.

3. Reescreva a teoria de grupos sem fazer uso das abreviações impostas. Ou seja, use os símbolos A_1^2, f_1^2 e a_1 no lugar de =, $\cup$ e 0.

4. Reescreva a teoria de grupos sem mencionar a constante 0. Isso serve para ilustrar o fato de que constantes individuais podem ser eliminadas em uma teoria de primeira ordem.

5. Reescreva a teoria de grupos sem a letra funcional f_1^2, ou seja, sem o símbolo U. Sugestão: use uma letra predicativa ternária A_1^3 no lugar de f_1^2.

6. Prove, na teoria de grupos, que

$$(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)(x_j = x_k \Rightarrow (x_i \mathrm{U}\ x_j = x_i \mathrm{U}\ x_k \wedge x_j \mathrm{U}\ x_i = x_k \mathrm{U}\ x_i)).$$

Sugestão: use o axioma da substitutividade da igualdade. Esse teorema corresponde a uma recíproca do cancelamento de termos iguais em ambos os lados da igualdade.

7. Prove na teoria de grupos que

$$(\forall x_i)(x_i \mathrm{U}\ 0 = x_i)$$

e

$$(\forall x_i)(\exists x_j)(x_i \mathrm{U}\ x_j = 0)$$

são teoremas. O primeiro teorema garante que 0 é também elemento neutro à direita e o segundo garante a existência de simétrico à direita.

8. Prove o seguinte teorema da teoria de grupos:

$$(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)((x_i \mathrm{U}\ x_j = x_i \mathrm{U}\ x_k) \Rightarrow x_j = x_k).$$

Esse resultado equivale à "lei do corte à esquerda". Resultado semelhante se obtém para uma "lei do corte à direita".

9. Prove que qualquer variável individual x_i é livre para x_i em qualquer fórmula bem formada de uma teoria de primeira ordem.

10. Faça uma discussão para o caso de se retirar a restrição de que x_j é livre para x_i em $A(x_i, x_i)$ na fórmula ID2 da definição 4.5.
    Sugestão: o estudo do capítulo 6 facilita a resolução desse problema.

Exercícios de pesquisa

1. Consulte um livro de álgebra e veja como estão definidos os conceitos de monóide, anel e corpo. Em seguida defina esses conceitos como teorias de primeira ordem.
2. Consulte um livro de álgebra linear e veja como está definido o conceito de espaço vetorial. Em seguida defina espaço vetorial como uma teoria de primeira ordem.
3. Prove que a igualdade em teorias de primeira ordem é simétrica e transitiva. Ou seja, usando os axiomas lógicos das teorias de primeira ordem e os axiomas ID1 e ID2 prove que:

$$(\forall x_i)(\forall x_j)(x_i = x_j \Rightarrow x_j = x_i)$$

e

$$(\forall x_i)(\forall x_j)(\forall x_k)((x_i = x_j \wedge x_j = x_k) \Rightarrow (x_i = x_k)).$$

Iniciação científica

1. Escolha, da literatura, uma teoria física já axiomatizada e tente reescrevê-la na forma de uma teoria de primeira ordem. Faça uma discussão sobre as dificuldades técnicas envolvidas. Isso serve para mostrar como essa técnica de axiomatização é bastante inconveniente para a física. Mesmo que se escolha uma teoria bastante "elementar" como o sistema mss (ver capítulo 7), ainda assim a axiomatização em linguagem de primeira ordem se afigura como inconveniente.

5

Predicados de Suppes

Idéias gerais

Um dos conceitos mais importantes no método axiomático é a noção de *estrutura* em matemática, discutida e enfatizada pelo "policéfalo" francês Nicolas Bourbaki (14). Como há uma estreita relação entre estruturas de Bourbaki e predicados de Suppes, abordamos a noção de estrutura do ponto de vista das idéias de Patrick Suppes, as quais são bem mais simplificadas do que as do matemático francês.

Patrick Suppes é um dos mais conhecidos filósofos da ciência da atualidade. Professor da Universidade de Stanford, Estados Unidos, e ganhador, em 1990, da *National Medal of Science*, prêmio anualmente entregue pelo presidente dos Estados Unidos aos mais importantes nomes da ciência estadunidense, Suppes fez contribuições relevantes em probabilidades, teoria da medição, fundamentos da física, educação, psicologia, filosofia da ciência e, mais recentemente, em pesquisas sobre o cérebro.

Em seu clássico *Introduction to logic* (44) Suppes afirma:

> Axiomatizar uma teoria é definir um predicado em termos de noções da teoria de conjuntos.

Tais predicados são conhecidos como *predicados conjuntistas* ou *predicados de Suppes*. A rigor, a noção de predicado de Suppes é bem mais técnica do que aqui expomos. Mas preferimos, no presente contexto, uma abordagem menos rigorosa a ponto de confundirmos predicados de Suppes com predicados conjuntistas. A idéia principal de Suppes é aproveitar tudo o que se sabe sobre teoria de conjuntos no momento em que se axiomatiza alguma teoria da matemática ou outro ramo do conhecimento científico que use a matemática no nível de fundamentos. Em outras palavras, a linguagem de uma teoria axiomatizada como predicado conjuntista é a mesma linguagem da teoria de conjuntos.

Existem diversas teorias de conjuntos disponíveis na literatura. A teoria axiomática de conjuntos mais usualmente empregada em matemática é a de Zermelo-Fraenkel, usualmente formulada como uma teoria de primeira ordem (46). Mas existe também a chamada "teoria ingênua" de conjuntos que, de certo modo, se identifica com aquilo que estudantes de ensino fundamental aprendem na escola sobre conjuntos. Na teoria ingênua (menos agressivamente chamada, por alguns, de *teoria intuitiva de conjuntos*) os conjuntos estão em correspondência com a intuição que temos de coleção. Em função disso existe uma relação entre os elementos de um conjunto e o conjunto propriamente dito. Tal relação chama-se "pertinência" e é denotada por $\in$. Se escrevemos que $x \in y$ queremos dizer que x pertence a y ou que x é elemento de y. A partir dessa relação de pertinência e da noção de igualdade =, define-se a igualdade entre conjuntos, bem como as noções de "conjunto unitário", "conjunto vazio", "conjunto par", "subconjunto", "complementar", "união", "interseção", "diferença entre conjuntos", "par ordenado", "produto cartesiano", "relação" e "função".

Assumimos aqui, corretamente ou não, que os leitores tem certa familiaridade com a teoria de conjuntos, ainda que seja no nível daquilo que se estuda no ensino fundamental ou médio, antes de uma faculdade. Se esse pressuposto estiver errado, cabe aos leitores procurar por bons livros sobre teoria de conjuntos, mesmo que seja a teoria intuitiva (1). A razão disso é que mesmo teorias formais de conjuntos (25) comumente têm a mesma intuição da teoria intuitiva de conjuntos. O que queremos dizer com isso é que mesmo nas teorias formais, um conjunto ainda é, intuitivamente falando, uma coleção de "objetos". Não desenvolvemos qualquer teoria de conjuntos aqui para não escaparmos dos propósitos do livro já expostos no prefácio. Detalhes sobre teorias formais de conjuntos se encontram em *O que é um conjunto* (40).

O que é um predicado conjuntista

Esta seção pressupõe pelo menos noções básicas sobre conjuntos. Tudo o que aqui for dito vale, pelo menos em princípio, para uma vasta gama de teorias de conjuntos.

Observação 5.1

Antes de prosseguirmos com nossa discussão sobre predicados conjuntistas, precisamos rapidamente recordar algumas noções básicas sobre conjuntos. Um *conjunto* é uma coleção de objetos previamente dados. Se a é elemento de um conjunto b, dizemos que a pertence a b e denotamos este fato por $a \in b$. Comumente alguns autores denotam conjuntos por letras latinas maiúsculas (A, B, ...) e seus elementos por letras latinas minúsculas (a, b, ...). Mas essa é uma notação enganosa, pois conjuntos também podem ser elementos de conjuntos. Um conjunto comumente é denotado por chaves que envolvem seus elementos. Por exemplo, o conjunto $\{a,b,c\}$ tem três elementos: a, b e c.

> O *produto cartesiano* entre os conjuntos a e b (denotado por $a \times b$) é a coleção de pares ordenados (x,y) tais que $x \in a$ (x pertence a a) e $y \in b$ (y pertence a b). Um *par ordenado* (x,y), por sua vez, é o conjunto $\{\{x\},\{x,y\}\}$ que tem como elementos o conjunto unitário (que tem um só elemento) $\{x\}$ e o conjunto $\{x,y\}$. Se $x = y$, então o conjunto $\{x,y\}$ se escreve como $\{x\}$ (ou $\{y\}$). Um par ordenado (x,y) é diferente do par ordenado (y,x), exceto quando $x = y$. Comumente pares ordenados (x,y) são denotados também por $<x,y>$. Uma relação com domínio a e co-domínio b é qualquer subconjunto do produto cartesiano $a \times b$. O *subconjunto* b de um dado conjunto a é um conjunto tal que todos os elementos de b são elementos de a. Dados os conjuntos a e b, uma *função* f com *domínio* a e co-domínio b é um subconjunto do produto cartesiano $a \times b$ tal que para todo x que pertence a a existe um único y pertencente a b de modo que $(x,y) \in f$. Assim sendo, dizemos que y é a *imagem* de x pela função f. Em outras palavras, função é um caso especial de relação. Para mais detalhes ver *Teoria intuitiva dos conjuntos* (1).

Um predicado conjuntista, usado para definir uma dada teoria, é um predicado definido na linguagem de alguma teoria de conjuntos, seja formal ou não.

É claro que a noção acima é imprecisa, intuitiva, informal. Não fica claro, na obra original de Suppes, quais predicados conjuntistas são apropriados para definir teorias. Para um tratamento mais rigoroso e mais formal do que aqui expomos, ver "On Suppes' set theoretical predicates" (14).

Exemplo 5.1

Considere o predicado P definido como

$$P(P)$$

se, e somente se

$$P = \varnothing,$$

sendo $\varnothing$ o conjunto vazio.

O predicado P está definido em termos conjuntistas, pois um dado P satisfaz P se, e somente se, P for o *conjunto* vazio. A condição de que $P = \varnothing$ pode perfeitamente ser vista como uma fórmula bem formada em uma dada teoria formal de conjuntos. Mas dificilmente a comunidade matemática ficará convencida de que o predicado P define uma teoria.

Há outra maneira, um pouco mais detalhada mas não mais precisa, de esclarecer o que é um predicado conjuntista que define uma dada "teoria". Dada uma teoria de conjuntos C, um *predicado de Suppes* para uma teoria matemática é um predicado P que se aplica a um dado conjunto P de C e é "definido" da seguinte forma:

$$P(P)$$

se, e somente se,

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \, (P = < x_1, x_2, \ldots , x_n > \wedge$$
$$\{\text{axiomas que descrevem as propriedades de } x_1, x_2, \ldots, x_n\})$$

sendo que $x_1, x_2, ..., x_n$ são termos de C ou, em particular, conjuntos. Se C admite como termos somente conjuntos, então $x_1, x_2, ..., x_n$ são conjuntos. Mas certas teorias de conjuntos admitem termos diferentes do conjunto vazio e que têm a propriedade de que nenhum termo pertence a eles. Tais termos são chamados de *átomos* ou *Urelemente*. Nesse caso as variáveis individuais x_i da teoria podem ser conjuntos ou átomos.

A visão aqui dada para teorias definidas como predicados de Suppes é evidentemente informal, não rigorosa e até grosseira. Mas o exemplo abaixo e os exemplos do capítulo 7 devem ajudar a compreender tais idéias.

Um exemplo: teoria de grupos

Um exemplo muito simples de teoria matemática é a teoria de grupos, assunto já abordado em nossa discussão sobre teorias de primeira ordem. Mas aqui o fazemos sob o enfoque dos predicados de Suppes.

Definição 5.1

$$\mathcal{G}(\mathrm{G})$$

se, e somente se,

$$\exists \mathrm{G}, \exists *, \exists e\ (\mathrm{G} = \langle G, *, e \rangle \wedge G \text{ é um conjunto não vazio} \wedge$$
$$* \text{ é uma função de } G \times G \text{ em } G \wedge e \in G \wedge$$
$$(\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \in G \wedge y \in G \wedge z \in G) \Rightarrow$$
$$x * (y * z) = (x * y) * z) \wedge (\forall x\, (x \in G) \Rightarrow (e * x = x)) \wedge$$
$$(\forall x\, (x \in G) \Rightarrow \exists y\, (y \in G) \wedge (y * x = e)))$$

sendo que $x * y$ é a imagem do par ordenado (x,y) pela função $*$.

Na matemática usual toda função é um conjunto. Portanto, não estamos contrariando o que foi dito anteriormente.

A fórmula G(G) lê-se "G é um grupo". O predicado G é o predicado conjuntista "ser um grupo". Isso significa que definimos acima, como predicado conjuntista, o conceito de grupo.

Há uma forma mais abreviada e menos formal de escrever a definição de grupo:

Definição 5.2

Um *grupo* G é uma tripla ordenada G = $<G,*, e>$ que satisfaz os seguintes axiomas:

GC1 G é um conjunto não vazio.
GC2 $*$ é uma função com domínio $G \times G$ e co-domínio G. Os pares ordenados pertencentes à função $*$ são denotados por $((x,y), x * y)$. O elemento $x * y$ de G é a imagem do par ordenado (x,y) pertencente a $G \times G$.
GC3 e é um elemento de G.
GC4 Se x, y e z são elementos de G, então $x * (y * z) = (x * y) * z$.
GC5 Se x pertence a G então $e * x = x$.
GC6 Se x pertence a G então existe $y \in G$ tal que $y * x = e$.

A pergunta natural é: qual a vantagem de se axiomatizar uma teoria via predicados de Suppes em comparação ao processo anterior de axiomatização no qual explicitamos todos os ingredientes da teoria formal? No caso da teoria de grupos, perceba que fizemos uma certa "economia de formalização" ao utilizarmos a técnica de axiomatização via predicados de Suppes, pois não mencionamos explicitamente quaisquer axiomas lógicos, nem regras de inferência. Isso ocorre porque na axiomatização via predicados conjuntistas, assumimos alguma teoria de conjuntos como já previamente conhecida. Isso significa que a linguagem da teoria axiomatizada por predicados de Suppes é a mesma da teoria de conjuntos. Também assumimos que os axiomas lógicos da teoria axiomatizada são os mesmos axiomas lógicos da teoria de conjuntos, se estivermos falando de uma teoria axiomática de conjuntos. É claro que convém ao matemático profissional *conhecer* de fato essa teoria de conjuntos que serve de fundamentação. Mas isso já ajuda a ilustrar o fato de que predicados de Suppes oferecem vantagens em relação à idéia de explicitar todos os ingredientes de uma teoria axiomática. Uma vez que fazemos uso da linguagem da teoria de conjuntos, não há necessidade de reescrever tal linguagem. É claro que predicados de Suppes admitem a possibilidade de usarmos uma linguagem não formal como a da teoria intuitiva de conjuntos. Nesse caso tudo é feito de maneira ingênua.

Na proposta original de Suppes, a idéia é fazer uso, além da linguagem de alguma teoria de conjuntos, também de conceitos da matemática clássica, tais como número real, espaço topológico, variedade etc. Isso torna a concepção precisa de predicado conjuntista mais difícil ainda de entender, pois Suppes não explicita o que ele entende por matemática clássica necessária no processo de axiomatização. Mas para uma primeira finalidade mais prática de axiomatização, sem se preocupar com detalhes quanto a fundamentos, Suppes propõe que uma coleção de exemplos deve ser suficiente para desenvolver uma intuição acerca de suas idéias de axiomatização. No capítulo 7 há mais exemplos de predicados de Suppes, com ênfase para teorias da física.

No caso particular da física há um constante uso de conceitos como espaços topológicos, estruturas algébricas, variedades diferenciáveis etc. Se tentarmos axiomatizar uma teoria física como a *relatividade geral de Einstein*, sem levarmos em conta que já conhecemos certos conceitos como o de *variedade* (o qual pode ser formulado em alguma teoria de conjuntos usual), seremos forçados a colocar tantos "pré-requisitos" para a teoria (na forma de axiomas próprios e mesmo lógicos), que chegaremos ao ponto de tornar o assunto extremamente desinteressante para o físico. O físico profissional está interessado nos axiomas "específicos" da teoria em questão. A matemática necessária para fundamentar uma teoria física freqüentemente é assumida como conhecida. Nesse sentido, o processo de axiomatização via predicados de Suppes é extremamente econômico e se identifica em muito com aquilo que se faz na prática. Para tais efeitos práticos, uma teoria de conjuntos como a de Zermelo-Fraenkel (46) afigura-se, pelo menos em princípio, como adequada para a fundamentação via predicado de Suppes para as teorias usuais da física. Mesmo que isso não ocorra, ainda há outras teorias de conjuntos disponíveis na literatura para atender aos interesses daqueles que querem dar uma fundamentação lógica sensata para a física. Essa é uma questão controversa, tendo em vista que as teorias físicas são, a rigor, proto-teorias e, portanto, bastante informais. A principal lição disso tudo é que a informalidade dos predicados de Suppes (no sentido de não explicitar todos os ingredientes de uma teoria formal) não inviabiliza o rigor. Afinal, sabendo que usamos a mesma linguagem da teoria de conjuntos, o rigor está presente, desde que a teoria de conjuntos em questão seja uma teoria formal.

Como última observação, vale notar que não podemos considerar que a "receita" de Suppes permite um método de axiomatização universal para toda e qualquer teoria matemática. As chamadas lógicas de ordem superior e a teoria de categorias são exemplos de ferramentas que permitem fundamentar a matemática (ou pelo menos alguns ramos dela) sem fazer uso de qualquer teoria de conjuntos. Mas não discutiremos maiores detalhes sobre essas alternativas. Apenas chamamos a atenção para o fato de que qualquer tentativa de visão unificada da matemática está sempre sujeita a críticas.

Exercícios regulares

1. Alguns livros de álgebra definem *monóide* como um conjunto

não vazio munido de uma operação binária associativa e com elemento neutro relativamente a essa operação. Defina o predicado conjuntista de um monóide.

2. Um grupo G = $<G, *, e>$ é dito *abeliano* se sua operação binária $*$ for comutativa, ou seja, se para elementos x e y de G, tivermos sempre que $x * y = y * x$. Defina o predicado de Suppes de um grupo abeliano.

Exercícios de pesquisa

1. Qual(is) a(s) dificuldade(s) envolvida(s) para dar uma definição precisa para predicados de Suppes?
2. Consulte um livro de álgebra e veja como estão definidos os conceitos de anel e corpo. Em seguida defina esses conceitos como predicados conjuntistas.
3. Consulte um livro de álgebra linear e veja como está definido o conceito de espaço vetorial. Em seguida defina espaço vetorial como um predicado conjuntista.
4. Consulte um livro de análise matemática e veja como está definido o conceito de corpo ordenado completo. Em seguida defina corpo ordenado completo como um predicado conjuntista.
5. Axiomatize via predicados de Suppes outras teorias matemáticas, tais como *espaço métrico*, *espaço topológico*, *estruturas de ordem parcial*, *reticulados* e *álgebra de Boole*. Procure também por axiomatizações de teorias das chamadas ciências empíricas, tais como física, economia e biologia.

Iniciação científica

1. Axiomatize a Estática de Arquimedes como um predicado de Suppes. Esse é um projeto que pode render publicação e é perfeitamente acessível a um dedicado aluno de graduação sob a orientação de um dedicado professor.

2. Axiomatize alguma teoria da matemática na forma de uma teoria de primeira ordem e em seguida axiomatize a mesma teoria na forma de um predicado conjuntista. Faça uma comparação entre as duas técnicas de axiomatização. Essa é uma proposta que dificilmente rende publicação em algum veículo especializado, mas é uma excelente maneira para amadurecer o domínio em lógica.

3. Faça um estudo sobre as relações existentes entre predicados de Suppes e a proposta bourbakista de que axiomatizar uma teoria é definir uma *espécie de estruturas*. Uma referência indispensável para este trabalho é "On Suppes' set theorical predicates" (14).

6

A Noção de Verdade

Noções intuitivas

Ainda que este capítulo trate apenas de uma parte das concepções de Tarski acerca da noção de verdade, comumente o que se segue é descrito em livros clássicos de lógica como uma teoria tarskiana de verdade. Intuitivamente falando, a idéia é considerar que uma linguagem possa ser interpretada em algum tipo de (por assim dizer) estrutura conjuntista. Não nos comprometemos aqui com noções de verdade no sentido de estabelecer alguma correspondência entre linguagem e o mundo real, físico. Isso significa que a noção de verdade aqui dada, a rigor, não se aplica às ciências empíricas. Porém, vale salientar que um tratamento matematicamente rigoroso para a noção de verdade no domínio das ciências empíricas pode ser feito e, de fato, alguns lógicos e filósofos da ciência o fazem.

Nosso principal objetivo, no presente capítulo, é tão-somente oferecer uma primeira visão acerca de uma noção de verdade que permite obter interessantes e importantes resultados metamatemáticos acerca de teorias de primeira ordem. Mas também vale observar que igualmente há concepções de verdade para teorias de ordem superior. Também procuramos responder a uma das perguntas feitas no prefácio do livro, a saber, se um axioma é sempre verdadeiro ou se o mesmo pode ser, em algum caso, falso.

Verdade tarskiana

A idéia intuitiva aqui é considerar que as noções de verdade ou falsidade de uma fórmula bem formada em uma dada linguagem formal devem ser expressas em uma linguagem diferente (uma metalinguagem) daquela que usamos para expressar a fórmula bem formada.

Definição 6.1

Uma interpretação *I* de uma linguagem de primeira ordem Λ é uma quíntupla ordenada $< D, \mathrm{A}, \mathrm{f}, \mathrm{c}, \Sigma >$ tal que:

1. *D* é um conjunto chamado de domínio de interpretação;
2. A é um conjunto de relações *n*-árias A_i^n em *D*, associadas (ou correspondentes) às letras predicativas A_i^n de Λ;
3. f é um conjunto de operações *n*-árias f_i^n em *D*, associadas (ou correspondentes) às letras funcionais f_i^n de Λ;
4. c é um conjunto de elementos fixos ou constantes em *D*, associados (ou correspondentes) às constantes individuais de Λ;
5. Σ é o conjunto de todas as seqüências de elementos de *D*.

Os termos "relação", "operação", "elemento" e "seqüência" assumem, na definição 6.1, a acepção usual da teoria de conjuntos. Se você quiser, pode recordar tais noções consultando até mesmo um livro sobre teoria intuitiva de conjuntos como, por exemplo, *Teoria intuitiva dos conjuntos* (1). Apenas para recordar, uma seqüência de elementos de *D* é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e cujo co-domínio é *D*.

Para falarmos sobre verdade no sentido de Tarski precisamos primeiramente considerar uma função *I* que, para cada seqüência $s = (s_1, s_2, ...)$ de Σ, associa termos de uma linguagem de primeira ordem Λ a elementos de um domínio de interpretação *D* tal que:

1. Se *t* é um termo de Λ, então $I(t)$ pertence a *D*;
2. Se *t* é uma variável individual x_i, então $I(t)$ é s_i;
3. Se *t* é uma constante individual de Λ, então $I(t)$ é uma constante de *D*;
4. Se $t_1, ..., t_n$ são termos de Λ, f_i^n é uma letra funcional de Λ e f_i^n é sua correspondente operação em *D*, então

$$I\ (f_i^n(t_1, ..., t_n)) = \mathrm{f}_i^n\ (I(t_1), ..., I(t_n)).$$

Ou seja, a função *I* é a "ponte" que conecta a linguagem de primeira ordem Λ com sua interpretação *I*. Intuitivamente falando, para cada *i*, $I(t)$ é o elemento de *D* obtido pela substituição de cada ocorrência de x_i em Λ pelo nome s_i, de modo que podemos fazer as operações em *D* corresponderem às letras funcionais da linguagem que interpretamos.

Agora definiremos recursivamente uma *função verdade V* que se aplica a fórmulas bem formadas de Λ e que depende da interpretação *I* de Λ, bem como da função *I*. A idéia (intuitivamente falando) é a seguinte: na interpretação *I* de Λ a função verdade *V* é definida de tal modo que, quando aplicada a uma fórmula bem formada de Λ e tiver imagem 1, dizemos que essa fórmula bem formada é verdadeira em *I*; se, porém, a imagem dessa fórmula bem formada pela função *V* for 0, dizemos que a mesma é falsa em *I*. É conveniente considerar que o co-domínio da função *V* é o conjunto {0,1}, ou seja, se a imagem de uma dada fórmula não é 1, então é 0 e vice-versa.

Definição 6.2

1. Se $t_1, ..., t_n$ são termos de Λ, A_i^n é uma letra predicativa de Λ e A_i^n é sua correspondente relação n-ária em D então, para uma dada seqüência $s = (s_1, s_2, ...)$ de Σ,

$$V(A_i^n\ (t_1, ..., t_n)) = 1$$

se, e somente se,

$$A_i^n(I\ (t_1), ..., I(t_n)).$$

Caso contrário, $V\ (A_i^n\ (t_1, ..., t_n)) = 0$

2. Se A é uma fórmula bem formada de Λ, então

$$V(\neg\ A) = 1$$

se, e somente se,

$$V(A) = 0.$$

3. Se A e B são fórmulas bem formadas de Λ, então

$$V(A \Rightarrow B) = 1$$

se, e somente se,

$$V(A) = 0 \text{ ou } V(B) = 1.$$

4. Se A é uma fórmula bem formada de Λ e x_i é uma variável individual de Λ, então

$$V((\forall x_i)\ A) = 1$$

se, e somente se, para todo elemento d do domínio de interpretação D temos que

$$V'(A) = 1,$$

sendo que V' é uma função que em tudo coincide com V, exceto pelo fato de que se refere a uma seqüência s' obtida a partir da seqüência s via substituição de s_i por d.

Observação 6.1

Em outras palavras, costuma-se dizer que a seqüência s da definição 6.2 *satisfaz* as wffs sobre as quais aplicamos a função V. Em particular, no último item de tal definição simplesmente afirmamos que uma seqüência $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ...)$ satisfaz a wff $(\forall x_i)\ A$ se, e somente se, para cada d pertencente a D temos que a seqüência $s' = (s_1, s_2, ..., d, ...)$ satisfaz A, sendo que s' foi obtida a partir de s por uma substituição de s_i por d.

Observação 6.2

Podemos facilmente estender a definição da função V para wffs que envolvem o quantificador existencial. Deixamos isso como exercício para você.

Observação 6.3

Se uma dada wff A de uma linguagem de primeira ordem Λ é verdadeira em alguma interpretação I, ou seja, $V(A) = 1$ para todos os elementos de Σ, conforme a definição acima, denotamos esse fato por

$$\models_I A$$

ou seja, *A* é verdadeira em *I*.

Também dizemos que *A* é satisfeita em *I*.

Observação 6.4

Uma dada fórmula bem formada em uma linguagem de primeira ordem Λ pode ser verdadeira em uma dada interpretação, mas falsa em outra. Portanto, é um erro afirmar (apesar de ser um erro muito comum) que um axioma de uma dada teoria formal é uma sentença sempre verdadeira. Se a teoria formal for uma teoria de primeira ordem e se estivermos falando de verdade no sentido de Tarski, um dado axioma pode ser verdadeiro ou falso em uma dada interpretação da linguagem da teoria em questão. Apresentamos mais detalhes sobre isso no momento em que discutimos sobre independência de axiomas de uma dada teoria de primeira ordem, com ilustração no exemplo 6.5.

Definição 6.3

Se existem interpretação *I* de uma linguagem de primeira ordem Λ e função *I* tais que, para todos os elementos de Σ, todas as fórmulas bem formadas de um conjunto Γ de fórmulas têm imagem 1 pela função *V*, dizemos que a interpretação *I* da linguagem Λ é um *modelo* do conjunto Γ de fórmulas.

A definição a seguir, em certo sentido, é um caso particular da definição 6.3.

Definição 6.4

Um modelo de uma teoria de primeira ordem *T* é uma interpretação para a linguagem Λ de *T* na qual todos os axiomas de *T* são verdadeiros.

Metateorema 6.1

Se *I* é modelo de *T*, então todos os teoremas de *T* são verdadeiros em *I*.

A demonstração desse metateorema fica como opção para os leitores. Basta mostrar que, sendo os axiomas de *T* verdadeiros, se as regras de inferência mp e gen preservarem o valor 1, então todos os teoremas de *T* são verdadeiros. Demanda um certo esforço fazer essa demonstração, a qual se encontra melhor esboçada em *Introduction to mathematical logic* (31).

Definição 6.5

Uma teoria de primeira ordem *T* é dita *semanticamente consistente* se, e somente se, admite modelo.

Exemplo 6.1

A teoria de grupos, formulada como teoria de primeira ordem, é semanticamente consistente pois admite modelo. Com efeito, um modelo para a teoria de grupos é a interpretação na qual o domínio de interpretação é o conjunto *Z* dos números inteiros, a constante 0 está em correspondência com o 0 (zero) dos inteiros e a letra funcional binária $\cup$ está em correspondência com a adição usual dos inteiros. Pode-se facilmente verificar que todos os axiomas da teoria de grupos, nessa interpretação,

> são verdadeiros, desde que a letra predicativa = da linguagem da teoria de grupos esteja em correspondência com a igualdade usual entre inteiros. Alguns autores costumam dizer que um grupo é um modelo da teoria de grupos de primeira ordem. Isso é importante, pois viabiliza definições importantes como a noção usual de subgrupo.

Estender essa noção de verdade em teorias de primeira ordem para predicados de Suppes é possível no sentido de que a intuição é a mesma. A rigor o processo não é tão simples assim, mas a concepção intuitiva não muda. Se, por outro lado, um dado predicado conjuntista estiver fundamentado em uma teoria intuitiva (ingênua) de conjuntos, qualquer teoria de verdade será igualmente intuitiva (ingênua), pois na teoria intuitiva de conjuntos não há uma noção clara de fórmula bem formada e nem de axiomas. Omitimos os detalhes, que, por sinal, são bastante complicados.

Um pouco de metamatemática

Metamatemática, intuitivamente falando, é a matemática da matemática. É a matemática que usamos para falar sobre teorias formais. Os chamados metateoremas são teoremas formulados na linguagem da metamatemática.

Mostramos aqui alguns metateoremas sobre teorias de primeira ordem obtidos com a ajuda do conceito de verdade de Tarski.

Metateorema 6.2

> Os axiomas lógicos de uma teoria de primeira ordem T são verdadeiros em qualquer interpretação I de T.

A demonstração deste último metateorema deve levar em conta que qualquer interpretação I de T é feita no âmbito da teoria de conjuntos. A demonstração, um tanto trabalhosa (aqui omitimos), conduz a um resultado bastante intuitivo, conforme o que se apresenta no restante deste capítulo.

Observação 6.5

Podemos discutir agora um pouco mais sobre a intuição do axioma Q4 no cálculo predicativo de primeira ordem Q. Digamos que Q4 fosse escrito simplesmente da seguinte forma:

$$(\forall x_i)A(x_i) \Rightarrow A(t) \text{ se } A(x_i) \text{ é uma wff de } Q,$$

ou seja, sem a restrição de que t é um termo livre para x_i em $A(x_i)$. Nesse caso, poderíamos substituir $A(x_i)$ por $\neg(\forall x_j)A_1^2(x_i, x_j)$ e t por x_j, o que significa que t não é livre para x_i em $A(x_i)$. Assim temos

$$(\forall x_i)(\neg(\forall x_j)A_1^2(x_i, x_j)) \Rightarrow \neg(\forall x_j)A_1^2(x_j, x_j). \qquad (6.1)$$

Se exibirmos uma interpretação I com um domínio de interpretação D coincidente com o conjunto dos números naturais e na qual A_1^2 esteja em correspondência com a igualdade entre naturais, então percebemos que

$$(\forall x_i)(\neg(\forall x_j)A_1^2(x_i, x_j))$$

é verdadeira em I,

$$\neg(\forall x_j)A_1^2(x_j, x_j)$$

é falsa em I e, portanto, pelo item 3 da definição 6.2, a wff 6.1 é falsa. Como, intuitivamente falando, queremos que os axiomas lógicos de uma teoria de primeira ordem sejam verdadeiros em qualquer interpretação I, esse resultado é bastante indesejável. Os axiomas próprios podem ser verdadeiros ou falsos, mas os lógicos devem ser verdadeiros em qualquer interpretação.

Discussão análoga pode ser feita a respeito do axioma Q5, o que deixamos como exercício.

Definição 6.6

Uma fórmula bem formada A de uma linguagem Λ é dita *logicamente válida* se, e somente se, A é verdadeira para toda interpretação I de Λ.

Exemplo 6.2

A fórmula bem formada $(\forall x_i)A(x_i) \Rightarrow A(t)$ é logicamente válida se t for um termo livre para x_i em $A(x_i)$. Com efeito, a wff em questão é um dos axiomas lógicos de uma teoria de primeira ordem.

Exemplo 6.3

A fórmula bem formada $(\forall x_i)A(x_i)$ não é logicamente válida. Basta assumir como domínio de interpretação o conjunto dos números naturais e fazer corresponder a wff $A(x_i)$ com a afirmação "x_i é ímpar".

Metateorema 6.3

Todo teorema do cálculo predicativo de primeira ordem é logicamente válido.

Demonstração:
Aqui apenas esboçamos a demonstração, deixando os detalhes novamente como opção aos leitores. Os axiomas lógicos do cálculo predicativo de primeira ordem são logicamente válidos e as regras de inferência mp e gen preservam validade lógica. Logo, todo teorema do cálculo predicativo de primeira ordem é logicamente válido.

Definição 6.7

Uma teoria de primeira ordem T é dita *sintaticamente consistente* se, e somente se, não ocorre que B e $\neg B$ são teoremas em T. Caso contrário, a teoria é dita *inconsistente*.

Metateorema 6.4

O cálculo predicativo de primeira ordem é sintaticamente consistente.

Demonstração:
Vamos supor, por absurdo, que existe uma fórmula bem formada A tal que A e $\neg A$ são ambas teoremas. De acordo com o metateorema 6.3 todo teorema do cálculo predicativo de primeira ordem é logicamente válido, situação essa impossível, pois não pode ocorrer $V(A) = 1$ e $V(\neg A) = 1$ ao mesmo tempo.

Observação 6.6

Aqui vai uma informação apresentada de forma superficial, mas de conteúdo profundo. Suponha que T é uma teoria de primeira ordem sintaticamente inconsistente (não é sintaticamente consistente). Logo, existe teorema A em T tal que $\neg A$ também é teorema em T. Se A e B são wffs de T, sabemos que $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ é teorema em T (resultado cujos detalhes estamos omitindo).[4] Pode-se inferir, pelo uso de mp duas vezes, que $\vdash_T B$, ou seja, toda wff de T é teorema de T. Uma teoria na qual todas as suas wffs são teoremas é dita uma *teoria trivial*. Em outras palavras, inconsistência sintática implica em trivialidade no presente contexto. Uma maneira de evitar esse resultado é criar uma teoria axiomática cujos axiomas lógicos sejam diferentes daqueles que aqui apresentamos. A lógica paraconsistente, criada pelo brasileiro Newton da Costa, permite axiomas lógicos nos quais inconsistência sintática não implica em trivialidade. É um modo de lidar com contradições. Uma referência informal sobre lógica paraconsistente em português, incluindo aplicações tecnológicas, é *Lógica paraconsistente aplicada* (16).

Definição 6.8

Uma wff A é dita *fechada* se, e somente se, A não tem ocorrências livres de variáveis individuais.

Observação 6.7

Uma wff fechada é verdadeira ou falsa em uma dada interpretação I. Já uma wff A que contém ocorrências livres de variáveis pode ser verdadeira para alguns elementos do domínio de interpretação e falsa para outros.

[4] Para você ficar mais tranqüilo, pelo menos do ponto de vista intuitivo, vale observar que a noção de verdade de Tarski, aplicada aos conectivos lógicos $\Rightarrow$ e $\neg$, está, em certo sentido, em correspondência com as tabelas-verdade dos mesmos conectivos no cálculo proposicional. E no cálculo proposicional a wff $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ é uma tautologia e, portanto, teorema.

Exemplo 6.4

A fórmula bem formada $(\forall x_i)(x_i = x_i)$ é fechada e é verdadeira se correspondermos a letra predicativa = com a igualdade usual em um dado domínio de interpretação D, sendo D o conjunto dos números inteiros. Já a fórmula bem formada $(\forall x_i)\neg(x_i = x_i)$ é fechada, porém falsa na mesma interpretação do caso anterior. Finalmente, a fórmula bem formada $(\forall x_i)(x_i = x_j)$ contém uma ocorrência livre da variável x_j. Ainda que correspondamos o símbolo = da mesma forma que no caso anterior, tal fórmula pode ser verdadeira para alguns elementos do domínio de interpretação D, mas falsa para outros, no mesmo domínio de interpretação. Logo, não faz sentido dizer se a fórmula $(\forall x_i)(x_i = x_j)$ é verdadeira ou falsa.

Definição 6.9

Uma teoria de primeira ordem *T* é dita *completa* se, e somente se, toda wff fechada *B* é teorema em *T* ou sua negação $\neg B$ é teorema em *T*.

Vale notar que toda teoria de primeira ordem sintaticamente inconsistente é completa. Uma breve discussão sobre completude fazemos no capítulo 8.

Definição 6.10

Sejam *I* e *I'* dois modelos de uma teoria de primeira ordem *T*. Dizemos que *I* e *I'* são modelos *isomorfos* se, e somente se, existe função bijetora *g* com domínio no domínio de interpretação *D* de *I* e co-domínio no domínio de interpretação *D'* de *I'*, tal que:

1. Para cada letra predicativa A_i^n e para elementos quaisquer s_1, ..., s_n de D, temos

$$\mathrm{A}_i^n(s_1, \ldots, s_n) \text{ se, e somente se, } \mathrm{A}'^n_i\ (g(s_1), \ldots, g(s_n)),$$

sendo que A_i^n e A'^n_i correspondem, respectivamente, em I e I', a A_i^n em T.

2. Para cada letra funcional f_i^n e para elementos quaisquer s_1, ..., s_n de D, temos

$$f_i^n(s_1, \ldots, s_n) = f'^n_i(g(s_1), \ldots, g(s_n)),$$

sendo que f_i^n e f'^n_i correspondem, respectivamente, em I e I', a f_i^n em T.

3. Para cada constante individual a_i de T temos

$$g(\mathrm{a}_i) = \mathrm{a}'_i,$$

sendo que a_i e a'_i correspondem, respectivamente, em I e I', a a_i em T.

Observação 6.8

Se I e I' são modelos isomorfos de uma teoria de primeira ordem T, denotamos isso como $I \approx I'$.

Metateorema 6.5

O isomorfismo entre modelos é uma relação de equivalência.

Deixamos a demonstração sob a responsabilidade dos leitores. Basta provar que se I_1, I_2 e I_3 são modelos de uma dada teoria de primeira ordem T, então (1) $I_1 \approx I_1$ (reflexividade); (2) $I_1 \approx I_2$ implica que $I_2 \approx I_1$ (simetria); e (3) $I_1 \approx I_2$ e $I_2 \approx \mathrm{I}_3$ implicam que $I_1 \approx \mathrm{I}_3$ (transitividade).

Definição 6.11

Uma teoria de primeira ordem na qual todos os modelos são isomorfos é dita *categórica*.

Observação 6.9

Na matemática há teorias categóricas e teorias não-categóricas. A teoria elementar de grupos, por exemplo, é não-categórica. Com efeito, a teoria elementar de grupos apresenta modelos com domínios de interpretação finitos e infinitos, o que inviabiliza qualquer isomorfismo entre todos os possíveis modelos. Afinal, o isomorfismo entre modelos depende de uma bijeção entre domínios de interpretação. Já a teoria de distribuições de Sebastião e Silva (13) é categórica. Sugerimos como tarefa ao leitor a exibição de dois modelos para a teoria elementar de grupos que não são isomorfos.

Observação 6.10

Se uma dada teoria T tem um nome (teoria dos grupos ou teoria dos espaços métricos, entre inúmeros exemplos), é uma prática comum que esse mesmo nome seja usado para os modelos da teoria. Por isso se diz comumente que o conjunto dos inteiros, com a adição usual entre inteiros, é um grupo. Isso é até mais prático do que afirmar que tal interpretação é um modelo de grupo. Também usualmente considera-se que uma teoria T (como a de grupos) é a classe de seus modelos. Porém, essa noção de "classe" deve ser precisada. Alguns autores preferem se referir a tal "classe" como a *categoria* dos grupos. Mas *teoria* de categorias é um assunto que escapa do presente contexto. É tema para outro livro.

Para encerrar esta seção, falemos um pouco sobre independência de axiomas.

Definição 6.12

Dizemos que um axioma A de uma teoria T de primeira ordem é independente dos demais axiomas da teoria T se, e somente se, A não é teorema de $T - A$, sendo que $T - A$ denota uma teoria de primeira ordem que tem todos os axiomas de T, exceto A.

Existe uma técnica metamatemática para determinar a independência de axiomas em teorias de primeira ordem. Trata-se de um procedimento efetivo que faz uso da noção de modelo. Com efeito, se for possível encontrar uma interpretação I para T tal que os axiomas próprios de $T - A$ se verifiquem verdadeiros em I, mas o axioma A de T se verifique falso em I, então fica evidente que A não pode ser teorema de T – A, pois as regras de inferência mp e gen preservam verdade e os axiomas lógicos de T são sempre verdadeiros, como já vimos anteriormente. Técnica com intuição semelhante pode ser usada em predicados de Suppes.

Basicamente foi uma técnica análoga a esta que foi empregada pelos matemáticos para provar a independência do quinto postulado de Euclides. Evidentemente essa técnica é ineficaz para determinar se os axiomas lógicos de uma teoria de primeira ordem são independentes. Mas funciona, em geral, para axiomas próprios.

Exemplo 6.5

Como já vimos anteriormente, a teoria de grupos, formulada como teoria de primeira ordem, é semanticamente consistente pois admite modelo. Considere agora como interpretação para grupo aquela na qual o domínio de interpretação é o conjunto *N* dos números inteiros positivos (incluindo o 0 (zero)); a constante 0 está em correspondência com o 0 (zero) dos inteiros e a letra funcional `U` está em correspondência com a adição usual dos inteiros positivos. Pode-se facilmente verificar que todos os axiomas da teoria de grupos, nessa interpretação, são verdadeiros, exceto o axioma G3, que estabelece a existência de elementos simétricos relativamente a `U`, pois entre os inteiros positivos não há simétricos relativamente à adição usual. Logo, o axioma G3 é independente dos axiomas G1 e G2. Isso também ilustra o fato de que um axioma próprio de uma teoria de primeira ordem pode ser falso em uma dada interpretação, o que responde a uma das questões feitas no prefácio deste livro.

Exercícios regulares

1. Exiba uma interpretação para a teoria elementar de grupos que não seja modelo da mesma.
2. Verifique se os axiomas G1 e G2 da teoria elementar de grupos são independentes.
3. Prove, em detalhes, que a teoria elementar de grupos não é categórica.
4. Crie uma teoria axiomática de primeira ordem que seja categórica.
5. Prove que o isomorfismo entre modelos é uma relação de equivalência, ou seja, reflexiva, simétrica e transitiva.

6. Sejam A e B wffs do cálculo de predicados de primeira ordem. Prove que se o axioma Q5 fosse escrito como

$$(\forall x_i)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x_i)B),$$

ou seja, sem a restrição de que x_i não ocorre livre em A, então Q5 não seria uma wff logicamente válida. A solução deste exercício é semelhante à discussão que fizemos sobre o axioma Q4 neste capítulo.

Exercícios de pesquisa

1. Prove, em detalhes, que todo teorema do cálculo predicativo de primeira ordem é logicamente válido.
2. Alguns autores chegaram a dizer que o que separa a matemática do século xix da matemática do século xx é que naquele as teorias matemáticas eram categóricas, ao passo que neste eclodiram as teorias não categóricas. Verifique se isso é verdade.

Iniciação científica

1. O metateorema de Skolem-Löwenheim afirma que toda teoria de primeira ordem com conjunto enumerável de símbolos e que admite modelo tem modelo enumerável.

Verifique isso na literatura, reproduza a demonstração e faça um estudo seguido de uma discussão sobre o significado desse resultado.

2. Faça uma classificação das teorias matemáticas usuais completas e também verifique quais não são completas.

3. O que é lógica paraconsistente? Como aplicá-la à tecnologia?

4. O que são lógicas rivais da lógica clássica?

5. O que são lógicas complementares da lógica clássica?

7

Aplicações: Mecânica de Partículas

O que é uma teoria física

Este capítulo, por se referir a aplicações, exige alguns pré-requisitos, tais como cálculo diferencial e integral de funções reais de uma variável, noções básicas de álgebra linear e conhecimentos elementares de análise matemática na reta e de mecânica newtoniana de partículas.

Também observamos que as aplicações do método axiomático aqui mencionadas são no sentido hilbertiano de explorar alternativas lógicas de teorias. Nosso exemplo é a mecânica newtoniana, que nos permite falar sobre formulações alternativas para a mecânica, tais como a mecânica de Hertz e a mecânica de Mach. Mas outras aplicações também poderiam ser exploradas, apesar de não fazermos isso aqui, tendo em vista nossa presente proposta de uma referência rápida sobre o método axiomático e seu uso.

Podemos considerar uma teoria física qualquer como uma tripla ordenada

$$< M, \Delta, \rho >,$$

sendo que M corresponde a uma teoria formal, Δ é o domínio de aplicações da teoria, e ρ é uma regra que estabelece as relações existentes entre M e Δ. Com freqüência, costuma-se confundir a teoria física com M, algo que intencionalmente fazemos aqui devido principalmente aos nossos propósitos. Ou seja, nosso interesse prioritário é o aspecto lógico matemático das teorias da física. Mas obviamente que fazemos isso sempre com atenção à intuição física dos elementos de M.

Do ponto de vista físico, a mecânica clássica (em oposição à mecânica quântica) não-relativística (em oposição à teoria da relatividade restrita de Einstein) de partículas (em oposição à mecânica dos meios contínuos) não se mostra como algo digno de grande interesse nos dias de hoje. A teoria descrita na próxima seção é tão simplificada que considera até mesmo a massa de uma partícula como constante. Mas do ponto de vista didático, para uma primeira aproximação do uso do método axiomático na física, acreditamos que não há exemplo mais adequado. Podemos discutir, por exemplo, sobre independência de axiomas que, em certo sentido, refletem as leis de Newton. E a teoria em questão chega até mesmo a permitir a dedução das leis de Kepler, que descrevem os movimentos dos planetas ao redor do Sol, evidenciando o aspecto dedutivo da mecânica, na formulação discutida abaixo.

Mecânica de Newton

Nesta seção apresentamos a formulação que McKinsey, Sugar e Suppes introduziram para a mecânica clássica de partículas em 1953 (30), aqui abreviada por sistema mss. O sistema mss reflete aspectos essenciais da mecânica de Newton. Além disso, mss oferece uma axiomática para a mecânica clássica suficientemente rica para uma discussão filosófica a respeito de outros tópicos tais como as mecânicas de Hertz e de Mach.

Na definição abaixo R^3 denota o espaço vetorial real usual de triplas ordenadas de reais, munido das operações usuais de adição de triplas ordenadas de reais e de multiplicação de real por tripla ordenada de reais. Intuitivamente falando, identificamos R^3 com o espaço físico. Já R denota o corpo dos reais. A definição a seguir é um predicado de Suppes para a mecânica clássica de partículas, descrito de maneira bastante informal mas suficientemente rigorosa para nossos propósitos.

Definição 7.1

$P = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema mss se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

P1 P é um conjunto finito não vazio, intuitivamente correspondente ao conjunto de partículas.

P2 T é um intervalo de números reais, intuitivamente correspondente a um intervalo de tempo.

P3 s é uma função com domínio $P \times T$ e co-domínio R^3. As imagens de s são denotadas por $s_p(t)$, sendo $p \in P$ e $t \in T$. Intuitivamente $s_p(t)$ corresponde à posição em R^3 da partícula p no instante t.

P4 m é uma função cujo domínio é P e co-domínio é R. As imagens de m são denotadas por $m(p)$, sendo $p \in P$. Intuitivamente $m(p)$ corresponde à massa da partícula p.

P5 f é uma função cujo domínio é $P \times P \times T$ e cujo co-domínio é R^3. As imagens de f são denotadas por $f(p,q,t)$, sendo $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$. Grosseiramente falando,

$f(p,q,t)$ corresponde à força interna que a partícula q exerce sobre a partícula p no instante t.

P6 g é uma função cujo domínio é $P \times T$ e cujo co-domínio é R^3. As imagens de g denotam-se por $g(p,t)$, sendo $p \in P$ e $t \in T$. Intuitivamente $g(p,t)$ é a força externa (ou perturbativa) que a partícula p sente no instante t.

P7 Se $p \in P$ e $t \in T$, $s_p(t)$ é duas vezes diferenciável, ou seja,

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

existe.

P8 Se $p \in P$, $m(p)$ é um número real estritamente positivo, ou seja, massa é sempre estritamente positiva ($m(p) > 0$).

P9 Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$, $f(p,q,t) = - f(q,p,t)$, ou seja, a cada ação corresponde uma reação, no mesmo instante, na mesma direção, em sentido oposto e com mesma intensidade.

P10 Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$,

$$[s_p(t),\ f(p,q,t)] = -[\ s_q(t),\ f(q,p,t)],$$

sendo que os colchetes [,] denotam produto vetorial usual em R^3. Ou seja, a força de reação a uma dada ação está na mesma direção da reta definida pelas posições das duas partículas envolvidas.

P11 Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$,

$$m(p)\ \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t),$$

ou seja, a força resultante sobre uma dada partícula corresponde à massa da mesma vezes sua aceleração.

As explicações intuitivas de cada axioma obviamente não fazem parte dos axiomas propriamente ditos. Estamos simplesmente usando uma linguagem abusiva, mas de emprego comum na literatura especializada.

Definição 7.2

Sejam $P = <P, T, s, m, f, g>$ um sistema mss, P' um subconjunto não vazio de P e s', f', g', e m' as restrições de s, f, g, e m, respectivamente a $P' \times T$, $P' \times P' \times T$, $P' \times T$ e P'. Diz-se que $P' = <P', T, s', m', f', g'>$ é um subsistema de P se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:

$$\text{Se } p \in P',\ q \in P' \text{ e } t \in T,$$

$$m'(p)\ \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f'(p,q,t) + g'(p,t).$$

Com tal definição, temos o seguinte teorema:

Metateorema 7.1

Se P' é subsistema de um sistema mss P, então P' é um sistema mss.

Deixamos a demonstração desse teorema como exercício. Basta provar que um subsistema satisfaz os axiomas de um sistema mss.

Definição 7.3

Dois sistemas mss

$$P = <P, T, s, m, f, g>$$

e

$$P' = <P', T', s', m', f', g'>$$

são equivalentes se, e somente se, $P = P'$, $T = T'$, $s = s'$, e $m = m'$.

Definição 7.4

Um sistema MSS é dito isolado se, e somente se, para quaisquer $p \in P$ e $t \in T$, $g(p,t) = (0, 0, 0)$.

Diversos resultados podem ser obtidos em mss. No final do capítulo deixamos alguns exercícios regulares relativos a tais resultados.

Observamos que de acordo com Suppes (45):

> Alguns autores propuseram que deveríamos converter a Segunda Lei de Newton... [isto é, axioma P11]... em uma definição para força total atuando sobre uma dada partícula. [...] Isso proibiria em nosso sistema qualquer análise de forças internas e externas atuando sobre uma partícula. Ou seja, se todas as definições de força fossem eliminadas como conceitos primitivos e [P11] fosse utilizado como definição, as noções de forças interna e externa não seriam definíveis em nosso sistema axiomático.

Nas próximas duas seções mostramos como mss permite a discussão de teorias alternativas: Mecânica de Hertz e Mecânica de Mach.

Mecânica de Hertz

Alguns físicos europeus do final do século xix consideravam que força era um conceito antropomórfico, metafísico, que deveria ser eliminado da mecânica (20). A idéia da ação à distância instantânea parecia um tanto "fantasmagórica". Como pode, por exemplo, a Lua interagir com a Terra, se não há meio físico de interação entre os dois corpos? E como pode essa interação ser instantânea? Um dos físicos que questionava o papel das forças newtonianas em mecânica era Heinrich Hertz. Em *The principles of mechanics* (20) Hertz mostrou estar insatisfeito com a obscuridade do conceito de força e apresentou uma formulação para a mecânica na qual a noção de força não é assumida. Na mecânica de Hertz existem apenas três conceitos primitivos: tempo, espaço e massa. Na obra de Hertz também considera-se que a mecânica tem apenas uma *Lei Fundamental* (usando a terminologia do próprio autor):

> Todo sistema livre persiste em estado de repouso ou movimento uniforme, seguindo o caminho mais retilíneo possível.

Desse modo Hertz considerava, para fins práticos, apenas sistemas livres. Como partes de um sistema livre podem constituir sistemas não-livres, resultados sobre sistemas não-livres podem ser obtidos a partir da Lei Fundamental. Hertz também considerou que todo sistema não-livre pode ser concebido como uma "parte" de um sistema estendido que seja livre.

Apresentamos aqui três predicados de Suppes para definir a mecânica clássica não-relativística de partículas, tendo como inspiração as idéias de Hertz. Usamos como ponto de partida para uma teoria formal, o sistema mss.

Definição 7.5

$\mathcal{P}$ = <P,T,s,m> é um *proto-sistema clássico de partículas*, também dito *proto-sistema de partículas* ou simplesmente *proto-sistema*, se forem satisfeitos os axiomas P1, P2, P3, P4, P7 e P8 de mss.

Há um metateorema relativo ao sistema mss que prova que os conceitos de força interna e força externa não podem ser definidos em mss a partir dos demais conceitos primitivos, como partícula, massa, espaço e tempo. Por enquanto assumimos que isso é um fato. Mas detalhes sobre essa questão são respondidos em *O que é uma definição* (38). A falta desse tipo de detalhe não deve prejudicar o restante da discussão que aqui fazemos.

Definição 7.6

Um proto-sistema de partículas $\mathcal{P}$ = <P,T,s,m> é dito *sistema livre de partículas* se, além dos axiomas P1, P2, P3, P4, P7 e P8 de mss, satisfizer também o seguinte postulado:

H Se $p \in P$ e $t \in T$,

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = (0, 0, 0).$$

O axioma H justifica o termo "livre" empregado acima. Consideramos que H está, pelo menos parcialmente, em correspondência com a *Lei Fundamental* de Hertz.

Eventualmente podemos nos referir a sistemas livres de partículas simplesmente como sistemas livres.

Metateorema 7.2

O axioma H é independente dos demais axiomas de sistema livre.

Demonstração:
Basta considerar qualquer interpretação na qual os axiomas P1, P2, P3, P4, P7 e P8 são verdadeiros, mas que

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0).$$

O caso mais simples é aquele no qual P é um conjunto unitário $\{p\}$, sendo $m(p) = 1$ e $s_p(t) = (t^2, 0, 0)$. Logo

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = (2, 0, 0)$$

Os demais detalhes ficam sob a responsabilidade dos leitores.

Obviamente, todo sistema livre é um proto-sistema. No entanto, nem todo proto-sistema é livre, pois o axioma H é independente dos demais, conforme esboçamos acima.

Definição 7.7

Um proto-sistema

$$P = <P, T, s, m>$$

é dito um *sistema não-livre de partículas*, ou simplesmente, *sistema não-livre*, se satisfizer, além dos axiomas de proto-sistema, o seguinte postulado:

H' Se $p \in P$ e $t \in T$,

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0).$$

Metateorema 7.3

O axioma H' é independente dos demais axiomas de sistema não-livre.

Demonstração:
Análoga a do teorema 7.2.

Definição 7.8

Sejam

$$P = <P,T,s,m>$$

um proto-sistema, P' um subconjunto não-vazio de P, e s' e m' as respectivas restrições de s e m a $P' \times T$ e P'. Chamamos

$$P' = <P',T,s',m'>$$

de *subsistema* de P.

As definições de subsistema para sistemas livres e não-livres são análogas. É fácil também observar que o subsistema de um sistema livre não é necessariamente livre. Tal questão fica mais clara nos parágrafos seguintes.

É óbvio que todo subsistema de um sistema livre ou mesmo de um sistema não-livre é também um proto-sistema.

Portanto, todo proto-sistema é um subsistema de um sistema não-livre. Ainda, todo proto-sistema é um subsistema de um sistema livre.

Definição 7.9

O centro de massa $c(t)$ de um proto-sistema é dado por

$$c(t) = \frac{\sum_{p \in P} m(p) s_p(t)}{\sum_{p \in P} m(p)}$$

Tal definição é idêntica ao conceito de centro de massa em mss (30).

Se estivermos lidando com um sistema não-livre, temos que:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0)$$

Se, no entanto, tivermos um sistema livre:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = (0, 0, 0)$$

Isso nos permite definir aquilo que chamamos de protoforça externa $g_c(t)$ no proto-sistema:

Definição 7.10

A protoforça externa $g_c(t)$ de um proto-sistema é dada por

$$g_c(t) = \sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2}.$$

Se a protoforça externa é zero, o proto-sistema é livre. Se a protoforça externa for diferente de zero, o proto-sistema é não-livre. Tal conceito de protoforça externa não é equivalente à noção de força externa em mss, uma vez que os domínios de ambas as funções não são iguais. Porém, em mss há um teorema que estabelece o seguinte:

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} g(p,t)$$

Ou seja, se definirmos em mss a noção de protoforça externa da mesma forma como o fazemos na definição 7.10, tal noção corresponde à soma (ou resultante) de todas as forças externas em mss que atuam sobre todas as partículas do sistema.

Metateorema 7.4

Se um sistema livre admite um subsistema não-livre, existe outro subsistema, diferente do primeiro, que também é não-livre.

Demonstração:
Um sistema livre tem o axioma H satisfeito. Portanto,

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = (0, 0, 0).$$

Mas se tal sistema admite um subsistema não-livre, existe $P' \subset P$ ($P' \neq \emptyset$) tal que $P' \neq P$ e tal que

$$\sum_{p \in P'} m(p) \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0),$$

Assim, se assumimos $P'' = P - P'$,

$$\sum_{p \in P''} m''(p) \frac{d^2 s''_p(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0), \qquad (7.1)$$

pois

$$\sum_{p \in P'} m'(p) \frac{d^2 s'_p(t)}{dt^2} + \sum_{p \in P''} m''(p) \frac{d^2 s''_p(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

Podemos considerar $P'' = \langle P'', T, s'', m'' \rangle$ como um proto-sistema com a condição extra dada pela equação 7.1. Portanto, P'' é um sistema não-livre, o que encerra nossa demonstração.

Considere, agora, um sistema de duas partículas p_1 e p_2, tal que

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} = (0, 0, 0),$$

mas

$$\frac{d^2 s_{p1}(t)}{dt^2} \neq (0, 0, 0).$$

Tal situação corresponde a um modelo para um sistema livre

$$P'' = \langle P, T, s, m \rangle$$

com apenas duas partículas. Se qualquer subsistema P'' diferente de P' é não-livre, $P - P'$ também é não-livre, de acordo com o teorema anterior. Portanto:

$$m(p_1)\,\frac{d^2 s_{p1}(t)}{dt^2} = -\,m(p_2)\,\frac{d^2 s_{p2}(t)}{dt^2} \qquad (7.2)$$

A equação 7.2 lembra uma versão fraca da Terceira Lei de Newton. Se o sistema das duas partículas é livre, mas a partícula p_1 é elemento de um sistema não-livre, a outra partícula também é elemento de um sistema não-livre. Tal situação sugere uma "ação" da partícula p_1 sobre a partícula p_2 e uma "reação" de p_2 sobre p_1, ou *vice-versa*. À primeira vista a equação 7.2 parece tornar viável uma definição de força interna. No entanto, como eliminamos todas as noções de força como conceitos primitivos, baseados em mss, não é possível estabelecer qualquer definição para forças, sejam internas ou externas.

Podemos ver essa questão sob outro ponto de vista. Tentemos adaptar o exemplo acima das duas partículas para mss. Uma vez que temos como dados apenas as massas e trajetórias de p_1 e p_2, há uma ambigüidade na determinação das forças envolvidas. Podemos ter forças internas atuando entre as partículas ou podemos ter forças externas atuando sobre as mesmas de modo que a soma de tais forças externas seja nula.

Hertz "define" força como

> ... o efeito que um sistema, entre dois sistemas acoplados, exerce sobre o outro, por conseqüência da Lei Fundamental. (20)

Duas partículas são ditas *acopladas*, de acordo com Hertz, quando o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal forma que uma ou mais coordenadas de uma partícula coincide com as mesmas coordenadas da outra partícula em um certo intervalo de tempo. Isso significa que Hertz "definia" força em termos de espaço e tempo. Mas em nossa formulação isso não é possível.

Hertz criou um princípio extra que estabelecia que todo sistema não-livre poderia ser concebido como parte de um sistema livre. Seu objetivo era determinar o movimento das partículas em um sistema qualquer, utilizando apenas a Lei Fundamental. Em nosso sistema há uma afirmação semelhante ao postulado extra de Hertz, na forma de teorema, como o mostrado a seguir:

Metateorema 7.5

Todo sistema não-livre é equivalente a um subsistema de um sistema livre.

Demonstração:

Considere um sistema não-livre

$$P = \langle P, T, s, m \rangle$$

tal que

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} \neq 0.$$

Se definirmos um sistema não-livre

$$Q = <\{q\}, T, s_q, m_q>$$

com apenas uma partícula $q \notin P$, tal que

$$\sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = - m_q \frac{d^2 s_q(t)}{dt^2},$$

o sistema P_q definido como $P_q = <P \cup \{q\}, T, s|_{P \cup \{q\}}, m|_{P \cup \{q\}}>$ é livre, pois

$$\sum_{p \in P \cup \{q\}} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{p \in P} m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} + m_q \frac{d^2 s_q(t)}{dt^2} = 0.$$

Para completar a demonstração temos de provar que: (1) o sistema P_q é livre, ou seja, deve satisfazer axiomas P1, P2, P3, P4, P7, P8 e H, e (2) P é equivalente a um subsistema de P_q. Deixamos essa tarefa sob a responsabilidade dos leitores.

Mecânica de Mach

Assim como o sistema mss nos possibilita discutir de maneira objetiva sobre algumas das idéias de Hertz, o mesmo sistema também nos viabiliza uma discussão, do ponto de vista axiomático, a respeito da noção de inércia. Em termos qualitativos associa-se a inércia de um corpo com massa à dificuldade de alterar seu estado de movimento relativamente a um sistema inercial. Em outras palavras, quanto maior a inércia de um corpo material, maior a dificuldade para acelerá-lo ou desacelerá-lo. A questão é: qual o princípio físico que determina a inércia de um corpo material?

Não há nada nos escritos de Ernst Mach que possa ser explicitamente identificado com aquilo que os físicos chamam de *Princípio de Mach*. No entanto, esse célebre físico austríaco foi um dos maiores críticos da noção newtoniana de inércia. Há uma famosa experiência em mecânica conhecida como o *balde de Newton*. Parece uma brincadeira muito simples com balde, água e corda. Mas há uma extensa discussão filosófica na literatura sobre o assunto, envolvendo até mesmo autores recentes.

Considere um balde cheio de água e suspenso por uma corda torcida. Se soltarmos o balde, a corda torcida tende a se distorcer e fazer o balde girar. A água, que antes era plana, começa a acompanhar o movimento de rotação do balde e fica deformada, com uma curvatura para dentro do balde, conforme figura abaixo.

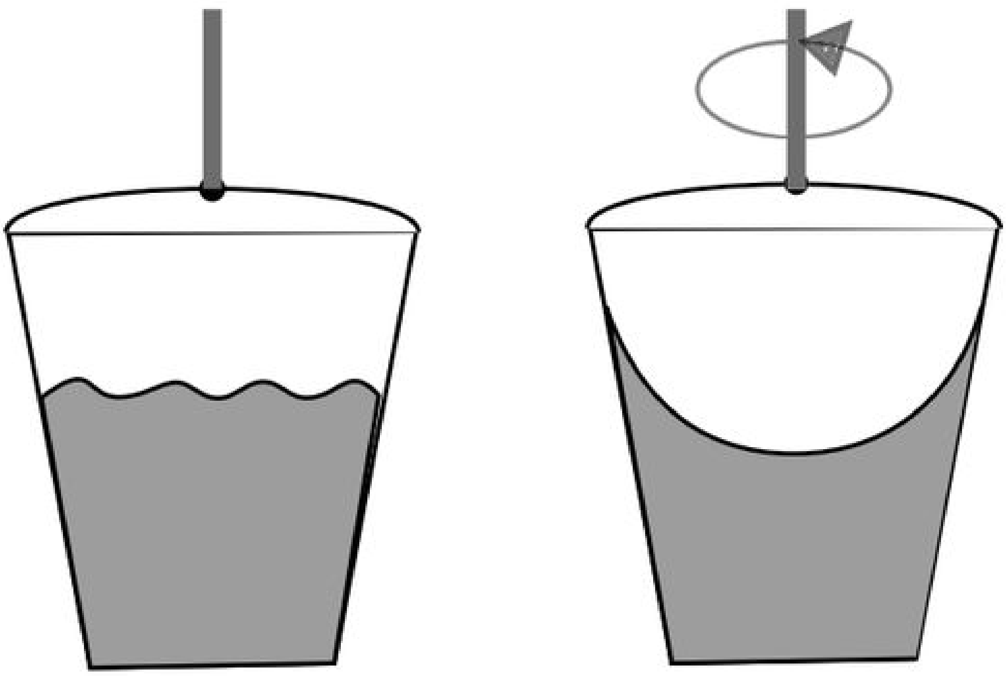


figura 4

A pergunta é: o que faz a superfície da água ficar curva? Relativamente ao solo a água está em movimento, mas em relação ao balde ela está parada. Por isso a curvatura da água em movimento se deve a algum princípio de inércia que esteja relacionado ao movimento da água relativamente a um referencial privilegiado. E deve ser um referencial aproximadamente parado em relação ao solo. Isso porque relativamente ao balde, a água curvada se encontra em repouso. Mas relativamente à Terra a única força atuante sobre a água é a força gravitacional, a qual tem apenas componente vertical, o que não explica a deformação da água que gira na direção da borda do balde. Se considerarmos a hipótese de que o universo no qual vivemos tem uma distribuição isotrópica de massa (a mesma distribuição de massa em todas as direções), hipótese essa extremamente razoável, podemos então aproximar a distribuição de massa no universo como se fosse uma casca esférica de massa finita e tamanho finito.[5] No entanto, para desapontamento de Newton, a força gravitacional resultante dentro de uma casca esférica, com casca de densidade constante, é sempre zero. Portanto, a curva da água no balde de Newton não se explica por interação gravitacional newtoniana da água do balde com o universo distante, se quisermos considerar esse universo distante um referencial privilegiado, aproximado como uma casca. Newton então dizia que a água do balde estava em movimento relativamente ao espaço absoluto, hipótese essa que despertou muita desconfiança e gerou inúmeras críticas. Para Mach, por exemplo, matéria interage com matéria e não com espaço. Por isso é comum muitos autores identificarem como Princípio de Mach algo como:

> A inércia de um corpo material se deve à sua interação
> com outros corpos distantes.

[5] Vale lembrar que na mecânica de Newton massas infinitas e quantias infinitas de corpos com massa podem conduzir a violações da conservação de energia e da conservação de momento de inércia. A mecânica de Newton somente se aplica a massas finitas.

É claro que a sentença acima é suficientemente vaga para permitir inúmeras variações desse enunciado, bem como inúmeras interpretações do Princípio de Mach.

A seguir apresentamos uma axiomática para a mecânica de partículas, novamente inspirada no sistema mss, que permite incorporar o Princípio de Mach de modo que o mesmo seja consistente até mesmo com a gravitação universal de Newton. A definição abaixo é baseada em "Axioms for Mach's mechanics"(43), um trabalho que fizemos em parceria com um aluno de graduação.

Definição 7.11

$M = \langle P, T, s, m, f, g\rangle$ é um *sistema machiano de partículas* se, e somente se, além dos axiomas P1 ~ P10 de mss, os seguintes axiomas forem satisfeitos:

M1 Se $p \in P$, $q \in P$ e $t \in T$, então

$$\sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t) = (0, 0, 0).$$

M2 Se $p \in P$ e $t \in T$, então $g(p,t) = -m(p)\dfrac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$.

A idéia de considerar a força resultante em uma dada partícula sempre zero (axioma M1) é inspirada em trabalho do brasileiro André Koch Torres Assis (3). Sob outro ângulo, o axioma M1 é um princípio de conservação, ou princípio de simetria. Já o axioma M2 corresponde a dizer que a inércia de um corpo com massa $m(p)$ e posição $s_p(t)$ depende da ação de uma força externa $g(p,t)$. A natureza dessa força externa não é revelada nos axiomas (deve ser revelada nos modelos de M), mas ela tem papel fundamental no jogo de equilíbrio com as forças internas, conforme o axioma M1. Sob outro prisma, o axioma M2 é uma equação diferencial que permite determinar a dinâmica dos corpos com massa. Ainda, do ponto de vista lógico-matemático, M 2 tem a função de expressar de maneira muito geral toda uma classe de possíveis explicações para a inércia. A função $g(p,t)$ pode ser interpretada tanto como interação da matéria com algum espaço absoluto newtoniano, como a interação da matéria com corpos materiais distantes. Isso significa que M 2 guarda em si aquilo que diferentes explicações para a inércia têm em comum.

Se p é a única partícula em P, então, de acordo com os axiomas M 1 e M 2 temos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = (0, 0, 0),$$

a qual corresponde a uma partícula inercial.

Por outro lado, se há mais de uma partícula em P, então:

$$\sum_{q \in P} f(p,q,t) = m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$$

o que corresponde à Segunda Lei de Newton. Ou seja, a Segunda Lei é aqui um teorema não-trivial. Podemos interpretar $f(p,q,t)$ como a força da lei da gravitação universal de Newton:

$$f(p,q,t) = -\gamma\, m(p)\, m(q) \frac{s_p(t) - s_q(t)}{|s_p(t) - s_q(t)|^3}, \qquad (7.3)$$

sendo que γ é a constante da gravitação universal e $|s_p(t) - s_q(t)|$ é a norma do vetor $s_p(t) - s_q(t)$. Isso mostra que nossa mecânica é compatível com a lei da gravitação universal, pois a equação 7.3 é consistente com os axiomas de um sistema machiano de partículas.

Uma discussão mais detalhada sobre este sistema e assuntos correlatos pode ser encontrada em "Axioms for Mach's mechanics" (43).

Exercícios regulares

1. Verifique quais axiomas do sistema mss são independentes.

2. Prove o metateorema 7.1.

3. Prove que se

$$\mathcal{P} = <P, T, s, m, f, g>$$

e

$$\mathcal{P}' = <P', T', s', m', f', g'>$$

são dois sistemas mss equivalentes, temos que para quaisquer $p \in P$ e $t \in T$

$$\sum_{q \in P} f(p,q,t) + g(p,t) = \sum_{q \in P'} f'(p,q,t) + g'(p,t)$$

4. Prove que todo sistema mss é equivalente a um subsistema de um sistema mss isolado.

5. Descreva em detalhes para que serve o axioma P10.

6. Generalize o sistema mss para massas que variem com o tempo.

7. Prove que se $c(t)$ é o centro de massa de um proto-sistema e $c'(t)$ é o centro de massa de outro proto-sistema (esses dois proto-sistemas podem ser considerados como subsistemas de um dado proto-sistema), então a igualdade de protoforças externas dos dois proto-sistemas em questão ($g_c(t) = g'_c(t)$) não garante que os próprios proto-sistemas são iguais.

Exercícios de pesquisa

1. Identifique as três leis de Newton (para a mecânica) nos axiomas do sistema mss.
2. Deduza as leis de Kepler em mss estendido. Para obter mss estendido, você deverá acrescentar um axioma em mss correspondente à Lei da Gravitação Universal.

Iniciação científica

1. O que aconteceria se permitíssemos que P tivesse um número infinito de partículas? Mostre que nesse caso pode haver quebras de simetria. Isso é um caso particular daquilo que os filósofos da ciência chamam de *supertask*.

8

Considerações Finais

Para que axiomas?

Após essa breve exposição sobre sistemas axiomáticos, é comum surgirem algumas dúvidas. Afinal, para que servem os sistemas axiomáticos? Oferecemos a seguir algumas respostas:

1. O processo de axiomatização sintetiza parte significativa do método científico. As chamadas *teorias científicas* sempre partem de um mínimo de pressupostos para, por meio de um sistema dedutivo, permitir a inferência de um máximo de conseqüências lógicas. A gravitação universal de Newton, por exemplo, permite descrever os mais variados fenômenos, desde a queda de uma maçã até a inexorável órbita da Lua. Essa metodologia científica parece ser algo muito importante para o ser humano.

2. O método axiomático tem um grande poder de síntese em um grau que oferece outra perspectiva em relação

ao exposto acima. Ele tem qualidades *pedagógicas* interessantíssimas. Isso porque o método axiomático representa economia de pensamento. Um exemplo muito marcante é a teoria de distribuições. A teoria de distribuições é uma disciplina da matemática de grande interesse para físicos e engenheiros. Mas estudá-la da forma convencional exige um bom e demorado curso de análise funcional como pré-requisito. Porém, análise funcional é uma disciplina avançada, não lecionada em cursos regulares de graduação, sendo tópico geralmente de cursos de pós-graduação. No entanto, o português José Sebastião e Silva elaborou uma axiomatização para a teoria de distribuições que a tornou viável mesmo para um aluno que tenha cursado um ano de cálculo diferencial e integral. Uma formulação mais atualizada das idéias de Sebastião e Silva pode ser encontrada em "Sebastião e Silva e o conceito de distribuição"(13).

3. O método axiomático tem o poder de qualificar discurso, de modo a permitir que questões de caráter filosófico em ciência sejam respondidas objetivamente. Em filosofia da ciência são discutidas, por exemplo, questões sobre a redução de uma teoria a outra, questões sobre a eliminabilidade de conceitos primitivos, questões sobre a consistência, decidibilidade e/ou completude de teorias etc. Todos esses tópicos podem ser objetivamente discutidos desde que uma formulação precisa seja dada à(s) teoria(s) em discussão. Nas palavras de Patrick Suppes:

> Existe um papel para a filosofia com respeito às ciências. Não somos mais pregadores de domingo para cientistas profissionais de segunda-feira, mas

> podemos participar do empreendimento científico de várias maneiras construtivas. Certos problemas de fundamentos serão melhor resolvidos por filósofos do que por qualquer outra pessoa. Outros problemas de grande interesse conceitual realmente dependerão, para sua solução, de cientistas profundamente imersos na disciplina em questão, mas a iluminação do significado conceitual de soluções [de certos problemas] pode ser um papel propriamente filosófico.(47, p.5)

Os pregadores de domingo de Suppes são os antigos pensadores e críticos da metodologia científica, tais como Aristóteles, Descartes e Kant, entre outros. Hoje o papel da filosofia da ciência é bem diferente do que foi no passado. E o método axiomático tem um papel privilegiado nesse processo.

4. O método axiomático é também excelente instrumento de pesquisa em matemática. Em topologia, por exemplo, sabe-se que o teorema de Tychonoff, um importante e curioso resultado sobre espaços topológicos compactos, é equivalente ao Axioma da Escolha na teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Em outras palavras, se fundamentarmos a topologia na teoria de Zermelo-Fraenkel sem o Axioma da Escolha, não há teorema de Tychonoff. Esse é um resultado intimamente ligado ao método axiomático.

Todas essas perspectivas apenas ilustram muito brevemente a riqueza do método axiomático. É como se estivéssemos olhando para um mesmo objeto no espaço, sob diferentes ângulos. Nesse sentido, o método axiomático é belo, pois sempre nos surpreende com novos aspectos quando o examinamos sob diferentes pontos de vista. Mas é claro que ele não é solução para todos os problemas de sistematização em ciência. Há limitações, conforme o que discutimos a seguir.

Limitações

Outra pergunta que julgamos importante é: quais as limitações do método axiomático?

Do ponto de vista didático, o método axiomático pode ser por vezes desinteressante. Isso pode ocorrer, por exemplo, em disciplinas tradicionalmente ensinadas sob um ponto de vista *genético*. O método genético se opõe ao axiomático no sentido de se referir a uma forma bastante usual de fazer matemática sem o uso explícito de axiomas. O cálculo diferencial e integral, por exemplo, tem usualmente uma abordagem genética, na qual se pressupõe conhecida a teoria de conjuntos, a noção de número real e, em seguida, definem-se limites, derivadas e integrais de Riemann sem qualquer uso explícito de axiomas. Algo semelhante ocorre em outras disciplinas da matemática como geometria diferencial, teoria-*K* etc. Em compensação, o método axiomático é explicitamente empregado em topologia, álgebra, álgebra linear, análise matemática etc. O uso de um processo genético em lugar de um axiomático, pelo menos do ponto de vista didático, é questão de gosto pessoal.

A partir dos trabalhos de David Hilbert em geometria, no final do século xix, o método axiomático começou a adquirir grande força, chegando a inspirar toda uma comunidade de matemáticos de renome a criar e apoiar uma escola matemática conhecida como *formalismo*, a qual era naturalmente liderada pelo próprio Hilbert. Os formalistas, grosso modo, buscavam por uma fundamentação axiomática para toda a matemática (21), até que em 1931 um jovem lógico matemático austríaco chamado Kurt Gödel provou um metateorema que abalou profundamente a proposta formalista. Ele mostrou que toda axiomática consistente da aritmética usual (um exemplo de teoria de primeira ordem) não é completa (ver definição 6.9). As fórmulas bem formadas fechadas A da aritmética que não são teoremas, e que também suas negações $\neg A$ não são teoremas, constituem aquilo que os matemáticos chamam de fórmulas indecidíveis (não confundir com teorias indecidíveis). E Gödel provou que a aritmética usual admite fórmulas bem formadas fechadas indecidíveis. O assunto é extenso e demandaria muito mais detalhes. Mas, em resumo, os teoremas de Gödel mostraram que certas metas dos formalistas eram impossíveis da forma como Hilbert e seus discípulos sonhavam. Uma discussão bastante acessível sobre o assunto se encontra no livro *Prova de Gödel* (33).

Hoje em dia sabe-se que fórmulas bem formadas fechadas indecidíveis povoam a matemática com surpreendente freqüência, tanto na aritmética, quanto na análise matemática e até mesmo nas teorias da física (15).

O papel da intuição

Deve ter ficado claro até agora que a intuição tem importante papel em matemática. Mas a definição de teoria formal que apresentamos no início do livro permite situações nada intuitivas, uma vez que, por exemplo, a noção de regra de inferência é bastante ampla e "tolerante" com respeito a casos muito exóticos. Se você pensar com cuidado, perceberá que é possível admitir uma única regra de inferência em uma dada teoria formal que tem a mesma linguagem do cálculo proposicional clássico, tal que $\neg B$ é conseqüência direta de A e $A \Rightarrow B$, sendo A, B, $\neg B$ e $A \Rightarrow B$ fórmulas dessa teoria. É como se disséssemos:

> Se eu chutar pedra, meu pé dói. Chutei pedra. Logo,
> meu pé não doeu.

Esse seria um exemplo de argumento nada intuitivo, apesar de o conceito de teoria formal não proibir esse tipo de situação. A rigor ninguém é obrigado a aceitar regras de inferência intuitivas ou evitar regras de inferência não intuitivas. Qualquer um, em princípio, pode criar teorias formais que façam uso de regras de inferência nada convencionais. Mas se admitirmos que a matemática depende de aceitação social (visão de Manin e, acreditamos, da maioria dos lógicos), o uso de regras de inferência incomuns não seria visto com bons olhos se não houvesse qualquer contexto que as justificasse, fosse filosófico, matemático ou mesmo físico. Muitos acreditam (e praticam) que é impossível nos dissociarmos da intuição. Se partirmos dessa premissa, então certamente devemos nos ancorar em algo intuitivo quando estamos interessados em definir uma teoria formal. Quem escapar dessa linha de trabalho provavelmente será um completo incompreendido pelos outros e talvez até por si mesmo.

De um ponto de vista menos pragmático e mais semântico, vale também notar que as inferências usuais estão, pelo menos em certo sentido, em correspondência com aquilo que vemos em nosso dia-a-dia. Ainda que um matemático conclua que seu pé não deve doer após chutar a pedra (conforme o exemplo acima), podemos verificar na prática que o pé de fato dói após chutar a pedra (se assumirmos que chutar pedra implica em pé doer; algo que pode estar em correspondência com a experiência, dependendo da pedra, do pé e do chute). Isso significa que comumente as regras de inferência usuais estão, de alguma forma, em correspondência com uma intuição desenvolvida a partir de nossas experiências no mundo real. Mas não nos preocupamos com essas questões em nossa definição de teoria formal.

Apesar de termos nos concentrado na questão das regras de inferência, comentários análogos podem ser feitos com respeito aos axiomas de uma teoria formal.

Precisamos de axiomas?

Finalmente, uma última pergunta que também julgamos pertinente: o matemático, o físico, o economista, o biólogo ou, enfim, o cientista em geral precisa conhecer o método axiomático?

Isso depende do interesse de quem faz ciência. Muitos dos trabalhos científicos de grande relevância, inclusive em matemática, foram feitos sem qualquer uso explícito do método axiomático. Um físico profissional pode fazer descobertas extremamente relevantes sem jamais saber diferenciar um axioma de um teorema qualquer. Mas se o cientista quer responder a questões sobre os fundamentos lógico-matemáticos de alguma disciplina científica, o método axiomático afigura-se indispensável.

O estudo da metamatemática de uma teoria física se constitui uma espécie de *metafísica*, em acepção diferente daquelas normalmente usadas na literatura filosófica. Além disso, a metamatemática que o método axiomático viabiliza tem encontrado aplicações na matemática (5, 10, 13, 24, 36, 48), na física (12, 15, 26, 30, 41, 42, 43, 47), na biologia (28), na economia (8, 12), e mesmo em outras áreas do conhecimento (25).

Para resumir, o método axiomático veio ao mundo para mostrar sua beleza para aqueles que desejam vê-la. Para os demais, que o deixem passar. Toda essa aventura faz parte do processo criativo da atividade científica que, assim como a vida, é repleta de facetas e surpresas.

Bibliografia Comentada

Colocamos aqui referências citadas no decorrer do livro, mas também leituras complementares que recomendamos para estudos mais aprofundados. Cada referência recebe breves comentários para facilitar a escolha sobre o que é de interesse pessoal e o que não é.

1. Abe, J. M. & Papavero, N. *Teoria intuitiva dos conjuntos*. São Paulo, McGraw-Hill/Makron, 1991.

Também conhecida como teoria ingênua de conjuntos, trata-se de uma visão bastante intuitiva e pouco formal sobre conjuntos, suas relações e operações.
Curiosidade: o segundo autor é biólogo, algo que fica evidente no decorrer do livro.

2. Arnold, V.; Atiyah, M.; Lax, P. & Mazur, B. (eds.) *Mathematics: frontiers and perspectives*. Providence, ams, 2000.

Esse livro, publicado pela Sociedade de Matemática Americana com apoio da União Internacional de Matemática, cujo presidente é o brasileiro Jacob Palis, é leitura obrigatória para qualquer pessoa que deseja uma cultura geral em matemática. É uma coletânea de artigos escritos por trinta matemáticos de renome (Atiyah, Chern, Connes, Manin, Penrose, Smale, Wiles, Witten, Arnold e outros), sendo metade deles ganhadores da Medalha Fields, o "Prêmio Nobel" da matemática. Muitos dos artigos são escritos em linguagem não-técnica, fazendo desse livro praticamente uma obra de divulgação. Inspirado no exemplo dos vinte e três problemas de Hilbert [ver "Mathematical problems" (22)], um dos propósitos desse magnífico volume, infelizmente não traduzido para nosso idioma, é apontar para as tendências da matemática do século xxi. Especial atenção para o artigo "Mathematical problems for the next century" de Steve Smale, pp. 271-94, que cita trabalhos dos brasileiros Newton da Costa, Francisco Doria, Maurício Peixoto e Jacob Palis, evidenciando a excelente qualidade da matemática brasileira.

3. Assis, A. K. T. *Mecânica relacional*. Campinas, CLE–Unicamp, 1998.

   Esse livro tem grandes virtudes e grandes defeitos. Dos capítulos 1 a 6 se faz uma bela retrospectiva da evolução histórica sobre o conceito de inércia. É nesse ponto que apoiamos grande parte de nossas idéias sobre mecânica machiana. Para uma reflexão mais detalhada sobre o assunto, ver "Axioms for Mach's mechanics" (43).

4. Bell, E. T. *Men of mathematics*. Nova York, Simon & Schuster, 1986.

   Esse clássico narra a vida e a obra de quarenta matemáticos e uma matemática, de Zenão a Cantor, cobrindo mais de dois mil anos de história da matemática. É livro de cabeceira, de leitura extremamente agradável, não-técnica, que destaca aspectos peculiares e curiosos sobre os personagens que edificaram algumas

das principais teorias matemáticas. Pouquíssimo tem a ver com o método axiomático. Mas como em vários momentos nos preocupamos com aspectos históricos, achamos pertinente citar uma de nossas principais e mais inspiradoras fontes. É livro acessível em termos de preço, ainda disponível no mercado.

5. Beth, E. W. "On Padoa's method in the theory of definition". *In*: *Indagationes Mathematicae*, v.15, 1953, pp.330-9.

   Célebre artigo no qual o autor prova rigorosamente que o Princípio de Padoa se aplica na linguagem de primeira ordem usualmente empregada nos fundamentos da teoria de conjuntos.

6. Bourbaki, N. *Elements of the history of mathematics*. Berlim, Springer-Verlag, 1994.

   Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um seleto grupo de matemáticos que escreveu uma extensa obra em algumas dezenas de volumes com o título coletivo de *Os elementos da matemática*. Cada volume, sobre diferentes tópicos em matemática, trazia algo a respeito da história da criação e do desenvolvimento de cada tópico. Esse livro concatena tais conteúdos históricos. Bourbaki fez história e exerceu forte influência no Brasil. Apesar de omitir fatos históricos significativos, é leitura fascinante para aqueles que querem compreender a gênese de algumas das maiores idéias em matemática. O original é em francês.

7. Browder, F. E. *Mathematical developments arising from the Hilbert problems*. Providence, ams, 1976.

   Importante coletânea de artigos que visa uma avaliação dos vinte e três problemas de Hilbert [ver "Mathematical problems", (22)] bem como algumas propostas de novos problemas. Especial atenção para o artigo "Hilbert's sixth problem: mathematical treatment of the axioms of physics", pp.147-240, de Arthur Wightman.

8. Caiero, R. da C. "Tópicos em metodologia formal: a noção de teoria em ciência econômica". São Paulo, 2001. Tese de Doutorado. fflch-usp.

Bela tese na qual o economista Roque da Costa Caiero faz uma excelente apresentação sobre o conceito de estrutura em matemática e a noção de verdade pragmática em ciência, com especial atenção ao seu uso em economia. É uma pena que a circulação de teses seja tão pequena e restrita, pois essa vale a pena conhecer.

9. Castrucci, B. *Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano*. Rio de Janeiro, ltc, 1978.

Excelente introdução ao tratamento axiomático para a geometria, fortemente inspirado nas idéias do alemão David Hilbert. Uma pérola da literatura matemática em língua portuguesa.

10. da Costa, N. C. A. *Introdução aos fundamentos da matemática*. São Paulo, Hucitec, 1992.

O autor, o mais importante lógico-matemático do Brasil e um dos mais renomados do mundo, faz uma breve apresentação das três principais escolas filosóficas da matemática (formalismo, intuicionismo e logicismo) e encerra com uma interpretação lingüística para a matemática. Livro pequeno (menos de cem páginas), mas de grande profundidade.

11. da Costa, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo, Hucitec, 1994.

Profunda análise dos fundamentos da lógica, em seu mais amplo sentido no que se refere à lógica matemática e seu uso em matemática e até mesmo na física. Uma tradução francesa foi publicada pela Masson.

12. da Costa, N. C. A. *O conhecimento científico*. São Paulo, Discurso Editorial, 1999.

Esse livro, já na segunda edição, apresenta idéias originais acerca da noção de quase-verdade em ciência, oferecendo uma visão ampla e crítica que se opõe principalmente às idéias de Karl Popper. Vários colaboradores de Da Costa, do Brasil e do exterior, escrevem breves notas no livro. Uma referência da filosofia da ciência escrita originalmente em português.

13. da Costa, N. C. A. & Baêta Segundo, J. A. "Sebastião e Silva e o conceito de distribuição". *In*: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.22, 2000, pp.114-21.

Nesse artigo os autores discutem sobre a teoria de distribuições no formalismo proposto por Sebastião e Silva, evidenciando seu forte apelo pedagógico. Um belo trabalho de história e fundamentos da matemática.

14. da Costa, N. C. A. & Chuaqui, R. "On Suppes' set theoretical predicates". *In*: *Erkenntnis*, v.29, 1988, pp.95-112.

Nesse artigo os autores fazem uma interessante comparação entre os predicados conjuntistas de Suppes e a proposta bourbakista de axiomatização de teorias como espécies de estruturas.

15. da Costa, N. C. A. & Doria, F. A. "Undecidability and incompleteness in classical mechanics". *In*: *International Journal of Theoretical Physics*, v.30, 1991, pp.1041-73.

Apenas um, entre muitos artigos que da Costa e Doria publicaram a respeito de indecidibilidade e incompletude em física teórica. Mas é provavelmente o mais citado de todos.

16. da Costa, N. C. A. *et al*. *Lógica paraconsistente aplicada*. São Paulo, Atlas, 1999.

Aqui a lógica paraconsistente, que permite gerenciar contradições, encontra aplicações em informática, inteligência artificial, robótica e engenharia de produção.

17. Dugas, R. *A history of mechanics*. Nova York, Dover, 1988.

Prefaciado pelo Prêmio Nobel Louis de Broglie, esse grande clássico reúne em mais de seiscentas páginas a história da mecânica, de Aristóteles à mecânica quântica.

18. Hatcher, W. S. *Foundations of mathematics*. Filadélfia, W. B. Saunders, 1968.

Excelente introdução aos fundamentos da matemática com discussões sobre teorias de primeira ordem, sistema de Frege, teoria de tipos, teorias de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, Von Neumann-Bernays-Gödel e outros e teoria de categorias. Um clássico.

19. Heath, T. L. *The thirteen books of Euclid's elements*. Nova York, Dover, 1956.

Tradução comentada dos *Elementos* de Euclides. Excelente trabalho histórico.

20. Hertz, H. R. *The principles of mechanics*. Nova York, Dover, 1956.

Tradução de livro póstumo que mostra a versatilidade de Hertz, pois o consagrou como um destacado filósofo da ciência. Discípulo de Helmholtz, Hertz fazia parte de toda uma comunidade científica fortemente concentrada na Alemanha e na Áustria, que estava bastante comprometida com os fundamentos da mecânica que, na época, era somente clássica. Livro de enorme interesse histórico. O original foi publicado em 1894 e em alemão.

21. Hilbert, D. "Pensamiento axiomatico". *In*: *Galileo*. Montevidéu, n.1-2, abril de 1989, pp.23-43.

Traduzido do original em alemão publicado em 1917, é fascinante artigo que marcou época durante o auge da ascensão do formalismo. Discussão não-técnica, mas muito inspirada, sobre o uso do método axiomático.

22. Hilbert, D. "Mathematical problems". *In*: *Bulletin of the American Mathematical Society*, v.37, 2000, pp.407-36.

Esse artigo do matemático alemão David Hilbert marcou história. Traz uma lista de vinte e três problemas que Hilbert julgava serem o legado da matemática do século xix para os matemáticos do século xx. Algo semelhante foi novamente feito na última virada de século [ver *Mathematics: frontiers and perspectives* (2)]. Em geral, a lista em questão vingou como referência para alguns dos grandes avanços da matemática contemporânea, ainda que certas descobertas importantíssimas não tivessem sido previstas pelas profecias de Hilbert, como é o caso da teoria de categorias. Especial interesse para nós tem o sexto problema dessa lista, o qual se refere à axiomatização das ciências físicas. Esse é um problema que, a rigor, constitui mais em um projeto de pesquisa para gerações até mesmo do terceiro milênio, do que propriamente uma questão que possa ser definitivamente concluída algum dia. O original foi publicado cem anos antes, em alemão.

23. Hilbert, D. & Ackermann, W. *Principles of mathematical logic*. Providence, Chelsea, 1950.

Em seus quatro capítulos os autores discutem de maneira cristalina e com exemplos o cálculo proposicional clássico, o cálculo de predicados de segunda ordem e o cálculo de ordem ω.

24. Krause, D. "On a quasi-set theory". *In*: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.33, 1992, pp.402-11.

Nesse artigo o lógico brasileiro Décio Krause apresenta uma teoria axiomática de conjuntos sem igualdade que, em certo sentido, generaliza a teoria usual de Zermelo-Fraenkel. No lugar da igualdade há uma relação mais fraca chamada de *indistinguibilidade*. Há fortes motivações para esse tipo de trabalho inspiradas em fenômenos da física quântica.

25. Krause, D. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo, epu, 2002.

Esse livro é um misto de texto técnico com livro de divulgação. Excelente introdução para aquilo que podemos chamar de *filosofia do método axiomático*, trazendo interessantes discussões de caráter histórico, epistemológico e metodológico.

26. Krause, D.; Sant'Anna, A. S. & Volkov, A. G. "Quasi-set theory for bosons and fermions: quantum distributions". *In*: *Foundations of Physics Letters*, v.12, 1999, pp.51-66.

Em mecânica quântica considera-se a existência de duas ou mais partículas elementares que dividem os mesmos atributos físicos (propriedades intrínsecas e propriedades de estado). A teoria de quase-conjuntos (24) é uma alternativa para lidar com situações como as que ocorrem no mundo quântico. Nesse artigo é feita pela primeira vez uma aplicação de quase-conjuntos à física.

27. Mach, E. *The science of mechanics*. Chicago, The Open Court Publishing Co, 1974.

Um clássico sobre os fundamentos da mecânica clássica, originalmente escrito em alemão, que chegou a inspirar Einstein, quando este desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral. Leitura de grande interesse histórico e filosófico.

28. Magalhães, J. C. M. & Krause, D. "Suppes predicate for genetics and natural selection". *In*: *Journal of Theoretical Biology*, v.209, 2000, pp. 141-53.

Alguns poucos autores tais como John Henry Woodger, entre outros, se atreveram nas últimas décadas a propor o uso do método axiomático em biologia. Nesse excelente artigo os autores, um geneticista e um lógico-matemático, usam o método axiomático para estudar a Teoria Sintética da Evolução. Uma lista de referências no final do artigo é de interesse para estudiosos. Esse artigo é fruto de tese de doutorado do primeiro autor.

29. Manin, Yu I. *A course in mathematical logic*. Nova York, Springer-Verlag, 1977.

Os livros da Springer estão sempre disponíveis nas grandes livrarias do exterior. Mas esse é recomendado para quem já tem bastante familiaridade com lógica. Trata de questões avançadas como provabilidade, computabilidade e até mesmo aplicações de lógica em física de maneira nada interessante ao iniciante. Mesmo assim é um livro fabuloso para estudiosos.

30. McKinsey, J. C. C.; Sugar, A. C. & Suppes, P. "Axiomatic foundations of classical particle mechanics". *In*: *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, v.2, 1953, pp.253-72.

Um clássico, muito citado na literatura. Trata de uma formulação axiomática para a mecânica clássica não-relativística de partículas. Do ponto de vista da física teórica não representa grande avanço. Mas do ponto de vista filosófico representa um fascinante exemplo histórico do uso do método axiomático em física.

31. Mendelson, E. *Introduction to mathematical logic*. Londres, Chapman & Hall, 1997.

É certamente um dos melhores livros de introdução à lógica que existe, devido principalmente à sua clareza e precisão. O autor parte do pressuposto de que os leitores nada sabem de lógica e chega a tópicos avançados como computabilidade e teoremas de Gödel. Infelizmente discute em detalhes apenas a teoria de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel e não a teoria de Zermelo-Fraenkel, a qual é a mais conhecida e utilizada em matemática.

32. Mortari, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo, Editora Unesp, 2001.

Boa introdução à lógica, porém com um perfil mais adequado a estudantes de filosofia. Há um capítulo dedicado a lógicas não-clássicas.

33. Nagel, E. & Newman, J. R. *Prova de Gödel*. São Paulo, Perspectiva, 1998.

Pequeno livro que trata de maneira informal sobre o célebre teorema de Gödel de 1931. É dirigido ao público leigo que pouco sabe sobre lógica. Além disso há também uma motivação histórica e filosófica no livro.

34. Newton, I. *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural*. São Paulo, Nova Stella; Edusp, 1990.

Com prefácios do autor e de Roger Cotes essa obra certamente dispensa comentários. É o clássico dos clássicos na física contemporânea. Leitura de interesse histórico. Conhecimento obrigatório para qualquer pessoa que se julga educada em ciências.

35. Oliveira, A. J. F. *Lógica e aritmética*. Lisboa, Gradiva, 1996.

Excelente introdução à lógica matemática, principalmente para alunos de graduação. Trata do cálculo proposicional, cálculo de predicados de primeira ordem e aritmética de Peano. O texto

é ainda recheado com algumas discussões informais sobre resultados de grande relevância a respeito dos fundamentos da matemática, tais como os teoremas de Gödel e de Tarski, entre outros. Do mesmo autor há outras obras de interesse como *Lógica elementar* (aef cl , 1980); *Teoria dos conjuntos, intuitiva e axiomática* (Escolar, 1982); entre outras.

36. Padoa, A. “Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque”. *In*: *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, v.3, 1900, pp.309-65.

Esse é o artigo original de Alessandro Padoa, discípulo de Giuseppe Peano, sobre independência de conceitos primitivos de um dado sistema axiomático. Padoa aplicou pela primeira vez seu método de definibilidade de conceitos primitivos em geometria. Mas há a possibilidade de que outros matemáticos já conhecessem essa técnica antes de Padoa publicar seu trabalho.

37. Quine, W. O. *O sentido da nova lógica*. Curitiba, eduf pr , 1996.

Reedição de um livro que foi lançado no Brasil pela primeira vez em 1944, resultado de um curso ministrado pelo autor na Universidade de São Paulo em 1942. Uma bela introdução à lógica, escrita por um dos grandes expoentes do assunto no século xx.

38. Sant'Anna, A. S. *O que é uma definição*. (no prelo).

É o segundo volume da série da qual o presente livro faz parte. O texto começa com uma discussão de como a noção de *definição* tem sido abordada em filosofia, evidenciando a dificuldade de aparente circularidade, em se *definir o que é uma definição*.
Também apresenta a teoria de definição do matemático polonês Lesniewski. O Princípio de Padoa, uma técnica metamatemática

para testar a definibilidade de conceitos primitivos em uma dada teoria axiomática, é discutido em detalhes. Para finalizar, algumas aplicações em matemática e física são feitas.

39. Sant'Anna, A. S. *O que é um teorema*. (no prelo).

O terceiro volume da série da qual o presente livro faz parte. Pretendemos abordar o uso de diversas regras de inferência, bem como discutir o papel de teoremas, corolários, lemas e proposições. Falaremos também sobre a técnica de redução ao absurdo e a crítica dos intuicionistas a respeito dessa técnica tão amplamente usada, evidenciando aquilo que Yu Manin chama de "níveis de demonstrabilidade". Para Manin, uma demonstração somente se torna uma demonstração de fato, após o ato *social* de aceitação da mesma. Discutimos também a técnica de demonstração por indução, bem como algumas críticas inerentes à mesma. Finalmente, encerramos com alguns exemplos históricos e até didáticos de demonstrações erradas em geometria e em cálculo diferencial e integral, seguidos de discussões.

40. Sant'Anna, A. S. *O que é um conjunto*. (no prelo).

Introduzimos a teoria ingênua de conjuntos dando ênfase aos paradoxos nela encontrados. Na apresentação, história e teoria se misturam. A seguir mostramos o sistema de Zermelo-Fraenkel (zf) e algumas de suas variações, tais como zfu e zfc, discutindo de que forma essa teoria evita os paradoxos da teoria ingênua. Encerramos com aplicações, discutindo-as criticamente. Por exemplo: como pode a geometria ser fundamentada na teoria dos conjuntos se a geometria intuitivamente se refere à "ciência das formas", sendo que conjuntos não têm forma?

41. Sant'Anna, A. S. & Garcia, C. "É possível eliminar o conceito de força da mecânica clássica?". *In*: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.20, 1998, pp.346-53.

Artigo que apresenta uma axiomatização para a mecânica clássica de partículas, inspirada nas idéias de Hertz sobre eliminação de força. É quase uma tradução de um artigo que publiquei na revista alemã *Philosophia Naturalis*, dois anos antes. As maiores diferenças estão em uma definição de subsistema de um sistema de partículas e um teorema que afirma que todo subsistema de um sistema de partículas é também um sistema de partículas.

42. Sant'Anna, A. S. & Santos, A. M. S. "Quasi-set-theoretical foundations of statistical mechanics: a research program". *In*: *Foundations of Physics*, v.30, 2000, pp.101-20.

Na matemática tradicional considera-se que há somente três maneiras de distribuir duas notas de R$ 1,00 (um real) entre duas pessoas, se levarmos em conta apenas o valor das notas, ignorando que as mesmas podem ser distinguidas pelos seus números de série. Uma das maneiras é dividir um real para cada pessoa. Outra maneira é fazer com que uma das pessoas fique com todo o dinheiro. E a terceira maneira é fazer com que a outra pessoa fique com todo o dinheiro. Mostramos que é possível criar um novo tipo de análise combinatória na qual há quatro maneiras de distribuir as duas notas entre duas pessoas. Isso é conseguido graças ao uso do método axiomático e encontra aplicações em física quântica. Esse artigo é fruto de dissertação de mestrado do segundo autor, sob orientação do primeiro.

43. Sant'Anna, A. S. & Maia, C. A. S. "Axioms for Mach's mechanics". *In*: *Foundations of Physics Letters*. v.14, 2001, pp.247-62.

Nesse artigo um sistema axiomático para aquilo que chamamos de mecânica de Mach é apresentado, inspirado nas idéias do brasileiro André Assis e do canadense Peter Graneau sobre mecânica relacional. Ao contrário do que sugerem esses autores, mostramos que o princípio de Mach pode ser consistente até mesmo com forças newtonianas.

44. Suppes, P. *Introduction to logic*. Princeton, van Nostrand, 1957.

Não está mais disponível no mercado. É um livro excelente, muito didático. Discute em detalhes a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel e tem um capítulo inteiro dedicado à teoria de definição. Porém, o Princípio de Padoa estará apresentado em uma versão mais forte em *O que é uma definição* (38).

45. Suppes, P. *Set-theoretical structures in science*. Mimeo., Stanford, Stanford University, 1967.

Está previsto para 2003 o lançamento de uma extensão desse livro que tem circulado como mimeógrafo em todo o mundo. Trata-se de uma descrição circunstanciada do uso de predicados conjuntistas em matemática e ciência em geral. É um texto avançado de interesse para filósofos da ciência e mesmo cientistas das mais diversas áreas.

46. Suppes, P. *Axiomatic set theory*. Nova York, Dover, 1972.

Excelente referência, ainda disponível no mercado internacional, para quem quer entender as motivações e os fundamentos da teoria axiomática de conjuntos.

47. Suppes, P. "Philosophy and the sciences". *In*: Sieg, W. (ed.). *Acting and reflecting*. Dordrecht, Kluwer, 1990, pp.3-30.

Publicado em livro e, por isso, difícil de conseguir cópia, é um artigo no qual o autor faz extensa discussão sobre o papel da filosofia em ciências na atualidade.

48. Tarski, A. "Some methodological investigations on the definability of concepts". *In*: Corcoran, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianápolis, Hacket, 1983, pp.296-319.

Aqui o famoso lógico-matemático polonês Alfred Tarski prova que o Princípio de Padoa se aplica a linguagens de ordem superior.

49. Tarski, A. "The concept of truth in formalized languages". *In*: Corcoran, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianápolis, Hacket, 1983, pp.152-278.

Tradução da obra pioneira de 1931 de Alfred Tarski sobre o conceito de verdade em linguagens formais. No entanto, a maioria dos resultados desse artigo foram obtidos em 1929.

50. Tarski, A. & Givant, S. *A formalization of set theory without variables*. Providence, ams, 1988.

Texto avançado que mostra como fundamentar a teoria de conjuntos sem variáveis, sem quantificadores e sem conectivos lógicos. É uma formulação bem mais simples que a usual e que exemplifica maravilhosamente bem o aspecto multifacetado da matemática.

51. Weyl, H. *The continuum, a critical examination of the foundation of analysis*. Nova York, Dover, 1994.

Esse pequeno e notável livro, originalmente publicado em alemão, com pouco mais de cem páginas, é um clássico sobre os fundamentos da análise matemática.

Índice Remissivo

O que é um Axioma

Este livro oferece uma esplêndida introdução ao método axiomático. Ele possui a combinação certa de matemática e ciência que será útil a uma vasta gama de leitores. Embora a idéia de começar a análise de uma determinada área do conhecimento matemático ou científico a partir dos axiomas básicos do assunto seja tão antiga quanto Euclides, muitos dos aspectos detalhados sobre o método axiomático não são bem conhecidos.

Adonai S. Sant'Anna fez o excelente trabalho de tornar uma série de idéias modernas sobre o método axiomático, algumas bastante técnicas e complicadas, facilmente acessível àqueles que as encontram pela primeira vez.

[Do prefácio de Patrick Suppes]

série lógica matemática

ISBN 85-204-1660-8

9 788520 416600

Manole