SÉRIE MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Marisa da Silva Dias / Vanessa Dias Moretti

Números e operações

elementos lógico-históricos para atividade de ensino

EDITORA intersaberes

NÚMEROS E OPERAÇÕES: ELEMENTOS LÓGICO-HISTÓRICOS PARA ATIVIDADE DE ENSINO

Marisa da Silva Dias
Vanessa Dias Moretti

NÚMEROS E OPERAÇÕES:
ELEMENTOS LÓGICO-HISTÓRICOS PARA ATIVIDADE DE ENSINO

EDITORA
intersaberes

EDITORA
intersaberes

Av. Vicente Machado, 317, 14º andar
Centro – CEP 80420-010 – Curitiba – PR – Brasil
Fone: (41) 2103-7306
www.editoraintersaberes.com.br
editora@editoraintersaberes.com.br

Editor-chefe – *Lindsay Azambuja*

Editor-assistente – *Ariadne Nunes Wenger*

Editor de arte – *Raphael Bernadelli*

Análise de informação – *Adriane Beirauti*

Revisão de texto – *Filippo Mandarino*

Capa – *Caroline Novak Laprea*

Projeto gráfico – *Bruno Palma e Silva*

Iconografia – *Danielle Shotltz*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dias, Marisa da Silva
Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino [livro eletrônico]/ Marisa da Silva Dias, Vanessa Dias Moretti. – Curitiba: InterSaberes, 2012. – (Série Matemática em Sala de Aula).
2 Mb ; PDF

Bibliografia.
ISBN 978-85-8212-098-9

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Pesquisa educacional. 3. Professores – Formação I. Moretti, Vanessa Dias. II. Titulo III. Série.

12–07723 CDD–510.72

Índice para catálogo sistemático:
1. Educação matemática: Pesquisa educacional
510.72

1ª edição, 2012

Foi feito o depósito legal.

Sumário

Apresentação – 7

Introdução – 11

1 Números: uma construção humana – 13

1.1 Sobre a origem dos números – 13

1.2 Do senso numérico ao numeral – 14

1.3 Sistemas de numeração: alguns exemplos históricos – 20

1.4 O sistema de numeração decimal indo-arábico – 30

1.5 O número natural – 32

2 Operações numéricas – 41

2.1 Adição – 42

2.2 Subtração – 55

2.3 Multiplicação – 56

2.4 Divisão – 64

2.5 Potenciação, radiciação e logaritmização – 69

3 Divisibilidade em IN – 75

3.1 A ideia de divisão – 75

3.2 Divisão euclidiana em IN – 80

3.3 Critérios de divisibilidade – 84

3.4 O algoritmo de Euclides para o máximo divisor comum – 89

3.5 Mínimo múltiplo comum – 92

4 Números primos – 97

4.1 Números primos: um pouco de história – 97

4.2 O Teorema Fundamental da Aritmética – 100

4.3 Novas estratégias para o cálculo do mmc e do mdc – 102

4.4 Alguns números curiosos envolvendo os números primos – 107

5 Números racionais – 115

5.1 Os racionais e a medição – 115

5.2 O racional – 125

5.3 As propriedades do campo racional – 136

5.4 As notações – 137

5.5 Densidade – 138

6 Números irracionais– 143

6.1 Irracionais: uma aproximação – 143

6.2 O comensurável e o incomensurável – 154

6.3 Outras definições de número irracional – 162

6.4 Operações com números irracionais – 164

6.5 Um percurso histórico dos números irracionais no ensino – 164

Considerações finais – 173

Referências – 175

Bibliografia comentada – 179

Respostas – 181

Sobre as autoras – 187

Apresentação

Mais do que selecionar e apresentar *números* e *operações, o* desafio das autoras, ao conceberem a proposta deste livro, foi abordar tais conceitos considerando tanto a história da produção de tais conhecimentos matemáticos quanto a história de como estes foram apropriados por diferentes civilizações. Nesse percurso, buscou-se focalizar conceitos matemáticos por meio de um tratamento didático que visa superar formas de apresentação unicamente formais da matemática. Com esse objetivo, parte-se de contextualizações históricas e problemáticas que efetivamente puseram o homem diante da necessidade de tais conhecimentos.

A vertente de abordagem escolhida para esta obra fundamenta-se na compreensão de que, ao nos apropriarmos do conhecimento matemático, também nos inserimos como herdeiros de todo conhecimento já produzido. Nesse sentido, buscamos superar uma tendência recorrente na educação matemática que enfatiza uma matemática apenas do *saber fazer*, em muito responsável pela desvinculação entre essa disciplina e a realidade, não confundida com imediatismo ou conhecimento circunscrito a uma realidade local.

Tendo como objetivo a formação de professores que ensinam matemática, o livro opta por uma linguagem que, sem abrir mão do compromisso com o rigor matemático, tem o propósito de aproximar o leitor dos conceitos matemáticos, bem como instigá-lo a refletir sobre os temas abordados, relacionando-os com o cotidiano escolar. Nesse contexto, são trazidas contribuições de diferentes pesquisas educacionais e abordagens pedagógicas que podem favorecer a organização da prática docente do futuro profissional.

Ao apropriar-se de conceitos matemáticos de forma mediada por uma perspectiva histórica e cultural, o futuro professor pode conceber a matemática não como uma ciência acabada, imutável, mas como um processo de construção humana.

É com essa intenção que os capítulos neste livro são encadeados. Embora não se deixe de lado a formalização, uma vez que ela faz parte da história da própria matemática como ciência, a organização da obra tem o propósito de que os estudantes apropriem-se dos conceitos matemáticos numa perspectiva histórico-cultural. A escolha dessa abordagem não é aleatória e reflete tanto o percurso de pesquisa das autoras quanto suas experiências no trabalho com a formação inicial ou continuada de professores.

Como o leitor poderá constatar, o livro se divide em seis capítulos, sendo que o primeiro, *Números: uma construção humana*, aborda o sistema de numeração decimal e o número natural. Partindo da necessidade humana de controlar quantidades, o capítulo explora temas como: o processo que originou a contagem; como algumas civilizações representaram e operaram quantidades; e elementos essenciais de alguns sistemas de numeração. O capítulo segue com a discussão do número natural até sua formalização matemática.

O segundo capítulo, *Operações numéricas*, explora a essência das operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmização com os números; por esse motivo trata das operações no campo dos números naturais, o que possibilita perceber sua extensão nos outros campos numéricos. Por meio de questionamentos, instiga o leitor a formular hipóteses sobre a construção lógica das operações. Contribuições da história da matemática e de pesquisas em educação matemática permitem discutir o ensino de operações, propriedades e algoritmos.

O terceiro capítulo, *Divisibilidade em IN*, explora o conceito de divisibilidade, critérios de divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e algoritmo de Euclides, discutindo situações didáticas nesse contexto.

O quarto capítulo, *Números primos*, aborda a relevância desse conceito na Teoria dos Números, destacando aspectos de sua história, além de novas estratégias para o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum entre dois números naturais.

O quinto capítulo, *Números racionais*, trata, sob aspectos históricos, epistemológicos e didáticos, a relação da medida e da comensurabilidade com o conceito de número fracionário e de número racional, explorando as propriedades nesse campo numérico.

O capítulo seis, *Números irracionais*, continua com a abordagem da medida, mas tratando agora a incomensurabilidade, discutindo o conceito a partir de situações didáticas com contribuições históricas, dos parâmetros curriculares e de pesquisas em educação matemática.

Com o enfoque teórico e a organização aqui expostos, acreditamos que este texto possa contribuir com a formação do(a) professor(a) que ensina matemática ou mesmo com conhecimentos conceituais e históricos para os amantes da disciplina. Boa leitura e bom estudo!

Introdução

A experiência humana na apreensão das quantidades remonta a algumas dezenas de milhares de anos. Desde as primeiras necessidades básicas de quantificação até o uso de bases binárias ou a ampliação de testes de primalidade, voltados a sistemas de criptografia ligados aos modernos usos da tecnologia, o desenvolvimento da matemática pelo pensamento humano reflete não só diferentes necessidades históricas, mas também impasses, superações, mudanças de rumos...

O estudo da história da matemática tem nos mostrado soluções distintas para problemas comuns, teorias que não resistiram ao tempo e testes sucessivos, obstáculos superados... Com a aritmética não foi diferente. Número, divisibilidade, primos, entre outros, são conceitos que foram sendo construídos com contribuições de diferentes civilizações e de diferentes matemáticos.

Reconhecer esse movimento lógico-histórico de construção não linear do conhecimento matemático, que se contrapõe ao que por vezes é apresentado tradicionalmente no ensino, e concebê-lo como parte de seu trabalho na organização do ensino, entendemos ser o desafio do professor que ensina matemática.

Talvez esse seja o diferencial deste livro diante de tantos materiais de qualidade já editados, muitos dos quais serviram de apoio à produção deste volume. Ao abordar alguns tópicos da aritmética, este material busca fazê-lo considerando esse movimento histórico de construção de conceitos e indicando possíveis caminhos de como abordá-lo ou explicitá-lo em sala de aula.

Nesse sentido, pode constituir-se não apenas como material didático de formação de professores, mas, especialmente, como material de consulta a professores já em atividade docente.

Números: uma construção humana

Neste capítulo faremos uma rápida viagem sobre a história da construção do conceito de número, abordando desde as necessidades humanas que implicaram sua produção até a análise de alguns sistemas de numeração que foram propostos por diferentes culturas. Esse percurso nos permitirá compreender e explicitar as características do Sistema de Numeração Decimal Indo-Arábico.

1.1 Sobre a origem dos números

O que é número? Como surgiu? Por que as quantidades são representadas da forma como as conhecemos?

No nosso cotidiano, na relação de uso social que estabelecemos com os números, tais perguntas raramente são colocadas. Para nós, entretanto, o estudo do conceito de número, *arithmos* em grego, é o ponto de partida para o estudo da aritmética.

Em uma análise superficial, poderíamos supor erroneamente que esse conceito, bem como suas representações e operações decorrentes, surgiram de forma cumulativa e linear para a humanidade. No entanto, a história nos revela que diferentes civilizações buscaram formas distintas de lidar com a variação de quantidades de um conjunto de objetos. Neste capítulo, percorreremos alguns caminhos na busca do registro e das formas de controle dessa variação que foram propostos pela humanidade ao longo de sua história. O conhecimento de algumas das soluções históricas para o problema da contagem nos permite não apenas compreender melhor o nosso próprio sistema de numeração, como também, na prática docente, reconhecer eventuais dificuldades de aprendizagem dos estudantes que perpassem tais conceitos, habilitando-nos na construção de estratégias pedagógicas que possam auxiliá-los.

Também é por meio do conhecimento dos impasses e limitações das diferentes soluções humanas para o problema da contagem que podemos nos posicionar diante do dilema de compreender o número como uma ideia anterior ao problema humano da contagem, construído em unidade dialética com essa experiência. Ou seja, poderíamos nos perguntar, assim como Tobias Dantzig, no célebre livro *Número: a linguagem da ciência*: "O conceito nasceu da experiência, ou a experiência simplesmente serviu para tornar explícito o que já estava latente na mente humana?" (Dantzig, 1970, p. 18).

Embora essa pergunta seja a fonte de uma longa discussão no campo da filosofia da matemática acerca da *criação* ou da *descoberta* da matemática, e consequentemente do conceito de número, indícios históricos têm mostrado aos pesquisadores da área a correlação existente entre a produção do conceito e as necessidades humanas que o motivam.

1.2 Do senso numérico ao numeral

Os primeiros registros arqueológicos do que poderíamos chamar de uma *contagem primitiva* datam de aproximadamente 50.000 anos a.C.

No entanto, autores como Eves (2004) e Ifrah (1997) acreditam que é possível afirmar que em períodos anteriores os homens já teriam desenvolvido alguma forma de *senso numérico*. Este, em um primeiro momento, permitiria ao homem comparar a quantidade de objetos em conjuntos distintos, reconhecendo quais coleções teriam mais ou menos elementos.

Essa primeira aproximação do senso numérico, no entanto, não é exclusividade do ser humano. Pesquisas com animais domesticados revelaram que alguns são capazes de reconhecer a variação de unidades em conjuntos de até quatro elementos, quando esses lhe são familiares.

Um exemplo bastante conhecido e citado tanto por Ifrah quanto por Dantzig é o do castelão* que pretendia caçar um corvo que havia feito ninho numa torre de vigia. O castelão, porém, tinha suas tentativas frustradas, uma vez que ao aproximar-se o corvo fugia do ninho e só retornava quando este havia ido embora. Como estratégia, o homem levou dois companheiros à torre: um saiu e o outro ficou escondido na tentativa de caçar o animal. No entanto, o corvo manteve-se escondido até que o segundo homem também saísse. Outras tentativas foram feitas com três e quatro homens. Em todas elas, o corvo esperava até que o último homem se afastasse da torre para retornar ao ninho. Finalmente, quando foi repetido o intento com cinco homens, o corvo foi incapaz de distinguir a presença de três ou quatro pessoas.

O senso numérico do animal, nessa situação, permitia-lhe comparar os conjuntos de homens, percebendo assim, quantidades concretas. Isso se diferencia em muito da contagem, uma vez que não há nem abstração nem generalização no processo relatado.

Da mesma forma, conjectura-se que os humanos primitivos eram capazes de reconhecer, numa comparação visual, a variação de quantidades entre conjuntos com um número reduzido de elementos.

Tal possibilidade, no entanto, foi tornando-se insuficiente à medida que as necessidades humanas de controlar quantidades foram se ampliando. Assim, controlar o tamanho do seu rebanho, garantindo

* Castelão era o responsável por um castelo ou proprietário de um.

que voltasse da pastagem a mesma quantidade de animais que saiu, ou mesmo comparar a quantidade de guerreiros de diferentes tribos, exigia do homem mais do que o senso numérico. Exigia-lhe pensar como realizar tal controle, o que chamamos hoje de *contagem*. O desenvolvimento de métodos mais eficientes de contagem parece estar diretamente ligado ao momento histórico no qual o homem passa a ter propriedade privada e, portanto, a necessidade de garantir a manutenção da quantidade de seus bens.

Inicialmente, é provável que a contagem tenha consistido na comparação entre os elementos de dois conjuntos distintos (Gundlach, 1992). Nessa estratégia, chamada *enumeração*, ainda não existe o conceito de número, ou seja, não há a contagem abstrata. O conjunto no qual se deseja controlar a quantidade é comparado, elemento a elemento, ou seja, um a um, com outro conjunto de objetos usados como controle. Esse segundo conjunto poderia ser constituído de pedras, gravetos, ossos, conchas, nós em corda, entalhes em madeira ou mesmo de uma sequência pré-definida de partes do corpo humano. A própria palavra *cálculo,* em português, tem sua raiz etimológica no latim *calculus,* que significa "pedra". O fundamental é que ambos os conjuntos tenham a qualidade de serem discretos. Isso significa que os objetos de ambos os conjuntos estão separados uns dos outros, contrapondo-se às grandezas contínuas.

Essa forma de contagem, chamada na matemática de *correspondência um-a-um*, ou em termos mais específicos, *correspondência biunívoca* ou *bijeção*, é utilizada, por exemplo, quando um professor entra em uma classe na qual ele sabe que há a mesma quantidade de carteiras e de estudantes. Num rápido olhar, ele identifica se houve ou não estudantes ausentes naquela aula: caso haja carteiras vazias, significa que o conjunto de estudantes tem uma quantidade menor de elementos que o conjunto de carteiras. Logo, houve faltas.

Que exemplo você poderia utilizar para explicar a correspondência biunívoca?

Assim, a estratégia da enumeração não nos permite responder quantos elementos há em um conjunto determinado. Apenas nos garante a comparação entre duas coleções de modo que possamos afirmar se ambas têm o mesmo número de elementos ou qual é mais numerosa, no caso de conjuntos finitos. Embora na prática com objetos a correspondência biunívoca seja eficiente apenas para conjuntos com um número reduzido de elementos, ela denota a percepção do homem acerca da extensão dessa noção abstrata comum aos dois conjuntos. Uma vez que a qualidade do conjunto que conta (pedras, conchas, nós...) não coincide, necessariamente, com a qualidade do conjunto contado (animais, pessoas, frutas...), o que permite a comparação não é a natureza dos objetos e sim a sua quantidade. Ou seja, o que permite a comparação é somente a natureza de serem discretos, de formarem uma unidade discreta, o que permite comparar um a um seus elementos.

É evidente que em um primeiro momento não há a consciência explícita do homem sobre esse processo. De qualquer forma, sua criação foi etapa fundamental para o desenvolvimento do conceito de número natural. Sua utilização não implicava nem o conceito abstrato de número nem a necessidade de palavras faladas específicas para representar as quantidades.

A correspondência biunívoca era utilizada ainda no século XIX em aldeias da Nova Guiné. Segundo Ifrah (1997), os papuas, habitantes do nordeste dessa região, contavam visualmente da seguinte maneira: "Começava-se pelo dedo mínimo da mão direita, empregavam-se os dedos desse lado, depois o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho desse lado, daí se passa para o olho esquerdo, etc., e se desce novamente até o dedo mínimo da mão esquerda" (Ifrah, 1997, p. 26).

Como podemos ver pela descrição, havia uma sequência pré-estabelecida de partes do corpo que eram tocadas em correspondência a cada objeto a ser contado. Dessa forma, era suficiente guardar na memória o ponto no qual a sequência havia sido interrompida e, para controlar a variação de quantidades, verificar na contagem seguinte se o ponto de parada era o mesmo.

A tomada de partes do corpo como referência para a contagem foi uma prática recorrente em diferentes civilizações. Em muitos casos, evidencia-se que o princípio da contagem deu-se com o auxílio das mãos. De acordo com Dantzig (1970, p. 22), diferentes línguas apresentam indícios dessa origem da contagem, representando originalmente o número "cinco" pela palavra *mão*, o número "dez" por *duas mãos* ou por *homem*. Além disso, essa origem manual da contagem também está presente no fato de que, em algumas línguas, as palavras utilizadas para indicar os quatro primeiros números são as mesmas para indicar os quatro dedos da mão.

Assim, a utilização de uma sequência com cinco, dez ou vinte elementos tem sua origem, respectivamente, na utilização de uma mão, duas mãos ou duas mãos e dois pés. Uma hipótese bastante interessante para a utilização de doze elementos é apresentada por Ifrah (1997). Segundo esse autor, o número doze seria o total de falanges contadas em quatro dedos de uma mão – excetuando-se o polegar, que seria o marcador da contagem.

A enumeração, como estratégia de contagem, precedeu a numeração. A diferença essencial entre esses dois conceitos é que, enquanto na ENUMERAÇÃO o conjunto que conta é acessado concretamente; na NUMERAÇÃO há uma sequência fixa pré-determinada que é seguida oralmente. Isso porque com o desenvolvimento da linguagem o homem passou a dar nomes para as diferentes partes do corpo, utilizando-os na enumeração. Gradualmente, num processo de abstração, não houve mais a necessidade da ação de toque a cada parte do corpo citada. Apenas a expressão oral das palavras correspondentes a essas partes era suficiente para indicar o ponto de parada da sequência. É importante percebermos, no entanto, que embora não haja mais a recorrência concreta ao objeto que conta, no caso as partes do corpo, ainda não há a construção do conceito abstrato de número.

Para tornar mais evidente essa distinção entre enumeração e numeração, tomemos como exemplo a sequência de palavras, relacionadas a partes do corpo, utilizadas pelos habitantes da tribo Bugilai da Nova Guiné. Para eles, a sexta parte do corpo indicada na sequência era o pulso – *gaben* na língua local. Vamos supor que, ao comparar um conjunto de objetos com a sequência, um bugilai tenha parado em *gaben*. Embora não tivesse que tocar as partes do corpo enquanto dizia as palavras na ordem definida, o bugilai só seria capaz de saber que não houve variação no conjunto de elementos se, ao repetir a ordem de palavras, parasse novamente em *gaben*. Ou seja, embora possa ter certeza que o conjunto continua com a mesma quantidade de elementos, isso não significa que tenha sido construído o conceito do número cardinal seis. Como afirma Gundlach (1992, p. 2) "esse tipo de procedimento de cotejo afigura-se mais qualitativo do que quantitativo".

Nesse processo de numeração, caracterizado pela desvinculação com a contagem concreta, os nomes indicados nas sequências constituem-se, na denominação dada por diferentes historiadores, como *palavra-número* ou *palavra numérica*. Para Dantzig (1970), a palavra numérica marcou a transição de números relativos para números absolutos ao favorecer a criação de conjuntos modelo que pudessem ser comparados às coleções que se deseja controlar as quantidades. Se, num primeiro momento, tais palavras tinham caráter qualitativo, indicando o ponto de parada da sequência vocal, nessa transição elas passam a indicar o aspecto cardinal do conjunto observado. As palavras escolhidas pelos diferentes agrupamentos humanos para tal representação foram aquelas relacionadas com a experiência cotidiana dos povos. Assim, por exemplo, de acordo com Ifrah (1997, p. 45, grifo do original), usou-se "*sol*, *lua* ou *membro viril*, para um; os *olhos*, os *seios* ou as *asas de um pássaro* para dois; o trevo, a '*multidão*' ou a '*massa*' para três; as *patas de um animal* para quatro etc...".

Esse aspecto *cardinal*, baseado na correspondência entre o conjunto que se deseja controlar a quantidade e um conjunto modelo definido para representá-lo, embora essencial para o desenvolvimento do conceito de número, ainda não é suficiente para a construção do conceito de número natural.

A contagem abstrata pressupõe a compreensão do conceito de *sucessor*. Ou seja, numa sequência ordenada de objetos é possível atribuir a cada objeto um valor correspondente à sua ordem na sequência, que supera em uma unidade o valor atribuído ao objeto anterior.

Sendo assim, tanto o aspecto ordinal quanto o aspecto cardinal são essenciais na constituição do conceito de número, embora na nossa experiência cotidiana com os números o segundo seja mais evidente. Como afirma Dantzig (1970, p. 21),

> Aprendemos a passar com tanta facilidade dos números cardinais para os ordinais que os dois aspectos do número nos parecem apenas um. Para determinar a pluralidade de uma coleção, isto é, seu número cardinal, não nos preocupamos mais em encontrar uma coleção modelo com a qual possamos compará-la: nós a contamos. E nosso progresso na Matemática deve-se ao fato de termos aprendido a identificar os dois aspectos do número. Pois, apesar de estarmos realmente interessados no número cardinal, este último é incapaz de criar uma Aritmética.

Podemos concluir, desse modo, que esses dois aspectos do número, cardinal e ordinal, implicam a essência do *conceito de número natural* como revestido, tanto da noção da correspondência, quanto da noção de ordenação. Ao serem constitutivos do conceito de número, tais elementos permitiram a esse conceito responder à necessidade humana de controlar quantidades e, de forma especial, permitiram o desenvolvimento da aritmética.

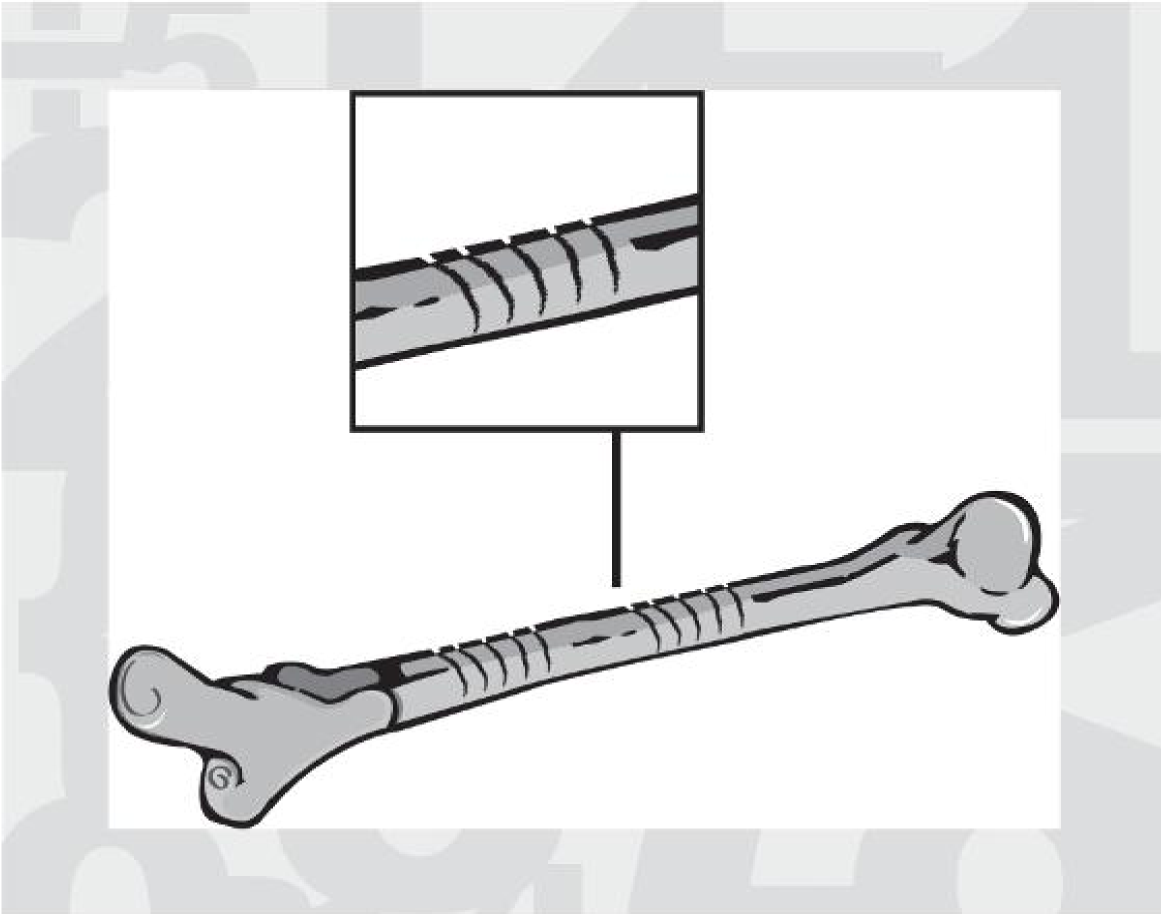
1.3 Sistemas de numeração: alguns exemplos históricos

No decorrer da história da humanidade, foram desenvolvidas diferentes estratégias para o registro e a representação da variação de quantidades. Há indícios de que algumas dessas representações são, inclusive, anteriores ao desenvolvimento da escrita.

O entalhe na madeira ou em ossos de animais foi, provavelmente, uma das primeiras estratégias encontradas pelos humanos primitivos para a contagem. Materiais como esses foram encontrados em sítios arqueológicos de aproximadamente quarenta mil anos. Ou seja, há aproximadamente 40.000 anos nossos ancestrais já buscavam registrar quantidades!

Em alguns desses materiais foram encontradas marcações que indicam uma estratégia de agrupamento dos entalhes de cinco em cinco unidades:

Figura 1.1 – Osso entalhado com agrupamento de cinco unidades



Crédito: Abel Chang.

O *agrupamento* foi certamente uma estratégia anterior à contagem. Embora o número de elementos agrupados tenha variado entre os muitos povos que se utilizaram dessa estratégia, é comum encontrarmos, em muitos dos sistemas de numeração antigos, pistas que nos levam a deduzir a origem de uma contagem baseada no uso das mãos.

Assim, encontramos sistemas de numeração que têm como fundamento o uso de cinco elementos diferentes para representar as cinco primeiras unidades, o que indica o uso de uma mão para a contagem. Da mesma forma, dez elementos para duas mãos, quinze para duas mãos e um pé ou, ainda, 20 para as duas mãos e os dois pés.

Há ainda sistemas de numeração mais simples que utilizam apenas duas ou três palavras-numerais. Dantzig (1970) relata que sistemas assim eram encontrados no começo do século XX em tribos da África e da Austrália. No entanto, pesquisas recentes na área da antropologia e da linguística revelam que tribos indígenas da Amazônia brasileira utilizam-se de uma contagem baseada em representações independentes apenas para as quantidades um e dois.

Os índios da tribo Arara, que vivem no Vale do Médio Xingu, por exemplo, referem-se às quantidades de 1 a 8 como combinações das quantidades 1 e 2. As palavras utilizadas por esses indígenas para indicar tais quantidades são as seguintes:

- 1 – *anane*
- 2 – *adak*
- 3 – *adak anane*
- 4 – *adak adak*
- 5 – *adak adak anane*
- 6 – *adak adak adak*
- 7 – *adak adak adak anane*
- 8 – *adak adak adak adak*

Embora pudéssemos levantar a hipótese de que há uma espécie de aritmética na representação, linguistas estudiosos da cultura local indicam que a forma de pensar dos Arara é binária (Green, 1997). Assim, por exemplo, *adak anane* não significa 3 e, sim, representa um par e uma unidade. Esses indígenas desenvolveram também outras palavras-numerais derivadas de uma contagem concreta com partes do corpo:

Quadro 1.1 – Palavras-numerais desenvolvidas pelos índios da tribo Arara

Quantidade	Palavra-numeral	Significado
5	*jedun-ne*	lado-só
10	*omiat omiat*	mão mão
15	*omiat omiat puguõo jedun-ne*	mão mão pé lado-só
20	*omiat omiat puguõo puguõo*	mão mão pé pé

A contagem binária parece ter antecedido o desenvolvimento de algumas contagens decimais. Dantzig (1970) apresenta indícios dessa base nas línguas francesa e inglesa. Assim, temos que enquanto no inglês *thrice* pode significar tanto "três vezes" quanto "muito", em francês parece haver relação entre *trés* ("muito") e *trois* ("três").

É importante observarmos que embora a numeração dos Arara permita a comunicação de algumas quantidades, ela é extremamente limitada quando o número de objetos cresce em demasia. Um aspecto que contribui para isso é o reduzido número de elementos independentes que constituem esse sistema de numeração.

O sistema de numeração binário tem utilidade essencial no âmbito da tecnologia. O funcionamento de computadores tem por base tal sistema, uma vez que a maioria dos componentes eletrônicos que os constituem tem dois estados possíveis: fechados ou abertos (para transistores), carregados ou descarregados (para capacitores) etc. Embora para a memória humana fazer a representação de quantidades muito grandes no sistema binário seja um problema por causa da extensão da representação, isso, evidentemente, não representa limitação para a máquina.

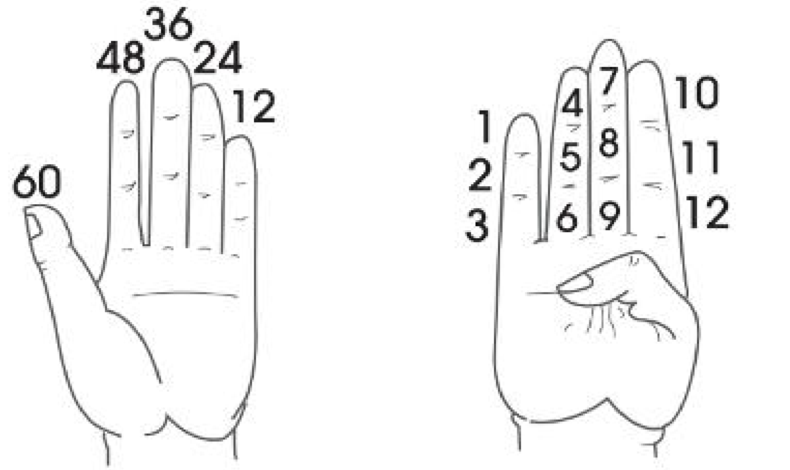
O número de signos independentes utilizados para a representação das quantidades define a *base* do sistema de numeração. Vejamos alguns exemplos mais antigos.

Os primeiros registros escritos de numeração, atribuídos aos sumérios e aos egípcios, datam de aproximadamente 3.500 a.C. (Ifrah, 1997, p. 198).

Enquanto os egípcios criaram um sistema de agrupamento simples, com base dez, os sumérios elaboraram um sistema de numeração de base sexagesimal.

Segundo Ifrah (1997), uma hipótese plausível para a base sexagesimal dos sumérios tem como fundamento a própria história de constituição desse povo. Ao incorporar diferentes populações, houve provavelmente a junção de povos que tinham uma base numérica 5 com povos que tinham base numérica 12. Assim, a contagem das falanges dos dedos de uma mão associou-se à contagem dos dedos da outra:

Figura 1.2 – Base sexagesimal do sistema de numeração suméria



Contagem dos dedos, cada um valendo 12

Contagem das falanges pelo polegar oposto, cada uma tendo valor de unidade

Fonte: Ifrah, 1997, p. 189.

Ainda hoje encontramos sinais desse sistema de numeração, por exemplo, na divisão das horas, minutos e segundos em 60 partes cada e na divisão da circunferência em 360º. O trabalho didático com esse sistema de numeração, além do seu valor intrínseco na compreensão da estrutura dos sistemas de numeração, pode favorecer a compreensão dos estudantes sobre as transformações entre horas e suas frações.

As primeiras representações de algarismos criadas pelos sumérios eram feitas por meio de marcações em baixo relevo em argila, como entalhes ou impressões circulares. Foram criados símbolos para representar as quantidades 1, 10, 60, 600, 3.600 e 36.000. Essas pri-meiras representações foram decorrentes de um período anterior caracterizado pelo que chamamos de *numeração concreta*, na qual as quantidades eram representadas por cones, esferas e bastões. Por volta do século XXVII a.C., tais algarismos já haviam adquirido o caráter cuneiforme:

Figura 1.3 – Numeração suméria cuneiforme, utilizada a partir de 2650 a.C.

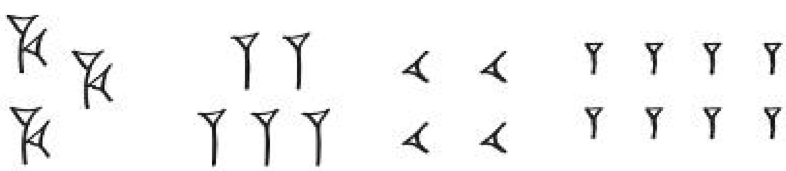
Fonte: Adaptado de Ifrah, 1997, p. 198.

Como podemos ver na Figura 1.3, embora a base da numeração suméria seja sexagesimal, possui influências da base decimal. Alguns autores entendem que, devido ao grande número de sinais que precisariam ser memorizados na base 60, os sumérios utilizaram a "dezena como uma unidade auxiliar que descarregava a memória" (Ifrah, 1997, p. 163).

O sistema de numeração dos sumérios baseava-se no princípio aditivo. Isso significa que eram capazes de representar qualquer quantidade repetindo, quantas vezes fossem necessárias, os símbolos básicos.

Como os sumérios representariam na numeração cuneiforme a quantidade 2.148?

Para representar a quantidade 2.148, por exemplo, os sumérios utilizariam a seguinte representação:



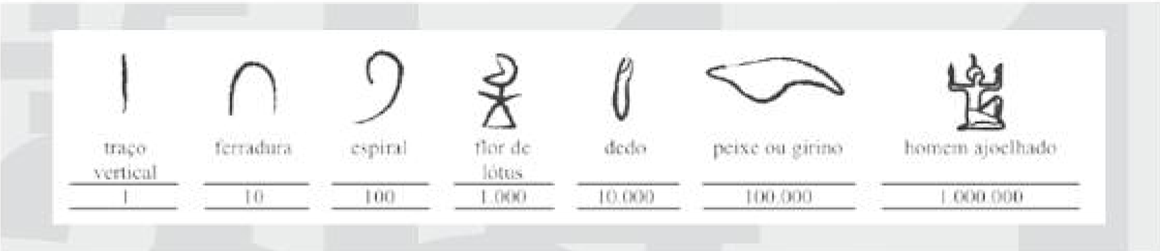
Isso porque essa representação pode ser entendida como:

600+600+600 + 60+60+60+60+60 + 10+10+10+10 + 1+1+1+1+1+1+1+1

Podemos identificar nessa escrita numérica a ausência do princípio multiplicativo.

Os egípcios, por sua vez, elaboraram um sistema de numeração decimal caracterizado pelo agrupamento simples. Eles criaram símbolos para representar a unidade e as seis primeiras potências de dez. Tais símbolos eram repetidos quantas vezes fossem necessárias desde que o número de repetições fosse menor do que a potência seguinte:

Figura 1.4 – Numeração egípcia, utilizada há aproximadamente 3400 a.C.



Como os egípcios representariam a quantidade 3.425?

A quantidade 3.425, por exemplo, seria representada da seguinte forma:

Assim como a suméria, também esse sistema de numeração apoiava-se no princípio aditivo e, dessa forma, os símbolos poderiam ser utilizados em qualquer ordem.

Embora os egípcios tenham adotado a base decimal, o sistema de numeração utilizado por eles diferencia-se substancialmente do sistema de numeração indo-arábico que utilizamos.

Um ponto essencial dessa diferença é o *princípio posicional* ou *princípio da posição*. De acordo com esse princípio, um símbolo tem valores diferentes dependendo da posição que ocupa na escrita do número.

De forma genérica, um *sistema de numeração posicional de base b* possui *b* símbolos, representando as quantidades de *0* a *b-1*. Dependendo da posição ocupada na escrita do número, cada símbolo é multiplicado por uma potência da base. Sendo assim, qualquer quantidade N pode ser representada em qualquer base, de apenas uma forma:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + ... + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

Nessa forma de escrita, cada um dos coeficientes a_n, a_{n-1}... a_0 representa alguma quantidade entre *0* e *b-1*.

Para exemplificarmos o que foi dito acima, tomemos como exemplo um sistema de numeração posicional de base 4. Nesse caso, ele terá 4 símbolos, representando as quantidades de 0 a 3. Supondo que os símbolos de tal sistema sejam 0, 1, 2 e 3, como ficaria a expansão nesse sistema numérico da quantidade 46?

A quantidade 46, no sistema de numeração posicional de base 4, descrito acima, será escrita da seguinte forma:

$$2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 \Rightarrow (46)_{10} = (232)_4$$

Ou seja, a quantidade 46 representada no sistema de numeração decimal como 46 será representada nesse sistema de numeração de base 4 como 232.

Muitos dos erros de cálculo dos estudantes da educação básica referem-se à ausência de apropriação conceitual acerca do valor posicional e da base no sistema de numeração decimal. O trabalho com diferentes sistemas de numeração tem o objetivo de explorar tais elementos. Para isso, não se espera que o professor proponha aos estudantes uma lista interminável de transformações ou escritas em diferentes bases, mas que explore as limitações de cada sistema, de modo que seja possível o reconhecimento das propriedades do sistema de numeração decimal e dessa forma a apropriação, pelos estudantes, do sentido de cada ação desencadeada na realização de um algoritmo aritmético. Trabalhando com essa etapa da escolarização, é comum encontrarmos, por exemplo, uma soma simples resolvida da seguinte forma:

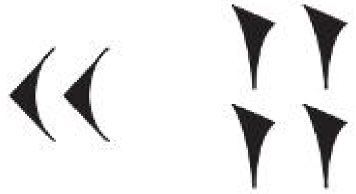
$$
\begin{array}{r}
234 \\
+\ 182 \\
\hline
3.116
\end{array}
$$

Reflita sobre como o trabalho pedagógico com a estrutura do sistema de numeração pode contribuir na superação da dificuldade identificada nesse cálculo*.

O primeiro registro que temos de um sistema posicional foi o proposto pelos babilônios, por volta de 2000 a.C. Tal sistema pode ser classificado como misto, uma vez que, tendo uma base sexagesimal, trabalhava com agrupamentos simples até 60 e, depois disso, utilizava o *princípio posicional*. Como no caso dos sumérios, a dezena era tomada como unidade auxiliar. Os símbolos utilizados para a unidade e para o 10 eram respectivamente:

Figura 1.5 – Representação de números dos babilônios

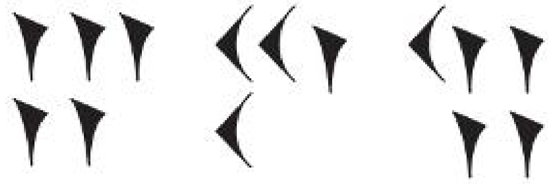
Assim, por exemplo, para representar 24 os babilônios escreviam:

$24 = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 =$ 

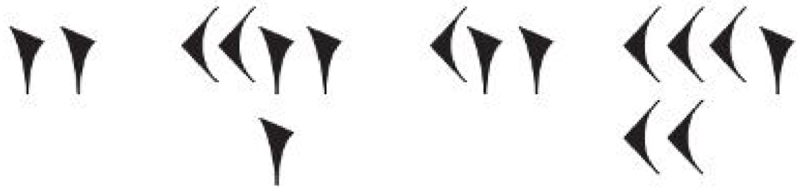
Já para números maiores que 60, a representação era feita de acordo com o valor posicional dos números da base, que eram representados

* Trabalharemos mais detidamente com esse tema no próximo capítulo.

de acordo com o agrupamento decimal. Segundo esse critério, temos, por exemplo:

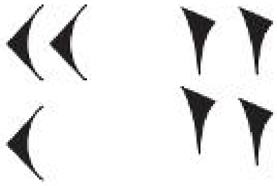


$$19.874 = 5 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60 + 14$$

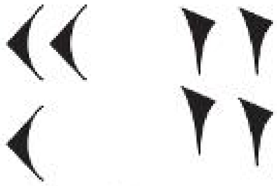


$$515.571 = 2 \cdot 60^3 + 23 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 51$$

Tal sistema, no entanto, possuía representações ambíguas. O número escrito como

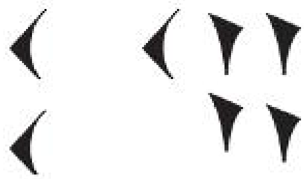


poderia ser entendido como



34

ou ainda



$$20 \cdot 60 + 14$$

Para evitar esse tipo de problema, alguns textos dos antigos babilônios deixavam um espaço em branco para indicar a ausência de uma potência de 60. A partir do século III a.C, foi introduzido um sinal cuneiforme de duas cunhas pequenas inclinadas para indicar tal ausência. Há algumas divergências entre historiadores da matemática acerca dos usos desse sinal. Eves (2004) e Vogeli (1992) entendem que ele nunca era utilizado no final do número. Ifrah (1997, p. 310), no entanto, citando pesquisa mais recente, afirma que o zero babilônico tinha tanto função intermediária quanto terminal na escrita dos números.

De qualquer forma, o zero babilônico não pode ser identificado com o nosso, uma vez que, embora indicasse a ausência de determinada potência, não era entendido como uma quantidade.

1.4 O sistema de numeração decimal indo-arábico

Criado pelos hindus por volta de 250 a.C., o sistema de numeração que utilizamos começou a disseminar-se na Europa apenas no século XII d.C., quando o livro do matemático persa al Khowârizmî foi traduzido para o latim. Esse livro, escrito em 825 d.C., descrevia tais numerais, bem como todo o sistema de numeração hindu.

De acordo com Eves (2004), os primeiros registros dessa numeração, datados dos séculos I e II a.C, não continham nem o zero nem o princípio posicional. Embora rudimentar, essa numeração continha a ideia abstrata de número ao apresentar "signos independentes de qualquer intuição sensível" (Ifrah, 1998, p. 265) para os nove primeiros algarismos, representando as unidades simples. Ou seja, não havia para os hindus a necessidade de uma representação que evocasse visualmente a quantidade correspondente.

Com o tempo, os sábios hindus passaram a comunicar oralmente os números por meio de potências de dez. Atribuindo a cada potência um nome, indicavam à frente da potência de dez a quantidade de vezes que ela deveria ser considerada. Segundo Ifrah (1998, p. 268), os nomes utilizados para indicar as potências de dez eram os seguintes: "10 dasa, 100 sata, 1.000 sahasra, 10.000 ayuta, 100.000 laksa, 1.000.000 prayuta, 10.000.000 koti, 100.000.000 vyarbuda, 1.000.000.000 padma". Assim, por exemplo, o número 32.541, usando nossa linguagem para as quantidades de vezes das potências, seria falado como "um, quatro dasa, cinco sata, dois sahasra, três ayuta", o que equivale a dizermos atualmente um, quatro dezenas, cinco centenas, dois milhares e três dezenas de milhares.

Matematicamente, essa organização pode ser representada como:

$32.541 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Para a representação escrita, porém, houve a necessidade de um símbolo que indicasse a ausência de determinada potência. Para isso, os hindus utilizaram a palavra *sunya,* que significava *vazio* ou *lacuna*. Alguns autores (Dantzig, 1970; Eves, 2004) relatam que a palavra *zero* que utilizamos tem sua origem no *sunya* indiano. Isso porque *sunya* teria sido traduzido como *sifr* em árabe e, posteriormente, latinizado na Itália como *zefhirum* e utilizado na Alemanha como *cifre* – leve modificação de *sifr*. Tais modificações teriam dado origem as nossas palavras *zero* e *cifra* – a última indicando atualmente dígito ou algarismo.

Diferentemente da utilização atribuída pelos babilônios, o zero indo-arábico tem uma dupla função. Por um lado indica a posição vazia de uma potência de dez e, por outro, indica a ausência de quantidade, o nada, tornando-se assim um algarismo operatório. Embora a criação do zero seja atribuída aos hindus, não é possível precisar o momento histórico de sua invenção, nem se sofreu influências de outras culturas, uma vez que sua presença, ainda que de forma parcial e incompleta, tenha sido identificada em outros sistemas de numeração antigos.

Podemos afirmar, no entanto, que essa mudança de compreensão acerca do zero, agora considerado em sua *dupla função* – posição vazia e algarismo que representa o nada – juntamente com a adoção do *princípio do valor posicional,* constituiu-se como pilar essencial para o desenvolvimento da aritmética e de toda a matemática.

Em síntese, o Sistema de Numeração Decimal indo-arábico (SND) caracteriza-se por agregar as seguintes características:

- número finito de signos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0);
- nome para cada signo utilizado no sistema;

- dupla função do zero;
- valor posicional na base dez.

1.5 O número natural

A ideia primitiva de número, como vimos nesse primeiro capítulo, desenvolveu-se tendo como apoio o conceito de cardinalidade, ou seja, em um primeiro momento o número cardinal buscava apenas responder à quantidade de elementos de um determinado conjunto por meio da correspondência biunívoca. À medida que se desenvolveu a contagem e o conceito de sucessor, o número passa a representar não apenas a quantidade como também a indicar a ordem em uma sequência pré-definida de termos.

Dessa forma, na ideia de número natural estão presentes tanto o aspecto cardinal quanto o aspecto ordinal do número. Cada um deles pode ser tomado como ponto de partida para a definição matemática do conjunto dos números naturais (IN). Esses dois diferentes caminhos foram propostos, respectivamente, pelo matemático russo George Cantor (1845–1918) e pelo italiano Giuseppe Peano (1858–1932).

Cantor buscou a fundamentação dos naturais por meio de uma relação de cardinalidade. Ou seja, entende-se que o número representa a quantidade de elementos de um conjunto. Para isso, recorreu a um ramo da matemática moderna chamado de *Teoria dos Conjuntos*, do qual foi um dos criadores.

Já Peano, na busca da axiomatização* dos números inteiros, propõe no livro *Arithmetices principia nova methodo exposita*, publicado em 1889, a formalização dos números naturais tendo por base seu aspecto ordinal. Para isso, assume a existência do *zero*, do *sucessor* e do *número natural*. A partir desses conceitos fundamentais, Peano

* Um axioma é uma afirmação que é tomada como verdadeira, sem demonstração, por ser considerada ou evidente ou consensual ou, ainda, por ter um caráter normativo dentro da construção de determinada teoria.

define cinco AXIOMAS que podem ser expressos em linguagem corrente como:

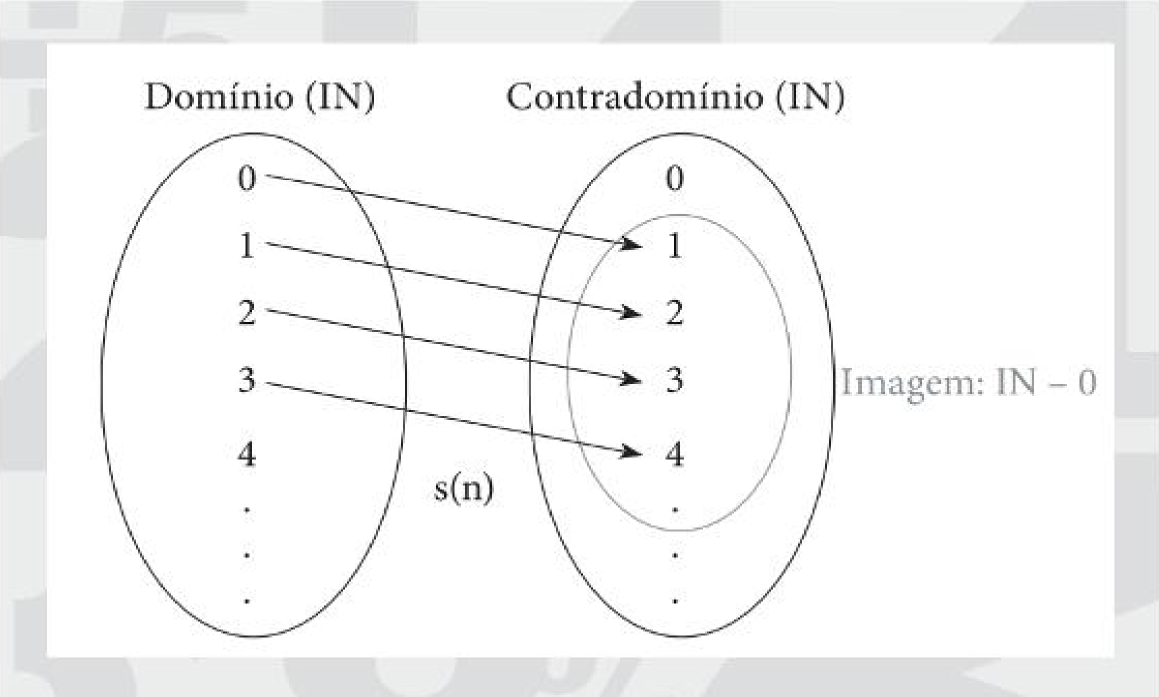
1) Zero é um número natural.
2) Todo número natural tem sucessor.
3) Zero é o único número natural que não é sucessor de outro número.
4) Se dois números têm o mesmo sucessor, então eles são iguais.
5) Se um conjunto contém o zero e os sucessores de todos os seus elementos, então esse conjunto é o conjunto dos números naturais.

Esse último axioma é bastante utilizado e é conhecido por *axioma da indução.*

Há uma questão que merece ser comentada na construção formal dos números naturais, que é a discussão estabelecida na matemática sobre o fato do zero ser ou não natural. Vamos encontrar as duas opções em diferentes produções sobre aritmética ou sobre a introdução à Teoria dos Números. A opção de não considerar-se o zero como número natural apoia-se no fato de que, como vimos ao longo deste capítulo, em suas primeiras utilizações ele não era compreendido como um número e sim como um algarismo que tinha a função de indicar a ausência de quantidade em uma determinada ordem posicional na escrita de um número. Em geral, a maioria dos livros didáticos brasileiros adota a opção $0 \in \mathrm{IN}$. Foi essa a que seguimos. Quando quisermos indicar o conjunto dos números naturais sem o zero utilizaremos a notação IN^*.

Podemos, ainda, escrever os axiomas de Peano em linguagem matemática, utilizando-nos de ferramentas como os conjuntos e as funções. Para isso, consideremos o conjunto IN e a função s(n), que a cada número associa o seu sucessor. Podemos escrever $s: \mathrm{IN} \to \mathrm{IN}$, uma vez que, como vimos, todo número natural tem sucessor. A função é injetora, uma vez que dois números naturais distintos não podem ter o mesmo sucessor. Vamos lembrar que uma função injetora é aquela que para valores diferentes do domínio associa valores diferentes da imagem. No caso da função s(n):

Figura 1.6 – Diagrama de Venn para a função s(n)



Compreendendo tais conceitos, podemos escrever os axiomas de Peano em linguagem matemática como:

P.1 Existe uma função s: IN→IN que, para cada $n \in$ IN associa um elemento $s(n) \in$ IN, chamado de sucessor de n.

P.2 Existe um único elemento $0 \in$ IN, tal que $0 \notin Im(s)$. Ou seja, $0 \neq s(n)$, para todo $n \in$ IN;

P.3 A função s: IN→IN é injetora;

P.4 Se para um subconjunto A de IN é verdade que:

$0 \in A$;

Se $n \in A$, então $s(n) \in A$.

Então, A = IN.

A partir da axiomatização de Peano para o conjunto dos números naturais (IN), baseada na ordinalidade, é possível toda a construção lógica das operações básicas em IN e, portanto, dos fundamentos da aritmética. A partir do axioma da indução decorre um instrumento bastante importante nas demonstrações matemáticas, que é o *Princípio da Indução*. Embora a relação de ordem seja explorada no capítulo seguinte, vamos assumir por enquanto o sentido usual do termo *maior*.

Teorema 1.1 – Princípio da Indução Matemática ou Princípio da Indução Finita

Seja a um número natural e P(n) uma propriedade referente a todo natural maior ou igual que a tal que:

- $P(a)$ é verdadeira, ou seja, a propriedade é válida para o natural a;
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ou seja, se a propriedade é verdadeira para n, então também é verdadeira para $(n+1)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural maior ou igual a a.

No próximo capítulo aprofundaremos nosso estudo com as operações básicas em IN.

Síntese

Este capítulo aborda o conceito de número natural, baseado na construção histórica, destacando seus aspectos ordinal e cardinal. Partindo da ideia de senso numérico, vimos indícios de que a contagem concreta iniciou-se com o auxílio de partes do corpo, em especial de dedos e mãos.

Por meio de exemplos de sistemas de numeração antigos, evidenciou-se a importância da presença ou ausência do zero em sua dupla função e do princípio do valor posicional para a eficiência de tais sistemas. Tais elementos, aliados à base decimal, permitiram a exploração do sistema de numeração decimal. Finalizamos o capítulo com a construção axiomática de Peano para os números naturais.

Indicações culturais

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 73-155.

O capítulo indicado aborda as dificuldades encontradas por estudantes tanto na compreensão do conceito de número quanto no *desenvolvimento de operações aritméticas básicas. São indicadas estratégias que contribuem para a aprendizagem do conceito.*

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 1, p. 5-6, 1982.

Neste artigo o autor aborda diferentes controvérsias envolvendo conceitos e notações matemáticas. Em especial, no item "Zero é um número natural?", o autor explora a ideia de que a inserção do zero entre os números naturais é uma opção que vai ao encontro da conveniência e da circunstância em que tal opção é feita. Em particular, são apresentados exemplos no âmbito da álgebra e da análise que evidenciam as possibilidades apontadas.

MOURA, M. O. de (Coord.). **Controle da variação de quantidades**: atividades de ensino. São Paulo: Ed. da USP, 1996.

Elaborado coletivamente por professores participantes da Oficina Pedagógica de Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, este material apresenta diferentes situações desencadeadoras da aprendizagem do conceito de número para serem propostas para estudantes da educação básica.

Atividades de autoavaliação

1. Sobre o conceito de *número natural*, é correto afirmar:
   a) Não é exclusivo do humano, uma vez que alguns animais possuem o senso numérico.
   b) Foi desenvolvido historicamente no período chamado de *matemática moderna*, quando foi dada ênfase ao conceito de *conjunto* no ensino da matemática.
   c) Seu aspecto cardinal revela-se por meio do conceito de *sucessor*.
   d) Não se limita à correspondência biunívoca entre dois conjuntos, o que conta e o que é contado, uma vez que é revestido tanto da noção da correspondência quanto da noção de ordenação.

2. Os índios da tribo Arara expressariam a quantidade 27 como:

a) *omiat omiat adak adak anane.*

b) *omiat omiat puguőo puguőo adak anane.*

c) *omiat omiat puguőo puguőo adak adak adak anane.*

d) *omiat omiat puguőo jedun-ne adak adak anane.*

3. O número representado na numeração egípcia antiga como

corresponde, no sistema de numeração decimal, a:

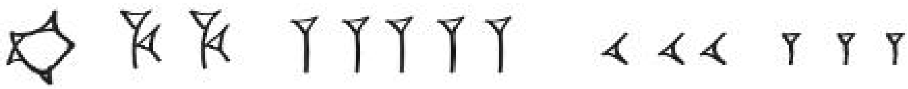
a) 734.512

b) 473.521

c) 125.374

d) 1.250.374

4. Identifique entre as alternativas a seguir a que coincide com a representação egípcia para a quantidade escrita em numeração suméria como



a) 

b) 

c) 

d) 

5. Sobre o sistema de numeração decimal indo-arábico, é FALSO afirmar:

    a) É um sistema que possui um número infinito de signos.

    b) Disseminou-se na Europa apenas por volta do século XII d.C.

    c) Só foi possível devido aos conceitos de zero, valor posicional e base.

    d) Foi uma criação humana fundamental para o desenvolvimento da matemática e, em particular, da aritmética.

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Crie uma forma de comunicar aos seus colegas de classe a sua idade sem usar o sistema de numeração decimal indo-arábico.

2. A forma de representação que você criou é eficiente para comunicar o valor do salário mínimo? E a quantidade de habitantes de sua cidade?

3. Identifique as limitações do "seu sistema de numeração" tomando como referência as características principais do sistema de numeração decimal indo-arábico.

4. Considerando o conceito de base abordado, como seria a representação na base 2 (base binária) do número 9 (no SND)?

Atividade aplicada: prática

Esta é uma atividade para você realizar em experiência de prática profissional. Caso você ainda não lecione, procure uma escola perto de sua casa e converse com algum professor sobre a possibilidade de participar de aulas.

Solicite aos estudantes que, reunidos em grupos, elaborem uma forma de representação de quantidades. A seguir, proponha-lhes um desafio: comunicar à classe, utilizando o sistema criado, a soma das idades das mães (ou qualquer outra pessoa) dos componentes do grupo. Depois da socialização, proponha aos estudantes que discutam os vários sistemas criados, suas vantagens e limitações. A partir dessa discussão, destaque os elementos essenciais que caracterizam o sistema de numeração decimal.

Operações numéricas 2

No surgimento da ideia de número como controle de variação quantitativa de grandezas, como controle do movimento de quantidades, está presente a necessidade de OPERAR com quantidades, com *número*. A formalização de propriedades operatórias numéricas não poderia estar distante dessa realidade prática. Se assim ocorresse não teríamos qualquer relação da atividade prática numérica com a formalização teórica das operações numéricas e, consequentemente, as operações matemáticas não serviriam para conhecer a realidade e nem nos permitiria intervir nela. Na atividade humana, a simples contagem de objetos está relacionada com a operação de adição um a um. A partir dessa ideia outras vão surgindo, como a determinação de uma parcela conhecendo-se a outra parcela e a soma delas, o que caracteriza a subtração, ou ainda a regularidade de se adicionar parcelas iguais, caracterizando a multiplicação ou a regularidade de se multiplicar o mesmo número, essência da potenciação. O pensamento não se esgota aí e, neste capítulo, além da adição, da subtração e da multiplicação, abordaremos a divisão, a radiciação e a logaritmização, conceitos que partiram da "inversão" de outras operações.

O processo de organização das operações numéricas no desenvolvimento da estrutura aritmética, sua formalização, inicia-se com a busca de uma generalização a partir de regularidades que ocorrem com os movimentos numéricos. A busca dessa generalização nem sempre é direta e simples. Inconsistências têm que ser sanadas mesmo sem o apoio da prática operacional com objetos. Essa é a dialética de construção do conhecimento entre a prática com objetos e a teorização.

A definição e as propriedades das operações numéricas fundamentam um campo numérico (conjunto numérico) da mesma maneira que o constituem. Trataremos fundamentalmente neste capítulo das operações no campo dos números naturais, para podermos refletir melhor sua essência, embora, em alguns casos, comentaremos sobre as possibilidades de tais operações em outros campos numéricos.

2.1 Adição

A essência do conceito de número em sua constituição é, como abordamos no primeiro capítulo, a correspondência biunívoca. Nesse contexto, dizemos que a essência, o princípio das operações numéricas é a contagem. Vejamos como isso ocorre:

Como obter a soma 7 + 4?

Essa pergunta provavelmente teria uma resposta como: "obviamente 11" para uma criança ou um adulto que já aprendeu a adição no nosso sistema de numeração. Temos nessa resposta o resultado, mas a pergunta não foi "QUANTO é 7 + 4?" e sim COMO obter tal soma.

A contagem está muitas vezes internalizada no indivíduo de tal forma que temos dificuldades em nos libertar de procedimentos cotidianos e pensarmos cientificamente.

Por isso que nos axiomas de Peano (apresentados no capítulo 1) a síntese formal do campo dos números naturais corrobora a operação de adição por meio do conceito de ordem numérica. Ou seja, temos no conceito de sucessor o princípio para compreendermos a adição.

No exemplo de como se obtém a soma 7 + 4, no pensamento partimos do número 7, que pertence à sequência numérica (1, 2, 3, 4...) e tomamos seu sucessor quatro vezes, ou seja, o sucessor do sucessor do sucessor do sucessor de 7.

$$\begin{tikzcd} 7 \arrow[r, bend right, "\text{sucessor}"'] & 8 \arrow[r, bend right, "\text{sucessor}"'] & 9 \arrow[r, bend right, "\text{sucessor}"'] & 10 \arrow[r, bend right, "\text{sucessor}"'] & 11 \end{tikzcd}$$

Esse é o princípio da ADIÇÃO que utilizamos no nosso sistema de numeração. Podemos então fazer o mesmo para calcular 234 + 788? Certamente que sim, mas se elaborarmos uma forma de realizar essa soma com menor dispêndio de energia mental certamente seria melhor. Caraça (1989) chama isso de *princípio geral da economia de pensamento*. O ser humano foi capaz de desenvolver técnicas operatórias, que chamamos *algoritmos*, para facilitar certos processos sem, é claro, contradizer a definição de cada operação.

A palavra *algoritmo* tem a mesma origem da palavra *algarismo*, já mencionada no capítulo anterior, ambas derivadas das transformações latinizadas do nome de Al Khowârizmî, que, segundo Ifrah (1997), foram: *Alchoarismi*, *Algorismi*, *Algorismus*, *Algorismo*, e, enfim, *Algoritmo* e *Algarismo*. Essa relação provém da sua obra intitulada *Livro da adição e da subtração segundo o cálculo dos indianos* (traduzindo para o português), que é "o primeiro livro árabe conhecido em que a numeração decimal de posição e os métodos de cálculo de origem indiana são o objeto de explicações detalhadas com numerosos exemplos" (Ifrah, 1997, p. 369).

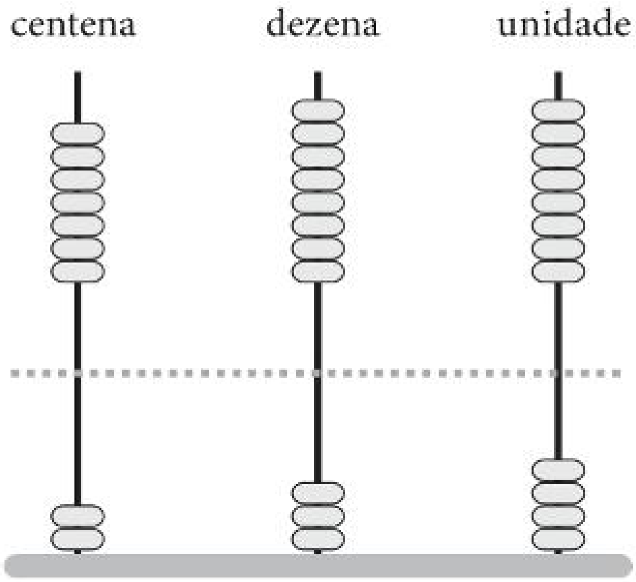
No estudo do desenvolvimento histórico dos números, encontramos também a criação de instrumentos de cálculo, principalmente no campo da comercialização de mercadorias. Mencionaremos aqui um deles: o ÁBACO. Interessante notar que Leonardo de Pisa (cerca de 1180-1250), conhecido como Fibonacci, redigiu um tratado de aritmética intitulado *Tratado do ábaco* (traduzindo para o português).

Abordaremos aqui não a forma original do ábaco, mas sim a lógica do seu funcionamento, a fim de podermos compreender as operações no sistema de numeração posicional.

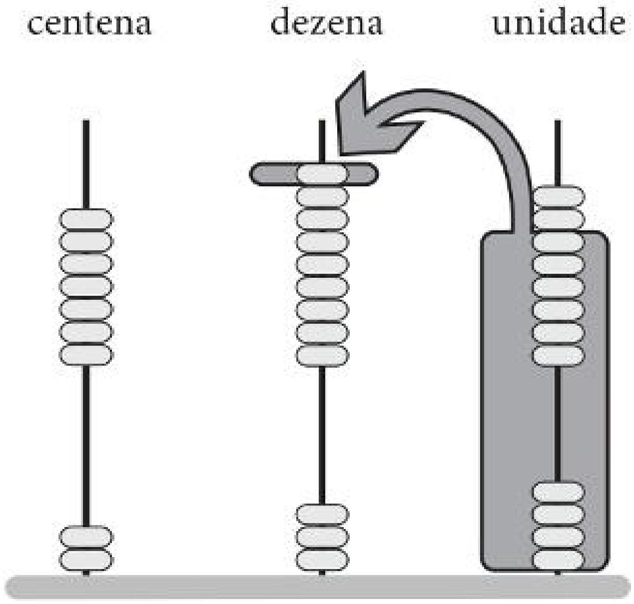
Retomando o exemplo proposto, (234 + 788), temos os seguintes movimentos:

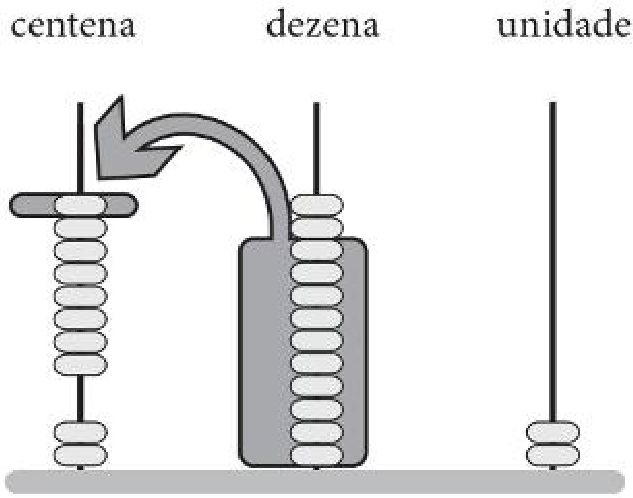
Inicialmente, colocamos a quantidade de peças referentes a cada posição do número 234, conforme abaixo:

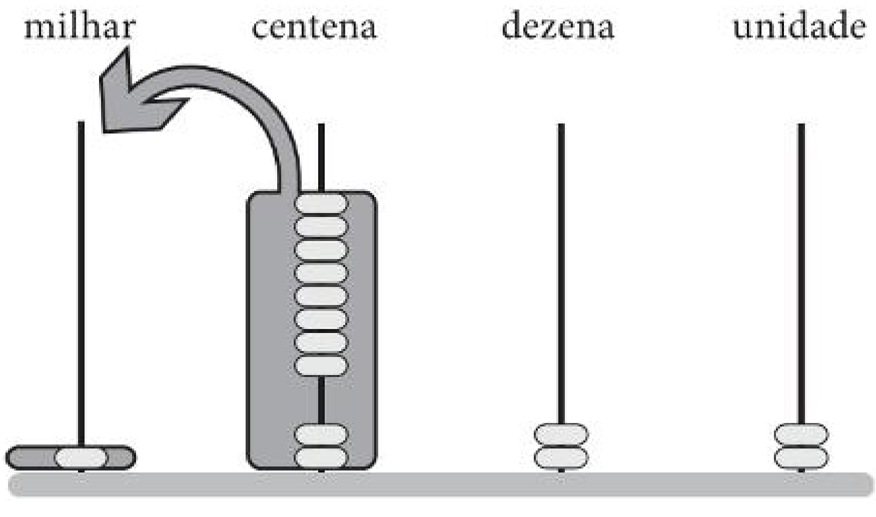
O próximo movimento pode ser o de adicionar a quantidade de peças referente a cada posição do número 788, oito peças na unidade, oito na dezena e sete na centena.

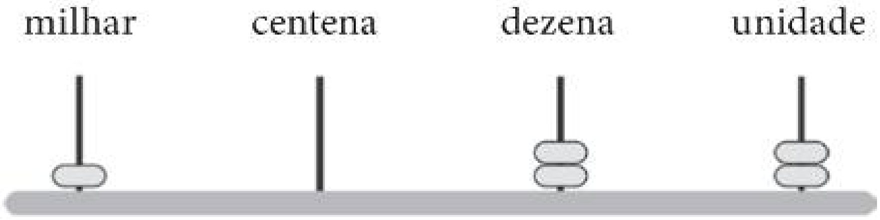


Em seguida, formam-se os agrupamentos da base – no caso base dez – para fazer as trocas. Ou seja, cada agrupamento de dez peças de uma posição é substituído por uma peça na posição seguinte; confira na sequência de ilustrações a seguir. Finalizando a soma, temos 1.022.


centena
dezena
unidade


centena
dezena
unidade

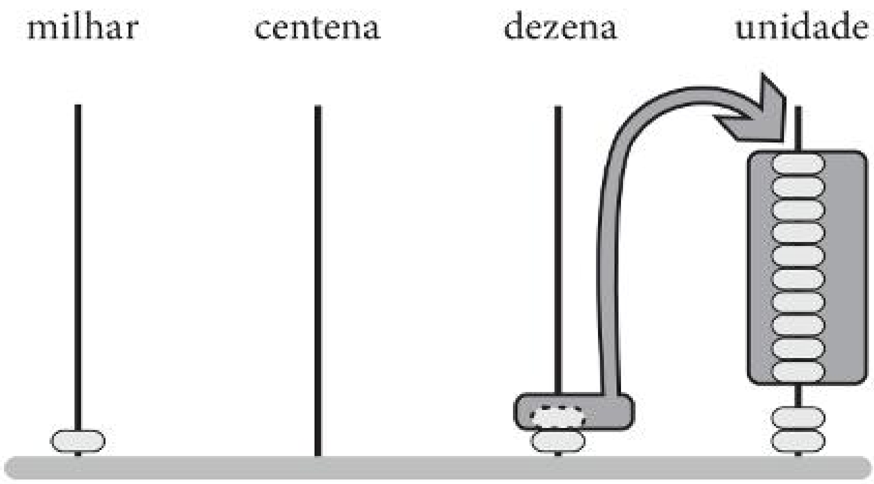

milhar
centena
dezena
unidade



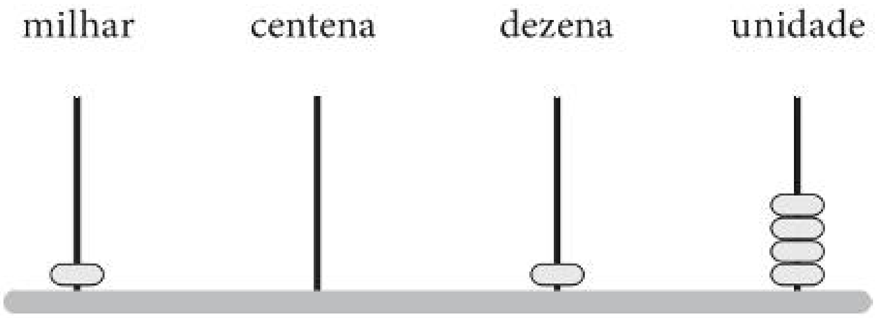
Embora façamos a abordagem da subtração mais adiante, aproveitamos este momento para exemplificar a utilização do ábaco para essa operação.

Vejamos a subtração de 788 da soma 1.022. Para subtrair oito unidades (do número 788) de duas unidades (do número 1.022), desagrupa-se uma unidade da dezena.

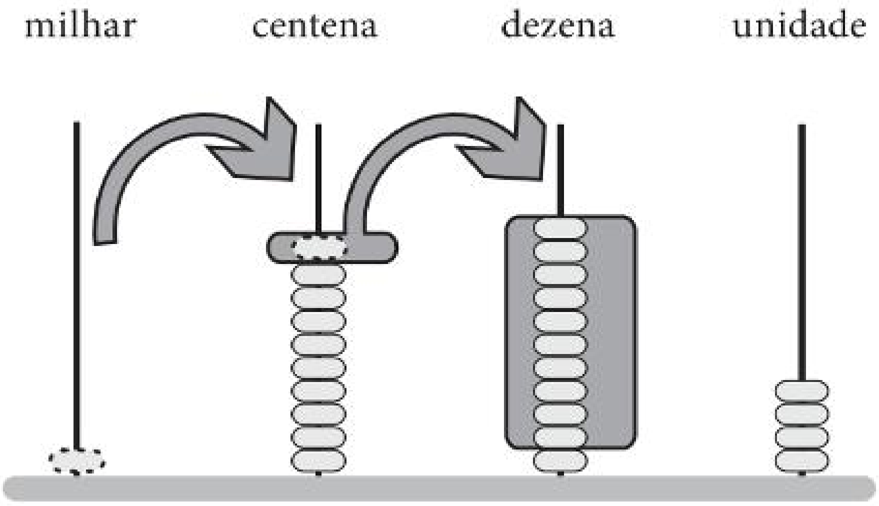
Desagrupamento



A haste das unidades fica com 10 + 2 peças, sendo que, retirando-se 8 peças, resultam 4. Após esse primeiro passo, transformamos 1.022 – 788 em 1.014 – 780. No ábaco aparecerá:



Em seguida, para operar com a posição das dezenas, novamente desagrupa-se da posição da centena. Como essa é zero, ou seja, é uma "casa vazia", vai-se à próxima posição à esquerda. Com os devidos desagrupamentos e subtraindo oito dezenas, ficamos com 934 (usando nossa notação atual), faltando com isso subtrair 7 centenas de 9 centenas, resultando 234.



O ábaco como material pedagógico pode auxiliar o estudante a compreender tanto o sistema posicional como certos algoritmos da adição e da subtração. Ao posicionarmos os algarismos alinhados verticalmente (unidade, dezena, centena, milhar etc.), conforme abaixo, podemos dizer que mentalmente estamos reproduzindo a operação com ábaco, mas agora utilizando os símbolos, os numerais. Por exemplo, os algoritmos podem ser realizados pelos estudantes como:

1 1 → Indicações de agrupamentos das posições precedentes

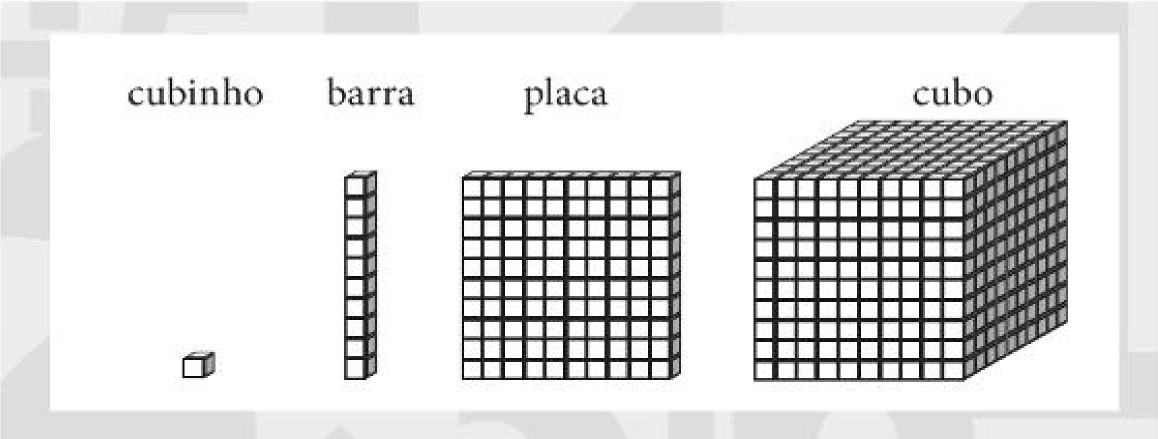
$$\begin{array}{r} 234 \\ 788\ + \\ \hline 1.022 \end{array}$$

1 12 → Indicações do primeiro desagrupamento, o da posição das dezenas

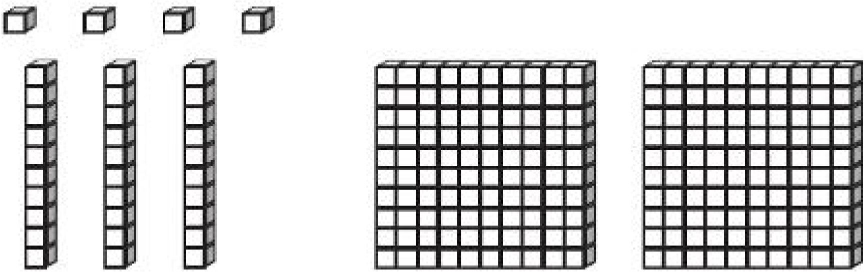
$$\begin{array}{r} 1.0\cancel{22} \\ 788\ - \\ \hline 4 \end{array}$$

O chamado *material dourado*, idealizado por Maria Montessori, junto com o ábaco, tem sido utilizado para o ensino de operações aritméticas no início da escolaridade. O material dourado consiste em um conjunto de peças de quatro tipos: um cubo chamado de *cubinho*, que representa a unidade; um paralelepípedo formado pelo alinhamento de 10 cubinhos – chamado de *barra* –, que representa a dezena, outro paralelepípedo formado pelo alinhamento de 10 barras por seu lado maior – chamado de *placa* – que representa a centena e, por fim, um cubo formado por 10 placas sobrepostas representando a unidade de milhar, conforme ilustração a seguir:

Figura 2.1 – Material dourado



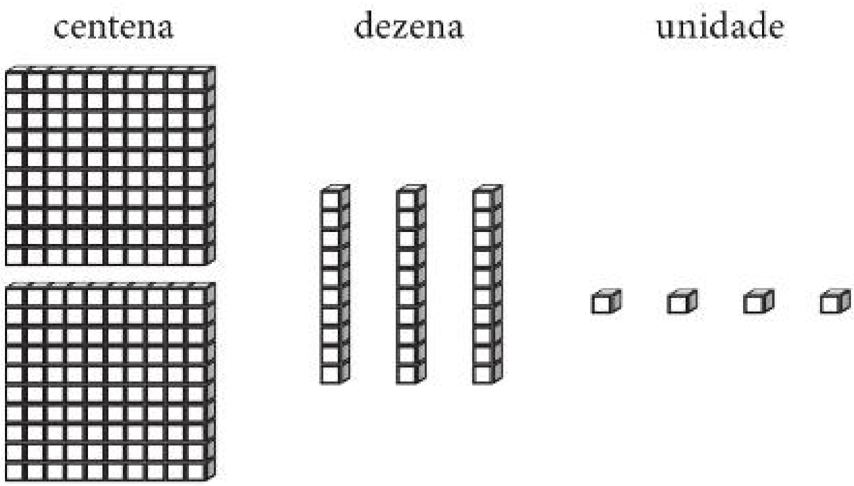
O material dourado tem sido explorado para ensinar as crianças a agruparem de dez em dez. Os procedimentos didáticos que utilizam esse recurso destinam-se à representação de quantidades com o menor número de peças de cada tipo. Por exemplo, o número 234 é representado por duas placas, três barras e quatro cubinhos, conforme ilustração a seguir:



Isso quer dizer que não importa a posição em que esse material está disposto, diferentemente do ábaco.

Os procedimentos didáticos para adicionar e subtrair com esse material estão focalizados nas "trocas", compondo os agrupamentos e os desagrupamentos somente na base dez do sistema numérico. Por exemplo, para obter a soma de 234 com 29, um estudante pode pegar vinte e nove cubinhos ou duas barras e nove cubinhos. Geralmente a orientação do professor é representar o número com a menor quantidade de peças. Em seguida, separa-se o material representativo de 234 (duas placas, três barras e quatro cubinhos). Com esse material, fazer a soma significa juntar todas as peças. Com isso, o estudante irá notar que há ao todo treze cubinhos, cinco barras e duas placas. O passo seguinte constitui-se nos agrupamentos – da base dez – em que se deverá trocar 10 cubinhos por uma barra. Como não há outro agrupamento a fazer nesse exemplo, ao final obtém-se três cubinhos, seis barras e duas placas, simbolizando o número 263.

As crianças podem ter dificuldades de associar o sistema posicional se utilizarem somente o material dourado. Observa-se algumas práticas didáticas que buscam minimizar essa dificuldade, com a organização das peças na ordem da direita para a esquerda das peças menores para as maiores, conforme o disposto a seguir:

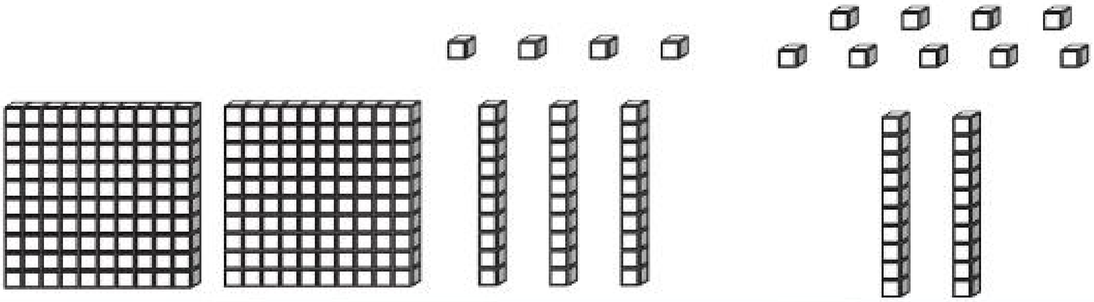


Nesse sentido, a associação posicional do número é externa ao material e realizada por uma adaptação do educador.

Esse procedimento permite ao estudante efetuar adição e subtração por meio de agrupamento/desagrupamento e realizar trocas por quantidades representativas da unidade, da dezena, da centena e do milhar, respectivamente com cubinhos, barras, placas e cubo. Com isso é possível chegar a uma generalização das operações com os numerais a partir da operação com os materiais manipuláveis. Por exemplo:

234 + 29

200 + 30 + 4 + 20 + 9, significa juntar:



Aritmeticamente:

200 + 50 + 13 = 200 + 50 + 10* + 3 (*representação da troca de 10 cubinhos por uma barra). Tem-se então 50 + 10 = 60, ou seja, 6 barras. Reagrupando, significa:

200 + 60 + 3 = 263

Observamos que essa generalização difere da realizada com o ábaco, pois aqui se privilegia o princípio de agrupamento, enquanto o ábaco trabalha o agrupamento juntamente com o princípio do valor posicional.

Vimos que a partir do conceito de sucessor definimos a adição de dois números naturais. Na atividade prática com a operação de adição, observa-se também que 3 + 6 = 6 + 3, por exemplo. E mais, percebemos que isso acontece com qualquer número. Esse pensamento de generalização constitui uma propriedade do campo numérico denominada *comutativa*, expressa algebricamente da forma $b + c = c + b$ em que b e c representam os números. Ou, ainda, podemos expressar essa generalização por meio da retórica *a adição independe da ordem das parcelas*. Essa propriedade é válida em todos os campos numéricos.

Temos abordado até o momento a adição de duas parcelas. E se tivermos mais que duas parcelas? Analisemos esse problema com o conhecimento que temos. Transformamos a soma de mais de duas parcelas em soma de duas parcelas. Com isso, tem-se a propriedade associativa. Como exemplo, tomemos (5 + 6) + 8 = 5 + (6 + 8), cuja generalização algébrica é: $a + (b + c) = (a + b) + c$, aqui também com cada letra representando os números.

Com o desenvolvimento dos campos numéricos, observou-se que as propriedades comutativa e associativa são válidas não só para os naturais, mas também em todos os demais.

Abusivamente, escrevemos algumas vezes:

$$\begin{array}{rl} 14 & \\ 34 & + \\ 82 & \\ \hline 130 & \end{array}$$

Como efetuamos essa adição? Temos capacidade cognitiva para somarmos três números de uma só vez?

Tente realizar a adição de 8 + 4 + 2 em um único processo no pensamento.

Dependendo da habilidade no cálculo mental, pode-se supor que somamos os três números de uma só vez. O fato é que algumas vezes, ao olharmos os numerais, já temos memorizado certas operações e não nos damos conta que esse processo, internalizado, é o resultado da soma de dois a dois números.

Voltando ao exemplo de 14 + 34 + 82, podemos fazer (14 + 34) + 82 ou mesmo 14 + (34 + 82), como também (14 + 82) + 34, utilizando a propriedade comutativa, mas o que normalmente encontramos no sistema de ensino é iniciar pela adição das unidades (como num ábaco), resultado das decomposições desses números, como (10 + 4) + (30 + 4) + (80 + 2), chegando pela propriedade associativa a ((4 + 4) + 2) + ((10 + 30) + 80).

Como estamos tratando de propriedades no campo dos naturais, como somar zero? Alguém poderia perguntar: ZERO É UM NÚMERO NATURAL?

Muitos estudantes chegam a formular essa pergunta. Principalmente quando observam diferentes representações do conjunto de números reais em diferentes obras. O conjunto dos números naturais ora aparece com o zero: IN = {0, 1, 2, 3, ...}, ora sem o zero: IN = {1, 2, 3, ...}.

Encontramos na *História da matemática,* de Boyer (1996, p. 436), a formalização do conjunto dos números naturais por meio dos *axiomas de Peano* (ver capítulo 1 deste livro) cujo primeiro axioma é: "Zero é um número natural". Por outro lado, como vimos também no capítulo anterior, há outras definições dos números naturais nas quais a ausência do zero aparece principalmente vinculada à construção histórica dos números.

Além disso, tem-se uma questão de conveniência para alguns ramos da matemática. Para a aritmética convém colocar o número zero como natural, nem tanto por causa do elemento neutro da adição definido como $b + 0 = b$, mas principalmente por causa da subtração de um número por ele mesmo. No campo da análise a conveniência é outra: para abordar sequências de números que genericamente são escritas da forma $a_1, a_2, a_3...$, em que os índices são naturais, é melhor definir o conjunto dos naturais excluindo-se o zero. Como no sistema básico do ensino exploramos mais a aritmética do que a análise, consideramos zero o primeiro número natural (do conjunto dos números naturais), ou seja, zero não tem antecessor.

Além das propriedades, há também as relações de ordem no campo numérico dos naturais. Isso significa que, para dois números x e y quaisquer em IN, uma e somente uma das seguintes condições se verifica: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia). Essa relação se verifica também para os conjuntos dos números inteiros (Z), racionais (Q), irracionais (I) e reais (R), mas não dos complexos. Voltaremos a tratar a importância da relação de ordem no capítulo 5.

No percurso exposto sobre a operação de adição, buscamos refletir sobre sua essência, o processo lógico da sua origem, propriedades, algoritmos de cálculo e materiais didáticos. Acrescentaremos como recurso didático o quadrado mágico que, ao mesmo tempo que explora a adição e a lógica, envolve-nos com um contexto histórico singular.

Malba Tahan (1983), no seu livro *Maravilhas da matemática,* relata sobre o QUADRADO MÁGICO, considerado por antigos matemáticos como amuleto. O quadrado mágico de nove casas servia aos chineses como amuleto para livrar a pessoa da peste e da mordida de escorpião.

Tais quadrados eram conhecidos pelos calculistas chineses 6.000 anos a.C. e recebiam atributos de virtudes sobrenaturais.

O quadrado mágico consiste em dividir um quadrado em quadrados menores chamados *casas*, as quais são preenchidas com a sequência de números naturais partindo-se do número 1. A soma dos números dispostos em cada linha, coluna e diagonal deve ser a mesma. Por exemplo, a figura seguinte mostra um quadrado mágico de nove casas.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A soma dos números como disposto é constante e igual a quinze. Já num quadrado de 16 casas a soma é 34.

Essas constantes são chamadas de *números planetários* e são obtidas pela expressão $S = \frac{n \cdot (1+n^2)}{2}$, em que cada número planetário S está associado ao número n, que é a raiz quadrada do número de casas do quadrado mágico a partir de $n = 3$.

A denominação de *números planetários*, segundo Malba Tahan, foi dada pelo médico e matemático Cornélio Agripa (1486-1535). Chamado de feiticeiro pelas autoridades e considerado astrólogo e quiromante pelos monges, Agripa associava a cada quadrado mágico um planeta, a partir do quadrado de nove casas, pois o quadrado de uma única casa simbolizava a eternidade. A explicação da inexistência do quadrado mágico de quatro casas era por causa da imperfeição dos quatro elementos formadores do mundo material: o ar, a água, a terra e o fogo. Esse assunto não termina aqui; ainda há os quadrados denominados *semimágicos*, *quase-mágicos* e os *hipermágicos*, estes últimos também denominados de *diabólicos**.

As relações da matemática, em particular dos números com outros elementos, seja da natureza, seja do misticismo ou qualquer outra coisa,

* Para saber mais, consulte Tahan (1983).

era comum em certas épocas da nossa história. Talvez esse fato exista por causa do desenvolvimento da matemática por indivíduos de diversos segmentos profissionais: comércio, medicina, filosofia, direito... A ênfase ao especialista em matemática, os matemáticos, ocorreu posteriormente, pois a matemática por muito tempo era concebida somente como ferramenta para as outras áreas do conhecimento.

Além da diversidade de profissionais a pensar matemática, houve na nossa história a supervalorização do "ser numérico", principalmente na escola pitagórica, cujo lema era "tudo é número", em que o número era considerado como regente do universo.

Ora pensadores desenvolvendo o conceito de número, ora expandindo a aplicabilidade, encontramos casos históricos com números e operações que permitiram, além de diversão, desenvolver o raciocínio ligado à regularidade de fenômenos e a processos de generalização, fundamentais ao pensamento matemático.

Citamos aqui também o jogo de Sudoku, que tem suas raízes no quadrado mágico. Sudoku é uma palavra japonesa que significa *números que devem estar só*. O objetivo é completar cada casa do quadrado maior com a sequência de números naturais a partir do 1 até a quantidade de casas do quadrado menor – desenhado com traços mais espessos –, de modo a não repetir nenhum deles nem no quadrado menor, nem na linha, nem na coluna do quadrado do Sudoku.

O Sudoku se inicia sempre com alguns números e deve ser completado. Observe o exemplo abaixo, com os números de 1 a 4, sob as regras descritas.

Início:

	4		**2**
		4	
	1		
4		**1**	

Término:

1	**4**	3	**2**
2	3	**4**	1
3	**1**	2	4
4	2	**1**	3

À medida que os quadrados se tornam mais complexos, mais relações são necessárias, encaminhando para processos algorítmicos que normalmente são úteis no desenvolvimento computacional.

2.2 Subtração

Voltando às operações, no seu processo conceitual, a partir da adição, podemos perguntar:

> Conhecida a soma de dois números e uma das parcelas, como determinar a outra parcela?

Essa questão permite-nos compreender o conceito da operação inversa da adição: a subtração. Algebricamente, podemos escrever que, sendo a, b e c números naturais, se $a = c + b$, então $a - b = c$. Como a operação de adição é comutativa, também ocorre que $a - c = b$.

Na adição, os números c e b são denominados *parcelas* e o resultado a é a soma. Na subtração $a - b = c$, a é o *minuendo*, b o *subtraendo* e c a *diferença* ou *resto*.

Esclarecemos que a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud, que estuda o desenvolvimento cognitivo de operações aritméticas, trata a subtração inserida no que denomina *campo aditivo*. Neste texto não adotamos a terminologia de Vergnaud; chamamos de *subtração* a operação inversa da adição e utilizaremos a terminologia *adição* tanto como operação de adicionar como conceito que inclui suas propriedades, pois o contexto permite fazer a diferença quando necessário. Utilizamos também o verbo somar como usual, sendo o processo de obter a soma.

Pela própria necessidade colocada na questão supracitada, observa-se que basta subtrair da soma a uma das parcelas. Ou seja, partindo desse princípio seria natural admitir que o minuendo (procedente da soma) sempre é maior que o subtraendo (uma das parcelas) quando se trata de operações no campo dos naturais. Com o processo de generalização e estruturação das propriedades, temos, nesse campo numérico, a necessidade de enunciar que, para efetuar a subtração, o minuendo tem que ser maior ou igual ao subtraendo para que a subtração seja possível. A enunciação dessa condição faz parte do processo de síntese teórica do desenvolvimento do próprio conceito, em que os laços históricos de sua origem vão se distanciando, ficando a necessidade e não a obviedade de fazer tal enunciação.

Continuando a pensar sobre as propriedades, observe que na subtração não existe a comutatividade nem a associatividade.

2.3 Multiplicação

O conceito de adição gera outras questões além da que resultou a subtração. Vejamos outra:

Como fazer se quisermos somar muitas parcelas iguais?

Podemos pensar que uma resposta imediata seria "nada muda, apenas teríamos, por exemplo, $(b + b) + b = a$, e assim por diante". A intenção da questão não é a adição de poucas parcelas, mas sim muitas parcelas, embora uma quantidade finita delas. Como seria somar 7 por 70 vezes? Ou ainda, 123 por 987 vezes? Não é impossível somar duas a duas, mas é operacionalmente desgastante.

A criação humana também age para economizar esforços. Temos nessa ideia o desenvolvimento do conceito da MULTIPLICAÇÃO. Ao somar n vezes o número b, representamos como $n \cdot b$ ou $n \times b$:

$$a = n \cdot b$$

Alguns autores, como Caraça (1989), nomeiam n como *multiplicador*, aquele que exerce a ação sobre o multiplicando b. Usualmente utilizamos somente a nomenclatura de *fatores* para n e b, pois a operação é comutativa, e *produto* para o resultado a.

Isso não basta para economizarmos esforços, pois economizamos na representação ao escrever $7 \cdot 70$ e $123 \cdot 987$, mas como realizar a operação? Nessa questão estão os esforços humanos de constituir algoritmos.

Antes de abordar os algoritmos, vejamos as propriedades relacionadas à multiplicação. Sendo a, b e c números naturais, temos as propriedades:

- Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$
- Anulamento: $0 \cdot a = 0$
- Distributiva: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Além disso, se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a \cdot c \leq b \cdot d$

A propriedade distributiva relaciona operação de multiplicação e adição. Partindo do primeiro membro da igualdade $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ temos que a soma $b + c$ se repete a vezes. Fazendo uma representação, temos:

$$\underbrace{(b + c) + (b + c) + \dots + (b + c)}_{a \text{ vezes}}$$

Isso quer dizer que b se repete a vezes e c se repete também a vezes. Como a adição é comutativa, temos:

$$\underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ vezes}} + \underbrace{c + c + \dots + c}_{a \text{ vezes}}$$

que resulta na forma sintética $a \cdot b + a \cdot c$. Podemos escrever $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ simplesmente por $a \cdot b + a \cdot c$, pois temos a prevalência da multiplicação sobre a adição, por ser a multiplicação uma síntese da adição, uma somatória.

As propriedades são importantes também para a compreensão dos algoritmos. No primeiro exemplo citado, para multiplicarmos 70 vezes 7 poderíamos simplesmente usar a propriedade comutativa e fazermos 7 vezes 70, ou seja, 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70. Sabemos que essa é uma operação comum realizada por crianças no início da escolarização. À medida que vão compreendendo o significado da operação, o cálculo mental torna-se mais eficiente e rápido. Citamos alguns processos cognitivos possíveis para realização da multiplicação $7 \cdot 70$:

1º) $140 + 140 + 140 + 70$ e outros agrupamentos a partir desse, como $280 + 140 + 70 = 420 + 70 = 490$

2º) $210 + 210 + 70 = 420 + 70 = 490$

3º) $7 \cdot (7 \cdot 10) = (7 \cdot 7) \cdot 10 = 49 \cdot 10 = 490$.

Observamos que os dois primeiros exemplos retomam a definição de multiplicação como adição de parcelas, embora o segundo seja mais sintético que o primeiro. O pensamento, no terceiro exemplo, apresenta uma síntese memorizada na realização de $7 \cdot 7 = 49$, ao invés de utilizar a definição. Além disso, apresenta a decomposição do número 70 em dois fatores, 7 e 10.

Um dos debates atuais no sistema de ensino da multiplicação é justamente a necessidade ou não de se memorizar a tabuada, ou seja, todos os produtos possíveis com os algarismos da nossa base numérica, de 0 a 9, ou mesmo de 1 a 10.

Uma argumentação da defesa da memorização da tabuada se apoia na economia de tempo, e por vezes, na simplificação de procedimentos que o estudante pode utilizar para efetuar cálculos mais complexos. Fora da escola o indivíduo poderá deparar-se com situações em que o cálculo mental com maior rapidez o auxilie a tomar a melhor decisão.

Por outro lado, um argumento que defende a posição contrária é justamente a negação da importância de se economizar tempo, ou seja, cabe à escola ensinar a essência da multiplicação e basta que o procedimento e o resultado apresentados pelo estudante sejam corretos. É claro que a discussão não termina nesses argumentos; há o envolvimento com a calculadora, com situações em que o indivíduo vai enfrentar dentro e fora da escola, entre outros. É certo que a posição tomada pela escola, pelo educador, influencia diretamente nos procedimentos didáticos que envolvem a multiplicação.

Há professores que afirmam que os estudantes não vão bem em certas situações porque não sabem tabuada. Qual sua opinião sobre esse posicionamento?

Embora haja essa discussão, todos concordam sobre a necessidade de ensinar a lógica que origina a multiplicação e gera a tabuada.

Essa concordância hoje pode parecer trivial, mas tanto essa discussão como o ensino do significado da multiplicação tem sua história no desenvolvimento da matemática escolar.

Alguns dos atuais professores relatam suas experiências, enquanto estudantes, em relação à sua aprendizagem na escola. Dizem que simplesmente decoravam a tabuada sem saber o que estavam fazendo, e mais, havia uma valorização dos estudantes que a memorizavam. A tabuada era abordada em muitas aulas, havendo repetição tanto oral como escrita, algumas vezes por meio de "chamada oral". Havia casos em que o estudante possuía um caderno exclusivo para realizar as várias escrituras da tabuada, "o caderno de tabuada". Observamos o aparecimento desse tipo de caderno na forma impressa, alguns incluindo também a tabuada da adição, chamadas também de *tábuas*. Na nossa história encontramos outras tábuas que se tornaram impressas, como a de logaritmo. Porém, com a criação da calculadora e sua popularização, as tábuas foram sendo cada vez menos utilizadas.

O que relatamos brevemente aqui é um dos casos que ilustram o desenvolvimento da educação matemática. Com isso, podemos observar que para a compreensão da situação atual, como da discussão a respeito da tabuada, não basta tomar o caso isolado, mas refletirmos no percurso histórico-cultural em que tal discussão se constituiu.

Ainda sobre a tabuada, observamos, ao longo do seu desenvolvimento histórico, a Tábua de Pitágoras. Pitágoras, ou melhor, a escola pitagórica, abordava as operações de adição e de multiplicação utilizando uma tábua. Citaremos a de multiplicação sem a pretensão de recorrer à tábua original, mas sim à sua lógica.

A tábua consiste em preencher a primeira linha e a primeira coluna do quadriculado com os números de 1 a 9. Os outros quadrados são preenchidos pela multiplicação dos números preenchidos inicialmente, correspondente à linha e à coluna. Por exemplo, $7 \cdot 4$ pode ser encontrado ao percorrer a coluna que consta o número 7 até encontrar a linha que consta o número 4, ou vice-versa, encontrando o número 28.

Figura 2.2 – Tábua de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	**28**	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	**28**	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

A utilização dessa tábua é abordada hoje em algumas aulas de matemática do ensino fundamental. Pode-se sugerir ao estudante seu preenchimento a partir de algumas regularidades. Por exemplo, preencher a linha do número 2 sabendo que ela é composta pelos números que são o dobro dos números da linha anterior. Em seguida, completar a linha iniciada por 4, composta pelos números que são o dobro dos da linha de número 2, e do mesmo modo a linha 8 em relação à 4. É possível observar outras regularidades nessa tábua.

Voltemos a um dos nossos exemplos dado inicialmente, quando questionávamos sobre a realização da multiplicação de 123 por 987. Utilizaríamos a definição da operação de multiplicação? Ou seja, somaríamos 123 vezes o número 987?

Podemos observar que o ser humano também trabalhou nessa questão, a fim de desenvolver algoritmos que minimizassem esforços, principalmente relacionados à memorização. Analisemos o procedimento utilizado no seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 987 \\ \hline 861 \\ 984 \\ 1.107 \\ \hline 121.401 \end{array}$$

Professores relatam que aprenderam a fazer esse algoritmo da multiplicação sem compreendê-lo, por isso têm dificuldade em explicá-lo ao estudante além da sua técnica. Observe a relação que existe entre o algoritmo imediatamente anterior e as propriedades comutativa e distributiva:

$$123 \cdot 987 = 987 \cdot 123 = (900 + 80 + 7) \cdot 123 \text{ que é igual a:}$$

$$(7 + 80 + 900) \cdot 123 = 7 \cdot 123 + 80 \cdot 123 + 900 \cdot 123 =$$
$$861 + 9.840 + 110.700 = 121.401$$

Por que no algoritmo aparecem 984 e 1.107 ao invés de 9.840 e 110.700, como na distributiva? Poderia ser uma herança histórica do zero como "espaço vazio"? Colocando ou não o zero no algoritmo, é fundamental a compreensão da relação com o sistema posicional. Se tal compreensão for efetiva, pode-se até fazê-lo separadamente, assim:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 7 \\ \hline 861 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123 \\ \times\ 8 \\ \hline 984 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123 \\ \times\ 9 \\ \hline 1.107 \end{array}$$

Lembrando que a soma dos resultados devem ser dispostos na forma:

$$\begin{array}{r} 861 \\ 984 \\ +\ 1.107 \\ \hline 121.401 \end{array}$$

Diferentes algoritmos eram utilizados em outras épocas. Dantzig (1970) nos conta que no século XIII a multiplicação de 46 por 13 era executada da seguinte forma (em linguagem atual):

$46 \cdot 2 = 92$

$46 \cdot 4 = 92 \cdot 2 = 184$

$46 \cdot 8 = 184 \cdot 2 = 368$

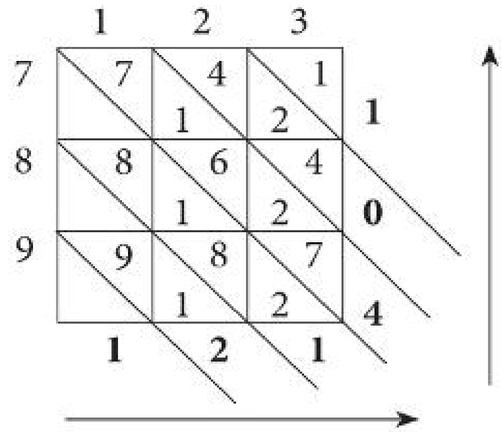
$368 + 184 + 46 = 598$

É possível realizar esse processo ainda hoje, principalmente ao efetuar o cálculo mentalmente. Analisemos o conhecimento das operações em outra época, por meio da história de um mercador que ilustra em que nível de ensino aprendia-se a multiplicar no século XV:

> O mercador tinha um filho a quem desejava dar uma avançada instrução comercial. Pediu a um proeminente professor universitário que aconselhasse quanto ao local para o qual ele devia mandar o filho. A resposta foi que se o currículo matemático do jovem fosse limitar-se à soma e à subtração, talvez pudesse estudar numa universidade alemã; mas a arte de multiplicar e dividir, continuou ele, tinha sido grandemente desenvolvida na Itália, que, em sua opinião, era o único país em que se podia obter instruções avançadas. (Dantzig, 1970, p. 36)

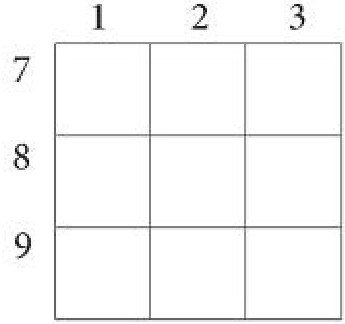
Se nesse período histórico os algoritmos de multiplicação eram para especialistas, como seria no século VI? Ifrah (1998) exemplifica como faziam os aritméticos hindus. Segundo o autor, o procedimento denominado *por quadriculagem* foi posteriormente renomeado pelos europeus como *per gelosia* (por janela).

A multiplicação de 123 por 987 ficaria semelhante a seguinte forma:

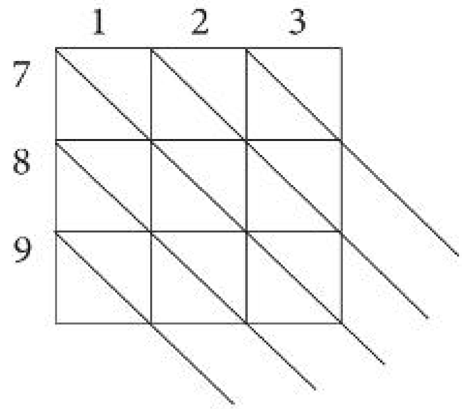


No quadro, a leitura do número 121.401, resultado da multiplicação, tem uma parte na horizontal, que nesse caso é o 121, e o restante na vertical, no sentido de baixo para cima, 401, conforme indicam as setas na figura anterior.

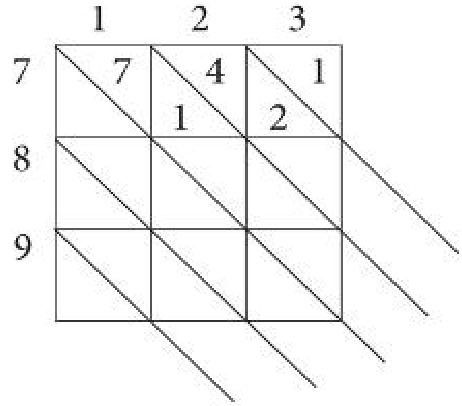
Para montar o quadro coloca-se um dos fatores na parte superior e o outro fator ao lado no sentido de baixo para cima.



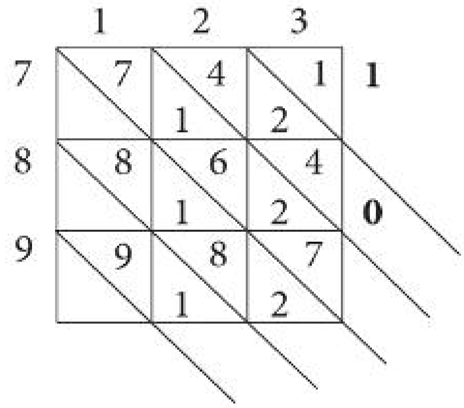
Divide-se cada quadrado por uma diagonal, conforme a figura abaixo.



O produto de cada algarismo de um número pelo algarismo do outro é colocado no quadrado que corresponde à linha de um com a coluna do outro algarismo. A unidade do produto escreve-se na parte de cima e a dezena na parte de baixo do mesmo quadrado. A primeira linha ficaria assim:



Após completar o quadro com todos os produtos, soma-se os números separados pelas diagonais, partindo de cima para baixo e da direita para a esquerda, anotando ao lado a unidade do número. A dezena dessa soma, quando houver, passa a ser adicionada com os números da diagonal seguinte. As somas das duas primeiras diagonais ficariam assim:



Obtém-se essas somas até que o quadro fique como mostrado inicialmente.

Esse método era avançado para a época.

Sugerimos que você realize uma análise que reconheça a veracidade desse algoritmo.

2.4 Divisão

Assim como fizemos anteriormente na relação da adição com a subtração, perguntamos:

Em uma multiplicação de dois fatores, como determinar um deles, conhecendo-se o outro e o produto deles?

Um estudante poderia responder “vamos testando uma variedade de números até encontrar o fator”. Certamente é o que faríamos em alguns casos simples, principalmente no cálculo mental. Temos aqui novamente o conceito da operação inversa, que nesse caso chama-se divisão.

Partindo do produto $b \cdot c = a$, com a, b e c números naturais, a divisão é definida como $a : c = b$ e, devido à propriedade comutativa da multiplicação, também podemos ter $a : b = c$.

O número a em $a : b = c$ é chamado de *dividendo*, b de *divisor* e c de *quociente*. Necessário faz-se considerar a condição do divisor como sendo diferente de zero. Caso contrário, se $b = 0$, $a : 0$ implicaria pela definição que existe c em que $0 \cdot c = a$, mas $c \cdot 0 = 0$. Além disso, em IN a operação é possível quando o dividendo for múltiplo do divisor, para que satisfaça $b \cdot c = a$. Se isso não ocorrer, ter-se-á um número $r < b$, tal que $a = b \cdot c + r$. Esse caso será tratado no capítulo sobre divisibilidade e em capítulos posteriores trataremos a extensão do conceito de divisão em outros campos numéricos.

Apresentamos em seguida as propriedades da divisão assumindo a definição $b \cdot c = a \Leftrightarrow a : c = b$, ou seja, a múltiplo de c e $c \neq 0$. Incluímos a notação fracionária para melhor visualização, embora a equivalência entre a fração e a divisão seja tratada no capítulo 5.

Sejam a, b, c e d números naturais, em que os divisores sejam diferentes de zero,

Quadro 2.1 – Propriedades operatórias em notação fracionária

divisão	fração
$a : 1 = a$	$\frac{a}{1} = a$
$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$	$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
$(a : b) \cdot c = a : (b : c) = (c : b) \cdot a$	$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b} \times a$
$(a : b) : c = a : (b \cdot c) = (a : c) : b$	$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$

(continua)

(Quadro 2.1 – conclusão)

$(a : b) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ ou $(a : b) = (a : c) : (b : c)$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$
$(a \cdot c) : (b \cdot d) = (a : b) \cdot (c : d)$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

Exemplifiquemos a validade da quarta propriedade. Ao multiplicarmos por c (diferente de zero por ser divisor) os membros da igualdade (em notação fracionária):

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$$

Teremos a igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Usando a definição, temos:

Existem x e y números naturais tais que

- $a : b = x \Rightarrow a = b \cdot x$
- $x : c = y \Rightarrow x = c \cdot y$

Das igualdades $a = b \cdot x$ e $x = c \cdot y$, temos que $a = b \cdot (c \cdot y)$ ou $a = (b \cdot c) \cdot y$. Pela definição essa igualdade implica que $y = a : (b \cdot c)$ ou ainda de $a = c \cdot (b \cdot y)$ temos $a : c = b \cdot y \Rightarrow (a : c) : b = y$.

Assim como exploramos os algoritmos nas outras operações, vejamos o caso da divisão. Para efetuarmos 24 : 4, 26 : 2 ou mesmo 100 : 10, podemos por tentativa encontrar a resposta por meio da multiplicação. Mas e um aprendiz? Como ficaria o caso de efetuar a divisão com números maiores, como 5.928 : 13?

A escolha do algoritmo muitas vezes depende da ordem de grandeza dos números envolvidos. Sabemos que alguns estudantes resolvem certos casos por "tentativa". Por exemplo, para dividir 24 por 4, o estudante escolhe mentalmente alguns números e vai "testando" por meio da multiplicação por 4, como: $3 \cdot 4$, $5 \cdot 4$, $6 \cdot 4$. Esse método exige o conhecimento dessas multiplicações, caso contrário o estudante poderá efetuar outro processo, o de “reduzir” tais multiplicações em adições ($3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$).

Outro procedimento consiste em ir subtraindo o divisor do dividendo e o quociente é o número de vezes que se realiza essa operação. Utilizando esse mesmo exemplo, teríamos:

$24 - 4 = 20$
$20 - 4 = 16$
$16 - 4 = 12$
$12 - 4 = 8$
$8 - 4 = 4$
$4 - 4 = 0$

Totalizando 6 vezes em que o 4 foi diminuído de 24.

Abreviando sua escrita:

$24 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0$

Os aprendizes, no início de sua aprendizagem da divisão, podem realizar essa operação com materiais concretos em que se distribui um total de 24 figurinhas (ou outro objeto qualquer) entre 4 estudantes, totalizando 6 figurinhas para cada um. Ao relacionar o processo de dividir em partes iguais, o estudante vai desenvolvendo o conceito de divisão. A partir disso, ele pode criar variações desse procedimento ou mesmo elaborar seu próprio algoritmo.

Na divisão de 26 por dois, ao invés de ir subtraindo 2, pode iniciar subtraindo múltiplos de 2. Por exemplo: $26 - 8 - 8 - 8 - 2$. Não se esquecendo que a cada 8 já se tem a síntese de $2 \cdot 4$, ou seja, a cada 8 foi subtraído 4 vezes o 2, finalizando com 13 vezes, em que o 2 foi subtraído de 26.

Outro algoritmo utilizado no processo de divisão é normalmente chamado de *método da chave*. O primeiro que iremos abordar é uma adaptação do processo norte-americano. Utilizaremos o exemplo 5.928 : 13.

5.928	13
− 1.300	100
4.628	300
− 3.900	50
728	6
− 650	456
78	
− 78	
0	

Inicialmente escolhe-se um número que multiplicado por 13 seja menor que 5.928, por exemplo, o número 100. O produto $100 \cdot 13 = 1.300$ é subtraído de 5.928.

Percebe-se que quanto maior for o quociente escolhido mais rápido se termina a divisão. Esse processo se repete. Escolhemos 300 e com isso teremos $300 \cdot 13 = 3.900$, que diminuído de 4.628 resulta 728. Em seguida, escolhemos respectivamente 50 e 6, conforme o algoritmo ao lado.

O quociente da divisão é a soma dos quocientes parciais, resultando 456. Esse resultado é independente das escolhas que se faz, desde que o produto pelo divisor seja menor ou igual ao dividendo.

Sugerimos que você faça uma análise do por que esse processo independe das escolhas, ou seja, quais propriedades garantem que o resultado seja o mesmo.

Observamos que o algoritmo exposto se relaciona mais com o agrupamento de quantidades do que com o sistema posicional. O outro algoritmo que apresentaremos aqui se relaciona mais com o sistema posicional, e, embora se pareça com esse, exige um cálculo mental maior. Utilizando o mesmo exemplo, teríamos:

$$\begin{array}{r|l} 5.928 & 13 \\ \cline{2-2} -5.200 & 4 \\ \cline{1-1} 728 & \\ \ldots & \end{array}$$

Partindo de $5.928 = (5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$: 13, fazemos $(50 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13$ que é o mesmo que $(59 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13$. Com isso, teremos o primeiro algarismo do quociente, 4, que é o maior inteiro da divisão 59 : 13 da potência 10^2, ou seja, 52 centenas. Muitas vezes, no algoritmo omitimos os zeros do número, escrevendo simplesmente:

$$\begin{array}{l|l} 5.928 & 13 \\ \cline{2-2} -52 & 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Continuando o processo:

$(59 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13 = (52 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13$, que é o mesmo que: $(52 \cdot 10^2 + 70 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13 = (52 \cdot 10^2 + 72 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13$, novamente separando pelos múltiplos de 13, tem-se: $(52 \cdot 10^2 + 65 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) : 13$ e, portanto, $(52 \cdot 10^2 + 65 \cdot 10^1 + 78 \cdot 10^0) : 13$, resultando $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$, ou seja, 456.

No algoritmo sintetizado, temos:

$$\begin{array}{l|l} 5.928 & 13 \\ \cline{2-2} \;\;72 & 456 \\ \;\;\;78 & \\ \;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Esse algoritmo não mostra as subtrações; subtende-se sua realização mentalmente.

Tratamos da divisão focalizando os múltiplos, mas o algoritmo é o mesmo no caso do dividendo não ser múltiplo do divisor. Nesse caso o resto será diferente de zero.

2.5 Potenciação, radiciação e logaritmização

Da mesma forma que foi colocada uma questão ao abordarmos o processo da adição de um número finito de parcelas para iniciarmos o conceito da multiplicação, também aqui colocamos o problema:

> O que podemos fazer se quisermos multiplicar um número finito de fatores iguais?

Essa questão gera o conceito de *POTENCIAÇÃO*, cuja definição é

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

O número a que se repete é denominado *base* e n, a quantidade de fatores, é o *expoente*. O resultado é a *potência*.

Propriedades

$a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Sugerimos a verificação dessas propriedades por meio da definição.

O zero operatório traz algumas perturbações quando se vai estruturar formalmente a validade das propriedades. Por exemplo, quanto é a^0? Se quisermos manter a coerência da propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$, então a^0 tem que ser igual a 1.

Temos que $0^n = 0$ para qualquer $n \neq 0$ e $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. E o caso de 0^0? Esse é um caso em que a comunidade científica define como indeterminado. Observamos que no caminho da formalização capta-se a regularidade, mas também as perturbações.

A escrita por potência, além de sintetizar a escrita da multiplicação de um número por ele mesmo muitas vezes, também permite a expressão de um número numa dada base numérica, conforme foi abordado no capítulo anterior.

Seguindo o pensamento das operações inversas, qual seria a operação inversa da potenciação? Ou seja, como conhecer a base conhecidos a potência e o expoente? Ou, ainda, como conhecer o expoente conhecidas a potência e a base?

Como a operação de potenciação não é comutativa, temos duas inversas, uma para determinar a base e outra para determinar o expoente.

A RADICIAÇÃO é a operação para determinar a base, ou seja, sendo $b = a^n$, temos $a = \sqrt[n]{b}$, a, b e n números naturais. No campo numérico dos números naturais, em que este texto se configura, para existir o número a, b deve ser uma potência de a. Isso implica que b é um quadrado, ou um cubo, ou a quarta potência ou a quinta potência, e assim por diante, de certo número natural. Sabemos que esse conceito será expandido para outros campos numéricos em que as restrições são devidamente definidas.

A LOGARITMIZAÇÃO é a operação para determinar o expoente, ou seja, sendo $b = a^n$ temos $n = \log_a b$. Ao fazer essa inversão temos que o natural a não pode ser 0, nem 1. Por quê? Observe que se a for zero, teremos $0^n = 0$ qualquer que seja n, analogamente se a for 1.

Sugerimos a pesquisa e a reflexão sobre as propriedades da radiciação e da logaritmização.

Síntese

No percurso exposto, sobre as operações com números naturais, buscamos refletir sobre sua essência, ou seja, o processo lógico da sua origem, geralmente iniciado por uma questão. Exploramos propriedades, algoritmos e aspectos didáticos, ora discutindo, ora sugerindo propostas a serem desenvolvidas. Nessa perspectiva abordamos as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmização. Percebemos nas propriedades certas limitações operacionais que, por sua vez, permitem saltos qualitativos para outros campos numéricos. É o caso da subtração, em que o subtraendo é maior que o minuendo, ou mesmo a radiciação de números negativos.

Buscamos tanto na abordagem do conceito das operações quanto nas possibilidades didáticas explorar o contexto histórico-cultural a fim de potencializar a compreensão do desenvolvimento do pensamento matemático na humanidade.

Indicações culturais

ÁVILA, G. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 26, p. 1-7, 1994.

Antes do uso das calculadoras para o cálculo de logaritmos usava-se a chamada tábua de logaritmos. Caso o leitor tenha curiosidade de saber como eram construídas tais tábuas, indicamos essa leitura, que traz o método da primeira tábua construída por Briggs, publicada em 1617.

FRAENKEL, R. Logaritmos: um curso alternativo. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 4, p. 16-20, 1984.

O autor apresenta, como ele mesmo diz, um modo menos convencional no tratamento dos logaritmos. Sua escolha tem os propósitos de *trabalhar com a relação entre exponenciação e logaritmação e capacitar o estudante para o cálculo de logaritmos, utilizando três problemas.*

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 1, p. 7-8, 1982.

Na seção "Qual é o valor de 0^0?", o autor, para explorar o valor de 0^0, inicia a discussão sobre questões matemáticas, que é o caso da divisão de zero por zero e a divisão por zero. Após esclarecer a abordagem na aritmética, explica como essas expressões são tratadas na teoria dos limites.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

O capítulo 2 desta obra, "Sobre a aritmética", explora operações realizadas no cotidiano e na matemática, discutindo seus significados nos diferentes contextos.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html>. Acesso em: 5 mar. 2010.

Vergnaud é um psicólogo francês que foi aluno de Piaget. Desenvolveu a teoria dos campos conceituais em 1977. Essa teoria é uma referência, principalmente para o ensino do campo aditivo e do campo multiplicativo no início da escolarização.

Atividades de autoavaliação

1. Indique a operação que sintetiza cada processo descrito:
   a) (____________). A soma de um número finito de parcelas iguais.
   b) (____________). A multiplicação de uma quantidade finita de fatores iguais.
   c) (____________). Permite determinar o expoente de uma potência.
   d) (____________). Permite determinar a base de uma potência.

2. Assinale com (V) as afirmações verdadeiras e com (F) as falsas:

( ) A subtração é a operação inversa da adição.

( ) A divisão é a operação inversa da multiplicação.

( ) A potência é a operação inversa da adição.

( ) A radiciação é uma operação inversa da potenciação.

3. Quanto à propriedade comutativa, é correto que para quaisquer números naturais x e y:

a) $x - y = y - x$

b) $x : y = y : x$, exceto para x e y iguais a zero.

c) $x \cdot y = y \cdot x$

d) $x^y = y^x$

Obs.: Reflita que a resposta é a mesma no caso de outros campos numéricos.

4. Qual processo é INCORRETO para multiplicar 7 por 8? Justifique a resposta.

a) $7 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$

b) $7 \cdot 2 = 14$ e $7 \cdot 4 = 14 \cdot 2 = 28$, logo $7 \cdot 8 = 28 \cdot 2$

c) $7 \cdot 8 = 14 + 14 + 14 + 14$, pois $7 \cdot 8 = (7 \cdot 2) \cdot 4$

d) $7 \cdot 8 = (5 + 2) \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2$

5. Qual dos algoritmos da operação de divisão está INCORRETO? Justifique a resposta.

a) Para efetuar 60 : 12, faz-se: 60 – 12 – 12 – 12 – 12 – 12. Ao subtrair o número 12 cinco vezes, o resultado da operação de divisão é 5.

b)
$$\begin{array}{r|l} 420 & 14 \\ \cline{2-2} -28 & 2 \\ \cline{1-1} 140 & 10\ + \\ \cline{2-2} -140 & 12 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

c) $1.375 : 11 = (1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) : 11 = ((10+3) \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5) : 11 = (11 \cdot 10^2 + (20 + 7) \cdot 10 + 5) : 11 = (11 \cdot 10^2 + 22 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 5) : 11 = (11 \cdot 10^2 + 22 \cdot 10 + 55) : 11 = 125.$

d)
$$\begin{array}{r|l} 5.278 & 13 \\ \hline 078 & 406 \\ 0 & \end{array}$$

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Utilizando a ideia do ábaco, calcule 111 + 101 na base binária, ou seja, no sistema posicional de base dois no qual existem somente dois signos para representar todos os números (0 e 1). Converta também o resultado na base dez. (Sugestão: utilize a forma geral apresentada no capítulo 1: $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + ... + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$).

2. O ábaco é um recurso didático que permite desenvolver operações no campo dos números naturais. Desenvolva quatro situações com a finalidade de que o estudante opere o ábaco para realizar adição, subtração, multiplicação e divisão. Discuta também as limitações e inconveniências do ábaco.

3. Busque justificar por que nem a comutatividade nem a associatividade são possíveis para a operação de subtração.

Atividade aplicada: prática

Desenvolva um plano para ensinar duas das operações numéricas no campo dos naturais. O plano deve explorar: conceito, algoritmo e uma ou mais propriedades. Priorize, para iniciar o plano, recursos de situações-problema, questões investigativas ou jogos, a fim de problematizar o assunto que irá desenvolver.

Faça uma pequena descrição do perfil dos estudantes a que se dirige seu plano, por exemplo, de certo ciclo do sistema de ensino, um estudante surdo, uma comunidade de adultos, ensino a distância etc.

Divisibilidade em IN

3

No capítulo anterior focamos as operações matemáticas elementares no conjunto dos números naturais. Trabalhando com tais operações, é fácil percebermos que nem sempre o resultado de uma divisão ou de uma subtração em IN resulta em um número natural. Em matemática, dizemos, então, que o conjunto dos números naturais é fechado apenas para as operações de adição e de multiplicação.

Neste capítulo, aprofundaremos a análise da divisão em IN, bem como exploraremos critérios de divisibilidade e estratégias didáticas para o ensino dessa operação.

3.1 A ideia de divisão

A ideia mais comum da divisão, associada ao cotidiano social, está relacionada com o sentido de partição. É comum que professores, ao pensarem estratégias para introduzir esse conceito no currículo escolar, proponham a seus estudantes problemas relacionando a divisão de um todo em partes iguais. Podemos verificar isso, por exemplo, lembrando-nos de nossa própria experiência como estudantes da educação básica. Quem já não se deparou com propostas de como dividir certa quantidade de figurinhas ou balas entre alguns amigos?

No entanto, tanto matematicamente quanto pedagogicamente podemos ampliar tais referências para o conceito de divisão. No âmbito da matemática, tal conceito é extremamente relevante, por exemplo, quando expandimos o universo numérico para os racionais e buscamos operar com representações fracionárias ou mesmo compará-las. Nesse caso, a busca de um denominador comum para diferentes frações implica o trabalho com múltiplos e divisores e, nesse caso, o trabalho é bastante facilitado com algoritmos que permitem a determinação do mínimo múltiplo comum aos denominadores em questão. Embora o aprofundamento do significado de número racional, bem como de suas operações, seja desenvolvido no capítulo 5, exploraremos aqui tais algoritmos, ampliando a discussão para a análise de critérios de divisibilidade em IN.

Ainda sobre o sentido da divisão, Lins e Gimenez (1997, p. 77) destacam a importância de que o professor conheça diferentes situações às quais a operação se associa. Assim, além da partição em partes iguais, a contextualização didática da divisão também pode se dar, entre outros meios, por ideias como gradiente (por exemplo, a velocidade média de um corpo – espaço percorrido dividido pelo tempo necessário ao movimento), conversão de medidas, produto cartesiano, áreas de retângulos etc. Vejamos alguns exemplos de situações que podem ser exploradas pelo professor:

- sabendo-se que uma polegada equivale a 2,54 centímetros, propor a transformação de uma quantidade dada de centímetros em polegada;
- a partir da área de um retângulo e do conhecimento de sua largura, calcular o seu comprimento;
- calcular a velocidade média de um móvel a partir do tempo do movimento e do espaço percorrido.

Proponha mais dois contextos em que a divisão pode ser explorada. Em pelo menos um deles evite propor situações de partição.

Mas qual é a definição matemática de divisão? Como vimos no capítulo anterior, ela é a operação inversa da multiplicação e, comumente, representamos a divisão de a por b como $a : b$ ou por $\frac{a}{b}$, sendo a e $b \in IN$, com $b \neq 0$. No entanto, nem sempre essa operação é possível no conjunto dos números naturais.

Quando existe um número natural c, único, tal que $b \cdot c = a$, dizemos que *a é divisível por b* ou que *b divide a*. A existência de $c \in IN$, nesse caso, implica que *a é* múltiplo de b ou que b é divisor de a. Nesse caso, utilizamos a notação $b|a$. Caso não exista $c \in IN$ tal que $b \cdot c = a$ ($\nexists\, c \in IN$ tal que $b \cdot c = a$), temos que não é possível a divisão $a : b$ em IN, ou seja, b não divide a (e, portanto, a não é múltiplo de b) e representamos essa afirmação por $b \nmid a$.

Assim, por exemplo, podemos indicar $2|6$, $1|3$, $5|0$, $3 \nmid 5$ ou ainda $4 \nmid 7$. No primeiro caso, temos que a notação supõe a existência de um $c \in IN$, tal que $2 \cdot c = 6$ ou, ainda, $\frac{6}{2} = c$, e, portanto, $c = 3$. Ou seja, na divisão entre o dividendo 6 e o divisor 2 obtemos como quociente 3. Podemos também indicar todos os divisores naturais de um certo número. Por exemplo, os divisores naturais de 15 são 1, 3, 5, e 15.

A condição $b \neq 0$ costuma parecer arbitrária para muitos estudantes. É importante que o professor que ensina matemática conheça a razão formal de tal restrição. Vamos supor que $b = 0$. Isso significa que existe c, tal que $0 \cdot c = a$. No entanto, sabemos que o produto de zero por qualquer número é zero e, portanto, a afirmação só é verdadeira se $a = 0$. Sendo assim, temos $0 \cdot c = 0$, o que é verdadeiro para qualquer número natural c e, portanto, o quociente a : 0 não é único. Para evitar tal contradição, define-se $b \neq 0$.

A partir da definição da divisão em IN podemos investigar a validade de algumas afirmações envolvendo essa operação entre diferentes números naturais. Para os fins desta obra, selecionamos algumas dessas afirmações que consideramos representativas das possibilidades de demonstração a partir de definições axiomáticas. Tais afirmações, passíveis de demonstração, são chamadas em matemática de *proposições*. Veremos agora algumas dessas proposições relativas à divisão em IN. Em todas elas estamos considerando a operação entre números naturais (ou seja, $a, b, c, d, e, f \in IN$) e que o número que assume o papel de divisor é, necessariamente, diferente de zero.

Proposição 3.1: Todo número é divisor dele mesmo.

Em linguagem matemática: $a \mid a, \forall\ a \in IN$.

(lê-se: a divide a, para qualquer número a pertencente a IN)

Demonstração: a afirmação significa que existe $c \in IN$, tal que $a \cdot c = a$. Ora, sabemos que $a \cdot 1 = a$. Portanto, se $c = 1$ temos $a \cdot c =$ a. Logo $a|a$.

Exemplos: 7|7, 18|18.

Proposição 3.2: Dados três números naturais, se o primeiro divide o segundo e o segundo divide o terceiro, então o primeiro divide o terceiro.

Em linguagem matemática: Se $c|b$ e $b|a$, então $c|a$.

Demonstração: Se $c|b$ então existe $d \in IN$, tal que $c \cdot d = b \cdot$ (1)

Da mesma forma, se $b|a$ então existe $e \in IN$, tal que $b \cdot e = a \cdot$ (2)

Substituindo (1) em (2), temos que $(c \cdot d) \cdot e = a$. Pela propriedade associativa da multiplicação, temos que $c \cdot (d \cdot e) = a$. Logo, existe um número natural que multiplicado por c resulta em a. Portanto, $c|a$.

Exemplos: 6|36 e 36|72, logo 6|72.

Proposição 3.3: Dados quatro números naturais, se o primeiro divide o segundo e o terceiro divide o quarto, então o produto dos dois primeiros divide o produto dos dois últimos.

Em linguagem matemática: Se $b|a$ e $d|c$, então $b \cdot d|a \cdot c$.

Demonstração: Assim como na demonstração anterior, temos que se $b|a$ então existe $e \in IN$, tal que $b \cdot e = a$. Além disso, se $d|c$ então existe $f \in IN$, tal que $d \cdot f = c$. Multiplicando as duas igualdades, chegamos em $(b \cdot e) \cdot (d \cdot f) = a \cdot c$. Ou seja, $(b \cdot d) \cdot (e \cdot f) = a \cdot c$. Portanto, $b \cdot d \mid a \cdot c$.

Exemplo: $3|9$ e $5|30$, logo $15|270$.

Proposição 3.4: O divisor de um número é menor ou igual ao próprio número.

Em linguagem matemática: Se $b|a$, então $b \leq a$.

Demonstração: Se $b|a$ então existe $c \in IN$, tal que $b \cdot c = a$. Como $c \geq 1$, uma vez que $c \in \text{IN}^*$, temos que $b \cdot c \geq b$. Como $b \cdot c = a$, temos que $a \geq b$ e, *portanto*, $b \leq a$.

Exemplo: Os divisores naturais de 15 são 1, 3, 5 e 15.

Proposição 3.5: Se um número natural é divisor de dois outros naturais, então ele é divisor da soma desses números.

Em linguagem matemática: Se $b|a$ e $b|c$, então $b|(a+c)$.

Demonstração: Se $b|a$ e $b|c$ então existem $d, e \in IN$, tal que $b \cdot d = a$ e $b \cdot e = c$. Somando respectivamente os membros das duas igualdades, obtemos $(b \cdot d) + (b \cdot e) = a + c$. Colocando-se b em evidência, temos que $b \cdot (d + e) = a + c$. Logo, prova-se que $b|(a+c)$.

Exemplo: $12|60$ e $12|144$, logo $12|204$.

Proposição 3.6: Se um número b é divisor de a, então b é divisor de qualquer múltiplo de a.

Em linguagem matemática: Se $b|a \Rightarrow b|m{\cdot}a, \ \forall \ m \in IN$.

Demonstração: Se $b|a$ então existe $c \in IN$, tal que $b \cdot c = a$. Sendo assim, multiplicando ambos os lados da igualdade por m, temos que $b \cdot (c \cdot m) = a \cdot m$. Logo $b|a \cdot m$.

Exemplo: $3|6$, logo $3|12$, $3|18$, $3|24$, $3|60$, $3|84$ etc.

Todas as proposições exploradas consideram a relação de divisibilidade. No entanto, nossa experiência com a divisão nos revela que nem sempre a divisão de a por b resulta em um número natural c. Nesses casos, recorremos à divisão com resto.

3.2 Divisão euclidiana em IN

A enunciação da divisão com resto foi feita por Euclides, no livro VII dos *Elementos*. De acordo com Eves (2004), embora pouco se saiba sobre a vida ou a origem de Euclides, tudo indica que ele foi fundador da famosa escola matemática de Alexandria e que teria escrito seus *Elementos* por volta de 300 a.C. Essa obra é composta de 13 livros, sendo que são abordados temas de geometria, teoria dos números e álgebra. Conta-se que, depois da Bíblia, os *Elementos* de Euclides é a obra mais estudada e impressa da história. Além disso, foi com certeza a que teve maior influência no pensamento científico e "por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino da geometria" (Eves, 2004, p. 168). Além dos conceitos abordados por Euclides nesses livros, teve papel fundamental, na relevância da obra, a maneira formal e axiomática de construção e demonstração matemática.

No livro VII são tratados temas como divisibilidade, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum e números primos, entre outros. Nesse volume Euclides utiliza, sem demonstração, o fato de sempre ser possível a divisão, com resto, entre quaisquer dois números naturais.

Hoje em dia, utilizamos esse resultado corriqueiramente quando realizamos o algoritmo da divisão. Por exemplo,

$$
\begin{array}{r|l}
696 & 5 \\ \cline{2-2}
-5 & 139 \\ \cline{1-1}
19 & \\
-15 & \\ \cline{1-1}
46 & \\
-45 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

Com isso, podemos escrever

$$696 = 5 \cdot 139 + 1$$

Essa possibilidade é demonstrada por meio do seguinte teorema:

Teorema 3.1 – Algoritmo da Divisão Euclidiana em IN

Para dois números naturais a e b, $b \neq 0$, existem naturais q (quociente) e r (resto) únicos tais que

$$a = b \cdot q + r, \text{ tal que } 0 \leq r < b$$

Demonstração: Precisamos demonstrar tanto a existência quanto a unicidade de q e r.

Demonstração da existência:

Se $a = 0$, basta considerarmos $q = r = 0$;

Se $a \neq 0$:

Vamos recorrer ao princípio da indução finita para fazer a demonstração.

Tomemos um número natural k para o qual existem q e r de forma que:

$$k = b \cdot q + r, 0 \leq r < b$$

Sendo assim, temos que $(k+1) = b \cdot q + r + 1$.

Uma vez que $0 \leq r < b$, então $r + 1 < b + 1$. Logo, $r + 1 \leq b$.

- Se $r+1 < b$, basta considerarmos $r+1 = r'$ e temos $(k+1) = b \cdot q + r'$, com $0 \leq r' < b$
- Se $r+1 = b$, temos que como $(k+1) = b \cdot q + r + 1$, decorre

$$(k+1) = b \cdot q + b = b \cdot (q + 1).$$

Considerando $q' = q + 1$, temos $k + 1 = b \cdot q' + 0$. Portanto, com $0 \leq r < b$.

Demonstração da unicidade:

Suponhamos que existissem $r, r', q, q' \in \mathbb{N}$, tais que:

$a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$ e

$a = b \cdot q' + r'$, com $0 \leq r' < b$

Logo, $b \cdot q + r = b \cdot q' + r'$ e $r - r' = b \cdot (q' - q)$. Vamos demonstrar, por absurdo, que $r = r'$.

Suponhamos que $r > r'$. Teríamos $0 < r - r'$ e, portanto, como $r - r' = b \cdot (q' - q)$, decorreria que $0 < b \cdot (q' - q)$.

Por outro lado, $r < b$ e $r' < b$, decorre que $r - r' < b$. Como $r - r' = b \cdot (q' - q)$, teríamos $b \cdot (q' - q) < b$.

Logo, teríamos $0 < b \cdot (q' - q) < b$, o que é absurdo.

Assim, temos que a hipótese assumida ($r > r'$) é falsa. Da mesma forma, podemos demonstrar a impossibilidade de que $r' > r$. Portanto $r' = r$.

Disso decorre que, como $b \cdot q + r = b \cdot q' + r'$ e $b > 0$, temos que $q = q'$.

Ou seja, o quociente (q) e o resto (r) na divisão existem e são únicos.

Vejamos um exemplo da aplicação desse teorema. Vamos provar que a soma de dois números ímpares é sempre par.

Sabemos que número par é aquele que é divisível por 2, logo é da forma $2 \cdot q$. Já o número ímpar, na divisão por 2, deixa resto 1. Tomemos dois números ímpares n_1 e n_2. Temos que existem q_1 e $_2$ tais que:

$n_1 = 2 \cdot q_1 + 1$ e $n_2 = 2 \cdot q_2 + 1$.

Portanto, $n_1 + n_2 = (2 \cdot q_1 + 1) + (2 \cdot q_2 + 1) = 2 \cdot (q_1 + q_2) + 2 = 2 \cdot (q_1 + q_2 + 1)$.

Tomando $(q_1 + q_2 + 1) = q$, temos que $n_1 + n_2 = 2 \cdot q$. Logo, $n_1 + n_2$ é par.

A essência do algoritmo da divisão está no reconhecimento da existência do quociente e do resto, bem como dos possíveis valores do resto, considerando-se o divisor. Como vimos, o resto é sempre menor que o divisor. Sendo assim, no caso exemplificado estamos tratando de uma divisibilidade por 2 e, como consequência, o resto só pode ser 0 ou 1. Da mesma forma, ao investigarmos a divisibilidade por 3, devemos considerar a possibilidade de que o resto seja 0, 1 ou 2.

Como já vimos, o fato do resto da divisão $a : b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ ser zero significa que b é divisor de a. Os divisores de a diferentes dele mesmo são chamados de *divisores próprios de a*. Quando a soma dos divisores próprios de um número é igual ao próprio número, ele é chamado de *número perfeito*. Por exemplo, os divisores próprios de 6 são 1, 2 e 3. Como $1 + 2 + 3 = 6$, dizemos que 6 é um *número perfeito*. Segundo Dantzig (1970, p. 51), os números perfeitos 6 e 28 já eram conhecidos dos hindus e dos hebreus. Há estudiosos de teologia que entendem que o simbolismo da perfeição está representado na presença dos números 6 e 28 em passagens da Bíblia que se referem aos seis dias da criação e aos 28 dias do ciclo lunar.

Também Euclides ocupou-se de estudar os *números perfeitos*. No nono livro dos *Elementos* é demonstrada uma proposição envolvendo-os. No capítulo 4 retornaremos a esse tema, apresentando tal proposição.

A divisão, seu algoritmo e algumas propriedades podem ser explorados em sala de aula por meio de diferentes estratégias didáticas. Existe um jogo, bastante difundido, que pode ser bem interessante como apoio pedagógico para a exploração das possibilidades do resto na divisão. Estamos falando do Jogo do Nim. Existem diferentes versões desse jogo, mas, basicamente, ele é disputado por dois jogadores e consiste na retirada alternada de palitos de um monte, sendo que perde o jogador que retirar o último. Para o início do jogo, estipula-se a quantidade mínima e máxima de palitos que cada jogador pode retirar. Vamos supor que haja no monte 34 palitos e que tenha sido com binado que deve ser retirado no mínimo 1 e no máximo 4 palitos.

Sugerimos que antes de continuar a leitura você reflita com base no algoritmo da divisão: Seria possível estabelecer uma estratégia que fosse vencedora sempre? Se sim, qual seria?

Com base no algoritmo da divisão, podemos escrever $34 = 6 \cdot 5 + 4$. Ou seja, é possível formar seis grupos de cinco palitos restando 4. Como a intenção é deixar um palito para o adversário, o primeiro jogador retira três palitos e, nas jogadas seguintes, retira a quantidade que somada com a última retirada de seu oponente resulte em 5. Fazendo isso, ele certamente vencerá o jogo.

III IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII I

Esse jogo pode ser explorado em sala de aula com diferentes combinados prévios sobre a quantidade mínima e máxima de retirada, bem como com diferentes quantidades totais de objetos.

Embora os critérios de divisibilade sejam explorados no item 3.3, podemos, aqui, analisar uma outra atividade que pode ser explorada em sala de aula sobre a divisão que envolve o resto da divisão de um produto. Por exemplo, imagine que quiséssemos determinar o resto da divisão $(488 \cdot 219) : 9$:

488 : 9 deixa resto 2, pois a soma dos algarismos de 488 é 20 e 20-18 = 2;

219 : 9 deixa resto 3, pois a soma dos algarismos de 219 é 12 e 12 - 9 = 3;

$488 \cdot 219 = 106.872$ e 106.872 : 9 deixa resto 6, pois a soma dos algarismos é 24 (1+0+6+8+7+2) e 24-18 = 6.

Veja que $6 = 2 \cdot 3$!! Será que isso é uma coincidência? Podemos provar que não. Ou seja, que o resto da divisão de um produto é igual ao produto dos restos da divisão pelo mesmo divisor.

Teorema 3.2

O resto da divisão de um produto entre dois números naturais é igual ao produto dos restos da divisão desses números por um mesmo divisor.

Demonstração:

Suponhamos dois números naturais a e a' divididos por um mesmo divisor b. Nessas condições, pelo algoritmo da divisão euclidiana em IN, podemos afirmar que existem $r, r', q, q' \in$ IN, tais que:

$a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$ e

$a' = b \cdot q' + r'$, com $0 \leq r' < b$

O produto $a \cdot a'$ é:

$$a \cdot a' = (b \cdot q + r) \cdot (b \cdot q' + r') = b \cdot q \cdot b \cdot q' + b \cdot q \cdot r' + r \cdot b \cdot q' + r \cdot r' =$$
$$b \cdot (q \cdot b \cdot q' + q \cdot r' + r \cdot q') + r \cdot r'$$

Logo, como $b \mid b \cdot (q \cdot b \cdot q' + q \cdot r' + r \cdot q')$, temos que o resto da divisão $a \cdot a' : b$ é igual ao resto da divisão $r \cdot r' : b$.

3.3 Critérios de divisibilidade

Um tema de bastante utilidade e que costuma despertar a curiosidade dos estudantes é a validade dos critérios de divisibilidade. Como sabemos que um número é divisível por 3? E por 11? É possível dividir 2.206 por 9?

Diferentes critérios de divisibilidade podem ser demonstrados a partir do algoritmo da divisão. Para a realização dessas demonstrações, precisamos retomar um resultado explorado no capítulo 1, que é o fato de que, no sistema de numeração decimal, qualquer número natural N pode ser escrito na forma:

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + ... + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$,

Nessa forma de escrita, chamada de *expansão decimal de N*, cada um dos coeficientes a_n, a_{n-1}... a_0, representa alguma quantidade entre *0* e *9*. Ou seja, $0 \leq a_i \leq 9$, para $0 \leq i \leq n$ e $n \geq 0$.

Por exemplo, a expansão decimal de 5.476 é:

$5.476 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

Considerando essa propriedade do sistema de numeração decimal, juntamente com o algoritmo da divisão em IN, podemos investigar a validade de diferentes critérios de divisibilidade:

Divisibilidade por 2:

Dado o número $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$, vamos verificar quando ele é divisível por 2.

Podemos escrever

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 = 10 \cdot (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_2 10^1 + a_1) + a_0 = 2 \cdot 5 \cdot (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_2 10^1 + a_1) + a_0$. Logo, como $2 | 2 \cdot 5 \cdot (a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + ... + a_2 10^1 + a_1)$, temos que $2|N$ se, e apenas se, $2| a_0$. Portanto, para que N seja divisível por 2 é preciso que a_0 seja múltiplo de 2. Logo, $2|N$ se a_0 for igual a 0, 2, 4, 6 ou 8. Ou seja, $2|N$ se N for par.

Divisibilidade por 3:

Dado o número $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$, podemos escrever

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$

$N = a_n 1.000...00 + a_{n-1} 1.000...00 + ... + a_2 100 + a_1 10 + a_0$

$$N = a_n \cdot (\underbrace{999...99}_{\text{n algarismos}} + 1) + a_{n-1} \cdot (\underbrace{99...99}_{\text{n – 1 algarismos}} + 1) + ... + a_2 \cdot (99 + 1) + a_1 \cdot (9+1) + a_0$$

$$N = (a_n \cdot \underbrace{999...99}_{\text{n algarismos}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99...99}_{\substack{\text{n – 1} \\ \text{algarismos}}} +...+ a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9) + a_n + a_{n-1} +...+ a_2 + a_1 + a_0$$

$$N = 3 \cdot (a_n \cdot 333...33 + a_{n-1} \cdot 33...33 + ... + a_2 \cdot 33 + a_1 \cdot 3) + a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$$

Logo, como $3|3 \cdot (a_n \cdot 333...33 + a_{n-1} \cdot 33...33 + ... + a_2 \cdot 33 + a_1 \cdot 3)$, temos que $3|N$ se, e só se, $3|(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$. Portanto, para que N seja divisível por 3 é preciso que a soma dos algarismos de N seja divisível por 3.

Divisibilidade por 4:

Dado o número $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$, podemos escrever

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} +...+ a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$

$N = 100 \cdot (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} +...+ a_2) + a_1 10^1 + a_0 10^0$ (para $n > 1$).

Logo, como $4|100 \cdot (a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} +...+ a_2)$, temos que $4|N$ se, e só se, $4|(a_1 10^1 + a_0 10^0)$. Portanto, para que N seja divisível por 4 é preciso que o número formado pelos seus dois últimos algarismos seja divisível por 4.

Divisibilidade por 6:

Temos que $6|N$ se, e somente se, $N = 6 \cdot q = 3 \cdot 2 \cdot q$. Logo, $6|N$ se, e somente se, $2|N$ e $3|N$.

Divisibilidade por 8:

A divisibilidade por 8 segue a mesma estrutura que a divisibilidade por 4 e a sua demonstração pode ser feita da mesma forma.

Repare que, ao analisarmos as potências de 10, temos que, com exceção de 1, 10 e 100, todas as demais são divisíveis por 8:

1.000 : 8 = 125

10.000 : 8 = 1.250

100.000 : 8 = 12.500

Ou seja, para sabermos se um número é divisível por 8, basta verificarmos se o número formado pelos seus três últimos algarismos é divisível por 8.

Exemplo:

$27.153 = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

$27.153 = 2 \cdot 10.000 + 7 \cdot 1.000 + 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3$

Como 8 divide as duas primeiras parcelas da soma, pois divide as potências de 10 que as acompanham, termos que 8 dividirá 27.153 apenas se dividir as três últimas, ou seja, se dividir 153.

Logo, como 8 não é divisor de 153, temos que 8 não divide 27.153.

Divisibilidade por 11:

Dado o número $N = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1\, a_0$, podemos escrever

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$

$N = a_n \cdot (10^n - (-1)^n + (-1)^n) + \dots + a_3(1001-1) + a_2(99+1) + a_1(11-1) + a_0$

$N = [a_n \cdot (10^n - (-1)^n) + \dots + a_3\,(91 \cdot 11) + a_2(9 \cdot 11) + a_1\,(11)] +$

$$[(-1)^n \,.\, a_n + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0]$$

Logo, como $11 | [a_n \cdot (10^n - (-1)^n) + \dots + a_3\,(91 \cdot 11) + a_2\,(9 \cdot 11) + a_1\,(11)]$, temos que $11|N$ se, e só se, $11|[(-1)^n \cdot a_n + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0]$. Portanto, N é divisível por 11 se, e somente se, o número formado pela diferença entre a soma dos algarismos de ordem par e a soma dos algarismos de ordem ímpar for divisível por 11. Os algarismos de ordem par são os que representam a classe das unidades, das centenas etc.

Exemplo: Será que o número 59.301.726 é divisível por 11?

Vejamos:

Soma dos algarismos de ordem par: $9 + 0 + 7 + 6 = 22$

Soma dos algarismos de ordem ímpar: $2 + 1 + 3 + 5 = 11$

Diferença entre as somas: $22 - 11 = 11$

Como $11|11$, temos que $11|59.301.726$.

Quadro 3.1 – Alguns dos critérios de divisibilidade:

Divisor	Critério de divisibilidade
2	Um número é divisível por 2 se for par.
3	Um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos for divisível por 3.
4	Um número é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4.
5	Um número é divisível por 5 se terminar em 0 ou 5.
6	Um número é divisível por 6 se for divisível por 2 e por 3.
8	Um número é divisível por 8 se o número formado pelos seus três últimos algarismos for divisível por 8.
9	Um número é divisível por 9 se a soma de seus algarismos for divisível por 9.
11	Um número é divisível por 11 se o número formado pela diferença entre a soma dos seus algarismos de ordem par e a soma dos seus algarismos de ordem ímpar for divisível por 11.

Uma situação didática que pode ser proposta para estudantes do ensino fundamental, envolvendo divisibilidade, é a busca da determinação de uma posição em uma sequência de figuras. Por exemplo, na sequência abaixo qual será a figura que ocupará a 529ª posição?

🍎 ☺ ☼ ✱ ◓ ⊠ ⊠ 𝄞 ☾ 🍎 ☺ ☼ ✱ ◓ ...

Para começar, precisamos identificar que a sequência começa a se repetir a partir da décima posição. Ou seja, são nove figuras básicas. Para responder à pergunta, basta analisarmos a divisão de 529 por 9. Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos também é. Sendo assim, temos:

529 : 9 dá resto 7, pois $5 + 2 + 9 = 16$ e $16 - 9 = 7$;

Portanto, a 529ª posição será ocupada pela mesma figura que ocupa a posição sete, ou seja, ⊠.

Apenas como curiosidade, poderia ser pedido aos estudantes que determinassem quantas vezes a sequência básica, de nove símbolos, será repetida. Para isso, basta utilizarmos o algoritmo da divisão:

$529 = 9 \cdot 58 + 7$, portanto, a sequência básica será repetida 58 vezes e ainda serão necessários mais sete símbolos para se chegar à posição desejada.

3.4 O algoritmo de Euclides para o máximo divisor comum

Há uma diversidade de problemas práticos que envolvem a determinação de divisores comuns entre dois números dados e, mais particularmente, do maior divisor comum. Em geral, tais problemas envolvem diferentes quantidades que devem ser divididas em grupos de mesmo número. Por exemplo,

> Um marceneiro trabalha com ripas de madeira com comprimentos 80 cm, 120 cm e 200 cm. Como cortá-las de modo que não sobre madeira e que os pedaços obtidos sejam todos iguais e de maior comprimento possível?

A resolução desse pequeno problema demanda a determinação dos divisores de 80, 120 e 200 e, a seguir, sua comparação de modo que se identifique o maior divisor comum aos três valores.

No entanto, algumas vezes a determinação de todos os divisores de números dados pode ser um processo bastante cansativo. Sendo assim, como determinar o maior divisor comum a dois números dados de uma maneira mais rápida e eficiente?

A solução para essa necessidade foi indicada por Euclides na Proposição 2 do Livro VII, dos famosos *Elementos*. No entanto, historiadores como Eves (2004) ou Boyer (1996) entendem que o algoritmo anunciado já era conhecido muitos anos antes pelos pitagóricos e seus antecessores.

De qualquer forma, o primeiro algoritmo matemático proposto na história ficou conhecido como *algoritmo de Euclides* e é, até hoje, utilizado e ensinado nas aulas de matemática. O procedimento proposto por Euclides para a determinação do maior divisor comum a dois números consiste em dividir o maior pelo menor e, a seguir, o divisor pelo resto obtido. Esse processo é repetido até que a divisão seja exata, ou seja, que o resto seja zero. Vejamos um exemplo de como esse algoritmo é aplicado na obtenção do máximo divisor comum (mdc) entre 360 e 672:

	1	1	6	2
672	360	312	48	**24**
312	48	24	0	

De acordo com o que afirma a indicação do algoritmo, o mdc (672, 360) = 24.

É possível demonstrarmos a validade de tal algoritmo provando que o mdc entre dois naturais a e b é igual ao mdc entre b e o resto da divisão de a por b.

No exemplo utilizado:

mdc (672, 360) = mdc (360, 312) = mdc (312, 48) = mdc (48, 24) = 24

A seguir, demonstraremos a validade desse resultado para o caso geral.

Teorema 3.3

Sejam dados $a, b \in$ IN tais que $a>b$ e $b\neq 0$. Sendo r o resto da divisão de a por b, então mdc (a, b) = mdc (b, r).

Demonstração:

Seja m um divisor comum a a e b. Pelo algoritmo da divisão, temos que $a = b \cdot q + r$, com $b, r \in IN$ e $0 \leq r < b$. Logo, temos que $r = a - b \cdot q$ e, portanto $m|r$ uma vez que $m|a$ e $m|b$. Ou seja, se um número é divisor comum de dois outros, então ele é divisor do resto da divisão entre eles.

Por outro lado, se $m|r$ e $m|b$, temos que $m|a$, uma vez que $a = b \cdot q + r$.

Logo, chamando de D(a, b) o conjunto dos divisores comuns a a e b e de D(b, r) o conjunto dos divisores comuns a b e r, temos que D(a, b) = D(b, r). Como consequência, mdc (a, b) = mdc (b, r).

Sendo assim, a repetição de divisões sucessivas do divisor pelo resto da divisão anterior leva a restos cada vez menores, de forma que é possível chegar à divisão com resto zero. No caso geral, o algoritmo de Euclides para a determinação do mdc (a, b) pode ser representado da seguinte forma:

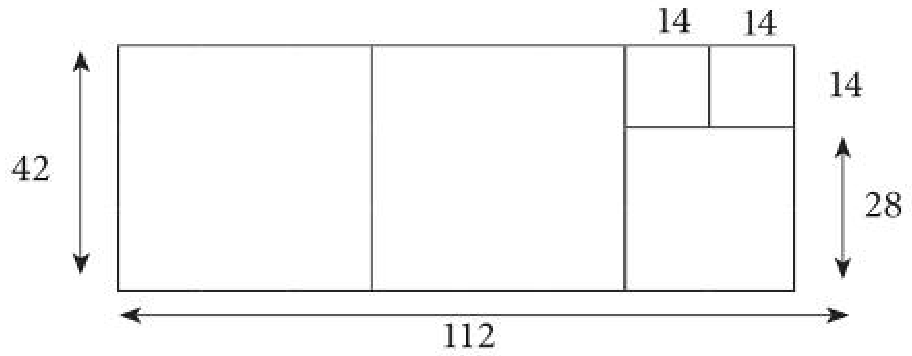
	q_1	q_2	q_3	q_4	...	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	r_3	...	r_{n-1}	$\boldsymbol{r_n}$
r_1	r_2	r_3	r_4	...	...	0	

mdc (a, b) = mdc (b, r_1) = mdc (r_1, r_2) = ... = mdc (r_{n-1}, r_n) = $\boldsymbol{r_n}$

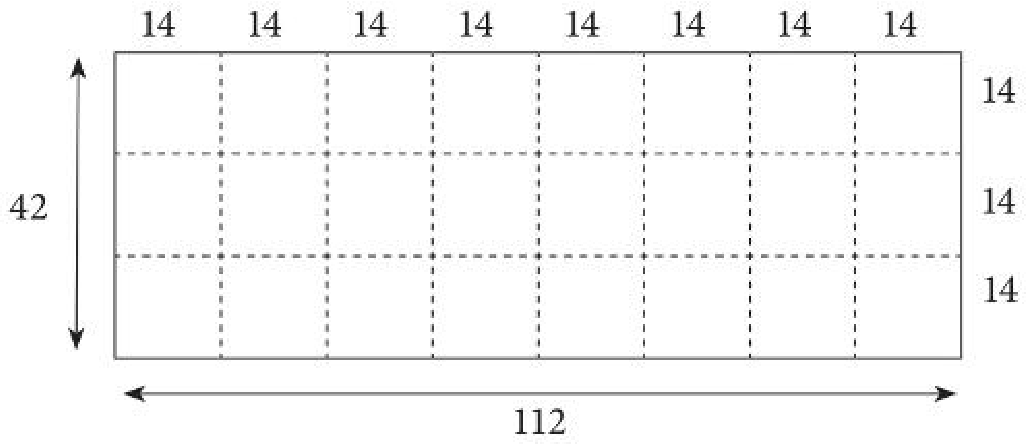
Uma interpretação que pode favorecer a compreensão dos estudantes sobre o significado do mdc refere-se a uma possível interpretação geométrica deste. Vamos tomar como exemplo mdc (112, 42). Pelo algoritmo de Euclides, temos:

	2	1	2
112	42	28	**14** = mdc (112, 42)
28	14	0	

Geometricamente, podemos visualizar esse procedimento construindo um retângulo de dimensões 112 e 42 e buscando a divisão desse polígono em quadrados com o maior lado possível:



Ou seja, 14 é o maior divisor comum de 42 e 112, o que nos permite dividir o retângulo em quadrados iguais de lado 14:



Vamos finalizar este capítulo formalizando o conceito de MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (mmc) com o qual nos familiarizamos na educação básica, por exemplo, na determinação da soma de frações com diferentes denominadores.

3.5 Mínimo múltiplo comum

Um número k é chamado de *mínimo múltiplo comum* de dois números naturais a e b, se:

$\rightarrow a|k$

$\rightarrow b|k$

$\rightarrow$ k divide qualquer outro múltiplo comum a a e b.

Por exemplo, mmc (4, 6) = 12, pois

4, 8, **12**, 16...são múltiplos de 4 e

6, **12**, 18...são múltiplos de 6

12 é o menor múltiplo comum a 4 e a 6.

No capítulo seguinte, cujo tema é números primos, estudaremos algumas das propriedades envolvendo mmc e mdc, bem como a estratégia da determinação do mmc por meio da decomposição dos números em fatores primos.

Síntese

Neste capítulo, partimos da ideia de divisão e analisamos seu algoritmo, bem como algumas propriedades decorrentes dele. Também foram estudados alguns critérios de divisibilidade e o algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum de dois números dados. A cada conceito buscamos exemplificar situações didáticas que podem ser trabalhadas no ensino da matemática para a abordagem dos temas.

Indicações culturais

GUEDES, M. G. P. Outros critérios de divisibilidade. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 12, p. 24-27, 1988.

O autor apresenta alguns métodos aritméticos que permitem verificar a divisibilidade por números primos até 100. Além disso, são dados exemplos de aplicação das formas propostas para a divisibilidade por 7, 11, 13 e 17.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

No capítulo 2 desta obra, os autores apresentam diferentes situações contextualizadas as quais a divisão se associa, destacando a relevância de que o professor as reconheça e explore em sala de aula.

PITOMBEIRA, J. B. O jogo de Euclides. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 24-28, 1989.

Neste artigo é apresentado um jogo no qual o conhecimento do algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc entre dois números contribui para a construção de uma estratégia vencedora.

1. A alternativa que contém todos os divisores naturais de 54 é:
   a) 1, 2, 3, 6, 18, 27.
   b) 1, 6, 3, 18, 27, 54.
   c) 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
   d) 1, 6, 18, 27, 54.

2. Sabendo que $15|255$ e que $10|1.000$, podemos afirmar que $150|255.000$, pois:
   a) todos os números envolvidos são múltiplos de 5.
   b) pela proposição 3.3, $150 = 15 \cdot 10$ e $255.000 = 255 \cdot 1.000$.
   c) pela proposição 3.5, se um número natural é divisor de dois outros naturais, então ele é divisor do produto desses números.
   d) 150 é divisor de qualquer múltiplo de 1.000.

3. Sem fazer as contas, é possível afirmar que o resto da divisão $(593 \cdot 267) : 5$ é:
   a) 3
   b) 5
   c) 6
   d) 1

4. Na sequência abaixo, a figura que ocupa a 497ª posição é:

    ☺ ☼ ☺ ...

   a)
   b) ☺
   c) ☼
   D) ○

5. Pelo algoritmo de Euclides podemos afirmar que o mdc (162, 70) é igual a:
   a) mdc (22, 4)
   b) mdc (70, 3)

c) mdc (3, 5)

d) mdc (4, 5)

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Demonstre que, se a, b, c, m e n são inteiros, tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(m \cdot b + n \cdot c)$.

2. Demonstre que um número é divisível por 5 se, e somente se, terminar em 0 ou 5.

3. Demonstre o critério de divisibilidade por 9.

Atividade aplicada: prática

Elabore um plano de ensino abordando o mdc. Planeje problemas a serem propostos que impliquem a necessidade desse conceito e que, ao mesmo tempo, permitam abordá-lo. É importante pensar em estratégias de abordagem do tema, bem como de organização da sala de aula.

Números primos

Neste capítulo abordaremos os números primos destacando sua relevância no universo da Teoria dos Números. Abordaremos o Teorema Fundamental da Aritmética, que nos permitirá ampliar as estratégias tratadas no capítulo anterior para o cálculo do mmc e do mdc entre dois números naturais. Além disso, serão apresentados teoremas e exemplos de alguns números especiais na matemática que têm relação com os primos, bem como algumas conjecturas que tiveram papel de destaque no desenvolvimento da teoria sobre os primos.

4.1 Números primos: um pouco de história

Os números primos constituem um importante capítulo no estudo da Teoria dos Números e, particularmente, da aritmética. Com uma história que remonta à Grécia Antiga, ainda hoje os números primos instigam matemáticos na busca tanto de um padrão de formação que os caracterize como na descoberta de números primos cada vez maiores.

No ensino da matemática, tais números estão presentes desde a educação básica, quando é comum serem apresentadas aos estudantes estratégias de cálculo do mmc e do mdc envolvendo a "fatoração" de números ou, em outras palavras, a sua decomposição em fatores primos.

Mas, afinal, o que são os números primos? De forma geral, dizemos que um número natural, maior do que um, é *primo* se ele é divisível apenas por um e por ele mesmo. Os números que não são primos são chamados de *compostos*. Nessa definição de número primo excluímos tanto o número zero quanto o número 1. Se por um lado a exclusão do zero é consequência das propriedades do zero em relação à divisão, a exclusão do 1 se dá por uma opção que visa garantir resultados como o Teorema da Fatoração Única, que veremos mais adiante.

Embora os números primos já fossem conhecidos dos pitagóricos em cerca de 500 a.C, a primeira definição de um número primo foi proposta por Euclides, na definição 11 do livro VII dos *Elementos*. Lá encontramos que "um número primo é aquele que é medido apenas pela unidade" (Euclides, 2008). Por outro lado, na definição 13, aparece que "um número composto é aquele que é medido por algum número". Mas o "um" não é um número? Para compreendermos tais definições é importante termos em mente que, para os gregos, o um não representava um número e sim a unidade de medida, o ponto de partida da medição de quantidades. Talvez venha daí exatamente o nome *primo*, do latim *primus,* que significa primeiro ou primitivo.

O primeiro método proposto para a determinação de números primos é conhecido como *Crivo de Eratóstenes*. Eratóstenes (–194 a.C), contemporâneo de Arquimedes, trabalhou na Biblioteca de Alexandria e, segundo Eves (2004), destacou-se como matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Uma de suas contribuições mais importantes para a ciência foi o cálculo da medida da circunferência da Terra.

Para a determinação dos primos menores que certo número n, Eratóstenes propôs que fossem escritos tais números ordenadamente e, a seguir, riscados todos os números compostos. Para isso, começava-se riscando todos os múltiplos de dois. Depois, localizava-se o primeiro número não riscado – no caso o três – e riscavam-se todos os seus múltiplos. A seguir, repetia-se o processo: o primeiro número não riscado era o cinco, assim riscavam-se todos os múltiplos de cinco. Esse processo é o que justifica o nome *crivo*, que quer dizer "peneira". Ou seja, por meio dele os primos "são peneirados".

Seguindo o Crivo de Eratóstenes, para números menores que 100 temos a seguinte tabela, na qual os números não riscados são os primos menores que 100:

Figura 4.1 – Crivo de Eratóstenes

~~1~~	2	3	~~4~~	5	6	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	62	~~63~~	~~64~~	~~65~~	66	**67**	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	96	**97**	~~98~~	99	~~100~~

Podemos reparar que, repetindo o processo descrito no crivo, alguns números são riscados mais de uma vez. Por exemplo, o número 44 foi riscado quando riscamos os múltiplos de 4 e quando riscamos os múltiplos de 11. Isso faz com que o processo indicado por Eratóstenes seja pouco eficiente para números muito grandes. Na busca de minimizar a quantidade de ações necessárias para a determinação de primos menores que um número *n*, pode-se considerar que é suficiente a repetição do processo até $\sqrt{n}$. No caso da Figura 4.1, seria suficiente procedermos até 10. A partir daí os valores a serem riscados começam a se repetir.

Uma atividade interessante a ser proposta junto aos estudantes, quando ensinamos números primos, é a construção do Crivo de Eratóstenes. Pode-se pedir a eles que investiguem até qual número é necessária a repetição do algoritmo proposto. Para isso, podemos pedir que sejam construídos crivos com diferentes quantidades de números, comparando as respostas obtidas para os diferentes crivos.

4.2 O Teorema Fundamental da Aritmética

Os números primos são considerados na matemática como os tijolos dos números inteiros e, em particular, dos números naturais. Isso porque podemos mostrar por meio do Teorema Fundamental da Aritmética que todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito como o produto de números primos e que, exceto pela ordem dos fatores, essa fatoração é única.

Um resultado que permite a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética foi indicado por Euclides nos seus *Elementos* — Livro VII, proposição 30 —, ao indicar que "se dois números, multiplicados entre si originam algum número, e qualquer número primo mede o produto, então também mede um dos números iniciais" (Euclides, 2008). Podemos escrever esse resultado matematicamente de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 4.1: Dados três números naturais a, b, p. Se p é um primo e $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Vejamos agora uma demonstração para o *Teorema Fundamental da Aritmética*:

Teorema 4.1 – Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural n, maior do que 1, ou é primo ou pode ser escrito como o produto de números primos e, exceto pela ordem dos fatores, essa fatoração é única.

Demonstração: Precisamos demonstrar tanto a existência quanto a unicidade da fatoração.

Demonstração da existência:

Vamos usar o Princípio da Indução para essa demonstração.

Se $n = 2$, a fatoração é evidente, uma vez que 2 é primo. Suponhamos agora que a fatoração em primos exista para todo natural a, menor do que n, ou seja, $2 \leq a < n$. Temos então duas possibilidades:

- n é primo, e nesse caso a possibilidade da fatoração está demonstrada;
- n é composto: nesse caso temos que $n = b \cdot c$, com b e c naturais menores do que n. Como assumimos a hipótese de que a fatoração em primos existe para todo natural menor do que n, então podemos escrever b e c como fatores de números primos. Assim, existem primos $b_1, b_2, b_3, ..., b_i$ e $c_1, c_2, c_3, ..., c_j$, $i, j \in$ IN, tais que $b = b_1 b_2 b_3 ... b_i$ e $c = c_1 c_2 c_3 ... c_j$. Logo, $n = b_1 b_2 b_3 ... b_i c_1 c_2 c_3 ... c_j$, o que prova que n pode ser expresso por fatores primos.

Demonstração da unicidade:

Vamos supor que existam primos $b_1, b_2, b_3 ... b_i$ e $c_1, c_2, c_3 ... c_j$ tais que $n = b_1 b_2 b_3 ... b_i = c_1 c_2 c_3 ... c_j$. Logo, temos que $b_1 | c_1 c_2 c_3 ... c_j$ e, portanto, b_1 divide algum dos primos $c_1 c_2 c_3 ... c_j$, ou seja, $b_1 | c_k$, para algum $k \in$ IN, $1 \leq k \leq j$. Como ambos são primos, temos que necessariamente $b_1 = c_k$, para algum k. Mudando a posição dos fatores $c_1 c_2 c_3 ... c_j$, podemos supor que $b_1 = c_1$. Daí decorre que

$$b_2 b_3 ... b_i = c_2 c_3 ... c_j$$

Por indução, temos que bi e cj são iguais dois a dois e que i=j. Logo, a fatoração é única.

Compreendido o conceito de número primo, a pergunta que decorre é quantos são eles. Essa resposta também nos foi dada por Euclides! A demonstração apresentada por Euclides é até hoje reconhecida por sua elegância e rigor. A Proposição 20, do Livro IX de *Elementos*, equivale à seguinte proposição:

Proposição 4.2: Existem infinitos números primos.

Demonstração:

Suponhamos que exista um número finito de primos $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i$. Tomemos o número n equivalente ao produto de tais primos, ou seja, $n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_i$. Considerando $n + 1$, temos que ele *não é primo,* uma vez que é maior do que $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i$. Sendo assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, algum primo b divide $n + 1$. Logo, como b divide n, b divide 1, o que é absurdo. Portanto, nossa premissa é falsa. Ou seja, existem infinitos números primos.

Essa primeira aproximação do estudo sobre os números primos, como já dissemos, remonta a Euclides. No entanto, a busca do conhecimento sobre tais números tem desafiado matemáticos ilustres no decorrer dos séculos. Para além do prazer dos matemáticos ao serem instigados com números que surgem de forma aparentemente caótica entre os naturais, temos hoje em dia a utilização dos números primos, por exemplo, na criptografia.

Muito utilizada hoje com o avanço da comunicação digital, a criptografia tem por objetivo tornar incompreensíveis diferentes tipos de dados como mensagens e senhas bancárias. Para isso são utilizados algoritmos que codificam os dados iniciais. Em muitos desses algoritmos utilizam-se operações entre fatores primos de números suficientemente grandes como forma de tornar a busca pelos dados iniciais extremamente trabalhosa.

4.3 Novas estratégias para o cálculo do mmc e do mdc

A partir do estudo dos números primos e do Teorema Fundamental da Aritmética, podemos estabelecer novas estratégias para o cálculo do mmc (a, b) e do mdc (a, b), envolvendo a decomposição em fatores primos dos números naturais a e b.

Imaginemos a seguinte situação:

Arthur, Cecília e Malu se conheceram em um parque de diversões e ficaram muito amigos. Cada um tinha combinado com seus pais sobre a frequência com a qual poderia ir ao parque. Arthur podia ir ao parque de 4 em 4 dias, Cecília de 6 em 6 e Malu de 9 em 9 dias. Quantos dias após se conhecerem eles se reencontrarão no parque?

Nesse caso, se simplesmente multiplicarmos $4 \cdot 6 \cdot 9$, encontraremos 216, que é um múltiplo comum aos números dados. No entanto, para resolvermos o problema precisamos do menor múltiplo comum. Analisando as fatorações, temos:

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1$

$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$

Logo, para formarmos um múltiplo dos três números precisamos de fatores que tenham como base os primos 2 e 3. No entanto, para determinarmos o menor múltiplo comum é suficiente que o múltiplo procurado possua como fatores os primos com o maior expoente. Vejamos:

Na multiplicação $4 \cdot 6 \cdot 9$ temos como fatores $2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 3^2 = 2^3 \cdot 3^3 = 216$;

Selecionando apenas os fatores com maior expoente: $2^2 . 3^2 = 36$

Assim, embora 216 seja um múltiplo comum a 4, 6 e 9, o menor múltiplo comum a esses números é 36. Ou seja, o mmc (4, 6, 9) = 36. Portanto, no nosso problema as crianças se reencontrarão no parque depois de 36 dias.

A partir dessa busca de fatores comuns com o maior expoente, é comum na educação básica que se ensine o algoritmo da *fatoração conjunta*:

4,	6,	9	2	
2,	3,	9	2	x
1,	3,	9	3	
1,	1,	3	3	
1,	1,	1	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	

Embora esse algoritmo seja bastante prático, é essencial que os estudantes compreendam que o que ele possibilita é o produto de todos os fatores primos dos números sobre os quais se deseja determinar o mmc, tomados em seu maior expoente. Esse resultado pode ser expresso pelo seguinte teorema:

Teorema 4.2

O mmc de dois números *a* e *b* é igual ao produto dos fatores primos resultantes da decomposição de ambos, tomados um a um e com o maior expoente quando comparados em ambas as fatorações.

Da mesma forma que analisamos a estratégia de cálculo do mmc, podemos analisar como se daria o cálculo do mdc, considerando as propriedades da decomposição de números em fatores primos.

Para isso, vamos considerar o seguinte problema:

Em uma escola, três classes estão organizando uma gincana. Para isso, serão formados grupos de crianças no interior de cada classe. No entanto, quando foram definir as regras, os estudantes ficaram com dúvidas sobre qual seria o número de pessoas permitido por grupo. Isso porque a intenção era formar grupos com o maior número possível de crianças e a primeira classe tem 40 estudantes, a segunda 24 e a terceira 48. Ajude-os a decidir qual deve ser o número de pessoas por grupo, de modo que seja possível formar no interior de cada classe grupos com o mesmo número de estudantes sem excluir qualquer criança.

Ao propormos um problema como esse aos estudantes da educação básica, é importante destacarmos que, caso não houvesse a necessidade de que o grupo fosse o maior possível, poderíamos responder, por exemplo, que seriam formadas duplas ou mesmo quartetos (uma vez que os três números são divisíveis por 4). No entanto, o que buscamos é formar grupos com o maior número possível de estudantes. Ou seja, procuramos o maior divisor comum a 24, 40 e 48. Fazendo a fatoração dos números, temos:

$24 = 2^3 \cdot 3$

$40 = 2^3 \cdot 5$

$48 = 2^4 \cdot 3$

Logo, o maior divisor comum de 24, 40 e 48 é 2^3. Ou seja, o mdc (24, 40, 48) = 8. Portanto, no problema dado poderão ser formados grupos de 8 estudantes em cada sala.

Essa estratégia de cálculo do mdc pode ser expressa por meio do seguinte teorema:

Teorema 4.3

O mdc de dois números *a* e *b* é igual ao produto dos fatores primos comuns à decomposição de ambos, tomados um a um e com o menor expoente quando comparados em ambas as fatorações.

Quando dois números não possuem divisor comum maior do que um, ou seja, se para dois números naturais *a* e *b* temos mdc $(a, b) = 1$, então eles são chamados de *primos entre si* ou *relativamente primos*. Por exemplo, como o mdc (15, 28) = 1, dizemos que *15 e 28 são números primos entre si*.

A partir da definição de mmc e mdc e do Teorema Fundamental da Aritmética, decorrem alguns teoremas que relacionam múltiplos e divisores de números naturais. A seguir, selecionamos alguns resultados representativos da relação entre mmc e mdc de dois números naturais *a* e *b*. Ao final deste livro são indicadas referências bibliográficas que ampliam tal análise ao adentrarem no campo de investigação da Teoria dos Números (Hefez, 2005; Milies, 2006).

Teorema 4.4

Considere os números naturas a, b, c. Se $a|b \cdot c$ e mdc $(a, b) = 1$ então $a|c$.

Exemplo: $3|42$

$3|7 \cdot 6$

mdc $(3, 7) = 1$ então $3|6$.

Teorema 4.5

Se dois números a e b são primos entre si, então mmc $(a, b) = a \cdot b$

Exemplos:

1) mdc $(3, 5) = 1$ então mmc $(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15$

2) mdc $(13, 11) = 1$ então mmc $(13, 11) = 13 \cdot 11 = 143$

Teorema 4.6

O produto do mmc pelo mdc de dois números é igual ao produto dos próprios números.

Em linguagem matemática: mdc (a,b) · mmc $(a,b) = a \cdot b$.

Exemplos:

1) $a = 8 = 2^3$ e $b = 12 = 2^2 \cdot 3$

mdc $(8, 12) = 2^2 = 4$ (fatores comuns com os menores expoentes)

mmc $(8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$ (todos os fatores com os maiores expoentes)

mdc $(8, 12)$ · mmc $(8, 12) = 4 \cdot 24 = 96 = 8 \cdot 12 = 2^3 \cdot (2^2 \cdot 3)$

Repare que a multiplicação de 8 e 12 agrupa, uma única vez, todas as potências utilizadas para o mmc (8, 12) e para o mdc (8, 12).

2) $a = 20 = 2^2 \cdot 5$ e $b = 50 = 2 \cdot 5^2$

mdc $(20, 50) = 2 \cdot 5 = 10$

mmc $(20, 50) = 2^2 \cdot 5^2 = 100$

mdc $(20, 50)$ · mmc $(20,50) = 10 \cdot 100 = 1.000 = 20 \cdot 50$

Teorema 4.7

Se b divide a então mmc $(a, b) = a$ e mdc $(a, b) = b$

Exemplos:

1) $6|18$. Então mdc $(6, 18) = 6$ então mmc $(6, 18) = 18$

2) $12|48$. Então mdc $(12, 48) = 12$ então mmc $(12, 48) = 48$

Os teoremas apresentados nesta seção podem ser bastante úteis como facilitadores no processo de cálculo do mmc ou do mdc entre dois números naturais.

4.4 Alguns números curiosos envolvendo os números primos

Ao longo da história, muitos matemáticos se destacaram ao proporem conjecturas envolvendo os números primos. Muitas delas foram demonstradas e outras ainda permanecem a desafiar curiosos e estudiosos sobre o tema.

Como apontamos no capítulo anterior, Euclides demonstrou no nono livro dos *Elementos* uma proposição envolvendo os *números perfeitos.* Essa proposição, de acordo com Barnett (1992, p. 44), foi enunciada da seguinte forma: "Se tantos números quantos desejarmos começando com a unidade são expostos em proporção dupla, até que a soma de todos se torne um número primo, e se a soma multiplicada pelo último forma algum número, o produto será perfeito."

Trazendo essa proposição para a linguagem algébrica, a afirmação de Euclides indica que se $2^n - 1$ é um número primo, então $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ é um número perfeito. Ou seja, há aproximadamente 2.300 anos Euclides percebeu a relação entre os números primos e os números $2^n - 1$.

A proposição de Euclides sobre os números perfeitos fornece números perfeitos pares; no entanto, foi apenas no século XVIII que o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) demonstrou que todo número perfeito par tem a forma indicada por Euclides. Até hoje, ainda não foram descobertos números perfeitos ímpares, sendo a sua existência, segundo Eves (2004, p. 99) "uma das célebres questões abertas da teoria dos números". De qualquer forma, já se verificou não existir número perfeito ímpar com menos do que 200 dígitos.

Os números da forma 2^n-1, com n primo, são hoje conhecidos como *números de Mersenne*, por terem sido exaustivamente estudados no século XVII pelo frade Marin Mersenne (1588-1648). No entanto, nem todo número de Mersenne é primo. Quando isso acontece, o número recebe o nome de *primo de Mersenne*. Assim, embora seja verdade que se 2^n-1 é primo então n é primo, a recíproca não é verdadeira. Ou seja, se n é primo, 2^n-1 não é necessariamente primo. Podemos verificar isso tomando $n = 11$. Neste caso, $2^{11} - 1 = 2.047 = 89 \cdot 23$, logo, não é primo.

Atualmente, por conta da criptografia, tem se buscado números primos cada vez maiores. Para isso, são desenvolvidos testes de primalidade que são executados com o auxílio de computadores. Embora seja muito raro encontrarem-se números primos entre os números de Mersenne, estes últimos têm contribuído com o desenvolvimento de tais testes.

Segundo Coutinho (2004, p. 5), ainda no século XIX o francês F. E. Lucas avançou em testes de primalidade para os números de Mersenne e conseguiu demonstrar que $2^{127} - 1$ é primo. Tal número continua sendo o maior primo descoberto até hoje sem o uso do computador.

A infinitude dos números primos, demonstrada por Euclides, serviu de base para a demonstração de que toda progressão aritmética da forma a, $a+d$, $a+2d$, $a + 3d$..., com a, d primos, contém infinitos primos, realizada no século XIX pelo alemão Lejeune-Dirichlet (1805-1859).

Também sobre a formação dos números primos, Fermat (1601-1665), em 1640, conjecturou que todo número na forma $2^{(2^n)}+1$, para $n \in$ IN, é primo. Embora a conjectura seja falsa, os primos dessa forma ficaram conhecidos como *primos de Fermat*.

Outra conjectura bastante famosa também proposta por Fermat ficou conhecida como o *Último Teorema de Fermat*, e afirma que não existem inteiros positivos x, y, z, n tais que $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 2$. Já o *pequeno Teorema de Fermat* provou que se p é primo e a é primo com p, então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p.

Sobre o *Último Teorema de Fermat*, Eves (2004, p. 391-92) nos conta que foram encontradas anotações de Fermat na margem de seu exemplar de *Aritmética de Diofanto*, ao lado do problema 8 do livro II, cujo enunciado é: "Dado um número quadrado, dividi-lo em dois quadrados". Naquelas margens, Fermat registrou:

> É impossível dividir um cubo em dois cubos, ou uma biquadrada em duas biquadradas, ou, em geral, qualquer potência maior que um quadrado em duas potências de igual valor. Descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa disso para cujo desenvolvimento, entretanto, esta margem é muito pequena. (Dantzig, 1970, p. 57)

Até hoje não se sabe se Fermat realmente tinha essa demonstração. De qualquer forma, essa conjectura tornou-se uma obsessão para muitos célebres matemáticos que dedicaram suas vidas a tentar demonstrá-la. Na busca dessa demonstração, novos avanços sobre os números primos foram feitos, uma vez que uma estratégia possível consistia em tentar fatorar o polinômio $x^p + y^p$ (Coutinho, 2004, p. 4). Apenas em 1995 esse resultado foi demonstrado pelo inglês radicado nos Estados Unidos, Andrew Wiles (1953–). Os recursos matemáticos modernos utilizados na demonstração indicam que dificilmente Fermat teria uma demonstração correta de seu próprio teorema. Caso a tivesse, com certeza não teria recorrido aos mesmos recursos utilizados por Wiles em sua demonstração.

Um pouco mais tarde, o matemático Goldbach (1690-1764) sugeriu, em uma carta escrita a Euler em 1742, que todo número par maior do que 2 poderia ser escrito como a soma de dois números primos. Assim, por exemplo, 4 = 2+2, 10 = 7+3, 12 = 5+7... Essa observação ficou conhecida como *Conjectura de Goldbach* e já foi verificada para números até 100 milhões (Eves, 2004, p. 625).

Outro matemático que contribuiu com os estudos sobre os números primos foi Gauss (1777-1855). Analisando tábuas de números primos, ele propôs que a distribuição de números primos menores que um número real a positivo tende a $\frac{a}{\ell n a}$ à medida que a tende a infinito. Ou seja, a *Conjectura de Gauss* afirmava que "a quantidade de primos (positivos) menores que um inteiro $a > 0$ se aproxima de $\frac{a}{\ell n a}$ quando a fica muito grande" (Coutinho, 2004, p. 2). De forma bastante simplificada, tal resultado nos mostra que encontrar um número primo entre os números naturais é cada vez mais difícil à medida que o intervalo estudado aumenta. Sua veracidade foi demonstrada em 1896 e hoje em dia esse resultado é conhecido como *Teorema dos Números Primos*.

Ainda hoje existem conjecturas abertas sobre os números primos, isto é, conjecturas sobre as quais não foram demonstradas nem sua validade nem sua falsidade. Algumas delas são destacadas por Eves (2004, p. 625) como, por exemplo:

- Existência de infinitos pares de *primos gêmeos**.
- A validade da conjectura de Goldbach.
- A infinitude dos primos de Fermat.

A partir da década de 1970, a busca pelos números primos ganha nova importância, dado o avanço de novos sistemas de criptografia que passaram a demandar um estoque grande de primos. Além disso, o desenvolvimento de computadores cada vez mais rápidos e eficientes permitiu a ampliação de testes de primalidade. Muitos desses testes utilizam o resultado conhecido como *pequeno Teorema de Fermat* ou os *Números de Mersenne.*

Curiosidade
O número *palíndromo*** 345 676 543 é primo.

* São aqueles na forma p e $p+2$, $p \in$ IN.

** É aquele que mantém o seu valor quando lido da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.

Síntese

Neste capítulo, estudamos alguns episódios da história dos números primos, com especial destaque para o Teorema Fundamental da Aritmética. A partir dele elaboramos novas estratégias para o cálculo do mmc e do mdc entre dois números naturais. Além disso, vimos alguns teoremas que relacionam mmc e mdc. Finalizamos o capítulo conhecendo alguns números de destaque que foram construídos à medida que diferentes matemáticos buscaram uma expressão que representasse os números primos. Algumas conjecturas sobre os números primos ainda estão em aberto.

Indicações culturais

ÁVILA, G. A distribuição dos números primos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 19, p. 19-26, 1991.

Neste artigo o autor aborda os números primos, iniciando por sua definição e sua contribuição para o Teorema Fundamental da Aritmética. A seguir, retoma contribuições de diferentes autores na discussão sobre a infinitude dos primos. O foco do artigo, no entanto, é distribuição e densidade dos números primos.

NERY, C.; POSSANI, C. Os primos esquecidos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 47, p. 16-20, 2001.

O autor retoma algumas definições elementares sobre primos e, a seguir, apresenta uma série de problemas envolvendo tais números. Especialmente interessante para quem gosta de desafios e também para o professor que busca problemas desencadeadores sobre o tema para propor a seus alunos.

TERADA, R. Criptografia e a importância de suas aplicações. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 12, p. 1-7, 1988.

O autor contextualiza as situações em que é usada a criptografia e os cripto-sistemas, descrevendo métodos antigos como a Cifra de César e os desenvolvidos nas décadas de 1970 e 1980 como o one-time pad e *o cripto-sistemas com chaves públicas. Todas as aplicações envolvem divisibilidade e números primos.*

Atividades de autoavaliação

1. Considere dois números a e b em sua forma fatorada, de modo que $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$ e $b= 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^5$. Podemos afirmar que o mdc (a, b) é:
   a) $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^9$
   b) $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^9 \cdot 7$
   c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7$
   d) $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^5$
2. Considerando a e b como no exercício anterior, podemos afirmar que o mdc (a, b) é:
   a) $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^9 \cdot 7$
   b) $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4$
   c) $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7$
   d) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^5$
3. Utilizando o Teorema 4.6 e o algoritmo de Euclides para o mdc, estudado no capítulo 3, calcule o mmc (2.424, 918). O resultado é:
   a) $196 \cdot 256$
   b) $1.425 \cdot 312$
   c) $118 \cdot 76$
   d) $370 \cdot 872$
4. Utilizando as estratégias da fatoração para a determinação do mdc, podemos afirmar que o mdc $(x^5+2x^4+x^3, x^5+x^4)$ é:
   a) x^4
   b) $(x+1) \cdot x^3$
   c) $(x+1)^2 \cdot x^3$
   d) x^5+x^4

5. Utilizando a fórmula de Euclides, quais são os três primeiros números perfeitos?

   a) 6, 28, 496

   b) 3, 7, 31

   c) 2, 4, 16

   d) 1, 3, 6

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Utilizando o Crivo de Eratóstenes, verifique se 409 é primo.

2. Escreva o número 104 como a soma de dois números primos.

Atividades aplicadas: prática

1. Elabore um plano de ensino abordando a decomposição em números primos como estratégia para o cálculo do mmc e do mdc. Planeje problemas a serem propostos aos estudantes e indique estratégias de abordagem do tema.

2. De forma geral, a riqueza dos números primos é pouco explorada na educação básica, e seu ensino restringe-se à sua definição, identificação e utilização para a fatoração. Considerando o que foi apresentado neste capítulo, elabore uma proposta de ensino que explore curiosidades e fatos históricos sobre os números primos. Busque também ampliar seus conhecimentos a partir de uma pesquisa sobre o tema.

Números racionais

Os números racionais e os números irracionais estão intimamente ligados ao significado de comensurável e incomensurável. Por esse motivo, iniciaremos este capítulo abordando o conceito de medida, com seus aspectos históricos, epistemológicos e didáticos. Nesse percurso, discutiremos o conceito de fração, partindo de uma situação-problema envolvendo a medida e posteriormente a constituição da fração como um único número, o racional. Em seguida abordaremos a construção do campo numérico dos racionais, suas propriedades, discutindo algumas relações com outros campos numéricos.

5.1 Os racionais e a medição

Antes de iniciar a leitura, sugerimos que você reflita alguns instantes sobre a seguinte questão:

O que é medir?

Após uma reflexão inicial, com a finalidade de aprofundar esse conceito, possibilitando ir além de sua utilização em procedimentos cotidianos, sugerimos que pense mais alguns instantes nestes três aspectos: *por que, o que* e *como* medir.

O *por que* medir traduz uma necessidade humana que desencadeia a criação do conceito de medida. *O que* medir leva o pensamento na superação da contagem. O que há de diferente na qualidade de certos objetos ou fenômenos cuja contagem é insuficiente para quantificar? O *como* medir é a parte da medida que mais está evidenciada nos procedimentos cotidianos, o *saber fazer*, principalmente após o desenvolvimento dos instrumentos de medição. O propósito é refletir *como* esses objetos foram criados, ou seja, quais são as características essenciais para a produção de um objeto que se destina a mensurar algo.

O *por que*, o *o que* e o *como* medir não são relações independentes e o propósito da separação tem como objetivo identificar características que compõem o conceito de medida. Iniciamos com o *por que* medir por refletir a necessidade, a criação.

A necessidade humana da criação da medida está inserida na sua prática social, por isso partiremos da discussão de uma situação que reproduz um problema historicamente situado.

> *Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra* (Caraça, 1989, p. 32).

Ao pensar em repartir a terra para cobrar imposto, sob o aspecto da medida, observa-se no texto que o rei buscou distribuir a cada um uma *porção igual* de terra. Se questionarmos os estudantes a respeito de como poderia ser realizada tal distribuição, provavelmente responderiam algo no sentido de usar medidas iguais para todas as porções. Com o objetivo de proporcionar a compreensão da necessidade da medida, didaticamente sugerimos inserir um novo dado à situação: a inexistência de instrumentos de medida, e mais, o desconhecimento do que seja medir. O problema, desse modo, se traduz em:

> Como fazer as demarcações de terra de modo a reproduzir quantidades iguais de terra para cada família egípcia numa época em que não se conhecia o que era medida?

Uma opção é fazer transposições de comprimentos sem saber medir. Talvez essa sugestão seja praticamente inviável, mas pode-se partir de uma porção de terra retangular, delimitada aleatoriamente e considerá-la padrão. Estiram-se cordas sob os lados da porção e transfere-se o tamanho para o local desejado. A ideia subjacente a essa resposta não é nova, ela simplesmente se mobiliza a uma nova situação. Ou seja, a correspondência um a um permite que tenhamos quantidades iguais.

O problema não termina aí. As cheias do Nilo faziam com que a terra útil fosse diminuída e, portanto, seria injusto a cobrança por uma terra subtraída pelo rio. Observe que mais uma vez temos que o problema se configura no controle da *variação* quantitativa.

O pressuposto é que os indivíduos dessa época sabiam quantificar por meio da contagem. Com esse conhecimento, como mobilizar o pensamento de modo a avaliar a nova situação? *Como contar a terra?*

A análise dessa questão passa então pela *natureza* dos elementos envolvidos na contagem e na nova situação. A terra não está separada como os objetos que contamos, é um todo contínuo. O *algo* necessário quantificar é diferente do que se tinha nos processos de contagem. Nesse caso, temos que aprofundar o conhecimento da natureza do que se quer medir: a grandeza.

Lintz (1999), no seu estudo histórico, diz que a grandeza na época de Euclides se relacionava ao "aspecto plástico" como extensão ou como coleção de objetos. Não havia, naquela época, uma necessidade de explicação formal. Aos poucos fomos percebendo a necessidade de compreender melhor esse conceito. Lintz (1999, p. 146) considera grandeza ou magnitude como "algo que pode ser aumentado, diminuído ou agregado a outros objetos da mesma espécie, como por exemplo, um segmento, uma superfície, um número [...] o essencial da noção de magnitude ou grandeza é a possibilidade de fazer seus múltiplos".

Adotando grandeza como qualidade capaz de apresentar uma variação quantitativa, dizemos que são grandezas: cor, som, tempo, alegria, frutas etc. Nem para todas as grandezas o homem desenvolveu métodos para *numeralizar*.

Percebemos por meio dos órgãos sensoriais quando um som está mais alto que outro, uma cor está mais clara que outra e mesmo quando estamos mais alegres. O homem desenvolveu métodos e instrumentos para medir o tempo, o som e a luz colorida (por meio dos comprimentos de onda). E a alegria?

Às percepções sensoriais de variação quantitativa de uma grandeza chamaremos de *senso de grandeza*. Assim como no primeiro capítulo abordamos o senso numérico, como uma capacidade sensorial de perceber uma maior quantidade em relação à outra, o senso de grandeza tem o mesmo significado em relação à grandeza que incorpora o senso numérico.

Utilizamos o senso de grandeza diariamente. Sabemos muitas vezes se um objeto ou conjunto deles é mais leve que outro somente ao carregá-los, se um caminho é mais distante que outro, se uma velocidade é maior que outra (para podermos, por exemplo, atravessar uma rua), se uma pessoa é mais alta que outra etc.

Procure na sua rotina momentos em que você utiliza o senso de grandeza. Ele serve para você tomar uma decisão?

Embora o homem sempre tenha utilizado seu senso de grandeza, em alguns momentos ele se mostra insuficiente para tomar uma decisão.

Voltando ao exemplo de como medir a porção de terra de modo a controlar a sua variação para que o imposto cobrado seja proporcional ao seu tamanho, observa-se que o senso de grandeza não seria uma solução adequada.

> para medir a distância o homem teve de construir para si novos órgãos sensoriais, tais como o astrolábio, o telescópio e o microfone. Teve de idealizar balanças capazes de acusar diferenças de peso a que nossas mãos são insensíveis. E, a cada novo progresso na evolução dos instrumentos de medição, o homem teve de apurar os instrumentos da linguagem das grandezas (Hogben, 1970, p. 37).

Sugerimos que você faça uma reflexão sobre outras situações em que o senso de grandeza não é suficiente.

A grandeza não se refere estritamente a qualidades contínuas como é a natureza da terra. É um conceito que está presente também na qualidade dos objetos que contamos, os quais chamamos de *grandeza discreta*. Podemos então pensar que contamos os elementos discretos e medimos os contínuos? Sim, embora o conceito de grandeza seja mais amplo que o da contagem. Veremos mais adiante que podemos utilizar o conceito de medida para grandezas discretas. Isso não altera a natureza da grandeza.

A forma que o ser humano elaborou para organizar os elementos, seja para o uso ou para a comercialização, como o engarrafamento de líquido, o empacotamento de certa quantidade de massa como manteiga etc. pode gerar a ideia de *discretude* (relativo à grandeza discreta) de elementos contínuos. Isso quer dizer que o engarrafamento de certa quantidade de volume de líquido pode gerar no pensamento do indivíduo a ideia de que o volume é uma grandeza discreta, ou mesmo que a própria água o é.

O mesmo acontece com o movimento inverso, ou seja, comercializa-se areia pela sua massa e não por unidade, e com isso pode-se gerar a ideia de que areia seja de natureza contínua. Essa ideia pode ser alimentada pelo fato desses elementos (como a areia da praia, o sal, o açúcar refinado) aparecerem, para nós, em quantidades grandes ou já agrupadas e em unidades muito pequenas.

Com essa discussão percebe-se que quantificar – contar – com pedras o contorno da porção de terra do problema do rei Sesóstris não é uma solução adequada devido à sua natureza contínua ser diferente da natureza da pedra. Então, o que deve ter o instrumento que mede a fim de permitir quantificar um comprimento (como o lado da porção retangular de terra)?

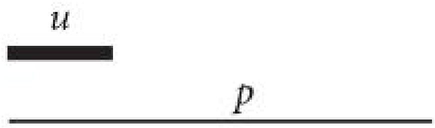
A criação do instrumento depende da grandeza que mede e tem que ser da mesma grandeza a ser medida. No caso da necessidade de medir certo comprimento, o instrumento se define pelo seu comprimento. De posse de um objeto que tenha comprimento, objeto denominado *instrumento de medida*, pela nova qualidade dada ao objeto na sua significação, vamos ao método de medir, o *como* medir. Aparece então a necessidade de uma *unidade de medida (padrão)*, pois, de posse dela, pode-se reproduzir um conhecimento já adquirido, o da contagem; a reprodução de quantas unidades de medida há na quantidade da grandeza que se quer medir.

No Egito, por volta de 3000 a.C. a 2500 a.C., a solução foi a formação de uma unidade de comprimento chamada *côvado* ou *cúbito*, que era o comprimento equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. A reprodução do cúbito para uma corda tornou-se mais prático para medir o contorno da porção de terra, aliás, a praticidade foi transferir para a corda não somente um, mas vários cúbitos, separando-os por meio de nós. A corda com vários nós compunha o instrumento de medida, uma "régua" primitiva utilizada por agrimensores daquela época. O cúbito se tornou a unidade de medida padrão. Imagine se houvesse várias unidades de medida: como seria complicada a comunicação!

Comparando o comprimento determinado da corda com o comprimento do contorno da porção de terra de um modo determinado, tem-se a medida. A medida é então o número de vezes que o comprimento que mede – o cúbito – *cabe* no comprimento a ser medido.

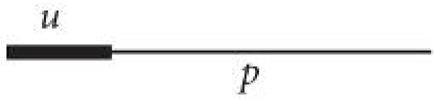
Dissemos sobre *um modo* de comparar a unidade com a grandeza a ser medida. Ilustraremos com os segmentos abaixo a importância da unidade e do método de tal comparação.

Supomos u a unidade de comprimento e p o comprimento a ser medido.

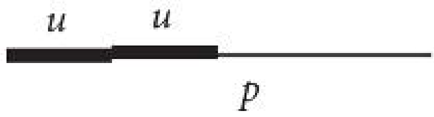


Para medir p com u temos que *contar* quantas vezes u se reproduz em p. Essa reprodução é um modo especial de comparação, significa que inicialmente as origens de ambos os comprimentos têm que coincidir. O lugar de p que corresponde à extremidade de u finaliza a primeira comparação, ou seja, nesse momento tem-se um u. Como p é maior que u, o processo continua, ou seja, a extremidade de u em p da primeira comparação deve coincidir com a origem de u para a segunda comparação, e assim sucessivamente. Vejamos o esquema:

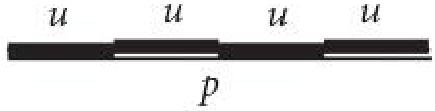
1º passo



2º passo



Esse processo continua até termos quantas vezes u se reproduz (*cabe*) em p. No exemplo temos que u se reproduz 4 vezes em p, logo o comprimento de p é $4u$.



E quando a unidade não se reproduz completamente na grandeza a ser medida?

Observamos, em situações didáticas, estudantes que não conhecem a fração e, por vezes, mesmo os que conhecem resolvem essa dificuldade com uma mudança de unidade de comprimento. É importante para os estudantes vivenciarem esse dilema, o qual os permite perceber as necessidades históricas que proporcionaram o avanço do conhecimento.

As pesquisas de Catalani (2002) e de Dias (2007) abordaram esse problema com o objetivo de os indivíduos vivenciarem essa necessidade. Catalani trabalhou com crianças em torno de 10 anos e Dias com professores de matemática. As crianças em Catalani (2002) vivenciaram uma adaptação do problema do rei Sesóstris. Diante da *sobra* do comprimento a ser medido, menor que a unidade de medida, as crianças resolveram mudar a unidade de medida, do pedaço de corda que representava o cúbito da professora mudaram para os passos e o palmo para medir o comprimento do terreno.

Em Dias (2007), os professores vivenciaram uma situação-problema denominada *Laboratório de Medida,* cujo objetivo foi reconhecer as qualidades quantificáveis de certos objetos e mensurá-las quanto possível sem a utilização de instrumentos de medida industrializados, como a régua, com o propósito de desenvolver um instrumento, o conceito de medida e o conceito de número fracionário.

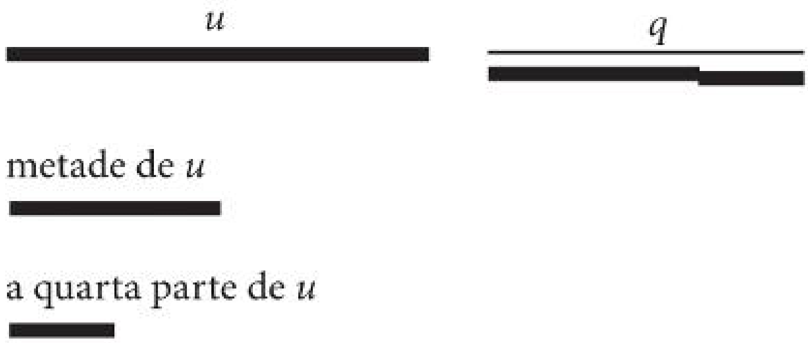
A história dos nossos antepassados nos ensina o poderoso instrumento que foi nosso corpo, em particular mãos e dedos. Na matemática os dedos foram utilizados tanto para contagem como para cálculos; o corpo foi também utilizado para contagem, como é o caso dos papuas apresentado no primeiro capítulo. A polegada é outro exemplo, só que para unidade de medida. A polegada é o comprimento que vai da ponta do dedo polegar até a primeira articulação.

É interessante discutir com os estudantes sobre unidades de medida, a diversidade de possibilidades e por que se torna inviável cada indivíduo, comunidade ou mesmo país ter diferentes unidades de medida.

Tanto nas pesquisas referenciadas como aqui, o dilema origina-se pela não reprodução da unidade uma quantidade inteira de vezes. Com isso o dilema é: ou nega-se a possibilidade de medir com a mesma unidade de medida e, com isso, pode-se gerar uma multiplicidade de unidades além da impossibilidade de converter umas nas outras; ou reconhece-se que o campo numérico dos inteiros é insuficiente e tem-se que aperfeiçoá-lo.

No dilema, o que está em jogo é o ponto crítico ou o ponto fraco no qual reside uma negação de tal estágio do conceito. Para avançar a níveis superiores de conhecimento, Caraça (1989) orienta a passagem pelo dilema, a formulação de caminhos no desenvolvimento do conceito diante de uma dificuldade. O dilema é uma passagem que pode proporcionar aos estudantes a compreensão de processos de construção de conhecimento.

Como já discutimos, a primeira alternativa do dilema é inviável, então pensemos na segunda: como medir com a mesma unidade algo que seja menor que a unidade, e mais, representar essa medida numericamente? Cria-se então a *subunidade*, ou seja, a divisão da unidade em partes iguais. Quantas partes? Quantas forem necessárias para que a *sobra* possa ser medida por meio de uma subunidade, ou seja, para que o processo de reprodução da subunidade na sobra seja exato. Ilustrando a partir da medida da unidade *u* e a *sobra q*, tem-se:



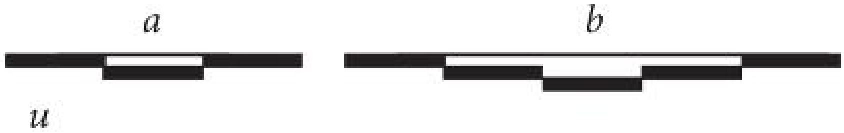
Observa-se que a metade de *u* se reproduz uma vez em *q* – e ainda "sobra" –, mas não duas vezes, então há que se dividir *u* novamente. Poderia dividir *u* em três, quatro, cinco,... um número inteiro de partes iguais. Será que sempre haverá uma subunidade que permite medir? Essa pergunta é análoga a: É possível que dois comprimentos sejam sempre comensuráveis? Abordaremos essas questões no capítulo seguinte.

No exemplo, dividimos *u* em quatro partes e observamos que em *q* se reproduz metade de *u* mais a quarta parte de *u*, ou seja, três quartas partes.

Uma notação matemática para representar a medida com a subunidade foi a FRAÇÃO de números inteiros ligada estreitamente com o conceito de *fracionar* a unidade de medida.

A unidade de medida corresponde ao número 1, a unidade subdividida em duas partes representa-se por 1 : 2 ou $\frac{1}{2}$ cada parte, a unidade subdividida em quatro partes representa-se por 1 : 4 ou $\frac{1}{4}$ cada parte. Como no exemplo, temos três subunidades da unidade subdividida em quatro partes iguais; tem-se a representação 3 : 4 ou $\frac{3}{4}$.

Vejamos outro exemplo: sejam a e b dois comprimentos conforme abaixo. Se existe u tal que a e b possam ser medidos por u, então a e b são ditos comensuráveis.



Nesse exemplo $a = 3 \cdot u$ e $b = 5 \cdot u$, como eles são comensuráveis podemos medir b com a (tomando a como unidade de medida) obtendo

$$b = \frac{5}{3} \cdot a$$

Portanto, a medida de b tomando-se a como unidade é o número $\frac{5}{3}$. Pode-se fazer o mesmo para medir a com b (tomando b como unidade de medida):

$$a = \frac{3}{5} \cdot b$$

Nesse caso dizemos que a medida de a tomando-se b como unidade é o número $\frac{3}{5}$.

Em síntese, o *como* medir resume-se em primeiro lugar escolher uma unidade; segundo, realizar o processo de comparação da unidade com a grandeza a ser medida e, em terceiro, expressar essa comparação numericamente.

Exemplificamos a medição utilizando a grandeza comprimento, mas o mesmo acontece para medir a massa, a área, o volume, a velocidade, a força etc.

Embora pareça simples para quem já conhece, o fato do número "estar em tantas coisas" tornou-se a base filosófica da escola pitagórica, *tudo é número*.

A representação dos dois movimentos, da quantidade de vezes que a subunidade *cabe* na grandeza a ser medida e a quantidade de subdivisões da unidade originaram a fração. Cada uma dessas quantidades é representada por meio do número natural. No entanto, para essa fração ser considerada como divisão do numerador pelo denominador, foi outro movimento histórico, originário do campo racional.

5.2 O RACIONAL

O reconhecimento da fração como um único número, o racional, foi reconhecido primeiramente por Diofanto, segundo Dantzig (1970, p. 81), isso no ano 300 da nossa era. Observa-se também que o tratamento das frações em *Os Elementos* de Euclides não se encontra no campo numérico e sim na teoria das proporções. "Na Grécia a palavra número era usada só para inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação de inteiros" (Boyer, 1996, p. 39).

Embora a fração esteja na gênese do número racional, fazendo parte da formação do pensamento numérico, conhecer fração não significa conhecer o número racional. A qualidade do número, no contexto da medida, está relacionada à unidade, ao seu fracionamento e à quantificação no processo de comparação. Já no campo numérico, a qualidade numérica é outra, envolve a relação com os outros números, como a ordenação, a densidade, as operações.

O fato de expressar a medida por uma fração de inteiros pode ter sido o princípio de uma reflexão histórica sobre o campo numérico. Vamos refletir sobre isso retomando a síntese da fração pela medição de comprimento. Temos, por exemplo, que o número $\frac{5}{8}$ pode representar a medida do comprimento de um segmento a tomando b como unidade se, ao dividirmos b em 8 partes, couber 5 dessas partes em a. Já, se em um segmento de comprimento c couber duas vezes o comprimento de b, o número que expressa a medida de c em relação a b é 2.

Observamos que na medida estão tanto os números inteiros como os fracionários. No contexto da medida o problema foi resolvido, mas agora façamos uma mudança de contexto, ou seja, vejamos como esses números se "reconstroem" na aritmética.

> As considerações que levaram à construção do domínio racional foram os primeiros passos num processo histórico chamado aritmetização da Matemática. Esse movimento, que começou com Weierstrass na década de 1860, tem por objetivo a separação de conceitos puramente matemáticos, tais como número, correspondência e conjunto, de ideias intuitivas, que a Matemática adquiriu através de uma longa associação com a Geometria e a Mecânica. (Dantzig, 1970, p. 93)

Para tratarmos dos números no próprio contexto aritmético, faz-se necessário analisarmos como eles se comportam uns em relação aos outros. Consideraremos inicialmente somente os números positivos e o denominador de qualquer fração como diferente de zero, mesmo quando não mencionado, ou seja, iniciaremos pelo campo racional positivo.

Sejam a e b dois números inteiros com b diferente de zero, tem-se que ou a é divisível por b ou não é.

1º) Se a for divisível por b, então existe c tal que $a = c \cdot b$; diz-se então que a é múltiplo de b. Além disso, c é o quociente, como vimos no segundo capítulo deste livro. Então, diremos que c é um racional inteiro.

2º) Se a não for divisível por b, dizemos que $\frac{a}{b}$ é um racional fracionário. O número a é dito numerador e o b denominador.

Iniciou-se a definição de número racional pelo conceito de divisibilidade, mas somente se constituirá um racional quando definir seu campo, o conjunto dos números racionais, com as propriedades que lhes são próprias.

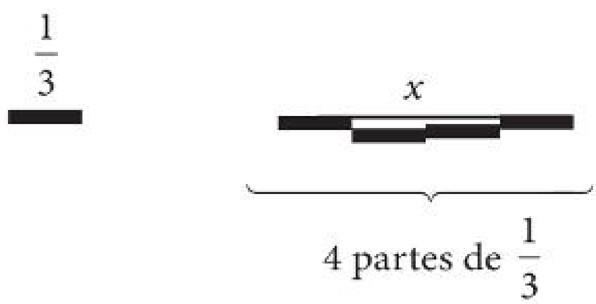
Por outro lado, as operações entre os racionais não podem ser contraditórias aos processos com a medida, por isso faremos paralelamente a análise da construção das propriedades aritméticas e das relações com a medida.

Iniciemos com a propriedade de IGUALDADE. Para dois números racionais serem iguais, é coerente dizer que eles têm de expressar a mesma medida com a mesma unidade.

Partiremos da seguinte construção: seja u uma unidade que representaremos por 1 e x a medida de uma grandeza passível de ser medida com u. Subdividindo a unidade em b partes iguais para medir x (cada parte representaremos por $\frac{1}{b}$) se o número de vezes que $\frac{1}{b}$ se reproduz em x for a, tem-se a medida $x = \frac{a}{b}$.

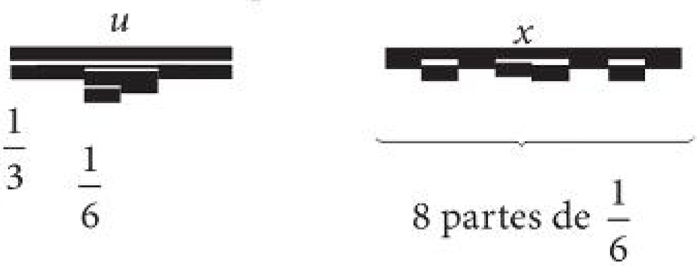
Utilizando a grandeza comprimento, vejamos um exemplo por meio das ilustrações que seguem. Sejam u e x conforme abaixo:

Dividindo u em três partes e comparando com x, temos que a subdivisão de u se reproduziu 4 vezes em x.



Com isso temos que a medida x em relação à unidade u é $\frac{4}{3}$.

E se subdividirmos u em 6 partes?



A medida de x é $\frac{8}{6}$. Logo $x = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

Generalizando, se a medida de x é $\frac{a}{b}$, e se dividirmos b em p partes, serão necessários $a \cdot p$ partes para medir x, o que implica dividir a unidade em $p \cdot b$ partes, resultando na subunidade $\frac{1}{pb}$ (utilizaremos no texto a notação de produto pb como análoga a $p \cdot b$). Logo $x = \frac{a}{b} = \frac{ap}{bp}$.

No exemplo, dividir $\frac{1}{3}$ em duas partes significa o mesmo que dividir a unidade u por $3 \cdot 2 = 6$ partes. Com isso, obtivemos que a medida x em relação à nova subunidade de u é igual a $\frac{8}{6}$, que é o mesmo que $\frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$.

De forma mais sintética, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então existe p tal que $c = a \cdot p$ e $d = b \cdot p$. Temos $b \cdot c = b \cdot a \cdot p$ e $a \cdot d = a \cdot b \cdot p$, logo $b \cdot c = a \cdot d$. Assim, pode-se definir a igualdade como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Como se pôde perceber, a igualdade de números racionais é diferente da igualdade dos inteiros, pois o mesmo número racional tem infinitas representações fracionárias.

5.2.1 A desigualdade dos números racionais

É coerente dizer que um número racional x é maior que outro y se x é a medida de um comprimento (por exemplo) maior que o comprimento cuja medida é y. Por ora, iremos tratar de números racionais positivos para abordarmos a medida. Analisemos agora três casos numéricos relacionando-os à medida:

- 1º caso

  Ifrah (1998, p. 326, grifo nosso) afirma, a partir de uma análise histórica, que "Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas REGRAS que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador 1)."

Se x e y são racionais inteiros, então $x > y$, *x é maior que y*, se o comprimento de medida x é maior que o comprimento de medida y.

- 2º caso

Suponha x e y números racionais fracionários de mesmo denominador, ou seja, dois números que representam medidas obtidas pela mesma subdivisão da unidade. Seja b a quantidade de vezes que se dividiu a unidade, então cada subunidade é $\frac{1}{b}$. Sejam então $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{b}$. Sendo a e c as quantidades de vezes da subunidade necessárias para medir os comprimentos x e y, respectivamente, se a for maior que c, então $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$, excluindo-se o caso da igualdade, pois para incluir essa possibilidade escrevemos $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{b}$. Caso c seja maior que a, então $\frac{c}{b} > \frac{a}{b}$.

- 3º caso

Suponha x e y números racionais fracionários de denominadores distintos, ou seja, sendo b e d as quantidades de vezes em que se dividiu a unidade, então $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. A ideia é tornar esse caso igual ao anterior, ou seja, encontrar uma subunidade comum. Numericamente significa tomar um múltiplo que seja ao mesmo tempo de b e de d, um múltiplo comum.

Em relação à subunidade, poderíamos subdividir b em d partes e d em b partes, ou seja, a subunidade teria bd partes. E, como vimos anteriormente em relação à igualdade, $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ e $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$, logo $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se $\frac{ad}{bd} > \frac{cb}{bd}$.

Vejamos um exemplo numérico: como saber quem é maior entre os números $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$? Utilizando o múltiplo $3 \cdot 6 = 18$, tem-se $\frac{5 \cdot 3}{18} > \frac{2 \cdot 6}{18}$, logo $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$.

Em situações didáticas, muitas vezes é utilizado o menor múltiplo dos denominadores, ou seja, o mínimo múltiplo comum (mmc), que foi discutido no capítulo 3.

O conjunto dos múltiplos de 3 é $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ e dos múltiplos de 6 é $M(6) = \{0, 6, 12, 18, ...\}$. O menor múltiplo comum aos dois números, diferente de zero, é 6. Utilizando a igualdade, tem-se que o número $\frac{2}{3}$ é igual ao $\frac{4}{6}$. Essas frações são também chamadas de *frações equivalentes*: $\frac{2}{3}$ é uma fração equivalente a $\frac{4}{6}$. Com isso, $\frac{5}{6} > \frac{4}{6}$ implica que $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$.

Assim, temos que o campo racional é ordenado, ou seja, dados dois números racionais quaisquer, ou eles são iguais ou um é maior que o outro.

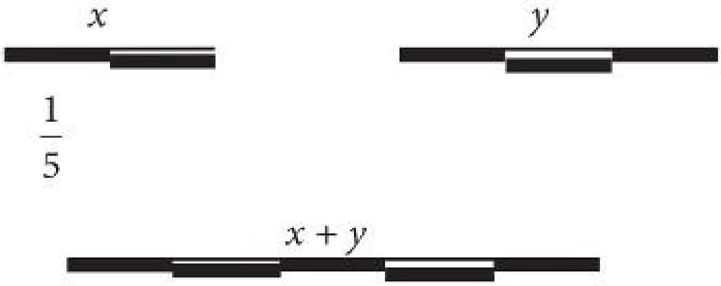
Vejamos as operações com os números racionais:

5.2.2 A adição

A adição de dois números racionais deve ser coerente com a medida da soma de duas medidas, dois comprimentos, por exemplo.

Sejam os comprimentos x e y medindo respectivamente $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, se $b=d$, então $x + y = \frac{a+c}{b}$.

Ilustrando com um exemplo numérico, escolhendo $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$, temos que a soma é $\frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$.



Se x e y não têm o mesmo denominador, pode-se, como apresentado no item anterior, encontrar frações equivalentes que o tenham.

Uma possibilidade é a seguinte:

Sejam dados $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$

são equivalentes as frações: $x = \frac{ad}{bd}$ e $y = \frac{cb}{db}$

Com o mesmo denominador a adição fica como a apresentada anteriormente. Ou seja:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Retomando o conceito de mínimo múltiplo comum (mmc) apresentado no capítulo 3 e, portanto, o fato de que se m = mmc (b, d), então b divide m e d divide m, pois m é múltiplo de b e também de d, temos que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (m : b) + c \cdot (m : d)}{m}$$

5.2.3 A multiplicação

Analisaremos separadamente a multiplicação de um racional inteiro por um racional fracionário e a multiplicação de dois racionais fracionários.

Lembrando a abordagem da multiplicação no capítulo dois sobre as operações numéricas, sabermos que a multiplicação é a soma de parcelas iguais. Utilizando esse conceito para racionais fracionários, ficaria assim:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}=n\cdot\frac{a}{b}$$

Tendo n parcelas iguais a $\frac{a}{b}$ e conforme a definição de adição com denominadores iguais, tem-se:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}=\frac{a+a+a+a+\ldots+a}{b}=\frac{n\cdot a}{b}$$

Sintetizando,

$$n\times\frac{a}{b}=\frac{n\times a}{b}$$

Em termos de medida, é coerente dizer que n comprimentos (por exemplo) de mesma medida, $\frac{a}{b}$, é igual ao comprimento $n \cdot a$ medido pela mesma subunidade b.

Agora vamos ver o caso da multiplicação entre dois racionais fracionários. Se quisermos ter $\frac{2}{3}$ da medida $\frac{3}{4}$? Essa questão é diferente das anteriores, pois $\frac{2}{3}$ nesse caso não é o resultado de uma medida. Se a pergunta fosse: quanto é o dobro de $\frac{3}{4}$, ou o triplo de $\frac{3}{4}$, os operadores 2 e 3 são inteiros e, como visto, o produto de um racional inteiro por um racional fracionário é igual ao produto desse inteiro pelo numerador da fração.

Um raciocínio possível para $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ é primeiro pensar quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$. Vimos (ao abordar a igualdade) que dividir a subunidade $\frac{1}{4}$ em três partes significa dividir a unidade em $3 \cdot 4 = 12$ partes. Tomar duas partes de um comprimento dividido em 12 partes é $\frac{2}{12}$. Logo, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$. Como o objetivo é calcular $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$, tem-se que $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 3 = \frac{2}{12} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{12} = \frac{6}{12}$, que é equivalente a $\frac{1}{2}$.

Em síntese, o produto de números racionais é a fração do produto dos numeradores e do produto dos denominadores: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

5.2.4 A divisão

Primeiro analisaremos a divisão de um racional fracionário por um inteiro não nulo: $\frac{a}{b} : n$.

Estendendo o conceito de divisão visto no capítulo 2 para os racionais, tem-se que existe q tal que $\frac{a}{b} : n = q$, o que significa que $n \cdot q = \frac{a}{b}$. Para que essa igualdade seja verdadeira, q tem que ser igual a $\frac{a}{b \cdot n}$. Substituindo no primeiro membro da igualdade $n \cdot q = \frac{a}{b}$, temos $n \cdot \frac{a}{b \cdot n} = \frac{n \cdot a}{b \cdot n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Em síntese, $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}$.

Tem-se aqui a analogia entre a fração e a divisão de inteiros, pois sendo a e b inteiros, b diferente de zero, a divisão $a : b$ pode ser escrita como divisão $\frac{a}{1}$: b. Utilizando a definição de divisão supracitada , tem-se: $\frac{a}{1} : b = \frac{a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$, logo $a : b = \frac{a}{b}$

Esse resultado é muito utilizado, mas muitas vezes, sem perceber, essa construção pode produzir uma concepção de que é apenas uma questão de notação. Como foi visto, essa relação entre a divisão de inteiros e a fração de inteiros tem um significado muito importante: toda divisão de inteiros (lembrando-se que o divisor deve ser diferente de zero) tem como quociente uma fração de inteiros, um número racional. Essa se tornou a definição de número racional mais conhecida.

Embora essa igualdade ($a : b = \frac{a}{b}$) tenha sido utilizada no capítulo das operações, estamos aqui esclarecendo sua validade.

Continuando sobre a divisão, vejamos o caso: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Analogamente ao processo anterior, a divisão $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = q$ significa que $\frac{c}{d} \times q = \frac{a}{b}$. Para que essa sentença seja verdadeira, $q = \frac{ad}{bc}$, pois $\frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc} = \frac{cad}{dbc} = \frac{c}{c} \times \frac{d}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Logo, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Poderíamos ter abordado a subtração após a adição e incluído o número negativo nas operações descritas. A opção foi separar, já que o número negativo surgiu bem depois que as frações. Além disso, privilegiamos inicialmente a coerência da construção do campo racional com o conceito de medida, já que as operações com os números negativos são definições intrínsecas ao campo numérico. Trataremos agora de uma breve discussão a respeito dos números relativos e como fica o campo racional definido como conjunto dos números racionais, que denominamos por Q.

5.2.5 Número relativo

Chama-se *número relativo* o número positivo, zero ou negativo obtido pela subtração de dois números quaisquer. O número relativo negativo se distingue do número relativo positivo pelo sinal (–), por exemplo: $-3, -\frac{1}{6}$.

Com o aparecimento do campo relativo inteiro ou racional, houve a necessidade de definir o número absoluto. O número absoluto de um número dado é o próprio número quando esse for positivo e o oposto quando esse for negativo. Por exemplo, 3 é o número absoluto de 3 e de –3.

Compondo então os campos dos números inteiros e racionais relativos, normalmente denominados simplesmente de *inteiros* e *racionais*, chamamos de *oposto* o número que em relação ao zero é simétrico. Algebricamente, se a é um número relativo e a' seu oposto, então $a + a' = 0$. As definições de número oposto e número absoluto valem também para os racionais relativos. Nota-se que no campo dos números naturais não há oposto.

5.2.6 A subtração

O processo de subtração de dois números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ é análogo ao da adição, $x - y$ é um número dado por $\frac{ad - bc}{bd}$. Se x for maior que y, então o resultado é positivo, se $x = y$, então $x - y = 0$ e, quando x for um número menor que y, $x - y$ é um número negativo.

5.2.7 A multiplicação com números negativos

Observa-se em muitas ações didáticas a relação dos números negativos com, por exemplo, temperaturas negativas, débitos em contas bancárias, mas geralmente há problemas para explicar o produto de números negativos, como $(-1) \cdot (-1) = 1$. Isso acontece porque, embora a aritmética do campo numérico se relacione com a experiência cotidiana, não se reduz a ela.

A definição do produto exemplificado é uma consequência da validade da lei distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Supondo $a = -1$, $b = 1$ e $c = -1$, tem-se $-1 \cdot [1 + (-1)] = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)$, o que implica $0 = -1 + (-1) \cdot (-1)$, que é verdadeira para $(-1) \cdot (-1) = 1$.

5.3 As propriedades do campo racional

Assumindo o campo racional como campo relativo racional, sugerimos que você analise, a partir das definições dadas, as propriedades a seguir.

Para quaisquer x, y, w racionais, são válidas as seguintes propriedades:

1) Comutativa da adição: $x + y = y + x$
2) Associativa da adição: $x + (y + w) = (x + y) + w$
3) Comutativa da multiplicação: $x \cdot y = y \cdot x$
4) Associativa da multiplicação: $x \cdot (y \cdot w) = (x \cdot y) \cdot w$
5) Distributiva: $x \cdot (y + w) = x \cdot y + x \cdot w$

Por exemplo, a comutativa da adição de dois racionais $x + y$ é: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$, para a, b, c e d inteiros e b e d não nulos. Daí vem que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, ou seja, $y + x$. Usamos aqui as propriedades com números inteiros no numerador — comutativa da adição e da multiplicação — para definir a comutatividade da adição no campo racional.

Na matemática formal temos que um conjunto é um *corpo* quando satisfaz certas propriedades.

Um corpo é um conjunto munido de duas operações: adição e multiplicação que satisfazem os axiomas do corpo, que são as 5 propriedades descritas acrescidas de outras quatro:

6) Elemento neutro da adição: 0 é o elemento neutro da adição no campo racional, pois para todo x racional $x + 0 = x$.
7) Elemento neutro da multiplicação: 1 é o elemento neutro da multiplicação no campo racional, pois para todo x racional $x \cdot 1 = x$.

8) Simétrico: todo x racional possui um simétrico racional $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

9) Inverso multiplicativo: todo x racional não nulo possui inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Logo, o campo racional com as operações de adição e multiplicação, munida dessas nove propriedades, forma o que a matemática formal denomina de *corpo*.

5.4 As notações

No caminho das generalizações, observamos como a forma se relaciona com o conteúdo no desenvolvimento do objeto de estudo, retardando-o ou impulsionando-o. A notação das frações é um exemplo disso.

Ifrah (1998, p. 327) nos conta o que ocorreu com a medida mesmo após o desenvolvimento do conceito de fração como número ao afirmar que "por causa de suas notações imperfeitas os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida".

No papiro conhecido como *Papiro Rhind* ou como *Papiro Ahmes,* de 1650 a. C., encontram-se notações que revelam o conhecimento de frações pelos egípcios. Por exemplo, o que conhecemos hoje por $\frac{1}{20}$, no papiro a notação era , em que ponto é o indicativo de fração.

As relações entre fração e sistema de numeração foram realizadas primeiramente pelos babilônios, que possuíam base sexagesimal e sistema numérico posicional. Hoje utilizamos notações como 5'20" para designar 5 minutos e 20 segundos; dificilmente nos referimos a 5 minutos como 5/60 de hora nem 20 segundos como 20/3.600 de hora (Ifrah, 1998).

Já no início do século XVI, havia na matemática uma preocupação das técnicas operacionais. Nesse contexto, François Viète (1540-1603) chegou a recomendar o uso das frações decimais, em vez das sexagesimais. Embora as frações decimais já fossem conhecidas na China, Arábia e Europa, elas não possuíam a notação que conhecemos hoje (Boyer, 1996).

A igualdade que sempre usamos, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$, que é aparentemente simples, esconde um desenvolvimento nada trivial. O trabalho do físico e matemático dos Países Baixos, Simon Stevin (1548-1620), acarretou uma grande contribuição à linguagem ao usar o sistema de numeração decimal, "prolongando-o" à direita da unidade, no que hoje nomeamos por décimos, centésimos, milésimos... Depois da publicação de Stevin, outros foram aprimorando as notações, e quanto à nossa vírgula, foi o neerlandês Willebrord Snell (1580-1626) que a inventou, no início do séc. XVII, e assim chegamos à notação como 0,5.

As consequências foram incalculáveis, como diz Ifrah (1998, p. 328), "a começar pela invenção do sistema métrico". Surge então a questão:

Toda fração possui uma fração equivalente decimal?

Sabemos que $\frac{2}{5}$ é equivalente à fração decimal $\frac{4}{10}$, no entanto, há diferença entre fração decimal na qual a história do número organiza as frações cujo denominador é uma potência de dez, como $\frac{798}{10}, \frac{232}{100}, \frac{3}{100.000}$ e os números cuja *representação* é decimal, como 79,8; 2,32 e 0,00003. Iremos aprofundar essa discussão no próximo capítulo.

5.5 Densidade

No campo numérico dos inteiros tem-se a propriedade definitória de que todo número tem sucessor. Isso não acontece com o campo dos números racionais, pois esse campo é *denso em si*, o que significa que sempre há um racional entre dois racionais distintos.

Essa propriedade do campo racional é pouco explorada no ensino e, provavelmente por isso, as pesquisas têm mostrado concepções incoerentes com esse conhecimento científico. Os estudos realizados por Dias (2002, 2007) mostram algumas dessas concepções, por exemplo, indivíduos que apontam: 1,000...1; 1,01; 1,1 como sucessores de 1, como também os números 0,9; 0,9999; 0,999...9 apresentados como antecessores de 1.

Santos (1995), ao questionar os estudantes sobre os sucessores de 2/3, 0,5 e 3,69, obteve como respostas 3/3, 0,6, 3,70, respectivamente. Margolinas (1988), na França, revela que estudantes franceses responderam 2,9 e 2,999... como o maior número do intervalo [2,3[.

Observa-se nos livros didáticos brasileiros (Dias, 2002) que a densidade raramente é abordada; talvez esse seja um motivo pelo qual esse conceito não seja ensinado.

Síntese

A discussão do conceito de número racional iniciou-se por uma situação-problema que teve por objetivo explicitar ao leitor o papel da medida como necessidade histórica e social que desencadeou a ideia de fração. O caminho percorrido pela humanidade permite-nos observar o caráter prático e teórico da matemática que transformou a fração de inteiros em outra qualidade no contexto numérico, a do número racional, assumindo características próprias do campo teórico numérico. Embora esses dois aspectos não sejam dissociados, eles imprimem funções específicas no contexto em que estão inseridos. No campo numérico, o número racional se relaciona com seus pares aritmeticamente, em propriedades generalizantes, mais abrangentes do que as dos números inteiros. Tanto a discussão conceitual quanto as referências de pesquisadores e outros autores buscaram iniciar o leitor quanto aos aspectos didáticos nesse assunto.

Indicações culturais

ALMEIDA, A. C. Papiro de Rhind e as frações unitárias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 35, p. 2-8, 1997.

O texto traz fatos históricos que contextualizam a matemática egípcia, detendo-se mais especificamente no papiro. Dele extrai o tratamento da decomposição de frações em frações unitárias, acrescentando uma generalização por meio de demonstração.

DIAS, J. R. Dízimas periódicas... e a calculadora. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 14, p. 37-38, 1989.

Além de o artigo trazer referência a outros que tratam de dízimas periódicas, ele explora técnicas de encontrar o período de uma dízima com o uso de calculadora simples.

MADEIRO, P. C. O significado da operação de divisão. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 30, p. 18-25, 1996.

O texto é dividido em três artigos que, se destinam ao subtópico "magistério em ação". O primeiro exemplifica por meio de objetos e com números naturais, acrescentando o método da chave. O segundo, de Paulo César Madeiro, "Divisão de fração por fração", explora o método da chave para divisão entre frações. O terceiro, de Paulo Isamo Hiratsuka, "Fazendo uma divisão de frações significativa", busca, por meio de três exemplos do dia a dia, justificar como pode ser explicado ao estudante a divisão entre duas frações.

Atividades de autoavaliação

1. Qual alternativa contém, respectivamente, elementos que se apresentam na natureza sob as formas discreta e contínua?
   a) Estrelas e areia.
   b) Saudade e som.
   c) Água e luz.
   d) Areia e luz.

2. Meça o comprimento *c* tomando *u* como unidade. Sugestão: recorte tiras de papel com os comprimentos a seguir e por meio de dobradura da unidade encontre a fração de *u* que mede *c*.

A medida de *c* com a unidade *u* é:

a) 1

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{4}$

3. Um biólogo mediu a altura de uma planta, obtendo 3 centímetros e 22 milímetros. É possível que haja uma planta cuja altura seja um número racional imediatamente seguinte a esse?

a) Sim, 3,23.

b) Sim, mas não é possível determinar.

c) Não, por que não existe número racional seguinte (sucessor) de 3,22.

d) Não, por que com régua não é possível medir 3,221 cm.

4. Em relação à densidade no campo dos números racionais, assinale (V) se a sentença for verdadeira e (F) se for falsa:

( ) Não há número racional entre $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{7}$.

( ) Há infinitos números racionais entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{5}$.

( ) Não há número racional entre 0,2 e $\frac{1}{5}$.

( ) Não há número racional entre 0,333 e $\frac{1}{3}$.

5. Qual das afirmações abaixo é correta?

a) $\frac{7}{8} > \frac{5}{7}$

b) O inverso de $\frac{1}{5}$ é $-\frac{1}{5}$

c) O oposto de $\frac{3}{2}$ é $\frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5}\right) = \frac{7 \cdot a \cdot b}{15}$

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. O campo dos racionais é enumerável. Pesquise o que significa essa afirmação e como George Cantor (1845-1918) organizou os conjuntos numéricos em enumeráveis e contínuos.

2. Como você ensinaria potenciação, radiciação e logaritmação, considerando o campo dos números racionais?

3. Reflita sobre as representações dos números racionais e elabore um texto que explique como passar de uma notação a outra: fração decimal à notação decimal e vice-versa; fração de inteiros quaisquer para notação decimal e vice-versa.

Atividade aplicada: prática

Há muitas pesquisas que apontam as dificuldades dos estudantes na compreensão das operações com números racionais, principalmente com racionais não inteiros. Prepare um conjunto de ações que permitam iniciar o estudante na operacionalização com frações utilizando a medida. Sugerimos que você utilize recursos como situações-problema, questões investigativas ou experimentos, a fim de que os estudantes vivenciem o conceito da fração juntamente com sua operacionalidade.

6

Números irracionais

A incomensurabilidade e as propriedades numéricas relacionadas aos números irracionais são dois aspectos que direcionam a discussão deste capítulo. Iniciaremos por uma situação-problema envolvendo o conceito de medida, que, além de orientar a discussão conceitual, permite também refletir sobre procedimentos didáticos. Acrescenta-se à discussão didática um breve panorama do tratamento da incomensurabilidade e dos números irracionais abordados em alguns livros didáticos, tanto brasileiros como portugueses, em diferentes décadas.

6.1 Irracionais: uma aproximação

O desenvolvimento do número irracional está intimamente ligado à medida e ao campo dos racionais, pois se revela como a negação dialética destes. Os números irracionais se fundamentam na incomensurabilidade, ou seja, na negação da comensurabilidade, na impossibilidade da medida como abordada no capítulo anterior. Com isso, o número irracional não pode ser expresso como uma fração de números inteiros.

O campo racional que até então era suficiente, tanto como ferramenta para outros ramos da ciência como também para a própria matemática, torna-se insuficiente frente a um outro problema.

Para explorar a incomensurabilidade e o número irracional, iniciaremos com a situação didática proposta por um grupo de professores em Dias (2007) envolvendo o número *pi**, a fim de refletirmos a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos. A situação iniciou-se com o seguinte experimento:

A partir de um copo, foram realizadas as seguintes medidas:

- o comprimento da circunferência da "boca" do copo, obtendo 27,6 cm, e
- o diâmetro dessa circunferência, obtendo 8,9 cm.

A divisão de 27,6 por 8,9 na calculadora resultou em 3,1011235, diferente do 3,14... , número esperado como aproximação do número *pi*. A justificativa dada por alguns professores acerca da não coincidência entre o resultado encontrado e o número esperado foi a falta de "precisão da medida e também pelo fato de que a máquina de calcular não fornece todos os dígitos" (Dias, 2007, p. 122).

> De forma geral os livros didáticos abordam o número *pi* associado ao comprimento da circunferência, mas nenhum deles menciona como foi demonstrada a irracionalidade do número *pi*. As atividades empíricas vinculadas a essa associação podem gerar concepções de que *pi* seja o resultado da divisão de racionais e que, a menos da precisão das medidas e dos instrumentos, não se obtém tal número. (Dias; Moura, 2006)

Por meio da pesquisa de Dias (2007), observou-se que esse experimento, como também esse argumento, já aparecem em obras didáticas

* O número *pi*, representado pela letra grega π, é um irracional. Representações decimais também são usadas, como 3,14..., 3,141..., 3,1415... etc.

da década de 1920, bem como é um procedimento didático comum. O aparecimento do número *pi* no campo numérico dos irracionais está presente em obras didáticas a partir da década de 1960; antes disso é comum somente nos livros relacionados à geometria, na abordagem do comprimento da circunferência (Dias; Moura, 2006).

Outra estratégia para medir o comprimento da circunferência, hoje em dia pouco explorada no ensino, é por meio do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos. Cada vez que se aumenta o número de lados de polígonos inscritos o perímetro do polígono mais se aproxima do comprimento da circunferência. O mesmo ocorre com os polígonos circunscritos. Quando a diferença entre as medidas dos perímetros desses polígonos, inscrito e circunscrito, com essas aproximações, torna-se cada vez mais próxima de zero, tem-se aproximações sucessivas da medida do comprimento da circunferência.

Certas abordagens didáticas têm resultado em uma relação incoerente com o processo histórico do número *pi*. Na história desse número, inicialmente observou-se que a divisão da medida do comprimento de qualquer circunferência com a medida do seu diâmetro era constante. Vários resultados foram obtidos, mas sabia-se que a diferença entre eles dependia dos instrumentos de medida. Desse início até a demonstração da irracionalidade do número *pi*, há um longo período de análise da questão. O fato de tal demonstração não ser por meio de matemática elementar faz com que haja um salto no ensino entre a abordagem empírica, relacionada à medida, e a classificação do número *pi* como irracional.

Voltando à situação-problema colocada no início deste capítulo, temos a questão:

O número 27,6 : 8,9 é irracional?

Como o contexto foi histórico, ou seja, a história do número *pi* iniciou-se por problema semelhante ao apresentado, deduz-se ingenuamente que esse processo gere um número irracional. Além disso, como mostramos, os livros didáticos podem induzir a esse pensamento.

A divisão realizada em uma calculadora resultou o número 3,101123. Sabemos que independente da calculadora utilizada, sempre teremos um número limitado de dígitos. Aproveitaremos essa situação para abordar a *representação decimal dos números.*

6.1.1 Representação decimal

Como anunciamos no capítulo anterior, abordaremos a diferença entre fração decimal e representação decimal. A fração decimal, como já dissemos, é aquela cujo denominador é uma potência de dez. O termo *representação decimal de um número* é normalmente utilizado somente para as representações "com vírgula", como

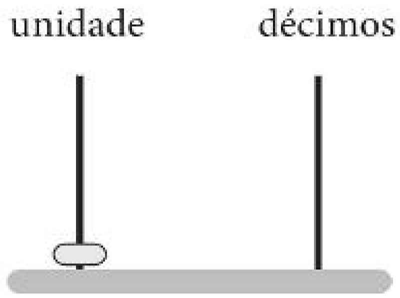
0,1 0,2889 265,7 45,2828... 1,12345...

Dizemos *normalmente* por que assim é abordado geralmente no ensino para diferenciar tais números dos inteiros, porém 34 é uma representação decimal, já que sua base é decimal, como vimos no primeiro capítulo. A partir dessas representações, chama-se *representação decimal finita* aquela em que há um número finito de casas decimais.

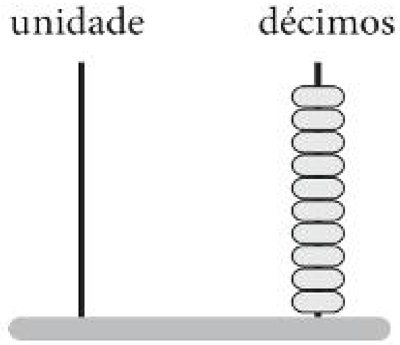
Sugerimos ao leitor refletir sobre a proposição: Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

Os três primeiros números apresentados na lista têm representação decimal finita. A representação decimal infinita se subdivide em dois tipos: dízima periódica e dízima não periódica. A dízima periódica compreende as representações decimais infinitas que contém um período. Por exemplo, 1 : 3 tem representação decimal infinita periódica, que é 0,333... , melhor representada por $0,\overline{3}$, em que o traço sobre o número 3 indica que 3 é o número formador do período. Vejamos a divisão pelo método do ábaco, como no segundo capítulo, mas agora incluindo os décimos, centésimos, milésimos...:

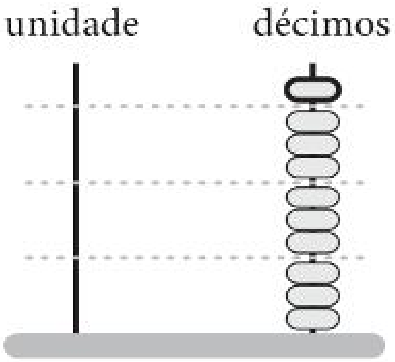
Partimos da unidade 1:



Como estamos operando na base dez, para dividir por 3 necessitamos desagrupar uma unidade em 10 décimos:



Ao dividirmos os dez décimos por 3, formamos 3 grupos de 3 e sobra 1 décimo:



Na escrita aritmética, temos $1 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}1$ ou $3 \cdot 0{,}3 + 0{,}1$.

A partir daí se repete o processo para os centésimos:

$1 = 3 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}03 + 0{,}01 = 3\ (0{,}3 + 0{,}03) + 0{,}01$

Esse processo se repete infinitamente, por isso teremos uma representação decimal infinita em que 3 é o número que se repete, formador do *período*. O número 45,2828... , representado no início desse item, sugere a repetição do período 28. Com isso, trata-se também de uma representação decimal infinita periódica.

Analisando o período de uma representação decimal, tomemos, por exemplo, $\frac{5}{13}$, cuja representação decimal infinita é igual a 0,38461538461.. de período 384615.

Como saber quantos algarismos irá ter o período?

Na divisão de 5 por 13, como o divisor é 13, temos como possíveis restos os números 1, 2, ..., 12, ou seja, 12 possíveis restos, pois o resto 0 não está sendo contado. Vale lembrar que resto zero implica representação decimal finita. Logo, um desses restos se repetirá uma segunda vez e quando isso ocorrer terá fechado um período. Isso implica que nesse caso teremos no máximo um período de 12 algarismos.

Continuando na análise da representação decimal, pode-se dizer que todo racional tem representação decimal infinita. Não estamos querendo dizer a forma mais simples, como representar 5,2 por 5,20000..., com uma infinidade de zeros.

Vejamos o exemplo:

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots$$

Agora multiplicamos ambos os membros dessa igualdade por 9. Com isso, obtém-se:

$1 = 0{,}9999\ \ldots$

Logo, 0,9999... é a representação infinita de 1.

Esse fato tem sido bastante perturbador no ensino, pois muitos estudantes têm a concepção de que se trata de dois números distintos. Pode-se também representar 0,5 como 0,49999... ou $0{,}4\overline{9}$. Com isso, temos que todo número racional, inteiro ou fracionário, tem uma representação decimal infinita.

Com o conhecimento da representação decimal infinita, surge-nos a ideia de "produzir" números, ou seja, podemos também produzir números de representação decimal infinita não periódica. Essa foi a intenção de escrever na lista de exemplos de representações decimais o número 1,12345..., em que os algarismos seguem a sequência dos números naturais.

Estudemos esses dois tipos de representação juntamente com a situação-problema em discussão. Transformaremos a questão inicial – o número 27,6 : 8,9 é irracional? – em:

> O número 27,6 : 8,9 — ou o resultado dessa divisão — tem uma representação decimal exata ou infinita? E se for uma dízima, ela é periódica ou não?

Percebe-se que a questão, inicialmente colocada sob o ponto de vista conceitual – irracionalidade do número –, agora se apresenta sob o ponto de vista das suas representações decimais.

Às vezes os estudantes observam somente a *forma,* sem uma reflexão articulada com o *conteúdo* matemático, ou seja, o conceito matemático. Salientamos aqui essa articulação para a importância da formação conceitual.

Dependendo da calculadora disponível, nem sempre é visualmente evidente se o número tem representação decimal exata ou periódica. Com alguns artifícios computacionais é possível determinar um maior número de algarismos na parte decimal.

Com isso, fazendo a divisão 27,6 : 8,9, obtém-se:

3,$\underline{10112359550561797752808988764044943820224719}$101123595505617
97752808988764...

A representação decimal é uma dízima periódica cujo período tem 44 algarismos; a parte sublinhada é o período da dízima. Não seria necessário fazer a divisão para perceber que se trata de um número racional, uma vez que estamos dividindo números racionais, mas é conveniente esse procedimento em determinado período do processo educativo para que o estudante observe que o período de uma dízima pode ter muitos algarismos.

Com esse resultado, pode aparecer um dilema no processo de ensino e aprendizagem:

1) Se a divisão entre as medidas do comprimento com a do diâmetro de uma circunferência for racional, tem-se que negar a irracionalidade de *pi*.

2) Se essa divisão é irracional, então o irracional tem período e, portanto, é também racional.

O dilema surge por que certos juízos coexistem na mente e por vezes não foram questionados ou produzidos pelo indivíduo, mas tratam de informações memorizadas. Ou seja, sem um aprofundamento no conhecimento que os gerou, eles são como "manchetes" existentes na mente. Podemos dizer que nessa situação-problema podem estar em jogo os seguintes juízos na mente do indivíduo:

- O número irracional não tem período na sua representação decimal.
- É histórico que a divisão entre as medidas do comprimento e do diâmetro de uma circunferência resulta no número *pi*.
- *Pi* é irracional.

Tais juízos muitas vezes são ratificados pelo modo como o livro didático aborda esses assuntos. Se não forem problematizados, esses juízos podem levar à concepção da irracionalidade como a divisão de números racionais.

Um encaminhamento é discutir o que esses juízos representam, e se aprofundar neles, ou seja, discutir o conhecimento sobre os números racionais e irracionais. Para isso, sugerimos que o professor desencadeie uma discussão a partir de conhecimentos que os próprios estudantes muitas vezes possuem. Nesse caso, observa-se que, para conhecer o número irracional, há de se articular o conceito de racionalidade de um número. Trataremos desses juízos a seguir.

6.1.2 O dilema entre a racionalidade ou a irracionalidade de um número

Vimos no capítulo anterior que um número racional tem infinitas representações e que ele é uma fração de inteiros. Mas e $\frac{27,6}{8,9}$ é um número racional?

Pode-se responder a essa questão a partir das seguintes sínteses teóricas que se articulam:

1) O numerador e o denominador são números racionais; tem-se a divisão de racionais que resulta em um número racional;

2) O campo dos racionais é um corpo, logo é fechado para as operações de adição, multiplicação e suas inversas, uma vez que existe a propriedade do elemento inverso;

3) Como existe uma representação de fração de inteiros para a fração $\frac{27,6}{8,9}$, como $\frac{276}{89}$, a fração em questão é um número racional.

Com isso, pode-se concluir que a fração ou divisão de números racionais é racional, logo a divisão em questão é um número racional.

Um modo de relacionar mais detalhadamente no processo de ensino e aprendizagem as três afirmações feitas é:

Vimos (capítulo anterior) que a representação decimal surgiu depois da representação fracionária e se relaciona com as frações decimais. Então 27,6 é a representação decimal da fração decimal $\frac{276}{10}$ e, da mesma forma, 8,9 é a representação decimal da fração decimal $\frac{89}{10}$; ambos os números são racionais. A divisão entre números racionais é um número racional, pois o campo racional é um corpo. Fazendo a divisão dos racionais em questão: $\frac{276}{10} : \frac{89}{10} = \frac{276}{10} \times \frac{10}{89} = \frac{276}{89}$, que é uma fração de números inteiros, logo um número racional.

Outro encaminhamento que observamos na didática do professor de matemática é multiplicar $\frac{27,6}{8,9}$ por $\frac{10}{10} = 1$. Como 1 é o elemento neutro da multiplicação, tem-se uma fração equivalente, ou seja, o mesmo número.

Muitas vezes não se criam condições para que seja mobilizada no pensamento dos estudantes a definição de números racionais em situações-problema. Ou ainda, a mobilização pode ser parcial quando, por exemplo, não se diferencia a *possibilidade* presente na definição de número racional. A definição comum que aparece nos livros didáticos — o número racional é aquele que *pode* ser escrito como fração de números inteiros, com denominador não nulo - por vezes é interpretada pelos estudantes como o número que *é* escrito como fração de inteiros. Com isso, a forma em que o número racional se expressa, uma das formas, leva o estudante a classificá-lo erroneamente. Isso quer dizer que se classifica o número somente por uma forma em que ele se apresenta visualmente e não como conceito de número que se expressa na forma de uma síntese teórica.

Nesse caso aparecem duas dificuldades. Uma é a interpretação da definição e outra a fixação do número racional com uma única representação, ideia que muitas vezes permanece na mente do indivíduo, devido à representação dos números inteiros.

Por isso a importância de articular a forma, ou seja, o *como* os conceitos se expressam na matemática, com o conteúdo, o próprio conceito. A falta dessa articulação tem causado dificuldade na aprendizagem não só dos números, mas de outros conceitos matemáticos. Em suma, podemos concluir que a aprendizagem da matemática somente pela sua sintaxe não permite apreender seu conhecimento.

Discutida a racionalidade de $\frac{27,6}{8,9}$, que compreende a primeira parte do dilema exposto acima, ou seja, "se a divisão entre as medidas do comprimento com a do diâmetro de uma circunferência for racional, tem-se que negar a irracionalidade de pi" (Dias, 2007, p. 124), vamos para a segunda parte:

> Então *pi* seria racional? Ou o *pi* não se obtém pela divisão da medida do comprimento pela medida do diâmetro?

Essas questões indicam a necessidade de conhecer mais sobre o número *pi*.

A medida do comprimento da circunferência tomando o seu diâmetro como unidade de medida teve vários resultados e aproximações ao longo da história. Desde simplesmente 3, como também 22/7 e $3\frac{1}{6}$. Essa constante começou a ser observada, por meio das medidas, mas a sua irracionalidade foi demonstrada muito tempo depois.

A pesquisa de Boyer (1996) conta-nos que a regra egípcia, tida como uma das melhores da época para o cálculo da medida da área do círculo, era a relação de igualdade entre a área do círculo de diâmetro 9 unidades e a medida da área de um quadrado de lado 8 unidades. Efetuando os cálculos, teríamos que *pi* era concebido como $\frac{256}{81}$ ou aproximadamente 3,16.

"O papiro de Ahmes (cerca de 1600 a.C.) dá à relação existente entre a circunferência e o diâmetro o valor 3,16, em nossa notação. O papiro de Moscou contém uma fórmula para se calcular a área da esfera, em que se atribui a π o valor de 3,14" (Hogben, 1970, p. 64).

Outro método para conseguir uma melhor aproximação de *pi* foi o chamado *método da exaustão*, que compreende inscrever e circunscrever polígonos à circunferência. À medida que se aumentam os lados dos polígonos, mais as suas formas se aproximam da forma da circunferência. Assim, a diferença entre as medidas das áreas dos polígonos (circunscrito e inscrito) se aproxima de zero e as medidas das áreas dos polígonos se aproximam à do círculo. Com isso, é possível uma melhor aproximação do número *pi*.

Até hoje existem potentes computadores calculando casas decimais do *pi* por outros métodos. Pensar no comportamento das casas decimais do número *pi* pode ser uma investigação curiosa, mas pensar na sua irracionalidade é uma questão a ser demonstrada teoricamente e inclui outros aspectos que não são o da *observação*, mas sim da *dedução*.

A irracionalidade do número *pi* foi demonstrada por Johann Heinrich Lambert (1728-1777) em 1761. Essa demonstração não advém do aspecto empírico da medida, ou seja, a medida com instrumentos. Como explica Boyer (1996, p. 340), “Lambert mostrou que se x é um número racional não-nulo então tgx não pode ser racional. Como $tg\pi/4=1$, um número racional, segue-se que $\pi/4$ não pode ser racional, portanto π tão pouco”.

Há uma demonstração da irracionalidade de *pi* escrita por C. Hermite (1822-1901) no *Journal de Crelle**, que envolve o conhecimento de cálculo diferencial e integral**.

Esse breve histórico permite avaliar que a história do número *pi* partiu da relação entre as medidas empíricas do comprimento e do diâmetro da circunferência, e que antes ele era tido como uma fração de inteiros, mas com o aprofundamento de seu estudo e com o avanço da matemática foi possível demonstrar sua irracionalidade.

Saindo do campo empírico da medida com instrumentos, causador de toda discussão abordada, e pensando a medida teoricamente, podemos refletir sobre a seguinte questão:

> Por que o diâmetro, ou qualquer subdivisão do comprimento do diâmetro, não se reproduz (não cabe) um número inteiro de vezes no comprimento da circunferência?

Aqui está a essência do número irracional, ou seja, a incomensurabilidade.

6.2 O comensurável e o incomensurável

Novamente o caso da medida! Observe o quanto explorar a medida no seu aspecto conceitual é importante para a compreensão dos números racionais e irracionais. No capítulo anterior foi abordado o

* *Journal für die reine und angewandte Mathematik* era chamado como *Crelle's Journal* em virtude do seu fundador e editor August Leopold Crelle. O primeiro volume foi publicado em 1826.

** Pode-se ver essa demonstração no Anexo da pesquisa de Dias (2007).

significado de comensurabilidade. Para a incomensurabilidade discutiremos o seguinte problema:

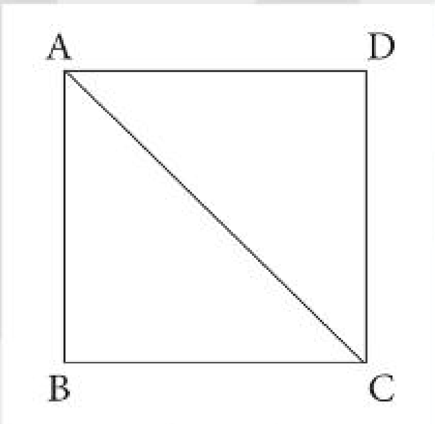
A partir do quadrado, como obter a medida da diagonal deste, tendo como unidade de medida o seu lado?

Um pensamento é: se o comprimento do lado do quadrado for comensurável com o comprimento da diagonal do quadrado, então, pela definição de comensurabilidade, existirá um comprimento (subunidade do comprimento do lado do quadrado) que se reproduz na diagonal do quadrado um número inteiro de vezes.

Como saber se isso é possível? Se utilizarmos instrumentos como compasso, régua – não necessariamente graduada –, um pedaço de barbante etc., certamente conseguiremos fazer isso. Daí deduzirmos, a partir dessa experimentação, que os comprimentos são comensuráveis ou incomensuráveis é bem diferente. Por mais precisos que possam ser os instrumentos de medida e por mais aguçada que seja nossa visão, é impossível "visualizar" quando dois comprimentos são comensuráveis ou incomensuráveis. Precisamos pensar além do que vemos, precisamos de argumentos teóricos.

A prova geométrica da incomensurabilidade entre as medidas do lado e da diagonal de um quadrado ABCD consiste em:

Figura 6.1 – Quadrado ABCD



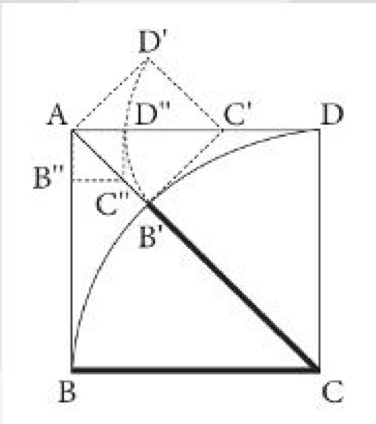
1º) transfere-se a medida do lado do quadrado para a diagonal, obtendo o ponto B' (conforme Figura 6.2);

2º) a partir de AB' constrói-se o quadrado AB'C'D'. Se AB for comensurável com AC, então AB' será com AC' – pelo critério de semelhança entre os quadrados –;

3º) da mesma forma, repete-se a construção de AB"C"D" e se AB' for comensurável com AC', então AB" será com AC".

Esse processo continua indefinidamente, resultando que nenhuma unidade de comprimento, por pequena que seja, pode ser encontrada, de modo que as medidas da diagonal e do lado sejam comensuráveis, logo são incomensuráveis.

Figura 6.2 – Quadrado ABCD e projeções de lado e diagonal



Outro modo de abordar essa incomensurabilidade é:

1º) tomamos como unidade de comprimento o lado do quadrado, logo a medida de AB é 1;

2º) se AC for comensurável com AB, então existe um racional que exprime a relação entre os segmentos AC = $\frac{m}{n}$ AB;

3º) sendo ABC um triângulo retângulo, nesse caso isósceles, e nomeando a medida da diagonal por *d* e dos lados por *a*, então, pelo Teorema de Pitágoras, $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$;

4º) a relação de AC = $\frac{m}{n}$ AB pode ser escrita como d = $\frac{m}{n}$ a. Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, tem-se: $d^2 = \frac{m^2}{n^2}a^2$;

5º) das igualdades $d^2 = 2a^2$ e $d^2 = \frac{m^2}{n^2}a^2$ resulta que $\frac{m^2}{n^2} = 2$ ou $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, o que quer dizer que se existir um racional cujo quadrado resulte 2, então os comprimentos do lado e da diagonal são comensuráveis.

Observe a transformação de um problema geométrico em um problema aritmético. Uma demonstração da impossibilidade de existência de uma fração de inteiros cujo quadrado resulta 2 é:

Primeiro supomos a fração $\frac{m}{n}$ irredutível, ou seja, m e n não têm divisor comum. Essa suposição tem por objetivo simplificar a demonstração. Caso a fração não fosse irredutível, bastaria que a simplificássemos de modo a torná-la dessa forma. Como por hipótese o quadrado desse número deve ser igual a dois, temos $\frac{m^2}{n^2} = 2$, que pode ser escrito como $m^2 = 2n^2$ e essa igualdade significa que m^2 é par e consequentemente m também. Por quê? Primeiramente, m^2 é par porque é múltiplo de 2 ao ser igual a $2n^2$. Sendo m^2 par, por que m é par? Porque se m não fosse par, seria ímpar, podendo ser escrito como $2k+1$, no qual k é qualquer inteiro. Com isso, m^2 seria $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$, que é um número ímpar, logo, m não pode ser ímpar.

Se m é par, então n deve ser ímpar, por que $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Como m é par, m^2 é divisível por 4. Ou seja, $m = 2q$ implica que $m^2 = 4q^2$ e, lembrando da igualdade inicial $m^2 = 2n^2$, tem-se $4q^2 = 2n^2$ e, consequentemente, $2q^2 = n^2$. Dessa igualdade conclui-se que n^2 é par.

Verifica-se aqui uma inconsistência lógica: n é par e também ímpar? Essa demonstração indica a falsidade da hipótese, ou seja, de que existe um número racional $\frac{m}{n}$ cujo quadrado seja 2.

Se a medida da diagonal não é um número racional, que número será? Existe essa medida?

Mais uma vez nos encontramos diante de uma encruzilhada, como nos diz Caraça (1989). Podemos expressar o dilema da seguinte forma:

1º Abandonar a possibilidade de se fazer toda e qualquer medição.

2º Negar o Teorema de Pitágoras.

3º Manter a medição e o Teorema de Pitágoras, admitindo-se que existe outra classe de números.

O terceiro caminho é aquele que impulsionou o homem à criação de um novo número.

Será que os pitagóricos conheciam esses números? Segundo Dantzig (1970, p. 97), parece que sim, a própria escola pitagórica teve seu processo de transição, dos admirados triângulos pitagóricos de medidas racionais ao *Alogon, o inexprimível,* como era chamado o número irracional. Transição nada tranquila nem imediata, que culminou inclusive no seu declínio.

A descoberta do inexprimível foi guardada em segredo, "os membros da ordem juravam não divulgar sua existência a estranhos [...]. Menos de um século depois o segredo dos pitagóricos tornou-se propriedade de todos os pensadores" (Dantzig, 1970, p. 98). A consequência foi o declínio dessa escola, na sua base filosófica: *tudo é número,* que poderia ser interpretado por *tudo é mensurável,* uma vez que se conhecia o campo racional.

A demonstração da irracionalidade do número *pi* justifica a incomensurabilidade entre os comprimentos da circunferência e seu diâmetro.

Com isso, vemos a existência de um número não racional que chamamos *irracional*, mas como defini-lo aritmeticamente?

A definição mais comum é a que contradiz a definição de número racional, ou seja: número irracional é aquele que não pode ser escrito como uma fração de números inteiros. Vejamos outras definições.

6.2.1 A definição de número irracional de Dedekind

A questão discutida, que partiu da incomensurabilidade da medida da diagonal do quadrado com a medida de seu lado, pode ser resumida algebricamente em $x^2 = 2$, em que demonstramos a inexistência de x racional. Generalizando, tem-se que a equação $x^n = r$, r racional, nem sempre apresenta como solução um número racional.

Para definir esses novos números, os irracionais, afirmou Dedekind que deveria existir o completo esforço para que a nova definição fosse somente feita pela ideia de números racionais, e se perguntou como poderia fazer isso. Decidiu transferir para o domínio dos números a propriedade que ele considerava a essência da continuidade da reta.

Como não é o propósito deste capítulo o estudo da continuidade, não vamos explorá-la; salientamos somente que ela está intimamente ligada à definição do próprio número irracional, pois esses novos números, juntamente com os racionais, formam um corpo adequado aos propósitos da análise, o campo dos números reais.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) definiu os números irracionais baseado na noção de *corte*, isto é, dividir o conjunto de todos os números racionais em duas classes, A e B, de tal modo que cada elemento b da classe B seja maior do que cada elemento a da classe A. Qualquer classificação desse tipo é denominada de *corte* no conjunto de números racionais. Referimo-nos a Courant e Robbins (2000), que organizam a definição dada por Dedekind.

Um *corte* no campo racional compreende a formação de duas classes (subconjuntos) disjuntas A e B, em que sua união contém todos os números racionais. Para um corte existem apenas três possibilidades, sendo que uma e somente uma deve ser válida.

1ª) Existe um maior elemento a_m em A.

Esse é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto (ou classe) de todos os números racionais menores ou iguais a 1, e B de todos os números racionais maiores que 1. Esse corte define o número racional 1.

2ª) Existe um menor elemento b_m em B.

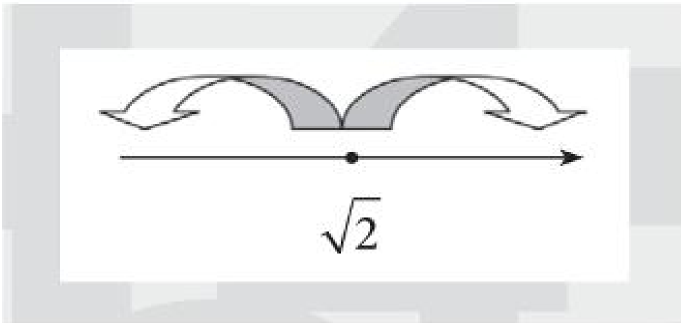
Esse é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto (ou a classe) de todos os números racionais menores que 1, e B de todos os números racionais maiores ou iguais a 1. Caso semelhante ao anterior, para definir o racional 1.

3ª) Não existe nem um maior elemento em A nem um menor elemento em B.

Esse é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto (ou a classe) de todos os números racionais negativos, o zero e todos os números racionais positivos com quadrado menor ou igual a 2 e B é o conjunto (ou classe) de todos os números racionais positivos cujo quadrado seja maior que 2. Juntos, incluem todos os números racionais, e ao mesmo tempo, como já foi visto, não existe qualquer número racional cujo quadrado seja igual a 2, logo esse corte define $\sqrt{2}$.

Os dois primeiros casos definem número racional e o terceiro define o número irracional. Graficamente podemos visualizar da seguinte maneira:

Figura 6.3 – Reta aritmética



Utilizamos a reta aritmética na representação gráfica sem defini-la. Sugerimos ao leitor o estudo da reta real, pois, como dissemos, o contexto histórico do número irracional se relaciona estreitamente com a continuidade e com o campo dos números reais.

O irracional $\sqrt{2}$ causa um corte no conjunto dos números racionais. Isso quer dizer que $\sqrt{2}$ divide o conjunto dos números racionais em duas classes disjuntas (ou dois subconjuntos disjuntos). Essas classes são disjuntas, pois dado um número racional x, ele está na primeira classe (se $x^2 < 2$) ou está na segunda classe (se $x^2 > 2$). Nenhum racional "fica fora" dessa condição.

Examinemos o exemplo dado por Dias (2002) ao pesquisar algumas concepções de número irracional. Considere um conjunto A formado por números racionais cujo cubo de cada um deles seja menor ou igual a 2, e outro, conjunto B, formado por números racionais cujo cubo de cada um deles seja maior que 2. Sintetizando em linguagem de conjuntos: $A = \{q \in Q \mid q^3 \leq 2\}$ e $B = \{p \in Q \mid p^3 > 2\}$.

Existe um maior elemento em A? A e B definem um corte? Qual?

Ou seja, no conjunto A existe um racional que seja maior que todos os outros do mesmo conjunto? Se existisse um racional q tal que $q^3 = 2$, certamente seria esse, mas não existe esse racional. Para qualquer outro número racional, por mais próximo que o seu cubo esteja de 2, sempre existirá outro racional maior que ele. Pense nisso! Logo, não existe maior elemento em A.

Da mesma forma, o conjunto B não tem um menor elemento, ou seja, um número racional p em B que satisfaça a desigualdade. Além disso, dado qualquer racional, ou ele está em A ou está em B.

Temos então que o número que escrevemos por $\sqrt[3]{2}$ causa um corte em Q, e esse corte é único, por isso ele define um único número irracional.

As três possibilidades de corte definidas por Dedekind formam o campo real, pois as duas primeiras definem o número racional e a última o número irracional. Trataremos mais detidamente o caso do número irracional.

Uma contribuição do pensamento filosófico de Dantzig (1970), referente à compreensão do número irracional, é pensá-lo como sendo o tempo presente. A intuição permite, por um ato mental, dividir todo o tempo em duas classes: o passado e o futuro. Juntas, compreendem todo o tempo, a eternidade, além disso, são mutuamente excludentes. O presente é a partição, é o corte, que separa todo o passado de todo o futuro. Por mais paradoxal que possa parecer, o presente é verdadeiramente irracional, comparando com a definição de irracional de Dedekind, pois o presente, mesmo agindo como partição, não é parte do passado e não é parte do futuro.

6.3 Outras definições de número irracional

A definição de número irracional de Dedekind não é a única dada na história. Há também a definição de irracionais por sequência convergente; por exemplo, $\sqrt{2}$ é a sequência convergente:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \dots$$

Observe que a sequência dos quadrados desses termos converge para 2:

$$1,\ 1{,}96,\ 1{,}9881,\ 1{,}999396,\ 1{,}99996164,\dots$$

Karl Weierstrass (1815-1897) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) também se interessaram pelos números irracionais, segundo Boyer (1996, p. 410):

> Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-la no conceito de número apenas; como Méray, ele também viu que para fazer isso era necessário dar uma definição de número irracional que fosse independente do conceito de limite, já que esse até então tinha pressuposto o anterior. Para corrigir o erro lógico de Cauchy, Weierstrass decidiu a questão da existência de um limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como o número ou limite.

Além das diferentes definições de irracionais, acrescentamos que o campo dos irracionais pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos que não são comumente explorados na educação básica: os números irracionais algébricos e os números irracionais transcendentes. Aliás, o conjunto dos números reais pode ser definido como a união dos números algébricos com os transcendentes, pois os números racionais são também algébricos.

Os números algébricos são todos aqueles que são solução de alguma equação algébrica de coeficientes racionais, por isso, além dos números racionais, há também as raízes irracionais. Retirando-se os racionais do campo dos números algébricos tem-se os irracionais algébricos, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$, que são soluções respectivamente das equações $x^2 - 2 = 0$; $x^3 - 5 = 0$; $x^6 - 2x^3 - 4 = 0$.

Dantzig (1970), ao abordar os números reais como novo domínio numérico, menciona que esse novo campo conterá os irracionais da álgebra e os transcendentes da análise. Isso porque enquanto os racionais interessavam tanto à álgebra quanto à análise, parece não acontecer o mesmo quanto aos números irracionais. Os números algébricos, como o próprio nome já permite intuir, interessam para o ramo da álgebra e os números transcendentes mais ao da análise. Os números irracionais transcendentes geralmente são representados pela forma de decimal infinito não periódico, por algum outro símbolo, como é o caso do π e do e, ou ainda por frações contínuas.

Sugerimos ao leitor pesquisar sobre o número neperiano e ($e = 2{,}718\ldots$) que aparece no desenvolvimento do conceito de logaritmo de John Napier (1550-1617). O interesse na análise por números transcendentes é devido à sua relação com sequências, séries e limites, conceitos mencionados por Weierstrass. Embora a discussão sobre tais conceitos não seja o propósito deste capítulo, recomendamos aos leitores pesquisarem sobre o assunto. Um dos matemáticos que escreve sobre esses conceitos é Elon Lages Lima. Ilustramos a representação de número irracional por frações contínuas, que, segundo Dantzig (1970), chegou até nós pela obra de Bombelli (cerca de 1526-1573), de 1572, embora alguns estudos apontem que os gregos já as conheciam.

Vejamos o caso do número π.

$$\frac{4}{p} = \textit{limite da fração } 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \ldots}}}}}}$$

Não são só os irracionais transcendentes que podem ser representados pelas chamadas *frações contínuas*; os algébricos também o podem. Em geral, são poucos os materiais didáticos voltados à educação básica que abordam esse tipo de representação, além de pouco explorarem o campo dos números irracionais, como veremos mais adiante neste texto.

6.4 Operações com números irracionais

O campo dos números irracionais é ordenado, mas não é "bem comportado" como os racionais, ou seja, formalmente dizemos que o conjunto dos números irracionais não é fechado para adição e multiplicação.

Vejamos o por quê. Dados dois números irracionais a e b, podemos colocar as seguintes questões:

1) $a + b$ é um número irracional? Observe o que ocorre quando $a = -b$: a soma é zero, e zero é um número racional.

2) $a \cdot b$ é irracional? Basta um contraexemplo para ver que não se trata de uma propriedade generalizante. Tomamos $a = b = \sqrt{2}$ e $a \cdot b$ será 2, número racional. Outro exemplo é considerar: $a = \sqrt[3]{2}$ e $b = \sqrt[3]{4}$.

Embora as propriedades comutativa e associativa — tanto da adição quanto da multiplicação — e a distributiva sejam válidas para os números irracionais, esse campo não constitui um corpo. Entretanto, essas propriedades são importantes para o estudo dos números reais, formados pelos números racionais e irracionais.

Além disso, o campo dos números irracionais é *denso em si*, ou seja, dados dois irracionais distintos quaisquer, há sempre um irracional entre eles. Por exemplo, entre $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$, podemos citar alguns irracionais, como $\sqrt{5{,}45}, \sqrt[4]{7\sqrt{13}}, \frac{5}{6}e$ (e número neperiano), pois há infinitos.

6.5 Um percurso histórico dos números irracionais no ensino

O percurso em algumas obras didáticas portuguesas e brasileiras será útil para uma reflexão de como os estudantes aprenderam e estão aprendendo números irracionais, como seus conhecimentos sobre o assunto foram e estão sendo construídos, pois sabemos que o livro didático tem sido um dos mediadores importantes no sistema de ensino da matemática. Paralelamente, citamos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o assunto.

Na pesquisa de Dias (2007), há indicação de obras portuguesas, anteriores a 1963, nas quais o número irracional é definido por meio do conceito de corte, embora não seja utilizado esse termo. Em Cobianchi (2001) há referência a livros que introduzem os irracionais pela incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao lado, cuja abordagem é indicada também pelos PCN (Brasil, 1998, p. 106), embora não de forma explícita:

> O estudo desses números [irracionais] pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros.

Nota-se no percurso das publicações didáticas que a relação do conceito de incomensurabilidade com o número irracional vai sendo minimizada. A apresentação dessa relação na citação dos PCN pode levar à interpretação desse distanciamento, uma vez que não explicita a relação entre o conceito da incomensurabilidade e o cálculo proposto envolvendo a diagonal do quadrado por meio do uso do Teorema de Pitágoras.

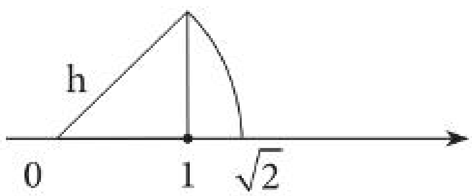
A prova indicada pelos PCN é a que realizamos no item *O comensurável e o incomensurável*, a prova algébrica. Tal prova começa a aparecer em obras didáticas na década de 1970, principalmente para introduzir a categoria de números irracionais. No decorrer dos anos nota-se que a demonstração desaparece dos livros didáticos destinados à educação básica brasileira, permanecendo somente uma indicação de que $\sqrt{2}$ é um número irracional (Dias; Moura, 2006).

Outra escolha didática presente nos livros é a representação do irracional na reta numérica. É comum em obras didáticas atuais destinadas ao ensino básico aparecer a representação de números na reta desde a abordagem dos números naturais, mas isso não foi sempre assim. Observamos dois enfoques didáticos na representação de números irracionais na reta; um é o que justifica a correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta e o outro é o que propõe a localização de alguns irracionais.

A correspondência biunívoca significa que cada número – real – corresponde a um único ponto na reta numérica e por sua vez cada ponto da reta corresponde a um único número – real. Esse vai ser o princípio da definição de eixo numérico necessário para o desenvolvimento da geometria analítica. Isso significa que cada irracional, assim como cada racional, tem um ponto que o corresponde na reta numérica, como também, ao tomarmos um ponto aleatoriamente nessa reta, necessariamente este corresponde ou a um número racional ou a um número irracional.

Didaticamente, a localização do irracional $\sqrt{2}$ na reta geralmente realiza-se pela transferência do comprimento do segmento da hipotenusa (h), do triângulo retângulo isósceles de catetos de uma unidade, para a reta. O comprimento desse segmento é calculado pelo teorema de Pitágoras, obtendo-se $\sqrt{2}$.

Um esquema semelhante é:



Outros irracionais algébricos podem ser obtidos por método semelhante.

Segundo as pesquisas de Dias (2007) e Cobianchi (2001), nota-se que o percurso das sínteses definitórias no sistema de ensino para os números irracionais não foi o mesmo da história, pois a definição por cortes de Dedekind é de 1872 e a de número decimal infinito não periódico é anterior ao século XIX.

As relações abordadas entre incomensurabilidade, cortes e representação decimal dos números irracionais incorporadas em alguns livros didáticos da década de 1930 foram sendo minimizadas e até suprimidas no decorrer dos anos. Atualmente, tanto os PCN para o ensino fundamental brasileiro como o programa curricular para o nono ano do ensino básico português instruem a abordagem dos números irracionais pela representação de dízima não periódica. Além dessa definição, os PCN indicam:

> O importante é que o aluno [...] identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contraexemplos para ampliar a compreensão dos números (Brasil, 1998, p. 83).

É interessante observar que os números irracionais não foram sempre abordados da mesma forma nos livros didáticos, e a ausência de discussão tem acarretado a dificuldade de compreensão desse campo numérico.

Síntese

A abordagem dos números irracionais foi realizada com base na discussão da incomensurabilidade de comprimentos relacionada com os números *pi* e $\sqrt{2}$. Com isso, discutimos a necessidade histórica de outro tipo de número que não é o racional, originando o número irracional. Apontamentos do modo como o número irracional foi abordado em alguns livros didáticos ao longo do século XX sugerem algumas reflexões quanto ao seu processo de ensino e de aprendizagem. Além disso, foram abordadas algumas definições e operações com número irracional.

Indicações culturais

BONGIOVANNI, V.; WATANABE, R. Pi acaba? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 19, p. 1-8, 1991.

Os autores dividem o texto em quatro períodos nos quais o cálculo do número PI *se contextualiza historicamente, segundo diferentes métodos, o geométrico, o uso de séries, a transcendência de* PI *e as relações trigonométricas.*

COSTA, R. C. F. O que é um número transcendente? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 1, p. 14-15, 1984.

A partir da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, o autor discorre com elementos históricos como essa razão foi explorada. Embora não haja a demonstração teórica da transcendência do número pi, o autor situa o leitor historicamente, como também explica o que são irracionais algébricos.

GODEFROY, G. **A aventura dos números**. Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

Gilles Godefroy faz uma abordagem histórica da concepção atomista do espaço; relaciona, portanto, os números inteiros, tidos como os únicos a serem considerados números em certa época, às mônadas, à escola pitagórica e à incomensurabilidade de segmentos. Traz também o modo como Eudoxo comparava grandezas.

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 2, p. 10-12, 1983.

O autor, na seção "O número 'e': por quê?", inicia com a problematização de considerarmos e *como base do logaritmo. Define* e *por meio de limite e discorre a respeito de fenômenos que justificam essa escolha.*

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 6, p. 18-20, 1985.

Em "O que é o número π?", o autor explora algumas aparições na história sobre o número pi. Desde escritos bíblicos e papiro de Rhind a publicações que datam de 1931, 1947 e de 1967, encontra-se, em algumas, a busca de uma escritura decimal do número PI como decimal finito, e, em outras, já conhecendo a irracionalidade do número, busca-se encontrar cada vez mais dígitos. O texto contribui também com outros elementos históricos, como o início do uso da simbologia como é conhecida hoje e a relação do número PI com a quadratura do círculo.

Atividades de autoavaliação

1. Considerando a igualdade $\frac{52}{19} = 2{,}7368...$, pode-se afirmar que o número 2,7368...:
   a) é irracional.
   b) é racional.
   c) pode ser racional.
   d) pode ser irracional.
2. O número $\sqrt[5]{12}$ pode ser definido como:
   a) o seguinte corte em Q: $\{q \in Q | \ q^5 \leq 12\}$ e $\{p \in Q | \ p^5 > 12\}$
   b) 1,64
   c) $\frac{164}{100}$
   d) $1 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + ... + \frac{6}{10^{17}}$

3. Qual representação abaixo não pode ser de um número irracional?

a) 34,34683478...

b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $13,456\overline{432}$

d) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$

4. Há número irracional entre 3,14 e π?

a) não, por que $\pi = 3,14$.

b) sim, somente o número $\sqrt{9,86}$.

c) sim, há infinitos.

d) não, há somente números racionais.

5. Existe um sucessor de $\sqrt{5}$?

a) Sim, $\sqrt{6}$.

b) Sim, $\sqrt{5,1}$.

c) Não, porque $\sqrt{5}$ é algébrico.

d) Não, porque no campo dos números irracionais não há sucessor.

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Faça uma reflexão sobre a abordagem dos números irracionais no ensino e escreva como você abordaria esse conceito em diferentes etapas (ensino fundamental e ensino médio). Sugerimos que, além da leitura do texto, pesquise outras fontes.

2. Demonstre a irracionalidade de $\sqrt{10}$ como impossibilidade de ser uma fração de inteiros e pela incomensurabilidade. Sugerimos que utilize o Teorema de Pitágoras para demonstrar esse último.

3. Pesquise alguns métodos de aproximações do número *pi*, desde o método da exaustão até os que utilizam computadores.

Atividades aplicadas: prática

1. Se um estudante sempre foi ensinado a utilizar um número aproximado ao número $\sqrt{2}$, como 1,41, como ele poderá aprender que esse número é irracional sem ser simplesmente por uma informação?

2. Desenvolva uma atividade ou uma sequência didática que permita ao estudante compreender não somente a irracionalidade de um único número, mas o conceito de número irracional. Sugerimos que você utilize recursos como situações-problema, questões investigativas e experimentos, a fim de problematizar o assunto que irá desenvolver.

Considerações finais

Trabalhar os entes matemáticos na educação tem sido um desafio nos últimos anos, exigindo um repensar a matemática e sua educação, visto que o movimento da matemática moderna privilegiou um tratamento formal da disciplina no ensino escolar.

A intencionalidade principal que permeou todo o texto foi a construção e a apropriação dos conceitos matemáticos. Os elementos didáticos escolhidos buscaram, dentro de uma diversidade, privilegiar aspectos da história da matemática, não no sentido informativo ou biográfico, mas com a finalidade de propiciar o movimento do pensamento matemático com interlocuções do movimento humano da produção de conhecimento.

A variabilidade de abordagem dos assuntos atende ao propósito de evidenciar a diversidade de produções que permeiam a história da educação matemática. Por esse motivo, trouxemos aspectos do sistema numérico e sua escrita em civilizações precedentes; formalizações matemáticas como definições, propriedades, teoremas e demonstrações; elementos de propostas curriculares; abordagem de um conceito matemático em livros didáticos em diferentes décadas; questionamentos que visaram integrar a criação de hipóteses dos estudantes com o movimento humano de construção do conhecimento; jogos, sugestão de práticas com instrumentos, resultados de pesquisa em educação matemática etc.

Além disso, assumimos o desafio de abordar temas complexos por meio de uma linguagem menos formal, sem perder o rigor conceitual que os conceitos envolvidos exigem. Essa opção se justifica, uma vez que, como pesquisadoras em educação matemática e formadoras de professores que ensinam matemática, entendemos que embora a linguagem formal tenha seu valor inquestionável no desenvolvimento da ciência, por seu caráter sintético, preciso e universal, seu uso isolado, desvinculado do sentido histórico e humano que a possibilitou, pouco tem contribuído para a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes e, consequentemente, para o processo formativo de professores.

Como todo material, aqui também as opções implicam limites de abordagem de outras frentes de análise. Esperamos, contudo, que o estudo deste livro, ao abordar elementos lógico-históricos para atividade de ensino, tenha contribuído com o seu processo formativo em educação matemática, tanto no que concerne aos elementos matemáticos quanto à forma de abordagem, que juntos formam o processo de conceitualização.

Aos leitores, em especial aos já professores e futuros professores do conhecimento matemático, lembramos que sempre há muito mais o que conhecer e desafios conceituais e metodológicos a superar. Nesse percurso, entendemos esse material como desencadeador de formação docente: de conhecimento, estratégias didáticas, curiosidades históricas, comprometimento com a formação do humano por meio de uma educação que explicite significados que permitam aos estudantes construírem sentidos sobre os conceitos aprendidos.

Referências

BARNETT, I. A. Números perfeitos, deficientes e abundantes. In: GUNDLACH, B. H. **História da matemática**: tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. p. 43-45.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2006.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CARVALHO, J. B. P. Euclides, Fibonacci e Lamé. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 24, n. 2, p. 32-40, 1993.

CATALANI, E. M. T. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual de fração**. 2002. 216 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

COBIANCHI, A. S. **Estudos de continuidade e números reais**: matemática, descobertas e justificativas de professores. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é a matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COUTINHO, S. C. **Primalidade em tempo polinomial**: uma introdução ao algoritmo AKS. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

DANTZIG, T. **Número**: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DIAS, M S. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

______. **Reta real**: conceito imagem e conceito definição. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DIAS, M. S.; MOURA, M. O. A atividade de ensino e a constituição do professor de matemática como sujeito histórico. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., Portugal, 2006. **Anais...** Portugal, 2006.

EUCLIDES. **Euclid's elements**. Disponível em: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>. Acesso em: 1º dez. 2008.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

GREEN, D. Diferenças entre termos numéricos em algumas línguas indígenas do Brasil. **Boletim do Museu Paranaense Emílio Goeld**, Belém, v. 13, n. 2, 1997. Disponível em: <http://www.sil.org/americas/brasil/PUBLCNS/LING/NumBrasi.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2008.

GUNDLACH, B. H. História dos números e numerais. In: ______. **História da matemática**: tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. p. 1-20.

HEFEZ, A. **Elementos da aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**. Porto Alegre: Globo, 1970.

IFRAH, G. **A história universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo I.

______. **Os números**: a história de uma grande invenção. 9. ed. São Paulo: Globo, 1998.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

LINTZ, R. G. **História da matemática**. Blumenau: Ed. da Furb, 1999.

MARGOLINAS, C. Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. **Petit X**, Genoble, p. 51-66, 1988.

MILIES, F. C. P. **Números**: uma introdução à matemática. São Paulo: Edusp, 2006.

OLIVEIRA, Z. C. Uma interpretação geométrica do mdc. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 29, n. 3, p. 24-26, 1995.

SANTOS, V. de M. **Infinito**: concepções e consequências pedagógicas. 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

TAHAN, M. **Maravilhas da matemática**. São Paulo: Bloch, 1983.

VOGELI, B. D. Sistema de numeração babilônico. In: GUNDLACH, B. H. **História da matemática**: tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. p. 20-22.

Bibliografia comentada

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

Lançado em 1941, este livro representa um marco na abordagem histórica de conceitos fundamentais da matemática. Temas como números, funções e continuidade são apresentados a partir de sua contextualização. Ao mesmo tempo que é uma obra de referência para apoiar o trabalho do professor, pode interessar ao leigo, uma vez que, mais do que um livro de matemática, é uma excursão histórica e filosófica pelo pensamento dos povos antigos.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 9. ed. São Paulo: Globo, 1998.

O livro retrata a história dos algarismos, transcorrendo, com detalhes e fundamentação científica, as origens da representação simbólica dos números e seu desenvolvimento histórico. Os diferentes sistemas numéricos, bem como a criação do zero e do valor posicional, são apresentados pelo autor de forma clara e precisa, propiciando ao

leitor uma viagem pela história da humanidade, que relaciona o desenvolvimento dos algarismos com as necessidades humanas que os motivaram.

MILIES, F. C. P. **Números**: uma introdução à matemática. São Paulo: Edusp, 2006.

Numa linguagem acessível, sem perder o rigor matemático, este livro oferece um curso sobre a Teoria dos Números que parte de noções já conhecidas pelos estudantes que ingressam no ensino superior. Incluindo notas históricas sobre os temas tratados e diferentes propostas de exercícios, esta obra é uma excelente fonte de consulta e de estudos para os interessados em se aprofundar em tópicos de aritmética.

DANTZIG, T. **Número**: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

O livro trata de assuntos da matemática relacionados aos números. O autor faz uma reflexão filosófica sobre conceitos matemáticos, com base na história da matemática. Entre os capítulos abordados encontram-se a coluna vazia, que discute a evolução do conceito do zero no sistema posicional, o inexprimível, que trata do número irracional e a relação com a escola pitagórica, e a anatomia do infinito, que faz a relação do infinito potencial e infinito atual.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

O livro é uma referência em relação à história da matemática. Há um tratamento do desenvolvimento da matemática perpassando pelas civilizações, entre elas, a egípcia, a mesopotâmica, a grega, a chinesa, a árabe, como também o destaque de personalidades com uma pequena biografia. Na obra encontramos as contribuições à matemática de Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Gauss, Bernoulli, Euler, entre outros.

Respostas

Capítulo 1

Atividades de autoavaliação

1. d
2. c
3. d
4. b
5. a

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Espera-se que os alunos, na resposta, demonstrem ter assimilado o conteúdo exposto na primeira parte do capítulo. Isso significa saber que um sistema de numeração deve ter número limitado de signos, valor posicional e signo para indicar o zero.
2. Espera-se que os alunos compreendam a dificuldade de se inventar um sistema de numeração que seja eficiente para todas situações de contagem.

3. Um sistema de numeração eficiente deve ter um número limitado de signos, valor posicional e signo para indicar o zero.
4. 1001

Capítulo 2

Atividades de autoavaliação

1.

a) Multiplicação
b) Potenciação
c) Logaritmização
d) Radiciação

2. V, V, F, V
3. c
4. d
5. b

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1.

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ \hline 1.1\,0\,0 \end{array}$$

Conversão da base binária para a base dez: $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 12$

2. A partir de uma situação geral, como de comercialização de mercadorias, o professor pode contextualizar que em certa época da nossa história o único instrumento de cálculo disponível era o ábaco. Com isso, pode colocar operações com quantidades de mercadorias em que seja necessária a utilização de adição, subtração, multiplicação e divisão. Sugestões para a multiplicação e a divisão é a utilização de vários ábacos quantos forem necessários. Com isso, é possível observar as desvantagens, principalmente na multiplicação e na divisão com o ábaco, quando se pretende fazer essas operações com números cada vez maiores.

3. Para demonstrar que as propriedades associativa e comutativa não existem para a subtração, basta apresentar um contraexemplo. Por exemplo, para a associatividade, temos $5-(3-1) \neq (5-3)-1$, e para a comutatividade $5-3 \neq 3-5$.

Capítulo 3

Atividades de autoavaliação

1. c
2. b
3. d
4. b
5. a

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Sugestão: utilize o algoritmo da divisão euclidiana em IN.
2. Sugestão: analise a demonstração do critério de divisibilidade por 2.
3. Sugestão: utilize a demonstração do critério de divisibilidade por 3.

Capítulo 4

Atividades de autoavaliação

1. c
2. b
3. d
4. b
5. a

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Sim. Sugestão: antes de começar, releia o início do capítulo e determine até qual valor de n será necessário repetir o processo do crivo.
2. $104 = 43 + 61$

Capítulo 5

Atividades de autoavaliação

1. d
2. b
3. c
4. F, V, V, F
5. a

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. A enumerabilidade é um conceito desenvolvido a partir da correspondência biunívoca de um conjunto com o conjunto dos números naturais. A partir desse conceito, Cantor propõe outra classificação de conjuntos, diferente da conhecida classificação em conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
2. O texto do capítulo 2 oferece um contexto baseado nas essências das operações, que permite uma ampliação para o campo racional. Acrescentando a essa indicação, pode-se elaborar questões ou situações problematizadoras.
3. Pode-se discutir sobre os decimais chamados *exatos* e as dízimas periódicas e a relação entre fração e divisão. Como todo número racional tem representação decimal, é importante pesquisar e explorar as representações, por exemplo: 1 pode ser escrito como a dízima periódica 0,999... ; 0,4 pode ser escrito como a dízima periódica 0,3999...

Capítulo 6

Atividades de autoavaliação

1. b
2. a
3. c
4. c
5. d

Atividades de aprendizagem

Questões para reflexão

1. Como o número *pi* é amplamente explorado no ensino fundamental, pode-se explorá-lo ampliando a discussão que é realizada no texto deste capítulo. Além disso, por meio de situações que comparem medidas com instrumentos e a utilização do Teorema de Pitágoras, podem ser explorado alguns irracionais algébricos. No ensino médio pode-se acrescentar demonstrações algébricas da irracionalidade de algumas raízes, como a definição de irracionais abordada por Dedekind. Tanto no ensino fundamental como no médio pode-se discutir o método das aproximações sucessivas para a representação decimal de uma raiz quadrada, cúbica etc. Nesse caso, a sugestão é trabalhar com a calculadora.
2. A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{10}$ é análoga à demonstração realizada no capítulo da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Pela incomensurabilidade, escolhe-se um triângulo retângulo em que um dos catetos seja a unidade de medida e a hipotenusa seja $\sqrt{10}$. Com isso, pode-se retomar as ideias do texto de como medir a hipotenusa tendo o lado como unidade, as limitações das medidas com instrumentos e a medida a partir do Teorema de Pitágoras.
3. O método da exaustão compreende encontrar, a partir de polígonos inscritos e circunscritos na circunferência, o comprimento ou a área do círculo por ela compreendido. O método compreende aumentar cada vez mais o número de lados dos polígonos, pois com isso eles vão se aproximando cada vez mais da curvatura da circunferência. Os computadores utilizam outro princípio; trata-se de séries, por isso recomendamos que, além de observar quantas casas decimais os computadores já alcançaram, investigue os métodos.

SOBRE AS AUTORAS

Marisa da Silva Dias é licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (1990), mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP (2002) e doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (2007). Trabalha na área de ensino em matemática desde 1992. Lecionou no ensino fundamental, médio, técnico e superior. Foi pesquisadora no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Atualmente, é assistente doutora da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp, na qual trabalha na formação inicial de professores de matemática e de pedagogia, em projetos de formação continuada e pesquisa na área de formação de professores e ensino de matemática.

Vanessa Dias Moretti é licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (1994), mestre (1998) e doutora (2007) na área do Ensino da Matemática pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Atuou como professora no ensino fundamental, médio e superior, em programas de formação de professores e como assessora pedagógica da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Atualmente, é docente adjunta da Universidade Federal de São Paulo – Unifesp, e tem desenvolvido pesquisas em educação matemática, focando especialmente a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática.

Ambas as autoras são pesquisadoras do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica – GEPAPe, sediado na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Você já parou para pensar sobre o exato momento em que os homens começaram a utilizar números e operações matemáticas?

Se imaginou que isso ocorreu há dezenas de milhares de anos, não está nem um pouco enganado! Afinal, **o uso de numerais e de cálculos é quase tão antigo quanto a história da humanidade**.

Este livro o convida a fazer uma viagem pela história, ajudando-o a entender como o conhecimento matemático se desenvolveu desde as primeiras civilizações.

Aqui, você encontrará curiosidades, explicações didáticas e análises sobre o papel do professor e da educação na vida em sociedade, compreendendo, sob o ponto de vista educacional e pedagógico, como certas contextualizações históricas e problemáticas foram determinantes para colocar o homem diante da necessidade de desenvolver o conhecimento matemático e perpetuá-lo até os dias de hoje.

EDITORA
intersaberes
www.editoraintersaberes.com.br

ISBN 978-85-8212-098-9
9788582120989