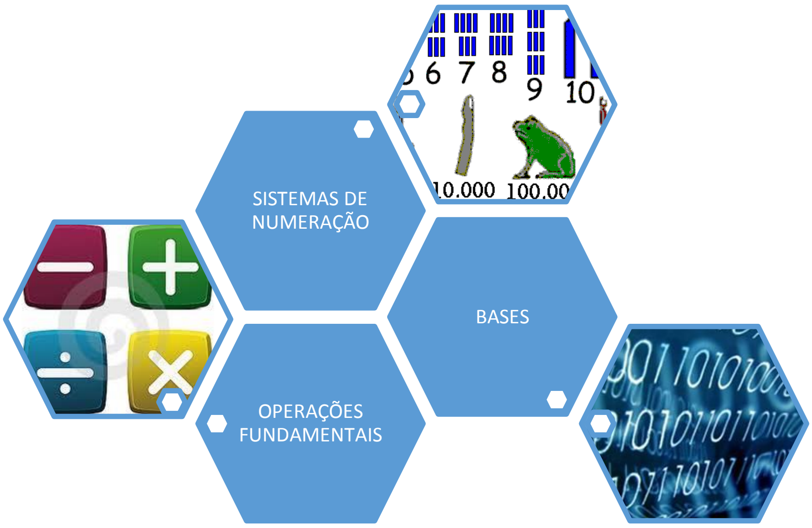
2016

SISTEMAS NUMÉRICOS E OPERAÇÕES ARITMÉTICAS



ALEXANDRE OLIVEIRA SILVA

VASSOURAS - USS

Silva, Alexandre Oliveira
Si381s Sistemas numéricos e operações aritméticas / Alexandre Oliveira Silva. - Vassouras, 2016.
iii, 60 f. : il ; 29,7 cm.

Produto da dissertação de mestrado.

1. Matemática - História. 2. Aritmética. I. Villela, Lucia Maria Aversa. II. Carvalho, João Bosco Pitombeira F. de. III. Universidade Severino Sombra. IV. Título.

CDD 510.9

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Severino Sombra / Vassouras - RJ

Alexandre Oliveira Silva

Sistemas Numéricos

e Operações Aritméticas

Vassouras – RJ

2016

Agradeço:

A Deus pela vida.

À minha mãe que, apesar da distância, esteve sempre presente.

À minha filha Fernandinha, que significa tudo na minha vida.

À mãe da minha filha, Jaqueline, que sempre me incentivou e acreditou que seria possível desde o início.

À minha esposa, Amanda, que por muitas vezes abriu mão de divertimentos nos fins de semanas para ficar ao meu lado, enquanto escrevia e por me incentivar nos momentos nos quais faltaram forças; foram vários esses para continuar.

Ao meu amigo, irmão e mestre Paulo Cesar Henrique da Silva que me incentivou, cobrou e me fez acreditar que era possível.

À Prof.ª Dr.ª Lucia Maria Aversa Villela, por sua dedicação, garra e paixão pelo trabalho. Quando achei que não seria mais possível, ela me mostrou vários caminhos.

Ao Prof. Dr. João Bosco Pitombeira F. de Carvalho, por toda sua calma e sabedoria que acrescentou muito ao trabalho, sempre tirando minhas dúvidas, sendo minha fonte de inspiração.

À Prof.ª Dr.ª Estela Kaufman Fainguerlernt, *in memoria*, pela lembrança de uma professora fantástica, sendo uma perda inestimável para a Educação Matemática.

Ao Prof. MSc. Nelson Lage que me incentivou e acreditou no projeto, mesmo quando estava ainda na especialização.

Aos meus amigos do mestrado, pelas conversas inesquecíveis.

SUMÁRIO

1 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA 4

2 O INÍCIO DE TUDO 6

2.1 CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA 6

2.2. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E A IDEIA DE BASE 7

2.2.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO BABILÔNICA 8

2.2.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIA 11

2.2.3 SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANA 12

2.2.4. SISTEMA DE NUMERAÇÃO GREGA 16

2.2.5. SISTEMA DE NUMERAÇÃO CHINÊS – JAPONÊS 16

2.2.6. SISTEMA DE NUMERAÇÃO MAIA 17

2.2.7. SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO - ARÁBICA 19

3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS 22

3.1 ADIÇÃO 22

3.2 SUBTRAÇÃO 26

3.3 MULTIPLICAÇÃO 32

3.4 DIVISÃO 46

4. REFERÊNCIAS 53

5. GABARITO DO PRODUTO 55

1. A importância do ensino da Matemática

Segundo D'Ambrosio (2009, p. 2), a palavra Matemática significa: **Matema** (explicar, aprender, conhecer, lidar com) e **tica** (modos, estilos, artes, técnicas).

Todos os estudantes escutam que é importantíssimo aprender Matemática, porém poucos entendem esse motivo. Os professores em nossas escolas podem apresentar a Matemática através da sua história, como parte da nossa própria existência e que essa disciplina depende de uma sociedade que pergunte, pense e raciocine.

Precisamos em nossas aulas apresentar para nossos alunos uma nova face a esta disciplina, exemplificando que antes de Cristo os seres humanos procuravam respostas para problemas que hoje entendemos como comuns, mas que em outras épocas serviam como desafios sem explicações. Fica uma questão para ser refletirmos: será que nossa sociedade preocupa-se apenas com resultados, ou seja, aprovações e não com aprendizado?

Qualquer pessoa sabe que a Matemática é muito importante, mas parte das pessoas se pergunta: Por que eu preciso aprender essa disciplina? Eu não vou trabalhar com isso! Por que Matemática é tão difícil?

Entre os obstáculos enfrentados no Brasil para o ensino da Matemática podemos ressaltar a falta de investimento na qualificação profissional, condições de trabalho inadequadas, políticas públicas equivocadas e uma melhor elaboração dos componentes curriculares para cada período de aprendizado. No entanto o governo tenta uma melhora, ainda modesta, mas significativa sobre a importância do ensino de Matemática nas escolas. Como exemplo pode-se citar os debates em torno da proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que irão substituir os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Vejamos o que foi escrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais no ano de 1998 sobre o ensino de Matemática. Mesmo após dezoito anos utilizaremos essa parte do PCN como referência para os dias atuais, uma vez que suas ideias continuam atualizadas e ainda é este documento que está em vigor, antes da implantação da BNCC.

> No entanto, essas iniciativas ainda não atingiram o conjunto de professores e por isso não chegaram a alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil. A formação de professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-lo

> para o exercício da docência. Não tendo condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas em sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (BRASIL, PCN, 1998, p.21)

Este trabalho, criado a partir de uma pesquisa bibliográfica e desenvolvido como produto para a titulação de Mestre em Educação Matemática, tem por finalidade auxiliar o professor na sua prática pedagógica, além de ter caráter informativo sobre os sistemas de numeração, bases numéricas e operações fundamentais, e suas evoluções em relação as civilizações através da História da Matemática.

2. <u>O INÍCIO DE TUDO</u>

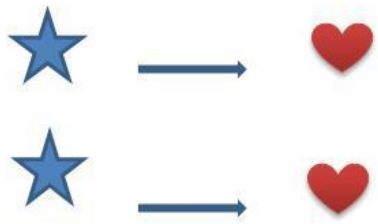
No início da humanidade o fazer matemático era fruto do cotidiano, ou seja, vinha em resposta às necessidades que surgiam.

Uma das soluções encontradas para a contagem foi através de correspondência biunívoca. “Pastor e boiadeiro precisam saber contar o número de suas reses e ovelhas para se certificarem de que nenhuma se extraviou e muitos anos antes do homem passar a residir as cidades” (HOGBEN, 1956, p.43). Ao aumentar as quantidades a serem contadas, os povos criaram outra estratégia: passaram a agrupar essas coisas a serem contadas, surgindo a ideia de “base”.

2.1. CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA

É quando existe correspondência um a um entre cada elemento de dois conjuntos. Isto é, onde todo elemento do primeiro conjunto possui um elemento do segundo conjunto.

Exemplo:



Na representação acima vê-se que para cada estrela representada, existe um coração.

<u>Atividades:</u>

1) Em uma caixa repleta de ovos, sem deixar nenhum espaço vazio, há correspondência biunívoca entre a quantidade de ovos e o número de compartimentos na caixa de ovos?

Fonte: https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTY4XaNyOzA0dTFL5NSCO40nISowq7fp6hf03qfCbpshSJ7B5tCOg

2) Há correspondência biunívoca entre o conjunto de letras e o conjunto de quadradinhos?

F	E	R	N	A	N	D	A	

3) Numa sala de cinema há 300 lugares para assistir a um filme. Já foram vendidos 298. Para que haja correspondência biunívoca, quantos ingressos ainda poderão ser vendidos?

4) Para mostrar ao seu aluno, utilizando material manipulável, recorte imagens de registros numéricos e ao lado de cada número prenda, à sua volta, uma quantidade de pregadores representando o número recortado. Leve-os a perceber se a quantidade de pregadores corresponde à quantidade representada no recorte. Escolha as quantidades de forma adequada ao nível de conhecimento dos alunos

2.2. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E A IDEIA DE BASE

Alguns sistemas numéricos e suas diferenças:

Babilônico	Base sexagesimal Posicionamento do símbolo
Egípcio	Base decimal; Não tinha símbolo para o “zero”. Uso de traços verticais (repetição até “nove”)
Romano	Agrupamentos simples de base dez (EVES, 1997)
Grego	Não era puramente posicional; tedioso. (MAINZER, 1990).
Chinês - japonês	Por meio de barras, levando assim a outro sistema de

numeração, também de base decimal, porém não necessitando de componentes para valores relativos. Mais tarde, em documento de 1247, se acha pela primeira vez um símbolo circular para o zero

<u>Maia</u> Puramente vigesimal e fundada no princípio da adição. (IFRAH, 1997)

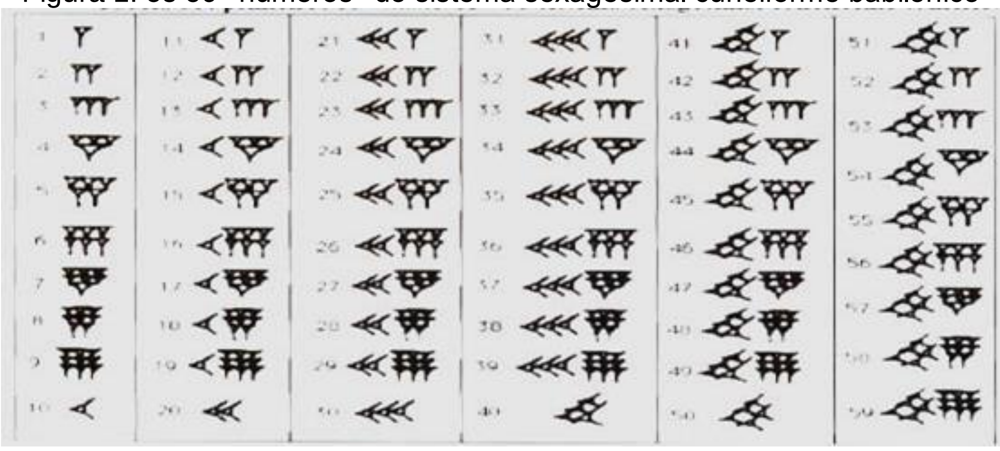
<u>Indo – arábica:</u> O método engenhoso de expressar cada número possível por meio de um conjunto de dez símbolos (cada símbolo com um valor lugar e um valor absoluto) surgiu na Índia... (LAPLACE)

Iniciaremos acrescentando informações sobre cada sistema de numeração, sua importância para cada sociedade e a utilização desses sistemas, não puramente como desenhos ou curiosidade, e sim dando ênfase às suas bases numéricas.

2.2.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO BABILÔNICA

Pelo que se tem notícia, os sumérios constituíram-se nos únicos da história a terem criado e utilizado um sistema sexagesimal. “Essa profunda originalidade tem sido um dos maiores enigmas da história da aritmética, uma vez que nunca se explicou a razão que presidiu, entre eles, a escolha de uma base tão elevada”. (IFRAH, 1997, p. 181)

Figura 1: os 59 ‘’números’’ do sistema sexagesimal cuneiforme babilônico



Fonte: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Babylonian_numerals

Exemplos:

▼ = 1 ▼ ▼ = 2 ▼ ▼ ▼ = 3

◀ ▼ = 11 ◀ ▼ ▼ = 12 ◀ ▼ ▼ ▼ = 13

◀ ◀ ▼ ▼
◀ ◀ ▼ ▼ = 44

Atividades:

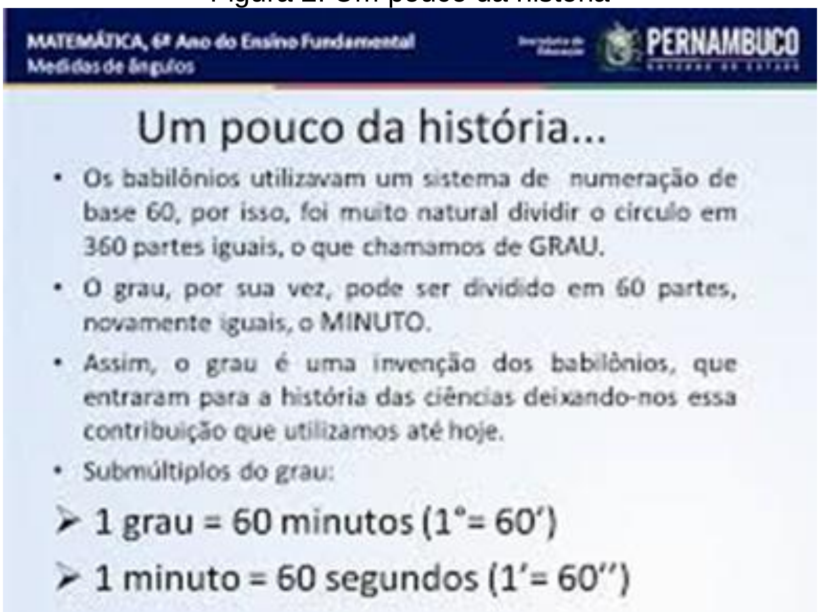
5) Representar abaixo usando os símbolos babilônicos:
   a) 18

   b) 23

   c) 42

A origem da base sessenta não é determinada com clareza, havendo várias hipóteses. Uma das teorias mais plausível é a utilização dessa base em valores primitivos como pesos e medidas (lembremos que a circunferência foi dividida em 360 partes). Outra possibilidade é que a sua origem está nos estudos astronômicos babilônicos.

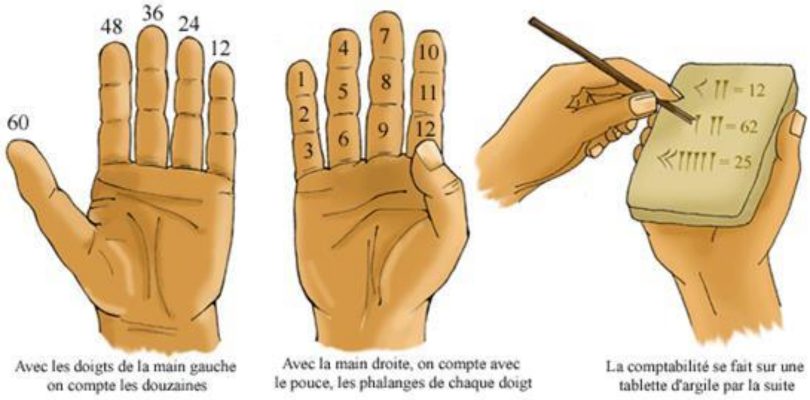
Figura 2: Um pouco da história



Fonte: Slideplayer.com.br

Temos abaixo um exemplo da utilização das mãos para indicar uma quantidade na base sexagesimal. As partes dos dedos da mão direita representavam as possíveis quantidades da primeira ordem, enquanto de os dedos da mão esquerda representavam os grupos de 12.

Figura 3: A utilização das mãos para calcular



Fonte: images.recitus.qc.ca

Na ilustração acima, observe que o polegar direito está indicando a falange do dedo indicador, que representa a quantidade 12[1].

Atividade:

6) Usando esse tipo de linguagem, como faríamos para indicar a quantidade que, escrita no nosso sistema de numeração, é representada por 18?

Olhando um registro numérico escrito na base 60, podemos identificar como essa quantidade estaria indicada no nosso atual sistema de numeração. Veja os exemplos de números escritos na base 60, decompostos nas diferentes ordens, indicando-nos o numeral correspondente no nosso sistema de numeração: Observe que a quantidade, isto é “o número”, é a mesma em ambos os registros: o que mudou foi a forma de se representar essa quantidade.

a) $(21)_{60} = 2 \times 60^1 + 1 \times 60^0 = 120 + 1 = 121$

b) $(258)_{60} = 2 \times 60^2 + 5 \times 60^1 + 8 \times 60^0 = 7.200 + 300 + 8 = 750$

Atividade:

7) Os números abaixo estão escritos na base 60. Decomponha-os nas diferentes ordens, obtendo seu registro no nosso sistema de numeração.

   a) $(11)_{60}$

   b) $(134)_{60}$

[1] A falanginha desse dedo está indicando o 11 e a falangeta, o 10.

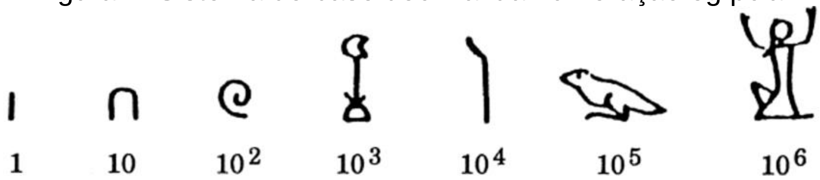
c) $(321)_{60}$

2.2.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIA

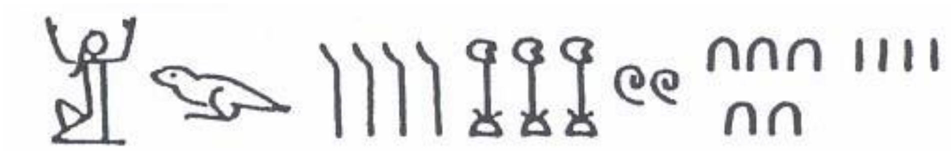
Cada símbolo podia ser repetido até nove vezes e o valor total representado era obtido a partir da adição daqueles valores. Num sistema deste tipo, não importa a ordem dos símbolos, mas os egípcios usualmente escreviam os símbolos por ordem de valores, ou da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. (GULLBERG, 1997, p. 34)

Abaixo mostraremos símbolos do sistema hieroglífico, utilizado pelos egípcios.

Figura 4: Sistema de base decimal da numeração egípcia



Exemplo do número 1.143.254 representado por meio dos símbolos egípcios



Fonte: Gullberg (1997, p. 34)

<u>Atividades:</u>

8) Representar os números abaixo, por meio dos símbolos egípcios:

a) 13

b) 155

c) 4.200

d) 21.432

O sistema que hoje utilizamos emprega a base dez. É muito prático e reconhecido por praticamente todas as civilizações. Algebricamente podemos dizer que qualquer número natural *n* pode ser escrito na forma:

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \ldots a_1.10 + a_0$$

Exemplos da decomposição de números, escritos na base 10, em suas diferentes ordens:

a) $(21)_{10} = 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 20 + 1 = 21$

b) $(258)_{10} = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 200 + 50 + 8 = 258$

9) Utilizando a base decimal, vamos decompor os números abaixo de acordo com suas ordens.

a) $(17)_{10}$

b) $(184)_{10}$

c) $(625)_{10}$

2.2.3. SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANA

Os algarismos romanos tiveram início na prática de entalhes em fragmentos de madeira ou ossos. Estavam diretamente ligados à aritmética primitiva: “[...] são verdadeiros fósseis pré-históricos”.(IFRAH, 1997, p.204).

Os algarismos romanos não facilitavam a quem os utilizava efetuar operações aritméticas. Sendo assim, o ábaco foi um instrumento importantíssimo para que os contadores romanos efetuassem seus cálculos de uma maneira mais precisa.

> Assim como os sinais das numerações precedentes, os algarismos romanos não permitiram a seus utilizadores fazerem cálculos. (...) Era admiravel como um povo que tinha um nível técnico de cultura elevado tinha um sistema inutil e complicado sendo não operatório. (IFRAH, 2007, p.396)

A grande dúvida seria o porque não existia o algarismo zero na numeração romana? A resposta, possivelmnete, está na ausência do uso de algoritmos para a resolução das operações nessa cultura[2].

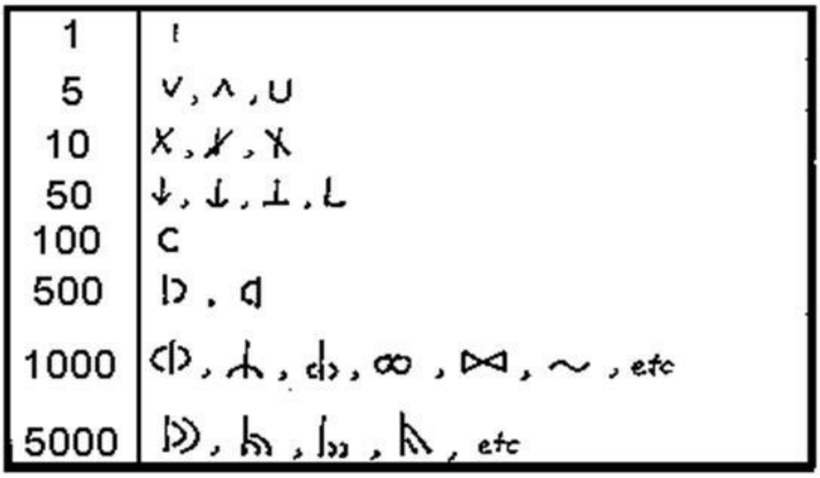
A história da numeração romana se divide em três períodos históricos:

- romano-romano, utilizado pelos romanos antigos (Figuras 5, 6 e 8)
- romano-medieval, utilizado durante a Idade Média. (Figura 7)
- romano-moderno (Figura 9)

Figura 5: Inscrição na base da Columna Rostrata, no Palácio dei Conservatori em Roma

Fonte: http:/www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2e.html, acesso em 20 de junho de 2015.

Figura 6: Detalhes dos registros numéricos do sistema romano-romano



Fonte: http:/www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2e.html, acesso em 20 de junho de 2015)

[2] Encontramos o zero na numeração do povo Maia: "[...] o zero segundo a civilização Maia era usado para indicar a ausência de quaisquer unidades das várias ordens de seu sistema de numeração" (GUNDLACH, 1992, p.34).

Figura 7: Alguns números representados pelo sistema romano-medieval

Fonte: http:/www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2e.html. Acesso em 20 jun 2015

> Os níveis de registro utilizados nesses estágios do sistema de numeração romano têm como principal diferença o uso do princípio subtrativo e a organização, com uma repetição padronizada para alguns símbolos.
> Um exemplo de escrita contendo repetição excessiva do símbolo que representa a unidade é observado no sistema romano-romano, onde era tolerável a sua repetição de três ou quatro vezes, como se vê na figura abaixo. (SILVA, 2016, p. 35)

Figura 8: Imagem de escrita do número quarenta e quatro no sistema romano-romano, no pórtico do Coliseum,

Fonte: http:/www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2e.html. Acesso em 22 jun 2015

Esta representação, quando vista atualmente, confunde o entendimento do registro numérico de alguns monumentos romanos, tendo em vista que a numeração romano – moderno não aceita a repetiçao de um símbolo por quatro vezes.

Eis os símbolos utilizados na representação do sistema de numeração romano-moderno:

Figura 9: Numeração romana utilizada até os dias atuais.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Fonte: Ifrah (1997, p. 397)

Exemplo da representação romana dos números:

a) 29 XXIX
b) 295 CCXCV
c) 2954 MMCMLIV

Atividades:

10) Representar os números abaixo usando os símbolos romanos:

a) 17

b) 168

c) 867

d) 1.974

A numeração romana ainda é, de alguma forma, utilizada culturalmente para enumerar documentos e fatos importantes representando século, artigos e leis dos códigos de direito, assim como acompanhar nomes de nobres e papas. Hoje nas escolas são apresentados apenas alguns dos símbolos da numeração romana moderna, embora seu estudo já não exija tanta ênfase como em gerações anteriores. Sobre este aspecto, penso que deveria ser útil para auxiliar o aluno a perceber que a Matemática é uma construção social, elaborada a partir das necessidades que foram e veem aparecendo a cada momento e, assim, se desfaz a ideia errada de que trata-se de um conhecimento pronto e acabado.

2.2.4. SISTEMA DE NUMERAÇÃO GREGA

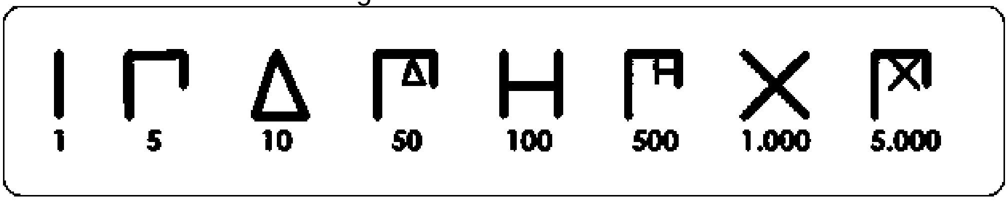
Tal como acontecera com o sistema romano, também a numeração grega passou por diversos estágios, aglutinando informações e registros.

Enquanto egípcios e babilônios resolviam situações do cotidiano, os gregos além de as resolver, se empenhavam também em problemas mais abstratos, observando o desenvolvimento voltado para os conceitos. “Não é de se admirar, pois, que Alexandria[3] tenha se tornado um porto seguro para os intelectuais e que, por mais de meio milênio, tantas das conquistas acadêmico-culturais antigas tenham emanado da cidade”. (EVES, 2004, p.191)

Segundo Ifrah (1997, p. 387), este sistema de numeração foi utilizado por cidadãos de outros Estados do mundo para representar suas inscrições monumentais antes da era cristã.

Assim como a numeração romana era a base da numeração grega era decimal.

Figura 10: Números áticos



Fonte:www.escolares.net

Esses sistema usava o princípio aditivo, cujos valores dos símbolos eram somados. alcançando assim um número.

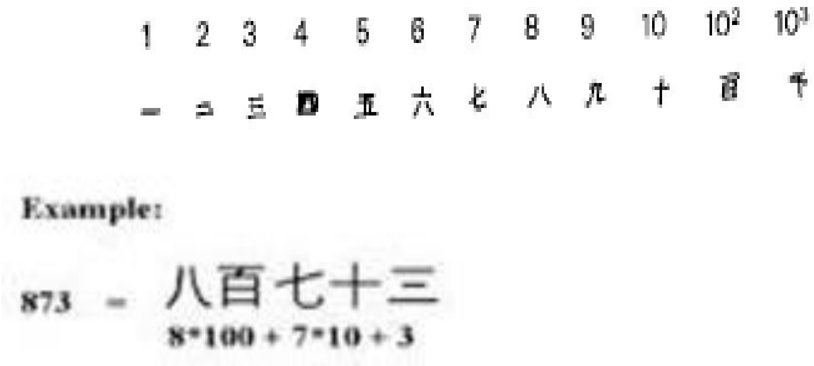
2.2.5 SISTEMA DE NUMERAÇÃO CHINÊS – JAPONÊS

Assim como os egípcios e babilônios, a matemática oriental desenvolveu-se de acordo com suas necessidades práticas.

O sistema de numeração tradicional chinês é decimal e estritamente posicional, isto é, trabalha com a adição de múltiplos de potências de 10. Compreende treze sinais fundamentais associados: “as nove unidades e as quatro primeiras potências de dez $(10, 100, 1.000, 10.000)$. (IFRAH, 1997, p.551).

[3] Alexandria era um centro urbano fundada em 322 a.C. pelo macedônio Alexandre Magno e em pouco se tornou uma das maiores cidades do mundo grego (www.historiadomundo.com.br. Acesso em 22 set. 2015).

Figura 11: numerais chineses-japoneses



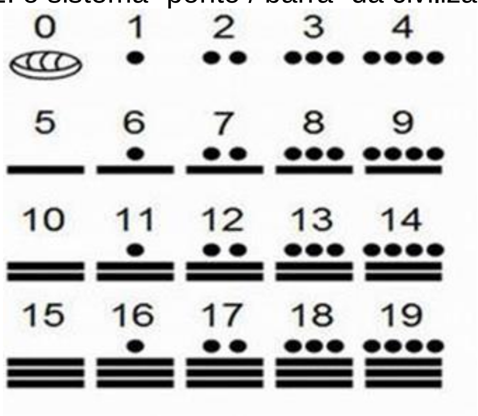
Fonte: Gundlach (1992,p.28)

2.2.6 SISTEMA DE NUMERAÇÃO MAIA

Por mais de mil anos, os maias habitaram a região localizada no sul do México e a América Central no coração das florestas tropicais. A civilização maia mesmo com toda dificuldade enfrentada por todas as civilizações conseguiu se destacar por atingir avançados e altos patamares na utilização da matemática. (SILVA, 2016, p.42)

A numeração corrente do povo maia foi puramente vigesimal e fundada no princípio da adição, utilizando o sistema de ponto. (IFRAH, 1997, p. 638)

Figura 12: o sistema "ponto / barra" da civilização maia



Fonte: http:/ portaldoprofessor.mec.gov.br/FichaTecnicaAula. Html?aula=19543

Quando o número fosse superior a 20, escrevia-se numa coluna vertical que compreendesse tantos andares quanto suas ordens. Para números de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples no patamar inferior e o algarismo das vintenas do segundo patamar e assim sucessivamente.

Porém encontramos uma irregularidade para descrever o sistema erudito do povo maia: o uso irregular da base 20. A partir da terceira ordem não se trabalhava com os múltiplos de 18 x 20, 18 x 20^2, 18 x 20^3 e assim sucessivamente. Isto é, os maias trabalhavam da seguinte forma:

1ª ordem: base vigesimal

2ª ordem: base vigesimal

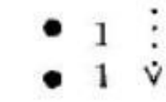
3ª ordem: múltiplos de 360

4ª ordem: múltiplos de 360 x 20 = 7.200

5ª ordem: múltiplos de 7.200 x 20 = 144.000 e assim sucessivamente.

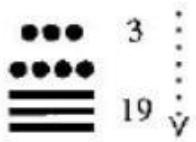
Exemplos[4] de quantidades registradas no nosso sistema de numeração e reescritas de acordo com a simbologia do povo maia.

Representação do número 21.



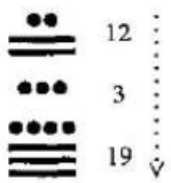
1 X 20 + 1

Representação do número 79.



3 X 20 + 19

Representação do número 4.399



12 x 360 + 3 x 20 + 19

Imagine que não queiramos seguir as normas que eles usavam a partir da terceira ordem (inclusive), em que misturavam bases, e só utilizássemos a base 20. Exemplos da utilização da base 20 (ou vigesimal):

a) $(36)_{20} = 3 \times 20^1 + 6 \times 20^0 = 60 + 6 = 66$

b) $(138)_{20} = 1 \times 20^2 + 3 \times 20^1 + 8 \times 10^0 = 400 + 60 + 8 = 468$

<u>Atividades:</u>

11) Utilizando só a base vigesimal, representemos os números abaixo.

$a)\ (29)_{20}$ =

---

[4] Com base em Ifrah (1997, p. 640).

b) $(145)_{20}$ =

c) $(1.479)_{20}$ =

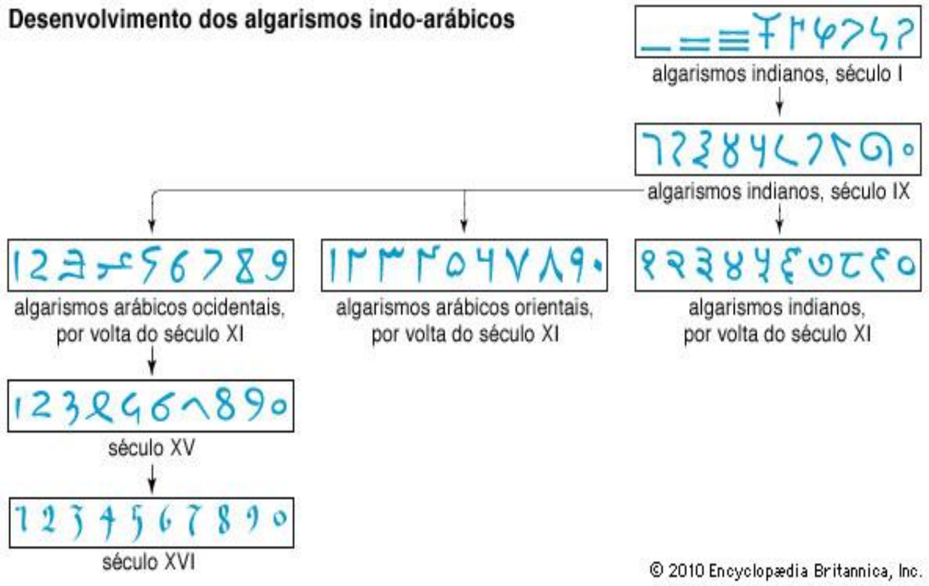
2.2.7. SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO – ARÁBICA

É posssível descrevermos o sistema indo-arábico como um tipo de registro que, com apenas dez símbolos, e, por meio do posicionamento de seus algarismos, simplificou a escrita numérica.

Sabemos que a junção de duas civilizações deu origem a este tipo de numeração, porém é perfeitamente possível afirmarmos que civilizações anteriores contribuíram para que hoje tenhamos uma numeração de fácil escrita e prática.

> A facilidade na representação de grandezas e no desenvolvimento das operações aritméticas foi dada devido a utilizacão da base decimal, não sendo utilizada a base sexagesimal dos babilônios e nem a vigesimal dos maias, usando desta forma a base decimal que é bastante praticada no mundo. (SILVA, 2016, p.45)

Figura 13: O desenvolvimento dos dez primeiros algarismos



Fonte: escolabritanica.com.br. Acesso em: 17 jan 2016

Uma sugestão, como desafio, é criarmos um sistema de numeração a ser usado pela turma: isto exigiria a escolha de uma base, a criação de um método a ser usado e a combinação de que símbolos seriam usados.

Na atividade abaixo, como exemplo, criamos apenas símbolos para representar as potências da base decimal, tal como um “código secreto” a valer para essa atividade:

Atividades:

12) Vamos representar os números na base decimal utilizando as figuras abaixo.

	$10^0 = 1$
	$10^1 = 10$
	$10^2 = 100$
	$10^3 = 1.000$
	$10^4 = 10.000$

a) 25 

b) 210 

c) 62

d) 351

e) 10. 203

3)OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

Os povos antigos desenvolveram seus registros numéricos. Criaram maneiras de efetuar cálculos, formaram seus sistemas de contagem e operavam com essas quantidades[5]. Dentre esses recursos empregados, a ideia de fazer agrupamentos para facilitar a contagem foi comum a várias civilizações. Com o aperfeiçoamento desse recurso e a necessidade de cada sociedade, chegou-se à organização dos algoritmos, isto é, dispositivos que ajudassem a efetuar as operações numéricas. Interessante percebermos que essas maneiras de realizar os cálculos continuam em constante aprimoramento.

Após pesquisarmos autores sobre a História da Matemática, conhecemos um pouco sobre os recursos usados por algumas civilizações citadas para que efetuassem as operações. É nossa intenção compartilhar com os colegas professores um pouco dessas curiosidades que poderão auxiliá-los em suas aulas.

3.1 ADIÇÃO

Sejam dois conjuntos disjuntos (sem elementos comuns). A união desses conjuntos é representada pela notação $A \cup B$. Isto é, desde que A e B sejam conjuntos disjuntos, o número e elementos de $A \cup B$ coincide com a quantidade de elementos quando juntamos todos os elementos do conjunto A com todos os elementos do conjunto B. A operação que reúne essas quantidades, que são chamadas de parcelas, é denominada de adição e o resultado, é chamado de soma ou total.

É conveniente que se esclareça que a união de conjuntos é, como indica o próprio nome, uma operação entre conjuntos e a adição é uma operação entre quantidades de elementos. São operações que têm naturezas diferentes.

Historicamente, o termo que se refere a essa operação sofreu alterações:

> A operação que chamamos hoje de adição, já foi denominada por um escritor do século XIII, por exemplo, usando a palavra "agregação" em seu lugar. Escrevendo por volta de 1200, Fibonacci usou "composição" e "coleção", bem como "adição", para expressar a operação. Nos primeiros livros impressos, a palavra soma também aparecia para substituir a palavra adição. Além de ser uma operação bastante utilizada, provavelmente deu origem à expressão “fazer uma soma”, que significa resolver um problema. Os impressos aritméticos utilizados para uso popular não utilizavam a

[5] De certa forma chegaram ao registro dos atuais números naturais, embora culturas como a grega e a egípcia também trabalhassem com quantidades não inteiras.

> palavra “adendo”[6], o que também ocorria nos livros teóricos, geralmente escritos em latim com a denominação “numeri addendi”, significando “números a serem adicionados”. (SMITH, p.89, 1953).

Para a criança, a adição serve de alicerce para todo o seu aprendizado em Aritmética.

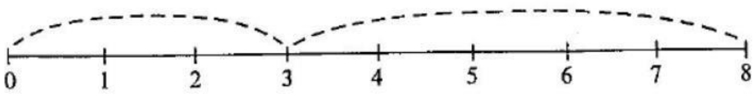
Os professores necessitam desenvolver no aluno não só experiências de contagem de rotina, como também a contagem de dois em dois, três e três, etc. Os materiais manipuláveis são muito úteis para que possamos auxiliar o aprendizado dos alunos. Exemplos: material dourado, ábaco, cartões, blocos de madeira, varetas, tira de papel, caixas.

Outro recurso que requer atenção especial é a reta numérica. Pode ser utilizada para ensinar a adição. Exemplo: 3 + 5 =

1º passo: pular três unidades após o zero;

2º passo: depois do primeiro passo, continuar e pular novamente, porém agora saltar mais cinco unidades;

3º passo: observar na reta numérica onde paramos após os outros dois passos anteriores.



Logo, 3 + 5 = 8

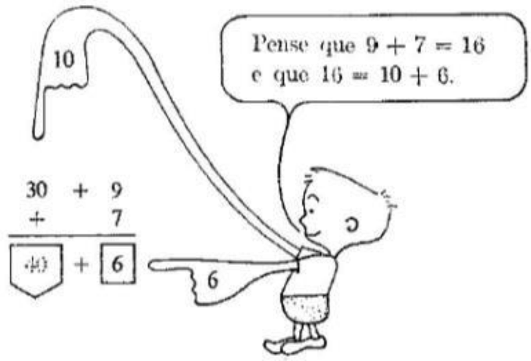
Podemos ensinar a operação depois que explicarmos sobre as suas ordens, decompondo números.

Exemplos: 20 + 6 = duas dezenas mais seis unidades, igual a vinte e seis.
30 + 7 = três dezenas mais sete unidades,igual a trinta e sete.
22 = duas dezenas mais duas unidades.

Exemplo de adição utilizando a propriedade associativa:

39 + 7

[6] Adendo: número a ser somado a outro precedente (michaelis.uol.com.br)



1º passo:...............(30 + 9) + 7

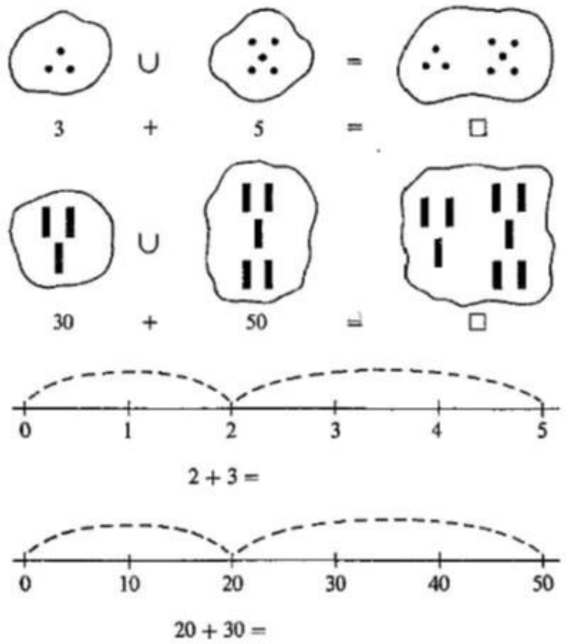
2º passo:...............30 + (9 +7)

3º passo:............... 30 + 16

4º passo:............... 46

Fonte: D'Augustine (1976, p.61)

Exemplo de outra atividade citada em D' Augustine (1976, p.59), que pode ser adaptada e desenvolvida pelos professores.



Ao se usar os dois primeiros exemplos citados acima, relembre as diferenças entre as ideias de união de conjuntos e da operação adição.

Mas voltemos ao olhar histórico. Vamos verificar como era efetuada a operação citada em livros relacionados à História da Matemática.

Smith (1953, 90) citou a forma com que aparecia a adição em uma enciclopédia, a Margarita Phylosophyca, publicada em 1503:

4'6'7'9' numerus cui debet fieri additio
3'2'3'2' numerus addendus
7 9 i i numerus pductus

Retomando a obra Lilavati, escrita por Bháskara por volta de 1150, (SMITH, 1953, p. 91) nos esclarece como essa operação era efetuada:

Bháskara (1150) em seu livro *Lilavati* dá como o primeiro problema o seguinte: “Querida e inteligente Lilavati, se tu és hábil além, [...] diga-me a soma de dois, cinco, trinta e dois, cento e noventa e três, dezoito, dez e um cem, somados.” Em um comentário, sobre este trabalho, de data desconhecida, o método a seguir é dado.

Sum of the units,	2, 5, 2, 3, 8, 0, 0	20
Sum of the tens,	3, 9, 1, 1, 0	14
Sum of the hundreds,	1, 0, 0, 1	2
Sum of the sums,	. . . .	360

Os algarismos eram somados verticalmente conforme sua ordem, e depois faziam da maneira semelhante a que utilizamos atualmente: adicionando as unidades, dezenas, centenas e assim sucessivamente.

Eves, tal como Smith, também exemplificou em seu livro dando ênfase às ordens e classes. Vejamos como a adição de 345 e 488 era feita pelos hindús:

soma das unidades	5 + 8 = 13
soma das dezenas	4 + 8 = 12 .
soma das centenas	3 + 4 = 7 . .
soma das somas	= 833

(EVES, 2004, p.93)

Temos o processo chamado de “a carregar” que mostraremos abaixo:

Adição pelo processo “a carregar”, citado por Gemma Frisius (1540)

```
9279
 389
 479
----
  27
  22
  9
 9
----
10147
```

Fonte: Smith (1953, p.93)

Outro exemplo:

8	2	6	5	
	4	3	7	
	6	7	2	
		1	4	→ Somando as unidades
	1	6		→ Somando as dezenas
1	2			→ Somando as centenas
8				→ Oito unidades de milhar
9	3	7	4	→ Total das ordens somadas

Atividades:

13) O conjunto A tem 5 elementos.O conjunto de B tem 12 elementos e os conjuntos A e B são disjuntos. Quantos elementos tem o conjunto A U B ?

14) Efetue a operação utilizando o método “a carregar da adição”.

a) 35 + 47 =

b) 25 + 37 + 69 =

c) 135 + 367 =

d) 2.453 + 724 + 45 + 3 =

15) Um objeto custa R$ 415,00. O comprador terá ainda uma despesa de R$ 40,00 de frete. Quanto o comprador vai gastar nessa compra?

3.2 SUBTRAÇÃO

O significado dessa operação tem variações, como nos exemplos a seguir: diminuir a inflação, deduzir parte do imposto, pagar o resto devido e qual a diferença entre as alturas, etc. Esses significados de certo modo utilizam as ideias envolvidas na subtração: tirar, comparar e completar.

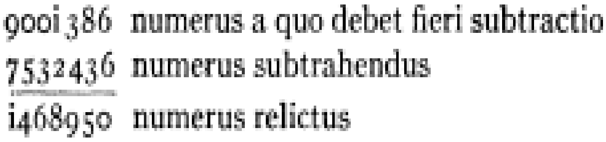
> Não podemos utilizar afirmações incorretas como “subtraímos o número menor do número maior” causando confusão quando o aluno for aprender subtração dos números inteiros relativos quando será possível efetuar tal operacão, tendo em vista que no conjunto dos números naturais a subtração não possui a propriedade associativa. (D’AUGUSTINE, 1976, p.73)

Segundo o dicionário Aurélio, a palavra “subtrair” significa operar a subtração e a palavra “subtração” significa um ato ou efeito de tirar algo de alguma maneira de outro maior. No entanto, como se explicaria no caso de dois números iguais? Não haveria subtração entre dois números com o mesmo valor?

Quando Fibonacci[7] (1202), por exemplo, queria dizer “eu subtrai”, ele usava algumas das várias palavras que significam “eu tomo” (tomar), ou “eu extraio” (extração). (SMITH, 1953, p.94). Expressões mais comuns também eram usadas como “diminuir” e “deduzir” como na tradução do *Liber algorismi*. (SMITH, 1953, p.95).

As palavras minuendo e subtraendo, em uso nos livros didáticos, são abreviações do latim *numerus minuuendus* (número a ser diminuído) e *numerus subtraendus* (número a ser subtraído), seja o mais apropriado para compreensão desta operação.

Figura 14: Os termos da subtração, em *Margarita phylosophica*[8], de 1503.


9001386 numerus a quo debet fieri subtractio
7532436 numerus subtrahendus
1468950 numerus relictus

Fonte: Smith (1953, p.97).

O primeiro processo a ser apresentado é o método da complementação. Se pauta na igualdade $a - b = a + (10 - b) - 10$, que utiliza uma propriedade dessa operação. Em particular, para encontrar $12 - 5$ poderíamos efetuar $12 - 5 = 12 + (10 - 5) - 10$, o que pode ser substituído por processo mais simples: $12 + 5$ e, em seguida, subtrair 10.

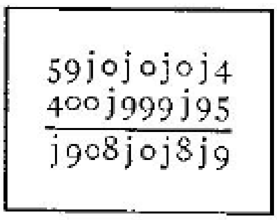
12 – 5 = 12 + (10 – 5) – 10

7 = 12 + 5 – 10

7 = 17 – 10

7 = 7

Outro exemplo de método exibido sobre o processo de subtração pode ser visto na Aritmética, publicada em Treviso (1478), e utilizado por Huswirt (1501), quando resolveu seu primeiro problema na subtração da seguinte maneira:


59jojojoj4
4ooj999j95
j9o8joj8j9

9

7 Leonardo Pisano, nasceu em 1170, e morreu depois de 1240. Também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, foi o primeiro grande matemático da Europa Cristã Medieval. Ele representou um papel importante, revivendo matemáticas antigas e fazendo contribuições significantes. (www.somatematica.com.br)

8 É uma enciclopédia. Com doze livros destinados a servir de textos informativos para jovens estudantes sobre várias áreas do conhecimento.

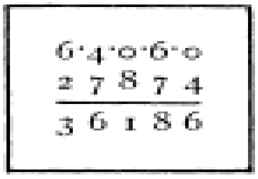
> 5 de 4 eu não posso. Tomo o complemento[10] do número de baixo, que é, 5 a partir de 10, ou 5, e a este acrescento o número de cima, 4 e obtenho o que escrevo diretamente sob a barra e abaixo a 5. Eu carrego o *j* na mente ou na tábua cancelando o primeiro 4 e 5, e o adiciono ao próximo número, ou seja, a 9, e seguindo desta forma até o primeiro algarismo da direita para esquerda. (SMITH, 1953, p. 99)

Quando o autor citou "5 de 4 eu não posso" estava se referindo à operação de subtração na ordem das unidades simples. Daí passou a utilizar a complemento de 5, isto é, o que falta a 5 para chegar a 10, o que poderia ser escrito como:

$$4 - 5 = 4 + (10 - 5) - 10 = 4 + 5 - 10 = 9 - 10$$

Esse 9 é o que foi colocado, no resto, na ordem das unidades. Mas o que significava essa ação de subtrair 10? Esse *j* que o autor citava que deveria ser carregado, matematicamente significava a unidade de ordem imediatamente superior que fora utilizada nessa complementação.

Os aritméticos americanos, apropriando-se desses impressos, observaram a operação com outro olhar, como citou Pike (1816 apud SMITH 1953, p. 99): na linguagem coloquial, quando o valor a ser retirado for maior do que o superior, passou-se a usar a expressão "peça emprestado dez".



Exemplo:

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrr} & 6. & 3 & 5 & 4 \\ - & 2. & 9 & 7 & 8 \\ \hline & 3. & 3 & 7 & 6 \end{array}$$

1º passo: 4 eu não posso tirar 8, peço emprestado um ao 5, isto é, 1 dezena que pode ser considerado como sendo 10 unidades; **(3)**

2º passo: Essa dezena que fora transferida, mais quatro unidades é igual a 14. Então 14 – 8 = 6;

---

[9] O autor utilizava a letra *j* substituindo o algarismo 1.
[10] O autor usa "distantia, para o complemento"

3º passo: Como o cinco emprestou uma dezena para somar com quatro unidades o cinco agora se tornou 4. E novamente 4 eu não posso tirar 8, peço emprestado ao 3;

4º passo: Uma centena mais quatro dezenas é igual a 140. Então 140 – 70 = 70;

5º passo: Como o três emprestou uma centena para somar com quatro centenas o três agora se tornou 2. E novamente 2 eu não posso tirar, peço emprestado ao 6;

6º passo: Uma unidade de milhar mais duas centenas é igual a 1.200. Então:
1.200 – 900= 300;

7º passo: Ao emprestar uma unidade de milhar o seis agora na verdade equivale a cinco, e cinco menos duas unidades de milhar é igual a três unidades de milhar, ou seja 3.000.

Somando os restos das subtrações 3.000 + 300 + 70 + 6 alcançaremos o valor 3.376.

Apresentaremos o terceiro método do processo de subtração que é a maneira de empréstimos simples sendo aquele em diz: "6 a partir de 12 é 6, 5 a partir de 2 é 3" (em vez de 3 a partir de 4).

$$
\begin{array}{rcc}
 & 4 & 2 \\
- & 2 & 7 \\
\hline
 & 1 & 5
\end{array}
$$

> Este método também é muito antigo. Ele aparece nos escritos do rabino Ben Ezra (1140), sendo que para se calcular utilizando esse método é aconselhado a começar pelo lado esquerdo e olhar em frente para cuidar do empréstimo. Esta característica da esquerda para a direita é de origem oriental e estava em uso na Índia um século atrás. Era a melhor estratégia quando a tabela de areia permitia que se apagasse mais facilmente os números, porém tinha poucos defensores na Europa. [...] Quando o cálculo começou na direita, o método do empréstimo também foi defendido por escritores como Gernardus (séculoXIII), Sacrobosco (1250) e Maximus Planudes (1340). (SMITH, 1953, p.100).

Os escritores de aritmética da época não eram contrários ao método de empréstimo simples, embora o método de empréstimo preferido fosse o método de adição. Este "possivelmente é o método mais rápido, se ensinado a partir do primeiro. Para subtrair 87 de 243 quem estiver fazendo o cálculo diz: 7 e 6 são 13, 9 e 5 são 14; 1 e 1 são 2". (SMITH, 1953, p. 101)

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 3 \\ -\quad 8\ 7 \\ \hline 1\ 5\ 6 \end{array}$$

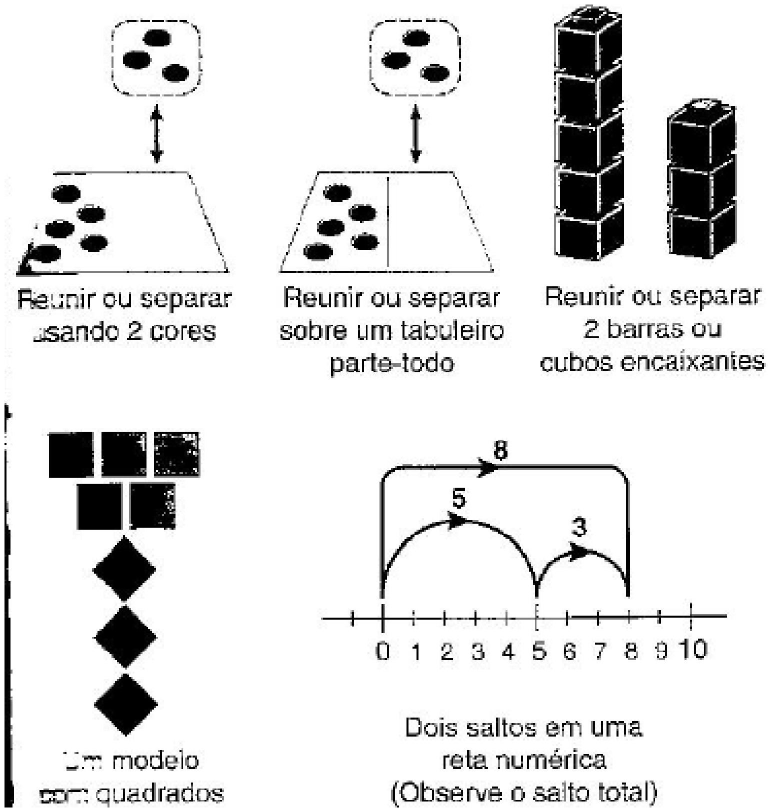
Podemos verificar que a subtração é o inverso da adição e que existem maneiras diferentes de se interpretar e resolver problemas onde é necessário o conhecimento para que haja o raciocínio e não regras a serem decoradas.

O quadro abaixo nos mostra atividades onde podemos trabalhar ensinando os fatos básicos de subtração.

PROBLEMA	MÉTODO	SOLUÇÃO
$5 - 2 = \square$	Separar conjuntos:	$5 - 2 = 3$
$8 - 6 = \square$	Comparar conjuntos:	$8 - 6 = 2$
$11 - 5 = \square$	Comparar à sentença de adição relacionada: $5 + 6 = 11$	$11 - 5 = 6$
$14 - 6 = \square$	Comparar à sentença de subtração relacionada: $14 - 8 = 6$	$14 - 6 = 8$
$15 - 9 = \square$	Subtrair por partes: $15 - 5 = 10$ $10 - 4 = 6$	$15 - 9 = 6$
$12 - 3 = \square$	Subtrair em seqüência: $12 - 1 = 11$ $12 - 2 = 10$	$12 - 3 = 9$
$15 - 7 = \square$	Usar a propriedade de compensação: $15 - 7 = (15 + 3) - (7 + 3) = 18 - 10$	$15 - 7 = 8$
$7 - 4 = \square$	Usar a linha numérica: 	$7 - 4 = 3$
$9 - 6 = \square$	Relacionar a outros fatos: $8 - 6 = 2$	$9 - 6 = 3$

Fonte: D ‘Augustine (1976, p.77)

Na figura que se segue são apresentadas atividades que podemos trabalhar com nossos alunos, mostrando modelos de parte-todo para 5 + 3 = 8 e 8 – 3 = 5.



Fonte: Van de Walle (2009,p.173)

Atividades:

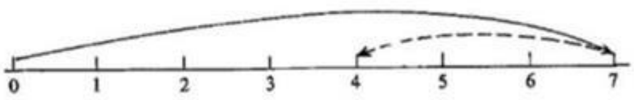
16) Numa subtração, o minuendo é 753 e o subtraendo é 591. Qual a diferença?

17) Tinha R$ 72,00 e gastei R$ 8,00 e emprestei R$ 14,00. Com quanto fiquei?

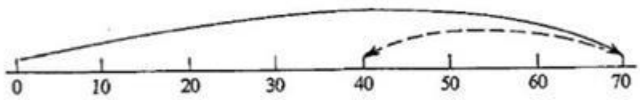
18) Numa cesta há 30 frutas. Miguel come 4 frutas e dá algumas para Fernanda. No final sobram 15. Quantas frutas Miguel deu a Fernanda?

19) Utilizando os métodos aprendidos, resolva as subtrações abaixo[11]:

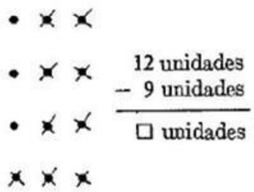
a) 7 – 3 =



b) 70 – 30 =



c) 12 – 9 =



d) 120 – 90 =

Dezena	Dezena	Dezena
Dezena	Dezena	Dezena
Dezena	Dezena	Dezena
Dezena	Dezena	Dezena

12 dezenas
- 9 dezenas
□ dezenas

3.3. MULTIPLICAÇÃO

Segundo Caraça (1952), a multiplicação é uma adição de parcelas iguais. Compõe-se por três termos: multiplicando, multiplicador e produto.

> Uma abordagem frequente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais. (PCN 1ª á 4ª série, 1998, p.109)

A multiplicação é feita de sucessivas adições e necessita de uma interpretação da situação proposta. Os conceitos da multiplicação são de suma importância para que o aluno aprenda e construa seu raciocínio. “Assim é importante que o professor construa

[11] Atividade baseada em D’Augustine (1976, p.79).

uma fundamentação sólida sobre o significado da multiplicação, para que o aluno possa entender outros processos e outros conceitos". (D'AUGUSTINE, 1976, p.94).

Sabemos muito pouco sobre a origem da multiplicação empregada pelos povos antigos, sendo que os egípcios faziam uso de duplicar valores até chegar ao resultado como mostraremos abaixo:

Ao multiplicar os números 31 x 42, duplicou-se os valores da primeira coluna e multiplicou pelo da segunda, somando-se ao final o resultado de todas as multilicações.

Figura 15: Exemplo multiplicação por duplicação, utilizado por Stifel[12], no século XVI

$$\begin{aligned} 1 \cdot 42 &= 42 \\ 2 \cdot 42 &= 84 \\ 4 \cdot 42 &= 168 \\ 8 \cdot 42 &= 336 \\ 16 \cdot 42 &= 672 \\ \hline 31 \cdot 42 &= 1302 \end{aligned}$$

Fonte: Smith (1953, p.106).

Vejamos outro exemplo, que envolve o método russo. Esse consistia em: se desejamos efetuar 32 x 45, teremos que dispor cada um desses termos em uma linha. Na primeira delas colocaremos resultados inteiros das sucessivas metades desse primeiro termo. Na segunda linha, organizaremos as duplicações a partir do primeiro termo. Assim:

32	16	8	4	2	1
45	90	180	360	720	1440

Em cada coluna, observa-se se o termo da primeira linha é par ou ímpar. Quando esse for par, abandonamos o resultado da segunda linha. No caso, as duas primeiras colunas, que começam com números pares, serão abandonadas:

32	16	8	4	2	1
45	90	180	360	720	1440

Dessa forma, o resultado de 32 x 45 será obtido direto na segunda linha da última coluna: 32 x 45 = 1.440.

[12] Michael Stifel (1486 – 1567), matemático alemão, fazia pesquisas na área de aritmética e álgebra.

Observemos que, pelo método russo, da mesma maneira também poderíamos efetuar 45 x 32:

45	22	11	5	2	1
32	64	128	256	512	1024

Assim, 45 x 32 = 32 + 128 + 256 + 1024 = 1.440

Descreveremos abaixo o raciocínio utilizado para alcançarmos o resultado descrito acima.

32 x 45 = 1.440

$32 \times 2 \times 45 \times \frac{1}{2} =$

$= 32 \times 2 \times (44 + 1) \times \frac{1}{2} =$

$= 32 \times 2 \times (44 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}) =$

$= 32 \times 2 \times 22 + 32 \times 2 \times \frac{1}{2} =$

= 32 x 2 x 22 + 32=

= 64 x 22 + 32=

$= 64 \times 2 \times 22 \times \frac{1}{2} + 32 =$

= 64 x 2 x 11 + 32 =

= 128 x 11 + 32 =

$= 128 \times 2 \times 11 \times \frac{1}{2} + 32 =$

$= 128 \times 2 \times (10+1) \times \frac{1}{2} + 32 =$

$= 128 \times 2 \times (10 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}) + 32 =$

$= 128 \times 2 \times 5 + 128 \times 2 \times \frac{1}{2} + 32 =$

= 128 x 2 x 5 + 128 + 32 =

= 256 x 5 + 128 + 32 =

= 256 x (4 + 1) + 128 + 32 =

$= 256 \times 2 \times (4+1) \times \frac{1}{2} + 128 + 32 =$

$= 256 \times 2 \times (2 + \frac{1}{2}) + 128 + 32 =$

$= 256 \times 2 \times 2 + 256 \times 2 \times \frac{1}{2} + 128 + 32 =$

= 512 x 2 + 256 + 128 + 32 =

$= 512 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 256 + 128 + 32 =$

= 1.024 + 256 + 128 + 32 = 1440

A multiplicação e sua operação inversa eram efetuadas pelos egípcios por uma sucessão de duplicações. Como exemplo de multiplicação observe o produto de 12 por 27. A multiplicação é efetuada duplicando 12 até que a soma das duplicações exceda 27.

‘1	12
‘2	24
4	48
‘8	96
‘16	192

Observando a primeira coluna, vê-se que 1 + 2 + 4 + 8 + 16 dá 31, que é maior do que 27. No caso, para obtermos uma soma igual a 27 na primeira coluna, foram aproveitadas as linhas correspondentes a 1, 2, 8 e 16. Assim, o produto de 12 x 27 é igual a 12 + 24 + 96 + 192 = 324.

Vamos ilustrar o método egípcio para a multiplicação, que usava o recurso de subtrações do seguinte modo: assuma-se que pretendemos multiplicar 41 x 45. Consideremos o número 45 e o adicionamos a si próprio, o que equivale a duplicá-lo como feito anteriormente. Continuaremos dessa forma, adicionando o resultado a si próprio até que na primeira coluna o número duplicado seja imediatamente inferior ao primeiro termo da multiplicação, que no caso é o 41.

1	45
2	90
4	180
8	360
16	720
32	1440

Uma vez que $64 > 41$, não necessitamos continuar com o processo, podendo parar no 32.

Seguimos agora para uma sequência de subtrações, até encontrarmos o resto zero:

41 – 32 = 9

9 – 8 = 1

1 – 1 = 0

Ou seja, assim podemos escrever 41 = 32 + 8 + 1

Identificados os números posicionados à esquerda da tabela, que correspondem ao 32, 8 e 1. Em seguida iremos adicionar os valores correspondentes: 1.440, 360 e 45.

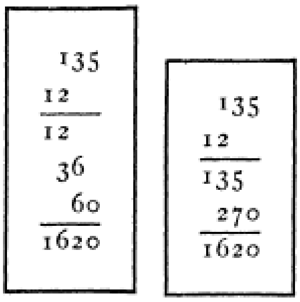
1	45
2	90
4	180
8	360
16	720
32	1.440

Somaremos os valores 1.440 + 360 + 45 = 1845

Note que a multiplicação foi efetuada por meio da duplicação e logo após adicionamos os resultados.

Verificamos alguma semelhança com a multiplicação utilizada nos dias atuais, porém o trabalho inicia-se no lado esquerdo, como mostrado abaixo, e no segundo, o qual é mostrado no cálculo, à direita, o multiplicador.

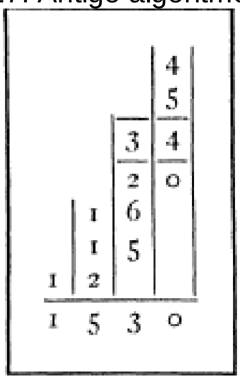
Figura 16: Multiplicação da esquerda para direita



Fonte: Smith (1953, p.108)

Apresentaremos na figura seguinte o antigo algoritmo alemão, onde iremos verificar o resultado de 45 x 34.

Figura 17: Antigo algoritmo alemão



Fonte: Smith (1953, p.109)

1º passo: multiplicar o algarismo 4 pelo algarismo 5, e obtemos 20, sendo esse resultado escrito abaixo do número 34;

2º passo: multiplicar o algarismo 4 da dezena de 45 pelo algarismo 4 da ordem das unidades de 34, ou seja 4 x 4 = 16 dezenas. Dessa forma, o resultado16 dezenas, representado abaixo do 20, tem o seu valor relativo de 160;

3º passo: multiplicar o algarismo 3 das dezenas em 34, pelo algarismo 5 da ordem das unidades em 45. Ou seja, 3 x 5 = 15 dezenas. Então o 15 dezenas, representado abaixo de 16 dezenas, tem o seu valor relativo de 150;

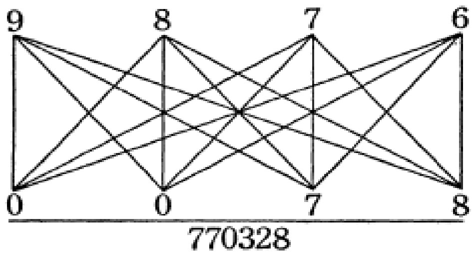
4º passo: multiplicar o algarismo 3 das dezenas em 34, que neste caso tem o valor relativo de 30, pelo algarismo 4 da ordem das dezenas em 45, cujo valor relativo é 40. Isto significa que estamos multiplicando 30 dezenas por 40 dezenas. Logo, o 3 x 4 = 12 na verdade equivale a 12 centenas, o que equivale a 1.200.

Somando os resultados parciais, teremos a resposta:

$$20 + 160 + 150 + 1.200 = 1.530$$

O algoritmo que vamos observar abaixo é chamado de multiplicação em cruz, pois multiplicamos entre si todos os algarismos que compõem cada um dos fatores, formando uma cruz. Para que obtivessem o produto, necessitavam usar um instrumento, que neste caso seriam caixas de areia ou o ábaco, para que pudessem ser escritos os resultados parciais, de cada multiplicação dos fatores. Vejamos a multiplicação de 9876 e 78.

Figura 18: Método de multiplicação em cruz



Fonte: Smith (1953, p.112,).

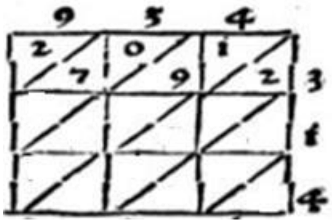
O prenchimento de zeros nas casas da centena e da unidade de milhar, como em 0078 da figura acima, era comum entre os árabes.

Este método é bem parecido com o que efetuamos nos dias atuais, porém multiplicamos em cruz sem descrever no papel O prenchimento de zeros nas casas da centena e da unidade de milhar, como em 0078 da figura acima, era comum entre os árabes.

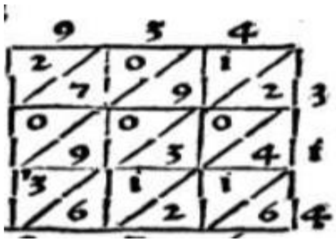
O método gelosia é a reunião de ideias de outros métodos antigos, porém com uma utilização mais apropriada até para os dias atuais. Este método, também chamado de células pelos árabes, é bem utilizado em dois exemplos no livro Aritmética, publicado em Treviso, em 1478.

Vamos efetuar a multiplicação de 934 por 314.

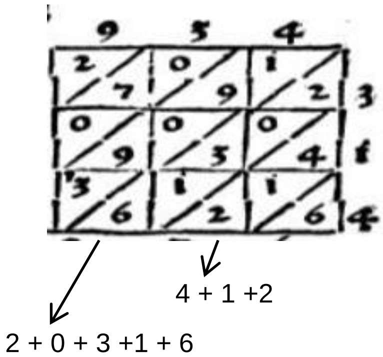
De início multiplicamos os algarismos 9, 3 e 4 por 3, colocando os resultados parciais nos respectivos retângulos:



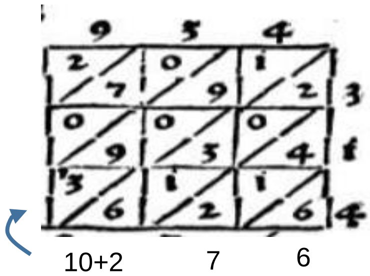
Continua-se esse processo nas outras multiplicações parciais, completando os demais retângulos:



Para se obter o produto esperado, somam-se os resultados por diagonal

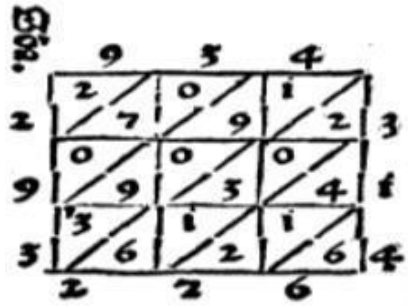


Como exposto acima, a soma dos algarismos da terceira diagonal (que deu 12), ultrapassou uma dezena. Assim, ao se efetuar a adição dos algarismos da quarta diagonal, precisamos adicionar o valor a ser transportado para a outra ordem.



Finalmente teremos condições de entender a figura que se segue:

Figura 19: Multiplicação gelosia, retirada da Aritmética, publicada em Treviso (1478)

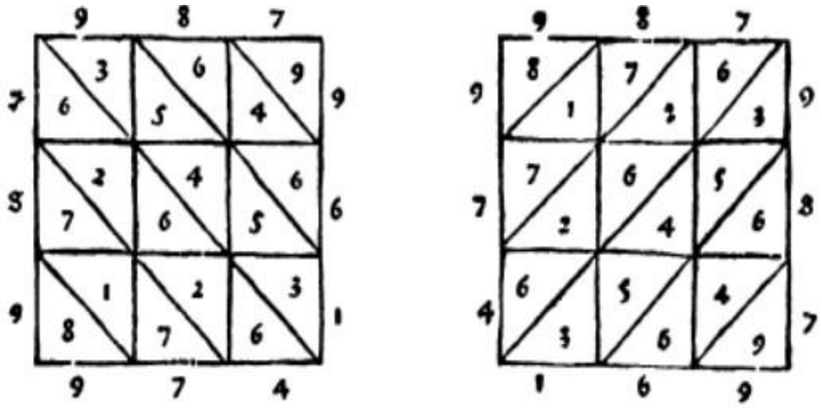


Fonte: Smith (1953, p.114)

Esse dispositivo reunia ideias de outros métodos, porém com uma utilização mais apropriada até para os dias atuais. Este método, também era chamado de células pelos árabes.

Merece destaque o fato de que, em um manuscrito de 1430 que circulou em Florença e é de autoria desconhecida como "multiplicar de modo quadrado":

Figura 20: Método gelosia



Fonte: Smith (1953, p.116)

Este método antigo é um bom método para ser aplicado nas aulas, pois é uma atividade diferenciada, porém por ausência de informações sobre a história das operações, esse método interessante não é colocado em prática.

O próximo método a ser apresentado, que foi popular na época, era chamado pelos italianos de "modo de Scapezzo" e foi encontrado na obra de Tartaglia, de 1556. Caracterizava-se pela substituição de um dos fatores, por uma adição de parcelas diferentes cuja soma lhe fosse igual, com o que se criava produtos parciais, obtidos aplicando-se a propriedade distributiva. Exemplo: seja efetuar 26 X 67.

$$\begin{aligned} 26 \times 67 &= (3 + 4 + 5 + 6 + 8) \times 67 \\ &= 201 + 268 + 335 + 402 + 536 = 1742 \end{aligned}$$

1º passo: decompor de maneira sucessiva até que a soma das sucessos dêem o primeiro fator;

2º passo: multiplicar cada número da decomposição por 67;

3º passo: adicionar os resultados obtidos.

3 x 67 = 201

4 x 67 = 268

5 x 67 = 335

6 x 67 = 4028 x 67 = 536

Somando os resultados encontraremos 201 + 268 + 335 + 402 + 536 = 1742

Em muitos livros do século XVI foi encontrado um artifício para se determinar o resultado da multiplicação de dois fatores, de um dígito, maiores do que 5. Usavam o método complementar. Por meio desse recurso não era necessário se usar a tabela de multiplicações para além de 5 x 10. Chamavam de método curto da multiplicação.

Vamos ilustrar esse recurso através de um exemplo: queremos saber quanto é 7 X 8. Considerando que complementar é a quantidade que falta para se chegar a 10, vejamos quais são os complementares desses dois fatores: 10 - 7 = 3 e 10 – 8 = 2. Então:

$$7 \rightarrow 3$$
$$8 \rightarrow 2$$

O produto entre esses complementares vai corresponder à quantidade de unidades do produto de 7 X 8.

$$7 \rightarrow 3$$
$$8 \rightarrow 2$$

$$7 \text{ X } 8 = \boxed{}\,\underbrace{\boxed{6}}_{3 \text{ X } 2}$$

Quanto à quantidade de dezenas desse resultado, será obtido pela diferença entre os fatores e os respectivos complementares do outro fator:

$$7 \text{ X } 8 = \underbrace{\boxed{5}}_{7-2=8-3}\,\boxed{6}$$

Cinquenta e seis é o produto.

A multiplicação feita pelo método chamado complementar, não é usada nas escolas devido ao distanciamento da aritmética para os alunos da educação básica.

Atividade:

20) Faremos as multiplicações usando o método complementar, apresentado acima:

a) 5 x 4 = ?

b) 6 x 2 = ?

c) 8 x 4 = ?

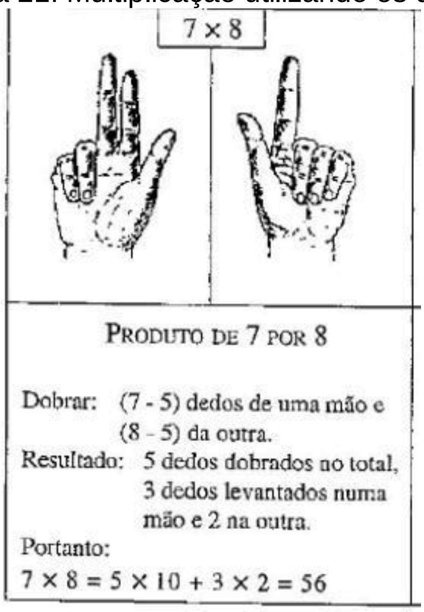
Essa maneira era comumente utilizada em conexão com os dedos das mãos.

Como calcular produtos com os dedos?

Exemplo: Como faziam para obter, por exemplo, 7 x 8 utilizando os dedos das mãos?

Numas das mãos, abaixamos tantos dedos quantas unidades o 7 passa de 5. Portanto abaixamos 2 dedos. Na outra mão, abaixamos tantos dedos quantas unidades o 8 passa de 5; portanto abaixamos 3 dedos.

Figura 21: Multiplicação utilizando os dedos



Fonte: Ifrah (1997, p.119)

Somamos o número de dedos abaixados e exprimimos esse total como se fossem em dezenas. No nosso caso temos 2 + 3 = 5, logo 5 dezenas, isto é, 50 unidades. A seguir multiplicamos os números de dedos levantados: 3 x 2 = 6 unidades. Para obter o resultado final, somamos os valores encontrados: 50 + 6 = 56. De fato: 7 x 8 = 56

Embora, para nós, este procedimento possa não ser prático, ele é, sem dúvida, curioso, sendo utilizado até hoje em certas cidades no interior de alguns países da Europa. O melhor é que, quando o apresentamos aos nossos alunos, eles gostam da brincadeira.

Apresentaremos a tabela medieval sendo uma forma quadrada que foi usada por escritores no século XVI, conhecida como Tabela ou Tábua Pitagórica. “Mesmo que alguns afirmem que Pitágoras foi o primeiro autor, pois esta ideia é equivocada tendo em vista a realização de trabalhos de outros escritores”. (SMITH, 1953, p.124)

Figura 20: Tabela Pitagórica

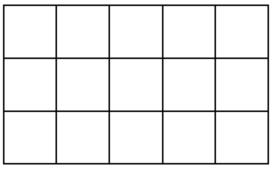
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Smith (1953, p.125)

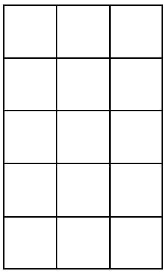
É necessário que o nosso aluno compreenda que a ordem dos fatores não altera o produto, porém ao se efetuar por exemplo as multiplicações 3 X 5 e 5 X 3 conceitualmente não é “a mesma coisa”.

Podemos exemplificar o que escrevemos acima, representando numérica e geometricamente.

3 x 5 = 5 + 5 + 5 = 15

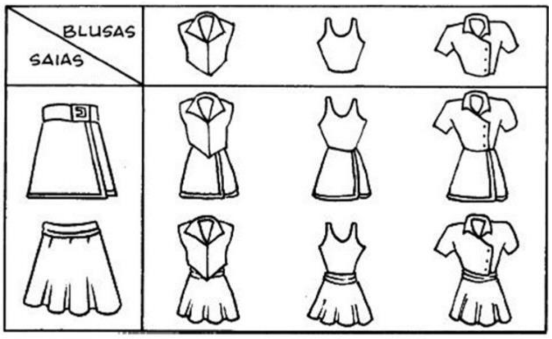


5 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =15



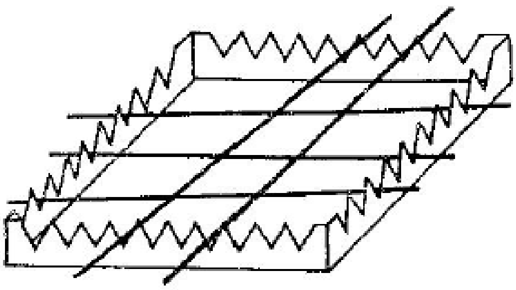
Atividades

21) Há várias maneiras de Fernanda se vestir. De quantas maneiras essa menina poderá usar as roupas abaixo, vestindo uma blusa e uma saia de cada vez?



Fonte: http://images.slideplayer.com.br/10/2872062/slides/slide_14.jpg

22) Utilizando as varetas podemos resolver a multiplicações, contando os cruzamentos das varetas. (Essa atividade pode ser feita sem a caixa, tendo apenas as varetas que podem ser de bambu ou do jogo pega-varetas.)



Como seria a demonstração utilizando as varetas das multiplicações abaixo:

a) 3 X 3 =

b) 6 X 2 =

c) 3 X 8 =

d) 4 X 5 =

23) Vamos multiplicar utilizando o método egípcio da duplicação:

a) 30 x 13 =

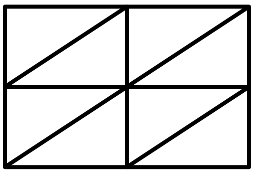
b) 23 x 12=

c) 15 x 13 =

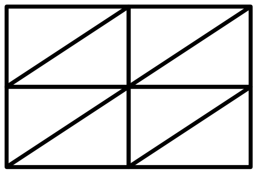
d) 12 x 16 =

24) Vamos calcular as multiplicações utilizando o método gelosia.

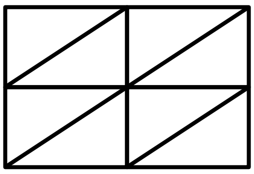
a) 30 x 13 =



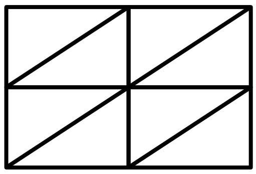
b) 23 x 12 =



b) c) 15 x 13 =



d) 12 x 16 =

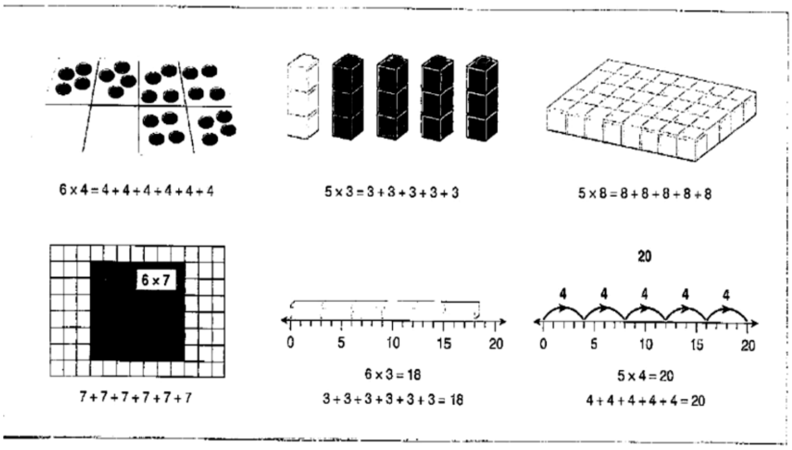


Em D'Augustine há uma listagem com algumas sugestões de como ensinar os fatos básicos da multiplicação. São sugestões interessantes que não podemos deixar de observar e trabalhar com nossos alunos.

PROBLEMA	MÉTODO	SOLUÇÃO
$2 \times 3 = \square$	Usar os elementos do conjunto em diferentes disposições:	$2 \times 3 = 6$
$3 \times 2 = \square$	Usar conjuntos:	$3 \times 2 = 6$
$2 \times 4 = \square$	Usar a linha numérica: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	$2 \times 4 = 8$
$7 \times 5 = \square$	Usar a propriedade comutativa: se $5 \times 7 = 35$	$7 \times 5 = 35$
$8 \times 9 = \square$	Usar a propriedade distributiva: $8 \times (4 + 5) = (8 \times 4) + (8 \times 5) = 32 + 40$	$8 \times 9 = 72$
$7 \times 1 = \square$	Usar a propriedade de identidade: se $n \times 1 = n$,	$7 \times 1 = 7$
$4 \times 2 = \square$	Usar o produto cruzado:	$4 \times 2 = 8$
$9 \times 5 = \square$	Multiplicar em seqüência: $9 \times 1 = 9$; $9 \times 2 = 18$; $9 \times 3 = 27$; $9 \times 4 = 36$	$9 \times 5 = 45$
$9 \times 7 = \square$	Usar generalizações: se $(n - 1) \times (n + 1) = n^2 - 1$, $8 \times 8 = 64$; logo,	$9 \times 7 = 63$
$3 \times 5 = \square$	Usar adições repetidas: $5 + 5 + 5 = 15$	$3 \times 5 = 15$

(D'AUGUSTINE, 1976, p.107)

Também temos representações sobre a multiplicação, citado por Van de Walle (2009, p.181)



Vamos agora representar passo a passo a multiplicação de números que possuam só a ordem das unidades e por um representado por dois algarismos.

7 x 15

1º passo	7 x (10 + 5)
2º passo	(7 x 10) + (7 x 5)
3º passo	70 + 35
4º passo	70 + (30 + 5)
5º passo	(70 + 30) + 5
6º passo	100 + 5
7º passo	105

Caso queira terminar no quarto passo não teria nenhuma objeção.

3.4. DIVISÃO

Dividir significa partilhar quantidades em partes iguais.

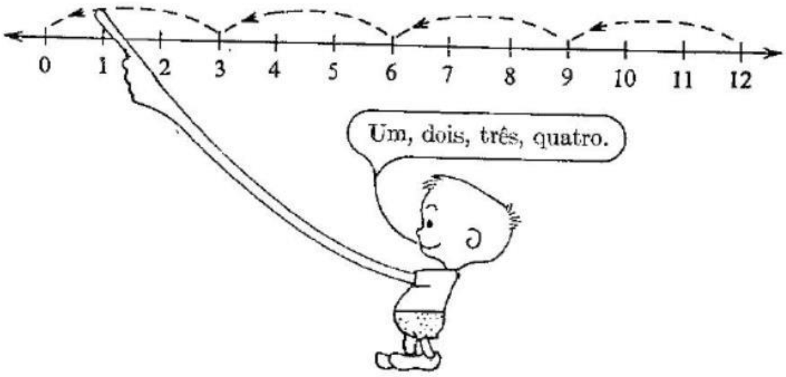
É considerada a quarta operação fundamental, também conhecida como operação inversa da multiplicação, dividir significa partilhar quantidades e valores. Pacioli (1494) falava sobre a operação divisão: “[...] se um homem pode dividir bem, todo o resto é fácil, tudo o mais a envolve”. (SMITH, 1953, p.132).

A definição muito utilizada nas obras de Maximus Planudes (c. 1340) e na Aritmética, de Treviso (1478), era a de que essa operação consistia em encontrar a quantidade de vezes que o divisor estava contido no dividendo. (SMITH, p.129, 1953).

Uma outra definição é a que se baseia em proporção, ao se constatar que o resultado é um número que tenha com a unidade a mesma proporção que o dividendo tem para o divisor.

Os professores do ensino fundamental I têm tendência a dar maior importância à notação, pois ela permite ao aluno uma leitura natural.

Na divisão de 12 por 3 temos como resultado o 4, como podemos verificar na ilustração de D’Augustine (1976, p.125)



Logo, o 12 é o dividendo, o 3 o divisor, o 4 é o quociente e 0 é o resto.

Sabemos que a divisão é o inverso da multiplicação, então como poderíamos fazer a prova real da divisão?

$12 \div 3 = 4$ e resto 0.

D = (d x q) + r

12 = (3 x 4) + 0

12 = 12.

Observação muito importante é sabermos que o maior resto será a quantidade do divisor menos 1 unidade: (d – 1).

A mais antiga forma de divisão utilizada pelos egípcios era o processo de duplicação e mediação. Exemplo: Seja dividir 109 por 8. Pela tabela de duplicação temos:

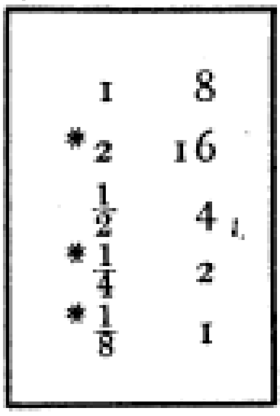
1	8
2	16
4	32
8	64
16	128

Como 128 (5ª linha) é maior do que 109, vamos aproveitar o resultado 64 (da 4ª linha), o que vai nos dar um quociente parcial de 8 (quantidade de duplicações correspondente, nessa 4ª linha) e o sobra para que se continue a divisão é 109 – 64 = 45. Precisaremos continuar, até se obter uma quantidade inteira não mais divisível. Assim, voltemos à tabela de duplicações: menor do que o 45 temos a duplicação 32 (3ª linha), cujo nº de duplicações é igual a 4, que é o nosso segundo quociente parcial. Então, até esse momento temos como quociente 8 + 4, mas ainda há um resto, pois 45 – 32 = 13. E novamente temos que 13 é maior do que 8: assim temos na primeira linha, na esquerda o 1 (que é o nosso novo quociente parcial) e o resto será 13 – 8 = 5. Finalmente, por meio dessa tabela de duplicação, encontramos que o resultado de 109 ÷ 8 é igual a 8 + 4 + 1 e o resto é 5, logo $109 \div 8 = 13\frac{5}{8}$.

Vejamos outro exemplo: Seja dividir 19 por 8. Temos 2 x 8 = 16, $\frac{1}{2}$ de 8 = 4, e assim por diante, até se obter uma quantidade inteira não mais divisível.

Para sabermos o resultado dessa divisão, teremos que selecionar os números na coluna da direita, que têm por soma 19 (16 + 2 + 1). O quociente é, portanto, $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, que estão marcados por asteriscos, na coluna da esquerda da figura abaixo. (SMITH, 1953, p.132).

Figura 21: Forma de divisão egípcia, por meio da mediação



Fonte: Smith (1953, p.132)

Antes da era cristã não sabemos ao certo como romanos e gregos realizaram a operação de divisão, contudo, um processo descrito no século quatro por Theon de Alexandria (c. 390), sendo usado o sistema de numeração grega e as frações sexagesimais, caso citado por Francesco (1689), no caso $7 \div 3 = 2$, sendo utilizado o número misto $2\frac{1}{3}$.

O método mais simples, no entanto, foi o que nós chamamos em inglês de *short division* (divisão curta), que é baseada em reconhecer produtos nas colunas da multiplicação. O método ilustrado em Treviso (1478), que representa, $7624 \div 2 = 3812$. (SMITH, 1953, p.133).

Figura 22: O Método da divisão ilustrado
na Aritmética, publicada em Treviso (1478)

Fonte: Smith (1953, p.133)

Em publicação de Gerbert, do ano 980, encontramos um método para a divisão pelo processo longo. Abaixo mostraremos como Gerbert calculava a divisão 900 ÷ 8. De acordo com a descrição que consta em Smith (1953, p. 134), o processo consistia em dividir 900 por 10− 2, em que 2 era o complemento do divisor. Vejamos a figura que se segue:

Figura 23: Método de Gerbert (980), para a divisão

$$
\begin{array}{l}
10-2)900(90+18+3+1+\tfrac{1}{2}=112\tfrac{1}{2} \\
\qquad\quad \underline{900-180} \\
\qquad\qquad\quad 180 \\
\qquad\qquad\quad \underline{180-36} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 36 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{30-6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; 6+6=12 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{10-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2+2=4,\ \tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Fonte: Smith (1953, p.134)

Pelo algoritmo utilizado na figura anterior, é possível observarmos que o divisor 8 foi substituído por 10 – 2, a partir do qual obtinha-se os resultados parciais.

O método de Gerbert foi sendo adaptado por outros autores e pode ser visto em um documento do século XII, que misturava numerais romanos e hindus, sem o zero. (SMITH, 1953, p. 134/ 135)

Figura 23: Combinação de algarismos romanos e hindus, sem o zero (no século XII)

	C	X	I	
[10 − 8]			2	Differentia
			8	Divisor
	~~9~~			Div[dus]
[2 × 90]	~~1~~	8		
[2 × 10]		2		
[80 + 20]	~~1~~			
[2 × 10]		~~2~~		
[2 × 2]			4	
		1		Denominaciones
		1		
		9	2	
[Quotient][1]	1	1	2	

Fonte: Smith (1953, p.135)

Outro método utilizado no final da Idade Média, conhecido como “per repiego”, foi o que usava o desdobramento do divisor em fatores, por isso ser conhecida por divisão em fatores. Exemplo: A divisão 216 ÷ 24 pode ser transformada em 216 ÷ 8 ÷ 3, isto é, divide-se 216 por 8 e, em seguida, divide-se o quociente por 3. Como citado em Smith (1953, p. 136), em Pacioli (1494) há um exemplo desse artifício de cálculo da divisão: ele estava calculando 9.876 ÷ 48. "Primeiro ele dividiu 9.876 por 6, obtendo 1.646 como resultado. Então dividiu 1646 por "o outro número do desdobramento" e obteve $205\frac{6}{8}$ ou $205\frac{3}{4}$ ". Smith afirma que não é comum se ver esse método ser ensinado nas escolas.

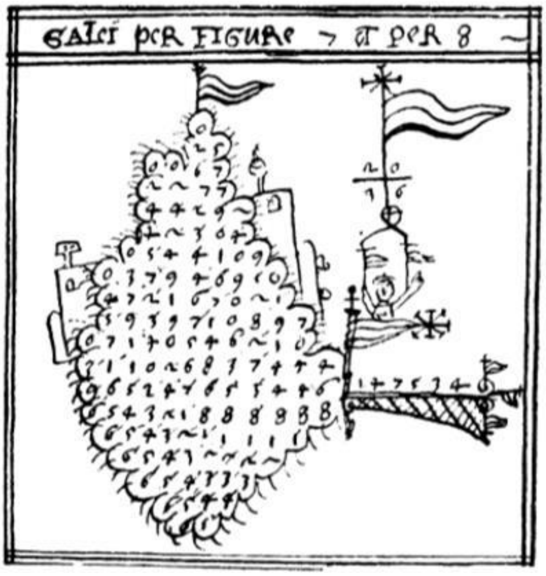
Vários outros métodos foram sendo utilizados para se efetuar divisões ao longo do tempo. Alguns até mesmo mais complicados. Todo esse processo de idas e vindas demonstra uma grande dificuldade para a realização dessa operação pela humanidade e que, de certa forma, se reproduz em nossas salas de aula.

O método galera (ou método galeão[13]) tem origem hindu e foi bastante utilizado em várias obras.

> [...] é muito difícil de executar em papel, com tinta, mas que, naturalmente, presta-se ao uso do ábaco de areia. A necessidade para apagar certos números e escrever outros em seus lugares dá origem a muita confusão quando a tinta é usada, mas na mesa de areia é fácil de apagar números com os dedos e escrever outros em seus lugares. (SMITH, 1953, p.137)

Embora esse método, à primeira vista, pareça ser difícil, na verdade utiliza menos registros numéricos do que o nosso atual algoritmo da divisão.

Figura 24: Método galera de divisão, século XVI

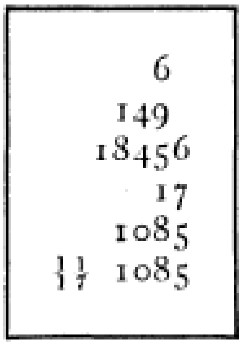


Divisão em galeão, século dezesseis. De um manuscrito de um monge veneziano[14].
O título da obra é Opus Arithmetica D. Honorati veneti monchi coenobiy s. Lauretig.
Da biblioteca Pimpton.
Fonte: Smith (1953, p.138); Boyer (1996, p. 149)

[13] No livro de Boyer 1996, esse método é chamado de método galeão.
[14] Smith (1953, p. 138) afirma que esse manuscrito data de 1575.

Utilizando o ábaco de areia, Fibonacci (1202) também mostrou o caso da divisão 18.456 ÷ 17.

Figura 25: Divisão pelo método galera,
em obra de Fibonacci, de 1202

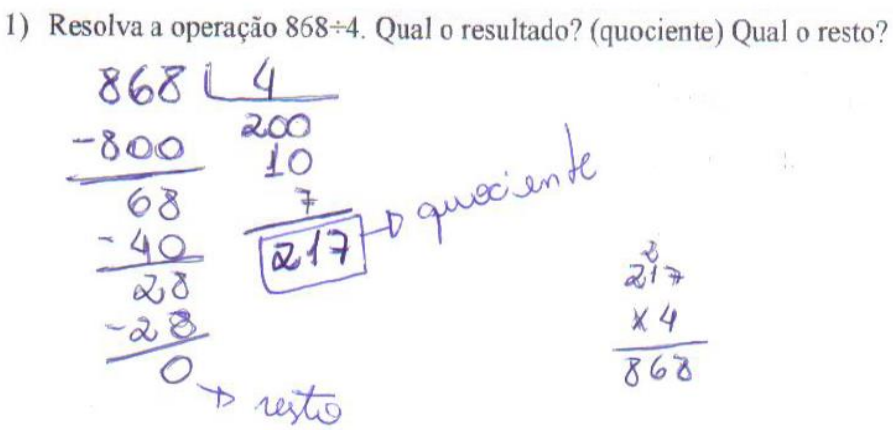


Fonte: Smith (1953, p. 137)

O método de dividir é um dos mais complexos ensinados nas escolas, uma de suas razões é a falta de conhecimento sobre a como iniciou tal operação.

Resolver matemática pela matemática sem saber a História da Matemática pode levar alunos do ensino fundamental e médio a terem dificuldades em aprender aritmética. Utilizando a calculadora não como uma tecnologia da educação e sim como um instrumento de apoio contínuo para qualquer operação por mais simples que seja.

Método americano, representado pela figura do trabalho de Nhoncance (2006, p.35)



Atividades:

25) Resolva as divisões utilizando o método egípcio:

a) 23 ÷ 8 =

$b)$27 ÷ 12 =

26) Resolva as divisões utilizando o método americano:

a) $220 \div 5 =$

b) $270 \div 15 =$

27) Utilizando o “chegando mais perto”, citado por Van de Walle (2009, p.207)

Chegando mais perto

Para praticar “fatos próximos”, experimente esse exercício. Como ilustrado, a ideia é encontrar o fator de um algarismo que torne o produto o mais próximo possível, sem ser exato, de um alvo numérico. Ajude as crianças a desenvolver o processo de usar fatos multiplicativos como foi descrito. Essa atividade pode ser usada com toda a turma preparando uma lista para o retroprojetor ou uma atividade em uma ficha de trabalho.

Encontre o fator que mais se aproxima do alvo, sem ultrapassá-lo.

4 × $\boxed{}$ → 23, $\boxed{}$ sobre .

7 × $\boxed{}$ → 52, $\boxed{}$ sobra.

6 × $\boxed{}$ → 27, $\boxed{}$ sobra.

9 × $\boxed{}$ → 60, $\boxed{}$ sobra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Para alcançar nosso objetivo, propusemos esse material com atividades sobre os sistemas de numeração e apresentação de outros métodos utilizados por outras culturas para efetuarem as operações fundamentais abordados nos anos iniciais do ensino fundamental I.

Esse tutorial, que utiliza informações e atividades, tem como principal estratégia abrir possibilidades de estudos aos docentes, sem usar exercícios dos livros didáticos. Propiciamos oportunidades para que refletissem sobre métodos utilizados atualmente e os entendem como fruto de uma elaboração, através da história da matemática.

A partir das atividades desenvolvidas em nossa pesquisa, nos foi possível perceber o quanto uma proposta um pouco diferenciada do usual pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Ensinar essa disciplina utilizando a história da matemática contribui como fonte de estudos para os docentes, aumentando o interesse pelo assunto, auxiliando o professor a ser um mediador nesse processo que integra sala de aula e informação.

A grande dificuldade enfrentada pelos docentes é a falta de interesse pela disciplina, tanto por parte dos alunos, quanto por parte de alguns dos colegas professores, restando apenas aos especialistas gostarem da disciplina.

Com a utilização das mídias educacionais e jogos interativos, a história da matemática também poderia entrar como mais uma ferramenta para aproximar os alunos que preferem as disciplinas ligadas à área de humanas. Isso os ajuda a compreender a matemática de forma mais humanizada, como fruto de um processo de construção das civilizações.

REFERÊNCIAS:

AUGUSTINE, Charles H, d'. **Métodos Modernos para o ensino da matemática**: tradução de Maria Lúcia F.E.Peres. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

BRANCO, Eguimara Selena, **O Sistema de numeração dos Maias.** Disponível em:<portaldoprofessor.mec.gov/fichaTecnicaAula.html?aula=19543>. Acesso em: 15 out. 2015

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental** – Brasília: MEC / SEF, 1998. (5ª a 8ª séries)

CARAÇA, Bento de J. **Conceitos fundamentais da matemática**, Lisboa: Tipografia Matemática, 1952

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática** – Elo entre as tradições e a modernidade. 3a. edição. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H.Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda, **Novo Dicionário da Língua Portuguesa** – 2ª Edição.- São Paulo: Editora Nova Fronteira, 2009.

GULLBERG, Jan. **Mathematics, from the birth of numbers**. Nova Iorque: W.W. Norton & Company,1997.

GUNDLACH, Bernard H., Bernard H. Gundlach. **Números e Numerais**. Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; volume 1. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual,1992.

HOGBEN, Lancelot, **Maravilhas da Matemática** – Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos, tradução Paulo Moreira da Silva – 4ª Edição – Porto Alegre: Editora Globo, 1956.

IFRAH, Georges**. História Universal dos Algarismos**, volume I: tradução de Alberto Muñoz e Ane Beatriz Katinsky – Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

IMENES, Luiz Marcio, **A origem da numeração indo – arábica.** Disponível em: www.iejusa.com.br/cienciaetecnologia/matematica. php>. Acesso em: 18 ago.2014.

MAINZER, K. Natural Numbers, Integers, and Rational Numbers. In Ewing. J.H. **Numbers.** P..9-26. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1990. (tradução inglesa do original de 1988).

NHONCANCE, Leandro.**O Algoritmo da Divisão:** o método americano da divisão e os resultados obtidos com os alunos da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio**.** PUC-SP. São Paulo, 2006. Trabalho de conclusão da Especialização em Educação Matemática. Disponível em

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/monografia_leandro_nhoncance.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2014.

O'CONNOR. J.J. and E.F.Robertson. **Babylonian numerals.** Disponível em: <ww-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Babylonian_numerals.html>. Acesso em: 24 jun. 2014

OMNIA, Rede, **Alexandria.** Disponível em:<historiadomundo.uol.com.br/idade-antiga/alexandria.htm>. Acesso em: 20 set.2015

s/a, **Sistemas de numeração.** Disponível em:<www.escolares.net/br/matematica/sistemas-de-numeracao/>. Acesso em: 18 ago. 2014.

s/a, **Símbolos indo–arábicos.** Disponível em:<www.escolabritanica.com.br>. Acesso em: 17 fev. 2016.

s/a, **Fibonacci.** Disponível em:<www.somatematica.com.br/biograf.fibo.php>. Acesso em: 17 fev. 2016.

SILVA, Alexandre Oliveira. **A evolução dos algoritmos das operações aritméticas ao longo da história.** Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra, 2016. Dissertação de mestrado. (no prelo)

SILVEIRA, J.F.P. da, **O Sistema de numeração romano. Qual deles?** Disponível em:<www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2e.htm>l. Acesso em: 17 fev.2016

SMITH, D.E., **History of Mathematics**, volume II, Special Topics of Elementary Mathematics – Nova Iorque: Dover Publications, 1953.

Gabarito das questões

Página 6

1) SIM

Página 7

2) NÃO
3) 2
4) RESPOSTA PESSOAL

Página 9

5)

a) ◀ ▼ ▼ ▼
▼ ▼ ▼ ▼ ▼

b) ◀ ◀ ▼ ▼ ▼ □

c) ◀ ◀ ▼ ▼ □

◀ ◀ ▼ ▼ □

Página 10

6) < IIIIIIIII

7)

a) 61

b) 3.784

c) 10.920

Página 11

8)

Página 12

9)

a)17

b)184

c) 625

Página 15

10)

a)XVII

b)CLXVIII

c) DCCCLXVII

d) MCMLXXIV

Página 19

11)

a) 49

b) 485

c) 9749

Página 20

12)

c) 

d) 

e) 

Página 25

13) 17

14)

a)82

b)131

c)502

d)3225

15) 455

Página 30

16) 162

17) 50

18)11

Página 19

31)

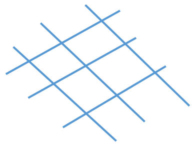
Página 40

19) 18
20)

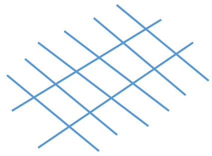
Página 42

21) 6

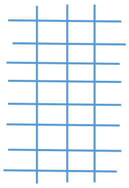
22 a) 3 X 3 = 9
9 encontros



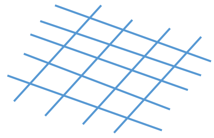
b) 6 X2 =12
12 encontros



c) 3 X 8 = 24
24 encontros



d) 4 X 5 = 20
20 encontros



Página 43

23)

a)30 x 13

30	1
60	2
120	4
240	8

Os números da segunda coluna que somam 13 = 8 + 4 + 1 correspondem a 240 + 120 + 30 = 390.

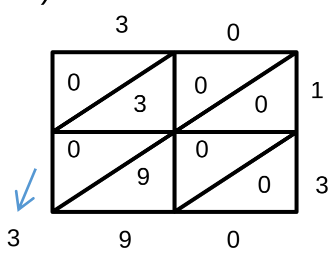
b) 23 x 12

23	1
46	2
92	4
184	8

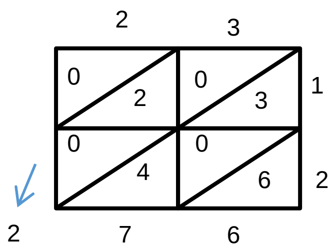
Os números da segunda coluna que somam 12 = 8 + 4 correspondem a 184 + 92 = 276

24)

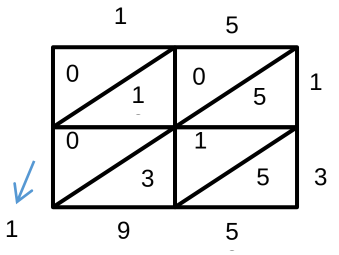
a) 30 x 13 =



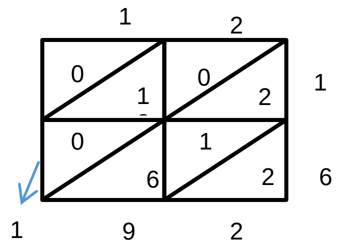
b) 23 x 12 =



b) c) 15 x 13 =



d) 12 x 16 =



Página 50

25)

a) $23 \div 8 =$

1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

$$23 \div 8 = (16 + 4 + 2 + 1) \div 8 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

b) $27 \div 12 =$

1	12
2	24
$\frac{1}{2}$	6
$\frac{1}{4}$	3

$$27 \div 12 = (24 + 3) \div 12 = 2 + \frac{1}{4}$$

Página 51

26)

a) $220 \div 5$ =24

$$\begin{array}{r|l} 220 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 200 & 20 \\ \hline 20 & \ \ 4 \\ \cline{2-2} -\ \ 20 & 24 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b) $270 \div 15 =$

$$
\begin{array}{r|l}
270 & 15 \\ \cline{2-2}
-\ 150 & 10 \\ \cline{1-1}
120 & 8 \\ \cline{2-2}
-\ 120 & 28 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

27)

a) 4 X 6 → 23, sobra 1

b) 7 X 7 → 52, sobram 3

c) 6 X 4 → 27, sobram 3

d) 9 X 6 → 60, sobram 6