Projet Analyse Numérique
INFO-F-205, 2022

Mouvement d'un corps sur une surface ondulée

Nom Prénom — Matricule

13 février 2026

Introduction

Ce rapport présente la résolution numérique du mouvement d'un corps sur une surface ondulée $f(x)$, en exploitant le principe de conservation de l'énergie mécanique. La méthode d'Euler explicite est utilisée pour résoudre l'EDO résultante. Le profil de la route est défini par :

$$f(x) = \frac{\cos(3\pi x^2) \cdot (1 - x - x^2)}{10} \tag{1}$$

avec sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{\cos(3\pi x^2) \cdot (-1 - 2x) - \sin(3\pi x^2) \cdot (6\pi x) \cdot (1 - x - x^2)}{10} \tag{2}$$

Ce profil présente des oscillations dont la **fréquence et l'amplitude augmentent** avec $|x|$, ce qui rend la simulation numériquement plus exigeante pour les grandes valeurs de x.

Paramètres utilisés pour toutes les simulations :

Paramètre	Symbole	Valeur
Accélération gravitationnelle	g	9.81 m/s^2
Masse	m	1 kg
Hauteur initiale	y_0	2.0 m
Vitesse initiale	v_0	0.0 m/s
Position initiale	x_0	0.0 m
Pas de temps (par défaut)	h	0.001 s
Durée totale	T	20 s

1 Question 1 : Complétion de la méthode d'Euler explicite

1.1 Principe

On résout l'EDO d'ordre 1 décrivant le mouvement d'un corps sur la surface ondulée $f(x)$, basée sur la conservation de l'énergie mécanique :

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2g[y_0 - f(x(t))] + v_0^2}{1 + [f'(x(t))]^2}} \tag{3}$$

Cette équation ne se prononce pas sur le signe de $\dot{x}(t)$, c'est-à-dire sur la direction du mouvement. Pour connaître le signe, on examine chaque fois que $|\dot{x}(t)|$ passe par zéro : à ce moment-là, on sait que le mouvement reprend dans la direction descendante de $f(x)$, soit $\text{sign}(\dot{x}(t)) = -\text{sign}(f'(x(t)))$.

1.2 Implémentation

```
% Calcul de |x'(t)|^2
vxhat2 = (2*g*(y0 - yhatE(step)) + v0^2) / (1 + slopehatE(step)^2);

% Si vxhat2 < 0 : zone interdite -> inverser la direction
if vxhat2 < 0
    direction = -sign(slopehatE(step));
    vxhat2 = 0;
end

% Calcul de |x'(t)|
vxhat = sqrt(vxhat2);

% Pas d'Euler
if vxhat > 0
    % Mouvement normal
    xhatE(step+1) = xhatE(step) + h * direction * vxhat;
else
    % Vitesse nulle : calcul de l'acceleration
    axhat = g * abs(slopehatE(step)) / (1 + slopehatE(step)^2);

    % Direction du mouvement : descendante
    direction = -sign(slopehatE(step));

    % Pas d'Euler avec acceleration
    xhatE(step+1) = xhatE(step) + h^2 * direction * axhat / 2;
end
```

Listing 1 – Complétion de la méthode d'Euler explicite

1.3 Explication

1. On calcule $|\dot{x}(t)|^2$ à partir de la conservation de l'énergie mécanique (Eq. 3).
2. Si $|\dot{x}(t)|^2 < 0$, la méthode numérique entre dans une zone physiquement interdite. On inverse alors la direction du mouvement via :

$$\operatorname{sign}(\dot{x}(t)) = -\operatorname{sign}(f'(x(t))) \tag{4}$$

   et on force $|\dot{x}(t)|^2 = 0$.

3. Si la vitesse est non nulle, on applique le pas d'Euler classique :

$$\hat{x}(t+h) = \hat{x}(t) + h \cdot \operatorname{sign}(\hat{x}'(t)) \cdot |\hat{x}'(t)| \tag{5}$$

4. Si la vitesse est nulle ($\hat{x}'(t) = 0$), il faut prendre en compte l'accélération pour relancer le mouvement :

$$|\ddot{x}(t)| = \frac{g \cdot |f'(\hat{x}(t))|}{1 + [f'(\hat{x}(t))]^2} \tag{6}$$

   Le pas d'Euler devient alors :

$$\hat{x}(t+h) = \hat{x}(t) + \frac{h^2}{2} \cdot \text{direction} \cdot |\ddot{x}(t)| \tag{7}$$

1.4 Résultats

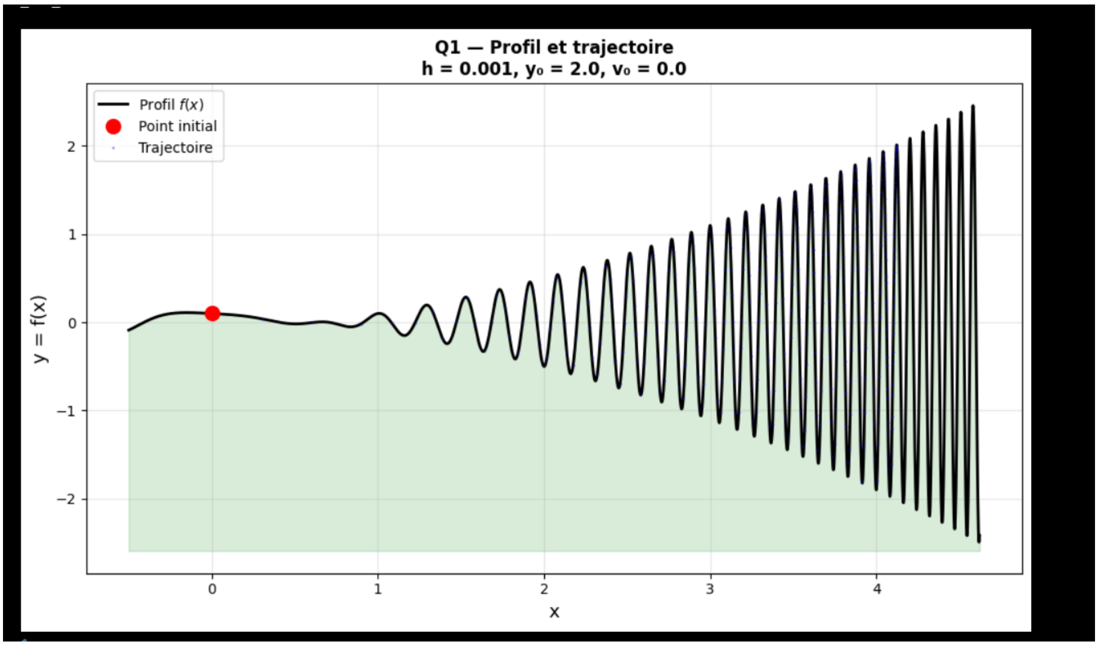

FIGURE 1 – Profil $f(x)$ et trajectoire du corps ($h = 0.001$)

On observe (Figure 1) que le corps part de $x_0 = 0$ (point rouge) et se déplace **vers la droite**. La trajectoire simulée (en bleu) suit parfaitement le profil $f(x)$ (en noir). Le profil présente des oscillations dont la fréquence et l'amplitude augmentent avec x, ce qui traduit la nature du profil $f(x) = \cos(3\pi x^2)\cdot(1-x-x^2)/10$: le terme $3\pi x^2$ dans le cosinus provoque des oscillations de plus en plus rapides, tandis que le facteur $(1 - x - x^2)$ fait croître l'amplitude.

2 Question 2 : Énergie cinétique, potentielle et totale

2.1 Calcul des énergies

Avec $m = 1$ kg, on calcule à chaque pas de temps :

— **Énergie cinétique :**

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}v_x(t)^2 \cdot \left(1 + [f'(x(t))]^2\right) \tag{8}$$

où $v(t) = v_x(t) \cdot \sqrt{1 + [f'(\hat{x}(t))]^2}$ est la norme de la vitesse.

— **Énergie potentielle :**

$$E_{\text{pot}}(t) = mgh(t) = g \cdot (y(x(t)) - h_0) \tag{9}$$

où $h_0 = \min(f(x))$ est la hauteur de référence. Ce choix garantit $E_{\text{pot}} \geq 0$.

— **Énergie totale :**

$$E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \tag{10}$$

2.2 Implémentation

```
m = 1;
h0 = min(yhatE);    % hauteur de reference

for step = 1:nsteps
    % Vitesse v(t)
    vx2 = (2*g*(y0 - yhatE(step)) + v0^2) / (1 + slopehatE(step)^2);
    if vx2 < 0
```

```
        vx2 = 0;
    end
    v2 = vx2 * (1 + slopehatE(step)^2);

    % Energies
    Ecin(step) = 0.5 * m * v2;
    Epot(step) = m * g * (yhatE(step) - h0);
    Etot(step) = Ecin(step) + Epot(step);
end

% Trace des graphiques
figure;
plot(t, Ecin, 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, Epot, 'b', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, Etot, 'k--', 'LineWidth', 2);
legend('E_{cin}', 'E_{pot}', 'E_{tot}');
xlabel('Temps t (s)');
ylabel('Energie (J)');
title('Conservation de l''energie mecanique');
grid on;
```

Listing 2 – Calcul des énergies

2.3 Résultats

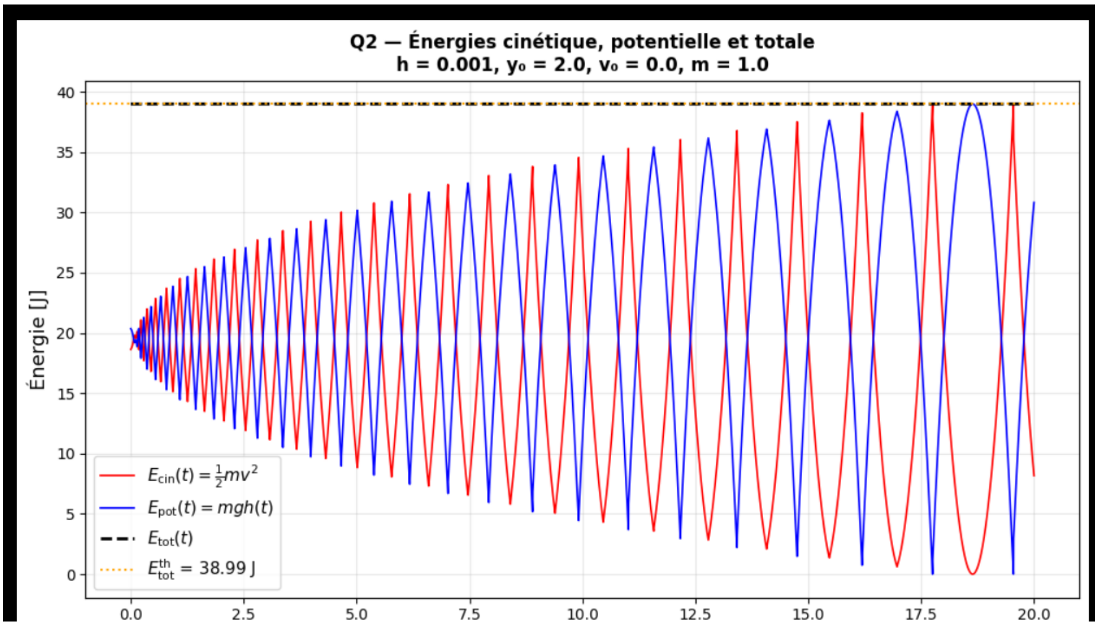

FIGURE 2 – Évolution des énergies cinétique, potentielle et totale ($h = 0.001$)

2.4 Analyse

Constat principal : L'énergie totale $E_{\text{tot}}(t) \approx 38.99$ J reste **constante** au cours du temps (droite horizontale noire/orange). Cela confirme le **principe de conservation de l'énergie mécanique** en l'absence de frottement.

On observe un échange permanent entre E_{cin} et E_{pot} :

— Quand le corps **descend** : $E_{\text{pot}} \downarrow$ et $E_{\text{cin}} \uparrow$

— Quand le corps **monte** : $E_{\text{pot}} \uparrow$ et $E_{\text{cin}} \downarrow$

— Aux sommets : $E_{\text{cin}} \approx 0$ et E_{pot} maximale

Observation sur l'amplitude des oscillations : On constate que l'amplitude des oscillations de E_{cin} et E_{pot} **augmente au cours du temps**. Cela s'explique par la nature du profil $f(x)$: à mesure que le corps avance vers les x plus grands, les vallées deviennent plus profondes et les sommets plus élevés (amplitude croissante de $f(x)$). Le corps descend donc dans des creux de plus en plus profonds (grande E_{cin}, faible E_{pot}) et remonte sur des bosses de plus en plus hautes (faible E_{cin}, grande E_{pot}). Mais leur **somme reste toujours constante**.

Intérêt numérique : Le principe de conservation de l'énergie est très intéressant du point de vue de l'implémentation numérique car il fournit un **invariant** permettant de **vérifier la qualité** de la simulation. Si E_{tot} dérive au cours du temps, cela indique une accumulation d'erreurs numériques. C'est donc un outil de **validation et de diagnostic** de la méthode numérique.

3 Question 3 : Effet de l'augmentation du pas de temps

3.1 Expérience

On multiplie le pas de temps par 100 :

```
stepsize = stepsize * 100;    % h = 0.1 au lieu de 0.001
```

Listing 3 – Augmentation du pas de temps

Tous les autres paramètres restent identiques.

3.2 Résultats — Énergies

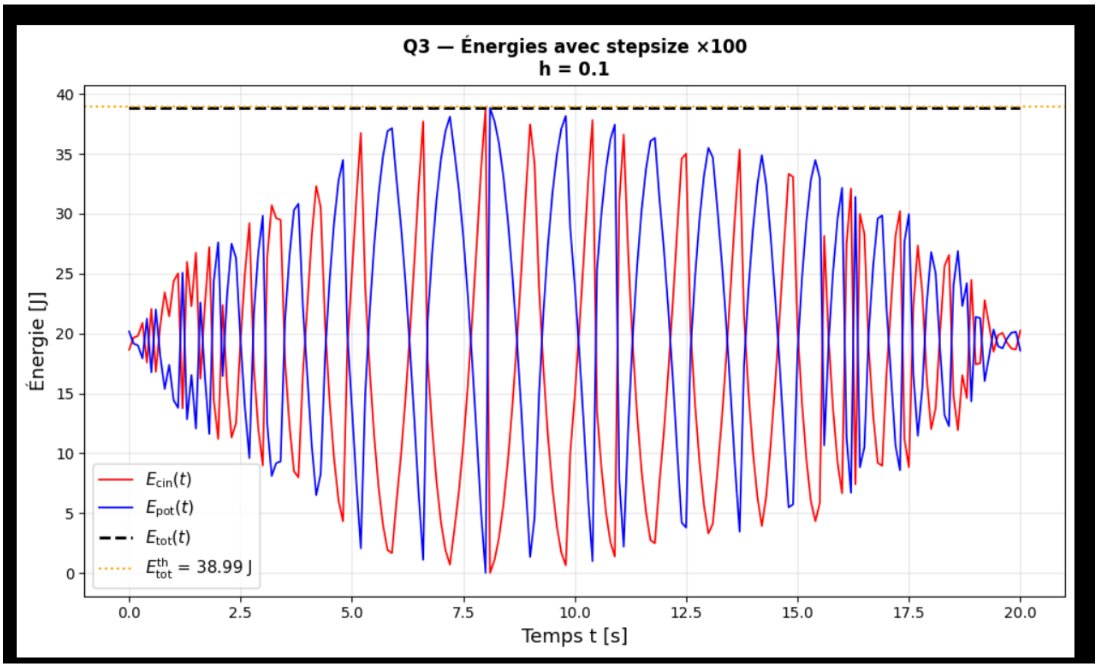

FIGURE 3 – Énergies avec un pas de temps ×100 ($h = 0.1$ s)

Constat sur les énergies : On observe que $E_{\text{tot}}(t)$ reste **quasi constante même avec** $h \times 100$ (≈ 38.99 J). Cela s'explique par le fait que la vitesse est calculée directement à partir de l'équation de conservation de l'énergie :

$$v_x^2 = \frac{2g(y_0 - f(\hat{x}(t))) + v_0^2}{1 + [f'(\hat{x}(t))]^2} \tag{11}$$

Par conséquent, **par construction**, l'énergie est toujours recalculée de manière cohérente à chaque pas, quelle que soit la taille du pas h.

3.3 Résultats — Trajectoires

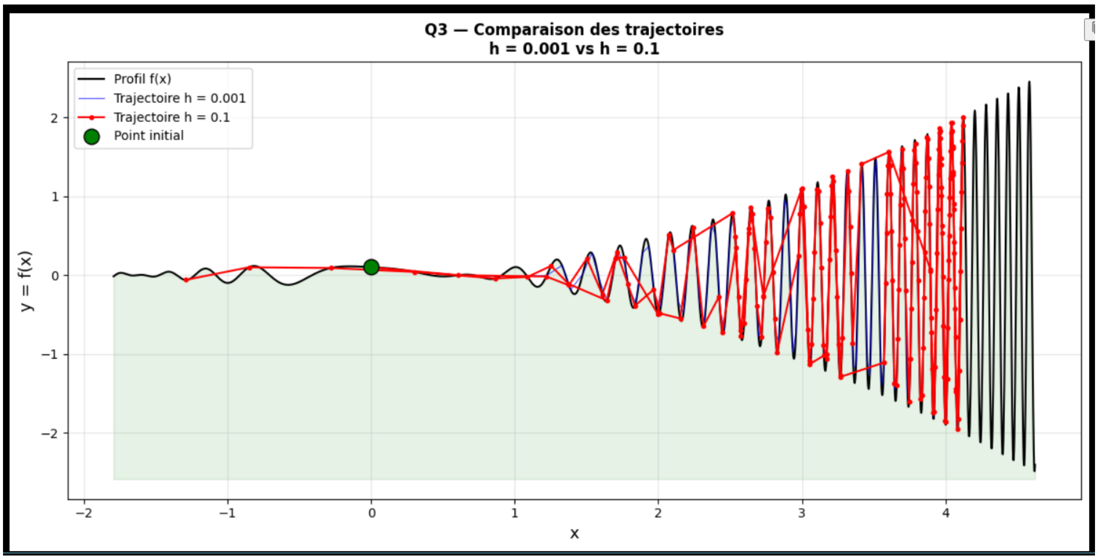

FIGURE 4 – Comparaison des trajectoires : $h = 0.001$ vs $h = 0.1$

Constat sur les trajectoires : La Figure 4 montre clairement que la trajectoire avec $h = 0.1$ (en rouge) **diverge significativement** du profil réel $f(x)$ et de la trajectoire de référence ($h = 0.001$, en bleu).

Plus précisément :

— Pour $x < 1.5$ environ, les deux trajectoires sont proches car le profil varie lentement dans cette zone.

— Pour $x > 1.5$, la trajectoire rouge "saute" au-dessus et en-dessous du profil, ne suivant plus du tout la surface $f(x)$. Le corps semble traverser la surface, ce qui est physiquement incohérent.

— Cela est dû au fait que les oscillations du profil deviennent de plus en plus rapides (fréquence $\propto x$), et le pas $h = 0.1$ est trop grand pour les résoudre correctement.

3.4 Analyse des erreurs

Type d'erreur principal : erreur de troncature (approximation).

— **Erreur de troncature :** C'est l'erreur dominante. La méthode d'Euler explicite est d'ordre 1 : l'erreur locale est en $\mathcal{O}(h^2)$ et l'erreur globale en $\mathcal{O}(h)$. En multipliant h par 100, l'erreur de troncature augmente **considérablement**, car on approxime la dérivée sur un intervalle beaucoup trop large. Avec le profil utilisé, dont la fréquence des oscillations augmente avec x, le pas $h = 0.1$ devient rapidement insuffisant pour capturer les variations rapides de $f(x)$.

— **Pourquoi pas une erreur de génération ?** Les erreurs de génération (arrondi machine) sont liées à la précision finie des nombres flottants. Elles ne changent pas significativement avec le pas de temps.

— **Pourquoi pas (principalement) une erreur de propagation ?** Bien que les erreurs se propagent d'un pas à l'autre, la **source principale** reste l'approximation grossière due au grand pas de temps.

Remarque importante : L'erreur se manifeste dans la **trajectoire** $x(t)$ et non dans l'énergie totale. En effet, E_{tot} reste quasi constante car elle est recalculée à chaque pas via la formule exacte de conservation. Cela signifie que E_{tot} **n'est pas un bon indicateur d'erreur** dans cette implémentation particulière, puisqu'elle est conservée par construction et non par la qualité de la simulation.

Conclusion

Ce projet a permis de mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite pour simuler le mouvement d'un corps sur la surface ondulée $f(x) = \cos(3\pi x^2) \cdot (1 - x - x^2)/10$.

Les principaux résultats sont :

1. **Question 1 :** La méthode d'Euler explicite, complétée avec la gestion des zones interdites ($|\dot{x}|^2 < 0$) et du cas vitesse nulle (relance par accélération), permet de simuler correctement le mouvement du corps sur la surface. Le corps part de $x_0 = 0$ et se déplace vers la droite, suivant fidèlement le profil avec $h = 0.001$.
2. **Question 2 :** L'énergie totale $E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} \approx 38.99$ J reste constante, confirmant la conservation de l'énergie mécanique. Les amplitudes des oscillations de E_{cin} et E_{pot} augmentent au cours du temps car le profil a des oscillations d'amplitude croissante.
3. **Question 3 :** Avec un pas de temps multiplié par 100 ($h = 0.1$), E_{tot} reste quasi constante (car recalculée via la formule exacte de conservation), mais la **trajectoire** $x(t)$ se dégrade fortement à cause de l'erreur de troncature ($\mathcal{O}(h)$). Le corps ne suit plus le profil $f(x)$ pour les grandes valeurs de x où les oscillations sont rapides.