On peut faire plus malin car si $M = I_p$ On a :

$$\|x_i - x_j\| = x_i' x_i - x_i' x_j - x_j' x_i + x_j' x_j$$

Or la matrice ave comme éléments : $\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2$ admet une dépendance en w_{ij}

si on pose $d_{ij} = 1$ on a :

$$\underbrace{\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2}_{= Q_{ij}} = 1 + \underbrace{x_i' x_j + x_j' x_i}_{= 2 w_{ij}.}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ \vdots & & \\ d_{n1}^2 & \cdots & d_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

On va plutot remarquer que :

$$\begin{bmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix} \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{i1}^2 & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{i1}^2 \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{in}^2 & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{\bullet 1}^2 & \cdots & d_{\bullet n}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ d_{\bullet 1}^2 & \cdots & d_{\bullet n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{1i}^2 & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{1i} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ni}^2 & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1\bullet}^2 & \cdots & d_{1\bullet}^2 \\ \vdots & & \\ d_{n\bullet} & \cdots & d_{n\bullet} \end{bmatrix}$$

Enfin :

$$\begin{bmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & & 1/n \end{bmatrix} \mathcal{D} \begin{bmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{\bullet\bullet}^2 & \cdots & d_{\bullet\bullet}^2 \\ \vdots & & \\ d_{\bullet\bullet}^2 & & d_{\bullet\bullet}^2 \end{bmatrix}$$

et donc on peut exprimer W comme suit :

$$W = -\frac{1}{2}\left[\mathcal{D} - \tilde{1}_{n\times n}\mathcal{D} - \mathcal{D}\tilde{1}_{n\times n} + \tilde{1}_{n\times n}\mathcal{D}\tilde{1}_{n\times n}\right]$$

où $\tilde{1}_{n\times n} := \begin{bmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ & \ddots & \vdots \\ 1/n & & 1/n \end{bmatrix}$