Inferencia

2025-04-30

Intro

Para esa clase, y para ensayos aleatorios en general, recomiendo el paper **Using Randomization in Development Economics Research: A Toolkit** *Esther Duflo, Rachel Glennerster and Michael Kremer*

Prueba de Hipótesis Clásica

Prueba de Hipótesis Clásica

Empezamos con una hipótesis sobre β a probar, H0. $\beta = \mu$

- Comunmente, H0: $\beta = 0$.

Elegimos una estadística de prueba.

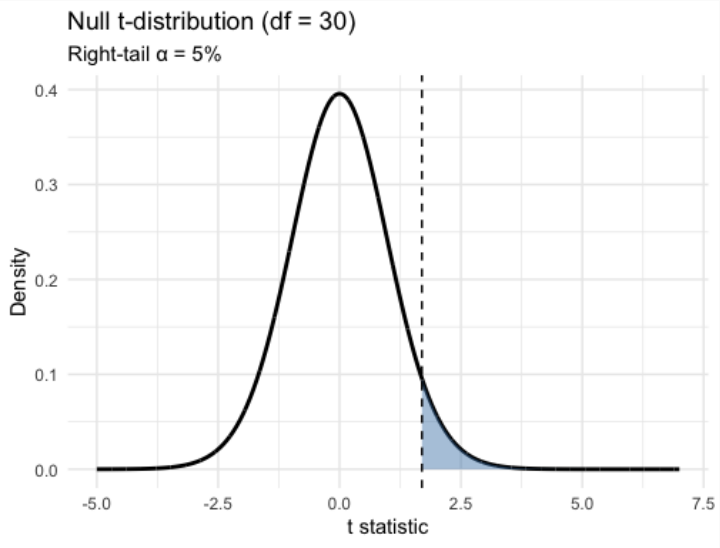
- Por ejemplo: $t = \frac{\hat{\beta} - \mu}{se(\hat{\beta})}$

Y fijamos el nivel de significancia deseado ($\alpha = 5\%$)

Podemos reconstruir la distribucion de probabilidades de una estadística bajo ciertas hipótesis:

- H0 es verdadera (o sea, $\beta = \mu$)
- N es grande (aproximación asintotica)

Prueba de Hipótesis Clásica



Prueba de Hipótesis Clásica

Rechazamos H0 si la estadistica t es muy extrema en comparación con valores más típicos si H0 fuera verdad.

Bajo la hipótesis nula, la probabilidad de rechazar la nula es 5% (o α).

Si cambiamos la eleción de *alpha* de 5% para 10%, que resulta?

- A: Tenemos menos probabilidad de rechazar una H0 falsa
- B: Tenemos más probabilidad de rechazar una H0 verdadera
- C: La potencia de la prueba aumenta
- D: B y C son verdad

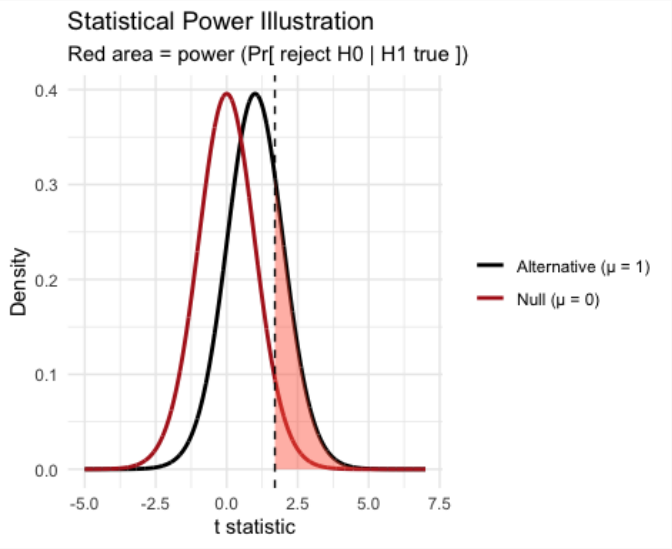
Potencia de Prueba

La **potencia** de una prueba es la probabilidad de rechazar una hipótesis nula que es **falsa**.

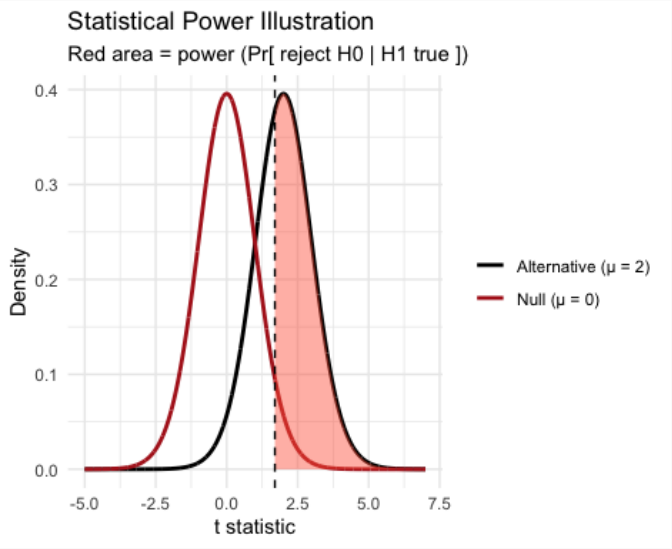
Una buena prueba tiene alta potencia: puede rechazar hipótesis nulas falsas con alta probabilidad.

La potencia depende de cual es el valor real de β, que no sabemos. Portanto, solo podemos calcular bajo la hipótesis de que β tiene un cierto valor.

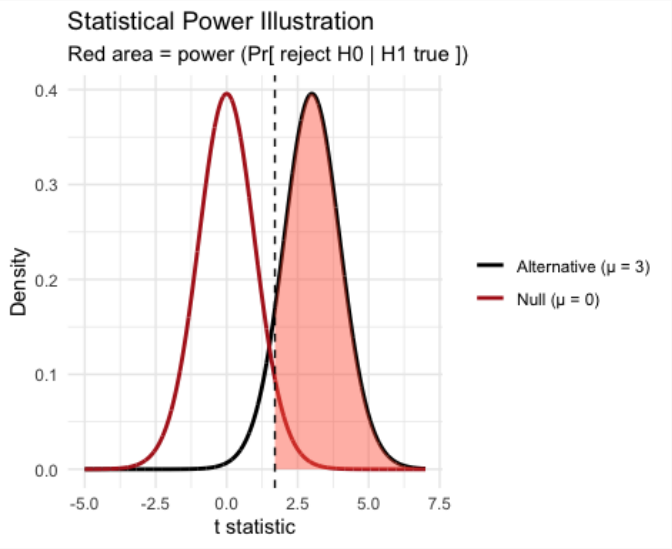
Potencia de Prueba



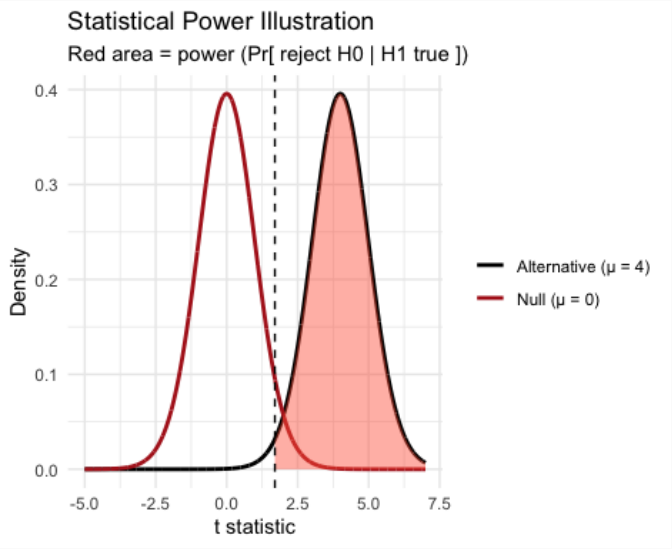
Potencia de Prueba



Potencia de Prueba



Potencia de Prueba



Potencia de Prueba

Podemos calcular la potencia para diferentes valores y exprimirlos como una *curva de potencia*, o sea, la potencia como función del parámetro.

Potencia de Prueba

Cuales son verdad de una curva de potencia $CP(x)$, con H0: $\beta = \mu_0$?

- A) $CP(\mu_0) = \alpha$
- B) $\lim_{x \to \infty} CP(x) = 1$
- C) $CP(x)$ es una función no decresciente de **x**
- D) $CP(x) < 1$ para todo x
- E) Para $x < \mu_0$, $CP(x) < \alpha$

Prueba de Hipótesis en Ensayos Aleatorios

Prueba de Hipótesis en Ensayos Aleatorios

Cuando trabajamos con ensayos aleatorios, podemos utilizar las mismas herramientas de prueba de hipótesis.

Pero, como podemos crear el diseño del ensayo, debemos pensar un poco sobre su potencia.

Vamos pensar en un ensayo aleatorio simple, donde se estima la regresión:

$$Y_i = \alpha + \beta D_i + \varepsilon_i$$

Vamos asumir que una proporción P de la muestra es tratada, y que la varianza de Y_i es σ^2.

En ese caso, la varianza del estimador $\hat{\beta}$ es:

$$\frac{1}{P(1-P)}\frac{\sigma^2}{N}$$

Vamos suponer que queremos una potencia de al menos κ. Normalmente se usa 80%.

Podemos preguntar: ¿qué efectos reales podemos identificar con al menos esse nivel de potencia?

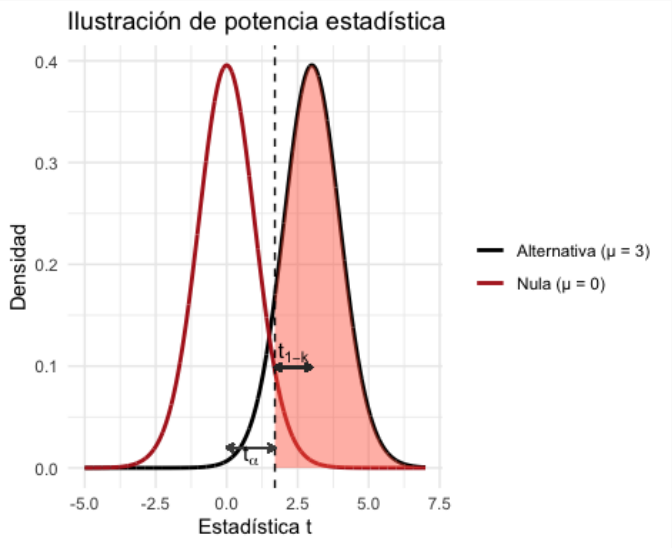


Ilustración de potencia estadística
Densidad
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-5.0
-2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
Estadística t
t_{1-k}
t_{α}
Alternativa (μ = 3)
Nula (μ = 0)

Para obtener potencia κ, el parámetro tiene que ser:

$$\beta > (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) se(\hat{\beta})$$

Para $\kappa = 80\%$, $t_{1-\kappa} = 0.84$.

Por lo tanto, tenemos una probabilidad de 80% de rechezar la nula si el efecto real es de aprox 2.8 veces el SE.

Así podemos definir el **Efecto Minimo Detectable**.

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Supón que tenemos $\alpha = 5\%$, $\kappa = 80\%$, $P = 50\%$, $N = 144$ y $\sigma = 1$. ¿Cual es el EMD?

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

- Existe un tradeoff entre el nivel de significancia y la potencia: si elegimos α más pequeño (t_{α} más grande), tenemos menos probabilidad de rechazar una nula verdadera, pero también no podemos detectar efectos pequeños.

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Si deseamos maximizar la potencia (minimizar EMD), que debemos elegir como la proporción de tratados, P?

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Si deseamos maximizar la potencia (minimizar EMD), que debemos elegir como la proporción de tratados, P?

Si N es fijo, tenemos más potencia si P $= 50\%$.

Pero, supón que existen custos diferentes para un control y un tratamiento. Si queremos maximizar la potencia bajo un presupuesto, tenemos:

$$\min_{N,P} \frac{1}{NP(1-P)}$$

Bajo:

$$Nc_c + PNc_t = B$$

Resulta:

$$\frac{P}{1-P} = \sqrt{\frac{c_c}{c_t}}$$

En la practica, es muy comun utilizar formulas como esa, o similares, para calcular el tamaño minimo de la muestra para se detectar determinado efecto.

Por ejemplo, en investigación en educación, podemos querer investigar algun tipo de intervención con un ensayo aleatorio. Podemos calcular el efecto promédio obtenido en intervenciones similares y computar el N necesario para detectarlo.

En educación particularmente, es comun que los efectos estimados sean pequeños, e necesitan muestras muy grandes para investigarlos.

Investigaciones con baja potencia tienen un problema paradoxal.

Por definición, si el potencia es baja, existe una alta probabilidad de que se encuentre un efecto nulo, mismo si el efecto existe.

Pero, siempre existe un 5% de probabilidad de que vamos encontrar un efecto significativo, por suerte.

Si los errores son grandes, ese 5% se pasa cuando $\hat{\beta}$ es muy grande por variaciones aleatorias. Si se publica los falsos positivos, pero no los resultados nulos, podemos pensar que existe un efecto muy grande, por que nuestras estimativas son poco precisas.

Errores Agrupados

Errores Agrupados

Imaginate que te contratan para avaliar el efecto de una campaña publicitaria de una marca de cerveza.

La empresa hice un experimento aleatorio con 120 individuos, de que la mitad vio la campaña. Su interés es si compraran más de su produto.

Utilizas la formula que discutimos y obtienes que hubo un efecto positivo y es significativo con p-valor 3%.

Después te informan que la aleatorización fue solamente entre dos tiendas: todos los 60 controles estaban en la tienda de Concepción, y los 60 tratados estaban en la tienda de Valparaiso.

¿Es un problema para tu inferencia?

Errores Agrupados

El problema aquí es que la aleatorización no fue entre individuos, pero entre **grupos**.

Y es natural suponer que existe correlación dentro de cada grupo.

Por ejemplo: Puede ser que estaba más caliente en Valparaiso en el dia de la encuesta, o que llovió en Concepción. Eses fatores aleatórios van afectar todos los tratados o todos los controles, y tener un grande efecto.

Entonces, la estimativa del error estandar no está buena.

Errores Agrupados

En muchos tipos de ensayos aleatorios, la aleatorizacion es en un nivel más largo que el individuo.

- La comuna, la escuela, etc

Todos dentro del mismo grupo tienen la misma asignación de tratamiento.

Normalmente, en ese tipo de contexto existen interaciones entre las unidades dentro de un grupo. Los errores no son independientes.

Tenemos que ayustar nuestros errores para reflejar eso.

Errores Agrupados

Vamos escrever un modelo con j un grupo e i un individuo.

$$Y_i = \alpha + \beta D_i + v_i + w_{ij}$$

Donde v_i son errores comunes al grupo i, y w_{ij} son errores individuales. $Var(v_i) = \tau^2$, $Var(w_{ij}) = \sigma^2$

Existen J grupos, cada uno con n individuos.

Errores Agrupados

En este caso, los errores estándar de $\hat{\beta}$ es:

$$se_g(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}}\sqrt{\frac{n\tau^2 + \sigma^2}{nJ}}$$

Si la aleatorizacion fuera individual, los errores serían:

$$se_i(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{P(1-P)}}\sqrt{\frac{\tau^2 + \sigma^2}{nJ}}$$

Errores Agrupados

Podemos calcular la relación entre los errores estándar bajo aleatorización grupal y individual:

$$\frac{se_g(\hat{\beta})}{se_i(\hat{\beta})} = D = \sqrt{1 + (n-1)\rho}$$

Donde ρ es la **correlación intragrupal**, esto es, la parte de la variación total explicada por la variación grupal.

$$\rho = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}$$

Errores Agrupados

En el caso de la campaña publicitaria, supón que el valor de correlación intragrupal es de solo 6%. ¿Cuánto más grandes son los errores estándar que computamos asumindo asignación individual?

Errores Agrupados

En el caso de la campaña publicitaria, supón que el valor de correlación intragrupal es de solo 6%. ¿Cuánto más grandes son los errores estándar que computamos asumindo asignación individual?

$$D = \sqrt{1 + 59 * 0.06} \approx 2.1$$

¡Los errores son más que dos veces mayores que pensamos!

Errores Agrupados

Cuando calculamos el Efecto Minimo Detectable en un ensayo agrupado, obtenemos:

$$EMD = (t_{1-\kappa} + t_{\alpha}) * \sqrt{\frac{1}{P(1-P)J}} \sqrt{\rho + \frac{1-\rho}{n}\sigma}$$

Podemos ver que:

- El numero de participantes por grupo, n, tiene un efecto relativamente débil.
- El numero de grupos es más importante: aprendemos más de un individuo en un nuevo grupo que de más un individuo en un grupo ya observado.
- La correlación intragrupal aumenta el EMD, particularmente cuando n es grande.

Inferencia Exata

Inferencia Exata

La prueba de hipótesis clasica es válida asintóticamente, o sea, si N es grande.

Pero a veces tenemos experimentos pequeños, dentre 20 y 40 unidades. La inferencia puede no ser valida para ese caso.

Otro problema comun es que existan valores extremos y muy influentes. Eso tambien puede generar problemas para la inferencia clasica.

Cuando trabajamos con ensayos aleatorios, podemos lidiar con eses problemas de otra forma.

Inferencia Exata

En inferencia clasica, asumimos que las unidades son observaciones de una población más grande. Existe variabilidad aleatoria en la **muestrage** de la población.

En inferencia exacta, no vamos pensar en una población abstrata. Vamos lidiar solamente con las unidades que existen. La variabilidad aleatoria viene **del diseño del ensayo**. O sea, la única aleatoriedad es la asignación del tratamiento.

Inferencia Exata - Ejemplo

Name	D	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	.	10
Ben	1	5	.	5
Chad	1	16	.	16
Daniel	1	3	.	3
Edith	0	5	5	.
Frank	0	7	7	.
George	0	8	8	.
Hank	0	10	10	.

Inferencia Exata - Ejemplo

Name	D	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	.	10
Ben	1	5	.	5
Chad	1	16	.	16
Daniel	1	3	.	3
Edith	0	5	5	.
Frank	0	7	7	.
George	0	8	8	.
Hank	0	10	10	.

$$ATE = 34/4 - 30/4 = 8.5 - 7.5 = 1$$

Inferencia Exata - Ejemplo

Queremos saber si ese efecto de 1 es consistente con variación aleatoria.

Entonces, precisamos de una hipótesis sobre o que pasaria si la asignación fuera diferente.

No podemos observar Y_0 para los tratados, ni Y_1 para los controles. Pero, podemos utilizar una hipótesis para reconstruirlos.

Inferencia Exata - Ejemplo

La Hipótesis Nula Exacta de Fisher es de que el efecto de tratamiento es siempre cero.

$$H_0 : \delta_i = 0$$

Diferente de la hipótesis tradicional: *el efecto médio es cero*.

Inferencia Exata - Ejemplo

Bajo H0, podemos completar la tabla

Name	D	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	.	10
Ben	1	5	.	5
Chad	1	16	.	16
Daniel	1	3	.	3
Edith	0	5	5	.
Frank	0	7	7	.
George	0	8	8	.
Hank	0	10	10	.

Inferencia Exata - Ejemplo

Bajo H0, podemos completar la tabla

Name	D	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	**10**	10
Ben	1	5	**5**	5
Chad	1	16	**16**	16
Daniel	1	3	**3**	3
Edith	0	5	5	**5**
Frank	0	7	7	**7**
George	0	8	8	**8**
Hank	0	10	10	**10**

Inferencia Exata - Ejemplo

Ahora podemos analisar que pasaría con el efecto estimado si la asignación del tratamento fuera diferente.

Podemos generar otra asignación posible y calcular el efecto resultante.

Inferencia Exata - Ejemplo

Name	$\widetilde{D_2}$	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	**10**	10
Ben	0	5	**5**	5
Chad	1	16	**16**	16
Daniel	1	3	**3**	3
Edith	0	5	5	**5**
Frank	1	7	7	**7**
George	0	8	8	**8**
Hank	0	10	10	**10**

Inferencia Exata - Ejemplo

Name	$\widetilde{D_2}$	Y	Y^0	Y^1
Andy	1	10	**10**	10
Ben	0	5	**5**	5
Chad	1	16	**16**	16
Daniel	1	3	**3**	3
Edith	0	5	5	**5**
Frank	1	7	7	**7**
George	0	8	8	**8**
Hank	0	10	10	**10**

$$\tilde{ATE} = 36/4 - 28/4 = 9 - 7 = 2$$

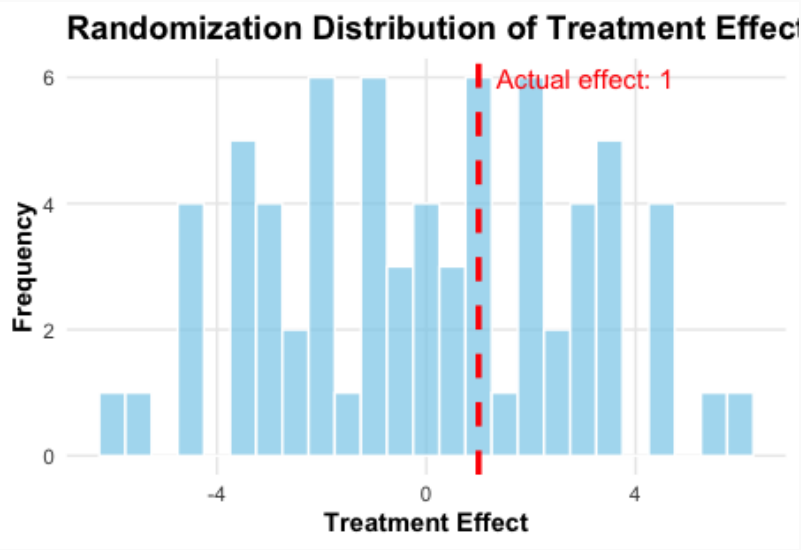
Inferencia Exata - Ejemplo

Podemos calcular el ATE bajo H0 para **todas** las realizaciones posibles de la asignacion del tratamiento.

Como tenemos 4 tratados de 8 individuos, las posibilidades son:

$$\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5}{4 * 3 * 2 * 1} = 70$$

Inferencia Exata - Ejemplo



Inferencia Exata - Ejemplo

Finalmente, podemos calcular el p-valor exato, por la proporción de realizaciones más extremas que el efecto real.

En la práctica, para cualquier aplicación un poco mayor, existe un número muy grande de posibilidades, y no podemos calcular todas.

Entonces, lo que hacemos es reasignar el tratamento muchas veces de manera aleatoria, como una aproximación de la distribución completa.

Note que no usamos distribuciones estadísticas o argumentos basados en $n \to \infty$.

Cuando la muestra es pequeña, ese tipo de inferencia funciona mejor.

Si nos existen outliers con valores muy influentes, podemos utilizar otra estadística, como el rank médio:

- Hacemos el mismo proceso, pero en vez de computar el efecto promedio $(\frac{1}{n_t}\sum D_i Y_i - \frac{1}{n_c}\sum(1-D_i)Y_i)$, computamos la diferencia en su rank $(\frac{1}{n_t}\sum D_i R_i - \frac{1}{n_c}\sum(1-D_i)R_i)$.
- Donde R_i es una variable igual a cuantas unidades tienen Y_j menor que Y_i.

Inferencia Exata - Ejemplo

Otra ventaja es que podemos utilizar el conocimiento de la regla de asignación.

Por ejemplo, si tenemos asignación por grupos, podemos simplemente incorporar esa información cuando calculamos las otras asignaciones posibles.

Usando Covariadas como Controles

Podemos pensar en cuatro tipos de variables de controle.

Las necesarias

Son las que necesitamos incluir para cerrar todos los caminos backdoor. Si no las incluímos, nuestra investigación no es valida.

Ej: estratos si la asignación depende de estratos

Usando Covariadas

Podemos pensar en cuatro tipos de variables de controle.

Las buenas

Son las que no son necesarias, pero ayudan a predecir Y, y por tanto disminuyen la varianza de los resíduos.

No cambian da identificación del parámetro que estamos estimando, pero ayudan a obtenir estimaciones más precisas. Aumentan la potencia de las pruebas.

Ej: el resultado de interés medido antes del tratamiento normalmente es un buen predictor.

Podemos pensar en cuatro tipos de variables de controle.

Las malas

No son necesarias, y predicen mejor el tratamiento que el resultado. Por eso, *disminuen* la precisión.

No son comunes en ensayos aleatorios, pero a veces es posible incluir controles demasiados.

Podemos pensar en cuatro tipos de variables de controle.

Las prohibidas

Son las que cerran caminos causales importantes, o abren caminos de backdoor.

Ej: Colliders. Muchas veces resultados que ocuren después del tratamiento (controlar por ocupación después de una capacitación).