Projeto 1: SAT em Z3

João Miguel Faria   Rui Breda Perdigoto

5 de novembro de 2021

Índice

Sudoku

- Símbolos Proposicionais
- Condições e restrições
- Execução do programa
- Variantes

SUMS

- Descrição do problema
- Observações sobre a Complexidade
- Símbolos proposicionais e restrições
- Um exemplo

Símbolos Proposicionais

Símbolos proposicionais

$$p_{i,j,n}$$
$$0 \leq i, j \leq 8$$
$$1 \leq n \leq 9$$

Condições e restrições

- 1 número por célula

$$\bigwedge_{0 \leq i,j < 9} \bigvee_{1 \leq n \leq 9} p_{i,j,n} \tag{1}$$

$$\bigwedge_{0 \leq i,j < 9} \bigwedge_{1 \leq k < m < 9} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{i,j,m} \tag{2}$$

Condições e restrições

- 1 número por célula

$$\bigwedge_{0 \leq i,j < 9} \bigvee_{1 \leq n \leq 9} p_{i,j,n} \tag{1}$$

$$\bigwedge_{0 \leq i,j < 9} \bigwedge_{1 \leq k < m < 9} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{i,j,m} \tag{2}$$

- Linhas e colunas sem repetições

$$\bigwedge_{0 \leq i < 9} \bigwedge_{1 \leq k \leq 9} \bigwedge_{0 \leq j < m < 9} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{i,m,k} \tag{3}$$

$$\bigwedge_{0 \leq i < 9} \bigwedge_{1 \leq k < 9} \bigwedge_{0 \leq j < m < 9} \neg p_{j,i,k} \wedge \neg p_{m,i,k} \tag{4}$$

- Regiões sem repetições

$$\bigwedge_{0 \leq i < 9} \bigwedge_{1 \leq k \leq 9} \bigwedge_{0 \leq j < 9} \bigwedge_{i+1 \leq n < b} \bigwedge_{c \leq l < c+3} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{n,l,k} \qquad (5)$$

- Regiões sem repetições

$$\bigwedge_{0\leq i<9}\ \bigwedge_{1\leq k\leq 9}\ \bigwedge_{0\leq j<9}\ \bigwedge_{i+1\leq n<b}\ \bigwedge_{c\leq l<c+3} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{n,l,k} \tag{5}$$

- S com os símbolos do tabuleiro inicial

$$\bigwedge_{p\in S} p \tag{6}$$

- Regiões sem repetições

$$\bigwedge_{0\leq i<9}\ \bigwedge_{1\leq k\leq 9}\ \bigwedge_{0\leq j<9}\ \bigwedge_{i+1\leq n<b}\ \bigwedge_{c\leq l<c+3} \neg p_{i,j,k} \vee \neg p_{n,l,k} \tag{5}$$

- S com os símbolos do tabuleiro inicial

$$\bigwedge_{p\in S} p \tag{6}$$

- `well_posed(P)` tem uma restrição extra, dado um conjunto M com uma solução

$$\bigvee_{p\in M} \neg p \tag{7}$$

Execução do programa

Figura: Tabuleiro inicial

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura: Puzzle resolvido após `sudoku(P)`

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Figura: Tabuleiro inicial de `well_posed`

1						7		
		2						
					9			
				2				
		4	3					
							6	
	9				8			

Variantes

Células vizinhas — `deltas_dist`

`deltas_vals=[0]` — células vizinhas $\neq$ célula atual

Notação

$$i, j, n \in \mathbb{N} \cap [1, 9] \tag{8}$$

$$(c_{i,j} = k) := p_{i,j,k} \tag{9}$$

não induz em erro porque há restrições usuais, temos por exemplo:

$$c_{i,j} = k \wedge c_{i,j} = k' \implies k = k' \tag{10}$$

Definição

$$\texttt{diferentes}(\Delta, V) := \bigwedge_{i,j,n} \bigwedge_{\substack{c' \in \Delta +' c_{i,j} \\ \nu \in V}} (c_{i,j} = n \implies c' \neq n + \nu) \tag{11}$$

Definição

$$\texttt{diferentes}(\Delta, V) := \bigwedge_{i,j,n} \bigwedge_{\substack{c' \in \Delta +' c_{i,j} \\ \nu \in V}} (c_{i,j} = n \implies c' \neq n + \nu) \tag{11}$$

onde

$$\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \Delta \tag{12}$$

$$\Delta +' c = \{c_{(i,j)+\delta} : \delta \in \Delta\} \cap \{1, \cdots, 9\}^2 \tag{13}$$

para garantir que não saímos do tabuleiro.

Descrição do problema

Dados:

$$R \subseteq \mathbb{N}$$
$$t \in \mathbb{N}$$

Descrição do problema

Dados:

$$R \subseteq \mathbb{N}$$
$$t \in \mathbb{N}$$

Queremos $\exists S \subseteq R$ tal que $\sum S = t$.

Observações sobre a Complexidade

- p_r para cada $r \in R$ — exponencial ao criar restrições (`sums_red_exp`)

Observações sobre a Complexidade

- p_r para cada $r \in R$ — exponencial ao criar restrições (`sums_red_exp`)
- p_S para cada $S \subseteq R$ — exponencial no número de proposições

Observações sobre a Complexidade

- p_r para cada $r \in R$ — exponencial ao criar restrições (`sums_red_exp`)
- p_S para cada $S \subseteq R$ — exponencial no número de proposições

Queremos uma redução polinomial!

Símbolos proposicionais e restrições

Notação

Nesta secção tomamos sempre

$$u, w \in R \tag{14}$$

$$r, s \in \mathbb{N} \cap [0, t] \tag{15}$$

Ideia:

$$p_{u,r} \tag{16}$$

u — último dígito lido
r — resto até t
$\#R \times (t+1)$ símbolos proposicionais

[1] $r \neq 0$ porque $\bigvee \varnothing = \bot$, não queremos $p_{u,0} \implies \bot \forall u$!

Ideia:

$$p_{u,r} \tag{16}$$

u — último dígito lido
r — resto até t
$\#R \times (t+1)$ símbolos proposicionais

$$\bigwedge_{r \neq 0} \bigwedge_{u} \left(p_{u,r} \implies \bigvee_{w} p_{w,r-w} \right) \tag{17}$$

Podemos ler w e ficar w unidades mais perto de t. [1]

[1] $r \neq 0$ porque $\bigvee \varnothing = \bot$, não queremos $p_{u,0} \implies \bot \forall u$!

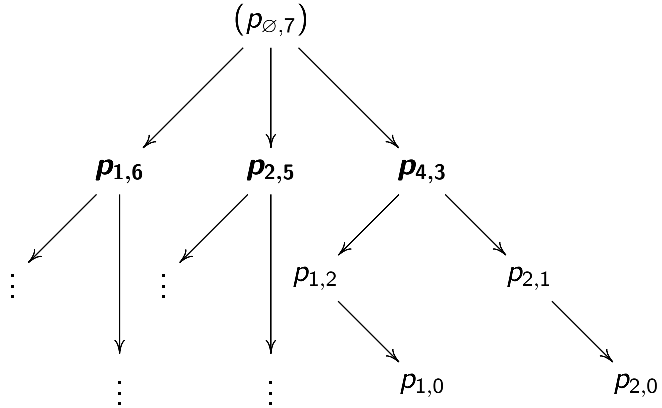

Figura: Exemplo de uma árvore a partir de $R = \{1, 2, 4\}$ e $t = 7$.

Não temos $p_{\varnothing,r}$; começamos em:

$$\bigvee_{u} p_{u,t} \tag{18}$$

Não temos $p_{\varnothing,r}$; começamos em:

$$\bigvee_{u} p_{u,t} \tag{18}$$

Queremos chegar a:

$$\bigvee_{u} p_{u,0} \tag{19}$$

Não é preciso $\bigwedge_{u \neq w} p_{u,0} \to \neg p_{w,0}$, temos:

$$\bigwedge_{u,r} \left(p_{u,r} \implies \bigwedge_{w \neq u} \neg p_{w,r} \wedge \bigwedge_{s \neq r} \neg p_{u,s} \right) \tag{20}$$

que já deita extras (expl. permutações, vários fins) fora.

Podemos dizer (mas não é preciso):

$$\bigwedge_{u+r>t} \neg p_{u,r} \tag{21}$$

Um exemplo

Para o caso

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 16, 32, 64, 500\}$$
$$t = 74$$

`sums(R,t)` resulta em:

```
[p_2_0, p_4_70, p_3_67, p_64_2, p_1_66]
[2, 4, 3, 64, 1]
```