Anem a analitzar, primer, l'inversor sense donar valors a cap paràmetre. Modelem el transistor com:

$$I_D = \begin{cases} 0 & \text{si } V_e \leq 0 \\ K\left(V_{DS}V_e - \frac{V_{DS}^2}{2}\right) & \text{si } V_e > 0; V_{DS} < V_e \\ K\frac{V_e^2}{2} & \text{si } V_e > 0; V_{DS} \geq V_e \end{cases}$$

On $K > 0$, $V_{DS} \geq 0$ i $V_e = V_{GS} - V_T$.

Apliquem el model al circuit i escrivim KCLs per a tots els nodes desconeguts:

$$\begin{cases} I_D = \begin{cases} 0 & \text{si } V_e \leq 0 \\ K\left(V_oV_e - \frac{V_o^2}{2}\right) & \text{si } V_e > 0; V_o < V_e \\ K\frac{V_e^2}{2} & \text{si } V_e > 0; V_o \geq V_e \end{cases} \\ V_e = V_i - V_T \\ I_D = \frac{V_{DD} - V_o}{R_L} \\ R_L, K, V_{DD} > 0 \end{cases}$$

Ara particularitzem per a cada tram.

Zona de tall

$$\begin{aligned}I_D &= 0\\ V_e &\leq 0\end{aligned}$$

Es veu a simple vista que si substituim I_D en el KCL, resulta:

$$V_o = V_{DD}$$

Zona de saturació

$$\begin{aligned}&I_D = K\frac{V_e^2}{2}\\ &V_e > 0\\ &V_o \geq V_e\end{aligned}$$

Subsituïm I_D al KCL i aïllem V_o en funció de V_e:

$$\begin{aligned}K\frac{V_e^2}{2} &= \frac{V_{DD} - V_o}{R_L}\\ V_o &= V_{DD} - \frac{R_L K}{2} V_e^2\end{aligned}$$

Ara substituïm V_o en la condició $V_o \geq V_e$ per expressar-la en funció de V_e:

$$\begin{aligned}V_{DD} - \frac{R_L K}{2} V_e^2 &\geq V_e\\ \frac{R_L K}{2} V_e^2 + V_e - V_{DD} &\leq 0\end{aligned}$$

Zona òhmica

$$\begin{aligned}&I_D = K\left(V_o V_e - \frac{V_o^2}{2}\right)\\ &V_e > 0\\ &V_o < V_e\end{aligned}$$

Substituïm I_D al KCL i aïllem V_o en funció de V_e:

$$\begin{aligned}K\left(V_o V_e - \frac{V_o^2}{2}\right) &= \frac{V_{DD} - V_o}{R_L}\\ V_o V_e - \frac{V_o^2}{2} &= \frac{V_{DD}}{R_L K} - \frac{V_o}{R_L K}\\ 0 &= \frac{V_o^2}{2} - V_o V_e - \frac{V_o}{R_L K} + \frac{V_{DD}}{R_L K}\\ 0 &= \frac{R_L K}{2} V_o^2 - \left(R_L K V_e + 1\right) V_o + V_{DD}\\ V_o &= \frac{\left(R_L K V_e + 1\right) \pm \sqrt{\left(R_L K V_e + 1\right)^2 - 2 R_L K V_{DD}}}{R_L K}\\ V_o &= V_e + \frac{1 \pm \sqrt{\left(R_L K V_e + 1\right)^2 - 2 R_L K V_{DD}}}{R_L K}\end{aligned}$$

Per a satisfer $V_o < V_e$ la fracció ha de ser negativa. Per tant, podem descartar una de les solucions:

$$V_o = V_e + \frac{1 - \sqrt{\left(R_L K V_e + 1\right)^2 - 2 R_L K V_{DD}}}{R_L K}$$

En particular, perquè la fracció sigui negativa, el radicand ha de ser més gran que la unitat. Això garantitza que V_o existeix i satisfà $V_o < V_e$.

$$\begin{aligned}\left(R_L K V_e + 1\right)^2 - 2 R_L K V_{DD} &> 1\\ \frac{R_L K}{2} V_e^2 + V_e - V_{DD} &> 0\end{aligned}$$

Ara podem escriure V_o en funció de V_e, definit com a funció a trams:

$$V_o = \begin{cases} V_{DD} & \text{si } V_e \leq 0 \\ V_e + \frac{1-\sqrt{(R_L K V_e+1)^2 - 2R_L K V_{DD}}}{R_L K} & \text{si } V_e > 0;\, \frac{R_L K}{2} V_e^2 + V_e - V_{DD} > 0 \\ V_{DD} - \frac{R_L K}{2} V_e^2 & \text{si } V_e > 0;\, \frac{R_L K}{2} V_e^2 + V_e - V_{DD} \leq 0 \end{cases}$$

Simplificarem ara les condicions complementàries del segon i tercer tram.

$$\frac{R_L K}{2} V_e^2 + V_e - V_{DD} \leq 0$$

El disciminant del polinomi de segon grau és $1 + 2R_L K V_{DD}$, que sempre és positiu. Per tant, la condició és equivalent a:

$$V_e \in \left[\frac{-\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K}, \frac{\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K} \right]$$

Com que a més, $V_e > 0$ i l'extrem inferior de l'interval és negatiu, podem escriure simplement:

$$V_e \leq \frac{\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K}$$

Procedim de forma similar amb la condició del tercer tram, que és complementària:

$$V_e \notin \left[\frac{-\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K}, \frac{\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K} \right]$$

$$V_e > \frac{\sqrt{1 + 2R_L K V_{DD}} - 1}{R_L K}$$

La corba de transferència resultant, amb les condicions simplificades i substituint $V_e = V_i - V_T$, resulta:

$$V_o = \begin{cases} V_{DD} & \text{si } V_i \leq V_T \\ (V_i - V_T) + \frac{1-\sqrt{(k(V_i - V_T)+1)^2 - 2kV_{DD}}}{k} & \text{si } V_T < V_i \leq V_T' \\ V_{DD} - \frac{k}{2}(V_i - V_T)^2 & \text{si } V_i > V_T' \end{cases}$$

$$\text{amb } V_T' = V_T + \frac{\sqrt{1+2kV_{DD}}-1}{k} \text{ i } k = R_L K$$