Problema 1.1 Per demostrar les igualtats, prenem com a definició:

$$a \oplus b = (a+b)\,\overline{(a \cdot b)}$$

Apartat A

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \overline{a} \oplus \overline{b} \\ (a+b)\,\overline{(a \cdot b)} &= \left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \\ (a+b)\,\overline{(a \cdot b)} &= \overline{(a \cdot b)}\,(a+b) \end{aligned}$$

Apartat B

$$\begin{aligned} a \oplus 0 &= a \\ (a+0)\,\overline{(a \cdot 0)} &= a \\ a\overline{0} &= a \end{aligned}$$

Apartat C

$$\begin{aligned} a \oplus 1 &= \overline{a} \\ (a+1)\,\overline{(a \cdot 1)} &= \overline{a} \\ 1\overline{a} &= \overline{a} \end{aligned}$$

Apartat D

$$\begin{aligned} a\,(b \oplus c) &= ab \oplus ac \\ a\left[(b+c)\,\overline{(b \cdot c)}\right] &= (ab+ac)\,\overline{(ab \cdot ac)} \\ a\,(b+c)\,\overline{(b \cdot c)} &= a\,(b+c)\,\overline{(a \cdot bc)} \\ a\,(b+c)\,\overline{(b \cdot c)} &= a\,(b+c)\left(\overline{a}+\overline{(bc)}\right) \\ a\,(b+c)\,\overline{(b \cdot c)} &= (b+c)\left(a\overline{a}+a\overline{(b \cdot c)}\right) \\ a\,(b+c)\,\overline{(b \cdot c)} &= (b+c)\,a\overline{(b \cdot c)} \end{aligned}$$

Apartat E Podem demostrar que $a \oplus b = c \Rightarrow a \oplus c = b$ perquè si substituim la segona expressió en la primera, en resulta la identitat:

$$\begin{aligned} &c = a \oplus (a \oplus c) \\ &c = \begin{cases} 0 \oplus (0 \oplus c) & \text{si } a = 0 \\ 1 \oplus (1 \oplus c) & \text{si } a = 1 \end{cases} \\ &c = \begin{cases} 0 \oplus c & \text{si } a = 0 \\ 1 \oplus \overline{c} & \text{si } a = 1 \end{cases} \\ &c = \begin{cases} c & \text{si } a = 0 \\ c & \text{si } a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

No és necessari demostrar les altres 5 relacions gràcies a la simetria.

Problema 1.2

Apartat A

$$\begin{aligned} a+b+c+abc &= a+b+c \\ a+b+c\,(1+ab) &= a+b+c \\ a+b+c\cdot 1 &= a+b+c \end{aligned}$$

Apartat B

$$\begin{aligned} a+b+c+\overline{(abc)} &= 1 \\ a+b+c+\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} &= 1 \text{ (veure } c) \end{aligned}$$

Apartat C

$$\begin{aligned} a+b+c+\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} &= 1 \\ (a+\overline{a})+b+c+\overline{b}+\overline{c} &= 1 \\ 1+\left(b+c+\overline{b}+\overline{c}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Apartat D

$$\begin{aligned} ab\,(c+cd)+(ac+a)\,bd &= ab\,(c+d) \\ abc\,(1+d)+a\,(c+1)\,bd &= abc+abd \end{aligned}$$

Apartat E

$$\begin{aligned} a\,(\overline{c}+ad)+c\overline{d}+ad\overline{a} &= a+c\overline{d} \\ a\overline{c}+ad+c\overline{d}+0 &= a+c\overline{d} \\ a\,(\overline{c}+d)+c\overline{d} &= a+c\overline{d} \\ a\overline{\left(c\overline{d}\right)}+\left(c\overline{d}\right) &= a+c\overline{d} \\ a+\left(c\overline{d}\right) &= a+c\overline{d} \end{aligned}$$

Apartat F

$$\begin{aligned} (ab+c+d)\left(c+\overline{d}\right)\left(\left(c+\overline{d}\right)+a\right) &= ab\overline{d}+c \\ (ab+c+d)\left(\left(c+\overline{d}\right)\left(c+\overline{d}\right)+\left(c+\overline{d}\right)a\right) &= ab\overline{d}+c \\ (ab+c+d)\left(c+\overline{d}\right)(1+a) &= ab\overline{d}+c \\ (ab+c+d)\left(c+\overline{d}\right) &= ab\overline{d}+c \\ c\,(ab+c+d)+\overline{d}\,(ab+c+d) &= ab\overline{d}+c \\ abc+c+dc+ab\overline{d}+c\overline{d}+d\overline{d} &= ab\overline{d}+c \\ ab\overline{d}+abc+c+dc+c\overline{d}+0 &= ab\overline{d}+c \\ ab\overline{d}+c\left(ab+1+d+\overline{d}\right) &= ab\overline{d}+c \end{aligned}$$

Problema 1.8 El codi de la taula és *ponderat* perquè és possible assignar un pes a cada bit. En aquest cas, es veu a simple vista que els pesos són $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (2, 4, 2, 1)$. Es comprova que, efectivament, les combinacions quadren:

$$0000 \to 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$0001 \to 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$$
$$0010 \to 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$$
$$0011 \to 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$$
$$0100 \to 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4$$
$$1011 \to 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$
$$1100 \to 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6$$
$$1101 \to 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7$$
$$1110 \to 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8$$
$$1111 \to 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9$$

De forma similar, es pot comprovar que és un codi *autocomplementari* perquè en invertir la representació d'un valor s'obté la representació del valor complementari.

$$0000 = 0 \leftrightarrow 1111 = 9$$
$$0001 = 1 \leftrightarrow 1110 = 8$$
$$0010 = 2 \leftrightarrow 1101 = 7$$
$$0011 = 3 \leftrightarrow 1100 = 6$$
$$0100 = 4 \leftrightarrow 1011 = 5$$
$$1011 = 5 \leftrightarrow 0100 = 4$$
$$1100 = 6 \leftrightarrow 0011 = 3$$
$$1101 = 7 \leftrightarrow 0010 = 2$$
$$1110 = 8 \leftrightarrow 0001 = 1$$
$$1111 = 9 \leftrightarrow 0000 = 0$$

Problema 1.11

Apartat A Sí, es un codi redundant perquè fa servir més bits (5) dels estrictament necessaris per a codificar totes les combinacions possibles (4).

Apartat B La distància mínima és 2, ja que es veu a simple vista que (a) no hi ha cap parella d'items que difereixin en només 1 bit, i (b) es pot trobar fàcilment un cas on variant 2 bits s'obté una altra representació del codi.

Apartat C No permet la correcció d'errors.

Apartat D No estic segur d'això, però la distància mínima continuaria essent 2 perquè es pot trobar fàcilment un cas on variant 2 bits s'obté una altra representació vàlida del codi protegit. Exemple: $00011\,0 \rightarrow 00111\,0 \rightarrow 00101\,0$