Problema 1. Aquí lo haremos mediante la definición.

Apartado A.

$$\mathcal{F}\{x[n_0 - n]\}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n_0 - n]e^{-j\tau fn}$$

Aplicamos un cambio de variable $m = n_0 - n$; el intervalo del sumatorio no cambia:

$$\mathcal{F}\{x[n_0 - n]\}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\tau f(n_0 - m)}$$
$$\mathcal{F}\{x[n_0 - n]\}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{+j\tau fm}\, e^{-j\tau fn_0}$$
$$\mathcal{F}\{x[n_0 - n]\}(f) = \mathcal{F}\{x[n]\}(-f)\, e^{-j\tau fn_0} = F(-f)e^{-j\tau fn_0}$$

Apartado B.

$$\mathcal{F}\{x^*[n + k]\}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n + k]e^{-j\tau fn}$$

Aplicamos un cambio de variable $m = n+k$; el intervalo del sumatorio no cambia:

$$\mathcal{F}\{x^*[n + k]\}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m]e^{-j\tau f(m-k)}$$
$$\mathcal{F}\{x^*[n + k]\}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m]e^{-j\tau fm}\, e^{j\tau fk}$$
$$\mathcal{F}\{x^*[n + k]\}(f) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{+j\tau fm}\right]^* e^{j\tau fk}$$
$$\mathcal{F}\{x^*[n + k]\}(f) = \left[\mathcal{F}\{x[n]\}(-f)\right]^*\, e^{j\tau fk} = F^*(-f)e^{j\tau fk}$$

Problema 2.

Apartado A. El primer periodo de $x[n]$ es $\{1, 0, -1, 0\}$, por tanto usando la definición queda:

$$F_p(f) = 1 \cdot e^{-j\tau f \cdot 0} - 1 \cdot e^{-j\tau f \cdot 2} = 1 - e^{-j\tau 2f}$$

Apartado B. Dado que tanto la DFT como el periodo son de 4 muestras, la DFT es simplemente la transformada anterior muestreada adecuadamente:

$$X[k] = F_p({}^{k}\!/\!{}_{4}) = 1 - e^{-j\tau f/2} = \{0, 2, 0, 2\}$$

Apartado C. La transformada de fourier de la señal periodica es simplemente la DFT de un periodo (apartado anterior), expresada en forma de distribución:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(f - 4k) = 2\,\Psi_{1/2}(f - {}^{1}\!/\!{}_{4})$$

Apartado D. La antitransformada de la DFT nos dará la señal original expresada como suma de exponenciales tal y como se pide:

$$x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k] e^{j\tau\frac{k}{4}n} = \frac{1}{2}e^{j\tau\frac{n}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\tau\frac{n}{4}}$$

Problema 3.

Apartado A. La ventana es rectangular, con lo cual la anchura de los lóbulos (mínima diferencia en frecuencia que podemos discernir) es $\Delta F = {}^{2}\!/\!{}_{L}$. Dado que queremos garantizar $\Delta F < \frac{1.9\,\mathrm{Hz}}{130\,\mathrm{Hz}}$, se deduce que $L > 2\frac{130\,\mathrm{Hz}}{1.9\,\mathrm{Hz}} \Rightarrow L \geq 137$.

La sensibilidad no nos limita en este caso porque por la naturaleza de un acorde las tres notas son de similar amplitud.

Apartado B. De entrada, observamos unicamente tres 'deltas' en la primera FFT. Con lo cual podemos garantizar que durante esta ventana solo se ha tocado un acorde con esas notas.

Nos fijamos en los bins de las tres notas y al pasarlos a frecuencia analógica obtenemos aproximadamente 32.7 Hz (515), 41.2 Hz (649) y 49 Hz (772). Esto corresponde a las notas Do_1, Mi_1 y Sol_1; sería un acorde Do mayor.

En la segunda FFT vemos contribuciones en exactamente las mismas notas que antes, junto con otras dos nuevas. Si nos fijamos en las amplitudes lo podemos interpretar como la suma de la triada anterior, y otra nueva triada que comparten una de las notas.

Las nuevas notas, siguiendo el procedimiento anterior, tienen frecuencias aproximadas de 41.2 Hz (649), 51.9 Hz (818) y 61.8 Hz (973). Esto corresponde a las notas Mi_1, $\mathrm{Sol}\#_1$ y Si_1; sería un acorde Mi mayor.

Las anchuras de los lóbulos de ambas triadas de la segunda ventana son las mismas por lo que podemos estar razonablemente seguros de las dos ocupan la mitad de la ventana en tiempo. Es importante tener en cuenta que no podemos saber en qué orden se tocan (esa información vendría dada por la fase).

Una interpretación posible es que la duración de las triadas es de media ventana, y que en la primera ventana había dos triadas iguales que se analizan como una. En ese caso cada triada dura $D = 0.5\frac{256}{130} \approx 0.98\,\mathrm{s}$.

Problema 4.

Apartado A. Para evitar aliasing se debe usar una frecuencia de muestreo superior al doble de la máxima frecuencia de trabajo, por tanto en este caso $f_s > 50\,\text{Hz}$.

Apartado B. Determinamos los bins de las tres 'deltas' en la DFT y sus correspondientes frecuencias discretas aproximadas: 0.1 (41), 0.2 (81) y 0.3 (120).

Las frecuencias analógicas según una frecuencia de muestreo de $50\,\text{Hz}$ son, respectivamente: $5\,\text{Hz}$, $10\,\text{Hz}$ y $15\,\text{Hz}$.

Apartado C. La duración se relaciona con la anchura del lóbulo según la expresión: $L_1 = \frac{2N}{k}$

Respecto al primer tono, permanece hasta la segunda ventana donde tiene una anchura de unas 8 muestras. Esto significa $L_1 \simeq L + \frac{2 \cdot 400}{8} \simeq$ 200 muestras (dura toda la señal).

Respecto al segundo tono, permanece hasta la segunda ventana donde tiene una anchura de unas 33 muestras. Esto significa $L_1 \simeq L + \frac{2 \cdot 400}{33} \simeq$ 125 muestras.

Respecto al tercer tono, este muere ya en la primera ventana donde tiene una anchura de unas 100 muestras. Esto significa $L_1 \simeq \frac{2 \cdot 400}{100} \simeq 8$ muestras.