

## Problema 1.

**Apartado A.** La potencia de la señal original corresponde al segundo momento de la función de densidad:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$P = \int_{-1}^{-1/4} x^2 0.1 dx + \int_{-1/4}^{1/4} x^2 1.97 dx + \int_{1/4}^1 x^2 0.1 dx$$

$$P = 0.1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{-1/4} + 1.97 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1/4}^{1/4} + 0.1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{1/4}^1$$

$$P = 0.1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{-1/4} + 1.97 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1/4}^{1/4} + 0.1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_{1/4}^1 = \frac{13}{480} \simeq 27.09 \times 10^{-3}$$

**Apartado B.** La aproximación habitual para la potencia del error en cuantificadores *mid-rise*:

$$\sigma_q^2 = \frac{X_{max}^2}{3 \cdot 2^{2B}} = \frac{1^2}{3 \cdot 2^{2 \cdot 5}} \simeq 0.326 \times 10^{-3}$$

Nos devuelve el resultado exacto en este caso porque la función de densidad nos permite dividir la distribución de la señal en ocho tramos uniformes, y el número de niveles del cuantificador es múltiplo de ocho.

**Apartado C.** Por inspección visual, el intervalo  $|x| \leq 0.25$  queda convertido en  $|y| \leq 0.75$  al pasar por la función de compresión, y se cuantifica con  $\frac{0.75}{1} 2^5 = 24$  niveles.

Los otros 8 niveles se emplean para  $|x| > 0.25$ .

**Apartado D.** El paso en el intervalo  $|x| \leq 0.25$  es de  $\frac{2 \cdot 0.25}{24} \approx 0.0208$  y en el resto es de  $\frac{2 - 2 \cdot 0.25}{8} = 0.1875$ .

**Apartado E.** Una manera informal de hacerlo es calcular la potencia del error, condicionado a  $|x| \leq 0.25$  (donde podemos considerar un cuantificador uniforme y aplicar su expresión):

$$\sigma_q^2 \Big|_{|x| \leq 0.25} = \frac{0.25^2}{3 \cdot 24^2} = \frac{1}{27648}$$

Hacemos lo mismo con el conjunto restante:

$$\sigma_q^2 \Big|_{|x| > 0.25} = \frac{0.75^2}{3 \cdot 8^2} = \frac{3}{1024}$$

Teniendo en cuenta las probabilidades de entrar en cada caso, la potencia media del error es:

$$\sigma_q^2 = 0.015 \frac{3}{1024} + 0.985 \frac{1}{27648} \simeq 0.080 \times 10^{-3}$$

## Problema 2.

**Apartado A.** Se desea una función de  $[0, 1]$  a  $[0, 1]$  con pendiente alta ( $|T_1'(r)| > 1$ ) para  $r$  cercanos a 0, y pendiente baja ( $|T_1'(r)| < 1$ ) para  $r$  cercanos a 1. Una posible solución es:

$$T_1(r) = \sqrt{r}$$

**Apartado B.** Se define una función con dos tramos. En el primero, cuando  $r$  está en  $[0, 0.6]$ , se devuelve siempre 0. En el segundo, se devuelve  $r$  ya que no hay que modificar nada:

$$T_2(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in [0, 0.6] \\ r & \text{otro caso} \end{cases}$$

**Apartado C.** Lo más sencillo es construir una función que comprima todos los valores, uniformemente ( $T_3'(r) = k$ ,  $k < 1$ ). Como no lo especifican, haremos la compresión hacia el centro ( $T_3(1/2) = 1/2$ ).

$$T_3(r) = k(r - 1/2) + 1/2$$

con  $k \in (0, 1)$  dependiendo del contraste deseado.

**Problema 3.** Los niveles (no vacíos) que caen dentro del primer tramo serían el 0 (12), 4 (4), 8 (12), 12 (4), 16 (12) y se suman todos en el nivel 0 de la imagen resultante:  $h_y[0] = 44$ .

Los niveles que caen en el segundo tramo serían el 20 (4), 24 (12), 28 (4) y se suman en el nivel 31 de la imagen resultante:  $h_y[31] = 20$ .

El histograma queda así:

$$h_y[r] = \begin{cases} 44 & \text{si } r = 0 \\ 20 & \text{si } r = 31 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

**Problema 4.** Empezaremos calculando la función de probabilidad:

$$F_x(r) = \int_{-\infty}^r f_x(r) \, dr$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ \int_0^r 4r \, dr & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ \int_0^{1/2} 4r \, dr + \int_{1/2}^r -4(r-1) \, dr & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 2r^2 \Big|_0^r & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ 2r^2 \Big|_0^{1/2} + -2r^2 + 4r \Big|_{1/2}^r & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 2r^2 & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ 1 - 2(r-1)^2 & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

**Apartado A.** La transformación que ecualiza la imagen es precisamente  $F_x(r)$ , ya que al aplicarla la distribución resultante es  $F_y(r) = F_x(F_x^{-1}(r)) = r$  (distribución uniforme).

**Apartado B.** La pendiente de la transformación (que es  $f_x(r)$ ) nos indica que los niveles  $[0, 0.25]$ ,  $[0.75, 1]$  (donde la pendiente es menor a la unidad) se comprimirán, especialmente los extremos. Así mismo, los niveles  $[0.25, 0.75]$  se expandirán, especialmente la parte central.

**Apartado C.** Ya que la imagen está ecualizada, la distribución es ahora uniforme y el histograma debería ser constante para cualquier  $r$ :  $H_x[r] = k$ .