Problema 1.

Apartado A. La potencia de la señal original corresponde al segundo momento de la función de densidad:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P = \int_{-1}^{-1/4} x^2\,0.1\,\mathrm{d}x + \int_{-1/4}^{1/4} x^2\,1.97\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1} x^2\,0.1\,\mathrm{d}x$$

$$+P = 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{-1/4} + 1.97\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1/4}^{1/4} + 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/4}^{1}$$

$$P = 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{-1/4} + 1.97\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1/4}^{1/4} + 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/4}^{1} = \frac{13}{480} \simeq 27.09 \times 10^{-3}$$

Apartado B. La aproximación habitual para la potencia del error en cuantificadores *mid-rise*:

$$\sigma_q^2 = \frac{X_{max}^2}{3 \cdot 2^{2B}} = \frac{1^2}{3 \cdot 2^{2\cdot 5}} \simeq 0.326 \times 10^{-3}$$

Nos devuelve el resultado exacto en este caso porque la función de densidad nos permite dividir la distribución de la señal en ocho tramos uniformes, y el número de niveles del cuantificador es múltiplo de ocho.

Apartado C. Por inspección visual, el intervalo $|x| \leq 0.25$ queda convertido en $|y| \leq 0.75$ al pasar por la función de compresión, y se cuantifica con $\frac{0.75}{1}\,2^5 = 24$ niveles.

Los otros 8 niveles se emplean para $|x| > 0.25$.

Apartado D. El paso en el intervalo $|x| \leq 0.25$ es de $\frac{2\cdot 0.25}{24} \approx 0.0208$ y en el resto es de $\frac{2-2\cdot 0.25}{8} = 0.1875$.

Apartado E. Una manera informal de hacerlo es calcular la potencia del error, condicionado a $|x| \leq 0.25$ (donde podemos considerar un cuantificador uniforme y aplicar su expresión):

$$\sigma_q^2\Big|_{|x|\leq 0.25} = \frac{0.25^2}{3 \cdot 24^2} = \frac{1}{27648}$$

Hacemos lo mismo con el conjunto restante:

$$\sigma_q^2\Big|_{|x|> 0.25} = \frac{0.75^2}{3 \cdot 8^2} = \frac{3}{1024}$$

Teniendo en cuenta las probabilidades de entrar en cada caso, la potencia media del error es:

$$\sigma_q^2 = 0.015\,\frac{3}{1024} + 0.985\,\frac{1}{27648} \simeq 0.080 \times 10^{-3}$$