Problema 1.

Apartado A. La potencia de la señal original corresponde al segundo momento de la función de densidad:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P = \int_{-1}^{-1/4} x^2\, 0.1\,\mathrm{d}x + \int_{-1/4}^{1/4} x^2\, 1.97\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1} x^2\, 0.1\,\mathrm{d}x$$

$$P = 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{-1/4} + 1.97\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1/4}^{1/4} + 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/4}^{1}$$

$$P = 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{-1/4} + 1.97\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1/4}^{1/4} + 0.1\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/4}^{1} = \frac{13}{480} \simeq 27.09 \times 10^{-3}$$

Apartado B. La aproximación habitual para la potencia del error en cuantificadores *mid-rise*:

$$\sigma_q^2 = \frac{X_{max}^2}{3 \cdot 2^{2B}} = \frac{1^2}{3 \cdot 2^{2 \cdot 5}} \simeq 0.326 \times 10^{-3}$$

Nos devuelve el resultado exacto en este caso porque la función de densidad nos permite dividir la distribución de la señal en ocho tramos uniformes, y el número de niveles del cuantificador es múltiplo de ocho.

Apartado C. Por inspección visual, el intervalo $|x| \leq 0.25$ queda convertido en $|y| \leq 0.75$ al pasar por la función de compresión, y se cuantifica con $\frac{0.75}{1}\,2^5 = 24$ niveles.

Los otros 8 niveles se emplean para $|x| > 0.25$.

Apartado D. El paso en el intervalo $|x| \leq 0.25$ es de $\frac{2 \cdot 0.25}{24} \approx 0.0208$ y en el resto es de $\frac{2 - 2 \cdot 0.25}{8} = 0.1875$.

Apartado E. Una manera informal de hacerlo es calcular la potencia del error, condicionado a $|x| \leq 0.25$ (donde podemos considerar un cuantificador uniforme y aplicar su expresión):

$$\sigma_q^2\bigg|_{|x| \leq 0.25} = \frac{0.25^2}{3 \cdot 24^2} = \frac{1}{27648}$$

Hacemos lo mismo con el conjunto restante:

$$\sigma_q^2\bigg|_{|x| > 0.25} = \frac{0.75^2}{3 \cdot 8^2} = \frac{3}{1024}$$

Teniendo en cuenta las probabilidades de entrar en cada caso, la potencia media del error es:

$$\sigma_q^2 = 0.015\,\frac{3}{1024} + 0.985\,\frac{1}{27648} \simeq 0.080 \times 10^{-3}$$

Problema 2.

Apartado A. Se desea una función de $[0,1]$ a $[0,1]$ con pendiente alta ($|T_1'(r)| > 1$) para r cercanos a 0, y pendiente baja ($|T_1'(r)| < 1$) para r cercanos a 1. Una posible solución es:

$$T_1(r) = \sqrt{r}$$

Apartado B. Se define una función con dos tramos. En el primero, cuando r está en $[0, 0.6]$, se devuelve siempre 0. En el segundo, se devuelve r ya que no hay que modificar nada:

$$T_2(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in [0, 0.6] \\ r & \text{otro caso} \end{cases}$$

Apartado C. Lo más sencillo es construir una función que comprima todos los valores, uniformemente ($T_3'(r) = k$, $k < 1$). Como no lo especifican, haremos la compresión hacia el centro ($T_3({}^1\!/\!{}_2) = {}^1\!/\!{}_2$).

$$T_3(r) = k\left(r - {}^1\!/\!{}_2\right) + {}^1\!/\!{}_2$$

con $k \in (0,1)$ dependiendo del contraste deseado.

Problema 3. Los niveles (no vacíos) que caen dentro del primer tramo serían el 0 (12), 4 (4), 8 (12), 12 (4), 16 (12) y se suman todos en el nivel 0 de la imagen resultante: $h_y[0] = 44$.

Los niveles que caen en el segundo tramo serían el 20 (4), 24 (12), 28 (4) y se suman en el nivel 31 de la imagen resultante: $h_y[31] = 20$.

El histograma queda así:

$$h_y[r] = \begin{cases} 44 & \text{si } r = 0 \\ 20 & \text{si } r = 31 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Problema 4. Empezaremos calculando la función de probabilidad:

$$F_x(r) = \int_{-\infty}^{r} f_x(r)\,\mathrm{d}r$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ \displaystyle\int_0^r 4r\,\mathrm{d}r & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ \displaystyle\int_0^{1/2} 4r\,\mathrm{d}r + \int_{1/2}^{r} -4\,(r-1)\,\mathrm{d}r & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 2r^2\Big|_0^r & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ 2r^2\Big|_0^{1/2} + \; -2r^2 + 4r\Big|_{1/2}^{r} & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$F_x(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 2r^2 & \text{si } r \in [0, 1/2) \\ 1 - 2\,(r-1)^2 & \text{si } r \in [1/2, 1) \\ 1 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Apartado A. La transformación que ecualiza la imagen es precisamente $F_x(r)$, ya que al aplicarla la distribución resultante es $F_y(r) = F_x\left(F_x^{-1}(r)\right) = r$ (distribución uniforme).

Apartado B. La pendiente de la transformación (que es $f_x(r)$) nos indica que los niveles $[0, 0.25]$, $[0.75, 1]$ (donde la pendiente es mayor a la unidad) se comprimirán, especialmente los extremos. Así mismo, los niveles $[0.25, 0.75]$ se expandirán, especialmente la parte central.

Apartado C. Ya que la imagen está ecualizada, la distribución es ahora uniforme y el histograma debería ser constante para cualquier r: $H_x[r] = k$.