Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Trabajo Práctico N^o1

Métodos Numéricos

Grupo 1:
Mestanza Joaquín
Müller Malena
Nowik Ariel
Regueira Marcelo
Reller Thomas

Profesor: Fierens Pablo

April 8, 2019

1 INTRODUCCIÓN

Toda señal enviada por un sistema de comunicación sufre perturbaciones durante el proceso de transmisión, y es por eso que se desea reducir el error de la información recibida. Un modelo discreto sencillo de un sistema de comunicaciones es el siguiente. Periódicamente, cada T segundos el transmisor envía un dato s_k considerando como instante inicial a $t = 0$. Luego, la información es modificada por el canal a través de su "respuesta impulsiva". Esto es la respuesta del sistema (en este caso, el canal) frente a una señal de entrada en particular que se conoce como impulso unitario ó delta de dirac. Matemáticamente, esto permite expresar la salida de un sistema en general como la convolución de su respuesta impulsiva con la señal de entrada. A su vez, la señal transmitida es afectada por ruido blanco Gaussiano aditivo , donde $N_k \sim cN(0,\sigma)$. Entonces, periódicamente la información recibida es

$$r_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k} + N_n$$

Donde h es la respuesta impulsiva previamente mencionada. Matricialmente, esto se puede expresar de dos formas distintas:

$$\vec{r} = H\vec{s} + \vec{N} \tag{1.1}$$

$$\vec{r} = S\vec{h} + \vec{N} \tag{1.2}$$

Siendo en todos los casos

- **h** referente a información del canal
- **s** referente a información de la señal original
- **n** referente al ruido agregado a la señal
- **r** referente a la señal recibida

2 ESTIMACIÓN DE LA SEÑAL ENVIADA

Es necesario hacer una estimación de dos cosas distintas. Por un lado se debe estimar el canal ($\vec{h}$) y por otro lado, la imagen original ($\vec{s}$).

2.1 ESTIMACIÓN DEL CANAL DE COMUNICACIÓN

Primero se hace una estimación de $\vec{h}$ con el método de cuadrados mínimos, empleando la descomposición de Cholesky, como se explica a continuación. Para averiguar $\vec{h}$ a partir de la ecuación (1.2), se considera que la media del ruido N es cero, y así se obtiene una nueva ecuación a partir de la cuál se procederá:

$$\vec{r} = S\vec{h} \tag{2.1}$$

Para utilizar el método de Cholesky en una ecuación del tipo $\vec{b} = A\vec{h}$ es necesario que la matriz A sea cuadrada, simétrica y definida positiva. Pero en nuestro caso, en su lugar tenemos a la matriz S que no es cuadrada. Como necesitamos una matriz que cumpla estas condiciones, multiplicamos ambos lados de la ecuación (2.1) por S^T:

$$S^T\vec{r} = S^T S\vec{h} \tag{2.2}$$

Llamamos $S^T \vec{r} = \vec{b}$ y $S^T S = A$, y obtenemos la expresión:

$$\vec{b} = A\vec{h} \tag{2.3}$$

En esta nueva ecuación (2.3), la matriz A cumple con las características para implementar el método de Cholesky, el cual consiste en encontrar las matrices L y L^T triangulares, tales que $A = LL^T$, para simplificar la resolución de la ecuación. Una vez averiguadas las matrices L y L^T,en la ecuación (2.3) reemplazamos la matriz A por el producto entre ellas y obtenemos:

$$\vec{b} = LL^T \vec{h} \tag{2.4}$$

Llamamos $\vec{y} = L^T \vec{h}$ y lo reemplazamos en la ecuación (2.4), de modo que:

$$\vec{b} = L\vec{y} \tag{2.5}$$

A partir de la ecuación (2.5) obtenemos $\vec{y}$ realizando sustitución Forward. Finalmente, dado que, como se mencionó previamente:

$$\vec{y} = L^T \vec{h} \tag{2.6}$$

se despeja $\vec{h}$ de la ecuación (2.6) haciendo una sustitución Backward. La ventaja de implementar el método de Cholesky para la ecuación resuelta es que se terminan resolviendo dos ecuaciones en las que la matriz involucrada (ya sea L o L^T) es una matriz triangular.

2.2 Estimación de la imagen original

La estimación de la imagen original $\vec{s}$, se hace a partir de la ecuación (1.1), de una manera distinta a la implementada para la estimación de $\vec{h}$. A pesar de que también se realiza haciendo cuadrados mínimos, asumimos que el nivel de ruido es conocido y usamos otro método conocido como Linear Minimum Square Error (LMMSE). Si bien no es lo correcto, asumimos que las mínimas unidades transmitidas en la señal enviada son independientes entre sí, simplemente para que la resolución sea más sencilla.
Para ver como funciona todo lo explicado hasta aquí, se envía la imagen de Lena con un ruido de un desvío estándar de 1. A continuación se observan los resultados de la transmisión de la imagen de Lena en escala de grises.

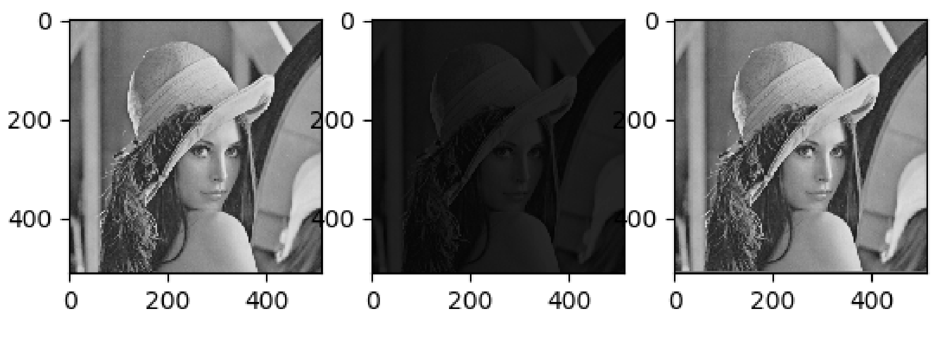

Figure 2.1: Resultados caso $E = 32$ $\sigma = 0.1$

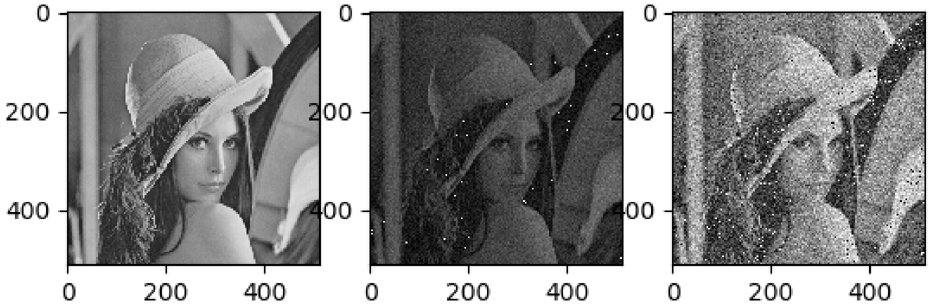

Figure 2.2: Resultados caso $E = 32$ $\sigma = 10$

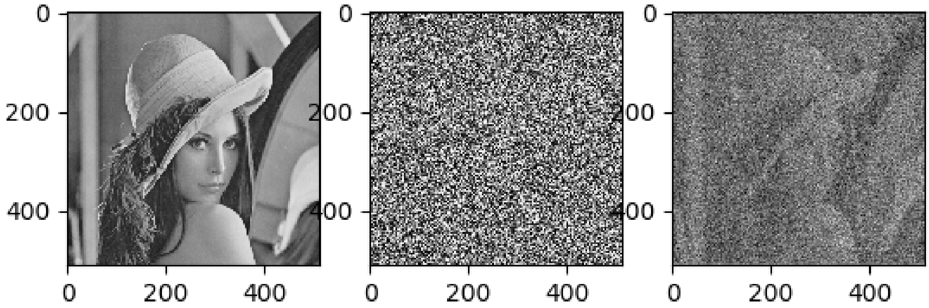

Figure 2.3: Resultados caso $E = 32$ $\sigma = 100$

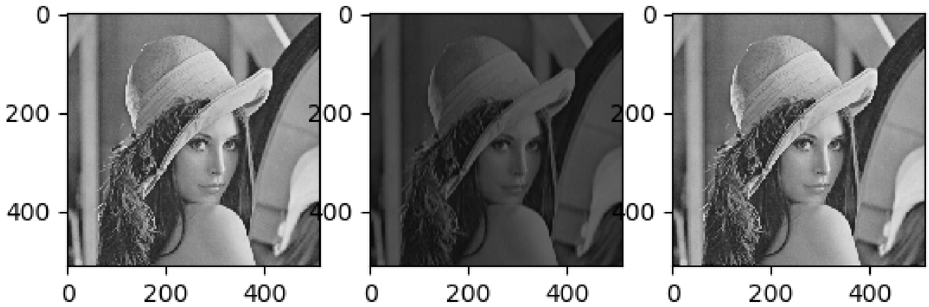

Figure 2.4: Resultados caso $E = 1024$ $\sigma = 0.1$

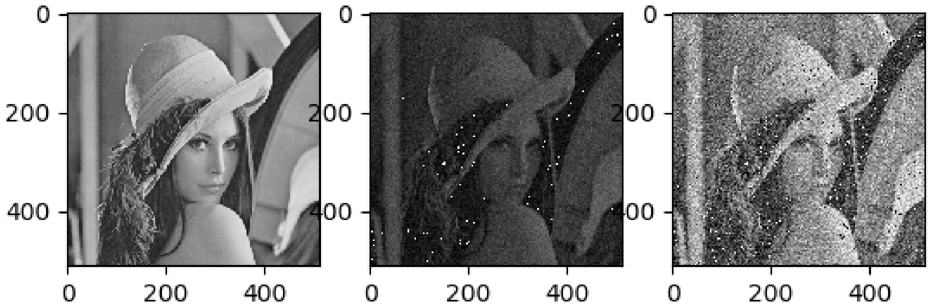

Figure 2.5: Resultados caso $E = 1024$ $\sigma = 10$

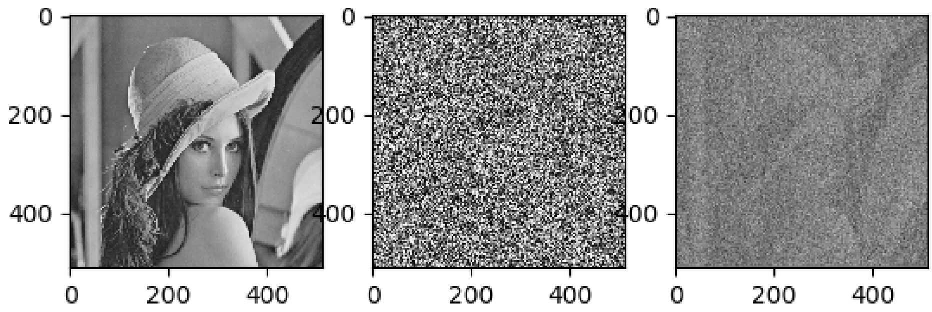

Figure 2.6: Resultados caso $E = 1024$ $\sigma = 100$

En base a los resultados obtenidos, se puede establecer una relación entre la dispersión del ruido y la imagen recuperada respecto de la original. Para una misma longitud de entrenamiento, si el ruido presente en el canal posee mayor dispersión, quiere decir que puede tomar una distribución de valores más amplia. Por ello, resulta más dificultoso recuperar la información original de la imagen si aletar, y a la salida se la ve afectada por el ruido en mayor medida en cuanto σ aumenta.