





FILTROS NO RECURSIVOS

Dada la expresión de la función transferencia:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

Respuesta en frecuencia: $\begin{cases} H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\varpi T} \\ H(e^{j\omega T}) = M(\omega)e^{j\theta(\omega)} \end{cases}$

Módulo: $M(\omega) = M(-\omega) = |H(e^{j\omega T})|$

Fase: $\theta(\omega) = -\theta(-\omega) = Arg[H(e^{-j\omega T})]$

Si deseamos imponer la condición de fase lineal

Caso A:

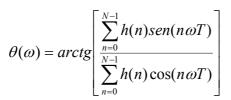
$$\frac{\theta(\omega) = -\alpha\omega}{\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}} \qquad -\frac{\omega_s}{2} \le \omega \le \frac{\omega_s}{2}$$

$$\tau_g = -\frac{d[\theta(\omega)]}{d\omega}$$

Condición de retardo de grupo constante:

$$\tau_p = \tau_g = \alpha$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos(n\omega T) - j sen(n\omega T)]$$

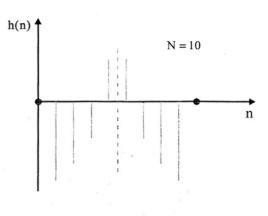


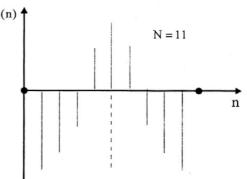
$$tg(\alpha\omega) = \frac{sen(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)sen(n\omega T)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(n\omega T)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) sen(\alpha \omega - n \omega T) = 0$$



$$\begin{cases} h(n) = h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}T \end{cases}$$





Respuesta al impulso para FIR de fase lineal

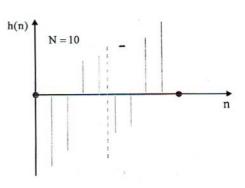


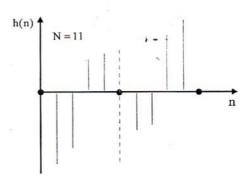
Caso B:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega + \beta$$

Si sólo τ_g = cte, es decir que $\beta \neq 0$, llegamos a:

Solución
$$\begin{cases} h(n) = -h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}T \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$





RESPUESTA EN FRECUENCIA

Establecemos la siguiente clasificación:

h(n) simétrico

N	Tipo	$H(e^{j\omega T})$
Impar	1	$e^{-j\omega T\left[\frac{N-1}{2}\right]} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(k\omega T)$
Par	2	$e^{-j\omega T\left[\frac{N-1}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos\left[\omega T\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]$

h(n) antisimétrico

N	Tipo	$H(e^{j\omega T})$
Impar	3	$e^{-j\left[\omega T\frac{N-1}{2}-\frac{\pi}{2}\right]\sum_{k=1}^{N-1}a_{k}sen(k\omega T)}$
Par	4	$e^{-j\left[\omega T\frac{N-1}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}b_{k}sen\left[\omega T\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]$

$$a_0 = h \left[\frac{(N-1)T}{2} \right] \qquad a_k = 2h \left[\left(\frac{N-1}{2} - k \right) T \right] \qquad b_k = 2h \left[\left(\frac{N}{2} - k \right) T \right]$$



FORMA GENERAL

$$H(e^{j\omega T}) = H_0(j\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}T}(j)^k$$

siendo:

$$k = 0$$
 tipos 1 y 2
 $k = 1$ tipos 3 y 4

$$H(e^{j\omega T}) = |H_0(j\omega)|e^{-j\theta}$$

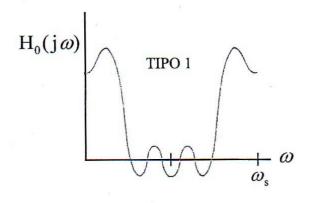
 $H_0(j\omega)$ es real

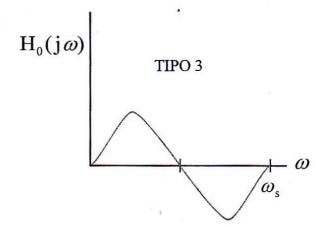
Tipos 1 y 2

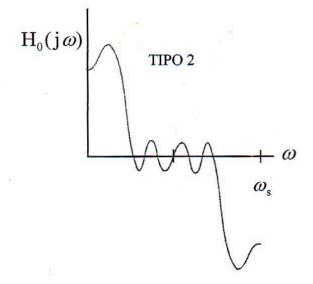
$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega T & H_0(j\omega) > 0\\ -\frac{N-1}{2}\omega T + \pi & H_0(j\omega) < 0 \end{cases}$$

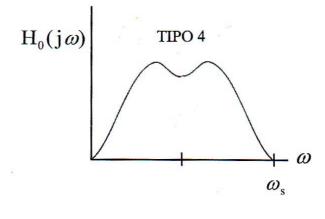
Tipos 3 y 4

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega T & H_0(j\omega) > 0\\ \frac{3\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega T + \pi & H_0(j\omega) < 0 \end{cases}$$











Tipo 1 (N par)

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0} \qquad \qquad H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}$$

Sin Restricciones Sin Restricciones

Aplicación

- Filtros pasabajos
- Filtros pasabanda
- Filtros pasaaltos
- Filtros rechazabanda
- Multibanda

•

Tipo 2 (N impar)

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0} \qquad \qquad H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}$$

Sin Restricciones 0

Aplicación

- Filtros pasabajos
- Filtros pasabanda

Tipo 3 (N par)

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0}=0 \qquad \qquad H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=\frac{\omega_s}{2}}=0$$

Aplicación

- Diferenciadores
- Transformadores de Hilbert

Tipo 4 (N impar)

$$H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=0}$$
 $H_0(e^{j\omega T})\Big|_{\omega=rac{\omega_s}{2}}$ Sin Restricciones

Aplicación

- Diferenciadores
- Transformadores de Hilbert



DISEÑO DE FILTROS NO RECURSIVOS

METODOS

- 1. Usando la Serie de Fourier (Ventanas)
- 2. Muestreando en el dominio de la frecuencia
- 3. PARKS McCLELLAN (Minimax, Equiripple o Tchebycheff)

Todos los métodos mencionados permiten hallar un filtro FIR de fase lineal, aunque los resultados difieren en el orden (longitud del filtro) y en los parámetros que logran optimizar.

Se procederá a un estudio de cada método, para poder evaluar mejor las ventajas y desventajas de cada uno.

1. DISEÑO USANDO LA SERIE DE FOURIER

Como $H(e^{j\omega T})$ es periódica podemos desarrollarla como una serie de Fourier

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n)e^{-jn\omega T}$$

siendo

$$h(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{+\frac{\omega_s}{2}} H(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n)z^{-n}$$

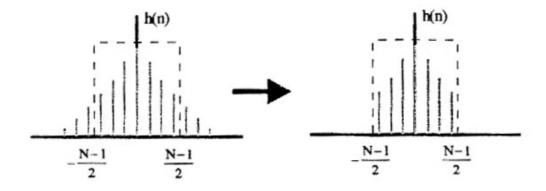
$$h(n)$$
Infinita
No causal

Trunco la serie

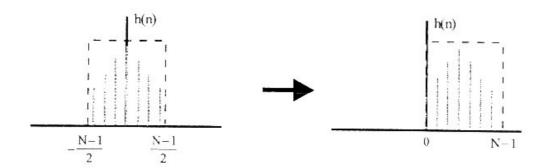


$$h(n) = 0 \quad |n| > \frac{N-1}{2}$$

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[h(-n)z^{n} + h(n)z^{-n} \right]$$



$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}}H(z)$$
 Causal



Resumiendo

$$H(z) = z^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{a_n}{2} (z^n + z^{-n})$$

donde $a_0 = h(0)$ y $a_n = 2h(n)$

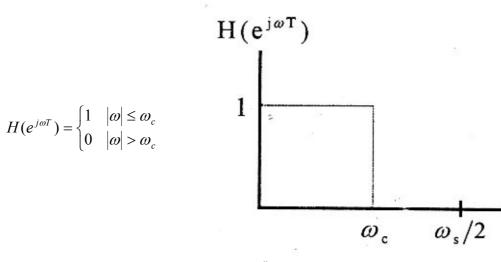


USO DE VENTANAS

En general la respuesta en frecuencia del filtro ideal es constante por tramos (bandas pasante y atenuada), teniendo discontinuidades entre bandas. En estos casos el desarrollo de Fourier (y la respuesta impulsiva del filtro) tienen infinitos términos. Pero como la h(n) debe ser finita, debemos truncar el desarrollo de Fourier, lo que trae aparejado como inconveniente la aparición de las oscilaciones de Gibbs. Es que resulta lenta la convergencia de la serie de Fourier.

Veamos un ejemplo concreto:

Supongamos que deseamos diseñar un filtro pasa bajos



$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega T} \qquad h(n) = \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} H(e^{j\omega T})e^{jn\omega T}d\omega$$

$$h(n) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega T} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} sen(n\omega_c T) & n \neq 0\\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$

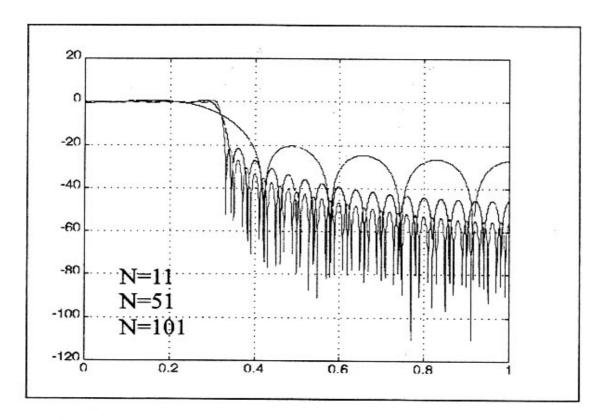
Truncando la serie

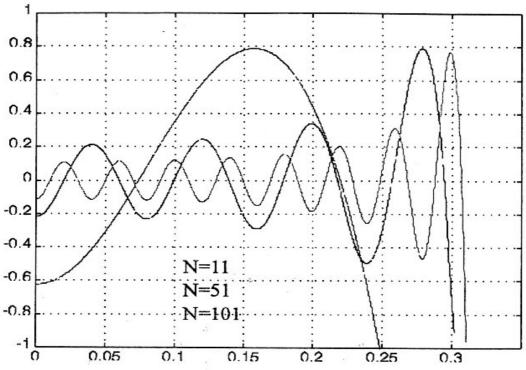
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} sen(n\omega_c T) & -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$



Imponiendo causalidad

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\pi} sen\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega_c T\right] & 0 \le n \le N-1\\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = \frac{N-1}{2} \text{ (N impar)} \end{cases}$$







Notas:

Como puede verse, hay grandes oscilaciones o ripple a ambos lados de la banda de transición del filtro. La frecuencia de estas oscilaciones aumenta a medida que aumenta N pero no disminuye la amplitud de los lóbulos a ambos lados de la banda de transición. La banda de transición se hace más angosta conforme aumenta N pero la atenuación en banda atenuada permanece prácticamente constante (-21 dB).

Una forma alternativa de visualizar el resultado obtenido es considerar el truncado de la respuesta impulsiva del filtro como el producto de la respuesta impulsiva del filtro ideal (de duración infinita) con una función w(n) a la que llamaremos **ventana rectangular**.

$$h_w(n) = h_d(n)w(n)$$
 donde
$$w(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Multiplicar en el dominio del tiempo dos secuencias discretas es equivalente a realizar la convolución compleja de las transformadas Z de cada una de ellas.

$$H_{w}(z) = Z[h_{d}(n)w(n)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} H_{d}(v)W\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

donde

$$H_d(z) = Z[h_d(n)]$$

$$W(z) = Z[w(n)]$$

$$H_w(z) = Z[h_w(n)]$$

si

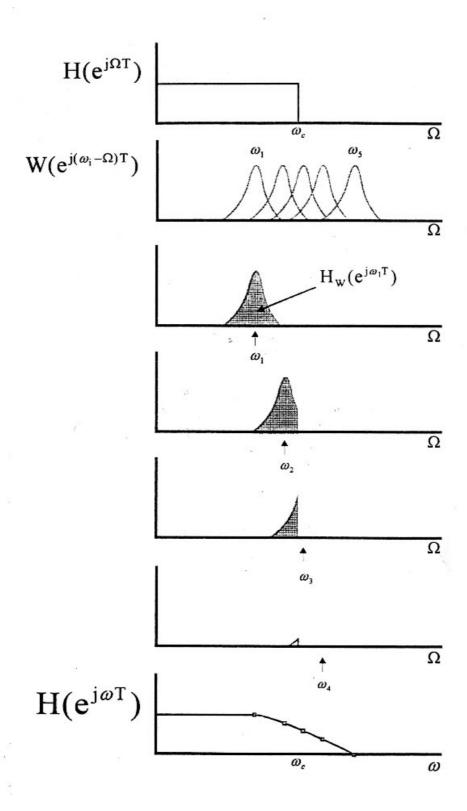
$$v = e^{j\Omega T}$$
 y $z = ej\omega T$

y tanto H(v) como $W\left(\frac{z}{v}\right)$ convergen en el círculo de radio uno en el plano v

$$H_{w}(e^{j\omega T}) = \frac{T}{2\pi} \int_{0}^{\frac{2\pi}{T}} H_{d}(e^{j\Omega T}) W(e^{j(\omega - \Omega T)}) d\Omega$$

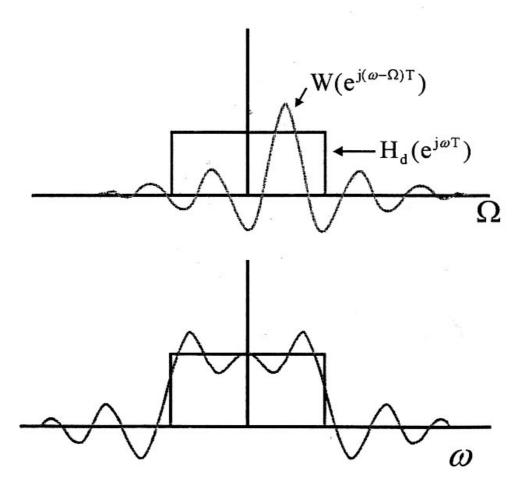


Esta última expresión nos dice que el espectro del filtro se obtiene hallando el área bajo la curva que resulta de multiplicar la respuesta en frecuencia ideal del filtro con la de la ventana para cada valor de ω .



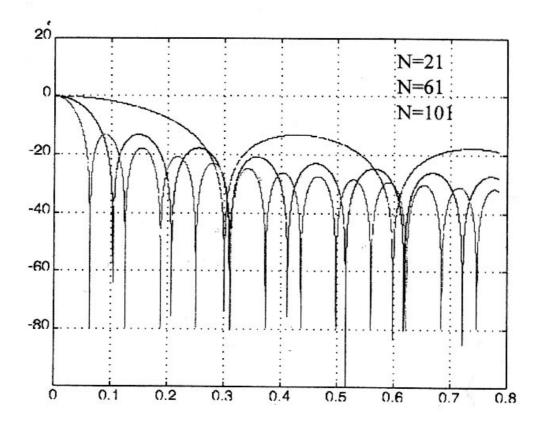


En la siguiente figura tenemos la convolución con el espectro de la ventana rectangular. Como puede verse, las oscilaciones de Gibbs provienen del alto ripple que tiene el espectro de la ventana rectangular





Espectro de la ventana rectangular



Es instructivo analizar el efecto del espectro de la ventana rectangular (trivial) sobre la respuesta en frecuencia del filtro. Como se mencionó antes la respuesta en frecuencia del filtro será la convolución del espectro ideal del mismo $H_d(e^{j\omega T})$ con el de la ventana w(n). El espectro de la ventana será:

$$W(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-jn\omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega T}$$

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}} \frac{sen\left(\frac{\omega NT}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

donde

$$|W(e^{j\omega T})| = \frac{sen\left(\frac{\omega NT}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)} - \frac{\omega_s}{2} \le \omega \le \frac{\omega_s}{2}$$



У

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega T \frac{N-1}{2} & sen\left(\frac{\omega NT}{2}\right) \ge 0\\ -\omega T \frac{N-1}{2} + \pi & sen\left(\frac{\omega NT}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

El ancho del lóbulo principal (medido al primer cero de $W(\omega)$) es $\frac{4\pi}{N}(T=1)$.

En la figura previa se observa que a medida que N aumenta el ancho del lóbulo principal y de los secundarios se hace más angosto. En dicha figura el espectro se representó normalizado respecto de N por lo tanto, en realidad la amplitud de todos los lóbulos aumenta con N. Como consecuencia el área debajo de cada uno de ellos permanece prácticamente constante.

Este comportamiento se puede constatar en la respuesta en frecuencia del filtro puesto que esta última se obtenía a partir de la convolución de $W(\omega)$ con la respuesta ideal del filtro (área bajo $W(\omega)$ cte).

De los resultados previos podemos concluir que la atenuación máxima en la banda pasante, como mínima en la banda atenuada (≅21 dB) del filtro diseñado con la ventana rectangular no se pueden mejorar. Una forma de mejorar las atenuaciones sería buscar ventana cuyos lóbulos laterales fuesen menores. Eso implica que la ventana en el tiempo decrezca en forma paulatina hasta llegar a cero y no en forma abrupta, como en el caso de la rectangular. Existe una gran variedad de ventanas con estas características. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

Bartlett (o triangular)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \le n \le N-1 \end{cases}$$

Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad 0 \le n \le N-1$$

Hann

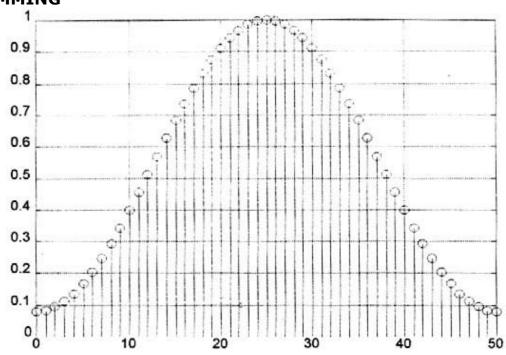
$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N - 1}\right) \quad 0 \le n \le N - 1$$

Blackman

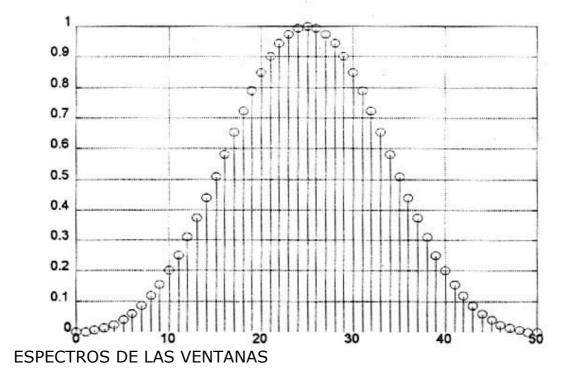


$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N - 1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N - 1}\right) \qquad 0 \le n \le N - 1$$

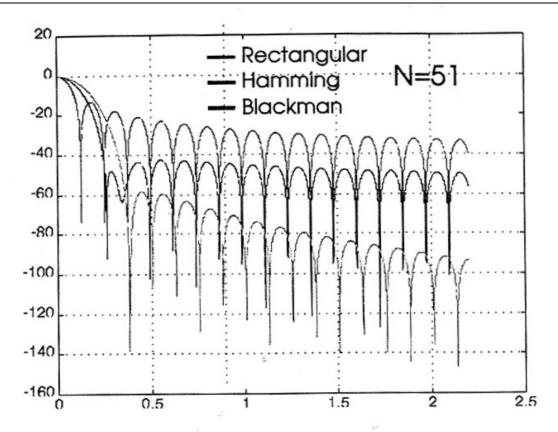
HAMMING



BLACKMAN







Como puede apreciarse la ventana de Hamming tiene un ripple menor que la rectangular mientras que en la de Blackman el ripple es menor que las anteriores.

De esta manera se pueden diseñar filtros con mayor atenuación en la banda atenuada.

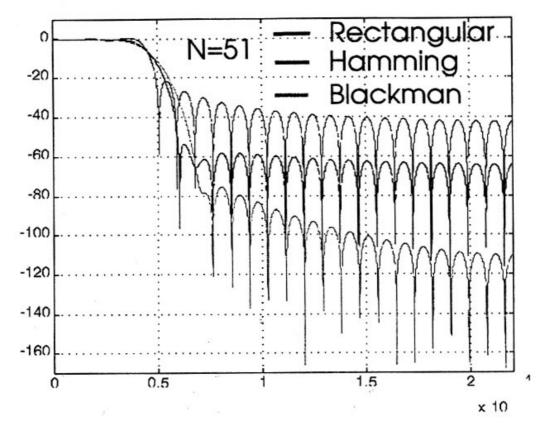
Pero como contrapartida cuanto menor es el ripple mayor el ancho del lóbulo principal y como consecuencia la banda de transición del filtro es menos abrupta.

Supongamos que queremos diseñar un filtro que tenga una atenuación dada. El primer paso es buscar la ventana que tenga el ripple apropiado de manera de cumplir con las especificaciones del diseño. Dado que no hay una gran cantidad de ventanas disponibles nos tendremos que conformar con aquella que nos brinde una atenuación igual o mayor a la pedida. Una vez encontrada debemos aumentar el orden del filtro (N) para reducir el ancho del lóbulo principal de manera de alcanzar la banda de transición deseada. Como la atenuación pedida raras veces coincide con alguna de las ventanas conocidas, generalmente ocurre que elegiremos una ventana cuya atenuación sea excesiva y por lo tanto tenga un lóbulo principal muy ancho, lo que nos da un filtro cuyo orden es excesivamente alto y por lo tanto no óptimo.



Ejemplo:

Filtros pasabajos con distintas ventanas



Ventana	Amplitud del lóbulo lateral (dB)	Ancho del Ióbulo principal	Mínima Atenuación en banda atenuada(dB)
Rectangular	-13	4π/N	-21
Bartlett	-25	8π/N	-25
Hann	-31	8π/N	-44
Hamming	-41	8π/N	-53
Blackman	-57	12π/N	-74



Ventana de Kaiser

Una ventana que supera los problemas mencionados previamente es la ventana de Kaiser dada por:

$$W_k(nT) = \begin{cases} I_0 \left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2} \right) \\ \hline I_0(\alpha) & |n| \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

donde α es un parámetro independiente e I_0 es la función de Bessel modificada de orden cero que puede ser aproximada por la siguiente serie de rápida convergencia:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

En la ventana de Kaiser el ripple puede ser variado en forma continua desde el valor bajo que tiene la ventana de Blackman hasta el alto valor de la ventana rectangular simplemente variando el parámetro α .

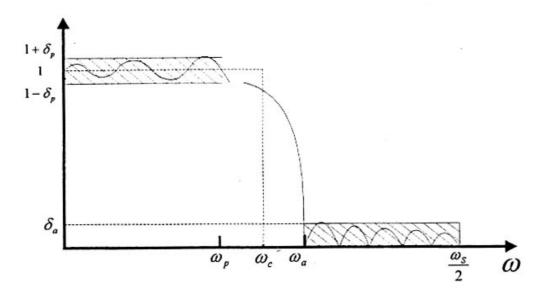
A medida que aumentamos α la atenuación en la banda atenuada y el ancho de la banda de transición del filtro se incrementan. Una vez escogido el valor de α que satisfaga la atenuación requerida en banda atenuada, se finaliza el diseño eligiendo el valor apropiado de N que nos de la banda de transición deseada.

Kaiser encontró que para una atenuación dada en banda atenuada el producto del ancho de la ventana y la banda de transición del filtro era aproximadamente constante y mínimo. Basándose en este hecho y usando aproximaciones numéricas de la respuesta en frecuencia de la ventana obtuvo expresiones aproximadas para la determinación de α y N en función de la atenuación requerida. Con estas expresiones es posible diseñar filtros con el mismo ripple en banda pasante y atenuada.

Antes de presentar estas expresiones veamos como se especifica el filtro en un ejemplo:



Especificaciones



Definiciones

$$A_p = 20 \log \left(\frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right)$$

$$A_a = -20\log \delta_a$$

$$B_t = \omega_p - \omega_a$$

DISEÑO USANDO LA VENTANA DE KAISER

Datos

Ripple en banda pasante $\leq A_p'$, ω_p Atenuación mínima en banda atenuada $\geq A_a'$, ω_a

1. Hallar h(n) usando la serie de Fourier (asumir respuesta en frecuencia ideal)

$$H(e^{j\omega T}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| \le \omega_s / 2 \end{cases} \quad \text{donde } \omega_c = \frac{\omega_a + \omega_p}{2}$$

2. Elegir δ de manera que $A_p \leq A_p'$ y $A_a \geq A_a'$ siendo δ = mín (δ_1, δ_2)

Donde
$$\delta_1 = 10^{-\frac{A_a'}{20}}$$
 $\delta_2 = \frac{10^{\frac{A_p'}{20}} - 1}{10^{\frac{A_p'}{20}} + 1}$



- 3. Calcular $A_a = -20 \log \delta$
- 4. Hallar α de las siguientes relaciones establecidas por Kaiser (para $\delta_a = \delta_p = \delta$)

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{para } A_a \le 21 \\ 0.5842(A_a - 21)^{0.4} + 0.07886(A_a - 21) & \text{para } 21 < A_a \le 50 \\ 0.1102(A_a - 8.7) & \text{para } A_a > 50 \end{cases}$$

5. Hallar el menor valor posible de N (impar) que satisfaga la siguiente relación:

$$N \ge \frac{\omega_s D}{B_t} + 1$$
 donde $D = \begin{cases} 0.9222 & \text{para } A_a \le 21 \\ \frac{A_a - 7.95}{14.36} & \text{para } A_a > 21 \end{cases}$

- 6. Con los valores de N y α hallar $w_k(n)$
- 7. Finalmente formar:

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_w(z)$$
 donde $H_w(z) = Z[w_k(n)h(nT)]$



EJEMPLO

Datos

$$\begin{split} & \omega_p = 1.5 \qquad \omega_a = 2.5 \qquad A_p = 0.1 \quad dB \quad A_a = 40 \quad dB \quad \omega_s = 10 \\ & \omega_c = \frac{\omega_p + \omega_a}{2} \qquad \omega_c = 2 \qquad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_s} \\ & \delta_1 = 10^{-\frac{A_a}{20}} \qquad \delta_1 = 1 \cdot 10^{-2} \\ & \delta_2 = \frac{10^{\frac{A_p}{20}} - 1}{\frac{A_p}{10^{-20}} + 1} \qquad \delta_2 = 5.7564 \cdot 10^{-3} \\ & A_a = -20 \cdot \log(\delta) \qquad A_a = 44.797 \\ & \alpha_1 = 0.5842 \cdot \left(A_a - 21\right)^{0.4} + 0.07886 \cdot \left(A_a - 21\right) \\ & \alpha = if \left[A_a \le 21, 0, if \left[A_a > 50, 0.1102 \cdot \left(A_a - 8.7\right), \alpha_1\right]\right] \\ & \alpha = 3.952 \\ & B_t = \omega_a - \omega_p \\ & D = if \left(A_a \le 21, 0.9222, \frac{A_a - 7.95}{14.36}\right) \qquad D = 2.566 \\ & N = ceil \left(\frac{\omega_s \cdot D}{B_t} + 1\right) \qquad N = if (mod(N, 2) > 0, N, N + 1) \end{split}$$

N = 27

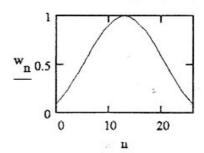


$$k = 1..30 \qquad n = 0..N - 1$$

$$1 + \sum_{k} \left[\frac{1}{k!} \left[\frac{\alpha \sqrt{1 - \left[\frac{2 \cdot \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}{N-1} \right]^2}}{2} \right]^k \right]^2$$

$$w_n = \frac{1 + \sum_{k} \left[\frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{\alpha \sqrt{1 - \left[\frac{2 \cdot \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}{N-1} \right]^2}}{2} \right]^k} \right]^2$$

Kaiser $\alpha = 3.952$ N = 27



$$h_{d_n} := if \left[n = \frac{N-1}{2}, 2 \cdot \frac{\omega}{\omega}, \frac{1}{\left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \pi \right]} \cdot sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \omega \cdot T \right] \right]$$

$$h_n := h_{d_n} \cdot w_n$$



 $h_n := h_{d_n} \cdot w_n$

WRITEPRN $(f_name) = h_n$

$\mathbf{w}_{\mathbf{n}}$	
0.092	
0.154	
0.227	
0.309	
0.399	-
0.494	
0.59	
0.684	
0.771	
0.848	
0.912	
0.96	2
0.99	
1	
0.99	
0.96	
0.912	
0.848	
0.771	
0.684	
0.59	
0.494	
0.399	
0.309	
0.227	
0.154	

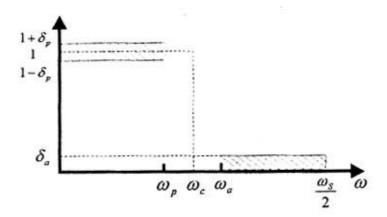
d _n
0.016
0.028
0
0.034
0.023
0.027
0.05
0
0.076
0.062
0.094
0.303
0.4
0.303
0.094
0.062
0.076
0
0.05
0.027
0.023
0.034
0
0.028
0.016

-0.001 0.002	
The second second	١
	ı
0.006	١
0	١
-0.013	I
-0.012	١
0.016	
0.035	
0	
-0.064	
-0.057	
0.09	I
0.3	
0.4	l
0.3	
0.09	
-0.057	I
-0.064	I
0	I
0.035	I
0.016	I
-0.012	
-0.013	
0	
0.006	
0.002	
-0.001	



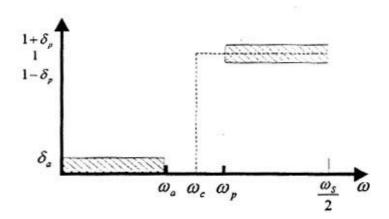
Ecuaciones generales de diseño

Pasabajos



$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} sen(n\omega_c T) & n \neq 0 \\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$

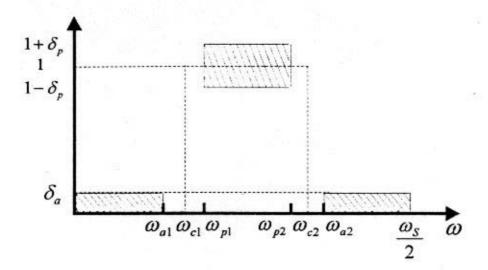
Pasa altos



$$h(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n\pi} sen(n\omega_c T) & n \neq 0 \\ 1 - \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$$



Pasa banda



$$h(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n\pi} \left[sen(n\omega_{c2}T) - sen(n\omega_{c1}T) \right] & n \neq 0 \\ \frac{2}{\omega_s} \left(\omega_{c2} - \omega_{c1} \right) & n = 0 \end{cases}$$

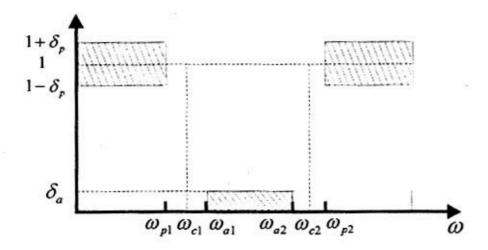
Hallamos $B_{t1} = \omega_{p1} - \omega_{a1}$ y $B_{t2} = \omega_{a2} - \omega_{p2}$

Tomamos la banda más angosta $B_{t1} = \min(B_{t1}, B_{t2})$

Con este valor hallamos $\omega_{c1} = \omega_{p1} - \frac{B_{t1}}{2}$ y $\omega_{c2} = \omega_{p2} + \frac{B_{t2}}{2}$



Rechazabanda



$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \left[sen(n\omega_{c1}T) - sen(n\omega_{c2}T) \right] & n \neq 0 \\ \frac{2}{\omega_s} \left(\omega_{c1} - \omega_{c2} \right) + 1 & n = 0 \end{cases}$$

Hallamos $B_{t1} = \omega_{a1} - \omega_{p1}$ y $B_{t2} = \omega_{p2} - \omega_{a2}$

Tomamos la banda más angosta $B_{t1} = \min(B_{t1}, B_{t2})$

Con este valor hallamos $\omega_{c1} = \omega_{p1} + \frac{B_{t1}}{2}$ y $\omega_{c2} = \omega_{p2} - \frac{B_{t2}}{2}$



Calculo de los coeficientes para un FIR usando la ventana de Kaiser

```
hold off
clear
                                 Datos
                                                                  Aa=40
                                                  Ap=0.1
                                 fa=5000;
                 fp=4000;
fs=44100;
Fp=fp;
Calculo de alfa y N
deltaa=10^(-.05*Aa);
deltap=(10^(.05*Ap)-1)/(10^(.05*Ap)+1);
delta=min([deltaa,deltap]);
                                                %Nuevo Aa
Aa=-20*log10(delta);
if Aa<= 21
alfa=0
else if Aa<=50
     alfa=.5842*(Aa-21)^0.4+0.07886*(Aa-21)
    else
     alfa=.1102*(Aa-8.7)
                end
end
if Aa<= 21
D=.9222;
else
 D=(Aa-7.95)/14.36;
end
N=fs*D/(fa-fp)+1;
N=ceil(N);
if(N/2-fix(N/2)=0)
 N=N+1;
end
Calculo de h(n)
                                          "«Normalizamos respecto de fs
fp=fp/fs;
fa=fa/fs;
fc=(fp+fa)/2;
n=1:(N-1)/2;
h(n)=2*fc*(sin(2*pi*fc*n)./(2*pi*fc*n));
                                          "a Genero h(n)
h=[ h(((N-1)/2 ):-1:1) 2*fc h];
                                          % h(n) Causal
                                          % h(n) W4(n) Multuplico por la ventana de Kaiser
h=h.*kai(N,alfa)';
                                           %Ajuste de la ganancia en continua (S=0 => Z=1)
 gain = abs(polyval(h, 1));
 h = h/gain;
 gain
```



Representación grafica de la respuesta en frecuencia

W=linspace(0,pi,1000); %Genera un vector de 1000 puntos e

a=1: %th es el denominador, a el numerador (a=1 en un FIR)

[H,W]=freqz(h,a,W); %Calculo el vector H(ejwt)

F=(W/(2*pi))*fs; %cambio de escala en el eje y de manera que Ws=1

modulo=abs(H); ?"Calculo del modulo fase=angle(H); ?"Calculo de la fase

MODULO

Bandas pasante y atenuada

v=[0,.5*fs,-80,10]; %Escala del grafico

axis(v);

plot(F,20*log10(modulo)); %Grafico Modulo

grid %Grilla

pause

Banda pasante (en detalle)

v=[0,Fp,-1,1]; %Escala del grafico

axis(v);

plot(F,20*log10(modulo)); %Grafico Modulo

grid "aGrilla

pause

%Fase %Escala del grafico

v=[0,.5*fs,-pi,pi];

axis(v);

plot(F,fase) %Grafico Fase %Gr

pause

Salvo coeficientes de h(n) en disco

h=h':

save h.dat h /ascii

Genero coeficientes para el dsp

!genfir



2. Diseño de filtros por el método MiniMax

El diseño de filtros FIR con fase lineal se puede encarar como un problema de aproximación de Chebyshev. Se pueden establecer las condiciones para las cuales el filtro resulta óptimo. Por óptimo se entiende que el error sobre todo el intervalo que se esta aproximando es mínimo. Existen varias técnicas para encontrar los coeficientes de estos filtros óptimos (mínimax). La más popular y ampliamente usada es la propuesta por Parks - McCellan. El término minimax se usa en el sentido que se busca minimizar el error máximo en la banda de interés.

Habíamos visto que la respuesta en frecuencia para los cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal estaba dado por:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{-j\omega(\frac{1\pi}{2})L} H^*(e^{j\omega})$$

L=0 => simétrico L=1 => Antisimétrico (N par o impar)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n) \quad Tipo 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos(\omega(n-\frac{1}{2})) \quad Tipo \ 2$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \operatorname{sen}(\omega n) \quad \text{Tipo 3}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} d(n) \operatorname{sen}(\omega(n-\frac{1}{2})) \quad \text{Tipo 4}$$



Podemos expresar las expresiones anteriores como el producto de dos funciones P y Q.

La función Q tiene una dependencia fija en w, mientras que P es una suma de cosenos.

Tipo Q(w) P(w)

Tipo1 1 $\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \widetilde{a}(n) \cos(\omega n)$

Tipo2 $\cos(\frac{\omega}{2})$ $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \widetilde{b}(n) \cos(\omega n)$

Tipo3 $sen(\omega)$ $\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \widetilde{a}(n) \cos(\omega n)$

Tipo4 $sen(\frac{\omega}{2})$ $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \widetilde{b}(n) \cos(\omega n)$

Recordar que para los tipos 2 a 4 Q(w) esta restringido a valer cero en w=0 y/o w=pi.

Para poner en evidencia como se puede formular el diseño de los filtros FIR de fase lineal como una aproximación de Chebycheff vamos a definir a D(w) como la respuesta deseada del filtro W(w). D(w) es una función que pondera el error de la aproximación y a E(w) como el error de la aproximación.



$$E(w)=W(w)[D(w) - H^*(w)]$$

Si ponemos a $H^*(w)=P(w)Q(w)$

$$E(w)=W(w)[D(w) - P(w)Q(w)]$$

Podemos poner a expresión previa en forma mas compacta si llamamos a :

Dado que Q es una función cuya dependencia de w es fija (sus coeficientes son constantes), podemos sacar Q como factor común:

$$E(w)=W(w)Q(w)[D(w)/Q(w) - P(w)]$$

Si llamamos a D*=D/Q y a W*=W Q . Entonces tenemos que :

La aproximación de Chebycheff puede ser ahora reformulada de la siguiente manera: Encontrar los coeficientes {a~,b~,c~,d~} que minimicen el valor absoluto máximo del error en toda la banda en la que se realiza la aproximación.

$$||E|| = \min [\max |E|]$$

Un teorema relacionado con este tipo de aproximaciones de Chebycheff es el teorema de alternancia. Este teorema establece lo siguiente:

Dado un polinomio P(w) como la combinación lineal de r funciones coseno

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que la aproximación de D(w) por P(w) (siendo este último único y óptimo en el sentido



Chebycheff) es que la función error E(w) tenga por lo menos r+1 extremos en el intervalo $(0,\pi)$.

En otras palabras debe haber r +1 puntos wi en $(0,\pi)$ tal que w1< w2< < wr< wr+1 tal que <math>E(wi)=-E(wi+1) i=1...r y

$$|E(\omega_i)| = \max [E(\omega)] \ \omega \in (0, \pi)$$

Basado en este teorema existen varias soluciones posibles al problema, entre ellas las más conocidas son debidas a:

Herrman – Shuessler que resuelven el problema como un sistema no lineal de ecuaciones

Hostetter-Oppenheim-Siegel que usan un polinomio de interpolación H(w) cuyas extremos son fijadas de antemano.

Parks-McCellan : Acá se utiliza el algoritmo de intercambio de REMEZ para encontrar los valores de las extremas.

Dado que este último algoritmo es el más usado, vamos a ver como se formula y usa.

Algoritmo de REMEZ (Parks - McClellan)

El algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1. Se especifica D(w), W(w) y N
- 2. Se construye $D^{(w)}$, $W^{(w)}$ y P(w).
- 3. Se resuelve el problema usando el algoritmo de REMEZ

Para usar dicho algoritmo se genera un vector de frecuencias con un numero de puntos mas denso que el que finalmente se va a usar.

Se parte de r+1 valores iniciales arbitrarios de las frecuencias donde ocurren las frecuencias extremas, en donde se fuerza al error = δ con signos alternados. Con estos valores iniciales se construye la siguiente ecuación:

$$E(w)=W^{(w)}[D^{(w)} - P(w)] = (-1)^k \delta$$

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$



O en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cos(2\omega_0) \cdots \cos((r-1)\omega_0) & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & \cos(\omega_r) & & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(r-1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}(\omega_0) \\ \hat{D}(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{D}(\omega_r) \end{bmatrix}$$

A partir de este sistema se obtiene δ . Con este valor D^(w)y W(^w) encontramos el polinomio de Lagrange que interpola a P(w).

En el paso siguiente evaluamos $|E(\omega)|$ usando P(w).

Si $|E(\omega)| \le \delta$ para todo w entonces la solución fue encontrada

Mientras que si $|E(\omega)| > \delta$ en por lo menos alguna de las frecuencias entonces se busca un nuevo conjunto de r+1 frecuencias como candidatas.

Los nuevos valores se eligen como los valores picos de la curva de error resultante. Esto hace que δ se incremente hasta converger hacia un valor máximo que es justamente el buscado.

Se evalúa P(w) en 2^{M} ($\geq N$) puntos y mediante la DFT se obtienen los coeficientes α .



3. Muestreo en frecuencia

Sabemos que un filtro FIR queda totalmente definido si conocemos su respuesta al impulso h(n).

Lo mismo ocurre si lo expresamos en función de la DFT de la h(n) (recordar que el desarrollo en serie de Fourier de la $H(e^{jwT})$ de un FIR tiene por coeficientes a h(n)). Así la DFT de la h(n) estará dada por:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk}$$
 DFT de h(n)

Por otro lado la IDFT de los H(k) estará dada por:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$$
 IDFT de H(k)

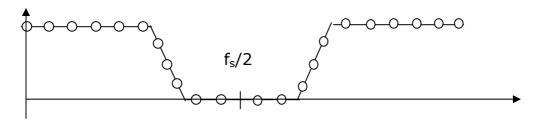
Teniendo en cuenta que:

$$H(k) = H(z)\Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

De esta última expresión queda claro que los H(k) surgen de muestrear a la H(z) sobre el círculo unitario y por lo tanto representan muestras de la respuesta en frecuencia del filtro. Estas N muestras se distribuyen a intervalos iguales sobre el círculo.

Se deduce entonces que podemos diseñar el filtro a partir de estas muestras en frecuencia.

Por ejemplo supongamos que tenemos la siguiente respuesta en frecuencia es la de un pasabajos como el de la figura:



La respuesta en frecuencia del filtro obtenido mediante la IDFT tendrá un error nulo donde están las muestras y un valor finito entre ellas.

Para encontrar la función que interpola entre muestras debemos evaluar la H(z) obtenida a partir de las muestras sobre el círculo unitario N=1

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$



Reemplazando h(n) por la IDFT de las muestras en frecuencia tenemos:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \right] z^{-n}$$

Intercambiando las sumas tenemos:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})k} z^{-1} \right]^n$$

La segunda es una suma geométrica y por lo tanto

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{1 - e^{j2\pi k} z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \qquad pues \quad e^{j2\pi k} = 1$$

Si evaluamos a esta última expresión en |z|=1 tenemos que :

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) S(\omega, k)$$

Donde:

$$S(\omega, k) = \pm e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{sen[N(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})]}{sen[(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})]}$$

Es decir que la respuesta en frecuencia del filtro es una combinación lineal del las funciones de interpolación $S(\omega,k)$. La forma de esta función es similar a la *sinc*.

Cuando se diseña un filtro pasabajos parte de las muestras estarán en la banda de paso, otras en la de transición y el resto en la banda atenuada.



Si la plantilla es ideal no hay banda de transición y por lo tanto sólo hay muestras en las demás bandas. En este último caso, el valor del ripple cerca de la transición es alto, debido al fenómeno de Gibbs.

Si se quiere reducir dicho error debemos permitir la existencia de una banda de transición. La cuestión es como ubicar las muestras que caen en dicha banda.

Una posibilidad sería ponerlas sobre una recta entre la banda atenuada y la de paso, pero eso no garantiza que el error obtenido sea el menor posible para un N dado. Para comprender como la existencia de una banda de transición no ideal pude reducir el error es la siguiente:

Los lóbulos laterales de las funciones $S(\omega,k)$ que acompañan a cada muestra de la banda transición compensan a los lóbulos de las muestras que están fuera esta banda (y que son las responsables del alto error cerca de la banda de transición). La cuestión es que deberíamos encontrar cual debería ser la ubicación optima de las muestras de la banda de transición para que el error sea mínimo, es decir una solución óptima. Para lograr esto se pueden plantear ecuaciones que relacionen la posición de las muestras en dicha banda con el error. Para la resolución de estas ecuaciones se emplean métodos de programación lineal. Los resultados numéricos de este planteo figuran en tablas (ver anexo al final).

<u>Diseño</u>

Para proceder al diseño de filtro partimos de $H_d(j\omega)$ que es la respuesta en frecuencia deseada. Esta función tendrá la siguiente forma general:

$$H_d(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{P} h(n) \ a_{nk}$$

 ω_k son las frecuencias donde se muestrea $H_d(j\omega)$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}(k + \alpha)$$
 $k = 0....P$ $y = \alpha = 0.1/2$

Los a_{nk} dependerán de con que tipo de filtro (Tipo 1 – 4) queramos realizar la síntesis. Asumir que P=(N-1)/2 si N es impar y P=N/2-1 si N es par.

Por ejemplo para **N par y simétrico (Tipo2)** tenemos que:

$$a_{nk} = 2\cos(\omega_k T[\frac{N-1}{2} - n])$$
 $\omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$



Una vez conocidos los a_{nk} y $H_d(j\omega_k)$ despejamos los h(n) de la siguiente ecuación:

$$H_d(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{P} h(n) \ a_{nk}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_d(j\omega_0) \\ H_d(j\omega_1) \\ \vdots \\ H_d(j\omega_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0P} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1P} \\ \vdots & & & & \\ a_{P0} & a_{P1} & \cdots & a_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(P) \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{A}} * \overline{h}$$

Ejemplo numérico:

Se desea diseñar un filtro pasabajos Tipo 2 N=4 tal que la ganancia para $\omega=0$ sea 1 y para $\omega=\pi/2$ sea 1/2.

$$H_d(0) = 1$$
 $H_d(\pi/2) = 1/2$ $N = 4$ $T = 1$

Para un filtro Tipo 2 los coeficientes a_{nk} son:

$$a_{nk} = 2\cos(\omega_k T[\frac{N-1}{2} - n]) \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$$

$$a_{00} = 2\cos(0) = 2 \quad a_{01} = 2\cos(\frac{\pi}{2}\frac{3}{2}) = -\sqrt{2}$$

$$a_{01} = 2\cos(0) = 2 \quad a_{11} = 2\cos(\frac{\pi}{2}(\frac{3}{2} - 1)) = \sqrt{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \end{bmatrix}$$

Como se trata de un filtro de fase lineal de orden par, la respuesta impulsiva debe ser simétrica respecto de (N-1)/2=1.5, es decir que:

$$h(0)=h(3)=0.07322$$
 y $h(1)=h(2)=0.42677$ y por lo tanto:

$$h(n)=[h(0), h(1), h(1), h(0)]$$



Ejercicio: Encontrar la respuesta impulsiva de los siguientes filtros y graficar la respuesta en frecuencia :

- a) N=15 Hd=1 para k=0,1,2,3 H_d=0 para k=4,5,6,7 (banda de transición ideal)
- b) En el caso (a) tomar la muestra T4=0.4 (k=4) (óptimo con banda de transición real)

Nota: Para N impar los a_{nk} son iguales que para el caso par excepto para n=(N-1)/2 donde $a_{nk}=1$.

ANEXOS

Anexo 1:

<u>Tablas de diseño para FIR en muestreo en frecuencia</u> (ver anexo 3 para entender su generación)

Referencias

- 1) M es la longitud del filtro FIR
- 2) las frecuencias equiespaciadas responden a la nomenclatura:

$$\omega_{K} = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha)$$
 M impar: $k = 0,1,...,(M-1)/2$ M par: $k = 0,1,...,M/2$

- 3) BW es la cantidad de muestras que corresponden a la banda de paso del filtro
- 4) Minimax: Amplitud relativa en dB del máximo lóbulo secundario
- 5) T1, T2: Amplitud relativa de los coeficientes de la banda de transición buscados respecto a la ganancia en la banda pasante.



Banda de transición con 1 muestra, α =0

TABLE C.1 Transition Coefficients for $\alpha = 0$

M Odd			M Even			
BW	Minimax	T_1	BW	Minimax	T_1	
	M = 15			M = 16		
1	-42.30932283	0.43378296	1	-39.75363827	0.42631836	
2	-41.26299286	0.41793823	2	-37.61346340	0.40397949	
3	-41.25333786	0.41047636	3	-36.57721567	0.39454346	
4	-41.94907713	0.40405884	4	-35.87249756	0.38916626	
5	-44.37124538	0.39268189	5	-35.31695461	0.38840332	
6	- 56.01416588	0.35766525	6	- 35.51951933	0.40155639	
	M = 33			M = 32		
1	-43.03163004	0.42994995	1	-42.24728918	0.42856445	
2	-42.42527962	0.41042481	2	-41.29370594	0.40773926	
3	-42.40898275	0.40141601	3	-41.03810358	0.39662476	
4	-42.45948601	0.39641724	4	-40.93496323	0.38925171	
6	-42.52403450	0.39161377	6	-40.85183477	0.37897949	
8	-42,44085121	0.39039917	8	-40.75032616	0.36990356	
10	-42.11079407	0.39192505	10	-40.54562140	0.35928955	
12	-41.92705250	0.39420166	12	-39.93450451	0.34487915	
14	-44.69430351	0.38552246	14	- 38.91993237	0.34407349	
15	- 56.18293285	0.35360718	3.7.3			
12	M = 65	0.55550710		M = 64		
1	-43.16935968	0.42919312	1	-42.96059322	0.42882080	
2	-42.61945581	0.40903320	2	-42.30815172	0.40830689	
3	-42.70906305	0.39920654	3	-42.32423735	0.39807129	
4	-42.86997318	0.39335937	4	-42.43565893	0.39177246	
5	-43.01999664	0.38950806	5	-42.55461407	0.38742065	
6	-43.14578819	0.38679809	6	-42.66526604	0.38416748	
10	-43.44808340	0.38129272	10	-43.01104736	0.37609863	
14	-43.54684496	0.37946167	14	-43.28309965	0.37089233	
18	-43.48173618	0.37955322	18	-43.56508827	0.36605225	
22	-43.19538212	0.38162842	22	-43.96245098	0.35977783	
26	-43.19336212 -42.44725609	0.38746948	26	- 44.60516977	0.34813232	
30	-44.76228619	0.38417358	30	-43.81448936	0.29973144	
31	- 59.21673775	0.35282745	30	43.81448930	0.29973144	
	M = 125			M = 128		
1	-43.20501566	0.42899170	1	-43.15302420	0.42889404	
2	-42.66971111	0.40867310	2	-42.59092569	0.40847778	
3	-42.77438974	0.39868774	3	-42.67634487	0.39838257	
4	-42.95051050	0.39268189	4	-42.84038544	0.39226685	
6	-43.25854683	0.38579101	5	-42.99805641	0.38812256	
8	-43.47917461	0.38195801	7	-43.25537014	0.38281250	
10	-43.63750410	0.37954102	10	-43.52547789	0.3782638	
18	-43.95589399	0.37518311	18	-43.93180990	0.37251587	
26	-44.05913115	0.37384033	26	-44.18097305	0.36941528	
34	-44.05672455	0.37371826	34	-44.40153408	0.36686401	
42	-43.94708776	0.37470093	42	- 44.67161417	0.36394653	
50	-43.58473492	0.37470093	50	-45.17186594	0.35902100	
58	-42.14925432	0.39086304	58	-45.17180594 -46.92415667	0.33902100	
		0.39063110	62	- 49.46298973	0.28751221	
59	- 42.60623264 - 44.78062010		02	-47.404707/3	0.20/31221	
60	-44.78062010	0.38383713				
61	- 56.22547865	0.35263062				



Banda de transición con 2 muestras, α =0

TABLE C.2 Transition Coefficients for $\alpha = 0$

M Odd			M Even				
вw	Minimax	T_1	<i>T</i> ₂	BW	Minimax	<i>T</i> ₁	T ₂
	М	= 15			•	I = 16	
1	-70.60540585	0.09500122	0.58995418	1	-65.27693653		
2	-69.26168156	0.10319824	0.59357118	2	-62.85937929		
3	-69.91973495			3	-62.96594906		
4	- 75.51172256	0.08407953	0.55715312	4	-66.03942485	0.12130127	0.61952704
5	- 103.46078300	0.05180206	0.49917424	5	-71.73997498	0.11066284	0.60979204
	М	1 = 33				1 = 32	
1	-70.60967541	0.09497070	0.58985167	1	-67.37020397		
2	-68.16726971	0.10585937	0.59743846	2	-63.93104696		
3	-67.13149548			3	-62.49787903		
5	-66.53917217	7 0.10965576	0.59674101	5	-61.28204536		
7	-67.23387909				-60.82049131		
9	-67.85412312	2 0.10502930	0.58771575	9	- 59.74928167		
11	-69.08597469			11	-62.48683357		
13	- 75.86953646			13	-70.64571857	7 0.11017914	0.60670943
14	- 104.04059029						
	M	1 = 65			λ	M = 64	
1	-70.6601495		0.58945943	1	-70.26372528	8 0.09376831	0.58789222
2	-68.8962230				-67.20729542		
3	-67.9023447				-65.80684286		
4	-67.2400379				-64.9522705		
5	-66.8606596				-64.4274234		
9	-66.2756118				-63.4171409		
13	-65.9641704				-62.72142419		
17	-66.1640462				-62.3705186		
21	- 66.7645683	3 0.10701904	0.58894575	21	-62.0484814		
25	-68.1340799	3 0.10327148	3 0.58320831	25	-61.8807406		
29	-75.9831304				-70.0568199	2 0.1071777	3 0.59842159
30	-104.9208374	0 0.04978485	5 0.48965183				
		I = 125				A = 128	
1	- 70.6801023				-70.5899295	8 0.0944519	0 0.58900996
2	-68.9415769				-68.6242160	8 0.1034973	1 0.59379058
3	-68.1935262				-67.6670169	8 0.1070129	4 0.59506081
5	-67.3426113				-66.9519662		
7	- 67.0976715						
9	- 67.0580129				-66.0131549		
17	-67.1750450				-65.8942241		
25	-67.2291898						
33	-67.1160993						
41	-66.7127132						
49	-66.6236419				-65.6791982		
57	- 69.2837848				-64.6151456		
58	-70.3578233				-71.7658939	04 0.1049682	6 0.5945227
59	-75.9470071				7		
60	-104.0901231	8 0.0499176	0 0.4896326	4			



Banda de transición con 1 muestra, $\alpha=1/2$

TABLE C.3 Transition Coefficients for $\alpha = \frac{1}{2}$

BW	Minimax	T_1
	M = 16	
1	-51.60668707	0.26674805
2	-47.48000240	0.32149048
3	-45.19746828	0.34810181
4	-44 .32862616	0.36308594
5	− 45.68347692	0.36661987
6	-56.63700199	0.34327393
	M = 32	
1	-52.64991188	0.26073609
2	-49.39390278	0.30878296
3	-47.72596645	0.32984619
4	-46.68811989	0.34217529
6	-45.33436489	0.35704956
8	-44.30730963	0.36750488
10	-43.11168003	0.37810669
12	-42.97900438	0.38465576
14	-56.32780266	0.35030518
	M = 64	
1	-52.90375662	0.25923462
2	-49.74046421	0.30603638
3	-48.38088989	0.32510986
4	-47.47863007	0.33595581
5 .	-46.88655186	0.34287720
6	-46.46230555	0.34774170
10	- 45.46141434	0.35859375
14	- 44.85988188	0.36470337
18	-44.34302616	0.36983643
22	-43.69835377	0.37586059
26	-42.45641375	0.38624268
30	- 56.25024033	0.35200195
	M = 128	
1	- 52.96778202	0.25885620
2	-49.82771969	0.30534668
3	-48.51341629	0.32404785
4	-47.67455149	0.33443604
5	-47.11462021	0.34100952
7	-46.43420267	0.3488037
10	-45.88529110	0.35493774
18	-45.21660566	0.3618225
26	-44.87959814	0.3652160
34	- 44.61497784	0.36784058
42	-44.32706451	0.37066040
50	-43.87646437	0.37500004
58	-42.30969715	0.3880737
	(part of 10 / 11 / 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1	0.0000101.



Banda de transición con 2 muestras, $\alpha=1/2$

BW	Minimax	T_1	T_2
	М	= 16	
1	-77.26126766	0.05309448	0.41784180
2	-73.81026745	0.07175293	0.49369211
3	-73.02352142	0.07862549	0.51966134
4	-77.95156193	0.07042847	0.51158076
5	-105.23953247	0.04587402	0.46967784
	М	= 32	
1	-80.49464130	0.04725342	0.40357383
2	-73.92513466	0.07094727	0.49129255
3	-72.40863037	0.08012695	0.52153983
5	-70.95047379	0.08935547	0.54805908
7	-70.22383976	0.09403687	0.56031410
9	- 69.94402790	0.09628906	0.56637987
11	- 70.82423878	0.09323731	0.56226952
13	-104.85642624	0.04882812	0.48479068
	M	= 64	
1	- 80.80974960	0.04658203	0.40168723
2	-75.11772251	0.06759644	0.48390015
3	-72.66662025	0.07886963	0.51850058
4	-71.85610867	0.08393555	0.53379876
5	-71.34401417	0.08721924	0.54311474
9	-70.32861614	0.09371948	0.56020256
13	-69.34809303	0.09761963	0.56903714
17	-68.06440258	0.10051880	0.57543691
21	-67.99149132	0.10289307	0.58007699
25	-69.32065105	0.10068359	0.57729656
29	- 105.72862339	0.04923706	0.48767025
	М	= 128	
1	-80.89347839	0.04639893	0.40117195
2	-77.22580583	0.06295776	0.47399521
3	-73.43786240	0.07648926	0.51361278
4	-71.93675232	0.08345947	0.53266251
6	-71.10850430	0.08880615	0.54769675
9	-70.53600121	0.09255371	0.55752959
17	-69.95890045	0.09628906	0.56676912
25	-69.29977322	0.09834595	0.57137301
33	-68.75139713	0.10077515	0.57594641
41	-67.89687920	0.10183716	0.57863142
49	-66.76120186	0.10264282	0.58123560
57	-69.21525860	0.10157471	0.57946395
61	- 104.57432938	0.04970703	0.48900685



Anexo 2:

Ejemplo de diseño en MATLAB de un filtro FIR por muestreo en frecuencia

```
T = .1
fs=1/T
format long
     ._____
H = [1 \ 1/2]
                               %N=4
H = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]
                               %N=15
N = 15
%-----
T1=0.4
H = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ T1 \ 0 \ 0 \ 0]
                         %N=15 con T1=0.4
T1=0.3789795
H=[1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0] %N=32 con T1=0.3789795
§_____
Fp=fs/(N/4);
H=H
                     %impar
if rem(N, 2) \sim = 0
 last=(N-1)/2;
else
 last=N/2-1;
end
2-----
% Calculo de los Ank
for k=0:last
    for n=0:last
       if ((rem(N,2) \sim 0) \& (n=(N-1)/2)) %N impar & n=(N-1)/2
             A(k+1, n+1) = 1;
             A(k+1,n+1)=2*cos((2*pi*k/N)*((N-1)/2-n));
       end
    end
end
Α;
if ((rem(N,2) \sim = 0) \& (n = = (N-1)/2)) %N impar
  h=[h;h(last:-1:1)]; %(last-1)+1=last no repito h((N-1)/2)
else
  h=[h;h(last+1:-1:1)]; %N par
end
W=linspace(0,pi,1000); % genera un vector de 1000 puntos
a=1;
                              % calculo el vector H(ejwt)
[H,W] = freqz(h,a,W);
```

Diseño de FIR

```
% h es el denominador, a el numerador (a=1 en un FIR)
F=(W/(2*pi))*fs; % cambio de escala en el eje x de manera que Ws=1
modulo=abs(H);
fase=angle(H);
% modulo en veces
v=[0,.5*fs,0,1];
axis(v);
plot(F, modulo);
grid
pause
% modulo en DB
v=[0,.5*fs,-80,10];
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo));
grid
pause
% Banda pasante
v=[0, Fp, -1, 1];
axis(v);
plot(F,20*log10(modulo));
grid
pause
% Fase
v=[0,Fp,-pi,pi];
axis(v);
plot(F, fase)
grid
pause
% Salvo coeficientes (h(n))
h=h';
save h.dat h /ascii
!genfir
                            %Genero coeficientes para el DSP
```

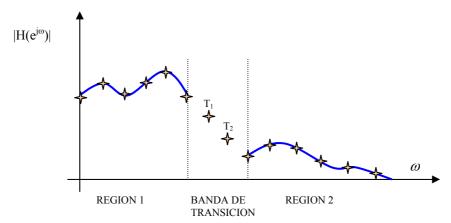


<u>Anexo 3</u>: Muestreo en frecuencia (desarrollo de la generación de tablas, donde se requieren conocimientos de métodos numéricos)

Descripción de la solución por optimización

Desarrollo para dos muestras

Para encontrar los valores óptimos de las muestras de la banda de transición (que no tienen restricciones), vamos a plantear el sistema de ecuaciones que se debe cumplir mediante un ejemplo de dos variables. Partimos de la siguiente curva, que resume las especificaciones de la respuesta en frecuencia.



La curva azul representa la respuesta en frecuencia deseada y las estrellas, las muestras. En particular T_1 y T_2 son las muestras a optimizar.

Queda claro que la cantidad de muestras es el doble de las graficadas, pues $H(e^{j\omega})$ es simétrica conjugada respecto a $\omega_S/2$ (ω_S es la frecuencia de muestreo del filtro)

Como habíamos visto $H(e^{j\omega})$ se puede expresar como:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{jw\frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k)$$

donde llamamos

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k)$$

y KM+1 representan la cantidad de muestras a especificar

En nuestro caso podemos expresar

$$H^*(e^{j\omega}) = B(\omega) + T_1 A_1(\omega) + T_2 A_2(\omega)$$



Donde $B(\omega)$ representa la contribución de las muestras fijas y $A_i(\omega)$, las contribuciones de las muestras desconocidas.

Para el planteo del problema escribiremos las restricciones que aplican típicamente en el diseño de filtros:



- a) $\left|H^*(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})\right| \leq \varepsilon$ para ω en la región 1
- b) Minimizar $\{T_1, T_2\}$ el máximo de $\left|H^*(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})\right|$ para ω en la región 2

Entonces el sistema a resolver se reduce a:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \mathbf{F_2} & T_1 \ A_1(\omega_m) + T_2 \ A_2(\omega_m) \leq \varepsilon - B(\omega_m) + H(e^{j\omega_m}) \\ & - T_1 \ A_1(\omega_m) - T_2 \ A_2(\omega_m) \leq \varepsilon + B(\omega_m) - H(e^{j\omega_m}) \\ & T_1 \ A_1(\omega_m) + T_2 \ A_2(\omega_m) - T_3 \leq - B(\omega_m) + H(e^{j\omega_m}) \\ & - T_1 \ A_1(\omega_m) - T_2 \ A_2(\omega_m) - T_3 \leq B(\omega_m) - H(e^{j\omega_m}) \end{array} \right\} \quad \text{para } \omega \text{ en la región } 2$$

En el sistema precedente T_3 representa el error máximo de la aproximación en la región 2.

Aplicación para los filtros FIR de fase lineal Tipo I

El filtro FIR cuya h(n) sea causal, de N muestras, donde N es un numero natural impar, y simétrica respecto a (N-1)/2, se conoce como Tipo I. Tiene la particularidad de proveer fase lineal y permite implementar transferencias de filtros pasabajos, pasaaltos, pasabanda y rechazabanda. Por su versatilidad, será entonces el tipo de FIR elegido.

Teniendo en cuenta estas propiedades, la expresión de $H(e^{j\omega})$ que habíamos obtenido en la fórmula (A) del apéndice 1 se puede llevar a la forma: (*ver desarrollo en apéndice 3*)

$$\mathbf{F_{3}} \quad H^{*}(e^{j\omega}) = \frac{H_{0}}{N} \frac{sen(\omega N/2)}{sen(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left[\frac{sen[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{sen(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{sen[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{sen(\omega/2 + \pi k/N)} \right]$$



Deducción de la expresión de la Respuesta en Frecuencia

$$H(z)|_{z=e^{jwt}} = \frac{1-e^{-jwTN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{-jwT}e^{j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

Multiplicando numerador y denominador dentro de la sumatoria por $e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\!k}$

$$H(z)|_{z=e^{jwt}} = \frac{1 - e^{-jwTN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}{e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} - e^{-jwT}}$$

$$e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} - e^{-jwT} = \varphi$$

$$= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - j \cdot sen\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right] - \left[\cos(wt) - j \cdot sen(wt)\right]$$

Agrupando tenemos

$$= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - \cos(wt)\right] - j\left[sen(wt) - sen\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]$$

Como

$$cos(b)-cos(a)=2 sen[(a+b)/2] sen[(a-b)/2]$$

У

$$sen(b)-cos(a)=2 cos[(a+b)/2] sen[(a-b)/2]$$

Tenemos

$$\varphi = 2 \cdot sen \left[\frac{wt}{2} + \frac{\pi k}{N} \right] sen \left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N} \right] + 2j \cdot cos \left[\frac{wt}{2} + \frac{\pi k}{N} \right] sen \left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N} \right]$$

Sacando factor común

$$\varphi = 2j \cdot sen \left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N} \right] \left[cos \left[\frac{wt}{2} + \frac{\pi k}{N} \right] - j \cdot sen \left[\frac{wt}{2} + \frac{\pi k}{N} \right] \right]$$

$$\varphi = 2j \cdot sen \left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N} \right] e^{-j\left(\frac{wt}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$\varphi = 2j \cdot sen \left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N} \right] e^{-j\frac{wt}{2}} e^{-j\frac{\pi k}{N}}$$

O sea que



$$H(z)|_{z=e^{jwt}} = \frac{1 - e^{-jwTN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}{2j \cdot sen\left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]} e^{-j\frac{wt}{2}} e^{-j\frac{\pi k}{N}}$$

$$H(z)|_{z=e^{jwt}} = \frac{1 - e^{-jwTN}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k}}{2j \cdot sen\left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]} e^{-j\frac{wt}{2}}$$

$$H(z)|_{z=e^{jwt}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j(\frac{\pi}{N})k} e^{+j\frac{wt}{2}(1-e^{-jwNT})}}{2j \cdot sen[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N}]}$$

$$\gamma = \frac{e^{j\frac{wT}{2}} \left(1 - e^{-jwNT}\right)}{2j}$$

$$\gamma = \frac{e^{j\frac{wT}{2}} - e^{j\frac{wT}{2}}e^{-jwNT}}{2j}$$

Sacando factor común

$$\gamma = e^{-j\frac{wNT}{2}} e^{j\frac{wT}{2}} \frac{e^{j\frac{wT}{2}} e^{j\frac{wNT}{2}} e^{j\frac{wNT}{2}} e^{-j\frac{wNT}{2}} - e^{j\frac{wT}{2}} e^{-jwNT} e^{j\frac{wNT}{2}} e^{-j\frac{wN}{2}}}{2j}$$

$$\gamma = e^{-j\frac{wNT}{2}} e^{j\frac{wT}{2}} \frac{e^{j\frac{wNT}{2}} - e^{-j\frac{wNT}{2}}}{2j}$$

$$\gamma = e^{-j\frac{wNT}{2}} e^{j\frac{wT}{2}} sen\left(\frac{wNT}{2}\right)$$

$$H(jw) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} e^{-j\frac{wNT}{2}} e^{j\frac{wT}{2}} sen\left(\frac{wNT}{2}\right)}{sen\left[\frac{wt}{2} - \frac{\pi k}{N}\right]}$$

$$e^{-j\frac{wNT}{2}}e^{j\frac{wT}{2}} = e^{j\left(\frac{-wNT+wT}{2}\right)} = e^{j\left(wT\frac{-N+1}{2}\right)} = e^{jwT\frac{N-1}{2}}$$



$$H(jw) = \frac{e^{j\omega T \frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} sen\left(\frac{Nw}{2}\right)}{sen\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$
ecir
$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) S(\omega, k)$$

Es decir

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) S(\omega, k)$$

donde

$$S(w,k) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)^{k}} sen\left(\frac{Nw}{2}\right)}{sen\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

Como

$$sen(a) = sen(a-2k\pi)$$

o bien

$$sen(a) = \pm sen(a-k\pi)$$

$$S(w,k) = \pm \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)^k} sen\left(\frac{Nw}{2} - k\pi\right)}{sen\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

$$S(w,k) = \pm \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{N}\right)k} sen\left[N\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{sen\left(\frac{w}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

+ para k par y - para k impar

Entonces reconstruimos la respuesta reemplazando en (A)

$$H(e^{jwT}) = \frac{e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{e^{-j\left(\frac{k\pi}{N}\right)} sen\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$



$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)}$$
 $k = 0,1 \cdots N-1$

$$H(k) = |H(N-k)|$$
 $k = 0,1 \cdots N-1$

N Par

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2} & k = 0, 1 \dots N/2 - 1 \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \frac{N-1}{1} & k = \frac{N}{2} + 1 \dots N - 1 \\ 0 & k = N/2 \end{cases}$$

$$H(N/2) = 0$$

N impar

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2} & k = 0, 1 \cdots \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \frac{N-1}{2} & k = \frac{N}{2} + 1 \cdots N - 1 \end{cases}$$

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{N-1}{2}} & k = 0,1 \cdots N/2 - 1 \\ 0 & k = \frac{N}{2} \\ |H(k)|e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)\frac{N-1}{2}} & k = \frac{N}{2} + 1 \cdots N - 1 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}}{N} sen\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)|(-1)^k}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} - \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \frac{|H(k)|}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} \right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}}{N} sen\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)|(-1)^k}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} - \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \frac{|H(k)|(-1)^k}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})}\right]$$

Haciendo I=N-k en la segunda suma

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}}}{N} sen\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)|(-1)^k}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} - \sum_{l=1}^{N/2-1} \frac{|H(N-l)|(-1)^l}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi (N-l)}{N})}\right]$$



$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}}{N} sen\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[\frac{H(0)}{sen(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left|H(k)\right| (-1)^k \left(\frac{1}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{1}{sen(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})}\right)\right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}} \left[\frac{H(0)}{N} \frac{sen(\frac{\omega N}{2})}{sen(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} \left(\frac{sen[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{sen[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right]$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T \frac{(N-1)}{2}} \left\lceil \frac{H(0)}{N} \frac{sen(\frac{\omega N}{2})}{sen(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} (-1)^k \left(\frac{sen[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{sen[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})} \right) \right\rceil$$

Para N par Tipo I

$$H^{*}(e^{j\omega T}) = \left[\frac{H(0)}{N} \frac{sen(\frac{\omega N}{2})}{sen(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} (-1)^{k} \left(\frac{sen[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{sen[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})}\right)\right]$$

Análogamente para N impar

$$H^{*}(e^{j\omega T}) = \left[\frac{H(0)}{N} \frac{sen(\frac{\omega N}{2})}{sen(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left(\frac{sen[N(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} + \frac{sen[N(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})]}{sen(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N})}\right)\right]$$