El conjunto de variables aleatorias X={X(t):t$\epsilon$T} se denomina un **proceso estocástico.**

T es el espacio del parámetro

la unión de los recorridos de las variables X(t) se denomina el **espacio de estados** E del proceso

Ejemplo:

juego a color en la ruleta

T={0,1,2,3,...}

T=$t_i$el instante del i-ésimo juego

$X_i$: resultado del juego i

verde 0

rojo 1

negro 2

$R_{X_i} = \{0,1,2\} \forall i$

E={0,1,2} $= \underset{i \epsilon T}{U} \quad R_{x_i}$

p($X_i = 0$)=$\frac{1}{37}$

p($X_i = 2$)=p($X_i$=1)=$\frac{18}{37}$

Este ejemplo es simple, casi que no tiene sentido. En este ejemplo, además, se cumple la independencia de cada juego respecto del anterior

sólo por eso vale

$a_i\epsilon$

Requisito: debemos poder hablar de la probabilidad conjunta

(para poder hacer cálculos con procesos estocásticos)

Caso que vamos a ver muchas veces:

Espacios de estados discreto y en tiempo continuo.

Un caso particular de esto es poisson

Espacio de estados continuo y en tiempo continuo.

| E\T | discreto | continuo |
|---|---|---|
| discreto | ejemplo cadenas de markov | ejemplo Proceso de Poisson |
| continuo | x | x |

x = no lo vemos.

# 1 Random walk o caminata aleatoria:

procceso estocástico con espacio de estados discreto y en tiempo discreto

A partir de t=0, x=0 en cada instante el cambio de posición es1 o -1 con probabilidades p y (1-p)

T=$\mathbb{N}$ E=$\mathbb{Z}$

p=0.5;

N=100;

derecha=(rand(1,N)<p); recuerdo: rand tira valores con distribución uniforme

saltos = 2*(derecha-0.5)

x=cumsum(saltos);

plot(0:N.1,x)

$X_n$ :posición en el instante n

En random walk se da que:

$p(X_n = k+1/X_{n-1} = k)$=p

$p(X_n = k+1/X_{n-1} = j)$=$\begin{cases} p & j=k \\ 0 & j \neq k, j \neq k+2 \\ 1-p & j=k+2 \end{cases}$

$Z_K$=$\begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p \end{cases}$

$Z_K$ son independientes

$X_0 = 0$;$X_1 = Z_1; X_2 = Z_1 + Z_2$;... ; $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_K$

como para generar la siguiente necesito la anterior no son independientes

$E(X_n)=\sum_{k=1}^{n} E(Z_K) = \sum_{k=1}^{n}(p-(1-p))$ = n (2p-1)

$V(X_n)=\sum_{k=1}^{n} V(Z_K)$

$V(Z_k)$= p +1 -p -(2p-1)$^2$= 1-4p$^2$+4p -1 = 4p(1-p)

entonces

$V(X_n)$=4np(1-p)

tiene la propiedad de que crecen con el tiempo

Además se puede demostrar que Xn tiene una distribución de probabilidades que depende de n (es un problema de la práctica 3)

$X_0 = 0$

$D_n$: # pasos a derecha al instante n

$p(X_n = k)$=p(2$D_n$-n=k)=p($D_n$=$\frac{n+k}{2}$)

k=$D_n$-(n-$D_n$)=2$D_n - n$

Esta varible aleatoria tiene distribución binomial

$p(X_n = k)=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n'+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$

Procesos de Markov:

Se dice que un proceso estocastico es un proceso de Markov si y solo si para todo n, toda secuencia $t_1 < t_2 < ... < t_n$

Procesos Estacionarios:

Se dice que un proceso estocástico es un estacionario sii para todo n, toda secuencia $t_1 < t_2 < ... < t_n$ y todo conjunto de valores $x_1, x_2, .., x_n$

$p(X(t_n) \leq x_n, X(t_{n-1})) \leq x_{n-1}, ..., X(t_1) \leq x_1$

$= p(X(t_n - t_1))$ algo que supongo que está en el libro

se dice que las probabilidades no dependen del tiempo

la caminata aleatoria es de markov y no es estacionario, pero es de incrementos estacionarios.

Incrementos estacionarios

Incrementos independientes

Acá aparecen las series telescópicas

Procesos de conteo

Se dice que un proceso estocástico n(t) es de conteo si y solo si

N(0)=0

N(t)>=0 para todo t >=0

s<t N(s) <= N(t)

E=$N^0$(naturales con el 0)

N(t)-N(s) representa el número de eventos que ocurrieron despues de s pero antes de t

Procesos de Poisson

$\lambda se llama intensidad o tasa de eventos$

Se dice que un proceso estocástico de conteo N(t) es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda$ sii:

1. Tiene incrementos independientes
2. Los incremntos son estacionarios.
3. La probabilidad de que exactamente un evneto ocurra en un intervalo de tiempo de longitud h es $\lambda$h + o(h)
4. La probbailidad de que más de 1 evento ocurra en un intervalo de tiempo de longitud h es o(h)

$\lambda$:# promedio de eventos por unidad de tiempo (si t es el tiempo)

P( N(t+h)-N(t) = 1) = P(N(h)=1)=$\lambda$h+o(h)

o(h) se lee como “la o chica”

g(h)=o(h)

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

P(N(h)>1)=o(h) la probabilidad de que haya más de un evento en un intervalo muy corto

o(h) se le llama infinitésimo