Teorema Central del Límite (**T.C.L.**)

Esto toma importancia a la hora de sumar muchas variables aleatorias

Central = "importante"

límite = "cuando cierto parámetro tiende a ∞"

$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$

v.a. **independientes**

sería un sistema al que le entran $X_1, X_2, ..., X_n$

$E(X_k)=\mu_k$; $\sigma(X_k) = \sigma_k$

(μ_k y σ_k finitos)

acá todas las variables pesan 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$$

$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$

$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) \underset{n \to \infty}{\to} \Phi(z)$

Sin importar la distribución que sea tiende a la normal! wow

$F_{Z_n}(z) \approx \Phi(z)$

- Acá las variables pesan distinto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2}$$

$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$; $F_{Z_n}(z) \underset{n \to \infty}{\to} \Phi(z)$

- Si $\mu_k = \mu$; $\sigma_k = \sigma$ $\forall k : 1, 2, ..$

  $E(S_n)=n\mu$

  $\sigma(S_n) = \sqrt{n\sigma^2}=\sqrt{n}\sigma$

  $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$

  Media muestral , Xprom = Xpromedio

  $XProm_n=\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

E(Xprom)=μ

$\sigma(Xprom) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Si $X_k \sim Bernoulli(p)$

Aproximación normal de la binomial

$S_n \sim Binomial(n,p)$

con la condición de que la normal tenga el mismo valor esperado y la misma dispersión que la binomial

$P(S_n = r) \approx \Phi(\frac{r+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}})$-$\Phi(\frac{r-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

la aproximación viene de que con n tendiendo a infnito la binomial se comporta como la normal y si tomamos un rectangulo de base 1 (por eso los ± 0.5)en la distribucion de probabilidades de la normal entonces el area del rectangulo va a dar la probabilidad de la binomial en r

$p(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi(\frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

la aproximación se mejora si se hace esta mejora de corrección por continuidad (porque la variable es discreta)

La aproximación es razonable si:

np>10

n(1-p)>10

- Si $X_k \sim Poisson(\lambda)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Poisson(n\lambda)$

$X \sim Poisson(\lambda)$

$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ con $X_k \sim Poisson(\frac{\lambda}{n})$

$\lambda > 10$

$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi(\frac{b+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$-$\Phi(\frac{a-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$

Problema 6 Guia 6

$\{X_k\}_{k=1}^{1500}$

X_k :error en el número k

$S_{1500} = \sum_{k=1}^{1500} X_k$

$X_k \sim U(-0.5, 0.5)$

$P(|S_{1500}|>15)= P(\{S_{1500} > 15\} U \{S_{1500} < -15\}) \approx$(aprox con media 0 y sigma calculado abajo) $2\Phi(\frac{-15-0}{5\sqrt{5}})=2\Phi(-\frac{3\sqrt{5}}{5}) \approx$ 0.18

$E(S_{1500})=1500E(X_1)=0$

Porque $E(X_1)=0$

$V(S_{1500})=1500\frac{1^2}{12} = 125$

$\sigma(S_{1500}) \approx 11.18$

Problema 9

lo mismo pero

$\{X_k\}_{k=1}^{n}$

X_k : contenido de solucion en el tambor k en litros

no sabemos que distribución tiene

Sólo se conoce $E(X_k)=30.01\ \forall k$

$\sigma(X_k) = 0.1$

n=50

$P(S_{50} > 1500)=1-P(S_{50} \leq 1500) \underset{T.C.L.}{\approx} 1 - \Phi(\frac{1500-1500.5}{0.707}) \approx 0.7602$

$E(S_{50})= 50\ (30.01)=1500.5$

$V(S_{50})=50\ (0.01)=0.5$

$\sigma(S_{50}) \approx 0.707$

Paco recalca que no hay otra forma de hacerlo ya que no conozco la distribución.

b) sabiendo que hay 2401, cual es la prob de que se llenen 80 tambores sin que se vacie el tanque?

(Sería que la suma no exceda 2401)

$P(S_{80} < 2401) \approx \Phi(\frac{2401-80(30.01)}{0.1(\sqrt{80})}) \approx 0.588$

en c)

$0.9 = P(S_{100} < C) \approx \Phi(\frac{C-100(30.01)}{0.1\sqrt{100}})$

Problema 10

b) X_k :tiempo de atención del cliente k en minutos

$E(X_k) = 1.5$

$\sigma(X_k) = 1$

$P(S_n < 120)=0.1$

"n grande" ya que cuantas veces entra 1.5 en 120? como 80...

$E(S_n)=n(1.5)$

$\sigma(S_n) = \sqrt{n}(1)$

$\Phi(\frac{120-1.5n}{\sqrt{n}})=0.1$

$\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.282$