Proceso estocástico:

X={X(t) , t ϵT}

E = $\underset{t\epsilon T}{\cup} \quad R_{x(t)}$

N(t):# de eventos en (0,t) t$\epsilon\mathbb{R}^+$

Un proceso de conteo por ejemplo es un experimento binomial

N(t_2)-N(t_1) a esto le llamabamos incremento

N(t_2)-N(t_1) Numero de ocurrencias en t_2- Numero de ocurriencias en t_1

N(t_2)-N(t_1) $\approx$ bin(t2-t1,p) => No es estacionario.

Un proceso de conteo se dice que es un processon de Poisson con parametro λ si solo si

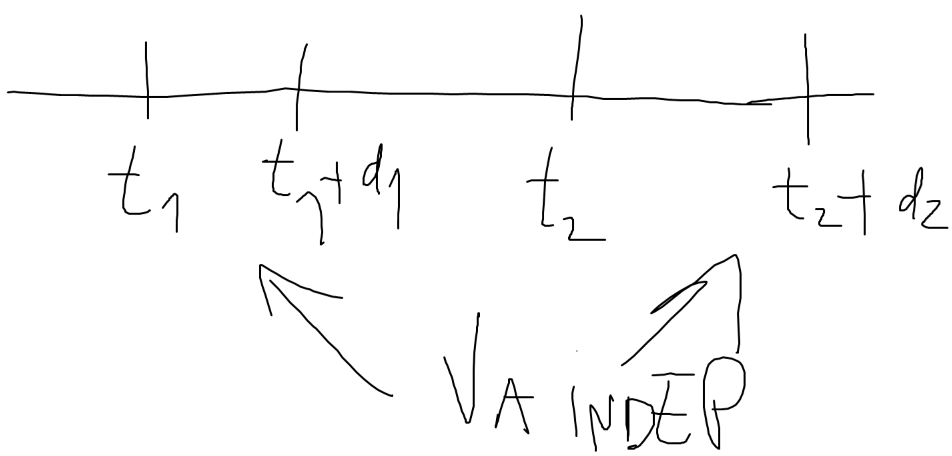
1. Tiene incrementos independientes
2. Los incrementos son estacionarios
3. La probabilidad de que exactmanete un evento ocurra en un intervalo de tiempo de longitud h es λh + o(h)
4. La probabilidad de que más de un evento ocurra en el intervalo de tiempo de longitud h es o(h)

Aclaracion:

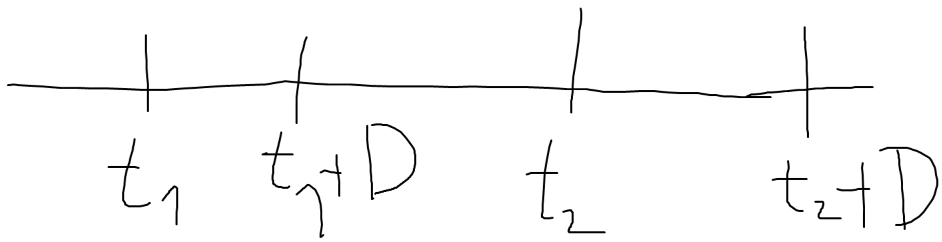
Que sea de incrementos independientes significa que si tengo un intervalo (con la condición de que sean disjuntos)

t1 , t1 + d1 , t2 , t2+d2

N(t1+d1)-N(t1) son v.a. indep. N(t2+d2)-N(t2)



En cambio los incrementos estacionarios cumplen que



P(N(t1+D)-N(t1)=k)=P(N(t2+D)-N(t2)=k) $\forall$k,D

P(N(t+h)-N(t)=1)=λh+o(h)

si o(h)=g(h)

$\frac{g(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

P(N(t+h)-N(t)>1)=o(h)

Proceso de Poisson:

P(N(t)=n)=$\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n$

E(N(t))=$\lambda t \rightarrow \frac{E(N(t))}{t} = \lambda$

cuando se conoce la tasa de ocurrencias el proceso de poisson queda univocamente definido

V(N(t))=λt

σ(N(t))=$\sqrt{\lambda t}$

Esto sirve para los servidores, cuantos pedidos llegan en promedio a un t determinado (creo)

Dice paco que hay que tener cuidado con las unidades

Recordamos que

si T~$e^{\lambda} \rightarrow \begin{cases} E(T) = \frac{1}{\lambda} \\ \sigma(T) = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$

Un proceso de Poisson es estacionario.

No nos importa cuando empieza sino cuanto dure.

Te preguntan sobre cual es la probabilidad de que arriben mas de 3 automoviles en un intervalo de 15 min

P(N(t1+D)-N(t1)=k)=P(N(D)=k)=P(N(15min)=k)

N(15min)~Poisson(3)

P(N(15min)>3))=1-P(N(15min)$\leq$ 3)=1-$\sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-3}}{k!} 3^k \approx 0.353$

Cual es la probabilidad de que el tiempo entre dos arribos consecutivos exceda 10 min.

P(T>10min)= 1-P(T$\leq$10min)=1-(1-e$^{-\frac{0.2}{min}10min}$)=e$^{-2} \approx 0.1353$

$\frac{0.2}{min} = \lambda$

¿Cual es la probabilidad de que el numero de automoviles que arriben en 20min sea menor que 5 sabiendo que fue mayor que 2?

P(N(20min)<5 / N(20min)>2)= $\frac{P(N(20min)=3)+P(N(20min)=4)}{P(N(20min)>2)}$

N(t)~Poisson(λt)con λ h = 0.2 x 20

p_k=P($N_h = k$)=($e^{-\lambda h}$)$\frac{(\lambda h)^k}{k!}$

Otro ejemplo.

El estacionamiento abre a las 8 hs

¿Cual es la probabilidad de que el quinto arribe antes de 8.30hs?

Como Poisson no tiene memoria es o mismo empezar a las 8 que a las 0 hs

τ_s : *tiempo* hasta la ocurrrencia del 5^{to}evento

P($\tau_s < 30$)=P(N(30min)$\geq$5)=1-$\sum_{k=0}^{4}$(e^{-6})$\frac{(6)^k}{k!} \approx 0.715$

$\tau_k > x$ si no ocurre ningun evento ($T_{k-1}, T_{k-1} + x$)

entonces

P($\tau_k > x$)=P(N($T_{k-1} + x$))-N(T_{k-1})=0) = P(N(x)=0)

τ_k :tiempo entre ocurrencias

$\tau_1 = T_1$

$\tau_2 = T_2 - T_1 \rightarrow T_2 = \tau_1 + \tau_2$

$\tau_2 = T_3 - T_2 \rightarrow T_3 = T_2 + \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$

T_r:instante hasta la ocurrencia del r-ésimo evento

T_r=$\sum_{k=1}^{r} \tau_k$

$\tau_k \sim Exp(\lambda)$

$\{\tau_k\}_{k \epsilon \mathbb{N}}$v.a. independientes (exponenciales) -> v.a.i.i.d. (la primera i es por independientes, i.d = idénticamente distribuidas)

$T_r \sim r(r, \lambda)$ r:1,2,... $\lambda \epsilon \mathbb{R}^+$

E(T_r)=$\frac{r}{\lambda}$

V(T_r)=$\frac{r}{\lambda^2}$

Ejemplo:

A las 12 hs se abre una entrada auxiliar al estacionamiento, por la que entran automóviles según otro proceso de Poisson con parámetro $\lambda a = 0.1$(1/min) en forma independiente de lo que ocurre por la entrada principal.

¿Cuál es la probabilidad de que el numero total de automoviles que arriban al estacionamiento durante 20 min a partir de las 12hs exceda 10?

$\xrightarrow[X_1=N_1(20min)]{\lambda_1=0.2\frac{1}{min}}$ $\xleftarrow[X_2=N_2(20min)]{\lambda_2=0.1\frac{1}{min}}$

P(X_1+X_2>10)=1- P($X_1 + X_2 \leq$ 10)= 1-P($X_1 \geq 0, 0 \leq X_2 \leq 10 - X_1$)=(*) (cuenta difícil de hacer)

esto equivale cuando sumamos por separado la suma de las tasas

(solo es válido cuando son independientes)

X_3=N_3($20min$); $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

=>(*)=P($X_3 > 10$)= 1-P($X_3 \leq 10$))

¿Cual es la probabilidad de que arriben 5 automoviles por la entrada principal y 3 por la entrada auxiliar en un intervalo de 30 min a partir de las 12hs?

P($X_1 = 5 \wedge X_2 = 3$)=P($X_1 = 5$)P($X_2 = 3$)=$\frac{e^{-6}6^5}{5!}\frac{e^{-3}5^3}{3!}$

¿Cual es la probabilidad de que arriben 4 automoviles en los primeros 20 min, 8 en los primeros 40 minutos y 20 en los primeros 90 min?

Suponga $\lambda = 0.2\frac{1}{min}$

Estos intervalos no son disjuntos

N_{20}=4 (de 0 a 4)

N_{40}=8 (de 0 a 8)

N_{90}=20(de 0 a 20)

P($N_{20} = 4$,$N_{40} = 8$,$N_{90} = 20$)=P($N_{20} = 4$,$N_{40} - N_{20} = 4$,$N_{90} - N_{40} = 12$)=P($N_{20} = 4$,$N_{20} = 4$,$N_{50} = 12$)=(P($N_{20} = 4$))$^2 P(N_{50} = 12)$