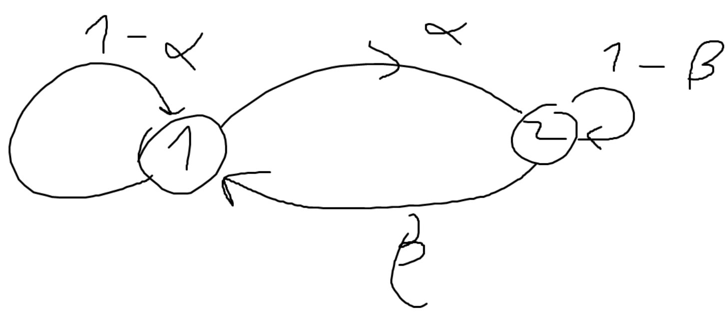
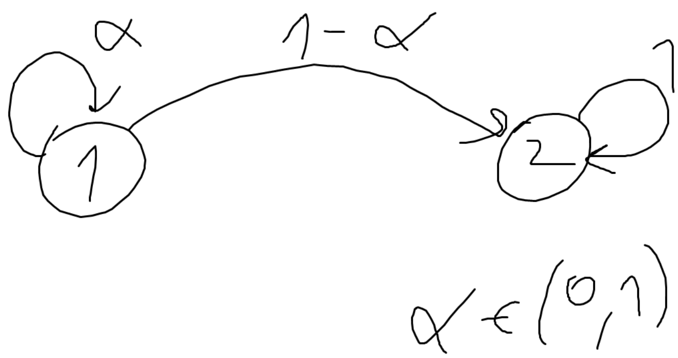
Recuerdo Cadenas de markov
$\mathbb{E}$={1,2,...,N}
$\mathbb{T}$=$\mathbb{N}_0$
X$_n$: estado al instante n
(las siguientes variables no son indepentdientes, dependen de la anterior)
P(X$_{n+1}$=i$_{n+1}$$/X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0$)=P(X$_{n+1}$ $= i_{n+1}/X_n = i_n$)
P($\cap_{k=0}^{n} X_k = i_k$)= P(X$_n$ $= i_n/\cap_{k=0}^{n-1}$X$_k$=i$_k$)P($\cap_{k=0}^{n-1}$X$_k$=i$_k$)=
=P(X$_n$=i$_n$$/X_{n-1} = i_{n-1}$)P(X$_{n-1}$ $= i_{n-1}/$X$_{n-2}$ $= i_{n-2}$)...P(X$_1$ $= i_1/X_0 = i_0$)P(X$_0$ $= i_0$)
Donde P(X$_n$=i$_n$$/X_{n-1} = i_{n-1}$)P(X$_{n-1}$ $= i_{n-1}/$X$_{n-2}$ $= i_{n-2}$)...P(X$_1$ $= i_1/X_0 = i_0$) = P(X$_n$ $= i_n/X_0 = i_0$)
Si todos los elementos son visitados entonces la cadena es regular
O sea que se asegura de que si
$(\mathbb{P}^n)_{ij}$=p(i$\rightarrow^{(n)} j$)
La **cadena de Markov** es **homogénea** si
P(X$_{n+1}$ $= j/$X$_n$ $= i$) no depende de n
p(i$\rightarrow^{(1)} j$)=p$_{ij}$=($\mathbb{P}$)
donde p$_{ij}$ ≥ 0
$\sum_{j=1}^{N}$p$_{ij}$ $= 1$ con i:1,2,...,N
$(\mathbb{P}^n)_{ij}$=p(i$\rightarrow^{(n)} j$)
Recuerdo:
$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$
$(\mathbb{P}^n)_{ij}$>0 $\forall i, j$
$\forall k \geq 4$
entonces existe $\lim_{n \to \infty} \Pi_n = \Pi_\infty$
con $(\pi_\infty)_i > 0$ $\forall i$
y ademas independientes de Π_0
$(\Pi_n)_i = P(X_n = i)$
$\Pi_{n+1} = \Pi_n \mathbb{P}$
Hay problemas de equilibrio que no cumplen la condición $(\pi_\infty)_i > 0$ $\forall i$



$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$
$\alpha = 1; \beta = 1$
$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{P}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{P}^n=\begin{cases} \mathbb{P} & nimpar \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & npar \end{cases}$$
$\alpha = 0; \beta = 0$
$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\mathbb{P}^n = \mathbb{P} \forall n$

$0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1$
$0 < \alpha + \beta < 2$
$\Pi_n = (1 - \alpha_n \ \alpha_n)$
$(1\text{-}\alpha_{n+1} \ \alpha_{n+1}) = (1\text{-}\alpha_n \ \alpha_n)\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$
$1\text{-}\alpha_{n+1} = (1\text{-}\alpha_n)(1\text{-}\alpha) + \beta\alpha_n$
$-\alpha_{n+1} = -\alpha_n - \alpha + \alpha\alpha_n + \beta\alpha_n$
$\alpha_{n+1} = (1\text{-}(\alpha+\beta))\alpha_n + \alpha$
Donde
$(1\text{-}(\alpha+\beta)) = \text{r}$
$0 < \alpha + \beta < 2$
$\text{-}1 < \text{r} < 1$
$|r| < 1$
$\alpha_1 = r\alpha_0 + \alpha$
$\alpha_2 = r\alpha_1 + \alpha = r^2\alpha_0 + \alpha(1+r)$
$\alpha_3 = r\alpha_2 + \alpha = r^3\alpha_0 + \alpha(1+r+r^2)$
...
$\alpha_n = r^n\alpha_0 + \alpha(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1})$
$(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) = \frac{1-r^n}{1-r}$
$\text{P}(\text{X}_n = 2) = \alpha_n = (1-\alpha-\beta)^n\alpha_0 + \alpha\frac{1-(1-\alpha-\beta)^n}{1-1+\alpha+\beta}$
$\text{P}(\text{X}_n = 1) = 1\text{-}\alpha_n$
como |r|<1 entonces $\text{r}^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$
$\underset{n\to\infty}{lim} \quad \alpha_n = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
$\underset{n\to\infty}{lim} \quad \Pi_n = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ (no se hacer espacios en lyx)
El estado i es absorbente si $\text{p}_{ii} = (\mathbb{P})_{ii} = 1$



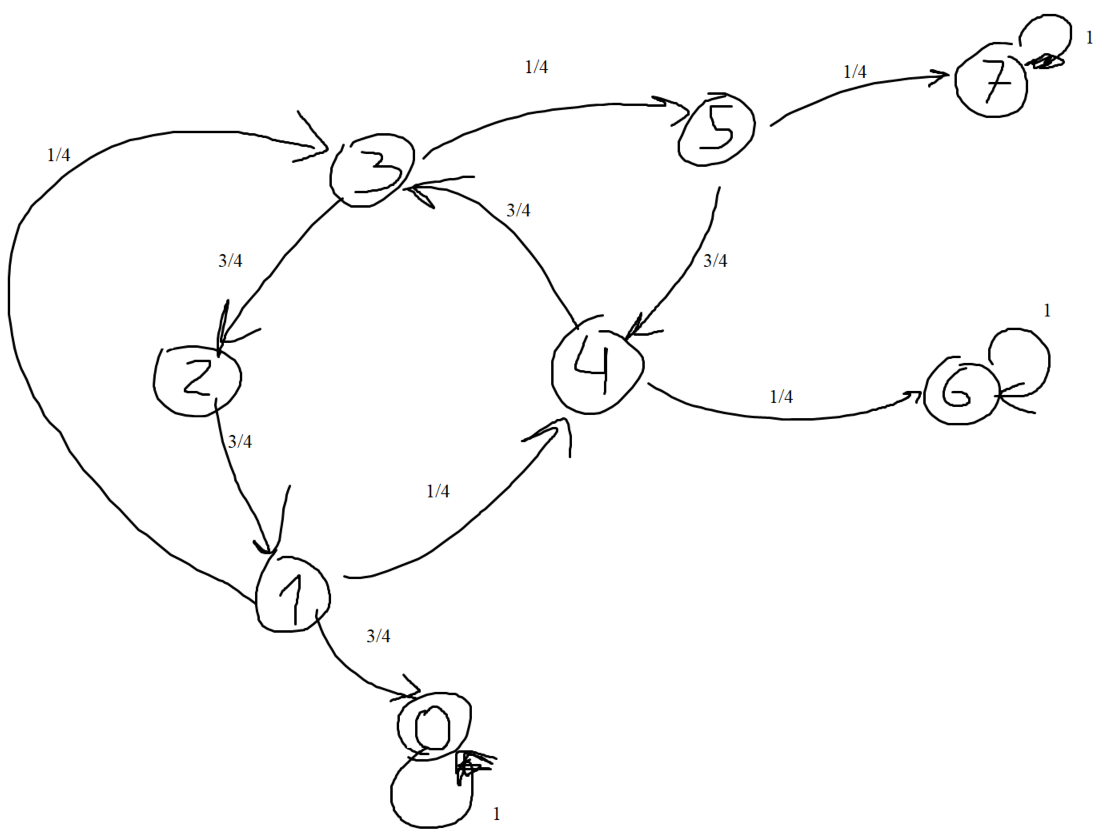
$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & (1-\alpha^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
...
$\mathbb{P}^r = \begin{pmatrix} \alpha^r & (1-\alpha^r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
r:1,2,3...
$\underset{n\to\infty}{lím} \quad \mathbb{P}^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Pi_n = (\alpha_n \ 1\text{-}\alpha_n)$
$(\alpha_{n+1} \ 1-\alpha_{n+1}) = (\alpha_n \ 1\text{-}\alpha_n)\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n$
$\alpha_1 = \alpha\alpha_0$

$\alpha_2 = \alpha\alpha_1 = \alpha^2\alpha_0$
...
$\alpha_n = \alpha^n\alpha_0 \underset{n\to\infty}{\to} 0 => \Pi_n \underset{n\to\infty}{\to} (0\ ,\ 1)$

Problema 24 de la guía

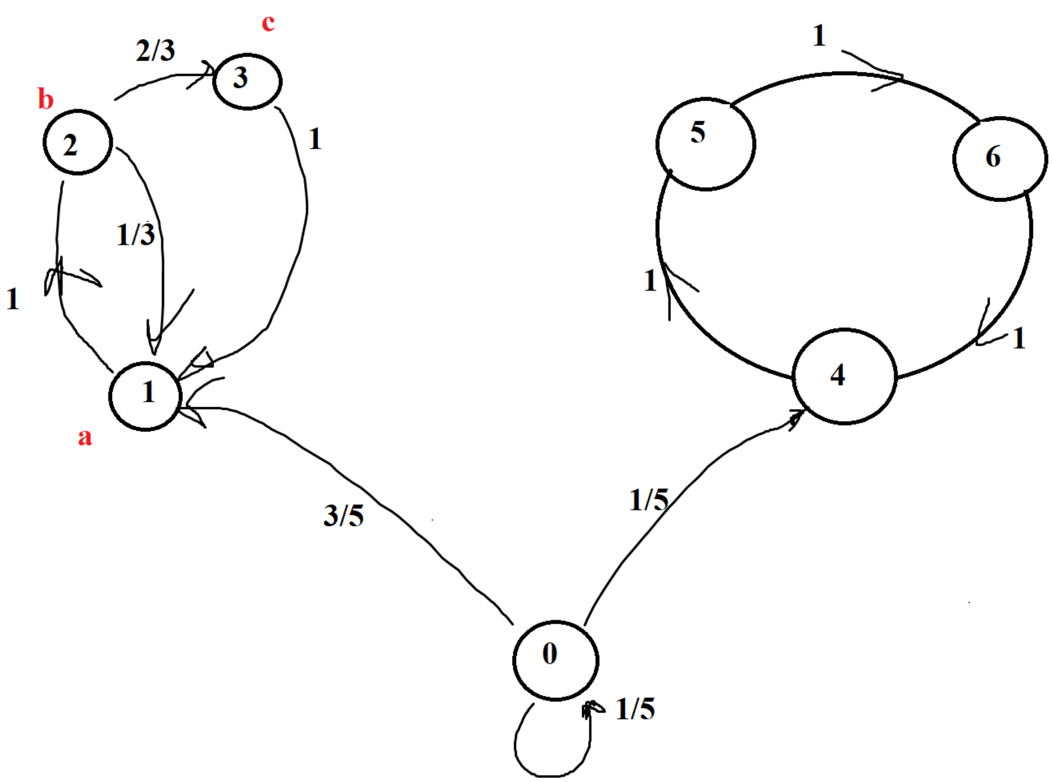
1 $\to$"estoy vivo"
2 $\to$"estoy muerto"
X_n :estar vivo al comienzo del año n
$P(X_0 = 1)=1$
$P(X_1 = 1, X_0 = 1)=P(X_1 = 1/X_0 = 1)P(X_0 = 1)=\alpha$
$P(X_1 = 0, X_0 = 1)=1-\alpha$
$P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 1)=P(X_2 = 0/X_1 = 1)P(X_1=1/X_0 = 1)P(X_0 = 1)=\alpha(1-\alpha)$
Donde
$P(X_2 = 0/X_1 = 1)=1-\alpha$
$P(X_1 = 1/X_0 = 1)=\alpha$
$P(X_3 = 0, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1)=(1-\alpha)(\alpha)^2$
$\mathbb{T}$: #años de vida
n P(T=n)
1 $1-\alpha$
2 $\alpha(1-\alpha)$
3 $\alpha^2(1-\alpha)$
E(T)= $1(1-\alpha)+2\alpha(1-\alpha)+3\alpha^2(1-\alpha)$...
Recuerdo
$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{q}{1-q}$ con $|q|<1$

Problema 19 de la guía



1, 2 ó 3 jugadas
$3\to5\to7$ (2):$\frac{1}{16}$
$3\to5\to4\to6$ (3):$\frac{3}{64}$
$3\to2\to4\to6$ (3):$\frac{3}{64}$

$3 \to 2 \to 1 \to 0(3)$: $\frac{27}{64}$
$\frac{37}{64} \to 1 - \frac{37}{64} = \frac{27}{64}$
Estado 0 y estado 7 son absorbentes
Problema 22



Dijo paco que la sub cadena del lazo izquierdo es regular.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{(a b c)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\text{(a b c)}$$
b$\frac{1}{3}$+c=a
a=b
a+b+c=1
También podemos pensarlo como corrientes eléctricas (Ley de Kirchoff de los nodos):
Nodo a: a=b
Nodo b: c+$\frac{b}{3} = a$
Nodo c: b$\frac{2}{3}$=c
Hay N-1 ecuaciones LI
Sugiere ver este problema por las preguntas. Las mismas se resuelven usando el calculo de probabilidades (alto consejo).