Joaquín Mestanza, Álgebra Lineal

Autovalores:

En general:

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Sea T :$\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una Transformación Lineal

Si T(v)= λv , $\lambda \epsilon \mathbb{K}$ y v$\epsilon\mathbb{V}$ con $v \neq \overrightarrow{0}$

Decimos que λ es **autovalor(ava)** de T y v es su **autovector(ave)** asociado

En particular(Todo lo que se desarrolle a continuación se basa en esto):

Si

$\boxed{\text{T:}\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ , T(v)=A.v con A } \epsilon\mathbb{K}^{nxn} \text{ y v}\epsilon\mathbb{V}}$

y además

$\boxed{\text{T(v)=A.v=}\lambda\text{v con } \lambda\epsilon\mathbb{K} \text{ con } v \neq \overrightarrow{0} \text{ (}\lambda \text{ es } \textbf{ava} \text{ de A y v su } \textbf{ave} \text{ correspondiente)}}$

bajo esta condición

A.v - λv $= \overrightarrow{0}$

(A-λI)v= $\overrightarrow{0}$

Es un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas con $v \neq \overrightarrow{0}$

Queremos obtener las soluciones no triviales por ende pedimos que det(A-λI) = 0

en otras palabras quiero infinitas soluciones

Polinomio característico

Se define polinomio característico a p(λ)=det(A-λI)

Si p(λ)=0 $\implies \lambda$es raíz de p(λ) y será un **ava de A**

gr(p(λ))=n

donde gr es el grado del polinomio.

el coeficiente principal será 1 si n es par y -1 si n es impar.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

p(λ)=(-1)$^n(\lambda - \lambda_1)....(\lambda - \lambda_n)$

λ_i es raíz de p(λ) 1$\leq i \leq n$ (n raíces complejas)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

tendré a la suma de n raíces reales

Propiedad:

Sea A $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ y A.v=λv con $\lambda\epsilon\mathbb{K}$ con $v \neq \overrightarrow{0}$ (λ es **ava** de A y v su **ave** correspondiente)

$S_\lambda = \{v \epsilon \mathbb{K}^n / A.v = \lambda v\}$

[Notar que en esta definición no se excluyó al v=$\overrightarrow{0}$, ya que, de lo contrario no sería un subespacio]

S_λ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$ (también llamado **autoespacio** correspondiente al **ava** λ)

$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ (como $\mathbb{C}$-esp vectorial (escalares complejos))

Definición:

Multiplicidad algebraica **(ma):**

Es el número que representa las veces que figura el **ava** como raíz de p(λ)

Multiplicidad geométrica **(mg):**

Es el número que representa la dimensión del subespacio correspondiente al **ava** λ

Teorema:

para cada **ava**

$\boxed{\mathbf{1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)}}$

Propiedades:

1) $(\alpha A).v = (\alpha\lambda)v$ con$\alpha\epsilon\mathbb{K}$

$\alpha\lambda$ es ava de αA y v es su ave

2) A^kv=λ^kv ; $k\epsilon\mathbb{N}$

λ^kes ava de A^{k}y v es su ave

3) A no es inversible $\iff$ $\lambda = 0$ es su ava

4) Si A es inversible $\implies$ A^{-1}v=$\frac{1}{\lambda}$v

$\frac{1}{\lambda}$ es ava de A^{-1}y v es su ave

5)Si A$\epsilon\mathbb{R}^{nxn}$, $\lambda\epsilon\mathbb{C} \implies$ A.$\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, $v\epsilon\mathbb{C}^n/ \ v \neq \overrightarrow{0}$

(conjugo ambos miembros y obtengo que si tenia un autovalor , conozco otro autovalor que va a ser su conjugado y además el autovector asociado a este último es el conjugado del autovector que ya conocía)

6) Si A es una matriz triangular inferior o superior $\implies$ $\lambda_i = [A]_{ii}$;1$\leq i \leq n$

7) Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ son avas distintos de la matriz A con $r \leq n$ y v$_1$,v$_2$,...,v$_r$ son sus ave correspondientes $\implies$ {v$_1$,v$_2$,...,v$_r$} es L.I.

Matrices semejantes:

Sean A, B $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ se dice que B es semejante a A si existe una matriz P$\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ inversible / B = P^{-1}.A .P

Si multiplico por izquierda por P ambos miembros:

P.B=(P.P^{-1})A.P = I . A .P = A.P

y ahora por derecha por P^{-1}

PBP^{-1}=A(P.P^{-1})=A.I = A

A es semejante a B.

Propiedades:

1) A es semejante a A

2) A es semejante a B $\implies$ B es semejante a A

3) Si A es semejante a B y B es semejante a C $\implies$ A es semejante a C

4) Si A es semejante a B $\implies$ A y B tienen los mismos avas (se demuestra aplicando determinante a ambos miembros)

5) si A y B semejantes $\implies$ det(A)=det(B)

6) si A y B semejantes $\implies$ tr(A)=tr(B)

Matrices Diagonalizables:

Sea A $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ se dice que A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

A = P D P^{-1}

donde D= $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}$

Teorema:

Sea A $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ $\implies$ A es diagonalizable

si existe una base B de **aves** de A en $\mathbb{K}^n$

Si B = {v$_1$,v$_2$,...,v$_n$}

y A.v$_i$=λ_iv$_i$; $1 \leq i \leq n$

C$_{BE}$ =$\begin{pmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ con E la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

D=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$

A= C$_{BE}$D C$_{EB}$

Propiedades:

si tengo n autovalores λ_i con $1\leq i \leq n$

$\boxed{\text{tr(A)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda_1+\lambda_2+....+\lambda_n}$

$\boxed{\det(\text{A})=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i= (\lambda_1)(\lambda_2)...(\lambda_n)}$

1) Una matriz A $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ es diagonalizable $\iff$ $\forall\lambda_i$: ma(λ_i)=mg(λ_i)

2) si A $\epsilon\mathbb{K}^{nxn}$ y tiene n avas distintos $\implies$ A es diagonalizable

3) Si A es diagonalizable $\implies$ A^k es diagonalizable

4) Si A= C$_{BE}$D C$_{EB}$ $\implies$ A^k= C$_{BE}$D^k C$_{EB}$; $k\epsilon\mathbb{N}$

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ y } D^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

5) Si A es diagonalizable $\implies$ A^{-1} es diagonalizable (si tiene inversa)

A= C$_{BE}$D C$_{EB}$

A^{-1}= (C$_{BE}$D C$_{EB}$)$^{-1}$= (C$_{EB}$)$^{-1}$(D)$^{-1}$ (C$_{BE}$)$^{-1}$= C$_{BE}$D $^{-1}$C$_{EB}$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores de una Transformación Lineal:

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

Sea T :$\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ una Transformación Lineal

Si T(v) = λv ; $\lambda\epsilon\mathbb{K}$ y v$\epsilon\mathbb{V}$ con $v\neq\overrightarrow{0}$

decimos que λ es un ava de T y v su ave correspondiente

Si $\mathbb{V}$ es un espacio de <u>dimensión finita</u> y B es una base de $\mathbb{V}$

y [T]$_{BB}$= [T]$_B$ (matriz de la T.L. relativa a la base B)

Siempre se define sobre la misma base de entrada y de salida sino no sirve para calcular los avas de T

[T(v)]$_B$=[λv]$_B$=λ[v]$_B$

pero [T]$_B$[v]$_B$=[T(v)]$_B$

luego [T]$_B$[v]$_B$=λ[v]$_B$

([T]$_B$[v]$_B$-λ[v]$_B$) = $\overrightarrow{0}$

([T]$_B$-λI)[v]$_B$ = $\overrightarrow{0}$

si $v\neq\overrightarrow{0}$ $\implies$ [v]$_B\neq\overrightarrow{0}$

$\implies$ pido [T]$_B-\lambda$I no inversible $\implies$ $det([T]_B-\lambda I)=0$

polinomio característico de T

p(λ)=$det([T]_B-\lambda I)=0$

El ava de T será raíz de p(λ)

Si hubiese tomado otra base por ejemplo B' /

[T]$_{B'}$ =C$_{BB'}$[T]$_B$C$_{B'B}$ con C$_{BB'}$=(C$_{B'B}$)$^{-1}$

$\implies$ $[T]_B$ y [T]$_{B'}$son semejantes $\implies$ tienen los mismos **autovalores**

conclusión: los avas de T son los mismos no importa que base tomemos (y los aves también).

Propiedades:

1) para avas distintos los ave son LI

2) T es un isomorfismo $\iff$ $\lambda\neq 0$

3) λ^k es ava de T^k y v su ave correspondiente

4) T^{-1}(v)= $\frac{1}{\lambda}$ v