Notas de las notas de mate 5:

Funciones de singularidad

$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Rampa unitaria: $r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$

notar: $r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)ds$

Parábola unitaria: $p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} & t > 0 \end{cases}$

$p(t) = \int_{-\infty}^{t} r(s)ds$

notar:

Pulso unitario: $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |\mathrm{t}| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

Triangular unitaria: $\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$

Son funciones de singularidad porque en algún punto del dominio no existen las derivadas de algún orden.

Energía y potencia

Señales de energía:

$Ex = \begin{matrix} lím \\ t \to +\infty \end{matrix} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$ donde $0 < Ex < \infty$

Señales de potencia:

$Px = \begin{matrix} lím \\ t \to +\infty \end{matrix} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$ donde $0 < Px < \infty$

Propiedades de señales de energía y potencia:

Desplazamiento:

sea $y(t) = x(t + t_0)$ con $x(t)$ señal de energía se puede probar entonces que $E_y = E_x$

sea $y(t) = x(t + t_0)$ con $x(t)$ señal de potencia se puede probar entonces que $P_y = P_x$

Efecto de escalamiento por un $\alpha \neq 0$:

supongamos x una señal de energía con energía Ex se puede probar que

si $y(t) = x(\alpha t)$ entonces $Ey = \frac{Ex}{|\alpha|}$

supongamos x una señal de potencia con potencia Px se puede probar

si $y(t) = x(\alpha t)$ entonces$Py = Px$

Funciones generalizadas empieza en la nota 1 página 16 hasta el final de la nota lo dejo para leer después pero dejo un ejemplo útil:

Ejemplo 18 Evaluemos la siguiente integral:

$$\int_a^b \delta^{(n)}(t - \tau) g(t) dt,$$

siendo $g(t)$ una función n veces derivable con continuidad. Supondremos además que $a \neq \tau \neq b$.

Consideremos la función

$$\chi_{(a,b)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in (a, b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\chi_{(a,b)}(t)g(t)$ es una función n-veces derivable con continuidad, salvo en los puntos a y b, donde no es continua. Por tanto, de acuerdo con lo dicho anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta^{(n)}(t-\tau)g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-\tau)\chi_{(a,b)}(t)g(t)dt \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\chi_{(a,b)}(t)g^{(n)}(t)dt \\ &= (-1)^n \chi_{(a,b)}(t)g^{(n)}(t)|_{t=\tau} \\ &= \begin{cases} (-1)^n g^{(n)}(\tau) & \text{si } \tau \in (a,b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}\end{aligned} \tag{29}$$

Aquí hemos utilizado el hecho que $(\chi_{(a,b)}g)^{(n)}(t) = \chi_{(a,b)}(t)g^{(n)}(t)\ \forall t \neq a, b$.

Nota 2:

Serie exponencial de Fourier:

$x(t) \sim \sum_{k\epsilon\mathbb{Z}} X_k e^{ik\omega_0 t}$

donde:

$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-ik\omega_0 t}dt\ \forall k\epsilon\mathbb{Z}$

Igualdad de parserval para la exponencial de fourier:

$\sum_{k\epsilon\mathbb{Z}} |X_k|^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$

Serie trigonométrica:

$a_0 = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)cos(n\omega_0 t)dt\ n\epsilon\mathbb{N}$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)sen(n\omega_0 t)dt\ n\epsilon\mathbb{N}$

En cuanto a la igualdad de parserval:

$|a_0|^2 + \sum_{n\epsilon\mathbb{N}} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$

Coeficientes de las series exponencial:

Desplazamiento τ:

Sea x(t) periódica de período T y supongamos que $\{X_n, n\epsilon\mathbb{Z}\}$ coef de la s. exponencial y sea y(t)=x(t+τ) entonces:

$Y_n = X_n e^{in\omega_0\tau}$

Relaciones y valor medio de la señal:

x(t) periódica de período T, $\{X_n, n\epsilon\mathbb{Z}\}\{a_0, a_n, b_n, n\epsilon\mathbb{N}\}$ sus coef.

$\mathrm{X}_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt = a_0$

X_0 se denomina el valor medio de la señal x(t)

$\mathrm{X}_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ y $\mathrm{X}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\ n\epsilon\mathbb{N}$

Si x(t) es una señal real:

$\mathrm{X}_n = X_{-n} = X_n^* \forall n\epsilon\mathbb{N}$

Si x(t) es una señal par entonces $\mathrm{b}_n = 0$

$X_n = X_{-n} = \frac{a_n}{2}\ \forall n\epsilon\mathbb{N}$ (no hace falta que sea real)

Si x(t) es una señal impar entonces $a_n = 0$

$X_n = -X_{-n} = -i\frac{b_n}{2}\ \forall n\epsilon\mathbb{N}$

FALTA ESPECTRO UNILATERAL Y BILATERAL DE FUNCIONES REALES

alta japa bro

Convergencia de las series de Fourier:

Consideraremos señales $x : [t_0, t_0 + T] \to K$, no necesariamente continuas, con la convención que τ es una discontinuidad de $x(t)$ si $\tau \in (t_0, t_0 + T)$ o de la extensión periódica de $x(t)$ si $\tau = t_0$ o $\tau = t_0 + T$.

Definimos en la forma usual los *límites laterales por derecha e izquierda* como $x(\tau^+) = \lim_{t\to\tau, t>\tau} x(t)$ y $x(\tau^-) = \lim_{t\to\tau, t<\tau} x(t)$ respectivamente.

Una discontinuidad τ de $x(t)$ tal que $x(\tau^+)$ y $x(\tau^-)$ existen es una *discontinuidad de salto* o *de primera especie*.

Una señal $x : [t_0, t_0 + T] \to K$ es *continua a trozos* si en cada $[a, b] \subset [t_0, t_0 + T]$, x tiene una cantidad finita de discontinuidades y estas son salto.

Las *derivadas latereales por derecha e izquierda* se definen, cuando los límites involucrados existen, como

$$x'(\tau^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(\tau + h) - x(\tau^+)}{h} \quad \text{y} \quad x'(\tau^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(\tau^-) - x(\tau - h)}{h}.$$

Observación 6 x es derivable en τ si y sólo si $x(\tau^-) = x(\tau^+) = x(\tau)$ y $x'(\tau^+)$ y $x'(\tau^-)$ existen y son iguales.

Teorema 3 *(Teorema de la convergencia puntual)* sea $x : [t_0, t_0 + T] \to K$ continua a trozos con una discontinuidad de tipo salto en τ y supongamos que $x'(\tau^+)$ y $x'(\tau^-)$ existen. Entonces la serie de Fourier evaluada en τ converge a

$$\frac{x(\tau^+) + x(\tau^-)}{2}.$$

En particular, si x es derivable en τ, la serie de Fourier converge en τ a $x(\tau)$.

Muy importante para este teorema que $\exists x'(\tau^+)$,$\exists x'(\tau^-)$ y $x'(\tau^+) = x'(\tau^-)$!!!!!

Teorema 4 *(Teorema de la convergencia uniforme)* Sea $x : [t_0, t_0 + T] \to K$ continua tal que $x(t_0) = x(t_0 + T)$ y que x' es continua a trozos en $[t_0, t_0 + T]$. Entonces la serie de Fourier de x converge a x absoluta y uniformemente en $[t_0, t_0 + T]$.

Teorema 5 *(Teorema de la derivación)* Sea $x : [t_0, t_0 + T] \to K$ continua tal que $x(t_0) = x(t_0 + T)$ y que x' es continua a trozos en $[t_0, t_0 + T]$, y sean $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de x. Entonces en cada punto $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ donde existan $x''(\tau^+)$ y $x''(\tau^-)$, se tiene que

$$\frac{x'(\tau^+) + x'(\tau^-)}{2} = \sum_{n\neq 0} i\, n\, \omega_0\, c_n e^{in\omega_0\tau}.$$

En otras palabras, la serie de Fourier de x' se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de x.

Teorema 6 *(Teorema de la integración)* Sea $x : [t_0, t_0 + T] \to K$ continua a trozos, y sean $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de x. Entonces para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau = c_0(t - t_0) + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in\omega_0} \left(e^{in\omega_0 t} - e^{in\omega_0 t_0}\right).$$