Lista de Exercícios

Questão 1 (2.5 pt)
Discutimos em aula o algoritmo de Gale-Shapley para encontrar um emparelhamento perfeito estável entre n homens e n mulheres. Foi mencionado que o seguinte algoritmo SO ("soap opera algorithm") não resolve o problema:

```
while existe uma instabilidade do
  escolhe uma instabilidade
  troca o casamento dos dois pares envolvidos
end while
```

Exibe um contra-exemplo que mostra que o algoritmo SO pode entrar num laço infinito.

Questão 2 (2.5 pt)
Discutimos em aula brevemente uma generalização do problema do emparelhamento estável para uma situação com n homens e $n+1$ mulheres. Essa questão pede analisar a generalização com mais detalhe. Para isso nos vamos supor

i) Toda mulher continua com um ranqueamento dos n homens, mas agora cada homem tem um ranqueamento de todas $n+1$ mulheres.

ii) Além da instabilidade discutida em aula (que vamos chamar uma instabilidade do tipo 1), temos uma nova instabilidade (chamada do tipo 2): caso temos um casal (m, w), a mulher w' é livre e m prefere w' (i.e. $r(m, w') < r(m, w)$) então ele troca w por w' liberando w.

Mostra que o algoritmo de Gale-Shapley aplicado a este problema retorna um emparelhamento estável (no sentido que não tem instabilidades do tipo 1 ou 2) em que todos homens e todas mulheres exceto uma são casados ou exibe um contra-exemplo que mostra que isso não é o caso.

Questão 3 (2.5 pt)
A *cintura* de um grafo é o comprimento do menor ciclo. Propõe um algoritmo que determina a cintura de um grafo não-direcionado em tempo polinomial em n e m. Demonstra a corretude do algoritmo e justifica a sua complexidade.

Questão 4 (2.5 pt)
Para um caminho (não necessariamente simples) $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ seja $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ o conjunto de vértices correspondentes. Considere um grafo direcionado $G = (V, A)$. Dois vértices $s, t \in V$ são mutualmente alcançáveis de forma diferente (mad) caso existe um caminho P de s para t e um caminho Q de t para s, tal que cada caminho contém pelo menos um vértice que o outro não contém, i.e. $V(P) \setminus V(Q) \neq \emptyset$ e $V(Q) \setminus V(P) \neq \emptyset$. Um grafo direcionado é *estranhamente conectado*, caso todo par de vértices é mad. A *componente estranha* de um vértice s é definida como conjunto que contém s e todos vértices t tal que s e t são mad. Mostra o equivalente da proposição 3.17 do livro de Kleinberg e Tardos

Proposição 1
Para todo para de vértices s e t num grafo direcionado, o seus componentes estranhas são ou identicos ou disjuntos.

ou exibe um contra-exemplo que mostra que essa proposição não é verdadeira para componentes estranhas.

Regras para listas de exercícios

1. Os exercícios podem ser resolvidos em colaboração com outros, mas a entrega é individual informando os eventuais colaboradores.
2. A entrega é eletrônica, não escrito a mão, em formato PDF.
3. Para receber pontos as respostas devem ser justificadas (i.e. provadas).
4. Somente entregam respostas que vocês sabem explicar pessoalmente.