Punto Fijo ó Sustituciones Sucesivas

Es un método abierto que emplea una fórmula para predecir la raíz.

Esta fórmula puede desarrollarse con el método de punto fijo, llamado también sustitución sucesiva, iteración de punto fijo ó iteración simple de punto fijo.

Sea la ecuación general $f(x)=0$; de la cual se desea encontrar una raíz real.

1) Consiste en transformar algebraicamente $f(x) = 0$ a la forma equivalente $x = g(x)$.

Si se tiene $2x^2 - x - 5 = 0$

a) $x = 2x^2 - 5$ despejando el 2° término

b) $x = \sqrt{x + 5/2}$ despejar "x" del 1° término

c) $x = 5/ 2x - 1$ factorizando "x" y despejándola

d) $x = 2x^2 - 5$ sumando "x" a cada lado de la igualdad

2) Una vez que se ha determinado una fórmula equivalente, hay que examinar una raíz, esta se puede hacer por observación directa de la ecuación.

Se denota el valor de exploración ó valor de inicio como x_0.

3) Encontrando x_0, se evalúa $g(x)$ en x_0, denotándose el resultado de esta evaluación como x; esto es $g(x_0) = x_1$.

La utilidad de $x = g(x)$ es proporcionar una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de la misma. De esta manera, dado un valor inicial para la raíz x_i.

La ecuación $x = g(x)$ se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1} expresada por la fórmula iterativa $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$\boxed{\text{El margen de error } (\varepsilon) \text{ es } 0}$$

Ejemplo.

Localizar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, la función se puede separar directamente y expresarse en la forma $x_{i+1} = g(x_i)$.

$X_{i+1} = e^{-x_i}$ empezando con un valor inicial $X_0 = 0$. Se aplica esta ecuación iterativa para calcular.

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$e^{-x} - x = 0$$

Despejar x :

1) $x = e^{-x}$
2) $e^{-x} = x \rightarrow Ln\, e^{-x} = Ln\, x \rightarrow -x = Ln\, x \rightarrow x = -Ln\, x$

i	e^{-x}	x_i	$\epsilon = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-	0	-
1	e^{-0} =	1	1
2	e^{-1} =	0.367879441	0.632120558
3	$e^{-0.367879441}$ =	0.692200627	0.324321186
4	$e^{-0.692200627}$ =	0.500473500	0.191727127
5	$e^{-0.5004735}$ =	0.606243535	0.105770034
6	$e^{-0.606243535}$ =	0.545395786	0.060847749
7	$e^{-0.545395786}$ =	0.579612335	0.034216549
8	$e^{-0.579612335}$ =	0.560115461	0.019496874
9	$e^{-0.560115461}$ =	0.571143115	0.011027653
10	$e^{-0.571143115}$ =	0.564879347	0.006263767689
11	$e^{-0.564879347}$ =	0.568428725	0.003549377638
12	$e^{-0.568428725}$ =	0.566414733	0.002013991882
13	$e^{-0.566414733}$ =	0.567556637	0.001141904181

$$\boxed{x_{22} = 0.5671407819}$$

El margen de error se encuentra en: $\varepsilon = | x_{22} - x_{21} |$

$\varepsilon = | 0.5671407819 - 0.5671477143 | = 0.00000693285432$

$$\boxed{\varepsilon = 0.00000693285432}$$