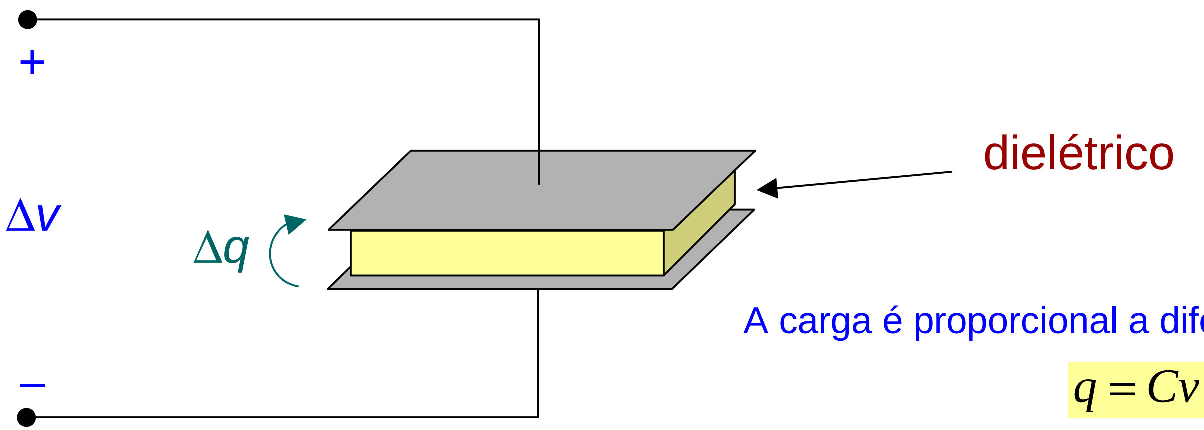
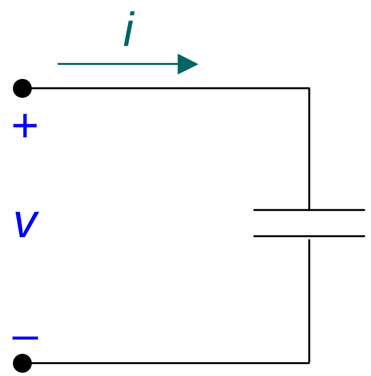
Capítulo 7

Elementos Armazenadores de Energia

7.1 Capacitores

Capacitor é um dispositivo de dois terminais constituído de dois corpos condutores separados por um material não condutor.





A carga é proporcional a diferença de potencial:

$$q = Cv$$

onde *C* é a capacitância do dispositivo dada em farad [F] = [coulomb/volt].

Carga total dentro do capacitor é sempre zero.

Corrente que entra em um terminal sai pelo outro. Derivando em relação ao tempo a equação anterior obtemos a corrente:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Exemplo: Capacitor C = 1 μF e a tensão sobre ele é

$$v = 6\cos(2000t)\ \ [\text{V}]$$

Então,

$$i = C\frac{dv}{dt} = 10^{-6}\left[-12.000\,\text{sen}(2000t)\right] = -12\,\text{sen}(2000t)\ \ [\text{mA}]$$

Note que se a tensão v sobre o capacitor é constante, a corrente i é zero. Portanto, o capacitor atua como um circuito aberto para tensão constante.

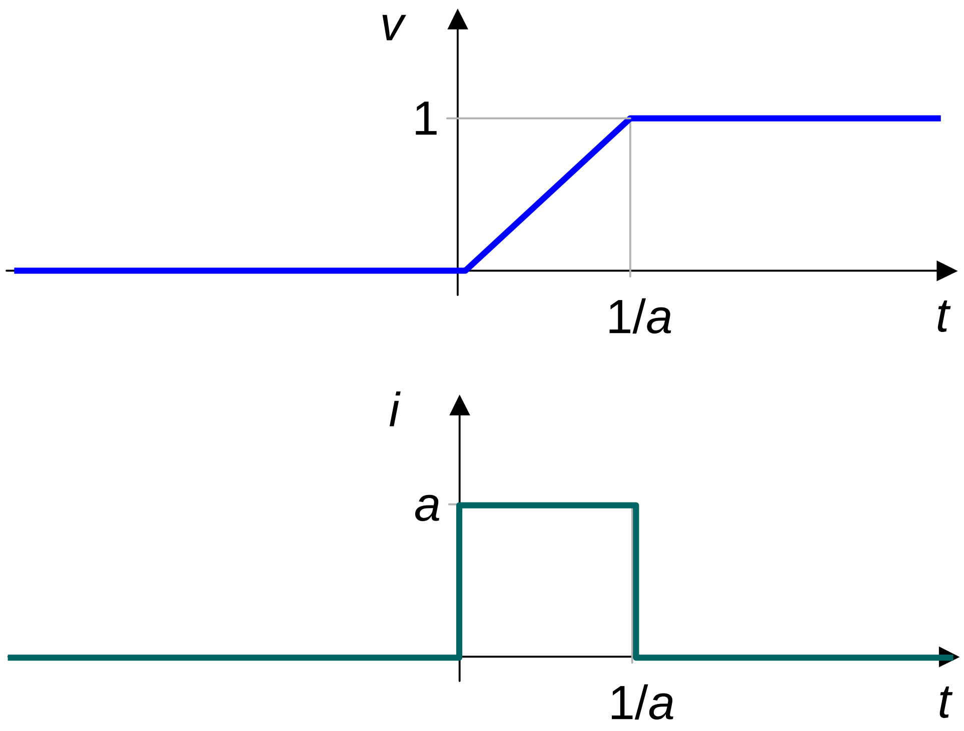
Se a tensão v varia, a corrente que flui nos terminais deixa de ser zero.

Exemplo: Considere uma tensão que cresce linearmente entre 0 e 1 [V] em a^{-1} [s]:

$$v = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ at & 0 < t \le \dfrac{1}{a} \\ 1 & t > \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Se o capacitor tiver C = 1 [F], a corrente resultante é:

$$i = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ a & 0 < t \le \dfrac{1}{a} \\ 0 & t > \dfrac{1}{a} \end{cases}$$



Note que se ***a*** crescer, então ***v*** muda mais rapidamente e a corrente ***i*** também crescerá.

Se $\boldsymbol{a^{-1} = 0}$, então ***v*** muda abruptamente de **0** para **1** [V] $\Rightarrow$ corrente infinita $\Rightarrow$ potência infinita nos terminais do capacitor.

A carga total em um capacitor não pode variar instantaneamente (princípio da conservação de carga).

Para obter $v(t)$ em função de $i(t)$, integramos no tempo:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

obtendo

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v(t_0)$$

onde a tensão no capacitor no tempo t_0 é

$$v(t_0) = \frac{q(t_0)}{C}$$

Portanto, como a tensão sobre o capacitor em $t = -\infty$ é $v(-\infty) = 0$, temos:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

7.2 Energia Armazenada em Capacitores

Campo elétrico: força que atua sobre uma unidade de carga positiva.

Forças que atuam nas cargas dentro do capacitor podem ser consideradas como resultantes de um campo elétrico.

Energia armazenada em um capacitor = Energia armazenada no campo elétrico.

Energia armazenada:

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} vi\,dt = \int_{-\infty}^{t} v\left(C\frac{dv}{dt}\right)dt$$

$$= C\int_{-\infty}^{t} v\,dv = \frac{1}{2}Cv^2(t)\Big|_{-\infty}^{t}$$

Considerando *v*(-∞) = 0, então

$$\boxed{w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) \quad [\mathrm{J}]} \qquad \boxed{w_C(t) \geq 0}$$

Em termos de carga no capacitor, temos $q = Cv$, então

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}C\left(\frac{q(t)}{C}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} \quad [\mathrm{J}]$$

O capacitor ideal não dissipa energia.

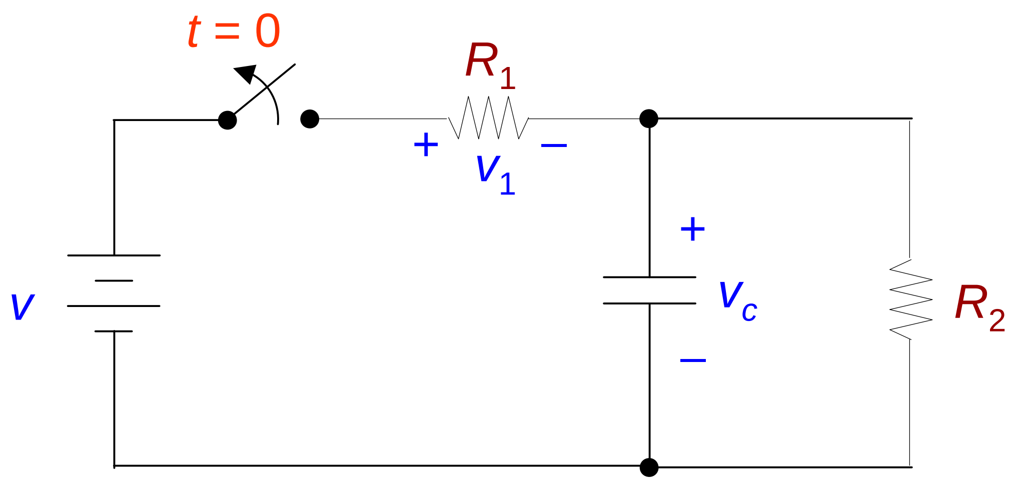
Exemplo: Capacitor de 1 F com tensão de 10 V. A energia armazenada é

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 = 50 \ [\mathrm{J}]$$

Se o capacitor não está conectado a um circuito, então sua carga, sua tensão e energia armazenada permanecem constantes, pois não flui corrente.

Conectando uma resistência nos terminais do capacitor, uma corrente irá fluir até que toda a energia seja dissipada como calor pelo resistor, fazendo a tensão tornar-se zero.

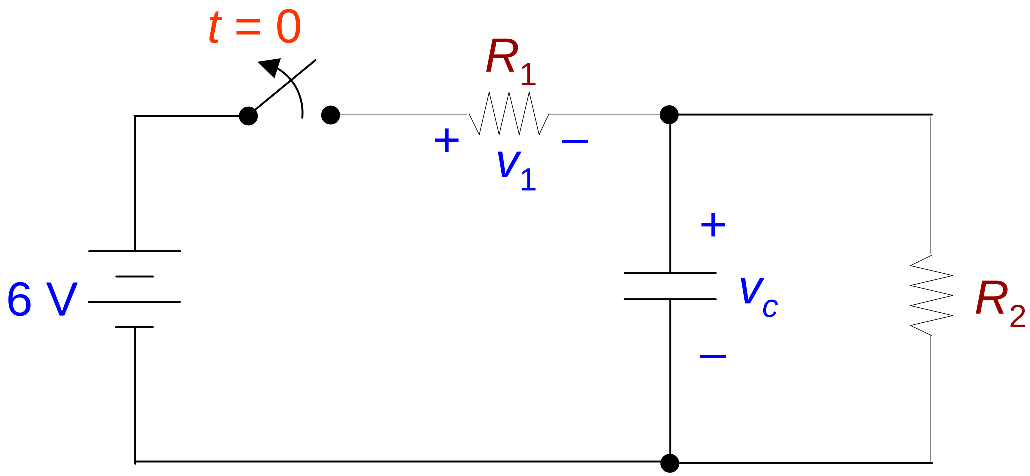
Tensão sobre o capacitor é contínua $\Rightarrow$ energia é contínua



$t = 0^-$ tempo imediatamente anterior a abertura da chave.

$t = 0^+$ tempo imediatamente após a abertura da chave.

Exemplo: $v_c(0^-) = 4$ V.



Imediatamente antes do chaveamento, temos $v_1(0^-) = V - v_c(0^-) = 6 - 4 = 2\ [\mathrm{V}]$

Imediatamente após a chave ser aberta, temos $v_1(0^+) = 0$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 4\ [\mathrm{V}]$$

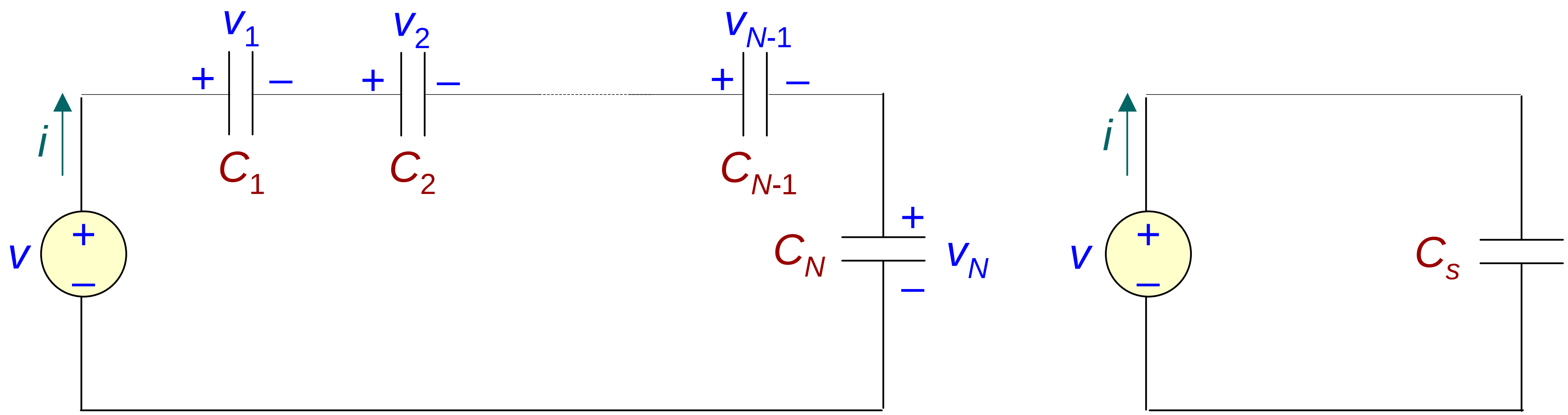
A tensão em R_1 muda abruptamente, mas não no capacitor.

A tensão em R_2 é a mesma que no capacitor, então não muda também.

7.3 Capacitores em Série e em Paralelo

Capacitância equivalente ≡ condutância equivalente

Conexão em série de *N* capacitores:



$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

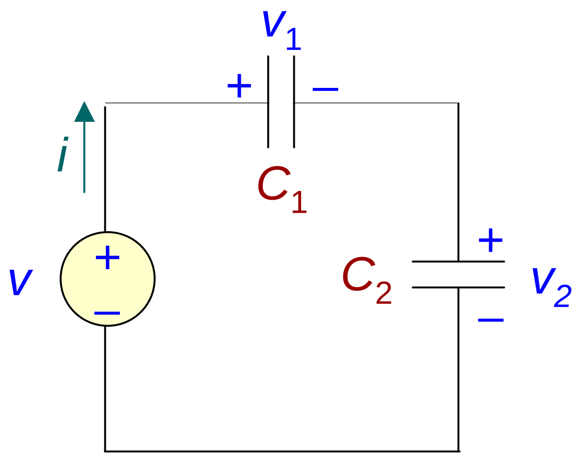
$$v = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i dt + v_N(t_0)$$

$$v = \frac{1}{C_s}\int_{t_0}^{t} i dt + v(t_0)$$

$$v = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i dt + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$

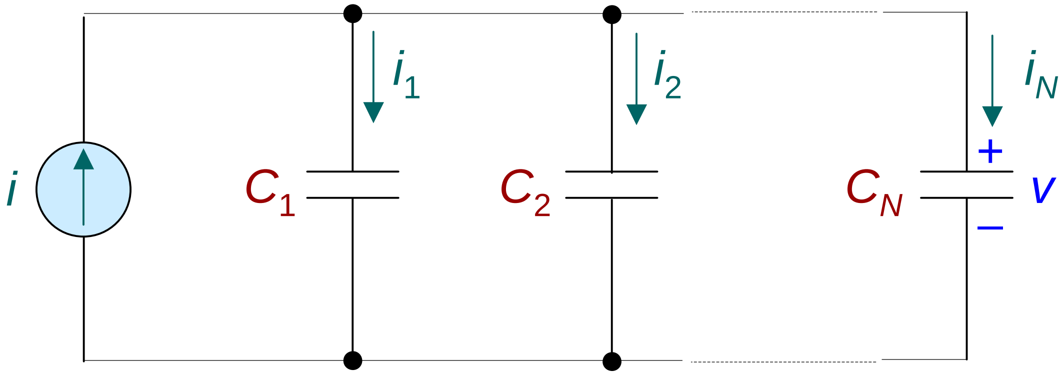
$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}}$$

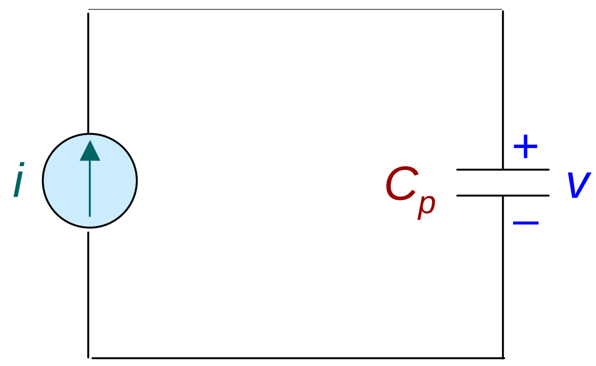
Conexão em série de 2 capacitores:



$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Conexão em paralelo de *N* capacitores:





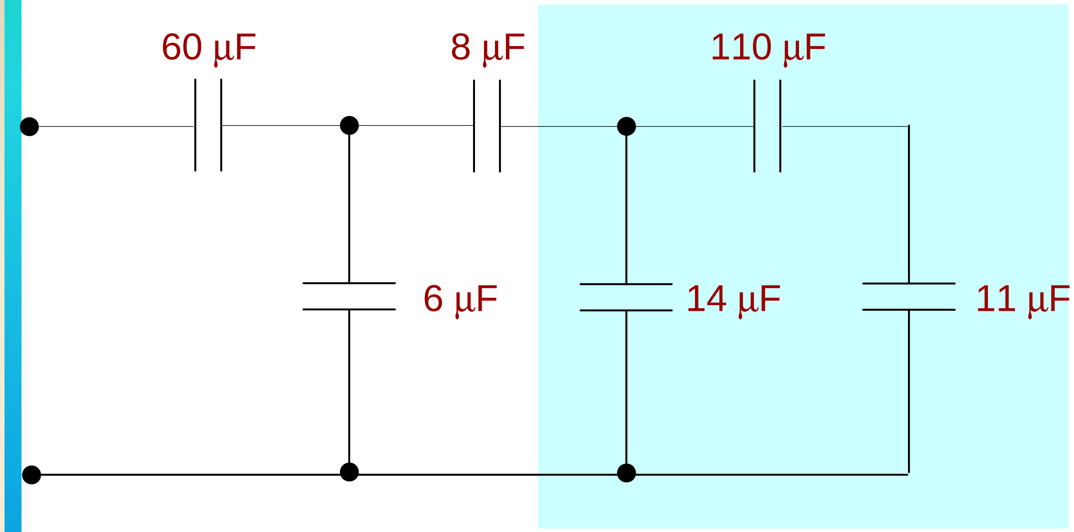
$$i = C_p \frac{dv}{dt}$$

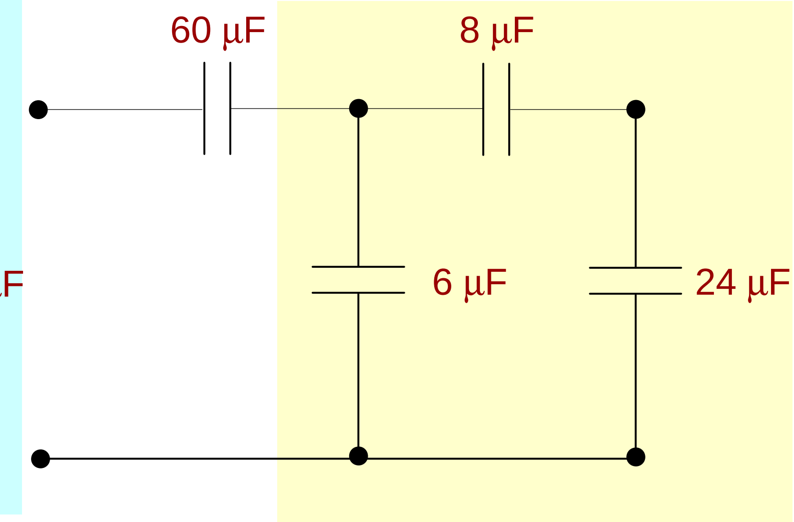
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

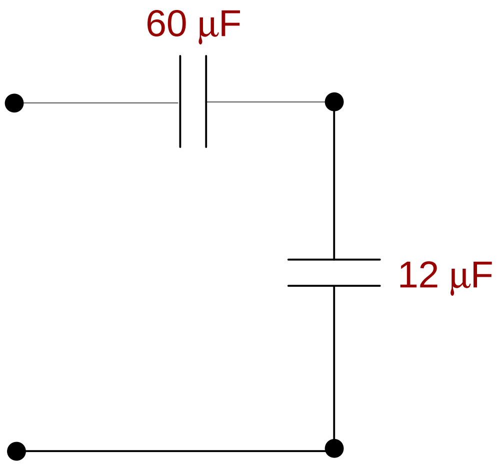
$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \right) \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{C_p = C_1 + C_2 + \cdots + C_N = \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \right)}$$

Exemplo: Capacitância equivalente





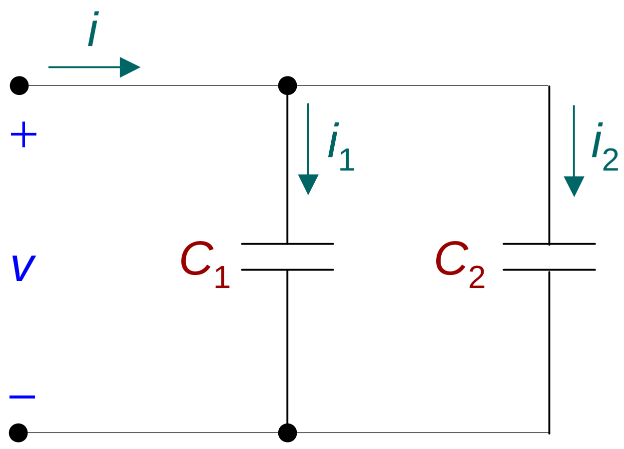


$$C_{eq1} = \frac{110 \cdot 11}{110 + 11} + 14 = 10 + 14 = 24$$

$$C_{eq2} = \frac{24 \cdot 8}{24 + 8} + 6 = 6 + 6 = 12$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{12 \cdot 60}{12 + 60} = \frac{720}{72} = 10 \ [\mu\mathrm{F}]}$$

Exemplo: Divisão de corrente.



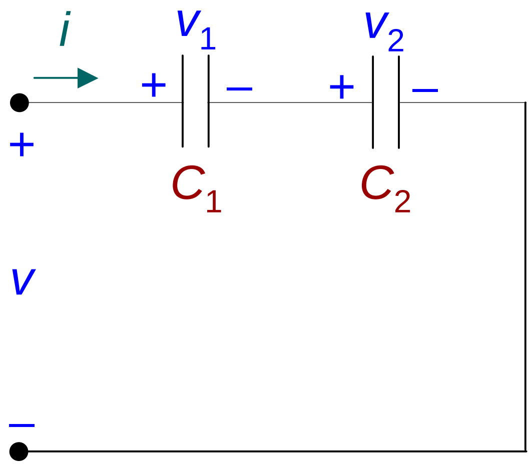
$$i = i_1 + i_2$$

$$i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dv}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{i}{(C_1 + C_2)}}$$

$$i_1 = C_1\frac{dv}{dt} \rightarrow i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}i$$

$$i_2 = C_2\frac{dv}{dt} \rightarrow i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}i$$

Exemplo: Divisão de tensão.



$$v = v_1 + v_2$$

$$v = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i dt + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i dt \rightarrow v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{-\infty}^{t} i dt \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} i dt = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} v}$$

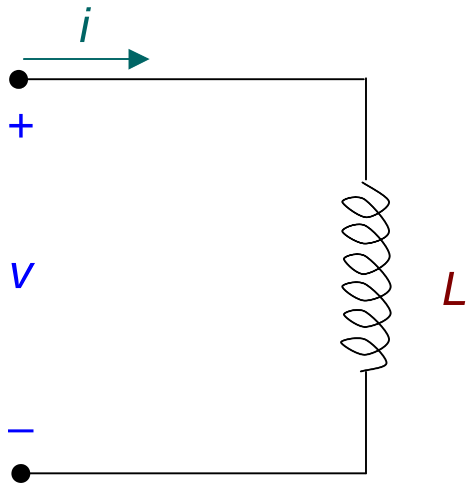
$$v_1 = \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i dt \rightarrow v_1 = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} v = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v$$

$$v_2 = \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i dt \rightarrow v_2 = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} v = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v$$

7.4 Indutores

Indutor é um dispositivo de 2 terminais composto de um fio condutor enrolado em espiral.

A corrente que flui pelo indutor induz um fluxo magnético ϕ que forma laços fechados envolvendo a bobina.



Bobina com *N* espiras, então o fluxo total (enlace de fluxo) é igual a:

$$\lambda = N\phi$$

Em um indutor ideal, o enlace de fluxo é diretamente proporcional a corrente:

$$\lambda = L \cdot i$$

L = constante de proporcionalidade (indutância em weber/ampère = henry [H]).

Lei da indução magnética: a tensão é igual à taxa de variação no tempo do fluxo magnético total:

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

Se i = constante $\Rightarrow$ $v = 0$ (curto circuito para corrente contínua).

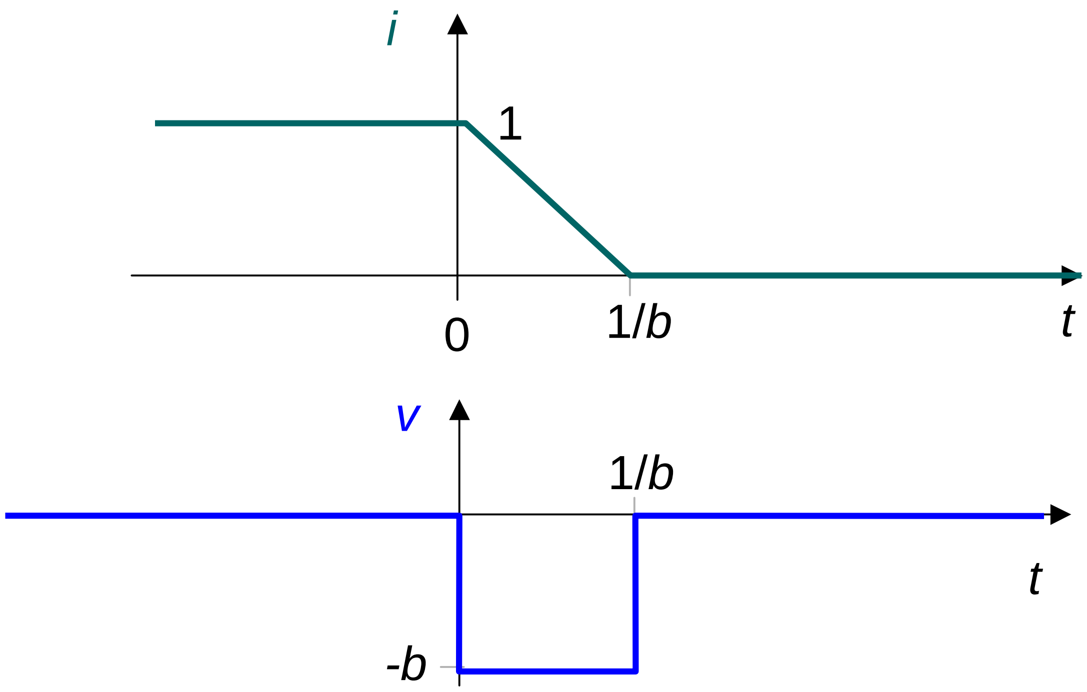
Quanto maior a variação de i maior será a tensão que aparecerá nos terminais do indutor.

Exemplo: Considere uma corrente que decresce linearmente entre 1 e 0 [A] em b^{-1} s:

$$i = \begin{cases} 1 & t \le 0 \\ 1 - bt & 0 < t \le \dfrac{1}{b} \\ 0 & t > \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

Se o indutor tiver L = 1 [H], a tensão resultante é:

$$v = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ -b & 0 < t \le \dfrac{1}{b} \\ 0 & t > \dfrac{1}{b} \end{cases}$$



Note que se ***b*** crescer, então ***i*** muda mais rapidamente e a tensão ***v*** se torna mais negativa.

Se $\boldsymbol{b^{-1} = 0}$, então ***i*** muda abruptamente de **1** para **0** [A] $\Rightarrow$ tensão infinita $\Rightarrow$ potência infinita nos terminais do indutor.

A fluxo total em um indutor não pode variar instantaneamente (princípio de conservação de fluxo).

Para obter $i(t)$ em função de $v(t)$, integramos no tempo:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

obtendo

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i(t_0)$$

onde $i(t_0)$ é a corrente no indutor no tempo t_0.

$i(t_0)$ é a corrente acumulada de $t = -\infty$ até $t = t_0$, onde $i(-\infty) = 0$

Portanto,

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt$$

7.5 Energia Armazenada em Indutores

Uma corrente *i* que flui pelo indutor produz um enlace de fluxo total λ que passa pelas espiras da bobina.

Assim, um trabalho é necessário para estabelecer o fluxo ϕ no indutor.

Energia armazenada em um indutor = Energia armazenada no campo magnético.

Energia armazenada:

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t)\, i(t)\, dt = \int_{-\infty}^{t} \left(L \frac{di(t)}{dt} \right) i(t) dt$$

$$= L \int_{-\infty}^{t} i(t)\, di = \frac{1}{2} L\, i^2(t) \Big|_{-\infty}^{t}$$

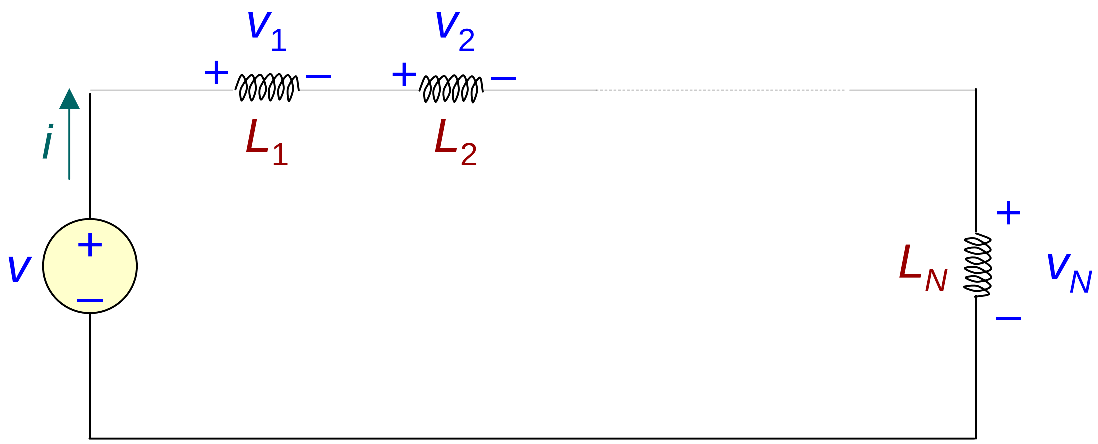
Considerando $i(-\infty) = 0$, então

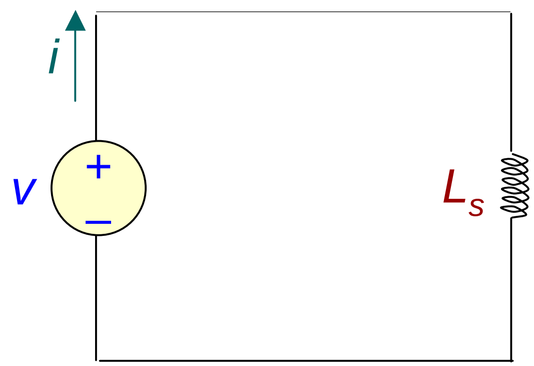
$$\boxed{w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad [\mathrm{J}]} \qquad \boxed{w_L(t) \geq 0}$$

7.6 Indutores em Série e em Paralelo

Indutância equivalente ≡ resistência equivalente

Conexão em série de *N* indutores:





$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

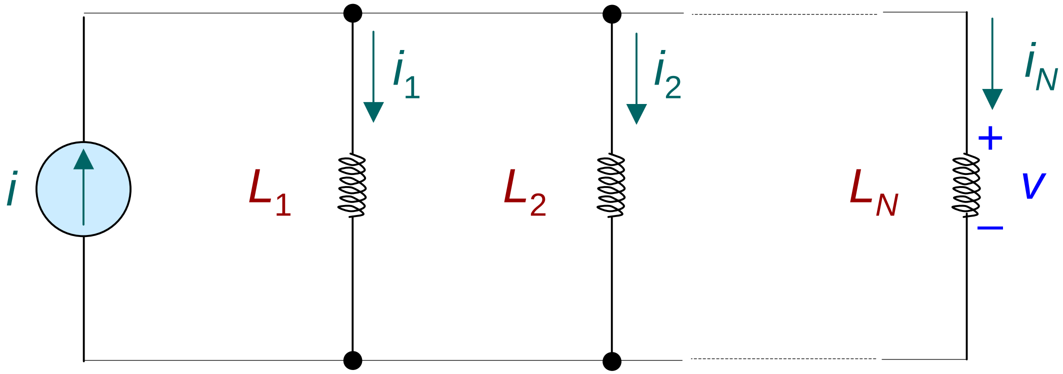
$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt}$$

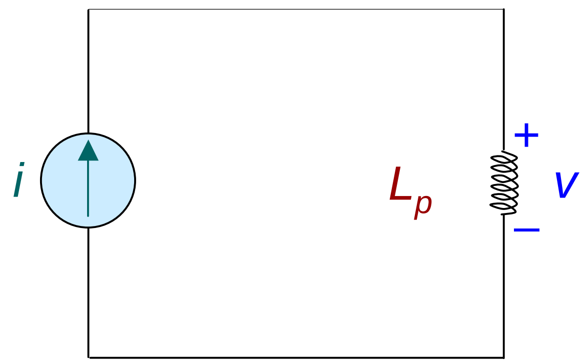
$$v = \left(\sum_{n=1}^{N} L_n \right) \frac{di}{dt}$$

$$v = L_s \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_s = \sum_{n=1}^{N} L_n = L_1 + L_2 + \cdots + L_N}$$

Conexão em paralelo de *N* indutores:





$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

$$i = \frac{1}{L_p}\int_{t_0}^{t} v dt + i(t_0)$$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v dt + i_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v dt + i_N(t_0)$$

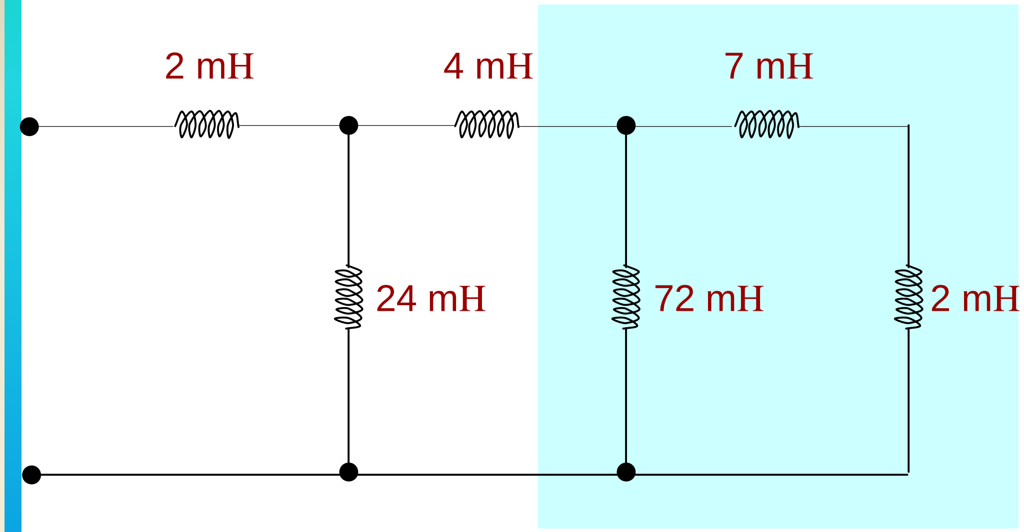
$$i = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v dt + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0)$$

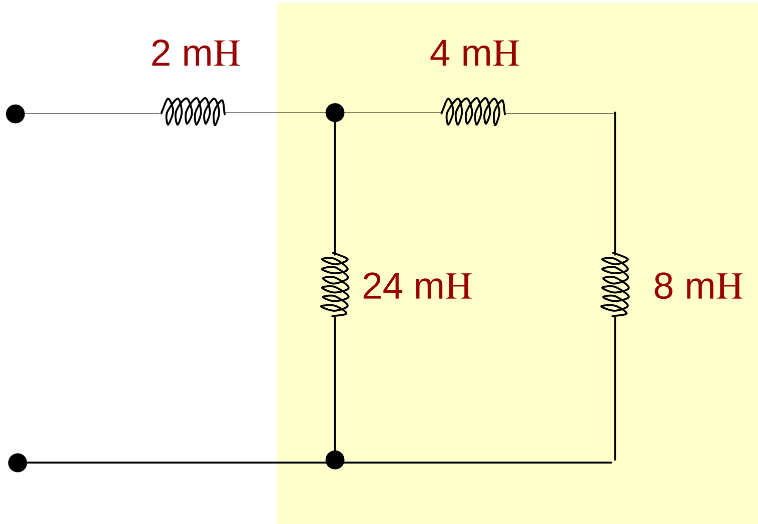
$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N} = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)$$

Conexão em paralelo de 2 indutores:

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

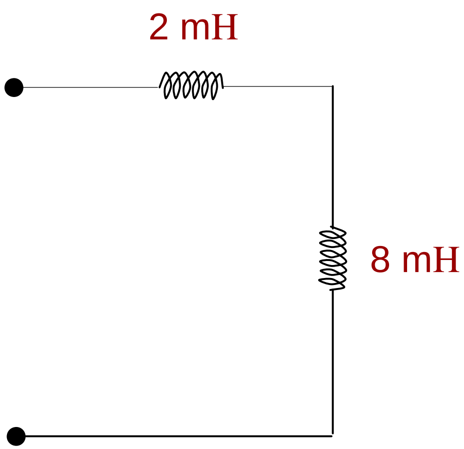
Exemplo: Indutância equivalente





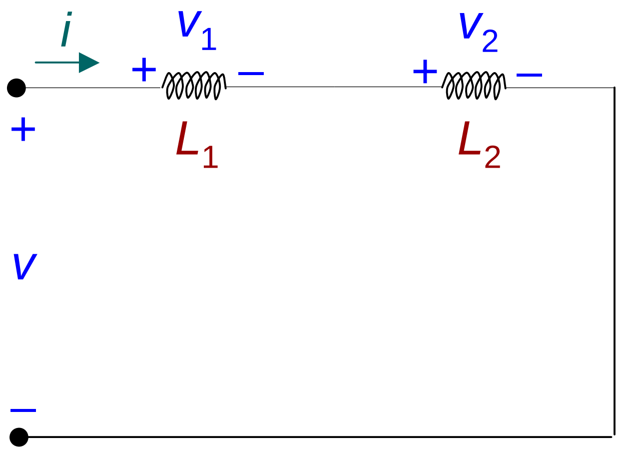
$$L_{eq1} = \frac{9 \cdot 72}{72+9} = 8$$

$$L_{eq2} = \frac{24 \cdot 12}{24+12} = 8$$



$$\boxed{L_{eq} = 2 + 8 = 10 \ [\text{mH}]}$$

Exemplo: Divisão de tensão.



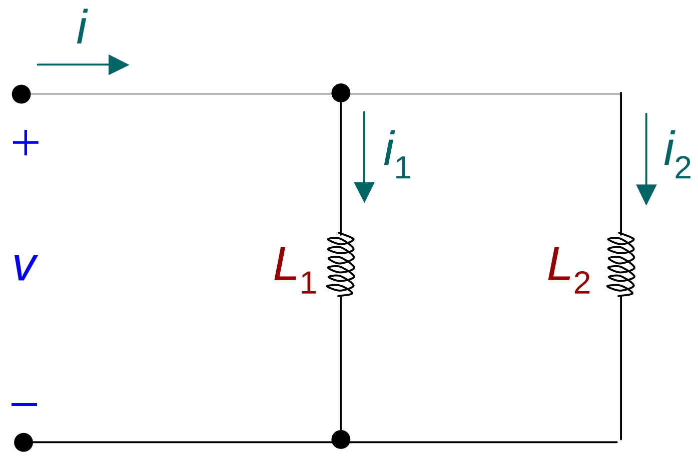
$$v = v_1 + v_2$$

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{v}{(L_1 + L_2)}}$$

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} \rightarrow v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v$$

$$v_2 = L_2 \frac{di}{dt} \rightarrow v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v$$

Exemplo: Divisão de corrente.



$$i = i_1 + i_2$$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} v dt + \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} v dt \rightarrow i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{-\infty}^{t} v dt \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} v dt = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} i}$$

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} v dt \rightarrow i_1 = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} i = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} v dt \rightarrow i_2 = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} i = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i$$

7.7 Regime Permanente em Corrente Contínua

Se as fontes independentes de um circuito são todas de corrente contínua (cc), então, após um dado tempo, todas as correntes e tensões se estabilizam em valores constantes.

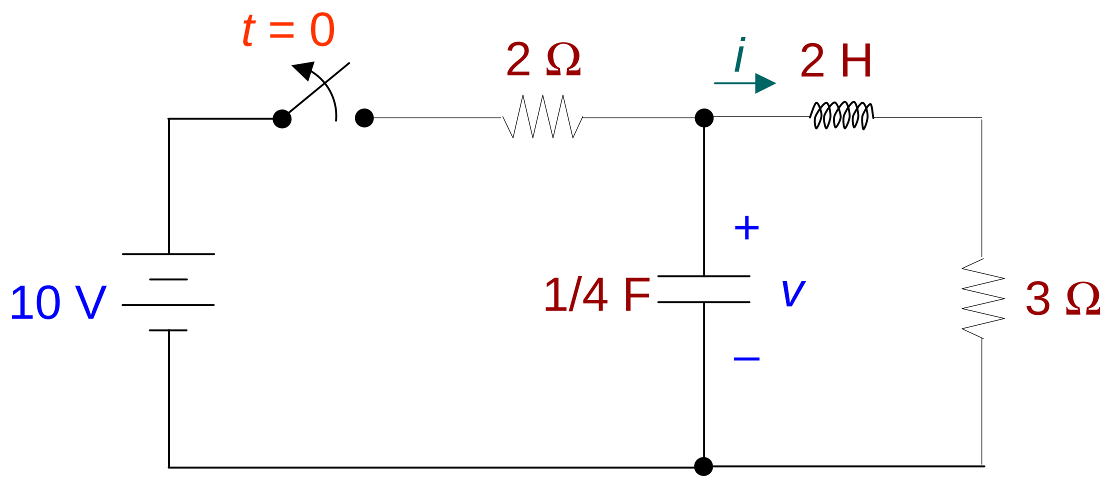
Quando todas as tensões e correntes atingem valores constantes $\Rightarrow$ circuito em regime permanente cc.

Regime permanente cc:

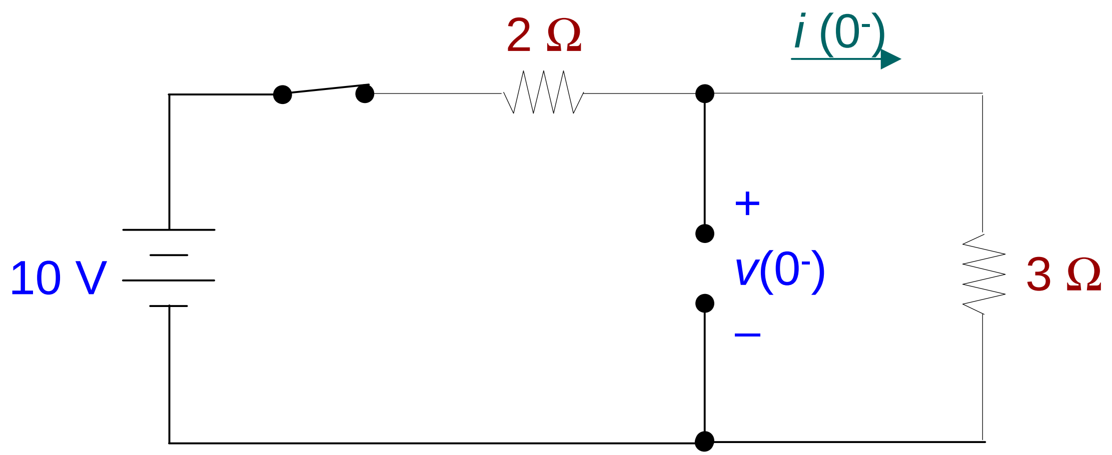
- Capacitores são como circuitos abertos.
- Indutores são como curto circuitos.
- Correntes e tensões no circuito são obtidas resolvendo um circuito resistivo com fontes constantes.

Análise de circuito para $t > 0 \Rightarrow$ conhecer algumas condições iniciais para $t = 0^+$.

Exemplo: Circuito *RLC* em regime permanente cc quando a chave é aberta em $t = 0$.



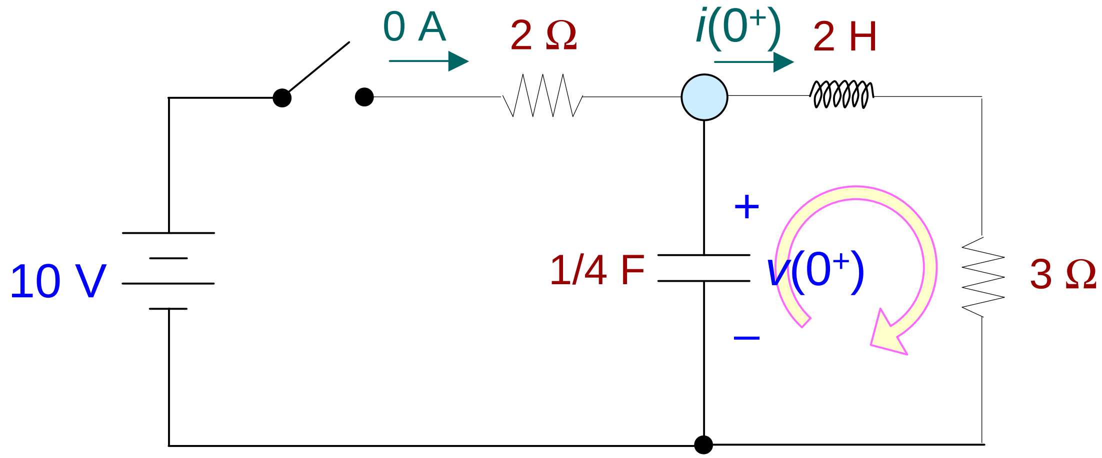
Em $t = 0^-$, imediatamente antes da chave ser aberta, o circuito era:



$$\boxed{i\left(0^-\right) = \frac{10}{5} = 2 \; [\mathrm{A}]}$$

$$\boxed{v\left(0^-\right) = 3 \cdot i\left(0^-\right) = 6 \; [\mathrm{V}]}$$

Em $t = 0^+$, imediatamente após a chave ser aberta, o circuito é:



$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \ [\mathrm{A}]$$

$$v(0^+) = v(0^-) = 6 \ [\mathrm{V}]$$

Equação de laço:

$$2\frac{di(0^+)}{dt} + 3i(0^+) - v(0^+) = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}[-3\cdot(2)+6] = 0$$

Equação nodal:

$$\frac{1}{4}\frac{dv(0^+)}{dt} + i(0^+) - 0 = 0$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -4\cdot(2) = -8 \ [\mathrm{V/s}]$$

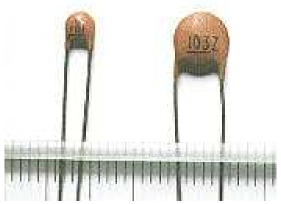
7.8 Capacitores e Indutores Práticos

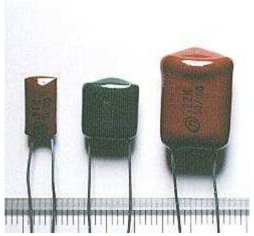
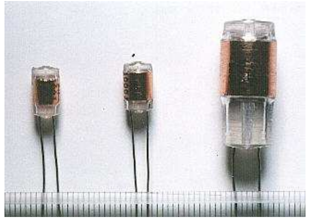
Capacitores práticos:

- grande variedade de tipos,
- classificado pelo tipo de dielétrico empregado na fabricação,
- tensão nominal – máxima tensão que pode ser aplicada no capacitor,
- dissipam pequena quantidade de potência (correntes de fuga),
- dielétricos possuem uma condutância não nula.

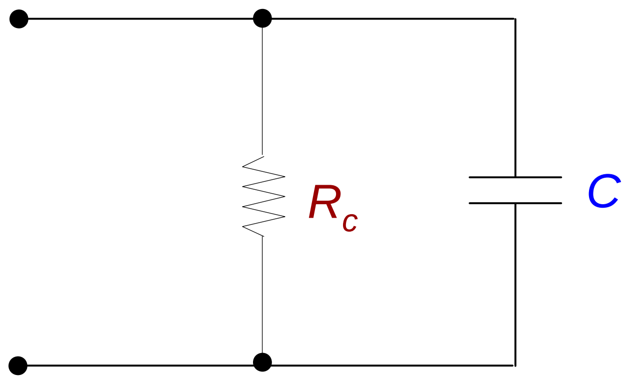
Tipos de capacitores (1 pF – 1 μF):

- cerâmico,
- tântalo,
- poliester,
- poliestireno,
- eletrolítico (1 – 100.000 μF) (perdas maiores e polarizados)



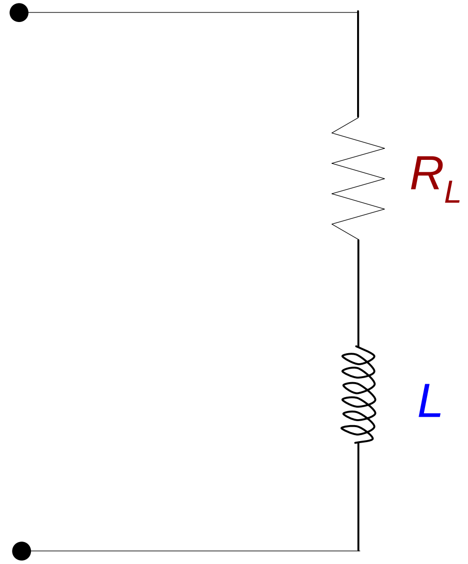

Circuito equivalente:



Indutores práticos:

- dissipam pequena quantidade de potência (resistência do fio e perdas no núcleo),
- faixa 1 μH – 100 H,
- núcleo composto de materiais ferrosos.

Circuito equivalente:



7.9 Dualidade e Linearidade

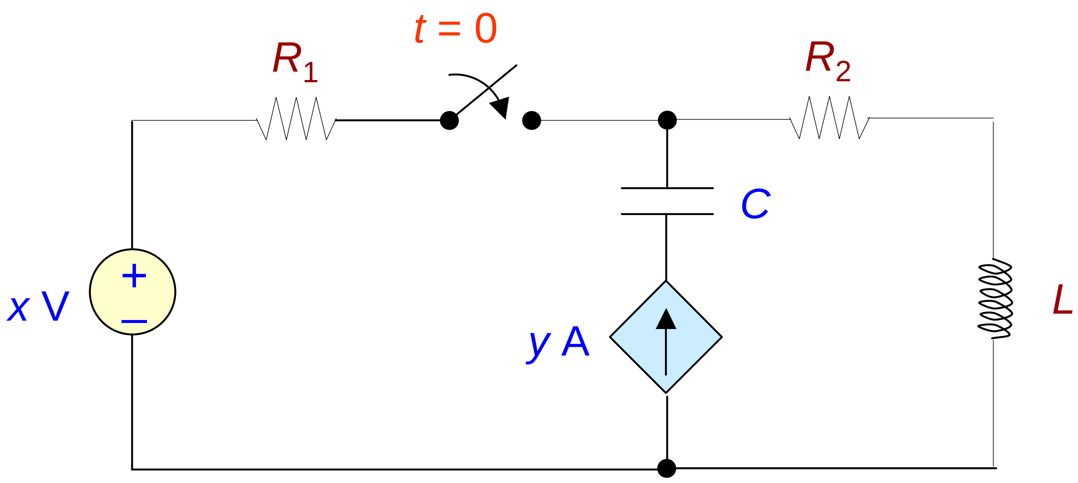
Relações duais entre capacitor e indutor:

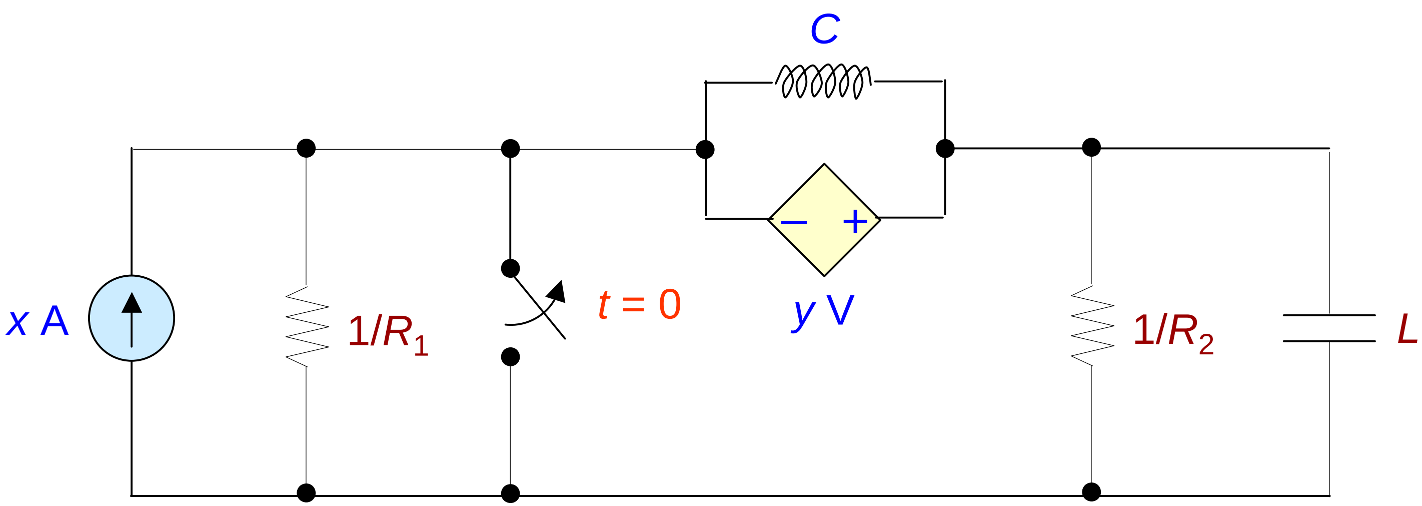
$$i = C\frac{dv}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad v = L\frac{di}{dt}$$

Quantidades duais:

tensão	corrente
carga	fluxo
resistência	condutância
indutância	capacitância
curto-circuito	circuito aberto
série	paralelo
nó de não referência	malha
nó de referência	malha externa
ramo de árvore	enlace
lei de Kirchhoff de tensões	lei de Kirchhoff de correntes
impedância	admitância

Exemplo: Circuito dual.

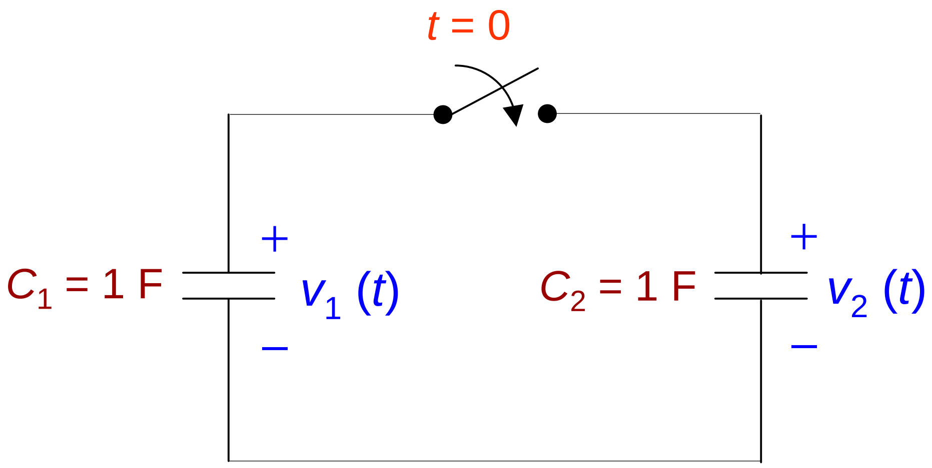




7.10 Circuitos Singulares

Circuitos singulares: possui uma chave que parece ter a função de produzir uma descontinuidade nas tensões de capacitores ou nas correntes de indutores.

Exemplo:



Antes da chave fechar:

$$v_1(0^-) = 1\ [\text{V}]$$

$$v_2(0^-) = 0\ [\text{V}]$$

$$w_1(0^-) = \frac{1}{2} C_1 v_1^2(0^-) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\ [\text{J}]$$

$$w_2(0^-) = \frac{1}{2} C_2 v_2^2(0^-) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 = 0\ [\text{J}]$$

Energia total armazenada no circuito:

$$w(0^-) = w_1(0^-) + w_2(0^-) = \frac{1}{2} \ [\mathrm{J}]$$

Expressão do nó generalizado envolvendo a chave:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

Integrando de $t = 0^-$ a 0^+, temos

$$\int_{t=0^-}^{t=0^+} (C_1 dv_1 + C_2 dv_2) = C_1\left[v_1(0^+) - v_1(0^-)\right] + C_2\left[v_2(0^+) - v_2(0^-)\right] = 0$$

$$1 \cdot \left[v_1(0^+) - 1\right] + 1 \cdot \left[v_2(0^+) - 0\right] = 0$$

$$v_1(0^+) + v_2(0^+) = 1$$

Para $t > 0$, temos

$$v_1\left(0^+\right) = v_2\left(0^+\right) = \frac{1}{2}\ [\mathrm{V}]$$

Portanto, a energia total armazenada em $t = 0^+$ é

$$w\left(0^+\right) = \frac{1}{2}C_1 v_1^2\left(0^+\right) + \frac{1}{2}C_2 v_2^2\left(0^+\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\ [\mathrm{J}]$$

Pergunta: O que aconteceu com o outro 1/4 J do circuito de $t = 0^-$ a $t = 0^+$?

v_1 muda abruptamente de 1 para 1/2 volts em $t = 0$, mas mudanças instantâneas de tensão não são possíveis.

Portanto, durante um intervalo de tempo infinitesimal de 0^- a 0^+, o modelo matemático adotado não é válido!!!

Quando a chave fecha em $t = 0$, uma corrente elevada gera uma onda eletromagnética que irradia a energia de 1/4 J.

A tensão v_1 muda em um pequeno intervalo de tempo ($\Delta t \neq 0$) de 1 para 1/2 V.

Entretanto, as soluções para tensões e energias antes e depois o fechamento da chave são corretas, embora o modelo de circuito não seja válido no instante de fechamento desta chave.

Motivo: a carga total não muda durante este intervalo de tempo.

Motivo:

$$C_1 v_1\left(0^-\right)+C_2 v_2\left(0^-\right)=C_1 v_1\left(0^+\right)+C_2 v_2\left(0^+\right)$$

ou seja, continua-se respeitando o postulado da conservação das cargas:

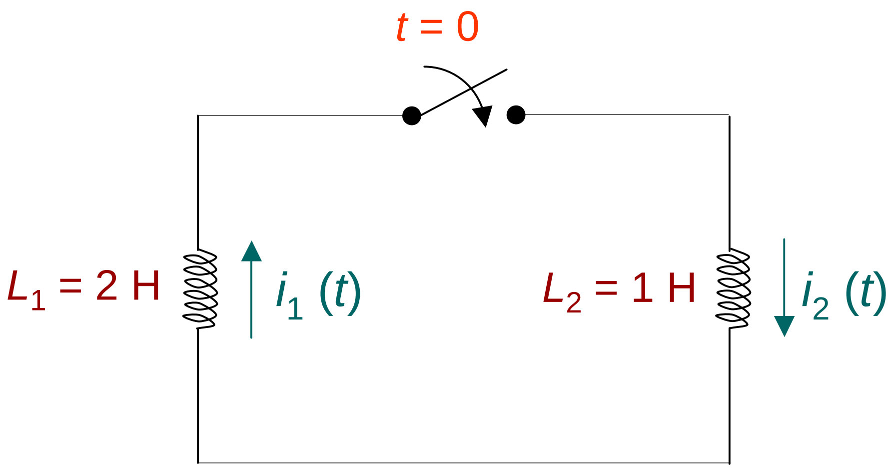
$$\boxed{q_1\left(0^-\right)+q_2\left(0^-\right)=q_1\left(0^+\right)+q_2\left(0^+\right)}$$

Se um resistor em série for incluído no circuito, as tensões e as energias dos capacitores serão funções contínuas, isto é

$$v_1\left(0^-\right)=v_1\left(0^+\right)$$

$$v_2\left(0^-\right)=v_2\left(0^+\right)$$

Exemplo:



Antes da chave fechar:

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(0^-) &= 1 \ [\mathrm{A}] \\ i_2(0^-) &= 0 \ [\mathrm{A}] \end{aligned}}$$

$$w_1(0^-) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(0^-) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1 \ [\mathrm{J}]$$

$$w_2(0^-) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2(0^-) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 = 0 \ [\mathrm{J}]$$

$$\boxed{w(0^-) = w_1(0^-) + w_2(0^-) = 1 \ [\mathrm{J}]}$$

Enlace de fluxo de cada indutor:

$$\lambda_1(0^-) = L_1 i_1(0^-) = 2 \cdot 1 = 2 \ [\mathrm{Wb}]$$

$$\lambda_2(0^-) = L_2 i_2(0^-) = 1 \cdot 0 = 0 \ [\mathrm{Wb}]$$

Enlace de fluxo total:

$$\lambda(0^-) = L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = 2 \ [\mathrm{Wb}]$$

Depois que a chave é fechada (por dualidade com o capacitor):

$$i_1(0^+) = i_2(0^+)$$

Quando a chave é fechada, a conservação do enlace de fluxo requer que o fluxo total permaneça constante, portanto

$$L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = L_1 i_1(0^+) + L_2 i_2(0^+)$$

$$= (L_1 + L_2) i_1(0^+)$$

ou

$$L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = (L_1 + L_2) i_1(0^+)$$

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3 \cdot i_1(0^+)$$

Portanto,

$$i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{2}{3} \text{ [A]}$$

Energia armazenada em cada indutor:

$$w_1(0^+) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(0^+) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \text{ [J]}$$

$$w_2(0^+) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2(0^+) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \text{ [J]}$$

Energia total:

em $t = 0^-$: $$\boxed{w_1\left(0^-\right)+w_2\left(0^-\right)=1+0=1\ \ [\mathrm{J}]}$$

em $t = 0^+$: $$\boxed{w_1\left(0^+\right)+w_2\left(0^+\right)=\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}\ \ [\mathrm{J}]}$$

Note que 1/3 [J] foi perdido no circuito.

$i_1(t)$ muda abruptamente de 1 para 2/3 A em $t = 0$.

Durante um intervalo de tempo infinitesimal de 0^- a 0^+, o modelo matemático adotado não é válido!!!

Quando a chave fecha em $t = 0$, uma corrente elevada gera uma onda eletromagnética que irradia a energia de 1/3 J.

A corrente i_1 muda em um pequeno intervalo de tempo ($\Delta t \neq 0$) de 1 para 2/3 A.

Entretanto, as soluções para correntes e energias antes e depois o fechamento da chave são corretas, embora o modelo de circuito não seja válido no instante de fechamento desta chave.

Se um resistor em paralelo for incluído no circuito, as correntes e as energias dos indutores serão funções contínuas.