Análise da Complexidade II

Joaquim Madeira

16/03/2021

Sumário

- Recap
- Ciclos – Contagem do número de iterações
- Análise do Melhor Caso, do Pior Caso e do Caso Médio
- Ordens de complexidade
- Notações habituais
- Exercícios adicionais
- Sugestões de leitura

Recapitulação

Algoritmos

- Algoritmos deterministas vs Algoritmos não-deterministas
- Análise do desempenho / eficiência computacional
  - Complexidade Temporal vs Complexidade Espacial
- Análise experimental vs Análise formal
- Classes de complexidade – Quais ?
- Eficiência relativa

Análise da Complexidade – Para quê ?

- Vários algoritmos para resolver uma instância de um problema
  - Diferentes classes / ordens de complexidade
- Qual é o algoritmo mais eficiente / com melhor desempenho ?

- Um algoritmo para resolver várias instâncias de um problema
  - Dimensão sucessivamente maior
  - Configurações diferentes para a mesma dimensão
- Como estimar o desempenho / o tempo de execução ?

Exemplo

```
de i = 0 até 256:
  contador[i] = 0;
enquanto não fim de ficheiro:
  ler próximo carater;
  incrementar contador[próximo carater];
```

- Inicialização : 256 incrementos da variável i
- Inicialização : 256 atribuições ao array

- Leitura do ficheiro : (n + 1) comparações para detetar o fim do ficheiro
- Leitura do ficheiro : n incrementos de elementos do array

- Qual é o factor que determina o desempenho ?
- O esforço da fase de inicialização é importante ?

Ciclos– Contagem do número de iterações

Ciclos – Quantas iterações? – Expressão?

```
for(k=1; k<6; k++) {
        …                                   ?
}

for(i=0; i<m; i++) {
        for(j=0; j<n; j++) {
                …                           ?
        }
}
```

Ciclos – Quantas iterações? – Expressão?

```
for(k=1; k<6; k++) {
        …
}
```

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = 5$$

```
for(i=0; i<m; i++) {
        for(j=0; j<n; j++) {
                …
        }
}
```

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{m-1} n = m \times n$$

Tarefa 1

- Expressão para o nº de vezes que a instrução mais interna é executada
- Expressão para o resultado de cada uma das funções

```
int f1(int n) {
  int i,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    r += i;
  return r;
}
```

```
int f2(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = 1; j <= n; j++)
      r += 1;
  return r;
}
```

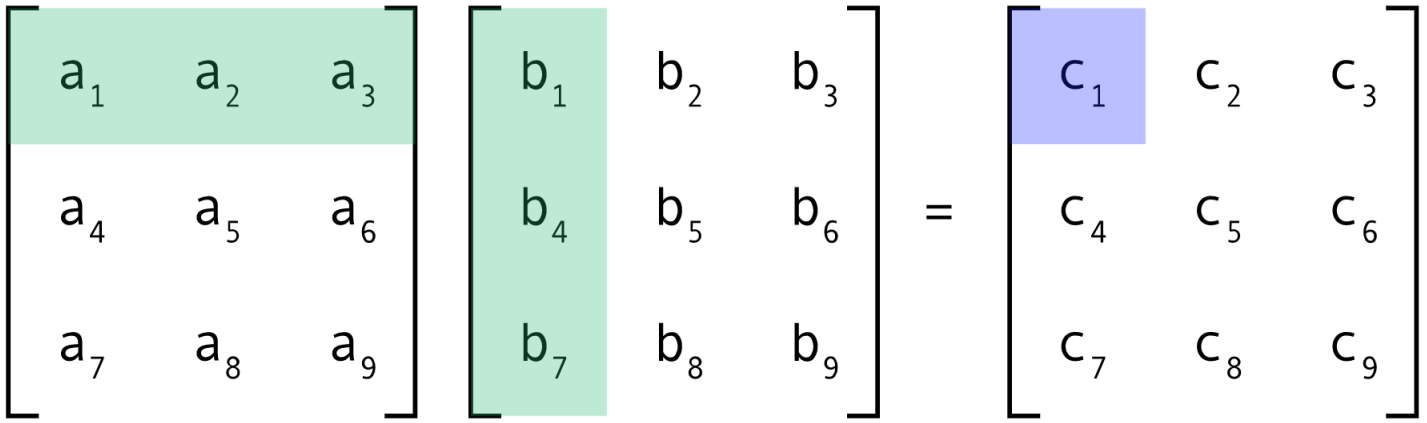
```
int f3(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = i; j <= n; j++)
      r += 1;
  return r;
}
```

```
int f4(int n) {
  int i,j,r=0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = 1; j <= i; j++)
      r += j;
  return r;
}
```

Esta tarefa está resolvida na aula anterior

Multiplicação de matrizes quadradas

Multiplicação de matrizes quadradas



- Quantos elementos tem a matriz resultado ? mxn=3x3= 9 elementos
- Quantas multiplicações se efetuam para calcular cada elemento ?
  3 multiplicações
- Qual é o número total de multiplicações ?

nº total de multiplicações = n^3=3^3=27

nº de adições=n^3-n^2=27-9=18

Multiplicação de matrizes quadradas

```
for(int i=0; i<n; i++) {
    for(int j=0; j<n; j++) {
        c[i][j] = 0;
        for(int k=0; k<n; k++) {
            c[i][j] += a[i][k] * b[k][j];
        }
    }
}
```

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1\right)\right]$$

Algoritmo cúbico

Tarefa 2

- Generalizar para matrizes de qualquer dimensão :

$$A(m \times n) \times B(n \times p) = C(?)$$

Procura do Maior Elemento de um Array Não Ordenado

Procura do maior elemento

```
int searchMax( int a[], int n ) {
        int indexMax = 0;
        for( int i=1; i<n; i++ ) {
                if( a[i] > a[indexMax] ) {
                        indexMax = i;
                }
        }
        return indexMax;
}
```

Procura do maior elemento

- Quantas comparações ?
- Ncomp(n) = n – 1
- Número fixo de comparações
- Algoritmo linear

Procura do maior elemento

- Quantas atribuições à variável indexMax ?
- Número de atribuições depende da localização da 1ª ocorrência do maior elemento !!
- Melhor caso : 1 atribuição – Quando ? *Quando a primeira atri*
- Pior caso : n atribuições – Quando ? Quando estiver ordenado
- Caso médio ? -> Equiprobabilidade

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) / n = (n + 1) / 2$$

Tarefa 3 ???

- Variações do algoritmo anterior :

- Encontrar a última ocorrência do maior elemento
- Encontrar a primeira ocorrência do menor elemento
- Encontrar a última ocorrência do menor elemento

- O que se mantém da análise anterior ?
- O que muda da análise anterior ?

Melhor Caso, Pior Caso e Caso Médio

Best case, Worst case

- Dn = conjunto de instâncias de dimensão n
- I é uma instância de Dn

- t(I) = tempo de execução ou nº de operações para a instância I

$$B(n) = \min_{I \in D_n} t(I) \qquad W(n) = \max_{I \in D_n} t(I)$$

Average case

- Dn = conjunto de instâncias de dimensão n
- I é uma instância de Dn

- p(I) = probabilidade de ocorrência da instância I
- t(I) = tempo de execução ou nº de operações para a instância I

$$A(n) = \sum_{I \in D_n} p(I) \times t(I)$$

Procura sequencial num array

- Dado um array não ordenado com n elementos
- Procurar um dado valor x
- Se existir, devolver o índice da sua primeira ocorrência

Procura sequencial num array

```
int search( int a[], int n, int x ) {
        for( int i=0; i<n; i++ ) {
                if( a[i] == x ) {
                        return i;
                }
        }
        return -1;
}
```

Comparações ?

- B(n) = 1 - Quando ? Primeira atribução
- W(n) = n - Quando ? Array estiver ordenado

- A(n) = ?
- Simplificação : o elemento procurado pertence ao array
- Simplificação : equiprobabilidade -> p(x=a[i]) = 1/n

$$A(n) = 1/n \times (1 + 2 + \ldots + n) = (n + 1) / 2 \approx n / 2$$

Ordens de Complexidade

Ordem de Complexidade

- Classificar a eficiência de um algoritmo para dados de grande dimensão
- Qual é a rapidez com que cresce o tempo de execução (i.e., o nº de operações) , quando a dimensão dos dados se torna (muito) maior ?
- O que acontece se a dimensão dos dados é
  - o dobro ?
  - dez vezes maior ?
  - …
- Como representar essa taxa / rapidez ?

Ordens de Complexidade

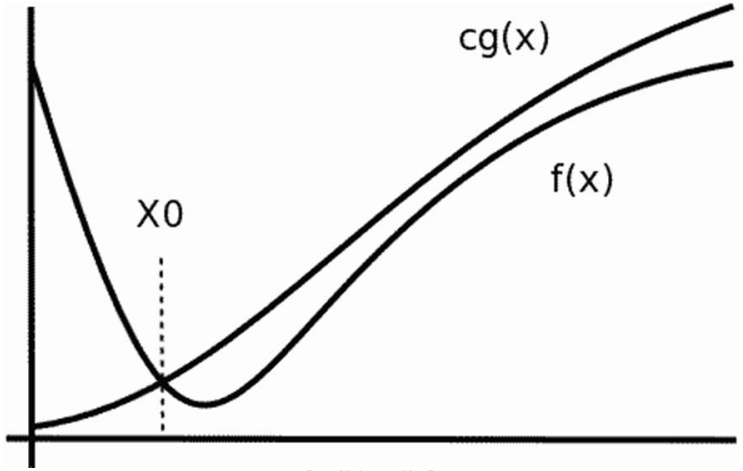
- Valores aproximados para algumas funções habituais

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	n!
10	3.3	10	3.3×10^1	10^2	10^3	10^3	3.6×10^6
10^2	6.6	10^2	6.6×10^2	10^4	10^6	1.3×10^{30}	9.3×10^{157}
10^3	10	10^3	10^4	10^6	10^9	?	?
10^4	13	10^4	1.3×10^5	10^8	10^{12}	?	?
10^5	17	10^5	1.7×10^6	10^{10}	10^{15}	?	?
10^6	20	10^6	2.0×10^7	10^{12}	10^{18}	?	?

Notação assimptótica

- A rapidez com que cresce o nº de operações é um indicador da eficiência de um algoritmo
- Como comparar / classificar algoritmos para um mesmo problema ?
  - Comparando as suas ordens de complexidade !!
- Notações habituais : **$O(n)$, $\Omega(n)$, $\Theta(n)$**

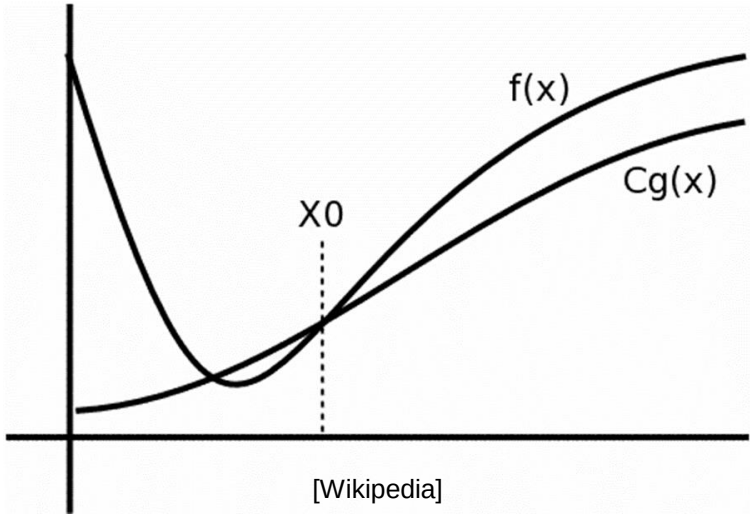
Big-Oh



[Wikipedia]

- Majorante / Limite superior
- **O(g(n))** : conjunto de todas as funções com a mesma ordem de crescimento que g(n) ou com uma ordem de crescimento inferior
- **t(n) ≤ c g(n)**, para todo o n ≥ n_0, c é uma constante positiva
- t(n), g(n) : funções não negativas sobre o conjunto dos números naturais

Big-Omega



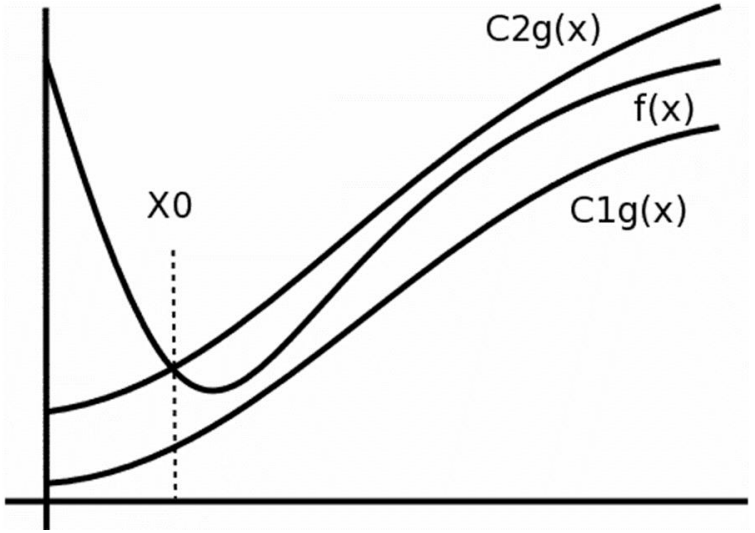
[Wikipedia]

- Minorante / Limite inferior

- **$\Omega(g(n))$** : conjunto de todas as funções com a mesma ordem de crescimento que g(n) ou com uma ordem de crescimento superior

- **$t(n) \geq c\ g(n)$**, para todo o $n \geq n_0$, c é uma constante positiva

Big-Theta



[Wikipedia]

- Enquadramento
- **Θ(g(n))** : conjunto de todas as funções com a mesma ordem de crescimento que g(n)
- **c_1 g(n) ≤ t(n) ≤ c_2 g(n)**, para todo o n ≥ n_0, c_1 , c_2 constantes positivas
- t(n) em O(g(n)) e t(n) em Ω(g(n))

Notação assimptótica

notation	provides	example	shorthand for	used to
Big Theta	asymptotic order of growth	$\Theta(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ $10 N^2$ $5 N^2 + 22 N \log N + 3N$ ⋮	classify algorithms
Big Oh	$\Theta(N^2)$ and smaller	$O(N^2)$	$10 N^2$ $100 N$ $22 N \log N + 3 N$ ⋮	develop upper bounds
Big Omega	$\Theta(N^2)$ and larger	$\Omega(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ N^5 $N^3 + 22 N \log N + 3 N$ ⋮	develop lower bounds

[Sedgewick & Wayne]

Notação assimptótica

- Ocultar detalhes que não são importantes quanto ao modo como uma função cresce
  - Esquecer constantes e termos de ordem inferior

- $T_1(n) = 2\ n^2 + 3000\ n + 5$
- $T_2(n) = 10\ n^2 + 100\ n - 23$
- Para valores elevados de n, $T_2(n)$ cresce mais depressa do que $T_1(n)$
- MAS, ambas crescem de modo quadrático : $\Theta(n^2)$

Tarefa 4 - Completar

p : pertence e np: não pertence

- $T(n) = 10\ n^2 + 100\ n - 23$

$T(n) \overset{p}{?} O(n^2)$ $\quad$ $T(n) \overset{p}{?} O(n^3)$ $\quad$ $T(n) \overset{np}{?} O(n)$

$T(n) \overset{p}{?} \Omega(n^2)$ $\quad$ $T(n) \overset{np}{?} \Omega(n^3)$ $\quad$ $T(n) \overset{p}{?} \Omega(n)$

$T(n) \overset{p}{?} \Theta(n^2)$ $\quad$ $T(n) \overset{np}{?} \Theta(n^3)$ $\quad$ $T(n) \overset{np}{?} \Theta(n)$

Ordens de Complexidade/Classes de Eficiência

- $O(1)$: constante
  - Que algoritmos?
- $O(\log n)$: logarítmico
  - E.g., diminuir-para-reinar
- $O(n)$: linear
  - Processar todos os elementos de um array, uma lista, etc.
- $O(n \log n)$: n-log-n
  - E.g., divider-para-reinar

Ordens de Complexidade/Classes de Eficiência

- $O(n^k)$: polinomial (quadrático, cúbico, etc.)
  - k ciclos encastelados
- $O(2^n)$: exponencial
  - Gerar todos os subconjuntos de um conjunto com n elementos
- $O(n!)$: fatorial
  - Gerar todas as permutações de um conjunto com n elementos

Ordens de Complexidade/Classes de Eficiência

order of growth	name	typical code framework	description	example	$T(2N) / T(N)$
1	**constant**	`a = b + c;`	statement	add two numbers	1
$\log N$	**logarithmic**	`while (N > 1) { N = N / 2; ... }`	divide in half	binary search	~ 1
N	**linear**	`for (int i = 0; i < N; i++) { ... }`	loop	find the maximum	2
$N \log N$	**linearithmic**	[see mergesort lecture]	divide and conquer	mergesort	~ 2
N^2	**quadratic**	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) { ... }`	double loop	check all pairs	4
N^3	**cubic**	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) for (int k = 0; k < N; k++) { ... }`	triple loop	check all triples	8
2^N	**exponential**	[see combinatorial search lecture]	exhaustive search	check all subsets	$T(N)$

[Sedgewick & Wayne]

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- J. J. McConnell, Analysis of Algorithms, 1st Edition, 2001
  - Capítulo 1: secções 1.1, 1.2, 1.4

- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 2: secções 2.1, 2.2, 2.3