Project Schoventheorie
Een poging tot algebraïsche topologie

Pieter Belmans

22 juni 2011

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Zoals gebruikelijk voor een vak bij prof. dr. Van Oystaeyen schrijft een student een werk(je) waarin hij iets vertelt dat vaagweg met de cursus te maken heeft. Dit keer is het niet anders. Voor het vak Schoventheorie[1] heb ik gekozen om een tweeledig werk te schrijven.

Enerzijds wil ik de drie (of vier als je de weinig bestudeerde cohomotopie meerekent) grote pijlers van de algebraïsche topologie definiëren: homotopie, homologie en cohomologie. Een bachelorstudent hoort deze vaak, zonder echt te weten wat deze nu exact zijn. Om mezelf (en mijn medestudenten, moesten deze geïnteresseerd zijn in wat ik hier schrijf) voor eens en voor altijd duidelijk te maken wat deze termen betekenen, heb ik wat dingen hierover uitgezocht en neergeschreven.

Daarna geef ik een introductie tot bettigetallen, een concrete invulling van de algebraïsche topologie en het verband van deze getallen met cohomologie. Ook hier moet ik (noodgedwongen) op de vlakte blijven: noch het formaat van het werk, noch mijn kennis staan me toe om zeer diep te gaan.

Desalniettemin hoop ik mezelf (en de eventuele lezer) iets bij te leren en wens ik professor Van Oystaeyen te bedanken voorschoof de interessante gesprekken.

[1] De laatste keer dat het in zijn huidige vorm gegeven wordt ontdekte ik onlangs, dit is bijgevolg de laatste keer dat zo'n werk geschreven wordt voor het vak Schoventheorie.

2 Een duik in de algebraïsche topologie

De meeste topologen zijn zeer geïnteresseerd in de classificatie van topologische ruimten. Met behulp van zogenaamde *topologische invarianten* proberen ze om een onderscheid te kunnen maken tussen ruimten: dat twee ruimten homeomorf zijn is immers enkel aan te tonen door een expliciet homeomorfisme te construeren. Dit is vaak niet mogelijk. Daarom wordt de situatie omgekeerd: door aan te tonen dat twee ruimten *verschillen* voor een bepaalde invariant zijn ze alvast niet homeomorf.

In het vak Analytische topologie[2] worden verschillende van deze topologische invarianten besproken:

separatie-eigenschappen Zoals daar zijn hausdorff, kolmogorov, regulier, normaal, ... beschrijven deze invarianten in welke mate we in staat zijn om punten of deelruimten van elkaar te scheiden.

aftelbaarheidsvoorwaarden Overdekkingen of omgevingenbasissen kunnen aftelbare delen bevatten, zodat het voldoende is om slechts naar dit aftelbaar deel te kijken om alsnog algemene uitspraken te kunnen doen.

Separabiliteit behelst dan weer een aftelbaar dicht deel binnen de ruimte. Aangezien rijen aftelbare structuren zijn is het voor uitspraken die hiermee in verband staan handig om aan bepaalde voorwaarden te voldoen.

samenhang Hierbij wordt er gekeken of de ruimte al dan niet uiteenvalt in deelruimten met bepaalde eigenschappen. Ook het gedrag van paden (en veralgemeningen hiervan) wordt hier bestudeerd. Dit is het soort topologische invarianten die we zullen veralgemenen in wat volgt.

compactheid Overdekkingen van ruimtes kunnen ook aan bepaalde aftelbaarheidsvoorwaarden voldoen, maar vaak zullen we hier zelfs *eindige* deeloverdekkingen eisen.

metriseerbaarheid De analytische topologie is ontstaan als een veralgemening van de studie der metrische ruimten, bijgevolg is het ook interessant om te kunnen zeggen wanneer een ruimte homeomorf is met een metrische ruimte en dus dezelfde eigenschappen heeft. Op basis van deze metriek kunnen dan zeer sterke eigenschappen van de ruimte gebruikt worden: al de besproken invarianten hebben ruwweg een ordening van zwak naar sterk en metriseerbare ruimten voldaan aan vele sterke invarianten.

Al deze invarianten hebben ook een lokale varianten, waarbij er enkel wordt gekeken naar een arbitraire omgeving van een punt. Voor interessante voorbeelden die deze topologische invarianten van elkaar scheiden verwijzen we naar [SS95].

[2] Eerste semester in de tweede bachelor, door prof. dr. Lowen.

Al deze invarianten vinden hun oorsprong binnen de analytische topologie. Maar door een goede vertaling van topologie naar algebra te maken zullen we in staat zijn om een nieuwe klasse van topologische invarianten aan te boren. Zo komen we tot de *algebraïsche topologie*. We beginnen met een van bij professor Lowen gekend concept: de fundamentaalgroep en haar directe veralgemeningen.

Homotopie

Hierbij zijn we geïnteresseerd in de continue deformaties van continue functies tussen twee topologische ruimten naar elkaar. Als zo'n deformatie (die we een *homotopie* zullen noemen) mogelijk is, zijn de functies in een bepaald aspect gelijk aan elkaar. Formeel:

Definitie 1. Een *homotopie* voor $f, g : X \to Y$ met f, g continu en X, Y topologische ruimten is een continue afbeelding $H : X \times [0,1] \to Y$ zodat $H(x,0) = f(x)$ en $H(x,1) = g(x)$.

Algebraïsche topologie heeft geen alleenrecht op de notie van homotopie, maar veel concepten binnen de algebraïsche topologie zullen invariant zijn voor homotopie. Het maakt dus niet uit welke functie we kiezen zolang ze maar homotoop zijn aan elkaar. In Hoofdstuk 3 zien we invarianten die gelijk zijn voor homotope ruimten, maar eerst bespreken we de homotopiegroepen.

In de cursus Analytische topologie zagen we reeds de notie van fundamentaalgroep. Hiermee werd de verzameling van alle klassen van lussen in een basispunt x_0 van een topologische ruimte X bedoeld. Op basis hiervan kunnen we zeggen of lussen al dan niet samentrekbaar zijn in de ruimte. Formeel:

Definitie 2. Uit de verzameling van *lussen* $f : [0,1] \to X$ met $f(0) = f(1) = x_0$ en f continu delen we de equivalentierelatie die geïnduceerd wordt door homotopie weg. Hierop zetten we vervolgens het product van klassen door $[f] * [g]$ te definiëren voor representanten f en g als

$$f * g = \begin{cases} f(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{1}$$

en het is aan te tonen dat $[f * g]$ onafhankelijk is van de keuze van representanten.

Het bekomen object is *de fundamentaalgroep* $\pi_1(X, x_0)$ van X in het punt x_0.

Zo associëren we dus aan een topologische ruimte (of algemener: een object binnen een categorie) een algebraïsch object (of algemener: een veelal simpeler object in een andere categorie) dat nog steeds voldoende informatie bevat over het oorspronkelijke object om hier zinnige uitspraken over te kunnen doen. In de taal van categorieën: een functor. In het geval van de fundamentaalgroep is dit $\pi_1 : \mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Grp}$.

Voorbeeld 3. 1. De fundamentaalgroep $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ met op $\mathbb{R}^n$ de euclidische topologie is voor elke n de triviale groep: elke lus kan zonder enig probleem worden teruggetrokken tot het punt x_0: er zijn geen obstakels.

2. Voor open delen van $\mathbb{R}^n$ kunnen we nu ook de notie van *enkelvoudig samenhangend* invoeren. In de cursus Complexe analyse[3] werkten we heel vaak met enkelvoudig samenhangende gebieden, waar we gebruik maken van $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Voor zo'n enkelvoudig samenhangend gebied en een analytische functie hebben we wegens de integraalstelling van Cauchy dat de integraal voor eender welke gesloten contour 0 is.

   Maar deze stelling is nu enkel geformuleerd voor enkelvoudig samenhangende open delen: ze kan echter geherformuleerd worden in functie van homologe (zie later) contouren: als C_1 en C_2 homologe gesloten krommen zijn in een (samenhangscomponent van) een open deel Ω en $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ een holomorfe of analytische functie hierop, dan geldt

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

   Verder is er natuurlijk het verband van contour- en cauchyintegralen met de *indexstelling van Atiyah-Singer* en windingsgetallen, dat eigenlijk een vermomde incarnatie van algebraïsche topologie is.

3. De fundamentaalgroep $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ van de cirkel $\mathbb{S}^1$ is echter $\mathbb{Z}$. Een lus op de cirkel komt overeen met de notie van windingsgetallen: het aantal keer dat deze rondgaat ligt vast onder homotopie.

   Er kan bewezen worden dat de fundamentaalgroep van het product van topologische ruimten het product is van de fundamentaalgroepen van de componenten. Bijgevolg is $\pi_1(\mathbb{T}^n, x_0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}$.

4. Voor $\mathbb{S}^n$ met $n \geq 2$ kunnen we echter aantonen dat lussen terug samentrekbaar worden: voor de bol $\mathbb{S}^2$ is dit intuïtief duidelijk omdat er geen obstakels in de weg zitten van zo'n contractie. Bijgevolg is $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{e\}$ voor $n \geq 2$.

5. De fles van Klein heeft in tegenstelling tot de vorige voorbeelden geen abelse fundamentaalgroep: $\pi_1(K, x_0) = \mathrm{Dih}_\infty$, de symmetriegroep van $\mathbb{Z}$ voortgebracht door $a\colon n \mapsto n+1$ en $b\colon n \mapsto -n$. Net zoals de symmetriegroepen van de een regelmatige n-hoek is deze groep niet-abels.

We merken reeds een probleem bij $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ en $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ voor $n \geq 2$: deze ruimten zijn duidelijk verschillend van elkaar, maar onze topologische invariant is niet

[3] Gegeven door prof. dr. Eelbode.

in staat om hier onderscheid tussen te maken[4]. We zullen dus een veralgemening invoeren.

In plaats van lussen (die homotoop zijn met $\mathbb{S}^1$) in een punt x_0 zullen we naar sferen $\mathbb{S}^n$ kijken en zien hoe deze zich gedragen. Bijgevolg is $\pi_n(X, x_0)$ de verzameling van homotopieklassen van afbeeldingen $f : \mathbb{S}^n \to X$ die een basispunt op de sfeer naar x_0 sturen.

Maar we kunnen ook volgende definitie[5] invoeren:

Definitie 4. De n-de homotopiegroep $\pi_n(X, x_0)$ is de verzameling homotopieklassen voor afbeeldingen $f : [0,1]^n \to X$ waarbij de groepsbewerking gedefinieerd is als

$$f * g = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{3}$$

Voorbeeld 5. Het is vooral populair om homotopiegroepen op sferen te bepalen, voor andere objecten is het vaak te moeilijk om deze uit te rekenen[6].

Op basis van de stelling van Hurewicz die homologie en homotopie met elkaar in verband brengt is het mogelijk om aan te tonen dat $\pi_n(\mathbb{S}^n, x_0) = \mathbb{Z}$. Verder geldt dat $\pi_n(\mathbb{S}^{n+k}, x_0) = \{e\}$ voor $k \geq 1$.

Het zijn dus de gevallen $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n, x_0)$ voor $k \geq 1$ die interessant zullen blijken. Bijvoorbeeld $\pi_3(\mathbb{S}^2, x_0) = \mathbb{Z}$, op basis van een afbeelding genaamd de Hopffibratie[7]. Zoals voor de fundamentaalgroep van de cirkel de hele groep werd voortgebracht door een enkele lus, die een aantal keer (in een bepaalde richting) doorlopen kon worden, brengt de Hopffibratie heel $\pi_3(\mathbb{S}^2, x_0)$ voort.

Dit resultaat suggereert dat homotopiegroepen steeds $\mathbb{Z}$ zijn. Maar er kan aangetoond worden dat $\pi_4(\mathbb{S}^2, x_0) = \pi_4(\mathbb{S}^3, x_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, een eindige groep zowaar. De enige regelmaat die er is bestaat uit het feit dat de hogere homotopiegroepen steeds abels zijn. Maar dat $\pi_{14}(\mathbb{S}^4, x_0) = \mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is zeker geen intuïtief resultaat. In [Tod62] is een overzicht te vinden van de reeds bepaalde homotopiegroepen op $\mathbb{S}^n$.

---

[4] Nu zijn er wel meerdere invarianten die hiervoor falen: beide ruimten zijn bijvoorbeeld hausdorff. Maar compactheid daarentegen gaat enkel op voor $\mathbb{S}^n$.

[5] Waarom niet de meer intuïtieve versie met sferen? Wel, voor $f * g$ met $f, g : \mathbb{S}^n \to X$ is de groepsbewerking $\Phi \circ h$ waar $\Phi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^n / \sim$ waarbij $\sim$ twee grote cirkels op de factoren identificeert en $\wedge$ de wedgesom is, het coproduct in $\mathsf{Top}_\bullet$ dat gedefinieerd is door $(X, x_0) \wedge (Y, y_0) / \{(x_0, y_0)\}$ en h is gedefinieerd als $h : \mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^n \to X$ zodat h op de eerste sfeer f is en op de tweede g. Net *daarom* dat we de minder intuïtieve maar gemakkelijkere versie zullen definiëren.

[6] Daarom dat we homologie zullen invoeren.

[7] Ruwweg gezegd is dit een manier om $\mathbb{S}^3$ voor te stellen aan de hand van $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^2$. Waar we in de cursus Differentiaalmeetkunde van professor Lowen het begrip rakende bundel invoerden, een operatie die geassocieerd was aan een projectie π, kunnen we hetzelfde doen voor $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$. Belangrijk is nu dat het geen triviale bundel is, dus $\mathbb{S}^3 \not\cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Na inbedding in $\mathbb{R}^3$ krijgen we een torus waarop we in elkaar genestelde cirkels plaatsen. Maar we wijken af.

Opmerking 6. Er bestaat ook de notie van *cohomotopie*. De afbeeldingen worden simpelweg omgedraaid, dus de n-de cohomotopiegroep $\pi^n(X, x_0)$ bestaat uit de klassen van $f : X \to \mathbb{S}^n$. Ze zijn echter veel minder onderzocht dan homotopie en (co)homologie, daarom dat in de inleiding slechts 3 pijlers gesuggereerd werden[8]. Wel interessant is dat $\pi^1(X, x_0) \cong \mathrm{H}^1(X)$, de eerste cohomologiegroep.

Homologie en cohomologie

Waar homotopie met een gepunte topologische ruimte een groep associeerde, zal (co)homologie een topologische ruimte[9] in verband brengen met een reeks van abelse groepen of modulen. We voeren eerst enkele begrippen in.

Definitie 7. Een *ketencomplex* $(A_\bullet, d_\bullet)$ is een rij $(A_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ van abelse groepen (of modulen) die aan elkaar worden geregen met behulp van de homomorfismen $d_n : A_n \to A_{n-1}$ (*randoperator* genaamd) zodat de samenstelling $d_n \circ d_{n+1} = 0$ voor elke n.

We hebben dus

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \xrightarrow{d_{-1}} A_{-1} \longrightarrow \ldots \tag{4}$$

Wie een beetje vertrouwd is met categorietheorie en haar eigenaardigheden weet dat we graag een “co-” definiëren. Na verloop van tijd wordt dit als een triviale oefening beschouwd, maar nu zullen we deze nog expliciet geven.

Definitie 8. Een *coketencomplex* $(A^\bullet, d^\bullet)$ is een rij van abelse groepen (of modulen) die aan elkaar worden geregen met behulp van de homomorfismen $d^n : A_n \to A_{n+1}$ zodat de samenstelling $d_{n+1} \circ d_n = 0$.

We hebben dus een keten die “in de andere richting” gaat. We zeggen dat de index n de *graad* of *dimensie* is, zodat ketencomplexen “dalende afbeeldingen” hebben terwijl coketencomplexen net stijgen in dimensie.

Definitie 9. Een *begrensd* (co)ketencomplex is een (co)ketencomplex waarvan de termen op een eindig aantal na gelijk zijn aan 0.

Nu zijn we klaar om wat terminologie in te voeren die een zekere intuïtiviteit suggereert:

Definitie 10. De elementen van een term A_n (dus een groep of moduul) in het (co)ketencomplex $(A_\bullet, d_\bullet)$ (of $(A^\bullet, d^\bullet)$) noemen we *(co)ketens*, het beeld van een afbeelding d_n (of d^n) noemen we de *groep van (co)randen* terwijl de kern dan weer de *groep van (co)lussen* is.

[8] Ik had er nog nooit van gehoord totdat ik aan dit werkje begon.
[9] Of algemener: een object.

Omdat het lichtjes overdreven is om de co- te blijven vermelden, stoppen we er vanaf nu mee. Enkel wanneer het daadwerkelijk belangrijk is gebeurt het nog, in de andere gevallen moet het maar duidelijk zijn dat er steeds een duale bestaat.

Omdat $d_n \circ d_{n+1} = 0$ geldt er dat de randen een deel vormen van de lussen van de volgende afbeelding, of ook $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} d_n$. We kunnen bijgevolg het quotiënt van deze groepen bestuderen, en dit zijn dan de *homologiegroepen*:

Definitie 11. De *n-de cohomologiegroep* $\mathrm{H}_n(X)$ van een topologische ruimte X is het quotiënt

$$\mathrm{H}_n(X) := \mathrm{Z}_n(X)/\mathrm{B}_n(X) \tag{5}$$

waarbij $\mathrm{Z}_n(X) := \operatorname{Ker} d_n$ en $\mathrm{B}_n(X) := \operatorname{Im} d_{n+1}$.

Waaraan hebben we deze terminologie te danken? De oorsprong en intuïtieve benadering van homologie ligt in de *simpliciale homologie*. Een *simpliciaal complex* is een topologische ruimte die we bekomen door abstracte punten, lijnstukken, driehoeken, tetraëders en hogerdimensionale veralgemeningen hiervan aan elkaar te plakken op een bepaalde manier. De basiscomponenten noemen we vervolgens *simplices*, of een *simplex*.

Elk zijvlak van een n-simplex is een $(n-1)$-simplex en dus de *rand* van een $(n-1)$-*lus*. Een *affiene k-lus* is een eindige verzameling van k-simplices, waarbij we deze kunnen inbedden in $\mathbb{R}^n$ zodat we de notie van oriëntatie bekomen.

We hebben dus een positief georiënteerde affiene simplex $\sigma = \left[v_1, \ldots, v_n\right]$ en het beeld onder een randoperator wordt gegeven door

$$d_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \left[v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\right]. \tag{6}$$

We hebben nu mits wat verificaties (zie eender welk handboek over homologie) een goede homologietheorie. Merk hierbij dus op dat we op vele mogelijke manieren de axiomatiek die we hier mits enige formalisering hebben ingevoerd (ook wel eilenberg-steenrodaxioma's genoemd) kunnen implementeren.

Na dit mooie voorbeeld gaan we terug naar de essentie: wat doet (co)homologie nu? Wel, we hadden een rij van groepen (of modulen, ...) met afbeeldingen ertussen. Een voor de hand liggende vraag is nu om naar de exactheid hiervan te kijken. Het ketencomplex is exact als en slechts als $\mathrm{Z}_n(X) = \mathrm{B}_n(X)$, dus $\mathrm{H}_n(X) = 0$. Nu zijn triviale groepen niet bijster interessant en bieden ze weinig informatie over de onderliggende ruimte, dus de interessante gevallen zijn wanneer het ketencomplex *niet exact* is.

In dat geval zeggen we dat de (co)homologiegroepen ons zeggen hoever we van exactheid verwijderd zijn. We vinden dan immers dat $\operatorname{Im} d_{n+1} \subsetneqq \operatorname{Ker} d_n$ zodat $\mathrm{H}_n(X) \neq 0$.

Na een stevige veralgemening naar categorieën en functoren vinden we volgend motto[10]:

> "*Cohomology measures the lack of right-exactness.*"

We kunnen dus veel verder kijken dan enkel naar algebraïsche topologie: elke functor kan onderzocht worden op zijn cohomologie. Neem bijvoorbeeld de favoriete functor van elke bachelorstudent, $\otimes$. Deze geeft na de constructie van de rij *afgeleide functoren* Tor_n, gedefinieerd als $\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = \mathrm{L}_n(- \otimes_R B)(A)$ met L_n de n-de linksafgeleide functor en de cohomologie van deze rij levert technieken om modulen te onderzoeken. Analoog voor $\mathrm{Ext}_R^n(A,B) = (\mathrm{R}^n(\mathrm{Hom}_R(A,-)))(B)$ waar R^n nu de n-de rechtsafgeleide functor voorstelt.

Maar terug concreet: de ingevoerde simpliciale homologie werkt dus met modulen A_n die overeenkomen met de vrije abelse groepen voortgebracht door georiënteerde n-dimensionale simplices over een lichaam. De homologiegroepen meten nu het aantal n-dimensionale gaten in het simpliciale complex. Wat we nu zouden kunnen doen is een topologische ruimte (we nemen bijvoorbeeld een torus) trianguleren en mits een voldoende goede resolutie kunnen we zo alle eigenschappen van de gaten in deze ruimte beschrijven.

[10] De bron is me onbekend.

3 Bettigetallen

We zagen dat de abelse groep $\mathrm{H}_k(X)$ ons informatie verschaft over het aantal gaten in een topologische ruimte. We definiëren nu simpelweg:

Definitie 12. Het *k-de bettigetal* $\mathrm{b}_k(X)$ is de rang van de groep $\mathrm{H}_k(X)$ of equivalent de dimensie van de vectorruimte $\mathrm{H}_k(X;\mathbb{Q})$.

Nu lijkt deze definitie niet veel nieuwe inzichten te verschaffen, maar oorspronkelijk was homologie *niet* de studie van rijen van abelse groepen. De eerste incarnatie (dat wil zeggen: door Poincaré, rond 1900) waren net deze bettigetallen, het inzicht dat er groepen mee geassocieerd waren heeft 20 jaar op zich laten wachten. Bovendien bieden deze getallen een intuïtieve interpretatie (want $\mathrm{b}_k(X)$ stemt overeen met het aantal k-dimensionale gaten in X) van homologie die we verder zullen toelichten in Voorbeeld 15.

We associëren met elke topologische ruimte dus een element van $(\mathbb{N}\cup\{+\infty\})^{\mathbb{N}}$, een rij van natuurlijke getallen of $+\infty$. Interessant is dat deze bettigetallen in veel interessante gevallen vanaf een bepaald moment 0 worden. Dit hangt samen met een zekere vorm van eindigdimensionaliteit: bijvoorbeeld voor compacte manifolds is dit het geval.

Met een rij getallen kunnen we een een *voortbrengende functie* associëren door het n-de getal als coëfficiënt voor de monoom x^n te nemen. Dit leidt ons tot:

Definitie 13. De *poincaréveelterm* $\mathrm{P}(X)$ van een topologische ruimte X is de veelterm $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{b}_n(X)x^n$.

Opmerking 14. De poincaréveelterm is enkel een veelterm voor topologische ruimten waarbij de reeks bettigetallen slechts voor eindig veel waarden 0 is. Anders verkrijgen we een reeks.

In Hoofdstuk 2 kwamen geen echte voorbeelden aan bod, daar brengen we nu verandering in.

Voorbeeld 15.

1. Voor de cirkel $\mathbb{S}^1$ wordt de rij van bettigetallen gegeven door $1,1,0,0,\ldots$ dus de poincaréveelterm is simpelweg $1+x$.

   We kunnen de eerste paar bettigetallen interpreteren als volgt:

   $\mathrm{b}_0(X)$ geeft het aantal samenhangscomponenten van de ruimte;

   $\mathrm{b}_1(X)$ geeft het aantal tweedimensionale gaten;

   $\mathrm{b}_2(X)$ geeft het aantal driedimensionale gaten of leegten.

   We zien dat dit van toepassing is op $\mathbb{S}^1$: er is 1 samenhangscomponent en de cirkel omschrijft de open schijf, die het tweedimensionale gat vormt.

2. De n-torus $\mathbb{T}^n$ wordt gerealiseerd als product van n cirkels $\mathbb{S}^1$ en het is aan te tonen met behulp van de stelling van Künneth[11] dat de poincaréveelterm van een product het product van de poincaréveeltermen der factoren is. We vinden dus

$$\mathrm{P}(\mathbb{T}^n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathbb{S}^1) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \tag{8}$$

zodat de bettigetallen gegeven worden door

$$1, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots \tag{9}$$

We kunnen deze omgekeerde beweging nu helemaal voltrekken door te zeggen dat de rang van $\mathrm{H}_k(\mathbb{T}^n)$ gegeven wordt door $\binom{n}{k}$. Meer nog, er geldt dat: $\mathrm{H}_k(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$.

Voor de intuïtieve interpretatie in het geval $n = 2$: $\mathrm{b}_0(\mathbb{T}^2)$ vertelt ons dat er 1 samenhangscomponent is, wat natuurlijk duidelijk is. Verder zijn er twee 2-dimensionale gaten: deze zijn respectievelijk het gat in de torus en de holte in het binnenste van de torus. Tot slot is er één 3-dimensionaal gat: de ruimtelijke leegte middenin de torus waardoor je je vinger kan steken, maar dit keer in 3 dimensies opgevat.

3. Totnogtoe waren de bettigetallen na een bepaald punt constant nul. Dit kwam overeen met een zekere notie van eindigdimensionaliteit. Als we echter onze blik richten op de oneindigdimensionale complexe projectieve ruimte $\mathbb{CP}^\infty$ vinden we

$$1, 0, 1, 0, \ldots \tag{10}$$

als reeks van bettigetallen. De poincaréveelterm is in dit geval een reeks.

In het algemeen geldt er voor $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dat de even homologiegroepen voor de eindigdimensionale complexe projectieve ruimten $\mathbb{CP}^n$ gegeven zijn door $\mathrm{H}_{2k}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ voor $2k \leq n$. Voor alle andere k geldt echter dat $\mathrm{H}_k(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = 0$.

Tot slot kunnen we nog de eulerkarakteristiek definiëren. Herinner dat voor een platonisch lichaam we hadden aangetoond dat

$$\chi = V - E + F = 2 \tag{11}$$

[11] Deze stelt voor de juiste soort topologische ruimten dat

$$\mathrm{H}_k(X \times Y, k) \cong \oplus_{i+j=k} \mathrm{H}_i(X, k) \otimes \mathrm{H}_j(Y, k) \tag{7}$$

voor een lichaam k.

waarbij V het aantal vertices, E het aantal edges en F het aantal faces is. Algemeen geldt dit voor elke convexe veelhoek.

Nu hebben deze veelhoeken een zeer belangrijke veralgemening naar de wereld van homologie: de zogeheten *CW-complexen*. We gaan onze topologische ruimte van extra structuur voorzien via cellen. Deze gaan we vervolgens aan elkaar plakken, zodat de hele ruimte zo beschreven wordt. Dit is analoog aan het ad-hoc invoeren van benaderingen van topologische ruimten voor simpliciale homologie.

Definitie 16. Een *n-dimensionale gesloten cel* is een topologische ruimte die homeomorf is met een n-dimensionale gesloten bol[12]. Analoog is een *n-dimensionale open cel* een topologische ruimte die homeomorf is met een n-dimensionale open bol.

Opmerking 17. Een 0-dimensionale open (maar ook gesloten) cel is een singleton.

Definitie 18. Een *CW-complex* is een hausdorffruimte X met een partitie van X in open cellen zodat

1. voor elke n-dimensionale open cel C in de partitie van X er een continue afbeelding f van de gesloten n-dimensionale bal naar X bestaat waarbij
    - de restrictie van f tot het inwendige van de gesloten bal een homeomorfisme is met de cel C,
    - het beeld van de rand van de gesloten bal is vervat in de eindige unie van verzamelingen van de partitie, waarbij elk deel een dimensie strikt lager dan n heeft;
2. een deel van X is gesloten als en slechts als de sluiting van elke cel in een gesloten deelruimte ontmoet wordt.

Dit verklaart ook de naam van de CW-complexen: we werken met een *closure-finite* structuur in een *weak topology*.

We bekomen tot slot:

Definitie 19. De *eulerkarakteristiek* $\chi(X)$ is gedefinieerd als

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dim \mathrm{H}_n(X, \mathbb{Q}). \tag{12}$$

[12]Dus niet zomaar $\mathbb{S}^n$, maar ook de rand.

4 Besluit

Dit werk is geenszins een gefundeerde introductie tot algebraïsche topologie: ik moest me enerzijds houden aan een zekere richtlijn wat het aantal pagina's betreft en anderzijds vormt algebraïsche topologie niet de hoofdinhoud van het vak schoventheorie. Maar bij het schrijven ervan heb ik mooie wiskunde leren kennen, die me in staat heeft gesteld om de seminaries van de Advanced Master in Noncommutative Algebra & Geometry te volgen.

Bibliografie

[BSW07] John Baez, Mike Stay, and Christopher Walker. Algebraic topology. `http://math.ucr.edu/home/baez/algebraic_topology/`, 2007.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`.

[SS95] Lynn A. Steen and Arthur J. Seebach. *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, September 1995.

[Tod62] H. Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1962.

[Wik11] Wikipedia. Wikipedia, 2011. `http://en.wikipedia.org`.