

Oinarrizko probabilitate-teoria eta muga-teoremak

4. GAIA

Termodinamikak magnitude fisikoen batez besteko balioak elkarrekin erlazionatzen ditu; magnitude horiek, energia, magnetizazioa, partikula kopurua dira, besteak beste. Haatik, termodinamikak ez digu ezertxo ere esaten maila mikroskopikoan gertatzen diren prozesuei buruz, ezta xehetasun mikroskopikoek portaera termodinamikoan duten eraginari buruz. Askatasun-graduen kopuru handiko sistemen teoria mikroskopikoa probabilitate-kontzeptuetan oinarrituta dago. Gai honetan, liburuaren gainerrako gaietan behin eta berriro azalduko diren probabilitatearen oinarrizko kontzeptuak berrikasiko ditugu.

Modu erraz batean hasiko gara; lehenik, kopuru handiko objektuen sortak zenbatzen eta sailkatzen ikasiko dugu, eta, gero, probabilitatearen definizio intuitibo bat emango dugu, zenbaki handien legearen bidez justifikaturik geratuko dena.

Sarrera

Aldagai estokastikoak dira, definizioz, esperimentuetako emaitzek determinatutako balioak dituzten aldagaiak. Aldagai estokastiko bati buruz jakin dezakegun guztia da haren balio posible jakin bat antzemateko probabilitatea esperimentu batean. Probabilitate-banaketak definituko ditugu, aldagai estokastiko jarraitu eta diskretuen kasuetan, eta erakutsiko dugu nola lortu behar diren aldagai estokastiko baten momentuak funtzio karakteristikoak erabiliz. Adibide gisa, banaketa binomialaren azterketa sakona egingo dugu, eta haren bi muga-kasuak aztertuko ditugu: banaketa gaussiarra eta Poisson-en banaketa, hain zuzen.

Gai honetako kontzeptu sinpleek ibilbide luzea egin dezakete. *Gai berezien* atalean, sare bakunetako zorizko ibilbideak espazioko dimentsiobakarrean, bi dimentsiotan eta hiru dimentsiotan aztertzeke erabiliko ditugu. Adibide erraz horien bidez espazioko dimentsio batek aldagai estokastiko batean duen eragina aztertu dezakegu.

3. gaian ikusi dugunez, askatasun-graduen kopuru handiko sistemen portaera termodinamikoa unibertsalitate-maila handikoa da. Berezeki, ikusi dugu sistema askok berretura kritiko berdina dituztela, nahiz eta haien egitura mikroskopikoa ezberdina izan. Kantitate estokastiko arras koerlatuak barneratzen dituen Muga-teoremaren adibidea da hori. Gai honetan, kantitate estokastiko ez-koerlatuen muga-teoremak aztertuko ditugu. Lehenik, aldagai estokastiko infinituki banagarria definituko dugu, eta, ondoren, *Muga-teorema zentrala* ondorioztatuko dugu; horrek deskribatzen du bariantza finituko aldagai estokastiko independenteen muga-portaera. Azkenik, Levy-ren banaketek zuzentzen duten bariantza infinituko aldagai estokastiko independenteen muga-portaera ikasiko dugu. Sistema horiek fraktal moduko klusteratzea,

espazioan, erakusten dutela frogatzeko, Weiertrass-en zorizko ibilbidea erabiliko dugu.

4.1 Permutazioak eta konbinazioak

Problema errealetan probabilitate-teoria aplikatzen dugunean, askotan, konplikatua diren zenbatze-problema aurkitzen ditugu.

Horrelakoetan, arras erabilgarria da honako bi hauek kontuan hartzea:

- *Batuketa printzipioa*: bi eragiketa elkar eskluienteak badira eta horietan lehena m modutan egin badaiteke eta bigarrena, berriz, n aldiz; orduan, bietan edozein $m + n$ modutan egin daiteke.
- *Biderkaketa printzipioa*: eragiketa bat n alditan egin badaiteke, eta posible den horietako modu jakin batean egin ostean, m alditan egin daitekeen bigarren eragiketa bat egiten bada; orduan, eragiketa biak $n \times m$ alditan egin daitezke.

Printzipio bi horiek gai honetan aztertuko ditugun gehienaren oinarrian egongo dira.

Kopuru handiko objektuen sortak aztertzen ditugunean, askotan, beharrezkoa izaten da objektu horien permutazioak edo/eta konbinazioak kalkulatzeko. *Permutazio* bat da N objektu ezberdinen banaketa bat, ordena jakin batean. N objektu ezberdinen permutazioen kopurua $N!$ da. R objektu hartuta N objektu ezberdinen permutazio kopurua $N!/(N - R)!$ da.

Frogapena: Onar dezagun N hutsune ditugula N objektu ezberdinekin betetzeko. Lehen hutsunea N modutan bete daiteke, eta, behin beterik dagoela, bigarrena $(N - 1)$ modutan bete daiteke, eta abar. Beraz, N hutsuneak honako modu kopuru hauetan beteko dira:

$$N(N - 1)(N - 2) \times \dots \times 1 = N!$$

N objektuen, horietatik R baino ez hartuta, P_R^N permutazioen kopurua lortzeko, onar dezagun ordenatutako R hutsune ditugula. Orduan, lehena N modutan bete daiteke, bigarrena $(N - 1)$ modutan, \dots , eta R -garren hutsunea, $(N - R + 1)$ modutan. Honako hau da N objektu ezberdin R -ka hartuta, hots, ordenatutako R hutsune betetzeko, moduen kopurua:

$$P_R^N = N(N - 1)(N - 2) \times \dots \times (N - R + 1) = \frac{N!}{(N - R)!}$$

Konbinazio bat da ordena kontuan hartzen ez duen N objektuen hautaketa bat. R objektu hartuta, N objektuen konbinazioen kopurua honako hau da: $\left(\frac{N!}{(N - R)!R!} \right)$.

Frogapena: R objektu ezberdinen permutazioen kopurua $R!$ da. R objektu hartuta, N objektuen konbinazioen kopurua adierazteko C_R^N ikurra erabiliko dugu; orduan, $R!C_R^N = P_R^N$ betetzen da eta, beraz, $C_R^N = \frac{N!}{(N - R)!R!}$ dugu.

Mota bateko n_1 objektu, beste mota bateko n_2 objektu, \dots , eta beste mota ezberdin bateko n_k objektu multzoan daudela jakinik, N objektu ezbedinez osatutako multzoaren permutazio kopurua $\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ da; adierazpen horretan, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ dugu.

4.2 Probabilitatearen definizioa

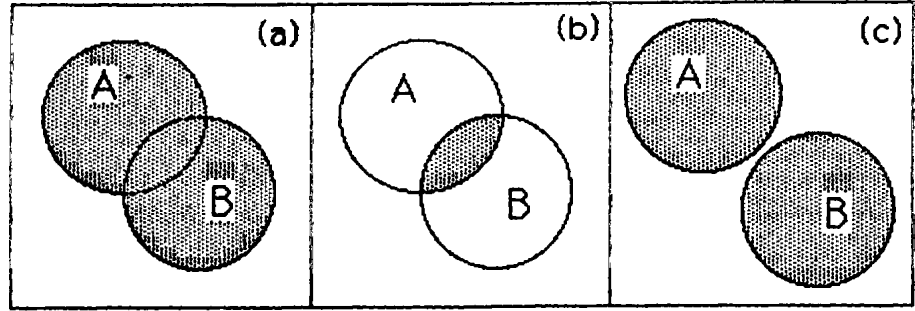
*Lurruntzea, likidotzea, grafitoa diamante bihurtzea, proteinen hedatzea, ADN-ren helize bikoitzaren hedatzea **fase trantsizioen** adibideak dira, edo, beste modua batean esateko, konposizio kimikoa aldatzen ez den fase-aldaketak. Fase-aldaketa ugari gertatzen da eguneroko bizitzan, eta horien guztien deskripzioa kimika fiskoaren zati garrantzitsua da. Gai honetan garatzen den zenbait kontzeptu termodinamikok biokimikako teknika esperimental batzuen oinarriak asatzen dituzte.*

Probabilitatea da gertakari edo esperimentu baten ondorioz lortuko den emaitzaren *esperotzearen* kuantizazioa. Onar dezagun esperimentu batean lor daitekeen balio bat A dela. Orduan, A balioa lortzeko probabilitatea $P(A)$ da baldin, eta soilik baldin, N esperimentu egindakoan, A balioa lortzeko $NP(A)$ *esperotzea* badugu. N oso handi egiten denean ($N \rightarrow \infty$), egindako esperimentuen artean A balioa eman dutenen kopuruak $P(A)$ -ra jotzera espero dugu. Esperimentu baten emaitza probabilitate bereko n balio ezberdinetan gerta daiteken kasu berezia garrantzitsua da. Emaitza horien artean zehazki m emaitzetan A gertakaria suertatu bada, orduan, $P(A) = \frac{m}{n}$ dugu.

Lagin-espazioaren kontzeptua, batzuetan, erabilgarria da probabilitateen arteko erlazioak lortzeko eta esperimentuak aztertzeko. Esperimentu baten *lagin-espazioa* da S ikurraz adieraziko dugun multzo bat: esperimentuaren emaitza posibleak multzo horretako elementu bati edo bat baino gehiagori dagokie. *Gertakari* bat da esperimentu baten S lagin-espazioaren azpimultzo bat. Gertakari baten probabilitatea honako prozedurari segituz lor daiteke:

- Osa ezazu S lagin-espazio bat, posibleak diren emaitza guztiez osatutakoa.
- Eslei iezaeizu probabilitateak lagin-espazioaren elementuei (lagin-puntuak). Probabilitate bereko N emaitza posibleko lagin-espazioko kasu berezian, eslei iezaeiozu $\frac{1}{N}$ probabilitatea lagin-puntu bakoitzari.
- A gertakariaren probabilitatea lortzeko, batu itzazu A gertakariari dagozkion S lagin-espazioaren azpimultzoko lagin-puntuen probabilitateak.

Probabilitateekin lan egiten denean, multzoen teoriako zenbait ideia erabilgarri suerta daiteke. A eta B gertakarien batzea $A \cup B$ ikurra erabiliz adierazten da. $A \cup B$ multzoa da A -ren edo B -ren edo bi multzoen puntuek osatutako multzoa (ikus 4.1a irudia). Bi gertakarien intersektzioa $A \cap B$ ikurraz adierazten da. $A \cap B$ multzoa da A -ren eta B -ren puntuek osatutako multzoa (ikus 4.1b irudia). A eta B gertakariak elkarren baztertzailak badira, orduan, $A \cap B = \emptyset$ dugu; adierazpen horretan \emptyset da huts multzoa ($A \cap B =$ ez dauka punturik, ikus 4.1c irudia).



Irudia 4.1:

Gertakari ezberdinen arteko erlazio erabilgarriak lor ditzakegu. Onar dezagun esperimentu baten emaitza A gertakaria izateko probabilitatea $P(A)$ dela ($P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$); berabat, esperimentu baten emaitza A eta B gertakari *biak* gertatzeko probabilitatea $P(A \cap B)$ da; azkenik esperimentu baten emaitza A edo B gertakariak izateko probabilitatea $P(A \cup B)$ da. $P(A \cup B)$ probabilitatea honako era honetan idatz daiteke:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (4.1)$$

$P(A) + P(B)$ idaztean, $A \cap B$ eskualdea birritan hartzen dugu kontuan; beraz, $P(A \cap B)$ faktorea kendu behar dugu.

Bi gertakari, A eta B , elkarren baztertzailak badira, ez dute puntu komunik eta honako hau idatz dezakegu:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (4.2)$$

A_1, A_2, \dots, A_m gertakariak elkarren baztertzailak eta *exhaustiboak* badira, orduan, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = S$ dugu, eta m gertakariak S lagin-espazioaren m azpimultzoko *partizioa* eratzen dute. A_1, A_2, \dots, A_m gertakarien sorta partizioa eratzen badute, orduan, honako hau izango dugu:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) = 1 \quad (4.3)$$

(4.3) ekuazioa askotan agertu zaigu liburuan zehar.

A eta B gertakariak independenteak dira, baldin eta soilik baldin, honako hau betetzen bada:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (4.4)$$

Kontura zaitez $P(A \cap B) \neq 0$ betetzen denez, A eta B gertakariak zenbait puntu komun dutela. Beraz, independenteak diren gertakariak ez dira elkarren baztertzailleak: kontzeptu arras diferenteak dira bi horiek. Elkarren baztertzailleak diren gertakarien kasuan, honako hau dugu: $P(A \cap B) = 0$.

$P(A|B)$ probabilitate baldintzatua da esperimentu bat egindakoan A gertakaria antzemateko probabilitatea, B gertakaria ere gertatzen bada. $P(A|B)$ probabilitate baldintzatua honako ekuazio honek definitzen du:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.5)$$

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$ betetzen denez, honako hau ere idatz dezakegu:

$$P(A)P(A|B) = P(B)P(B|A) \quad (4.6)$$

(4.4) ekuaziotik ikus daitekeenez, A eta B gertakariak independenteak badira, orduan, honako hau dugu:

$$P(A|B) = P(A) \quad (4.7)$$

$P(A|B)$ probabilitate baldintzatua, izan ere, da A gertakariaren probabilitatea, S -ren ordeztu B erabiltzen badugu lagin-multzo gisa.

4.3 Aldagai estokastikoak eta probabilitatea

Atal honetan, probabilitate-banaketa eta probabilitate-dentsitate funtzioak eta funtzio karakteristikoak definituko ditugu. Funtzio horiek guztiak aldagai estokastiko bati lot diezazkiegu eta aldagai estokastikoari buruzko informazio osoa barneratzen dute. Funtzio horiek orokortuko ditugu, sistema baten deskribapen osoa egiteko zenbait aldagai estokastiko behar den kasuan.

Probabilitate-teoria mundu errealean aplikatzeko, aldagai estokastikoaren, edo zorizko aldagaia (bi hitzak trukagarriak, baina guk aldagai estokastikoa erabiliko dugu), kontzeptua definitu behar dugu. Esperimentu baten emaitzak finkatzen duen zenbakia balio posibletzat duen aldagaiari *aldagai estokastiko* deritzo. S lagin-espazio batean definitutako aldagai estokastiko bat, X , da S multzoko elementuak zenbaki errealean sorta bateko, $\{R\}$, zenbakiekin lotzen dituen funtzioa; lotzea halakoa da alderantzizko lotzean, $\{R\}$ sortako edozein tarte S -ko gertakari bati dagokiola. Beste modu batean esanda: aldagai estokastiko bat da lagin-puntuei zenbaki erreal bana esleitzen dien funtzioa. Erabilgarria da azpimarratzea ezen *hauta ezazu zorizko eran* esamoldearen bidez honako hau adierazi nahi dela: hautaketa guztiak probabilitate berekoak direla.

Esperimentu jakin bat egindakoan, aldagai estokastiko batek balio bat eduki behar du, sorta bateko balioen artean. Ondorioz, kontuz ibili behar da eta ondo bereizi

behar da aldagai estokastikoa (normalean letra larriz adierazten da, X , esaterako) eta horrek eduki ditzakeen balio posibleak: $\{x_i\}$. Aldagai estokastikoen adibideak honako hauek dira, besteak beste: (i) hiru txanpon jaurtikitzen direnean aurkiak agertzen diren kopurua, (ii) labe batetik ihes egiten duten mekulen abiadura.

4.3.1 Banaketa-funtzioak

Aldagai estokastiko diskretuak

Onar dezagun X dela S lagin-espazioan definitutako aldagai estokastikoa, eta berebat, onar dezagun X aldagaiaren balio posibleak x_i direla, non $i = 1, 2, \dots, n$ den (n zenbaki osoa eta finitua ala $n = \infty$ izan daiteke). S lagin-espazioa probabilitate-espazio bihurtu daiteke, posible den x_i balio bakoitzari p_i probabilitate bat esleituz. $\{p_i\}$ sorten multzoa da probabilitate-banaketa S lagin-espazioan, eta $p_i \geq 0$ eta $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ baldintzak betetzen ditu.

Probabilitate-dentsitate funtzio bat, $P_X(x)$, honako era honetan defini dezakegu:

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i) \quad (4.8)$$

Berebat, banaketa-funtzio bat ere, $F_X(x)$, defini dezakegu, honako era honetan:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x dy P_X(y) = \sum_{i=1}^n p_i \Theta(x - x_i) \quad (4.9)$$

Adierazpen horretan, $\Theta(x - x_i)$ da Heaviside funtzio bat. Horren balioak dira: $\Theta(x) = 0$, $x < 0$ denean, eta $\Theta(x) = 1$, $x > 0$ denean. Kontura zaitez probabilitate-dentsitate funtzioa banaketa-funtzioaren deribatua dela; hots, $P_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. $F_X(x)$ banaketa-funtzioa hau da: X aldagai estokastikoak $(-\infty, x)$ tartean balio posible bat izateko probabilitatea. $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatea positibo beti izan dadin, $F_X(x)$ banaketa-funtzioak x -ren funtzio monotonoki gorakor izan behar du. $F_X(x)$ funtzioak $F_X(-\infty) = 0$ eta $F_X(+\infty) = 1$ ditu muga-balio.

Aldagai estokastiko jarraituak

Onar dezagun X dela balioen multzo jarraitu batean balio posibleak eduki ditzakeen aldagai estokastikoa; balioen multzo jarraitu hori ardatz errealean tarte bat izan daiteke. Aldagai estokastikoaren definiziotik, jakin badakigu $\{a \leq x \leq b\}$ tarte bat gertakari bati dagokiola. Onar dezagun piezabakarreko funtzio jarraitu bat existitzen dela, $P_X(x)$; funtzio horrek adierazten du X aldagai estokastikoak $\{a \leq x \leq b\}$ tartean balio bat izateko probabilitatea $P_X(x)$ kurbatik beherako gainazalaren azalera dela, $x = a$ eta $x = b$ balioen artean eta $P_X(x) - x$ diagraman; hots, honako hau:

$$\text{Prob } (a \leq x \leq b) = \int_a^b dx P_X(x) \quad (4.10)$$

Orduan, X aldagai estokastiko jarraitua da, $P_X(x)$ da X aldagaia estokastikoaren probabilitate-dentsitatea, eta $P_X(x)dx$ da X aldagai estokastikoa $x \rightarrow x + dx$ tartean antzemateko probabilitatea. Probabilitate-dentsitateak honako bi baldintza hauek bete behar ditu: $P_X(x) \geq 0$ eta $\int_{-\infty}^{+\infty} dx P_X(x) = 1$ (onartu dugu X -ri dagokion tartea $-\infty \leq x \leq +\infty$ dela).

Berebat, x aldagai estokastiko jarraituaren banaketa-funtzioa, $F_X(x)$, defini dezakegu. Lehengo kasuaren moduan, honakoa da banaketa-funtzioari dagokion adierazpena:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x dy P_X(y) \quad (4.11)$$

Banaketa-funtzioa da X aldagai estokastikoa $\{-\infty \leq x\}$ tartean antzemateko probabilitatea. $F_X(x)$ banaketa-funtzioak x -ren funtzio monotonoki gorakor izan behar du. $F_X(x)$ funtzioak $F_X(-\infty) = 0$ eta $F_X(+\infty) = 1$ ditu muga-balio.

Askotan, X aldagai estokastikoaren probabilitate-dentsitatea lortu nahi izan beharrean, beste aldagai estokastiko berri baten, $Y = H(X)$ ($H(X)$ da X -ren funtzio ezaguna), probabilitate-funtzioa lortu nahi dugu. Y aldagai estokastikoari dagokion $P_Y(y)$ probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(y - H(x)) P_X(x) \quad (4.12)$$

Adierazpen horretan, $\delta(y - H(x))$ Dirac-en delta funtzioa da.

4.3.2 Momentuak

X aldagai estokastiko baten $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatea lor badezakegu, orduan, hari buruzko informazio posible osoa lortu dugu. Praktikan, hori, normalean zaila da. Haatik, $P_X(x)$ bera lortu ezin badugu, batzuetan, X -ren momentuei buruzko informazioa lor dezakegu. X aldagaiaren n -garren momentua honako era honetan definitzen da:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n P_X(x) \quad (4.13)$$

Momentu batzuek izen bereziak dituzte. $\langle x \rangle$ momentuari X -ren batez besteko balioa deritzo. $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ konbinazioari X -ren bariantza deritzo, eta X -ren σ_X debidazio estandarra honako era honetan definitzen da:

$$\sigma_X \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (4.14)$$

Momentuek $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatearen hedadura eta eiteari buruzko informazioa ematen dute. Momenturik garrantzitsuenak ordena txikikoak dira, horiek barneratzen baitute probabilitate-dentsitatearen osotasuneko portaerari buruzko informazioa. Horien zenbait adibide emango dugu ondoren.

Lehen momentua

Lehen momentuak ($\langle x \rangle$) $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatearen “masa-zentro”aren posizioa ematen digu. Batzuetan, beste bi kantitatekin nahasten da, halaber: balio probabileena, x_p , eta mediana, x_m . x_p balio probabileenak $P_X(x)$ probabilitate handieneko puntua finkatzen du. x_m medianak, bere aldetik, adierazten du zer puntuk banatzen duen bi zati berdinetan $P_X(x)$ kurbatik beherako gainazala, $P_X(x) - x$ diagraman; beste modu batean esanda: $F_X(x_m) = \frac{1}{2}$.

(4.4) ariketan adierazten diren banaketa gaussiarren simetria dela-eta, $\langle x \rangle$ batez bestekoa, x_p balio probabileena eta x_m mediana, denak puntu berean gertatzen dira: $x = 0$ puntuan, hain zuzen ere. (4.5) ariketan aztertzen den adibidean, denak puntu ezberdinetan agertzen dira.

Bigarren momentua

Bigarren momentuak ($\langle x^2 \rangle$) $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatearen jatorriarekiko “inertzia-momentu”a ematen digu. σ_X desbidazio estandarra [(4.14) ekuazioa] $\langle x \rangle$ momentuarekiko $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatearen hedaduraren neurria da. Interesantea da zenbait adibide aztertzea: (4.4) ariketan, $\langle x^2 \rangle = 4$, $\langle x \rangle = 0$ eta $\sigma_X = 2$ dira; aldiz, (4.5) ariketan, $\langle x^2 \rangle = 0,966$, $\langle x \rangle = -0,5625$ eta $\sigma_X = 0,806$.

Hirugarren momentua

Hirugarren momentuak ($\langle x^3 \rangle$) $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatearen $x = 0$ puntuarekiko asimetria ematen digu. Hori (4.4) eta (4.5) ariketetan ikus daiteke. (4.4) ariketan, $\langle x^3 \rangle = 0$ da, probabilitatea simetrikoki banatuta baitago $x = 0$ puntuaren inguruan. (4.5) ariketako probabilitate-banaketa kasuan, aldiz, $\langle x^3 \rangle = -0,844$ da; horrek esan nahi du probabilitate gehiena $x = 0$ puntuaren ezkerretara kokatzen dela.

4.3.3 Funtzio karakteristikoak

X aldagi estokastikoaren $f_X(k)$ funtzio karakteristikoa honako era honetan definitzen da:

$$f_X(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} P_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!} \quad (4.15)$$

(4.15) ekuazioan agertzen den serieko garapena egitea zentzuzko da ordena handiko momentuak txikiak badira bakarrik, eta, ondorioz, serieak konbergitzen du. (4.15) ekuazioko seriea ikusita, argi dago harek momentu guztiak behar dituela $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatea erabat finkatzeko. Funtzio karakteristikoak k -ren funtzio jarraituak dira, eta honako propietate hau dute: $f_X(0) = 1$, $|f_X(k)| \leq 1$, eta $f_X(-k) = f_X^*(k)$ (* ikurra konplexu konjugatua adierazten du). Bi funtzio karakteristikoren biderkadura beti da funtzio karakteristiko bat.

Funtzio karakteristikoa ezaguna bada, orduan, $P_X(x)$ probabilitate-dentsitatea alderantzizko transformatuak ematen du; hots, honako honek:

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} f_X(k) \quad (4.16)$$

Are gehiago, funtzio karakteristikoa ezagutzen badugu, momentuak lor ditzakegu, diferentziazatuz:

$$\langle x^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{d^n f_X(k)}{dk^n} \quad (4.17)$$

(4.17) ekuazioaren modu errazean lor daitezke momentuak $f_X(k)$ funtzioa ezaguna bada.

Askotan, interesanteagoa da $f_X(k)$ funtzio karakteristikoa $C_n(X)$ kumulanteen funtzioan idaztea, zuzenean momentuen funtzioan garatzea baino. Kumulanteen bi-dezko garapena honako adierazpen honek ematen du:

$$f_X(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} C_n(X) \right) \quad (4.18)$$

Adierazpen horretan, $C_n(X)$ da n -garren kumulantea. (4.15) eta (4.18) ekuazioak k -ren berreturetan garatzen badugu eta k -ren ordena bereko gaiak berdintzen baditugu, honako hauek dira lehen lau kumulanteen adierazpenak:

$$C_1(x) = \langle x \rangle \quad (4.19)$$

$$C_2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (4.20)$$

$$C_3(x) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3 \quad (4.21)$$

$$C_4(x) = \langle x^4 \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 - 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle - 6\langle x \rangle^4 \quad (4.22)$$

Ordena handiko kumulanteak azkar joaten badira zerorantz, (4.18) ekuazioko lehen atalak baino ez kontuan hartuz, $f_X(k)$ funtzioaren hurbilketa ona beti lor dezakegu. Ikus daitekeenez, $C_1(X)$ da X -ren batez bestekoa, eta $C_2(X)$, bariantza.

4.3.4 Elkarrekin banatutako aldagai estokastikoak

X_1, X_2, \dots, X_n aldagaiak elkarrekin banatuta daude S lagin-espazio berean definituta badaude. X_1, X_2, \dots, X_n aldagaien banaketa-funtzio konbinatua honako era honetan idatz daiteke:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \text{Prob} \{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\} \quad (4.23)$$

Adierazpen horretan, $\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\} = \{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}$ dugu. Beste modu batean esanda, $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ da X_i aldagai estokastikoek aldiberean $\{-\infty < X_i < x_i\}$ tartetean balioak izateko probabilitatea, $i = 1, \dots, n$ da. Probabilitate-dentsitate konbinatua honako era honetan definiturik dago:

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (4.24)$$

Beraz, hauxe izango dugu:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx_1 \dots dx_n P_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.25)$$

Azter ditzagun X eta Y bi aldagai estokastiko bakarrekin lotuta dauden $F_{X,Y}(x, y)$ eta $P_{X,Y}(x, y)$ banaketa-funtzio konbinatua eta probabilitate-dentsitate konbinatua, hurrenez hurren.

Banaketa-funtzioak $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$ eta $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$ baldintzak betetzen ditu. Are gehiago, honako hau ere idatz dezakegu, $x_2 > x_1$ de-nean:

$$F_{X,Y}(x_2, y) - F_{X,Y}(x_1, y) = \text{Prob} \{x_1 < X \leq x_2; Y \leq y\} \quad (4.26)$$

$P_{X,Y}(x, y)$ probabilitate-dentsitateak $0 \leq P_{X,Y}(x, y) \leq 1$ baldintza betetzen du, eta leian normalizatuta dago, hots,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy P_{X,Y}(x, y) = 1 \quad (4.27)$$

X aldagai estokastikoren $F_X(x)$ banketa-funtzio bildua lortu nahi badugu, honako era honetan definiturik dago:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{+\infty} P_{X,Y}(x', y) \quad (4.28)$$

X aldagai estokastikoren $P_X(x)$ probabilitate-dentsitate bildua honako era honetan definiturik dago:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy P_{X,Y}(x, y) \quad (4.29)$$

Berebat, $F_Y(y)$ banaketa-funtzio bildua eta $P_Y(y)$ probabilitate-dentsitate bildua lor ditzakegu.

X aldagaiaren n -garren momentuaren definizioa honako dau da:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x^n P_{X,Y}(x, y) \quad (4.30)$$

X eta Y aldagai estokastikoen momentu konbinatuak honako hauek dira:

$$\langle x^m y^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy x^m y^n P_{X,Y}(x, y) \quad (4.31)$$

Fisikan, normalean, erlazionaturik dauden bi momentu konbinatu erabiltzen dira. Lehena kobariantza da, honako hau:

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (4.32)$$

Bigarrena, lehena baino erabilgarriagoa, *koerlazio-funtzioa*, honako era honetan definitzen da:

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.33)$$

Adierazpen horretan, σ_X eta σ_Y X eta Y aldagai estokastikoen debidazio estandarrak dira, hurrenez hurren. $\text{Cor}(X, Y)$ koerlazio-funtzioa dimentsiogabekoa da, eta X eta Y aldagaien arteko mendekotasun-mailaren neurria da (ikus 4.7 ariketa). Koerlazio-funtzioak honako propietate hauek ditu:

1. $\text{Cor}(X, Y) = \text{Cor}(Y, X)$
2. $-1 \leq \text{Cor}(X, Y) \leq 1$
3. $\text{Cor}(X, X) = 1, \text{Cor}(X, -X) = -1$
4. $\text{Cor}(aX + b, cY + d) = \text{Cor}(X, Y), a, c \neq 0$

Koerlazio-funtzio konbinatuaren kontzeptua beste edozein aldagai estokastikoren kopurura heda daiteke.

Independenteak diren bi aldagai estokastikoren kasuan, X eta Y , honako propietate hauek betetzen dira:

1. $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$
2. $\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$
3. $\langle (X + Y)^2 \rangle - \langle X + Y \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 + \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$
4. $\text{Cor}(X, Y) = 0$

Kontura zaitez azken horren alderantzizkoak ez duela bete behar; hots, $\text{Cor}(X, Y) = 0$ bada, horrek ez du beti esan nahi X eta Y aldagaiak independenteak direnik.

Aldagai estokastiko bat baino gehiagorekin lan egiten dugunean, batzuetan, nahi izango dugu aldagai estokastikoen funtzioa den beste aldagai berri baten probabilitate-dentsitatea lortzea. Esaterako, $P_{X,Y}(x, y)$ probabilitate-dentsitate kobinatua ezaguna bazaigu, agian, $Z = G(X, Y)$ aldagai estokastikoaren probabilitate-dentsitatea lortzea nahi dugu; $G(X, Y)$ funtzio ezaguna da. Z aldagaiaren $P_Z(z)$ probabilitate-dentsitatea honako era honetan definita dago:

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(z - G(x, y)) P_{X,Y}(x, y) \quad (4.34)$$

(4.34) ekuazioa erabiliz, Z aldagaia estokastikoaren funtzio karakteristikoa modu errazean lor daiteke, honako hau da:

$$f_Z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{ikG(x,y)} P_{X,Y}(x, y) \quad (4.35)$$

Berebat, elkarrekin banatutako aldagai estokastikoen funtzio karakteristikokoak defini ditzakegu, honako era honetan:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(k_1, k_2, \dots, k_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_N x_N)} P_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4.36)$$

$\langle x_i \cdots x_n \rangle$ ($n \leq N$) momentu konbinatuari dagokion adierazpena honako hau da:

$$\langle x_i \cdots x_n \rangle = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \cdots \lim_{k_n \rightarrow 0} (-i)^n \frac{\partial}{\partial k_1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial k_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(k_1, k_2, \dots, k_N) \quad (4.37)$$

Banaketa multibarianteen artean garrantzitsuenetarikoa, eta, liburu honetan, askotan erabiliko dena, batez besteko nuluko banaketa multibariante gausirra da. Horren zenbait propietate (4.9) ariketan aztertzen dira.

4.4 Banaketa binomialak

Probabilitate-teoriaren ohiko aplikazio bat da N kopuru handiko esperimentu independenterena, horietako bakoitzak bi emaitza posible dituenan. Posible diren bi emaitza horietako baten probabilitateari banaketa binomiala deritzo. N handiko muga-kasuan, banaketa binomiala Gauss-en edo Poisson-en banaketak erabiliz hurbildu daiteke; esperimentu bakarrean lortutako emaitza jakin baten probabilitatearen balioak finkatzen du batez ala bestez ordezkatzen den. Banaketa binomiala erabiliko dugu dimentsio bakarreko zorizko ibilbidearen probabilitate-dentsitatea lortzeko.

4.4.1 Banaketa binomiala

Egin ditzagun estatistikoki independenteak diren N saiakuntzen segida bat, eta onar dezagun saiakuntza bakoitzak bi emaitza baino ezin duela izan: 0 ala +1. Izenda dezagun q letraz 0 balioa lortzeko probabilitatea, eta, p -z, +1 balio lortzeko probabilitatea; horrela, $p + q = 1$ da. N saiakuntzen segida batean, 0 balioa n_0 alditan ager daiteke, eta +1 balioa, n_1 alditan, $n_0 + n_1 = N$ izanik. 0 balioaren n_0 eta +1 balioaren n_1 emaitzen permutazioen kopurua $q^{n_0} p^{n_1}$ da, N esperimentuak estatistikoki independenteak baitira. 0 balioaren n_0 emaitzen eta +1 balioaren n_1 emaitzen edozein konbinazioen kopurua honako hau da:

$$P_N(n_1) = \frac{N!}{n_0! n_1!} q^{n_0} p^{n_1} \quad (4.38)$$

Eta hori horrela da 0 balioaren n_0 emaitzen eta +1 balioaren n_1 emaitzen edozein konbinaziotan $\frac{N!}{n_0! n_1!}$ permutazio baitago. Normalean, (4.38) ekuazioari banaketa binomiala deritzo, nahiz eta ez den 4.D ataleko zentzuan definitutako banaketa-funtzioa. Teorema binomiala erabilita, honako normalizazio-baldintza hau dugu:

$$\sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} = (p+q)^N = 1 \quad (4.39)$$

Beste modu batean azter dezakegu esperimentuen segida. Onar dezagun X_i aldagai estokastikoak i -garren esperimentuarekin lotutako emaitza dela, eta onar dezagun, berebat, X_i aldagaiak bi balio posible izan ditzakeela: $x = 0$ balio, q probabilitatearekin, eta $x = +1$ balioa, p probabilitatearekin. i -garren esperimentuaren probabilitate-dentsitatea $P_{X_i}(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1)$ da, eta i -garren esperimentuarekin lotutako funtzio karakteristikoa, $f_{X_i}(k) = q + pe^{ik}$.

Azter dezagun, orain, N esperimentu burututakoan, horietan lortutako emaitzen baturak definitzen duen $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ aldagai estokastikoa. Saiakuntzak independdenteak direnez, honakoa da Y_N aldagai estokastikoaren probabilitate-dentsitatea:

$$P_{Y_N}(y) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \delta(y - x_1 - \dots - x_N) P_{X_1}(x_1) \times \dots \times P_{X_N}(x_N) \quad (4.40)$$

(4.35) ekuazioa erabiliz, Y_N zorizko aldagaiaren funtzio karakteristikoa honako hau da:

$$\begin{aligned} f_{Y_N}(k) &= \int \dots \int dx_1 \dots dx_N e^{ik(x_1+x_2+\dots+x_N)} P_{X_1}(x_1) \times \dots \times P_{X_N}(x_N) \\ &= f_{X_1}(k) \times \dots \times f_{X_N}(k) = (q + pe^{ik})^N \end{aligned} \quad (4.41)$$

Funtzio karakteristikoa teorema binomiala erabiliz gara dezakegu; eta honako hau lortzen dugu:

$$f_{Y_N}(k) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} e^{in_1 k} \quad (4.42)$$

Y_N aldagai estokastikoaren probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$\begin{aligned} P_{Y_N}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-iky} f_{Y_N}(k) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} \delta(y - n_1) \\ &= \sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) \delta(y - n_1) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Adierazpen horretan, $P_N(n_1)$ da $+1$ balioa N saiakuntzetatik n_1 saiakuntzetan lortzeko probabilitatea.

Momentuak, $\langle y \rangle = \langle n_1 \rangle$, modu oso errazean lortzen dira, zuzenean batuz edo diferentziazatuz funtzio karakteristikoa; esaterako, honako era honetan:

$$\langle n_1 \rangle = \sum_{n_1=0}^N n_1 P_N(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = p^N \quad (4.44)$$

Berebat, arras erraza da honako hau lortzea:

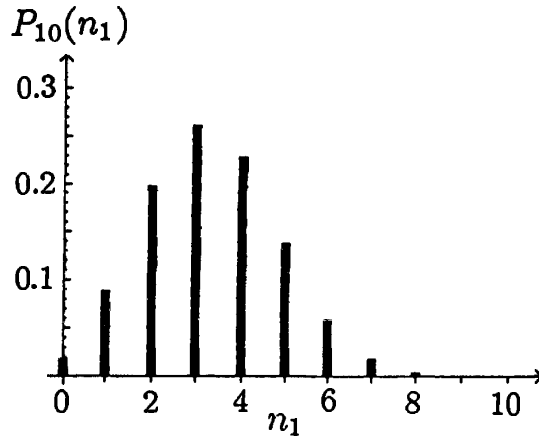
$$\langle y \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i) \frac{\partial}{\partial k} f_{Y_N}(k) = pN = \langle n_1 \rangle \quad (4.45)$$

Bigarren momentuaren adierazpena hau da:

$$\langle y^2 \rangle = \langle n_1^2 \rangle = \sum_{n_1=0}^N n_1^2 P_N(n_1) = (Np)^2 + Npq \quad (4.46)$$

Bariantza $\langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 = Npq$ da, eta desbidazio estandarra honako hau:

$$\sigma_N = \sqrt{Npq} \quad (4.47)$$



Irudia 4.2:

Berebat, frakzio-desbidazioa honako hau da:

$$\frac{\sigma_N}{\langle n_1 \rangle} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.48)$$

Frakzio-desbidazioa da +1 balioko p itxarotako balioetik $\frac{n_1}{N}$ frakzioak agertzen duen desbidazioaren neurria da, N saiakuntzako segida bakarrean. $\frac{\sigma_N}{\langle n_1 \rangle}$ -ren balio txikiak

esan nahi du p -tik gertu egongo dela $\frac{n_1}{N}$. $N \rightarrow \infty$ limitean, $\frac{\sigma_N}{\langle n_1 \rangle} \rightarrow 0$ dugu, eta $\frac{n_1}{N} \rightarrow p$ betetzen da. $N = 10$ eta $p = \frac{1}{3}$ betetzen duen banaketa binomiala 4.2 irudian adierazi da.

4.4.2 Banaketa gaussiarra (normala)

Egin dezagun aldagai estokastikoen honako aldagai-aldaketa hau: $Z_N = \frac{(y - \langle y \rangle)}{\sigma_Y} = \left(\frac{Y_N - pN}{\sqrt{pqN}} \right)$. Z_N aldagai estokastiko bat, zeinaren $\langle y \rangle$ balioa nulua den, $\langle y \rangle = pN$ betetzen denean. Z_N aldagai estokastikoaren probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$P_{Z_N}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta \left(z - \frac{(y - pN)}{\sqrt{pqN}} \right) P_{Y_N}(y) \quad (4.49)$$

Eta funtzio karakteristikoa beste hau:

$$\begin{aligned} f_{Z_N}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikz} P_{Z_N}(z) = e^{-ik\sqrt{\frac{pN}{q}}} f_{Y_N} \left(\frac{k}{\sqrt{pqN}} \right) \\ &= (qe^{-ik\sqrt{\frac{pN}{q}}} + pe^{-ik\sqrt{\frac{qN}{p}}})^N \end{aligned} \quad (4.50)$$

Adierazpen horretan, $f_{Y_N}(k)$ (4.41) ekuazioan definitu dugu, eta $q = 1 - p$ betetzen dela kontuan hartu dugu. Orain, $N \rightarrow \infty$ limitea kalkulatu dugu. Lehenik, parentesia dagoen kantitatea k -ren berreturretan garatu dugu, honako hau lortzeko:

$$f_{Z_N}(k) = \left(1 - \frac{k^2}{2N}(1 + R_N) \right)^N \quad (4.51)$$

Horretan, R_N adierazpena honako hau da:

$$R_N = 2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{ik}{\sqrt{N}} \right)^{m-2} \frac{pq^m + q(-p)^m}{\sqrt{(pq)^m}} \quad (4.52)$$

$N \rightarrow \infty$ egiten denean, $R_N \rightarrow 0$ betetzen da, eta, ondorioz, honakoa lortzen da:

$$f_Z(k) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} f_{Z_N}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k^2}{2N}(1 + R_N) \right)^N = e^{-\frac{(k)^2}{2}} \quad (4.53)$$

Adierazpen horretan honako definizio hau erabili dugu:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z \quad (4.54)$$

Beraz, $N \rightarrow \infty$ limitean, hauxe lortzen dugu:

$$P_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikz} e^{-\frac{k^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4.55)$$

Oso erraza da $\langle z \rangle = 0$ eta $\sigma_Z = 1$ betetzen direla frogatzea.

$N \gg 1$ denean, baina N finitua izanik, oraindik ere $P_{Z_N}(z) \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}}$ idatz dezakegu. Aldagai estokastikoetara itzuliz, $y = \sigma_Y z + \langle y \rangle$ dugu. Beraz, honako hau idatz dezakegu:

$$P_{Y_N}(y) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(y - \sigma_Y z - \langle y \rangle) P_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2\sigma_Y^2}\right) \quad (4.56)$$

(4.56) ekuazioa da +1 balioko emaitzen kopuruaren probabilitate-dentsitate gaussiarra, saiakuntza asko burutu ondoren. Berebat, probabilitate-dentsitate gaussiarraren eiterik orokorra da. Apimarratzekoa da probabilitate-dentsitate gaussiarra lehen eta bigarren momentuek, $\langle y \rangle$ eta $\langle y^2 \rangle$ ($\sigma_Y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}$ baita), hurrenez hurren, erabat finkatzen dutela. 4.4 ariketan $\langle y \rangle = 0$ eta $\sigma_Y = 2$ betetzen duen probabilitate-dentsitate gaussiarra adierazi dugu.

4.4.3 Poisson-en banaketa

Poisson-en banaketa banaketa binomialetik lor daiteke, $N \rightarrow \infty$ eta $p \rightarrow 0$ limiteak eginez, $Np = a \ll N$ betetzen dela onarturik (a konstante finitua da). Berreskura dezagun (4.41) ekuazioa eta egin dezagun $p = \left(\frac{a}{N}\right)$. Orduan, honako hau izango dugu:

$$f_{Y_N}(k) = \left(1 - \frac{a}{N} + \frac{a}{N} e^{ik}\right)^N \quad (4.57)$$

$N \rightarrow \infty$ limitea egiten badugu, honakoa lortzen dugu:

$$\begin{aligned} f_Y(k) &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} f_{Y_N}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{N}(e^{ik} - 1)\right)^N = \exp(a(e^{ik} - 1)) \\ &= e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{imk} \end{aligned} \quad (4.58)$$

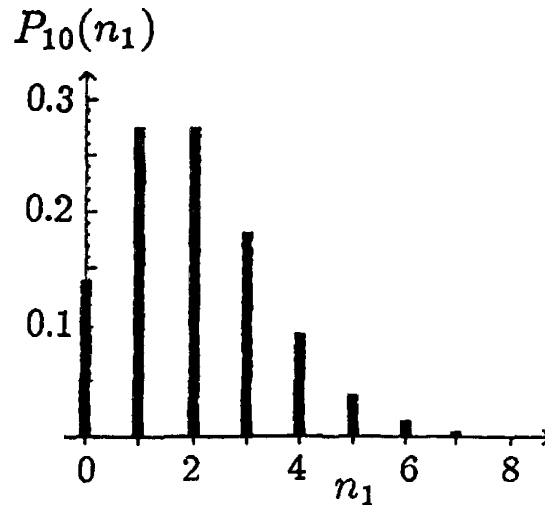
Beraz, probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$P_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iky} f_Y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{n_1}}{n_1!} e^{-a} \delta(y - n_1) \quad (4.59)$$

Honako koefiziente honi:

$$P(n_1) = \frac{a^{n_1}}{n_1!} e^{-a} \quad (4.60)$$

normalean, *Poisson-en banaketa* deritzo. Poisson-en banaketa da +1 balioko n_1 emaitza lortzeko probabilitatea, saikuntza asko egin ondoren, eta, jakinik, +1 balioren saikuntza bakarreko probabilitatea oso txikia ($p \ll 1$) dela. Lehen momentua $\langle n_1 \rangle = a$ da. Poisson-en banaketak lehen momentuarekiko mendekotasuna baino ez dauka: eta, beraz, Poisson-en prozesu baten probabilitate-dentsitatea lortzeko lehen momentuaren beharra baino ez dugu. 4.3 irudian, $a = 2$ lehen momentuko Poisson-en banaketa irudikatu dugu.



Irudia 4.3:

4.4.4 Zorizko ibilbide binomiala

Zorizko ibilbidearen problema banaketa binomialaren fisikako problema batean aplikazio gisa ikus daiteke. Azter dezagun x ardatzean higitzera behartuta dagoen partikula bat. Partikula horren Δ luzerako urrats bat eskuinetara emateko probabilitatea $p = \frac{1}{2}$ da, eta, berebat, Δ luzerako urratsa ezkerretara emateko probabilitatea, $q = \frac{1}{2}$. Onar dezagun partikulak N urrats betetzen dituela eta urrats bakoitzeko emaitzak ez duela aurreko urratsarekiko mendekotasunik (urratsak estatistikoki independenteak dira).

i -garren urratsean, X_i aldagai estokastikoak dituen balioak honako bi hauek dira: $x = +\Delta$ eta $x = -\Delta$, eskuinetara eta ezkerretara, hurrenez hurren. i -garren urratsaren probabilitate-dentsitatea $P_{X_i} = \frac{1}{2} (\delta(x + \Delta) + \delta(x - \Delta))$ da. i -garren urratsaren funtzio karakteristikoa $f_{X_i} = \cos(k\Delta)$ da.

Partikularen N urrats bete ondorengo Y_N desplazemendu garbia $Y_N = X_1 + \dots + X_N$ da. Y_N aldagai estokastikoaren funtzio karakteristikoa honako hau da:

$$f_{Y_N}(k) = (\cos(k\Delta))^N = \left(1 - \frac{k^2\Delta^2}{2!} + \dots\right) \approx 1 - \frac{Nk^2\Delta^2}{2!} + \dots \quad (4.61)$$

[Ikus (4.40) eta (4.41) ekuazioak]. Lehen eta bigarren momentuak $\langle y \rangle = 0$ eta $\langle y^2 \rangle = N\Delta^2$ dira, hurrenez hurren, eta desbidazio estandarra, $\sigma_{Y_N} = \Delta\sqrt{N}$. 4.4 irudian adierazi ditugu zorizko ibilbide horri dagozkion hiru ibilbide posible, $N = 2.000$ eta $\Delta = 1$ balioetarako.

Funtzio karakteristikoari dagokion ekuazio diferentzial bat lor dezakegu, urrats bakoitzean betetzen den Δ luzera eta urratsen arteko τ denbora-tartea infinituki txikiak egiten diren limitean. Idatz dezagun funtzio karakteristikoak: $f_{Y_N}(k) \equiv f_Y(k, N\tau)$; horretan, $t = N\tau$ da N -garren urratsa betetzen den aldiunea. Berebat, kontura zaitez ezen, hasieran ($N = 0$), ibiltaria $y = 0$ puntuan dagoela. Beraz, $P_{Y_0}(y) = \delta(y)$ eta $f_Y(k, 0) = 1$ dugu. (4.61) ekuaziotik honako hau idatz dezakegu:

$$\begin{aligned} f_Y(k, (N+1)\tau) - f_Y(k, N\tau) &= (\cos(k\Delta) - 1) f_Y(k, N\tau) \\ &= \left(1 - \frac{k^2\Delta^2}{2} + \dots\right) f_Y(k, N\tau) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Adierazpen horretan, $\cos(k\Delta)$ funtzioa $k\Delta$ -ren berreturetan garatu dugu. Orain, har ditzagun $N \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ eta $\Delta \rightarrow 0$ limiteak, $D = \left(\frac{\Delta^2}{2\tau}\right)$ finitua izanik eta $n\tau = t$. Honako hau lortzen dugu:

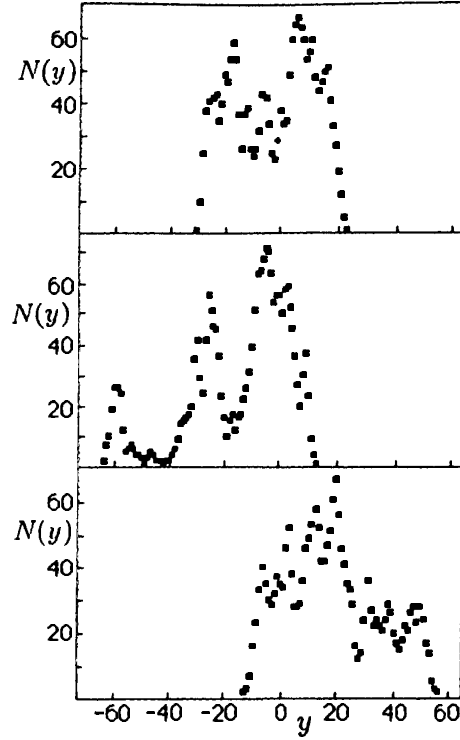
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} = \frac{f_Y(k, (N+1)\tau) - f_Y(k, N\tau)}{\tau} = \frac{\partial f_Y(k, t)}{\partial t} \quad (4.63)$$

eta haxe ere bai:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} = \left(-\frac{k^2\Delta^2}{2\tau} + \dots\right) f_Y(k, N\tau) = -Dk^2 f_Y(k, t) \quad (4.64)$$

Aurreko bi ekuazio horiek konbinatuz, honako hau lortzen da:

$$\frac{\partial f_Y(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 f_Y(k, t) \quad (4.65)$$



Irudia 4.4:

$f_Y(k, 0) = 1$ denean, (4.65) ekuazioaren ebazpena honako hau da:

$$f_Y(k, t) = e^{-Dk^2 t} \quad (4.66)$$

Probabilitate-banaketa hau da:

$$P(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-iky} e^{-Dk^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right) \quad (4.67)$$

Zorizko ibiltariaren probabilitate-banaketa $\sigma = \sqrt{2Dt}$ desbidazio estandarreko gaussiar bat da. Probabilitate-dentsitatea denboran hedatuz doa.

(4.67) ekuazioa modu arras desberdin batean ondoriozta dezakegu. Aldagai estokastikoen $Z_N = \left(\frac{Y_N}{\Delta\sqrt{N}}\right)$ aldagai-aldaketa egiten badugu, orduan, Z_N aldagai estokastikoaren $f_{Z_N}(k)$ funtzio karakteristikoa honako hau da:

$$f_{Z_N}(k) = \left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right)^N \quad (4.68)$$

[(4.50) ekuazioa]. 4.E.2 atalean egindakoari segituz, $N \rightarrow \infty$ limitea kalkula dezakegu, honako hau lortuz:

$$f_Z(k) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} f_{Z_N}(k) = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \quad (4.69)$$

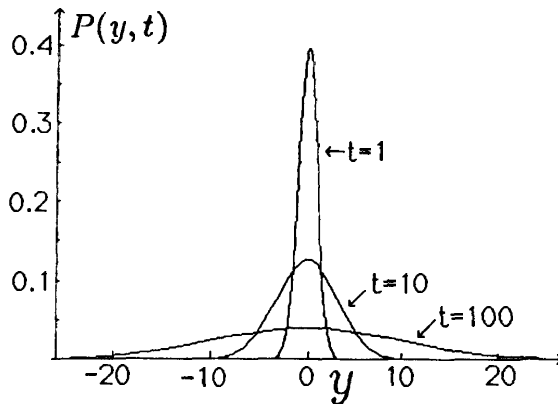
Beraz, $P_Z(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right)$ izango dugu. N oso handia denean, $P_{Z_N}(z) \approx P_Z(z)$ idatz dezakegu. Y_N desplazamendu garbiaren probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$P_{Y_N}(y) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(y - \Delta\sqrt{N}z) P_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2 N}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\Delta^2 N}\right) \quad (4.70)$$

Partikulak n urrats betetzen baditu denbora-unitatean, orduan, $N = nt$ da eta partikula x ardetzeko $y \rightarrow y + dy$ tartean t aldiunean antzemateko probabilitate-dentsitatea hau da:

$$P(y, t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(y - \Delta\sqrt{N}z) P_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right) \quad (4.71)$$

Adierazpen horretan, $D = \frac{1}{2}n\Delta^2$ da zorizko ibilbidearen difusio-koefizientea. Probabilitate-dentsitatea, denboraren funtzioan, 4.5 irudian adierazten da. Hasieran, $P(y, t)$ funtzioaren eitea $\delta(y)$ delta funtzioarena da. Denborak aurrera egin ahala, hedatuz doa hura; hedatze horretan, kurbatik beherako gainazalaren azalera ez da aldatzen, baina x ardatzeko zenbait distantziatar partikulak antzemateko probabilitatea handituz doa, denboran, $\sigma = \sqrt{\Delta^2 N} = \sqrt{2Dt}$ desbidazio estandarra denboraren errokuadroarekin batera handituz baitoa.



Irudia 4.5:

4.5 Limite zentralaren teorema bat eta Zenbaki handien legea

Froga daiteke ezen kopuru handiko gertakarien emaitza posibleen banaketa deskribatzen duen probabilitate-dentsitateak gaussiar batera unibertsalki jotzen duela (gertakari bakanen banaketen momentuak finituak direla ziurtaturik badago). Horri limite zentralaren teorema deritzo. Limite zentralaren teorema $S4.C$ atalean frogatzen da era orokorrean. Ondoren, teoremaren bertsio ahulago bat ematen dugu; hori esperimenduetan aplikagarria da. Emaiza horrek garbiro erakusten du banaketa gaussiarren hedadura zabala Izadian. Garrantzi handiko beste emaitza bat zenbaki handien legea da. Zenbaki handien legeak kuantitatiboki justifikatzen du probabilitatearen erabilera.

4.5.1 Limite zentralaren teorema bat

Limite zentralaren teorema era erraztu batean enuntzia daiteke, era horrek neurketen estatistikarekin zerikusi zuzena dauka. Azter dezagun estatistikoki independenteak diren N esperimenduen X aldagai estokastikoaren batez bestekotiko desbidazioa den Y_N aldagai estokastikoa. Honako era honetan idatz daiteke Y_N aldagaia:

$$Y_N = \frac{1}{N}(X_1 + \cdots + X_N) - \langle x \rangle = Z_1 + \cdots + Z_N \quad (4.72)$$

Adierazpen horretan, honako hau egin dugu:

$$Z_i = \frac{1}{N}(X_i - \langle x \rangle)$$

$Z_i = \frac{1}{N}(X_i - \langle x \rangle)$ aldagai estokastikoaren $f_Z(k; N)$ funtzio karakteristikoa honako hau da:

$$f_Z(k; N) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(\frac{k}{N})(x - \langle x \rangle)} P_X(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N^2} \sigma_X^2 + \cdots \quad (4.73)$$

Adierazpen horretan, $\sigma_X^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ egin dugu. N handirako eta bariantza finiturako, adierazpen horren eskuin-aldeko garapeneko ordena handiko gaiak bazter daitezke. (Kontura zaitez ezen integrandoaren izaera oszilatarioak ziurtatzen duela integralak zerora joko duela, k handietan.) Y_N aldagaiaren funtzio karakteristikoa hauxe da:

$$f_{Y_N}(k) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N^2} \sigma_X^2 + \cdots\right)^N \rightarrow \exp\left(-\frac{k^2 \sigma_X^2}{2N}\right) \quad (4.74)$$

(4.74) ekuazioan, $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ identitatea erabili dugu. beraz, $N \rightarrow \infty$ limitean, honako hau idatz dezakegu:

$$P_{Y_N}(y) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{iky} \exp\left(-\frac{k^2 \sigma_X^2}{2N}\right) = \sqrt{\frac{N}{2\pi \sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{Ny^2}{2\sigma_X^2}\right) \quad (4.75)$$

$P_X(x)$ eitea edozein izanik ere, momentu finituak baditu, estatistikoki independenteak diren X -ren neurketaren kopuru handiko esperimentuen batez bestekoa $\langle x \rangle$ puntuan zentratutako gaussiarra izango da eta horren desbidazio estandarra da X aldagaiaren probabilitate-dentsitatearen desbidazio estandarra bider $\frac{1}{\sqrt{N}}$ faktorea.

4.5.2 Zenbaki handien legea

Zenbaki handien legea 4.C atalean aurkeztu dugun probabilitatearen kontzeptu intuitiboan datza. Zenbaki handien legearen eduki gehiena Limite Zentralaren teoremaren neurketetarako aplikazioak barneratzen du. Hemen, horren adibide erraza aurkeztuko dugu.

Zenbaki handien legea N esperimentu independenteei aplikatu behar zaie eta honela enuntzia daiteke: *A gertakaria gertatzeko probabilitatea p bada, orduan, esperimentuetako A emaitzen frakzioak p -ra jotzen du, $N \rightarrow \infty$ limitean.* Frogapenak bi zati ditu. Lehenengoan, Tchebycheff-en desberdintza ondorioztzen da. Bigarreanean, desberdintza hori erabiltzen da zenbaki handien legea ondorioztatzeko.

Tchebycheff-en desberdintzak erlazio bat finkatzen du bariantza eta aldagai estokastiko batek bere batez besteko baliotiko ϵ (ϵ positibo da) neurri arbitrarioko ager dezaken desbidazioa izateko probabilitatearen artean. Z aldagai estokastiko baten σ_Z bariantza honako hau da:

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz (z - \langle z \rangle)^2 P_Z(z) \quad (4.76)$$

$|z - \langle z \rangle| \leq \epsilon$ betetzen duen z aldagaiaren tartea ezabatzen badugu, honako hau idatz dezakegu:

$$\sigma_Z^2 \geq \int_{-\infty}^{\langle z \rangle - \epsilon} dz (z - \langle z \rangle)^2 P_Z(z) + \int_{\langle z \rangle + \epsilon}^{+\infty} dz (z - \langle z \rangle)^2 P_Z(z) \quad (4.77)$$

integralean $|z - \langle z \rangle| \geq \epsilon^2$ betetzen denez, $(z - \langle z \rangle)^2$ -ren ordeztu ϵ^2 idatz dezakegu, (4.77) ekuazioan, eta, beraz, honako hau:

$$\sigma_Z^2 \geq \epsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\langle z \rangle - \epsilon} dz P_Z(z) + \int_{\langle z \rangle + \epsilon}^{+\infty} dz P_Z(z) \right) = \epsilon^2 P(|z - \langle z \rangle| \geq \epsilon) \quad (4.78)$$

Adierazpen horretako $P(|z - \langle z \rangle| \geq \epsilon)$ da Z aldagai estokastikoa $\langle z \rangle$ baliotik $\pm \epsilon$ baino gehiagoko desbidazioa izateko probabilitatea. (4.78) ekuazioa erabiliz Tchebycheff-en desberdintza ondorioztatzen dugu, honako hau:

$$P(|z - \langle z \rangle| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_Z^2}{\epsilon^2} \quad (4.79)$$

Beraz, bariantza finkoko kasuan (σ_Z^2), Z -ren eta bere batez bestekoaren desbidazioa $\pm \epsilon$ balioa baino handiagoa izateko probabilitatea ϵ^{-2} moduan txikituz doa, ϵ handituz doan heinean.

Etor gaitezen zenbaki handien legera. Azter ditzagun Z aldagai estokastikoaren estatistikoki independenteak diren N esperimentu. Y_N da esperimentu horien emaitzen batez bestekoa: $Y_N = (\frac{1}{N})(Z_1 + \dots + Z_N)$, Z_i da i -garren esperimentuaren emaitza. Zenbaki handien legearen arabera Y_N $\langle z \rangle$ -tik desbideratzeko probabilitateak zerora jotzen du $N \rightarrow \infty$ limitean. Beraz, honako hau dugu: $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|z - \langle z \rangle| \geq \epsilon) = 0$. Hori frogatzeko, lehenik, kontura gaitezen $\langle y_N \rangle = \langle z \rangle$ betetzen dela. Gertakariak independenteak direnez, σ_{Y_N} bariantzaren portaera $\sigma_{Y_N}^2 = \frac{\sigma_Z^2}{N}$ -ren modukoa da. Orain, Tchebycheff-en desberdintza erabiliko dugu honako hau idazteko:

$$P(|y_N - \langle z \rangle| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_{Y_N}^2}{\epsilon^2} = \frac{\sigma_Z^2}{N\epsilon^2} \quad (4.80)$$

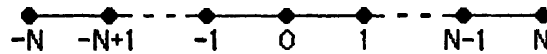
Beraz, hauxe da lortzen dena:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|y_N - \langle z \rangle| \geq \epsilon) = 0 \quad (4.81)$$

onartuz σ_Z finitua dela.

4.6 Sareko zorizko ibilbidea

Sareko zorizko ibilbideak espazio-dimentsioek prozesu fisikoetan duten eraginaren adibide gisa ikus daitezke. Horrelako zorizko ibilbidea hain erraza da aurreko ataletako kontzeptu horiek guztiak erabil ditzakegula ibiltariaren sareko edozein puntutara heltzeko probabilitatea kalkulatzeko. Atal hau Montroll-ek sareko zorizko ibilbideei buruz egindako azterketan oinarriturik dago. Zorizko ibilbideek dimetsiobakarrean dituzten propietateak eta hiru dimentsiotan dituztenak erabat diferenteak direla ikusiko dugu.



Irudia 4.6:

4.6.1 Dimentsiobakarreko sarea

Azter dezagun dimentsio bakarreko $2N + 1$ sare-puntuz osatutako sare periodikoko zorizko ibiltaria (ikus 4.6 irudia). Onar dezagun $P_s(l)$ dela ibiltaria l sare-puntu, s aldiune diskretuan, antzemateko probabilitatea. Sarea periodikoa denez, $P_s(l) = P_s(l \pm [2N + 1])$ betetzen da. Ibiltaria N sare-puntutik eskuinera egiten badu, berriro $-N$ sarer-puntutik sartzen da sarera. Honako hau onartuko dugu: ibiltariak, urrats bakoitzean, eskuinera egiteko probabilitatea $p = \frac{1}{2}$ dela, eta ezkerrera egitekoa, $q = \frac{1}{2}$. i -garren urratseko probabilitate-dentsitatea honako hau da:

$$p(l_i) = \frac{1}{2}(\delta_{l_i, +1} + \delta_{l_i, -1}) \quad (4.82)$$

Onartuko dugu urrats bakoitza aurreko urratsekiko independentea dela, eta ibiltaria $l = 0$ sare-puntu hasten dela, $s = 0$ aldiunean. Ibiltariaren posizioa s aldiunean (s urrats bete ondoren, beraz) $l = l_1 + l_2 + \dots + l_s$ da. (4.40) ekuazioa erabiliz, $P_s(l)$ probabilitateari dagokion adierazpena honako hau da:

$$P_s(l) = \sum_{l_1=-N}^N \dots \sum_{l_s=-N}^N \delta_{l, l_1+l_2+\dots+l_s} p(l_1) \times \dots \times p(l_s) \quad (4.83)$$

$P_s(l)$ funtzioa l -ren funtzio periodikoa denez, Fourier-en seriean gara dezakegu, honako era honetan:

$$P_s(l) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f_s(n) \exp\left(-\frac{2\pi i n l}{2N+1}\right) \quad (4.84)$$

Adierazpen horretan, $f_s(n)$ Fourier-en anplitudea da eta, berebat, prozesu estokastiko honen funtzio karakteristikoa ere bai. Ekuazio hori alderantz dezakegu eta Fourier-en anplitudea $P_s(l)$ -ren funtzioan idatz dezakegu, hots:

$$f_s(n) = \sum_{l=-N}^N P_s(l) \exp\left(+\frac{2\pi i n l}{2N+1}\right) \quad (4.85)$$

Adierazpen horretan honako identitate hau erabili dugu:

$$\sum_{l=-N}^N \exp\left(\pm \frac{2\pi i n l}{2N+1}\right) = (2N+1) \delta_{n,0}$$

$p(l)$ trantsizio-probabilitatearen Fourier-en transformatua ere kalkula dezakegu [(4.82) ekuazioa], eta haxe lortu:

$$\lambda(n) \equiv \sum_{l=-N}^N p(l) \exp\left(+\frac{2\pi i n l}{2N+1}\right) = \cos\left(+\frac{2\pi n}{2N+1}\right) \quad (4.86)$$

Adierazpen horretan, $\lambda(n)$ da Fourier-en anplitudea. (4.83) eta (4.85) ekuazioak erabilia honako hau idatz dezakegu:

$$f_s(n) = (\lambda(n))^s \quad (4.87)$$

Horixe da prozesu estokastikoaren funtzio karakteristikoa.

Orain, egin dezagun $N \rightarrow \infty$ limitea. Lehenik, erabil dezagun $\phi = \left(\frac{2\pi n}{2N+1}\right)$ aldagaia. Orduan, N handietarako, hauxe dugu:

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{l=-N}^N n = \frac{1}{2N+1} \int_{l=-N}^N dn \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi$$

Eta $P_s(l)$ probabilitatea, $N \rightarrow \infty$ limitean, honako hau da:

$$P_s(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_s(\phi) e^{-il\phi} \quad (4.88)$$

Adierazpen horretan, hauxe onartu dugu:

$$f_s(\phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} P_s(l) e^{il\phi} \quad (4.89)$$

Urrats bakarreko probabilitatea honako hau da:

$$p(l_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \lambda_s(\phi) e^{-il_i\phi} \quad (4.90)$$

(4.87) ekuaziotik hauxe lortzen dugu:

$$f_s(\phi) = (\lambda(\phi))^s \quad (4.91)$$

(Kontura zaitetz ibiltaria $l = 0$ sare-puntutik, $s = 0$ aldiunean, hasten bada, orduan, $f_0(\phi) = 1$ dela.)

Orain, dimentsio bakarreko sareko zorizko ibiltariari dagokion $P_s(l)$ probabilitatea kalkulatzeara erraza da. Ibiltaria $l = 0$ sare-puntutik abiatzen bada, honako hau dugu:

$$\begin{aligned}
P_s(l) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi (\cos(\phi))^s e^{-il\phi} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{s!}{\left(\frac{s-l}{2}\right)! \left(\frac{s+l}{2}\right)!} & (s-l) \text{ bikoitia eta } s \geq l \\ 0 & \text{beste edozein kasutan} \end{cases} \quad (4.92)
\end{aligned}$$

Ibiltariari buruzko beste galdera bat egitea erabilgarria da. Zer probabilitate dago ibiltariak jatorritik *ihes egin* dezan? Hori era errazean formulatzeko, $P_s(l)$ -ren $U(z, l)$ funtzio ekoiztailea definitzen dugu:

$$U(z, l) = \sum_{s=0}^{\infty} z^s P_s(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_0(\phi) \frac{e^{-il\phi}}{1 - z\lambda(\phi)} \quad (4.93)$$

Eskuineko atala lortzeko, (4.88) eta (4.91) ekuazioak erabili ditugu, eta s -an batu. Orduan, $P_s(l)$ probabilitatea, $U(z, l)$ funtziotik, honako era honetan lortzen da:

$$P_s(l) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial z^s} U(z, l) \quad (4.94)$$

Onar dezagun $Q_s(l)$ dela ibiltaria s urrats bete ondoren l sare-puntura *lehenengo* aldiz heltzen den probabilitatea. $Q_s(l)$ funtzioari dagokion $V(z, l)$ funtzio ekoiztailea honako era honetan defini dezakegu:

$$V(z, l) = \sum_{s=1}^{\infty} z^s Q_s(l) \quad (4.95)$$

Beraz, ibiltaria, zorizko ibilbidean zehar, l sare-puntura heltzeko probabilitate osoa $V(1, l)$ da.

Orain, $V(z, l)$ eta $U(z, l)$ funtzio ekoiztaileak lot ditzakegu. Ibiltaria lehenengo aldiz l sare-puntura hel daiteke s urrats bete ondoren; edo, berebat, urrats bakarra bete ostean eta, ondoren, berriro, $s - 1$ urrats edozein modutan egin ondoren, eta abar. Beraz, ibiltaria $l = 0$ sare-puntutik abiatzen bada, hauxe betetzen da:

$$P_0(l) = \delta_{l,0} \quad (4.96)$$

eta honako hau idatz dezakegu, $s > 0$ denean:

$$P_s(l) = \sum_{j=1}^s Q_j(l) P_{s-j}(0) \quad (4.97)$$

(4.93), (4.96) eta (4.97) ekuazioak konbinatzen baditugu, haxe lortzen da:

$$U(z, l) = \delta_{l,0} + \sum_{s=1}^{\infty} z^s P_s(l) = \delta_{l,0} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s Q_j(l) P_{s-j}(0) z^s \quad (4.98)$$

(4.98) ekuazioan batuketaren ordena alda dezakegu: $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s$ egin beharrean, $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j}^{\infty}$ eginez; horrela, $U(z, l) = \delta_{l,0} + V(z, l)U(z, 0)$ aurkitzen dugu, eta honako hau ere bai:

$$V(z, l) = \frac{U(z, l) - \delta_{l,0}}{U(z, 0)} \quad (4.99)$$

Jatorrira bueltatzeko probabilitate osoaren adierazpena honako hau da:

$$V(1, 0) = 1 - \frac{1}{U(1, 0)} \quad (4.100)$$

Eta ibiltariak jatorritik *ihes* egiteko probabilitatea haxe:

$$P_{\text{ihes}} = \frac{1}{U(1, 0)} \quad (4.101)$$

Dimentsiobakarreko ibitariaren kasuan $U(1, 0) = \infty$ eta $P_{\text{ihes}} = 0$ betetzen dira (ikus 4.12 ariketa). Ondorioz, dimentsiobakarreko sareko zorizko ibilbideean, ibiltaria jatorrira bueltatuko da 1 probabilitatearekin, jatorritik abiatzen bada. Ibiltariak ezin du ihes egin.

Oso interesantea da orain arteko azterketa bi edo hiru dimentsioko zorizko ibilbideetara orokortzea, ondoren egingo dugun moduan.

4.6.2 Zorizko ibilbidea dimentsio handiagoetan

Aurreko emaitzak d dimentsioko sareetara orokortzeko asmotan, espazioko norabide ortogonaletan, $\hat{\mathbf{x}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, d$) unitate-bektoreak definitzen ditugu. Sare-puntuen arteko distantzia 1 unitate bada, horien posizioak bektore bat erabiliz adieraz ditzakegu: $\mathbf{l} = l_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \dots + l_d \hat{\mathbf{x}}_d$, l_i zenbaki osoak dira. Ibiltaria \mathbf{l} sare-puntuan, s aldiunean antzemateko probabilitatea $P_s(\mathbf{l}) = P_s(l_1, \dots, l_d)$ da. Onar dezagun sareak $2N + 1$ sare-puntu dituela norabide bakoitzean; hots, $-N \leq l_i \leq N$ ($i = 1, 2, \dots, d$) betetzen da. Berebat, onartuko dugu sarea periodikoa dela norabide guztietan. Beraz, honako hau izango dugu:

$$\begin{aligned}
P_s(l_1, l_2, \dots, l_d) &= P_s(l_1 \pm [2N+1], l_2, \dots, l_d) \\
&= P_s(l_1, l_2 \pm [2N+1], \dots, l_d) = \dots \\
&= P_s(l_1, l_2, \dots, l_d \pm [2N+1])
\end{aligned} \tag{4.102}$$

$P_s(\mathbf{l})$ probabilitatearen Fourier-en serie-garapena egin daiteke, hauke da:

$$P_s(\mathbf{l}) = \left(\frac{1}{2N+1} \right)^d \sum_{n=-N}^N \dots \sum_{n=-N}^N f_s(\mathbf{n}) \exp \left(-\frac{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{2N+1} \right) \tag{4.103}$$

Adierazpen horretan, $\mathbf{n} = n_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \dots + n_d \hat{\mathbf{x}}_d$ dugu, eta $f_s(\mathbf{n}) = f_s(n_1, \dots, n_d)$ Fourier-en anplitudea honako hau da:

$$f_s(\mathbf{n}) = \sum_{l_1=-N}^N \dots \sum_{l_d=-N}^N P_s(\mathbf{l}) \exp \left(+\frac{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{2N+1} \right) \tag{4.104}$$

Egin dezagun, orain, $N \rightarrow \infty$ limitea. Horretarako, $\phi_i = \frac{2\pi n_i}{(2N+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, d$) aldagaia definitzen dugu. Orduan, honako hau aurkitzen dugu:

$$P_s(\mathbf{l}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^d \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_1 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_d f_s(\phi) e^{-i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\phi}} \tag{4.105}$$

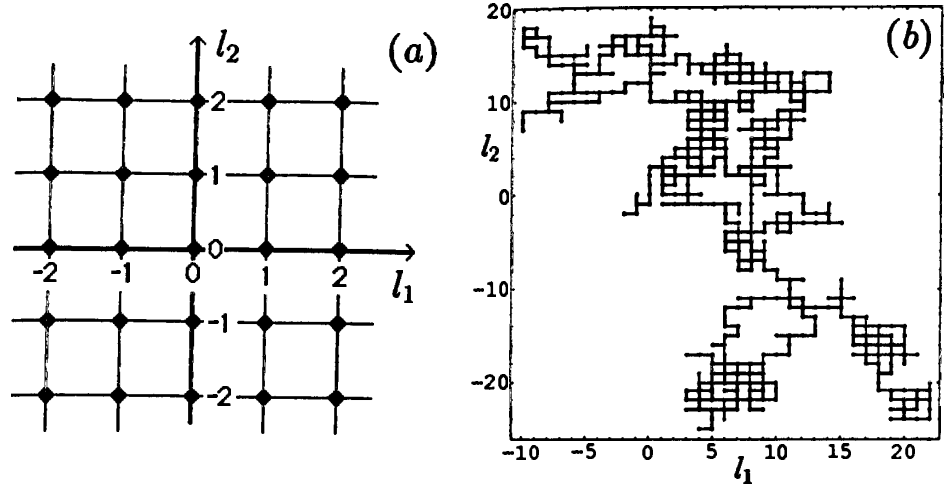
Eta beste hau ere bai:

$$f_s(\phi) = \sum_{l_1=-N}^{\infty} \dots \sum_{l_d=-N}^{\infty} P_s(l) e^{+i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\phi}} \tag{4.106}$$

Interesantea da bi eta hiru dimentsioko sare koadroetako zorizko ibilbidea aztertzea; horietan, ibiltaria gertueneko auzokideetarako pauso bakarrean joaten da, urrats bakoitzean. Lehenik, azter dezagun $d = 2$ kasua. Horrelako sare bat 4.7 irudian adierazten da. Sare-puntuen arteko distantzia $a = 1$ bada eta ibiltariak urratsa emateko probabilitatea berbera bada bi norabideetan, orduan, urrats bakarreko probabilitatea honako era honetan idatz daiteke:

$$p(\mathbf{l}) = \frac{1}{4} \sum_{\epsilon \pm 1} (\delta_{l_1, \epsilon} \delta_{l_2, 0} + \delta_{l_1, 0} \delta_{l_2, \epsilon}) \tag{4.107}$$

Adierazpen horretan, $\mathbf{l} = l_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + l_2 \hat{\mathbf{x}}_2$ egin dugu. urrats bakarreko probabilitatearen funtzio karakteristikoa hauke da:



Irudia 4.7:

$$\lambda(\phi) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} p(l) e^{+i\mathbf{l} \cdot \phi} = \frac{1}{2} (\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2)) \quad (4.108)$$

Adierazpen horretan, honako hau egin dugu:

$$\phi = \phi_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \phi_2 \hat{\mathbf{x}}_1$$

Ibiltaria $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ puntutik abiatzen bada, orduan, $f_0(\phi) = 1$ dugu eta $U(z, \mathbf{l})$ funtzio ekoiztailea honako hau da:

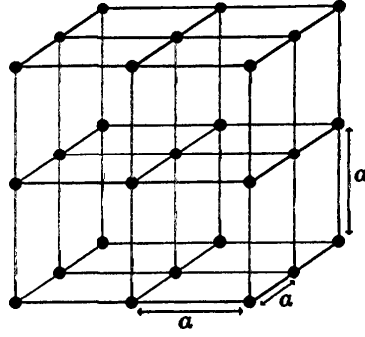
$$U(z, \mathbf{l}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_1 \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_2 \frac{e^{-i\mathbf{l} \cdot \phi}}{1 - \frac{z}{2} (\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2))} \quad (4.109)$$

Kalkula dezagun $U(z, \mathbf{0})$. $x_i = \cos(\phi_i)$ aldagai-aldaketa egiten dugu. Hauxe izango dugu, beraz:

$$U(1, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} (1 - \frac{z}{2}(x_1 + x_2))} \quad (4.110)$$

x_2 -rekiko integratzen dugu eta honako hau lortzen dugu:

$$U(1, \mathbf{0}) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{(1 - \frac{z}{2}x_1)^2 - (\frac{z}{2})^2}} \quad (4.111)$$



Irudia 4.8:

Ondoren, x_1 -ekiko integratzen dugu eta hauxe lortzen dugu:

$$U(1, \mathbf{0}) = \frac{2}{\pi} K(z) \quad (4.112)$$

Adierazpen horretan, $K(k)$ da lehen motako integral eliptiko osoa (k modulua da). $k \rightarrow 1$ doanean, $K(k) \rightarrow \infty$ dugu; eta $z \rightarrow 1$ doanean, beraz, $U(1, \mathbf{0}) \rightarrow \infty$ izango dugu. Ondorioz, bi dimentsioko sare koadro horretan, ibiltariaren ihes-probabilitatea nulua da; hots, $P_{\text{ihes}} = 0$, (4.100) eta (4.101) ekuazioak. $d = 2$ dimentsioko sare koadro batean, zorizko ibilbide baten posiblea den ibilbideetako bat, 4.7 irudian adierazten da. Ibiltaria $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ sare-puntutik abiatu da eta, irudian, 1.000 urrats adierazi dira.

Azter dezagun, orain, $a = 1$ sare-puntuen arteko distantziako sare kubiko bakkunean gertatzen den zorizko ibilbidea (4.8 irudia). Kasu honetan, urrats bakarreko probabilitatea honako dau da:

$$p(\mathbf{l}) = \frac{1}{6} \sum_{\epsilon=\pm 1} (\delta_{l_1,\epsilon} \delta_{l_2,0} \delta_{l_3,0} + \delta_{l_1,0} \delta_{l_2,\epsilon} \delta_{l_3,0} + \delta_{l_1,0} \delta_{l_2,0} \delta_{l_3,\epsilon}) \quad (4.113)$$

Eta funtzio karakteristikoa beste hau:

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{3} (\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) + \cos(\phi_3)) \quad (4.114)$$

Ibiltaria $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ sare-puntutik abiatzen bada, hauxe da $U(z, \mathbf{0})$ funtzio ekoiztailea:

$$U(z, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_1 \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_3 \frac{1}{1 - \frac{z}{3} (\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) + \cos(\phi_3))} \quad (4.115)$$

Kalkula dezagun $P_{\text{escape}} = \frac{1}{U(1, \mathbf{0})}$ ihes-probabilitatea. Honako hau idatz dezakegu:

$$U(1, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3}{1 - \frac{1}{3}(\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) + \cos(\phi_3))} \quad (4.116)$$

$x_i = \cos(\phi_i)$ aldagai-aldaketa eginda, honako hau da $U(1, \mathbf{0})$ -ren adierazpena:

$$U(1, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \sqrt{1-x_3^2} (1 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3))} \quad (4.117)$$

Lehenik, x_3 -rekiko integratzen dugu eta haxe lortzen dugu:

$$U(1, \mathbf{0}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2} \sqrt{(1 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2))^2 - \frac{1}{9}}} \quad (4.118)$$

Ondoren, x_2 -rekiko integratuz, honako hau lortzen da:

$$U(1, \mathbf{0}) = \frac{6}{\pi^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1}{(3-x_1)\sqrt{1-x_1^2}} K\left(\frac{2}{3-x_1}\right) \approx 1,516 \quad (4.119)$$

Adierazpen horretan, $K(k)$ da lehen motako integral eliptiko osoa (k modulua da). (4.1099 ekuazioa erabiliz zenbakizko eran kalkulatu dugu $U(1, \mathbf{0})$. Zorizko ibiltari baten ihes-probabilitatea, sare kubiko bakunean, $P_{\text{ihes}} = \frac{1}{U(1, \mathbf{0})} \approx 1,66$ da. Beraz, hiru dimentsioko sare kubiko bakun horreen kasuan, jatorritik abiatu den ibiltaria berriro jatorrik ez bueltatzeko probabilitate handia dago: ibiltariak ihes egin dezake.

Atal honetako emaitzak orokorrangoak diren zenbait emaitzaren kasu bereziak dira: Poyla-k frogatu zuen dimentsio bakarreko eta bi dimentsioko ibiltariak ezin dutela inoiz jatorritik ihes egin (haien urratsen tamaina-banaketa bariantza finitukoa bada, behintzat). Ibiltari horiek, azkenean, abiapuntura itzuliko dira. Haatik, hiru dimentsiotan, ibiltariak abiapuntutik betiko ihes egin egiteko probabilitate finitua dago. Ihes-probabilitate nuluko zorizko ibilbideei *iraunkor* deritze; aldiz, ihes-probabilitate finituko zorizko ibilbideei *iragaitzazko* deritze.