

# 0 Infos zu diesem Skript

Dieses Skript ist nicht garantiert vollständig. An den Stellen, an denen "goodnotes  $x$ " für  $x \in \mathbb{N}$  steht, fehlt ein Teil der Vorlesung. Dieser wird evtl. in Zukunft noch ergänzt. Bei Fragen oder ähnlichem Mail an [jminor@uni-muenster.de](mailto:jminor@uni-muenster.de).

# 1 Einleitung

16.10.25:

Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Unbekannte eine Funktion ist, statt einer Zahl. Dabei wird Gleichheit zwischen Ausdrücken, die die Funktion und ihre Ableitungen betreffen, beschrieben.

Relevanz von Differentialgleichungen in Biologie, Chemie, Computer/Datenwissenschaften, Ingenieurswesen, Medizin, Ökonomie,...

<diverse Beispiele>

Die meisten Differentialgleichungen sind nicht explizit lösbar. Wir können sie diskretisieren und numerische Lösungen simulieren.

Wofür brauchen wir Analysis?

Der Output einer numerischen Simulation ist eine Approximation. Diese muss bewertet werden. Bsp.: 1950er Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gerieten Hochgeschwindigkeitsflugzeuge in tödliches Trudeln. Ingenieure hatten das nicht erwartet. Grund: Nichtlinearitäten, die (noch) besser approximiert werden mussten, spielten bei sehr hoher Geschwindigkeit plötzlich eine größere Rolle bei "kleineren hohen" Geschwindigkeiten.

"Dirac" - Man versteht eine Gleichung ungefähr, wenn man die Eigenschaften ihrer Lösungen vorhersagen kann, ohne die Gleichung selbst zu lösen.

## 2 Einige konkrete Beispiele

### 2.1

$x'(t) = 3x(t)$ , Lösung  $x(t) = ce^{3t}$  - sind das alle Lösungen?

Differentialgleichungen vom Typ  $x'(t) = \mu x(t), \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$  tauchen auf bei der Modellierung von Bakterienwachstum in der Petrischale, <diverse Beispiele>.

### 2.2

$$\tan'(t) = \sec^2(t) = \tan^2(t) + 1, \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$x'(t) = x^2(t) + 1$$

Ist  $\tan(t)$  die einzige Lösung? // Multiplikation mit Konstanten, um mehr Lösungen zu erzeugen, funktioniert hier nicht.

Versuch: Ausnutzung der Periodizität

$$x(t) = \tan(t + a) \text{ im Intervall } (-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$$

Weiter ist  $(-\cot)' = -\cot'(t) = \csc^2(t) = (\frac{1}{\sin(t)})^2 = (-\cot(t))^2 + 1$  eine Lsg und  $\tan(t + \frac{\pi}{2}) = -\cot(t)$

### 2.3

$x'(t) = \mu \sqrt{x(t)}, \mu > 0$ . Hier  $x(t) \geq 0$ , damit die Wurzel gezogen werden kann.

Anwendung:  $x(t)$  beschreibt die Höhe einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Tank mit Radius R, welche durch ein kleines Loch im Boden ausläuft. ("Torricelli's Gesetz")

## 2.4 Wie können wir autonome Differentialgleichungen lösen?

$x'(t) = f(x(t))$  oder  $x' = f(x)$  (das ist eine autonome DGL)

Bsp.:  $x' = 3x$  bzw.  $\frac{dx}{dt} = 3x$ . Annahme  $x \neq 0$ , dann gilt:

$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 3$ . Schreiben symbolisch:  $\frac{dx}{x} = 3dt$ . Integriere und behandle dabei x und t als unabhängige Variablen.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int 3 dt \\ \Leftrightarrow \ln|x| + c_1 &= 3t + c_2 \\ \Rightarrow \ln|x| &= 3t + c, c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow |x(t)| &= e^{3t+c} = e^{3t}e^c = e^{3t}k, k > 0 \Rightarrow x(t) = ke^{3t}, k \neq 0 \end{aligned}$$

Da  $k \neq 0$ , haben wir nicht durch 0 geteilt. Aber  $x(t) = 0$  ist auch eine Lösung.

### 2.4.1 Theorem

Sei  $r \in \mathbb{R}$ . Die Lösung von  $x'(t) = r \cdot x(t)$  sind genau  $x(t) = x_0 e^{rt}$ , wobei  $x_0 = x(0)$  ist. Beweis:

Betrachte  $y(t) = \frac{x(t)}{e^{rt}} = x(t)e^{-rt}$ .

Dann gilt  $y'(t) = -re^{-rt}x(t) + e^{-rt}x'(t) = e^{-rt}(-rx(t) + rx(t)) = 0$

$\Rightarrow y(t) = \text{const.} \Rightarrow$  Behauptung

## 2.5 Beispiel

$$\begin{aligned} x'(t) = x(t)^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = 1 \text{ falls } x \neq 0 \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} &= \int dt \\ \Rightarrow -\frac{1}{x} + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} &= t + c \text{ mit } c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{1}{t + c} \text{ für } t \neq -c \end{aligned}$$

und  $x \equiv 0$  ist ebenfalls eine Lösung.

## 2.6 Beispiel

$x' = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \frac{dx}{dt} = 1$  Hier wird nie durch 0 dividiert.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \int dt \\ \Leftrightarrow \arctan(x) + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow \arctan(x) &= t + a \text{ für eine Konstante } a \\ \Rightarrow x &= \tan(t + a) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Intervall  $(-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$  definiert.

20.10.25:

Learning Center Termin: 14-16 Uhr im ComputerPool

## 2.7 Beispiel: "Blow-Up" in endlicher Zeit, (2.5) bei ihr

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{\rightarrow \inf}{\rightarrow -\inf} \text{ für } t \rightarrow 1^- \\ \stackrel{\rightarrow -\inf}{\rightarrow \inf} \text{ für } t \rightarrow 1^+ \end{array} \right.$$

Bemerkung: Was bedeutet ein "blow-up"?

- Für die spezifische Anwendung spielt der Zeitpunkt des "blow-ups" keine Rolle, ist also irrelevant
- Die Anwendung beruht auf Modellhypthesen, die Nahe dem blow-up Zeitpunkt "zusammenbrechen"/ungültig werden
- Das untersuchte Phänomen durchläuft eine "katastrophale" Dynamik, z.B. thermisches Durchgehen von Batterien

Der Differentialgleichung selbst sieht man dieses Verhalten nicht ohne weiteres an. Hier spielt also die Definition, was eine Lösung ist, eine Rolle und die Existenz von solchen Lösungen.

## 2.8 Beispiel, (2.6) bei ihr

Betrachte  $x''(t) + Ax'(t) = B$  für Konstanten  $A, B; A \neq 0$ . Da  $x$  selbst nicht vorkommt, betrachte  $y = x' \Rightarrow y'(t) + Ay(t) = B$ .

$$\int \frac{dy}{-Ay + B} = \int dt = t + c, \text{ für } y \neq \frac{B}{A}.$$

Setze  $u = -Ay + B, du = -Ady \Rightarrow \int \frac{dy}{-Ay + B} = \int \frac{-\frac{1}{A}du}{u} = -\frac{1}{A} \ln|u| = -\frac{1}{A} \ln|-Ay + B| \Rightarrow \ln|-Ay + B| = -At - Ac \Rightarrow -Ay + B = \bar{c}e^{-At}$ , wobei  $\bar{c} = \pm e^{-Ac} \neq 0$ .

Wir erhalten die Lösungsformel  $y_k(t) = ke^{-At} + \frac{B}{A}$  für  $k = -\bar{c}/A \neq 0$ . Hier korrespondiert  $k = 0$  zur Lösung  $y = \frac{B}{A}$ , die wir beim Dividieren ausschließen mussten.

Sei  $y_k(t_0) = y_0$ , dann ist  $y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$ , also  $k = e^{At_0}(y_0 - \frac{B}{A})$

$$\Rightarrow y(t) = (y_0 - \frac{B}{A}e^{-A(t-t_0)} + \frac{B}{A}) \star$$

Da  $y = x' \Rightarrow x(t) = -\frac{k}{A}e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2 \Rightarrow x(t) = c_1e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2$  ist eine Lösung von  $x'' + Ax' = B$  für beliebige konstanten  $c_1, c_2$

Bemerkung:

Die allgemeine Formel  $\star$  für eine Differentialgleichung  $y' + Ay = B$  mit Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$  taucht in Verbindung mit zwei Nobelpreisen auf: 1923 Mellikan - Physik; 1987 Solow - Ökonomie

Für  $A = 0$  lautet die Differentialgleichung  $x'' = B$ , also  $x(t) = \frac{B}{2}t^2 + c_1t + c_2$ .

Wie vergleicht sich die Lösung für  $A \neq 0$  im limes  $A \rightarrow 0$  mit dieser Lösung.

limA → 0: Vergleiche (für y) die Lösung  $ke^{-At} + \frac{B}{A}, k = -\frac{c}{A}, a \neq 0$  geht für  $A \rightarrow 0$  nicht gegen  $Bt + k$  für festes B,k

Fehler: k fest für  $A \rightarrow 0$ .

Der Anfangswert für  $t_0 = 0$   $y_0 = k + \frac{B}{A}$  sollte fest sein, auch für  $A \rightarrow 0$ .

Für  $A \neq 0, y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$ , also  $k = (y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}$ . Dann ist die Lösung des AWP  $y' + Ay = b, y(t_0) = y_0$  für  $A \neq 0$   $(y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}e^{-At} + \frac{B}{A} = y_0e^{-A(t-t_0)} + B \frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A} \star$ . Das AWP  $y' = B, y(t_0) = y_0$  für  $A = 0$  hat die (eindeutige) Lösung  $y_0 + B(t - t_0)$ . Nun betrachte für festes B und  $y_0$  (nicht festes k) für  $A \rightarrow 0$  die rechte Seite von  $\star$ ;  $y_0e^{-A(t-t_0)} \rightarrow y_0e^{-0(t-t_0)} \rightarrow y_0$  und  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A} = \frac{(t-t_0)e^{-A(t-t_0)}}{1} = t - t_0 \Rightarrow$  der limes  $A \rightarrow 0$  ist  $y_0 + B(t - t_0)$ .

## 2.9 Separable Differentialgleichung ; bei ihr (2.7)

Definition: Sei  $t \geq 0$ . Eine separable Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form  $x'(t) = a(t)f(x(t))$  bzw.  $x(t) = a(t)f(x)$ . Hier sind  $a$  und  $f$  bekannte Funktionen. Der Fall  $a = \text{konst}$  ist der Fall einer autonomen Differentialgleichung. Wir können auch schreiben  $\frac{dx}{f(x)} = a(t)dt$ , falls  $f(x) \neq 0$  und  $\int \frac{dx}{f(x)} = \int a(t)dt$ .

## 3 Differentialgleichung erster Ordnung - eine dynamische Perspektive

”Poincare’sches Prinzip”

sehr verschiedene Phänomene können durch sehr ähnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Erkenntnisse über die Differentialgleichung in einer spezifischen Situation geben Hinweise über das Verhalten ihrer Lösungen und diese können dann auf jede konkrete Interpretation der Differentialgleichung angewendet werden.

### 3.1 Newton’sches Gesetz eines Abkühlvorgangs

(1701) anonym publiziert

Falls ein Objekt eine andere Temperatur als seine Umgebung hat, dann ist die Rate des Wärmetransfers proportional zur Temperaturdifferenz von Objekt und Umgebung. → inspirierte Fourier zu den Fourierreihen.

Sei  $x(t)$  die Temperatur des Objektes zum Zeitpunkt  $t$  (befindet sich z.B. in einem sehr großen Raum oder dem Boden eines Sees). Das umgebende Medium habe die Temperatur  $T(t)$  (Luft, Wasser)

Dies wird nicht von Objekten beeinflusst.  $x'(t) = -k(x(t) - T(t))$ ,  $k > 0$ .  $k$  wird durch die spezifischen physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Situation bestimmt.

Falls  $T(t) = T_0 = \text{const.}$ ,  $x' = -k(x - T_0)$ . Sei  $x_0 := x(t_0)$ .  $x' = (x - T_0)' = -k(x - T_0) \Rightarrow y' = -ky \Rightarrow y(t) = c_0 e^{-kt} \Rightarrow x(t_0) = T_0 + (x_0 - T_0)e^{-k(t-t_0)}$ , da  $x_0 - T_0 = x(t_0) - T_0 = c_0 e^{-kt_0}$ , also  $c_0 = (x_0 - T_0)e^{kt_0}$ .

Wir hätten auch  $\frac{1}{x-T_0} \frac{dx}{dt} = -k \Leftrightarrow \frac{dx}{x-T_0} = -kdt$  ausnutzen können.

Experimentelle Überprüfung

(i) Entweder lassen wir die Anfangstemperatur des Objektes fest und plotten die Lösung für verschiedene  $k$ ,

(ii) oder wir lassen  $k$  fest und plotten die Lösung für verschiedene  $x_0$ .

(i) bezieht sich auf viele Umgebungen, die alle von derselben Anfangstemperatur aus abkühlen.

(ii) bezieht sich auf eine gegebene Umgebung, die von verschiedenen Ausgangstemperaturen abköhlt.

Der exponentielle Abfall erklärt z.B. auch, warum kalte Getränke im Sommer so schnell warm werden.

23.10.25:  $x = -k(x - T_0)$

Wie können wir durch zwei Messungen  $k$  bestimmen, unter der Voraussetzung, dass unsere Differentialgleichung das passende Modell ist und dass die Außentemperatur konstant  $T_0$  ist? Mit Anfangstemperatur  $x(0)$  und Temperatur zum Zeitpunkt 20,  $x(20)$ . Sei  $T_0 = 80^\circ F$ ,  $x(0) = 160^\circ F$ ,  $x(20) = 145^\circ F$ .

$$\begin{aligned}x(20) - T_0 &= (x(0) - T_0)e^{-20k} \\ \Rightarrow 145 - 80 &= (160 - 80)e^{-20k} \\ \Leftrightarrow 65 &= 80e^{-20k} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{20} \ln\left(\frac{65}{80}\right) \approx 0,01038\end{aligned}$$

Nun können wir Vorhersagen treffen:

Wie lange dauert es, bis das Objekt von seinen  $145^\circ F$  zum Zeitpunkt  $t$  auf  $85^\circ F$  abgekühlt ist?

Sei nun  $x(0) = 145$ ,  $x(t) = 80 + 65e^{-kt}$ ,  $x(t) = 85$ , d.h. für  $5 = 65e^{-kt} \Leftrightarrow 1 = 13e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{\ln(13)}{k} \approx 246,6$ .

Das Newton'sche Gesetz funktioniert nicht mehr, wenn die Objekt-Umgebungstemperaturdifferenz sehr groß ist.

## 4 Stationäre Zustände, Stabilität, Phasendiagramme

$x' = f(x)$  ist eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung.

### 4.1 Definition: stationäre Lösung

Eine stationäre Lösung einer autonomen Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  ist eine konstante Funktion  $x(t) = c$ , die diese Differentialgleichung löst, d.h.  $f(c) = 0$ .

### 4.2 Beispiele

Stationäre Lösungen von  $x' = 3x$  und  $x' = x^2$  sind  $c = 0$

- (a)  $x' = 3x$  und  $x' = x^2$  sind  $c = 0$
- (b)  $x' = x^2 - s$  sind  $c = 1$  und  $c = -1$
- (c)  $x' = x^2 + 1$  existieren nicht für reelle  $c$
- (d)  $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ ,  $r, K > 0$  (logistische Gleichung) sind  $c = 0$  und  $c = K$ , unabhängig von  $r$ .

### 4.3 Theorem

Betrachte  $x'(t) = f(x(t))$  (autonome Differentialgleichung). Falls zwei voneinander verschiedene Lösungen  $x_1(t), x_2(t)$  existieren, dann berühren sich ihre Graphen nie. Falls  $x(t)$  nicht konstant ist, dann liegt der zugehörige Graph ganz auf einer Seite der stationären Lösungen.

## 4.4 Definition: Stabilität von Lösungen von autonomen Differentialgleichungen

Eine stationäre Lösung  $c$  für die Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  heißt stabil, falls für  $x_0 \approx c$  die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)  $x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $c$  konvergiert (attraktiv)

$c$  heißt instabil, falls ein  $r > 0$  existiert, sodass für alle  $x_0 \approx c$  die Lösung des AWP ab einem gewissen Zeitpunkt einen Abstand  $> r$  von  $c$  hat und für alle größeren Zeiten dort verbleibt (abstoßend)

$c$  heißt semi-stabil, falls es auf einer Seite stabil und auf der anderen Seite instabil ist.

Bemerkung: Diese Klassifikation ist nicht vollständig. Beispiel:  $x' = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x}), c = 0$ .

Stabilität bedeutet z.B., dass kleine Messfehler die Vorhersagen des Verhaltens in der Nähe stationärer Lösungen nicht beeinflussen. Instabile Lösungen sieht man im Experiment mit großer Wahrscheinlichkeit nicht.

## 4.5 Theorem

Betrachte die autonome Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  für  $t \geq 0$  und "genügend glattes"  $f$ .

Sei  $x(t) = c$  eine stationäre Lösung, d.h.  $f(c) = 0$ .

- (i)  $c$  ist stabil, falls der Graph von  $f$  nah bei  $c$  die horizontale Achse von positiv nach negativ durchkreuzt, d.h.  $f'(c) < 0$ .
- (ii)  $c$  ist instabil, falls  $f'(c) > 0$
- (iii)  $c$  ist semi-stabil, falls  $f'(c) = 0$  und  $f''(c) \neq 0$ .

Falls  $f'(c) = f''(c) = 0$ , dann muss der Graph von  $f$  näher studiert werden.

## 4.6 Beispiel

Betrachtet die allgemeine logistische Differentialgleichung  $x'(t) = rx(t)(1 - \frac{x}{K}) = rx - \frac{rx^2}{K}$  für  $r, K > 0$  und  $t \geq 0$ .

Sei  $x(0) \geq 0$ . Dieses AWP besitzt die Lösung  $x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0)+(K-x(0))e^{-rt}}$  (prüfe durch Einsetzen).

Die Lösungskurven  $x(t)$  für  $t \geq 0$  und  $x(0) \geq 0$  wechseln Konkavität an der Horizontalen  $\frac{K}{2}$  (Wendestellen).  $K$  zieht Lösungen an, 0 stößt Lösungen ab.

Phasenlinien/Phasendiagramme

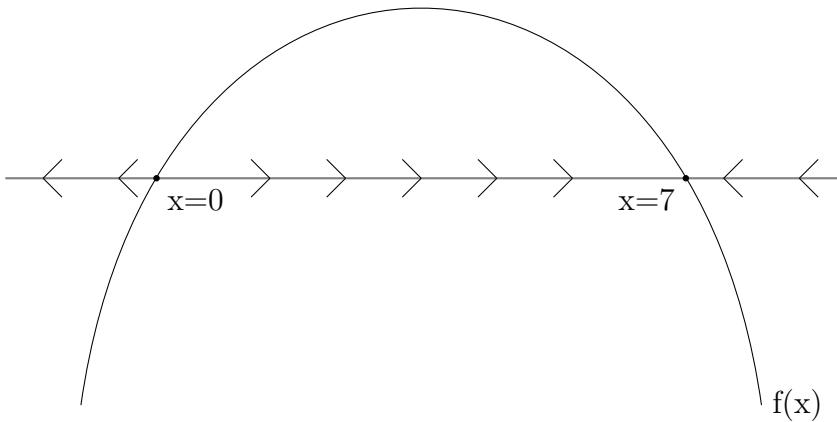
$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ , hier mit Parameter  $r = 2, K = 7$ . Falls  $x(0) = 0$  oder  $x(0) = 7$  passiert nichts mehr.

Falls  $x(0) > 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$ ,

Falls  $0 < x(0) < 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) > 0$ ,

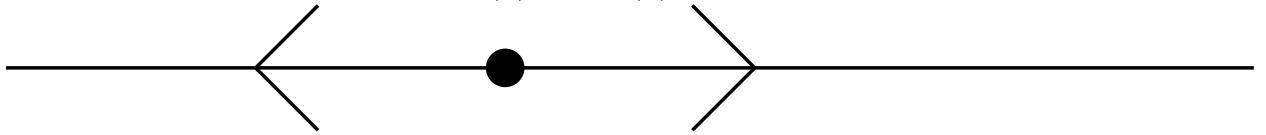
Falls  $x(0) < 0 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$ .

$f(x) = 2x(1 - \frac{x}{7}) \rightarrow$  Phasendiagramm:

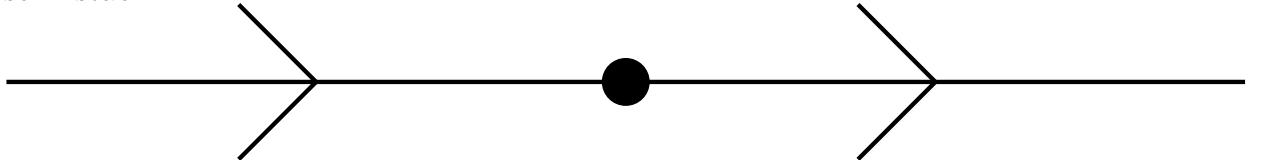


## 4.7 Beispiele

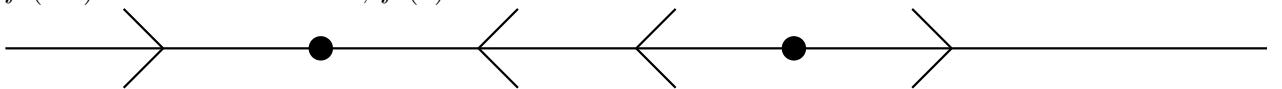
- (a)  $x' = x$ : Stationäre Lösung  $x = 0$ .  $f(x) = x, f'(x) = 1 > 0 \Rightarrow$  instabil:



- (b)  $x' = x^2$ : Stationäre Lösung  $x = 0$ .  $f(x) = x^2, f'(x) = 2x \stackrel{\text{für } x=0}{=} 0, f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$  semi-stabil:



- (c)  $x' = x^2 - 1$ . Stationäre Lösungen  $x = 1, x = -1$ .  $f(x) = x^2 - 1, f'(x) = 2x, f'(-1) = -2 < 0 \Rightarrow$  stabil,  $f'(1) = 2 > 0 \Rightarrow$  instabil:



## 5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung und AWP

### 5.1 Definition

Für lineare Differentialgleichungen der Form  $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , legt das assoziierte AWP zwei Werte fest:  $x(t_0) = x_0$  und  $x'(t_0) = x'_0, x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$ .

### 5.2 Theorem

Betrachte  $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$ .

Dann gibt es ein Lösungspaar  $x_1(t), x_2(t)$ , welches explizit durch Lösungen der quadratischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  beschrieben werden kann, sodass jede Lösung der Differentialgleichung eindeutig wie folgt ausgedrückt werden kann:

$x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt: Für jedes  $t_0$  und jedes  $x_0, x'_0$  existiert

genau eine solche Lösung, die das AWP mit  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$  erfüllt.

27.10.25:

### 5.3 Wichtiges praktisches Beispiel

(a)  $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega > 0$

goodnotes 5 (Bild von Feder an der Wand, x ist Ausschlag)

Feder an der Wand, Masse an einer Feder. Annahme: Reibung spielt keine Rolle,  $x(t)$  - Position der Feder. Ziehen oder Zusammendrücken der Feder lässt die Position der Masse oszillieren,  $x = 0$  Ruhezustand. Das Bewegungsgesetz(Newton) und das Hook'sche Gesetz für Federn  $mx'' + kx = 0$ , wobei  $m > 0$  die Masse des an der Feder befestigten Objektes ist und  $k > 0$  die Federkonstante, d.h.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . (Bem. Es gibt auch nichtlineare Federn.)

(b) LC-Schaltkreis/Schwingkreis:

elektronischer Schaltkreis, der aus einer Induktivität (z.B. Spule) L und einem Kondensator besteht. Das Kirckhoff'sche Gesetz besagt, dass der elektrische Strom  $I(t)$  folgende Dynamik hat:

$LI''(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$ . L ist die Induktivität und C die sogenannte Kapazität des Kondensators, d.h.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Betrachte allgemein  $x'' + ax' + bx = 0$ .

Ansatz:  $e^{\lambda t} = x(t)$ . Dann ist  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}, x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Also  $\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$  bzw.  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Dies ist das charakteristische Polynom der DGL  $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}, \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}$ . Falls  $\frac{a^2}{4} - b$  bzw.  $a^2 - 4b > 0$ , also  $\lambda_1, \lambda_2$  reell erhalten wir zwei verschiedene Lösungen  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Damit ist eine allgemeine Lösung  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Betrachte:  $x'' - x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{-t} \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  ist eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung .

### 5.4 Definition

Eine Linearkombination von Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form  $h(t) = c_1 f_1(t) + \dots + c_m f_m(t), c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ .

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißen linear unabhängig, falls sie kein Vielfaches voneinander sind.

- $-5t^3 + 2t^2 - 3$  ist eine Linearkombination von  $t^3, t^2, t$  und  $t^0 = 1$ , die linear unabhängig sind.
- $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  sind linear unabhängig, falls  $e^{\lambda_1 t} \neq ce^{\lambda_2 t}$ . Dies ist der Fall für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .
- Betrachte  $x'' + x' - 2x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$   $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$  ist eine allgemeine Lösung.
- $x'' + bx = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 + b = 0$ . Falls  $b < 0$ , schreibe  $b = -k^2$ , also  $\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm k \Rightarrow x(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$  ist eine allgemeine Lösung.

Falls  $b > 0$ , dann hat  $\lambda^2 + b$  keine reelle Wurzel. Hier finden wir andere Lösungen als die zuvor vermuteten Exponentialfunktionen.

- $x'' + x = 0$ . Das charakteristische Polynom  $\lambda^2 + 1$  hat keine reellen Lösungen .  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -1$ . Betrachte  $x_1(t) = e^{it}$  und  $x_2(t) = e^{-it}$ . Für die allgemeine Differentialgleichung  $x'' + ax' + bx = 0$  und Lösungen  $u + iv, u, v$  reell gilt:  
 $(u'' + iv'') + a(u' + iv') + b(u + iv) = (u'' + au' + bu) + i(v'' + av' + bv) = 0$   
 $\Rightarrow$  sowohl  $u$  wie  $v$  sind Lösungen der Differentialgleichung.  
 $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t), e^{-it} = \cos(t) - i \cdot \sin(t)$ . Sowohl  $\cos(t)$  wie  $\sin(t)$  ist eine Lösung von  $x'' + t = 0$ .
- $x'' - 2x' + 2x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ . Setze es gleich 0.  
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$ . Komplexwertige Lösung sind  $e^{(1+i)t}$  und  $e^{(1-i)t}$  bzw.  $e^t(\cos(t) + i \cdot \sin(t))$  und  $e^t(\cos(t) - i \cdot \sin(t))$ . Lösungen sind  $x_1(t) = e^t \cos(t), x_2(t) = e^t \sin(t)$  (Prüfe nochmal durch einsetzen). Allgemeine Lösungen sind dann  $x(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- $x'' - 2x' + x = 0$  Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$  mit der einzigen Wurzel  $\lambda = 1$ :  $x_1(t) = e^t$ .  
Versuch:  $x = te^t$ . Dann ist  $x' = te^t + e^t$  und  $x'' = te^t + e^t + e^t = te^t + 2e^t \Rightarrow x'' - 2x' + x = te^t + 2e^t - 2te^t - 2e^t + te^t = 0$ .  
 $\Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$  ist eine allgemeine Lösung ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Bemerkung:  $e^{rt}$  und  $te^{rt}$  sind linear unabhängig.

## 5.5 Theorem

Betrachte  $x'' + ax' + bx = 0$  für  $t \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ .

Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Wurzeln des charakteristischen Polynoms  $\Lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Definiere dazu sogenannte Grundlösungen  $x_1(t), x_2(t)$  wie folgt:

1. Falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  beide reell, dann sei  $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$  und  $x_2(t) := e^{\lambda_2 t}$
2. Falls  $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ , also  $\lambda_1, \lambda_2 = r_0 \pm is_0$  mit  $r_0 = \frac{-a}{2}, s_0 = \frac{1}{2}\sqrt{|a^2 - 4b|} = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2} > 0$
3. Falls  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , dass sein  $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$  und  $x_2(t) := e^{\lambda_1 t}$ . Diese Lösungen sind linear unabhängig. Alle Lösungen der Differentialgleichung haben die Form  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  und es existiert genau ein  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$  für jede Wahl von  $t_0, x_0, x'_0$ .

# 6 Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen und Eigenschaften

## 6.1 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$ . Setze  $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'_1(t) &= y_2(t) \\ y'_2(t) &= -ax'(t) - bx(t) + f(t) \\ &= -ay_2(t) - by_1(t) + f(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  System von Differentialgleichungen erster Ordnung, linear

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \text{ und } y'(t) = Ay(t) + F(t) \text{ für } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Die Spur von  $A$  ist  $(-a)$ , die Determinante ist  $b$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist  $\lambda^2 - \text{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 + a\lambda + b$ . Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von  $A$ .

## 6.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte für  $n > 1$  die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = f(t). \text{ Definiere } y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= x' = y_2 \\ y'_2 &= x'' = y_3 \\ &\dots \\ y'_{(n-1)} &= x^{(n-1)} = y_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'_n = x^{(n)} = -a_{n-1}x^{(n-1)} - \dots - a_1x' - a_0x + f(t)$$

$$= -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-2}y_{n-1} - a_{n-1}y_n + f(t)$$

Sei  $y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ , dann ist  $y'(t) = Ay(t) + F(t)$  für  $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

30.10.25: Wie finden wir Lösungen ?

## 6.3 Beispiel

$n = 2$ . Falls  $A$  eine Diagonalmatrix ist, wir also  $x'(t) = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  betrachte, dann gilt  $\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \end{pmatrix}$ . Mit  $x(t_0) = x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  ist  $x_1(t) = \alpha e^{\lambda_1(t-t_0)}$  und  $x_2(t) = \beta e^{\lambda_2(t-t_0)}$ , da das System entkoppelt ist.

Für nicht-diagonale  $A$  verfahren wie folgt:

Seien  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear unabhängige Eigenvektoren. Also  $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$  und  $A\vec{w} = \lambda_2\vec{w}$ . Diese existieren immer, wenn  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  in  $\mathbb{R}$  sind. Dann können wir  $x(t)$  mit Hilfe dieser Eigenvektorbasis ausdrücken:  $x(t) = u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}$

Also  $x'(t) = u'_1(t)\vec{v} + u'_2(t)\vec{w}$  und  $Ax(t) = A(u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}) = u_1(t)A\vec{v} + u_2(t)A\vec{w} = \lambda_1 u_1(t)\vec{v} + \lambda_2 u_2(t)\vec{w}$

$\Rightarrow u'_1(t)\vec{v} + u'_2(t)\vec{w} = \lambda_1 u_1(t)\vec{v} + \lambda_2 u_2(t)\vec{w}$ . Da  $\vec{v}, \vec{w}$  eine Basis bilden, muss  $u'_1(t) = \lambda_1 u_1(t), u'_2(t) = \lambda_2 u_2(t)$

$$\lambda_2 u_2(t)$$

$$\Rightarrow u_1(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}, u_2(t) = u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)} \text{ und } x(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}\vec{v} + u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)}\vec{w}$$

Also müssen die Eigenvektoren von A explizit berechnet werden. Für die Anfangswerte betrachten wir:

$$u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w} = x(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2$$

$$\text{Definiere } E = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ bzw. } u(t) = E^{-1}x(t) \text{ auch für } t = t_0.$$

# 7 Differentialgleichungen erster Ordnung, Existenz und Eindeutigkeit (von Lösungen) (Picard-Lindelöf)

## 7.1 Voraussetzung

Betrachte  $x'(t) = f(x(t), t)$  für  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$  mit  $x(t_0) = x_0$ .

Sei  $S$  die Menge  $\{(t, x) : t_0 \leq t \leq a, -\inf < x < \inf\}$ . Sei  $f$  auf  $S$  definiert und erfülle  $f$  eine Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$ , d.h.:

$$(\star) |f(x, t) - f(\bar{x}, t)| \leq L|x - \bar{x}|, L \geq 0.$$

## 7.2 Theorem

Gelte 7.1. Sei  $f$  stetig auf  $S$ , einschließlich  $(\star)$ .

Dann hat das Anfangswertproblem  $x' = f(x, t), x(t_0 = x_0)$  genau eine Lösung  $x(t)$ . Sie existiert auf ganz  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ .

Beweis: Wir wollen einen Fixpunktsatz verwenden. Definiere  $J := [t_0, t_0 + a]$ .

Sei  $x(t)$  eine in  $J$  differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems. Da  $f$  stetig ist, ist auch  $u(t) := f(x(t), t)$  in  $J$  stetig. Also  $x(t)$  sogar stetig differenzierbar. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann:

$$(\star\star) x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \text{ Umgekehrt genügt jede in } J \text{ stetige Lösung von } (\star\star) \text{ der Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0.$$

Die rechte Seite von  $(\star\star)$  ist stetig differenzierbar und damit auch  $x(t)$  und  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

Unser Anfangswertproblem ist also gleichwertig mit der Integralgleichung  $(\star\star)$ .

Schreibe dies in der Form  $x = Tx$  mit  $(Tx)(t) = \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

Der Integraloperator ordnet jeder Funktion aus dem Banachraum  $\{f \mid f \text{ ist stetige Funktion auf } J\} =: C(J)$  eine Funktion  $Tx$  aus demselben Raum zu. Die Lösungen unseres AWP in 7.1 sind also gerade die Fixpunkte des Operators  $T : C(J) \rightarrow C(J)$ . Nach dem Fixpunktsatz (siehe unten) ist unser Theorem bewiesen, falls wir zeigen können, dass  $T$  einer Lipschitzbedingung mit Konstante  $k < 1$  genügt.

Normiere  $C(J)$  mit der Maximumsnorm  $\|x\|_0 := \max\{|x(t)| : t \in J\}$ .

Seien  $x, y \in C(J)$ . Dann gilt  $|T(x)(t) - (Ty)(t)| = |\int_{t_0}^t f(x(s), s) - f(y(s), s) ds| \leq \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \leq L\|x - y\|_0(t - t_0)$

$\Rightarrow \|Tx - Ty\|_0 \leq La\|x - y\|_0$ . T genügt also einer Lipschitzbedingung, aber La ist nur dann  $< 1$ , wenn  $a < \frac{1}{L}$ .

Betrachte stattdessen eine gerichtete Maximum-Norm  $\|x\|_\alpha := \max\{|x(t)|e^{-\alpha t} : t \in J\}$ ,  $\alpha > 0$ .

Nun schätzt wie folgt ab:

$$L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| e^{-\alpha s} e^{\alpha s} ds \leq L\|x - y\|_\alpha \int_{t_0}^t e^{\alpha s} ds \leq L\|x - y\|_\alpha \frac{e^{\alpha s}}{\alpha}$$

$\Rightarrow |(Tx)(t) - (Ty)(t)| e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|_\alpha$ . Wähle nun  $\alpha = 2L$ , dann genügt T einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten  $\frac{1}{2}$  und wir haben Existenz im ganzen Intervall. Das Ganze geht auch für  $[t_0 - b, t_0]$ .  $\square$

**Fixpunktsatz:** Sei  $B$  ein Banachraum, das heißt ein vollständiger, linearer, normierter Raum. Sei  $\emptyset \neq D \subset B$  abgeschlossen. Sei  $T : D \rightarrow T(D) \subset D$ . Genügt  $T$  einer Lipschitzbedingung in  $D$  mit einer Lipschitzkonstante  $k < 1$ . Das heißt  $\|Tx - T\tilde{x}\| \leq k\|x - \tilde{x}\|$ . Dann hat  $Tx = x$  genau eine Lösung  $x =: \bar{x}$ .

Betrachte das Iterationsverfahren:

$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n$ . Dann gilt:

$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$ . Insbesondere konvergiert die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\bar{x}$  im Sinne der Norm  $\|\cdot\|$ .

03.11.25:

Bemerkung (in Anschluss an Theorem 7.2):

- a) Ausgehend von einer in  $J$  stetigen Funktion  $y_0(t)$  approximiere  $y_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(y_k(s), s) ds$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Diese Folge konvergiert nach der Norm und damit auch gleichmäßig gegen die Lösung  $x(t)$  des AWP.
- b) Eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung einer Lipschitzbedingung ist:  $f$  ist partiell nach  $x$  differenzierbar und  $|f_x(x, t)| \leq L$ .

### 7.3 Theorem

Sei  $R$  das Rechteck  $\{t_0 \leq t \leq t_0 + a : |x - x_0| \leq b\}$  mit  $a, b > 0$ . Genüge  $f \in C(R)$  in  $R$  einer Lipschitzbedingung, d.h.:

$|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$ . Dann existiert genau eine Lösung des AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  mindestens in einem Intervall  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$  wobei  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{A}\}$  ist, mit  $A = \max_R |f|$ .

Hier ist  $f$  nicht in einem ganzen Streifen, sondern in einer Umgebung des Punktes  $(x_0, t_0)$  definiert.

### 7.4 Lokale Lipschitzbedingung (von Oben hierher verschoben)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$ .  $f(x, t)$  genügt in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich  $x$ , wenn zu jedem  $(x_0, t_0) \in D$  eine Umgebung  $U = U(x_0, t_0)$  und  $L = L(x_0, t_0)$  existiert, sodass  $f$  in  $D \cap U$  einer Lipschitzbedingung  $|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$  genügt.

Kriterium: Falls  $D$  offen ist und  $f \in C(D)$  eine in  $D$  stetige Ableitung  $f_x$  besitzt, dann genügt  $f$  in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung.

Beispiel:  $f(x, t) = x^2$ :  $|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| = |x^2 - \tilde{x}^2| = |x + \tilde{x}||x - \tilde{x}|$  genügt auf  $\mathbb{R}^2$  einer lokalen, aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

### 7.5 Theorem: Lokale Lösbarkeit

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen und genüge  $f \in C(D)$  einer Lokalen Lipschitzbedingung in  $D$ .

Dann ist das AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  für  $(x_0, t_0) \in D$  lokal eindeutig lösbar, d.h., in einer Umgebung von  $t_0$  existiert genau eine Lösung .

### 7.6 Theorem: Existenz und Eindeutigkeit

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen. Genüge  $f \in C(D)$  in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung. Dann hat für jedes  $(x_0, t_0) \in D$  (jedes Tupel definiert ein AWP) das AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  ( $\star$ ) eine Lösung  $\phi$ , welche nicht fortsetzbar ist und nach links und rechts dem Rand von  $D$  beliebig nahe kommt. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt. D.h. alle Lösungen von ( $\star$ ) sind Restriktionen von  $\phi$ .

Bemerkung: " $\phi$  kommt nach rechts dem Rand von  $D$  beliebig nahe" ist wie folgt definiert:

Sei  $G$  die abgeschlossene Hülle vom Graphen von  $\phi$ . Sei  $G_t$  die Menge aller  $(x, t) \in G$  mit  $t \geq t_0$ . Dann ist  $G_t$  keine kompakte Teilmenge von  $D$ .

Äquivalent und anschaulicher ist:

$\phi$  existiert nach rechts in  $[t_0, b)$  ( $b = \inf$  ist erlaubt) und es liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

- (i) Falls  $b = \inf$ : Die Lösung existiert für alle  $t \geq t_0$ .

- (ii) Falls  $b < \inf$  und  $\limsup_{t \rightarrow b^-} |\phi(t)| = \inf$ : Die Lösung wird unendlich.
- (iii) Falls  $b < \inf$  und  $\liminf_{t \rightarrow b^-} d(t, \phi(t)) = 0$ , wobei  $d(\tilde{t}, \tilde{x})$  der Abstand des Punktes  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  vom Rand von  $D$  ist: Die Lösung kommt dem Rand von  $D$  beliebig nahe.

Also ist  $G_t$  entweder unbeschränkt (i),(ii) oder beschränkt und enthält Randpunkte von  $D$  (iii).

## 7.7 Theorem: Existenzsatz von Peano

Sei  $f(x, t)$  in einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  stetig. Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, t_0) \in D$  mindestens eine Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(x, t)$ . Jede Lösung lässt sich nach rechts und nach links bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

## 7.8 Polygonzugverfahren von Cauchy

Sei  $f(x, t)$  stetig und beschränkt in  $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Betrachte  $x' = f(x, t)$  in  $[t_0, t_0 + a]$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Definiere  $t_k = t_0 + \alpha k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Setze für  $t_0 \leq t \leq t_1$ :  $u_\alpha(t) := x_0 + (t - t_0)f(x_0, t_0)$ , d.h.  $u_\alpha$  ist eine Gerade durch den Punkt  $(x_0, t_0)$  mit der Steigung  $f(x_0, t_0)$ . Für  $t_1 \leq t \leq t_2$  sei  $u_\alpha$  die Gerade durch den Punkt  $(x_1, t_1) := (u_\alpha(t_1), t_1)$ .

Jetzt folgt das Verfahren:

## 8 Ober- und Unterfunktionen

### 8.1 Lemma

Seien die Funktionen  $\phi(t), \psi(t)$  in  $J_0 := (t_0, t_0 + a]$  differenzierbar.

Gelte  $\phi(t) < \psi(t)$  in  $(t_0, t_0 + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Dann gilt entweder

- (i)  $\phi < \psi$  in  $J_0$  oder
- (ii) Es existiert ein  $\tilde{t} \in J_0$ , sodass  $\phi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 < t < \tilde{t}$  und  $\phi'(\tilde{t}) = \psi'(\tilde{t})$  und  $\phi'(\tilde{t}) \geq \psi'(\tilde{t})$ .

Beweis: Gelte (i) nicht, dann existiert ein erster Punkt  $\tilde{t} > 0$  mit  $\phi(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t})$ . Für die linksseitigen Differenzenquotienten an der Stelle  $\tilde{t}$  ( $h > 0$ ) gilt  $\frac{\phi(\tilde{t}) - \phi(\tilde{t}-h)}{h} > \frac{\psi(\tilde{t}) - \psi(\tilde{t}-h)}{h}$ , da links von  $\tilde{t}$  gilt, dass  $\phi < \psi$ . Die Behauptung folgt für  $h \rightarrow 0$ .

### 8.2 Definition: Defekt einer Funktion

Der Defekt  $P\phi$  einer Funktion  $\phi(t)$  bezüglich der Differentialgleichung  $x' = f(x, t)$  ist  $P\phi := \phi' - f(\phi, t)$ . Das heißt der Defekt gibt an, "wie gut"  $\phi$  der Differentialgleichung genügt. Eine Lösung  $Px$  der Differentialgleichung hat Defekt  $Px = 0$ .

### 8.3 Theorem

Sei  $f : D \rightarrow R, D \subset \mathbb{R}^2$  und seien  $\phi(t), \psi(t)$  Funktionen mit Graphen  $\phi, \psi \subset D$ . Seien  $\phi(t), \psi(t)$  in  $J_0 := (t_0, t_0 + a]$  differenzierbar und gelte a)  $\phi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 < t < t_0 + \epsilon, \epsilon > 0$ , b)  $P\phi < P\psi$  in  $J_0$ .

Gelten die Beziehungen aus 8.1 und 8.2.

Dann ist  $\phi < \psi$  in  $J_0$ .

Beweis: Wir zeigen, dass (ii) In Lemma 8.1 nicht gilt: Sei  $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ . Dann gilt wegen Voraussetzung b), dass  $\phi'(t_0) = P\phi + f(\phi(t_0), t_0) < P\psi + f(\psi(t_0), t_0) = \psi'(t_0)$ , also gilt sicher nicht (ii). q.e.d.

Genauso gilt alles für ein links von  $t_0$  liegendes Intervall.

### 8.4 Definition: Unter-/Oberfunktion bezüglich eines AWP

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  und  $f(x, t)$  in  $D$  definiert. Dann heißt  $v(t)$  Unter- und  $w(t)$  Oberfunktion bezüglich des AWP  $x' = f(x, t)$  in  $J := [t_0, t_0 + a], x(t_0) = x_0$  ( $\star$ ), wenn  $v, w$  in  $J$  differenzierbar sind und  $v' < f(v, t)$  in  $J$  und  $v(t_0) \leq x_0$ ,  $w' < f(w, t)$  in  $J$  und  $w(t_0) \geq x_0$ , vorausgesetzt, dass die Graphen von  $v$  und  $w$  in  $D$  liegen.

Bemerkung: Falls  $v$  Unter- beziehungsweise  $w$  Oberfunktion und  $x$  eine Lösung des AWP ( $\star$ ) ist, dann gilt  $v(t) < x(t) < w(t)$  in  $(t_0, t_0 + a] \rightarrow$  Beweis Übungsblatt 4

Ein übliches Verfahren zur Bestimmung von Ober- und Unterfunktionen ist,  $f$  leicht abzuändern zu  $f_1(x, t) < f(x, t) < f_2(x, t)$  und dann die beiden AWPs  $v' = f_1(v, t)$  und  $w' = f_2(w, t)$  explizit zu lösen.

### 8.5 Beispiel

$x' = x^2 + t^2, x(0) = 1, t \geq 0$ . Für positive  $x$  folgt für  $f_1(x, t) = x^2$  und  $v' = v^2, v(0) = 1$ , dass  $v(t) = \frac{1}{1-t}$ . Diese Lösung existiert nach rechts höchstens bis zur Stelle  $t = 1$ . Sei also  $0 \leq t < 1$  und setze  $f_2(x, t) = x^2 + 1$ . Dann hat  $w' = w^2 + 1, w(0) = 1$  die Lösung  $w(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$ . Und für die Asymptote  $b \leq 1, x \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow b$ , gilt die Abschätzung  $0,78 < \frac{\pi}{4} < b \leq 1$ . WARUM? goodnotes 6

Neuer Ansatz: Neue Oberfunktion  $\tilde{w}(t) = \frac{1}{1-at}, a > 1$ . Die Ungleichung  $\tilde{w}' > \tilde{w}^2 + t^2$  ist gleichbedeutend mit  $a - 1 > (1 - at)^2 t^2$  für  $0 \leq t < \frac{1}{a}$ . Die rechte Seite dieser Ungleichung hat ihr Maximum bei  $t = \frac{1}{2a}$ , da  $[(1.at)^2 t^2]' = 2(1 - at)(-a)t^2 + 2t(1 - at)^2 = 0$  gilt für  $-2at^2 + 2t - 2at^2 = 0 \Leftrightarrow -2at + 2 - 2at = 0 \Leftrightarrow 4at = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2a}$   
 $\Rightarrow a - 1 > (1 - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{4a^2} \Rightarrow 16a^2(a - 1) > 1$ , also zum Beispiel für  $a = \frac{17}{16}$   
 $\Rightarrow \tilde{w}(t) = \frac{16}{16-17t}$  und  $b \geq \frac{16}{17} > 0,94$ . Die Lösung unseres AWP verläuft im schraffierten Bereich.  
goodnotes 7

## 9 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 9.1 •

Betrachte  $x' = F(x, t)$ , wobei  $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  und  $F(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ \vdots \\ f_n(x, t) \end{pmatrix}$ .

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit Elementen  $(x_1, \dots, x_n, t)$

## 9.2 Definition: Lipschitz-Bedingung

Eine Vektorfunktion  $F(x, t)$  genügt einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  mit Lipschitz-Konstante  $L$ , wenn  $|F(x, t) - F(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$  für  $(x, t), (\tilde{x}, t) \in D$  und wobei  $|\cdot|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^n$  ist, zum Beispiel die euklidische Norm. Die Lipschitzkonstante  $L$  ist verschieden für unterschiedliche Normen.

## 9.3 Hilfssatz

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  konvex. Seien in  $D$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu}$  stetig und beschränkt,  $\nu, \mu = 1, \dots, n$ . Dann genügt  $F$  in  $D$  einer Lipschitzbedingung.

## 9.4 Folgerung

Sei  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $F(x, t)$  in  $D$  stetig differenzierbar. Dann genügt  $F$  in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

## 9.5 Theorem: Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet. Sei  $F(x, t)$  in  $D$  stetig und genüge  $F$  in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  (z.B.  $F \in C^1(D)$ ). Sei  $(x_0, t_0) \in D$ . Dann besitzt das AWP  $x'(t) = F(x, t), x(t_0) = x_0$  genau eine Lösung. Diese lässt sich nach links und rechts bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

## 9.6 Theorem: Existenzsatz von Peano

Sei  $F(x, t)$  im Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig. Sei  $(x_0, t_0) \in D$ . Dann besitzt das AWP  $x' = F(x, t), x(t_0) = x_0$  mindestens eine Lösung. Jede lässt sich nach links und rechts bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

# 10 Das klassische SIR-DGL-Modell

s-suszeptible (Diese können infiziert werden), i-infektiöse (Diese verbreiten die Krankheit), r- "removed" (Immun, in Quarantäne, verstorben). Neue Infektionen entstehen durch Kontakt zwischen s und i

$$(*) s' = -\alpha is, i' = \alpha is - \beta i, r' = \beta i$$

Bemerkung: Das entsprechende Differentialgleichungssystem mit "Erholung" lautet  $s' = -\alpha is + \varepsilon r, i' = \alpha is - \beta i, r' = \beta i - \varepsilon r, \varepsilon > 0$ . Es hat ein anderes Verhalten.... Eigenwerte der Linearisierung.

Schreibe (\*) um:  $i(s' + i' + r') = -\alpha is + \alpha is - \beta i + \beta i = 0$

$$\Rightarrow s + i + r = 1 \text{ (normiert)} \Rightarrow i' = i(\alpha s - \beta). \text{ Betrachte } (\log(s) + \frac{\alpha}{\beta} r)' = -\alpha i + \alpha i = 0$$

Damit haben wir zwei sogenannte Invarianten  $s + i + r = 1$  (Konstante normiert) und

$$(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta} s - \frac{\alpha}{\beta} i)' = 0, \text{ da } (1)' = 0 \text{ und } r = 1 - s - i$$

10.11.25:

Multipliziere  $(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta} s - \frac{\alpha}{\beta} i)$  mit  $(\beta s)$

$$\Rightarrow -\alpha is = (s') = -\beta s \log(s) + \alpha s^2 + \beta s \gamma(0) \text{ mit Integrationskonstante } \gamma(0), \text{ wobei } \gamma(0)\beta = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0) \text{ ist, denn } \beta s \log s - \alpha s^2 - \alpha is = \text{konst.} \beta s.$$

## Formale Überlegungen:

1. Falls  $s(0) \leq \frac{\beta}{\alpha}$  und da  $s$  fallend ist ( $s' = -\alpha s i$ ), fällt das  $i$  ebenfalls, da  $i' = i(\alpha s - \beta)$ ,  $(\alpha s - \beta) = 0$  für  $s = \frac{\beta}{\alpha} \sim$  Es gibt keinen epidemischen Ausbruch.
2. Falls  $s(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ , dann steigt  $i$  zu Beginn, bis  $s$  auf  $\frac{\beta}{\alpha}$  gefallen ist. Also bricht eine Epidemie aus mit Maximum bei  $s = \frac{\beta}{\alpha}$ . Final geht  $i \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Was ist das finale Verhalten dieser Epidemie? Wir versuchen, das Verhalten  $t \rightarrow \infty$  zu verstehen.

$i(\infty) = 0$  und (Invariante):  $\beta \log(s(\infty)) - \alpha s(\infty) - \alpha i(\infty) = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0)$  und  $\frac{\partial}{\partial s}(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta}s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{\beta}$ , also  $\frac{\partial}{\partial s}(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta}s)(\infty) = \frac{1}{s(\infty)} - \frac{\alpha}{\beta} \geq 0$  (denn  $\frac{1}{s(\infty)} \geq \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta \geq \alpha s(\infty) \Leftrightarrow 0 \geq (\alpha s - \beta)$  und  $s$  fällt wegen  $s' = -\alpha s i$ ).

Das heißt das Verhalten hängt von der strikt konkaven Kurve  $\beta \log(s) - \alpha s =: f(s)$  ab, die ihr globales Maximum bei  $s = \frac{\beta}{\alpha}$  hat.

Seien  $s(0), i(0) > 0$  beliebig. Da  $i(\infty) = 0$  und  $r = 1 - s - i$  wird sich der Anteil der "removed" für große Zeiten für große Zeiten ( $r(\infty) = 1 - s(\infty)$ ) der eindeutigen Lösung ( $r_1 - s$ ) von  $\beta \log(s) - \alpha s = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0)$  annähern mit  $s \leq \frac{\beta}{\alpha}$ .

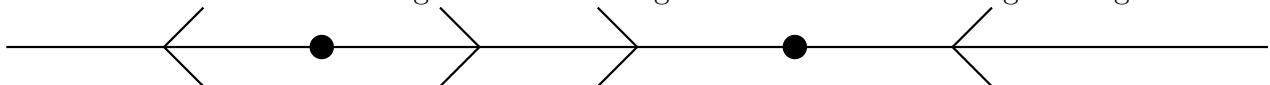
Achtung: formale Überlegungen, Positivität, Eindeutigkeit, Limes-Verhalten müssten noch gezeigt werden (gelten aber).

Der Wert  $\frac{\beta}{\alpha}$  ist die Herdenimmunität. Diese hat zwei Interpretationen:

1. Der maximal mögliche Anteil der betrachteten Population, der keine Infektion während der gesamten Epidemie erlitten hat.
2. Der Anteil der Suszeptiblen in der betrachteten Population, bei dem die Anzahl der Infektiösen anfängt zu fallen.

## 11 Phasenraumanalyse

Betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$ . Fasse  $x(t)$  also Punkt des Phasenraums  $\mathbb{R}$  auf, dessen Bewegung ("Fluss") durch die Differentialgleichung beschrieben wird. Wenn  $x(t)$  die Lösung des Differentialgleichung ist, dann ist  $\dot{x}(t)$  die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt bewegt. Trage in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  den Wert  $f(x) = \alpha x - \beta x^2$  in Form eines Vektors auf. Dann erhalten wir das sogenannte Richtungsfeld unserer Differentialgleichung .



Die Punkte sind die Stellen 0 und  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

Dieses gibt an, mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung sich der Punkt bewegt beziehungsweise wenn  $t \rightarrow x(t)$  die Differentialgleichung  $x' = f(x)$  (erfüllt?), dann ist  $f(x)$  der Tangentialvektor im Punkt  $x = x(t)$  an den Weg  $t \rightarrow x(t)$  in  $\mathbb{R}$ . 0 und  $\frac{\alpha}{\beta}$  sind Ruhepunkte/stationäre Punkte.

### 11.1 Das Räuber-Beute-Modell

$x(t)$  - Beutespezies,  $y(t)$  - Räuberspezies

Einfacher Ansatz:  $x' = (\alpha - \beta y)x$ ,  $y' = (-\gamma + \delta x)y$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

$Z(t) := (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto ((\alpha - \beta y)x, (\delta x - \gamma)y).z' = F(z).$

Eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist ein Weg  $Z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dessen Tangentialvektor  $Z'(t)$  im Punkt  $Z(t)$  durch  $F(Z(t))$  gegeben ist. Durch Anhalten des Vektors  $F(Z)$  an den Punkt  $Z \in \mathbb{R}^2$  erhalten wir das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Eine Lösung von  $Z' = F(Z)$  ist dann eine (durch  $t \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisierte, orientierte) Kurve  $C$  in  $\mathbb{R}^2$  so, dass in jedem Punkt  $Z$  von  $C$  der Vektor  $F(Z)$  ein Tangentialvektor ist.

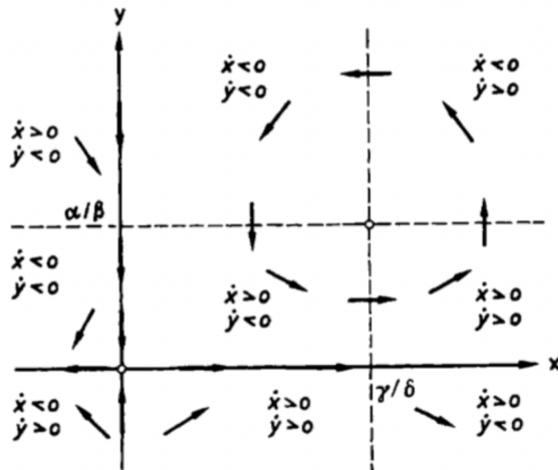


Abb. 3: Das Richtungsfeld für das System (12)

Unser Differentialgleichungssystem hat zwei Ruhepunkte:  $(0, 0)$  und  $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ . Man kann zeigen, dass das Phasenporträt für unser Räuber-Beute-Modell wie folgt aussieht:

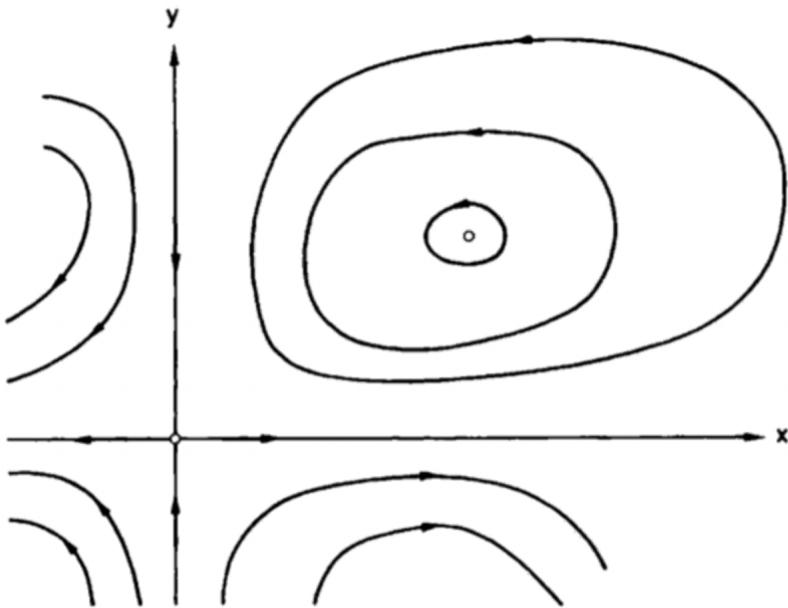


Abb. 4: Das Phasenporträt für das System (12)

Die Periodizität im 1. Quadranten ist zu begründen.

Das Phasendiagramm beschreibt das Langzeitverhalten der Population.

Wir wollen 2-dimensionale Flüsse klassifizieren. Betrachte also  $X' = AX$  in  $\mathbb{R}^2$  beziehungsweise  $x'_1 = ax_1 + bx_2, x'_2 = cx_1 + dx_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Für  $X(0) = I_d$  gilt  $X(t) = I_d + \int_0^t AX(\tau)d\tau = T_d + A \int_0^t X(\tau)d\tau$ . Diese legt folgende Iteration nahe:

$$X_0 := I_d, \\ X_1 := I_d + A \int_0^t X_0(\tau)d\tau = I_d + tA,$$

$$X_2(t) := T_d + A \int_0^t X_1(\tau) d\tau = I_d + tA + \frac{t^2}{2} A,$$

...,

$$X_{n+1}(t) = T_d + A \int_0^t X_n(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^k$$

13.11.25:

Weiter Räuber-Beute-System (Wiederholung von letzter VL):

$$x' = (\alpha - \beta y)x, \quad y' = (-\gamma + \delta x)y, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

$$(\alpha - \beta y) = 0 \text{ für } y = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (-\gamma + \delta x) = 0 \text{ für } x = \frac{\gamma}{\delta}$$

Es gelten:

- $\alpha - \beta y > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > y$
- $\alpha - \beta y < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < y$
- $-\gamma + \delta x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\gamma}{\delta}$
- $-\gamma + \delta x < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\gamma}{\delta}$

Betrachte folgende Fälle:

1.  $x' > 0$ , falls  $\frac{\alpha}{\beta} > y$  und  $x > 0$  oder falls  $\frac{\alpha}{\beta} < y$  und  $x < 0$
2.  $x' < 0$ , falls  $\frac{\alpha}{\beta} < y$  und  $x > 0$  oder falls  $\frac{\alpha}{\beta} > y$  und  $x < 0$
3.  $y' > 0$ , falls  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y > 0$  oder falls  $x < \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y < 0$
4.  $y' < 0$ , falls  $x < \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y > 0$  oder falls  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y < 0$

Einschub: Nullklinen sind Geraden oder auch Kurven. Sie sind da, wo  $x' = 0$  oder  $y' = 0$ , hier bei  $x = \frac{\gamma}{\delta}$  und bei  $y = \frac{\alpha}{\beta}$  geraden.

Zwei Ruhepunkte  $(0,0)$  und  $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ .

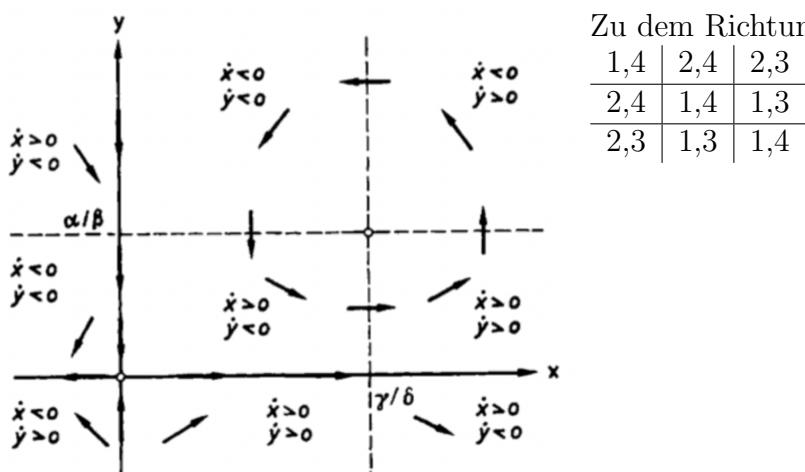


Abb. 3: Das Richtungsfeld für das System (12)

Es folgt das Phasendiagramm:

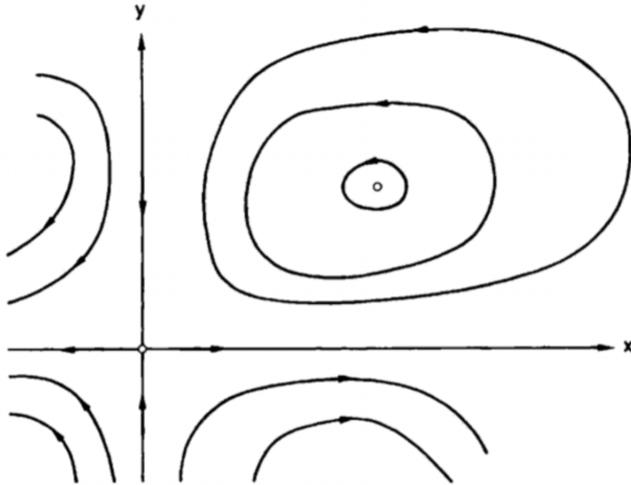


Abb. 4: Das Phasenporträt für das System (12)

Wir wollen 2-dimensionale lineare Flüsse klassifizieren. Betrachte also  $X' = AX$  in  $\mathbb{R}^2$ .  $x'_1 = ax_1 + bx_2, x'_2 = cx_1 + dx_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Für  $X(0) = I_d$  gilt  $X(t) = T_d + \int_0^t AX(\tau)d\tau = I_d + A \int_0^t x(\tau)d\tau$ .

Dies legt folgende Iteration nahe:

$$X_0 := I_d, X_1(t) := I_d + A \int_0^t X_0(\tau)d\tau = I_d + At,$$

$$X_2(t) := I_d + A \int_0^t X_1(\tau)d\tau = I_d + At + A^2 \frac{t^2}{2},$$

...,

$$X_{n+1}(t) = I_d + A \int_0^t X_n(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$  konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall von  $\mathbb{R}$  gegen  $e^{tA} \forall t \in \mathbb{R}$ ,

17.11.25:

da sie die Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = e^{|t| \|A\|}$  hat.

$t \mapsto e^{tA}$  ist stetig (wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Intervallen).

Wir können bei der Iteration zum Grenzwert übergehen (wegen lokal gleichmäßiger Konvergenz)  
 ~ evtl. Übung

und erhalten  $U(t) = T_d + \int_0^t AU(s)ds \forall t \in \mathbb{R}$  als eindeutige globale Lösung des AWP  $X' = AX, X(0) = I_d$ .

Die Differentialgleichung  $X' = AX$  geht durch Transformation  $Y = BX$  für invertierbares B über in  $Y' = BAB^{-1}Y$  mit "Fundamentalmatrix"  $e^{tBAB^{-1}} = Be^{tA}B^{-1}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$  für die Fundamentalmatrix von  $X' = AX$ , dass  $e^{tA} = B^{-1}e^{tBAB^{-1}}B$  gilt  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Dies erlaubt uns, den Operator A auf eine möglichst einfache Form zu bringen und man kann folgendes Theorem beweisen.

## 11.2 Theorem

Sei  $K = \mathbb{C}$ . Sei A eine stetige, lineare Abbildung (unsere Matrix), m-dimensional in  $\mathbb{C}^m$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen Eigenvektoren von A mit algebraischer Multiplizität  $m_1, \dots, m_k$ .

Dann existieren für jeden  $j = 1, \dots, k$  genau  $m_j$  linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung  $X' = AX$  der Form  $x_{j,s}(t) = e^{\lambda_j t} p_{j,s-1}(t)$ , wobei  $p_{j,s}(t)$  Polynome in t vom Grad  $\leq \nu$  sind.

Die Gesamtheit der Lösungen bildet ein sogenanntes "Fundamentalsystem" für unser Differentialgleichungssystem.

Ist A diagonalisierbar, dann ist das Fundamentalsystem  $\{e^{\lambda_j t} v_{j,s} | 1 \leq s \leq m_j, 1 \leq j \leq k\}$  mit linear unabhängigen Vektoren  $v_{j,s}$ .

### 11.3 Beispiel

Betrachte  $x' = x - y, y' = 4x - 3y$ . Also  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ;  $\det(A - \lambda I_d) = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$

$\lambda = 1$  ist der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Da  $A - \lambda I_d = A + I_d = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$  ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker(A + I_d)$   $\Rightarrow t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} e^{-t}$  ist eine Lösung.

Ansatz für die zweite Lösung gemäß Theorem  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} e^{-t}$ .

Es muss gelten  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - \alpha - \beta t \\ \delta - \gamma - \delta t \end{pmatrix} e^{-t} = A \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} e^{-t}$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \delta - \gamma \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -\beta t \\ -\delta t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta t \\ \delta t \end{pmatrix}$ .

Dies ist gerade die Eigenwert Gleichung  $\Rightarrow \beta = 1, \delta = 2$ . Damit erhalten wir  $1 - \alpha = \alpha - \gamma$  und  $2 - \gamma = 4\alpha - 3\gamma$  beziehungsweise  $1 + \gamma = 2\alpha, 2 + 2\gamma = 4\alpha \Rightarrow$  eindeutig  $\alpha = 0, \gamma = -1$

$\Rightarrow$  Die zweite linear unabhängige Lösung lautet  $\begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t}$ .

### 11.4 Klassifikation (von linearen Flüssen, glaube ich)

Betrachte den linearen Fluss  $e^{tA}X_0$  für die lineare stetige Abbildung  $A$  (unsere Matrix) in der Nähe des kritischen Punktes  $X = 0; X' = AX$  in  $\mathbb{R}^2$ . Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems hängen von den Eigenwerten und deren algebraischen Vielfachheiten der Matrix  $A$  ab. Sinnvollerweise wenden wir die Transformation  $Y = BX$  und  $Y' = BAB^{-1}Y$  bzw.  $X = B^{-1}Y$  für invertierbares  $B$  an.

1. Fall:  $A$  hat reelle, nicht verschwindende Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen.

Dann existiert ein  $B$  mit  $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda < 0 < \mu$ . Der von  $BAB^{-1}$  erzeugte Fluss  $e^{tBAB^{-1}}$  ist dann durch  $t \mapsto (e^{\lambda t}y_1 \quad e^{\mu t}y_2)$  gegeben.

Damit hat das Phasenportrait des Flusses  $e^{tA} = Be^{tA}B^{-1}$  in den  $Y$ -Koordinaten die Gestalt goodnotes 8. Der Nullpunkt ist ein Sattelpunkt. Eventuelle Darstellung in der  $X$ -Koordinate (evtl. andere Winkel etc., aber Richtungspfeile gleich, also Bewegung in Relation zueinander ist gleich): goodnotes 8.1

2. Fall: Alle Eigenwerte haben negativen Realteil.

Aus den Stabilitätskriterium (siehe unten) folgt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$  für alle Lösung unseres Differentialgleichungssystems. In diesem Fall nennt man den Nullpunkt eine Senke oder sagt, dass er asymptotisch stabil ist.

- (a) Falls die Eigenwerte reell sind:  $\lambda \leq \mu < 0$ .

i. Falls  $A$  auf die Form  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  gebracht werden kann, erhält man folgende Phasenportraits in den transformierten Koordinaten  $(e^{\lambda t}y_1 \quad e^{\mu t}y_2)$ : goodnotes 9

ii. Falls  $A$  auf die Form  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  gebracht werden kann (also  $\lambda = \mu$ ) mit  $\lambda < 0$ , dann lautet die Lösung der transformierten Gleichung  $y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}, y_2(t) = \beta e^{\lambda t}$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$y_1 = \xi, y_2 = \eta \rightarrow \Xi = \frac{\alpha}{\beta}\eta + \frac{1}{\lambda}\eta \log(\frac{\eta}{\beta})$ . Das Phasenportrait in den  $Y$ -Koordinaten sieht dann wie folgt aus: goodnotes 10. Hier heißt 0 ein (stabiler) Knoten.

(b) Falls die Eigenwerte komplexwertig sind:

$\lambda = \alpha + iw, \bar{\lambda} = \alpha - iw, w \neq 0$  sind die Eigenvektoren und es existiert eine Transformation, sodass  $(*) BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -w \\ w & \alpha \end{pmatrix}, w > 0$ . Einschub: Komplexifizierung:

$\mathbb{R}_{\mathbb{C}}^n$  von  $\mathbb{R}^n$ .  $\gamma := \alpha + i\beta = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ . Multiplikation  $\gamma z := (\alpha x - \beta y \quad \beta x + \alpha y)$  für  $z = x + iy$  bzw.  $(x, y)$ .

Jedes Element  $z = (x, y)$  kann eindeutig in der Form  $z = x + iy$  dargestellt werden und  $\mathbb{R}^n$  wird in  $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}^n$  mit  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  identifiziert.

$\mathbb{R}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ . Für eine stetige lineare Abbildung  $A$  (unsere Matrizen) wird die Komplexifizierung  $A_{\mathbb{C}}$  von  $A$  durch  $A_{\mathbb{C}}(Ax + iAy) := Ax + iAy$  definiert. Es gilt  $A_{\mathbb{C}}^n = (A^n)_{\mathbb{C}}$  und aus der Eigenwerts-Gleichung  $A_{\mathbb{C}}z = \lambda z$  folgt  $A_{\mathbb{C}}z = \bar{\lambda}z = \overline{A_{\mathbb{C}}z} = \overline{\lambda}z = \bar{\lambda}\bar{z} \Rightarrow (e^{tA})_{\mathbb{C}} = e^{tA_{\mathbb{C}}}$  mit  $\lambda$  ist auch  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A_{\mathbb{C}}$ .

3. Fall:

Einschub für oben: Theorem: Stabilitätskriterium

Gelten die Bezeichnungen von 11.4, dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \forall \lambda$  Eigenwerte von  $A$ . Das heißt alle Eigenvektoren von  $A$  liegen genau dann in der offenen negativen komplexen Halbebene, wenn für jede Lösung  $X$  von  $X' = AX$  gilt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ .

Hier fehlt ein Donnerstag

## 12 Orbits und Flüsse - nichtlineare autonome Differentialgleichungen

### 12.1

### 12.2

### 12.3

### 12.4

### 12.5 Typen von Lösungen bzw. Orbits

Gelte 12.1. Für jedes  $\psi \in \Omega$  hat  $X_\psi$  genau eine der folgenden Eigenschaften: .....

### 12.6 Definition: Fluss

Ein Fluss ist eine Familie von Abbildungen  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  mit  $F_0 = I_{d\Omega}$  und  $F_{t_2+t_1} = F_{t_2}F_{t_1} \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung:

1. Ein Fluss ist eine Gruppe. Insbesondere gilt  $(F_t)^{-1} = F_{-t} \forall t \in \mathbb{R}$ , d.h. jede Abbildung  $F_t$  ist bijektiv.
2. Man schreibt oft auch  $F(t, x)$  statt  $F_t(x)$  und konkret betrachtet man dann einen Fluss als Abbildung  $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$

## 12.7 Theorem: Glatter Fluss einer Differentialgleichung

(Ich benutze hier  $\psi$  statt dem Zeichen, das sie in der VL verwendet hat.)

Die Differentialgleichung in  $(\star) x'(t) = f(x(t))$  erzeugt einen Fluss via  $F_t(\psi) := x_\psi(t) \forall t \in \mathbb{R}, \psi \in \Omega$ . Dieser Fluss ist, als Abbildung von  $\mathbb{R} \times \Omega$  nach  $\Omega$  betrachtet, stetig differenzierbar. Damit ist auch  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  stetig differenzierbar  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Irgendwann Beweis, dazu brauchen wir:

**Einschub(01.12.25): Irgendwann ist jetzt!**

$$F_0(\psi) = F(0, \psi) 0x_\psi(0) = \psi.$$

Wegen der Shiftinvarianz (siehe unterhalb) gilt:

$$(F_{t_2} \circ F_{t_1})(\psi) = F(t_2, (F(t_1, \psi))) = x_{F(t_1, \psi)}(t_2) = x_{x_\psi(t_1)}(t_2) = x_\psi(t_2 + t_1) = F(t_2 + t_1, \psi) = F_{t_2+t_1}(\psi)$$

Dies definiert einen Fluss. Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \psi) = f(F(t, \psi)) \text{ und der Stetigkeit von } F \text{ in } t \text{ und in } \psi.$$

Denn  $F(t_2, \psi) - F(t_1, \psi) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_\psi(s)) ds \rightarrow 0$  für  $t_2 \rightarrow t_1$ .

Wir setzen voraus, dass Stetigkeit in  $\psi$  gegeben ist. Dies kann man beweisen, Z.B. "Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten" bei Differentialgleichungen.

Seien nun  $\psi \in \Omega$  und  $T > 0$  beliebig, aber fest. Sei  $t \in [0, T]$ . Wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten existiert eine kompakte Menge  $K \subset \Omega$  so, dass  $x_\psi(t), x_{\psi+h\mu}(t) \in K \forall \mu \in \mathbb{R}^d$  mit  $|\mu| = 1$ , für alle  $t \in [0, T]$  und alle genügend kleinen  $h$ .

Definiere  $y_{h,\mu}(t) := \frac{F(t, \psi+h\mu) - F(t, \psi)}{h} = \frac{x_{\psi+h\mu}(t) - x_\psi(t)}{h}$ . Wir wollen Konvergenz für  $h \rightarrow 0$  zeigen.

Es gilt  $y'_{h,\mu}(t) = \frac{f(x_{\psi+h\mu}(t)) - f(x_\psi(t))}{h} = \frac{f(x_\psi(t) + hy_{h,\mu}(t)) - f(x_\psi(t))}{h} \leq L|y_{h,\mu}(t)|$  mit  $L = L(\psi, T, K)$ .

$\Rightarrow |y_{h,\mu}|(t) \leq |y_{h,\mu}|(0) + \int_0^t L|y_{h,\mu}(s)| ds$  Gronwall  $\Rightarrow |y_{h,\mu}(t)| \leq \exp(Lt)|\mu| \leq \exp(LT)|\mu|$ . Schranke ist unabhängig von  $h$ .

Definiere nun  $y_{0,\mu}$  als Lösung des linearen, jedoch nicht autonomen AWP

$$y' = Df(x_\psi(t))y, y(0) = \mu (\star)$$

Also  $y_{0,\mu}(t) = \phi(t)\mu$ , wobei  $\phi(t)$  die Fundamentalmatrix von  $(\star)$  ist ( $\phi = \phi(x_\psi, \psi)$ ).

Damals:  $x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\psi$ .

Es gilt  $y_{h,\mu}(t) - y_{0,\mu}(t) = \int_0^t Df(x_\psi(s))(y_{h,\mu}(s) - y_{0,\mu}(s)) + R_{h,\mu}(s) ds$ , wobei das Restglied

$$R_{h,\mu}(t) := \frac{f(x_{\psi+h\mu}(t)) - f(x_\psi(t))}{h} - Df(x_\psi(t))y_{h,\mu}(t)$$

Gronwall liefert dann  $|y_{h,\mu}(t) - y_{0,\mu}(t)| \leq a_{h,\mu} \exp(\int_0^t |Df(x_\psi(s))| ds)$ , wobei  $a_{h,\mu} := \int_0^T |R_{h,\mu}(s)| ds$  ist.

Da die Funktionen  $y_{h,\mu}$  gleichmäßig in  $h$  beschränkt sind, gilt  $|R_{h,\mu}(t)| \leq C \forall 0 \leq t \leq T, |\mu| \leq 1$  und alle  $h$  klein genug.

Nach Taylor gilt Restgliedkonvergenz  $\lim R_{h,\mu}(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$  und alle  $\mu$ .

$$\Rightarrow a_{h,\mu} \rightarrow 0, y_{h,\mu}(t) \rightarrow y_{0,\mu}(t) = \phi(t)\mu \forall 0 \leq t \leq T$$

$\rightarrow$  Der Fluss besitzt im Punkt  $(t, \psi)$  alle Richtungsableitungen in Richtung  $\mu \Rightarrow$  alle partiellen Ableitungen existieren  $\frac{\partial}{\partial \psi_i} F(t, \psi), i = 1, \dots, d$ . Die Stetigkeit der Richtungsableitungen bezüglich  $t$  und  $\psi$  folgt, da  $x_\psi$  stetig in  $t$  und  $\psi$  ist und da  $\phi(t)\mu$  stetig von  $t$  und  $\mu$  abhängt.

**Ende Einschub**

**Lemma: Shiftinvarianz von Lösungen autonomer Differentialgleichungen**

Seien  $t_0, \tilde{t}_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  eine Lösung von  $(\star)$  mit  $x(t_0) = \psi$ .

Dann ist auch  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  mit  $\tilde{x}(t) = x(t - \tilde{t}_0 + t_0)$  eine Lösung von  $(\star)$  mit  $\tilde{x}(\tilde{t}_0) = \psi$ .

Insbesondere gilt  $x(t) = x_\psi(t - t_0)$  und  $\tilde{x}(t) = x_\psi(t - \tilde{t}_0)$ .

**Definition**

Für  $x' = A(t)x$  heißt eine Basis  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  des Lösungsraumes Fundamentalsys-

tem. Die Matrixwertige Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \{d \times d \text{ Matrizen}\}$  mit  $\phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(d)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_d^{(1)}(t) & \dots & x_d^{(d)}(t) \end{pmatrix}$

heißt Fundamentalmatrix und  $\det(\phi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Wronski-Determinante.

Es gilt  $\phi' = A(t)\phi$  und  $x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\psi$  löst  $x' = A(t)x$  mit  $x(t_0) = \psi$ .

Beispiel:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ (harmonischer Oszillator).}$$

Linear unabhängige Lösungen sind  $x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$  und  $x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$  und  $\det(\phi(t)) = 1 \forall t \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung:

- Da  $(F_t)^{-1} = F_{-t}$ , ist jede Abbildung  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus.
- Für  $f(x) = Ax$  ist  $F_t(\psi) = \exp(tA)\psi$ .

Das Theorem von Poincare-Deudixon:

## 12.8 Annahmen

Sei  $f$  stetig diffbar und auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert. Existiere für alle  $\psi \in \mathbb{R}$  die Lösung  $x_\psi \forall t \in \mathbb{R}$  für unsere Differentialgleichung .

## 12.9 Definition

Gelte 12.8. Für jedes  $\psi \in \mathbb{R}^2$  heißen  $\alpha_\psi := \{\psi \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es existiert eine Folge } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty, x_\psi(t_n) \rightarrow \psi\}$ ,  $\omega_\psi := \{\psi \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es existiert eine Folge } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow +\infty, x_\psi(t_n) \rightarrow \psi\}$  die  $\alpha$ -Limes- und die  $\omega$ -Limesmenge von  $\psi$ .

## 12.10 Lemma

Gelte 12.8. Für jedes  $\psi$  ist  $\omega_\psi$  abgeschlossen und invariant unter der Dynamik, d.h.  $T_\psi \subset \omega_\psi \forall \psi \in \omega_\psi$  und damit  $x_\psi(t) \in \omega_\psi \forall \psi \in \omega_\psi$ . Analog für  $\alpha_\psi$ .

## 12.11 Theorem: Poincare-Beudixson

Gelte 12.8. Sei  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_\psi(t)| < \infty$ , dann enthält  $\omega_\psi$  entweder einen Fixpunkt oder ist ein echt-periodischer Orbit.

## 12.12 Folgerung

Gelte 12.8. Sei  $\Sigma \in \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet. Sei  $\bar{\Sigma}$  vorwärts-invariant unter der Dynamik, d.h.  $x_\psi(t) \in \bar{\Sigma} \forall \psi \in \bar{\Sigma}, t \geq 0$ . Dann enthält  $\bar{\Sigma}$  einen stationären Punkt oder einen echt-periodischen Orbit.

## 12.13 Lemma: Beudixon-kriterium

gelte 12.8. Eine einfach zusammenhängende Menge  $\Sigma \in \mathbb{R}^2$  kann nur dann einen echt-periodischen Orbit enthalten, wenn  $\operatorname{div} f$  mindestens eine Nullstelle in  $\Sigma$  besitzt.

## 12.14 Beispiel

Betrachte  $x' = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^3 \end{pmatrix}$ . Dann  $\operatorname{div} f(x_1, x_2) = -1 - 3x_2^2$ . Also existiert keine Nullstelle (weil  $\operatorname{div} f$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  besitzt?).

### Stabilität von stationären Punkten

Wir betrachten stationäre Orbits von  $x' = f(x)$ , d.h. konstante Lösungen  $x_{\psi^*}(t) = \psi^* \forall t$ . Wann sind diese stabil unter kleinen Störungen?

Wir wissen, dass  $T_{\psi^*} = \{\psi^*\}$  genau dann, wenn  $\psi^*$  kritischer Punkt des Vektorfeldes  $f$  ist, d.h. genau dann, wenn  $f(\psi^*) = 0$  ist.

## 12.15 Definition: Lyapunov-Stabilität

Gelte 12.8. Ein stationärer Punkt  $\psi^* \in \Omega$  (bzw. der Orbit  $T_{\psi^*}$ , bzw. die stationäre Lösung  $x_{\psi^*}$ ) heißt

- Lyapunov-stabil (oder einfach stabil), falls  $\forall \epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für  $|\psi - \psi^*| \leq \delta \Rightarrow |x_\psi(t) - \psi^*| \leq \epsilon \forall t \geq 0$ .
- asymptotisch stabil, falls Stabilität gilt und ein  $\tilde{\delta}$  existiert, sodass für  $|\psi - \psi^*| \leq \tilde{\delta} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_\psi(t) = \psi^*$ . Ein nicht-stabiler stationärer Punkt heißt instabil.

## 12.16 Linearisierte Stabilität

Gelte 12.8. Sei  $\psi^*$  ein stationärer Punkt und haben alle (komplexen) Eigenwerte (also auch reelle) der Matrix  $A := Df(\psi^*)$  alle negativen Realteil haben, d.h.  $-\mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \text{Spektrum } A\} < 0$ .

Dann existieren für jedes  $0 < \alpha < \mu$  Konstanten  $C > 0, \delta > 0$ , sodass  $|x_\psi(t) - \psi^*| \leq C \exp(-\alpha t) |\psi - \psi^*| \forall t$  und alle  $\psi$  mit  $|\psi - \psi^*| \leq \delta \Rightarrow \psi^*$  ist asymptotisch stabil.

## 12.17 Theorem: Grobmann und Hartmann

Gelte 12.8. Sei der stationäre Punkt  $\psi^*$  hyperbolisch, d.h. alle (komplexen) Eigenwerte von  $A := Df(\psi^*)$  haben nicht-verschwindenden Realteil. Dann existieren zwei Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $\psi^*$  sowie ein Homöomorphismus  $H : U \rightarrow V$ , sodass  $H(U \cap V) = \square_{H(\psi)} \cap V$  gilt, wobei  $\square_\psi$  die Orbits der linearisierten Gleichung  $y' = Df(\psi^*)(y - \psi^*)$  bezeichnet.

Das heißt unter der Hyperbolitätsannahme beschreibt der Fluss der linearisierten Gleichung lokal den Fluss der nicht-linearen Gleichung.

## 12.18 Beispiele

1.  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ -x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \end{pmatrix}$ . Stationäre Punkte sind  $\mu^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \nu^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .  
 $A := Df(\mu^*) = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 & -1 - 4x_2 \end{pmatrix} |_{\mu^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$  Eigenwerte 0 und -1.  
 $B := Df(\nu^*) = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 2x_1 & -1 - 4x_2 \end{pmatrix} |_{\nu^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  Eigenwerte  $\frac{1}{2}$  und 1.

2. Betrachte  $x' = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$ . Stationäre Punkte:  $\mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nu^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Nun Linearisieren wir, indem wir die Jacobi-Matrix bestimmen und an  $\mu^*$  und  $\nu^*$  auswerten:

$$A := Df(\mu^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} |_{\mu^*} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt  $\mu^*$  betrachten wir also das lineare System  $x' = Ax$

$\rightarrow$  Eigenwerte(über char. Polynom  $\det(A - \lambda I_d)$ ):  $(-1 - \lambda)(-2 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} + -\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} + -i\sqrt{7} \Rightarrow$  stabiler Wirbel(auch wahr für das nichtlineare System).

$$B := Df(\nu^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt  $\nu^*$  betrachten wir also das lineare System  $x' = Bx$

$\rightarrow$  Eigenwerte(über char. Polynom  $\det(B - \lambda I_d)$ ):  $(-1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} + -\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$  Sattelpunkt. goodnotes 11

Wir können immer annehmen  $\psi^* = 0$ , denn:

Für  $x' = Ax$  klar.

Wenn  $x' = f(x), f(\psi^*) = 0$ . Setze  $y = x - \psi^* \Rightarrow y' = x' = f(x) = f(y + \psi^*)$ .

$f(\psi^* + y) = f(\psi^*) = f(\psi^* + y)$ . Setze  $g(y) = f(\psi^* + y), g'(0) = \frac{df(\psi^*+y)}{dy}|_{y=0} = f'(\psi^*)$ .

Die Systeme  $y' = g(y), y = 0, y' = g(0)y$

$x' = f(x), x = \psi^*, x' = f'(\psi^*)x$  sind äquivalent.

## 12.19 Definition: Nichtlineare Stabilitätskonzepte

Sei  $\psi^*$  ein stationärer Punkt einer DGL. Eine Funktion  $L \in C^1(\Omega), L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lyapunov-Funktion von  $\psi^*$ , wenn:

1.  $L(\psi^*) < L(x) \forall x \in \Omega \setminus \{\psi^*\}$
2.  $L'(x) = DL(x)f(x) \leq 0 \forall x \in \Omega \setminus \{\psi^*\}$   
Falls  $L'(x) < 0$ , heißt  $L$  strikte Lyapunovfunktion.

## 12.20 Theorem

Jeder stationäre Punkt  $\psi^*$ , für den es eine (strikte) Lyapunov-funktion existiert, ist (asymptotisch) stabil.

## 12.21 Beispiel: Differentialgleichung zweiter Ordnung

- $y'' + g(y)y' + y = 0, g \geq 0$ , stetig

Transformiere in ein System erster Ordnung:  $x_1 = y, x_2 = y'$

$$x'_2 + g(x_1)x_2 + x_1 = 0 \Rightarrow x'_2 = -g(x_1)x_2 - x_1$$

$$x'_1 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g(x_1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} := f(x_1, x_2)$$

Finde stationäre Punkte:

$$x_2 = 0, g(x_1)x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Also ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  der einzige stationäre Punkt.

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0 = L(0, 0)$$

$$L(x_1, x_2) > L(0, 0) \text{ für } (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$\begin{aligned}
L'(x_1, x_2) &= \nabla L(x'_1, x'_2) = (2x_1, 2x_2)(x_2, -g(x_1)x_2 - x_1) \\
&= 2x_1x_2 - 2x_2g(x_1)x_2 - 2x_1x_2 = -2x_2^2g(x_1) \leq 0 \\
\text{Also ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\text{ stabil.}
\end{aligned}$$

- Volterra-Lotka (x: Beute, y: Jäger):

$$x'(t) = ax(t) - \alpha x(t)y(t)$$

$$y'(t) = -cy(t) + \gamma x(t)y(t)$$

$$ax - \alpha xy = 0 \Rightarrow x(a - \alpha y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = \frac{a}{\alpha}$$

$$-cy + \gamma xy = 0 \Rightarrow y(-c + \gamma x) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = \frac{c}{\gamma}$$

$$\Rightarrow (0, 0), (\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax - \alpha xy \\ -cy + \gamma xy \end{pmatrix} \Rightarrow Df = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{pmatrix}$$

$$\text{Bei } (0, 0): Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte: } a, -c. \Rightarrow \text{Sattelpunkt.}$$

$$\text{Bei } (\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}): Df(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \frac{c}{\gamma} \\ \gamma \frac{a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte: } \sqrt{\alpha c}i, -\sqrt{\alpha c}i. \text{ Man kann nicht auf das nichtlineare System schließen.}$$

$$L(x, y) = \gamma x - c \cdot \log(x) + \alpha y - a \cdot \log(y) > L(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$$

$$f(x) = \gamma x - c \cdot \log(x) \Rightarrow f'(x) = \gamma - \frac{c}{x} \text{ Minimum bei } x = \frac{c}{\gamma}$$

$$g(y) = \alpha y - a \cdot \log(y) \Rightarrow g'(y) = \alpha - \frac{a}{y} \text{ Minimum bei } y = \frac{a}{\alpha}$$

$$\nabla L \cdot f \leq 0$$

$$\frac{dL(x(t), y(t))}{dt} \leq 0$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} \gamma - \frac{c}{x} \\ \alpha - \frac{a}{y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla L \cdot f = (\gamma - \frac{c}{x}, \alpha - \frac{a}{y}) \cdot (ax - \alpha xy, -cy + \gamma xy) = \gamma ax - \gamma axy - \frac{c}{x} ax + \frac{c}{x} axy - cy\alpha + ??wtf??? = 0$$

Lyapunov-stabil

Erinnerung: In 11.1 war das Räuber-Beute-Modell  $x' = (\alpha - \beta y)x, y' = (-\gamma + \delta x)y$ .

- $u_t = u_{xx} + u(1 - u)$

$$u(t, x) = U(x - ct)$$

goodnotes 12

$$u_t = -cU'(x - ct), u_{xx} = U''(x - ct)$$

$$-cU' = U'' + U(1 - U)$$

$$-cU' = U'' + U(1 - U), U(-\infty) = 1, U(\infty) = 0$$

Mit der Zeit verschieben sich die Wellen.

Durch Transformation:  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} V \\ -cV - U(1 - U) \end{pmatrix}$ , stationäre Punkte  $(0, 0), (1, 0)$ .

$$Df(U, V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & -c \end{pmatrix}$$

$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte über char. Polynom: } \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$ , beide negativ. Stabiler Knoten für  $c \geq 2$ , stabiler Wirbel für  $c < 2$ .

$$Df(U, V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & -c \end{pmatrix}$$

$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte über char. Polynom: } \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}$ , einer negativ, einer positiv, beide reell. Sattelpunkt.

01.12.25:

## 12.22 Definition: Erhaltungsgröße

(Anderer Name für 12.19)

Gelte 12.8.  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar heißt Erhaltungsgröße (oder erstes Integral) unserer Differentialgleichung, falls  $d_f E(x) := DE(x)f(x) = 0 \forall x \in \Omega$  ist.

## 12.23 Theorem

(Anderer Name für 12.20)

Gelte 12.8. Sei  $E$  eine zweimal stetig differenzierbare Erhaltungsgröße und  $\xi_*$  ein striktes lokales Minimum/Maximum von  $E$ . Dann ist  $\xi_*$  ein stabiler stationärer Punkt.

## 12.24 Bezug auf Kapitel 10: SIR-Modell

$$\begin{aligned} s' &= -\alpha i s, i' = \alpha i s - \beta i, r' = \beta i \\ \underbrace{(s + i + r)'}_{\text{Invariante}} &= 0, \underbrace{(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta}s - \frac{\alpha}{\beta}i)'}_{\text{Invariante}} = 0 \\ \beta \log(s(\infty)) - \alpha s(\infty) - \alpha i(\infty) &= \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0) \end{aligned}$$

Wie würde man unter der Voraussetzung, dass dieses Modell die Realität gut approximiert, in das epidemische Geschehen eingreifen?

Sei  $i(0)$  klein und  $s(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ . Ziel: Senkung der Infektionsrate  $\alpha$  auf  $\tilde{\alpha}$  durch Maßnahmen.

Frage: Wie weit sollte man  $\alpha$  senken? Final ist ohnehin  $s(\infty) \leq \frac{\beta}{\alpha}$ . Man möchte  $s(\infty) = \frac{\beta}{\alpha}$  erreichen, aber für das  $\tilde{\alpha}$ -Modell.

$$\begin{aligned} \beta \log(s(\infty)) - \tilde{\alpha} s(\infty) - \underbrace{\tilde{\alpha} i(\infty)}_{=0} &= \beta \log(s(0)) - \tilde{\alpha} s(0) - \tilde{\alpha} i(0) \\ \beta \log \frac{\beta}{\alpha} - \tilde{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} &= \beta \log s(0) - \tilde{\alpha}(s(0) + i(0)) \text{ bzw. } \alpha \beta (\log \beta - \log \alpha - \log s(0)) = \tilde{\alpha} (\beta - \alpha(s(0) + i(0))) \\ \Rightarrow \tilde{\alpha} &= \frac{\alpha \beta (\log \beta - \log \alpha - \log s(0))}{\beta - \alpha(s(0) + i(0))} \text{ wäre in diesem Sinne optimal.} \end{aligned}$$

# 13 Numerische Methoden für Differentialgleichungen

04.12.25:

Orientierung an Buch: Rolf-Rannackv, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

## 13.1

Betrachte  $u : I := [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u'(t) = f(t, u(t))$ ,  $t \geq 0$  mit  $u(t_0) = u_0$ .

Dazu gehört die Integralgleichung (/Fixpunktgleichung):

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds \text{ für } t \in I$$

## 13.2 Fixpunktiteration

Gelte 13.1. Sei  $u^0 \equiv u_0$  der Startwert. Für  $k \geq 1$  definiere:

$$u^k(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u^{k-1}(s)) ds$$

Hier ist  $u^i$  keine Potenz, sondern  $i$  ist ein Index.

Die Konvergenz dieser Iteration wird durch den Banachschen Fixpunktsatz sichergestellt, falls die Abbildung

$g(v)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$  eine Kontraktion im Banachraum  $C(I)$  ist. Falls  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig ist, dann gilt:

$\max_I |g(v) - g(w)| \leq \int_{t_0}^t \max_I |f(s, v) - f(s, w)| ds \leq L \max_I |v - w|$  und wir haben eine Kontraktion für  $T < \frac{1}{L}$ .

### 13.3 Methode der Taylorentwickelung

Gelte 13.1. Sei die Lösung  $u$  des Anfangswertproblems analytisch.

Dann lässt sich  $u(t_0 + T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} u^{(k)}(t_0) = u_0 + T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}(t_0, u_0)$  in eine Taylorreihe entwickeln, wobei  $f^{(k)}(t, x)$  die k-te totale Zeitableitung von  $f(t, u(t))$  ist.

Also ist  $f^{(1)}(t, x) = (f'_t + f'_x f)(t, x)$ . (Da  $x$  Variable ist, kann man z.B. auch  $u$  statt  $x$  schreiben.) Durch Abschneiden der Reihe bei  $k = m$  erhält man ein numerisches Verfahren.

Dieses Verfahren ist meist „zu teuer“ nicht praktikabel.

### 13.4 Finite Differenzen

Gelte 13.1. Betrachte das Punktgitter (Menge an Zeitpunkten) des Intervalls  $I$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = t_0 + T$  mit Gitterweiten  $h_n = t_n - t_{n-1}$ .

Berechne  $y_n = y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ ,  $y_0 = u_0$  (Eulersche Polygonzugmethode oder explizites Euler-Schema)

Hierdurch wird ein approximierender Polygonzug erzeugt:

$$y(t) := y_{n-1} + (t - t_{n-1}) f(t_{n-1}, y_{n-1}), t \in [t_{n-1}, t_n]$$

(Hier ist glaube ich  $y_n = y(t_n)$ )

Der neue Wert  $y_n$  wird aus dem alten Wert  $y_{n-1}$  berechnet durch Auswerten von  $f(t_{n-1}, y_{n-1})$ . Dies ist ein explizites Verfahren. Das analoge implizite Verfahren (implizites Eulerschema) erhält man durch  $y_n - h_n f(t_n, y_n) = y_{n-1}$ .

Hier muss für die Berechnung von  $y_n$  aus  $y_{n-1}$  ein (im Allgemeinen) nicht lineares Gleichungssystem gelöst werden. Für alle Verfahren sind Konvergenzabschätzungen nötig. Für Euler kann man Konvergenzabschätzungen der Form  $\max_{t_n \in I} |y_n - u(t_n)| \leq c(T, u)h$ , wobei  $h := \max_n h_n$ ,  $c$  ist eine Konstante!

Implizite verfahren sind sehr aufwändig und auch nur in speziellen Situationen (steife Probleme) relevant, wenn explizite Verfahren aus Gründen der numerischen Stabilität nicht verwendet werden können.

### 13.5 Galerkin Methode

Gelte 13.1. Wir formulieren das AWP "variationell".

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer sogenannten Testfunktion  $\phi$   $\int_I u'(t)\phi(t)ds = \int_I f(t, u(t))\phi(t)dt$ . Dies kann man sinnvoll für jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $u$  formulieren. Sei  $V$  der Vektorraum all dieser Funktionen. Das linke Integral kann also auch stückweise sein, d.h. eine Summe von Teilintegralen. Die Galerkin Methode bestimmt eine Näherungslösung  $u_h$  in einem Teilraum  $V_h \subset V$ , dem sogenannten Ansatzraum mit dem Startwert  $u_h(t_0) = u_0$  und

$\int_I u'_h(t)\phi_h(t)dt = \int_I f(t, u_h(t))\phi_h(t)dt$  für ein beliebiges  $\phi_h \in W_h$ , wobei  $W_h$  ein diskreter Testfunktionenraum ist, in der Regel verschieden von  $V_h$ .

**Beispiel:** Zerlege  $I$  gemäß  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = t_0 + T$ .

Setze  $V_h := \{v_h : I \rightarrow \mathbb{R} | v_h \in C(I), v_h|_{(t_{n-1}, t_n]} \in P_1 \text{ für } n = 1, \dots, N\}$ , wobei  $P_1$  die Menge der Polynome ersten Grades ist.

Setze  $W_h := \{\phi_h : T \rightarrow \mathbb{R} | \phi_h|_{(t_{n-1}, t_n]} \in P_0 \text{ für } n = 1, \dots, N\}$ .

Relevant wird am Montag:  $u_h(t_n) - u_h(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} u'_h(t)dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, u_h(t))dt$   
08.12.25:

Da die Testfunktionen nur stückweise stetig zu sein brächen, kann die Bestimmungsgleichung

(die hier drüber) auf jedes Teilintervall eingeschränkt werden.

Das Galerkin-Verfahren ist, wie das Differenzenverfahren, ein sogenanntes "Zeitschrittverfahren" (besteht aus einzelnen Zeitschritten). Werte das rechte Integral mit Hilfe der Trapezregel aus:  
 $y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}h_n(f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1}))$  für  $y_n := u_h(t_n)$ .

Dies ist ein implizites Differenzenverfahren. Man kann zeigen, dass die Konvergenzabschätzung  $\max_{t \in I} |u_h(t) - u(t)| \leq c(T, u)h^2$  gilt für  $h := \max_n h_n$ .

Wir erhalten also eine höhere Genauigkeit als beim impliziten Eulerverfahren.

## 13.6 Verfahrensanalyse

Wie kann man die Effizienz/Güte verschiedener Lösungsverfahren beurteilen?

Dazu gehören Fragen der Konvergenz, die Konvergenzordnung, der numerischen Stabilität, einer zuverlässigen Kontrolle des Approximationsfehlers und eine effektive Schrittweitensteuerung.

## 13.7 Analyse der Eulerschen Polygonzugmethode

Betrachte das Anfangswertproblem  $u'(t) = f(t, u(t)), t \in I = [t_0, t_0 + T], u(t_0) = u_0$ .

Sei  $f(t, x)$  stetig auf  $I \times \mathbb{R}^d$  und genüge einer globalen Lipschitzbedingung, sodass  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f \|x - y\|$  für  $(t, x), (t, y) \in I \times \mathbb{R}^d$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $u(t)$  für unser Anfangswertproblem  $\forall t \in I$  und

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq L_f \|x\| + \|f(t, 0)\|.$$

Sei diese Lösung hinreichend glatt.

Wie zuvor wählen wir eine Folge von diskreten Zeitpunkten  $t_0 < \dots < t_n < \dots t_N = t_0 + T$ .

Definiere  $I_n := [t_{n-1}, t_n]$ ,  $h_n := t_n - t_{n-1}$ ,  $h := \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ .

Sei  $y_0^h \in \mathbb{R}^d$  der Startwert und betrachte die rekursive Vorschrift  $y_n^h = y_{n-1}^h + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Wir schreiben dies in Form einer Differenzengleichung:

$(L_h y^h)_n = 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  mit dem Differenzenoperator  $(L_h y^h)_n := h_n^{-1}(y_n^h - y_{n-1}^h) - f(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$  für die Gitterfunktion  $y^h = \{y_n^h\}_{n=1, \dots, N}$ .

Man kann zeigen, dass falls  $y_0^h \rightarrow u_0$  konvergiert für  $h \rightarrow 0$ , dann  $\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n^h - u(t_n)\| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ , wegen der Eindeutigkeit der Lösung  $u$ .

**Konvergenzgeschwindigkeit:** Definiere den Abschneidefehler

$\tau_n^h := (L_h u^h)_n = h_n^{-1}(u_n^h - u_{n-1}^h) - f(t_{n-1}, u_{n-1}^h)$  für die Gitterfunktion

$u^h := (u_n^h := u(t_n))_{0 \leq n \leq N}$ . Da  $u'(t) = f(t, u)$  ist, gilt  $\tau_n^h = h_n^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} u'(t) dt - u'(t_{n-1})$  <sup>Produktregel</sup>  
 $= h_n^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - t) u''(t) dt$   
 $\Rightarrow \|\tau_n^h\| \leq \frac{1}{2} h_n \max_{t \in I_n} \|u''(t)\| \quad (\star)$ .

Dies ist eine Diskretisierung erster Ordnung.

Falls keine Missverständnisse entstehen, schreiben wir im Folgenden auch  $y_n$  für  $y_n^h$  und  $\tau_n = \tau_n^h$  (für  $u$  auch). Dann gilt  $u_n = u_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, u_{n-1}) + h_n \tau_n$ . Die Abschätzung des globalen Diskretisierungsfehlers  $e_n = y_n - u_n$  erfolgt über einen sogenannten Stabilitätsatz für Differenzenverfahren.

$e_n = e_{n-1} + h_n(f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})) - h_n \tau_n$ . Da  $f(t, x)$  Lipschitz-stetig ist, gilt:

$\|e_n\| \leq \|e_{n-1}\| + h_n L_f \|e_{n-1}\| + h_n \|\tau_n\|$ . Durch sukzessive Anwendung dieser Ungleichung erhalten wir:  $\|e_n\| \leq \|e_0\| + L_f \sum_{\nu=0}^{n-1} h_{\nu+1} \|e_\nu\| + \sum_{\nu}^n h_\nu \|\tau_\nu\|$ .

Nun benötigen wir den

**Hilfsatz: Diskretes Lemma von Gronwall**

Seien  $(w_n)_{n \geq 0}, (a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$  Folgen nicht-negativer Zahlen mit  $w_0 \leq b_0$  und

$$w_n \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu w_\nu + b_n, n \geq 1.$$

Falls  $(b_n)_{n \geq 0}$  monoton steigend ist, dann gilt  $w_n \leq \exp(\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu) b_n, n \geq 1$ .

Mit diesem diskreten Lemma von Gronwall folgern wir, dass:

$$\|e_n\| \leq e^{L_f(t-t_0)} (\|e_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\tau_\nu\|), n \geq 1 \text{ bzw.}$$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\| \leq e^{L_f T} (\|e_0\| + T \max_{1 \leq n \leq N} \|\tau_n\|).$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\| \leq e^{L_f T} (\|e_0\| + \frac{1}{2} T \max_{1 \leq n \leq N} \{h_n \max_{t \in I_n} \|u''(t)\|\}).$$

Damit ist die globale Konvergenzordnung mindestens gleich der lokalen Konsistenzordnung (wird später erklärt).

Wegen ihrer geringen Genauigkeit hat die Eulersche Polygonzugmethode in der Praxis keine Bedeutung.

## 13.8 Allgemeine Einschrittmethoden

Für Differenzenformeln höherer Ordnung betrachten wir die Taylorentwicklung.

Sei  $d = 1$ . Dann ist  $u(t) = \sum_{r=0}^R \frac{h^r}{r!} u^{(r)}(t-h) + \frac{h^{R+1}}{(R+1)!} u^{(R+1)}(\xi)$  für  $\xi \in [t-h, t]$ .

11.12.25:

Da  $u' = f(t, u)$  gilt, dass  $u^{(r)} = (\frac{d}{t})^{(r-1)} f(t, u(t)) =: f^{(r-1)}(t, u(t))$ . Damit lautet das "R-stufige Taylor-Verfahren" dann

$y_n = y_{n-1} + h \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t_{n-1}, y_{n-1}), n \geq 1$ . Nun schreiben wir die allgemeine Formel für ein "Einschrittverfahren" wie folgt:

$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n, t_{n-1}, y_n, y_{n-1})$  bzw.  $(L_h y)_n = h_n^{-1} (y_n - y_{n-1}) - F(h_n, t_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = 0$  ( $\star$ ) mit der sogenannten Verfahrensfunktion  $F(h, t, y, x) := \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t, x)$ .

Da die Verfahrensfunktion nur von  $y_{n-1}$ , also der unmittelbar vorausgehenden Näherung, abhängt, heißt diese Methode explizit:  $F = F(h_n, t_{n-1}, y_{n-1})$  (also nicht von  $y_n$  abhängig).

Der sogenannte Abschneidefehler ist definiert durch

$$\tau_n := (L_h u)_n = h_n^{-1} (u_n - u_{n-1}) - F(h_n, t_{n-1}, u_n, u_{n-1})$$

## 13.9 Definition: Konsistenz

Die Einschrittmetode ( $\star$ ) heißt konsistent mit unserem AWP bzw. konsistent mit Konsistenzordnung  $m$ , falls  $\max_{t_n \in I} \|\tau_n\| \rightarrow 0$  bzw.  $\max_{t_n \in I} \|\tau_n\| = O(h^m)$  für  $h \rightarrow 0$ .

Die R-stufige Taylorformel für skalare AWP hat damit die Konsistenzordnung  $m = R$ .

Sei  $f_t := \frac{\partial f}{\partial t}$  und  $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ . Totale Ableitung  $f^{(1)}(t, x) = (f_t + f_x f)(t, x)$ , wobei  $f = x'(t)$ .

$f^{(2)}(t, x) = (f_{tt} + 2f_{tx}f + f_x f_t + f_{xx}f^2 + f_x^2 f)$ . (soll in der Übungsaufgabe begründet werden)

Dies kann in der Praxis sehr aufwendig sein. Ersetze die Ableitungen  $f^{(r-1)}$  durch Differenzenquotienten.

z.B. für R=2  $f^{(1)}(t, u(t)) \sim h^{-1}(f(t+h, u(t+h)) - f(t, u(t))) \sim h^{-1}(f(t+h, u(t)) + hf(t, u(t))) - f(t, u(t)))$

$$\Rightarrow y_n = y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{2} h_n (f(t_n, y_{n-1}) + h_m f(t_{n-1}, y_{n-1})) - f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

$$= y_{n-1} + h_n (\frac{1}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{2} f(t_n, y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1})))$$

Wenn man die Restglieder hier mitverfolgt, dann ergibt sich die Konsistenzordnung  $m = 2$ .

Damit haben wir allgemein die sogenannten (expliziten) Runge-Kutta-Verfahren der Form

$f(h, t, x) = \sum_{r=1}^R c_r k_r(h, t, x)$  mit  $k_1 = f(t, x), k_r = f(t + ha_r, x + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s), r = 2, \dots, R$  erhalten, mit geeignet gewählten Konstanten  $a_r, c_r, b_{rs}$ . Diese Konstanten bestimmt man so, dass für möglichst großes  $m$  (idealerweise  $m = R$ ) gilt:

$$\sum_{r=1}^R c_r k_r(h, t, u(t)) = \sum_{r=1}^m \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t, u(t)) + O(h^m).$$

Konstruktionsgemäß ist damit die Konsistenzordnung der entsprechenden Runge-Kutta-Formel genau  $m$ .

### 13.10 Beispiel (für Einschrittverfahren): Runge-Kutta-Methode der Stufen $R = 1, 2, 3, 4$ :

- R=1: Eulersche Polygonzugmethode

- R=2: Durch Taylorentwicklung und Koeffizientenvergleich ( $f = f(t, u(t))$ ,  $f_t = f_t(t, u)$  usw.) folgt:

$$\begin{aligned} c_1 f + c_2 f(t + ha_2, u + hb_{21}f) &= (c_1 + c_2)f + c_2 a_2 h f_t + c_2 b_{21} h f f_x + O(h^2) \\ &= f + \frac{1}{2}h(f_t + f_x f) + O(h^2) \\ \Rightarrow c_1 + c_2 &= 1 \text{ und } c_2 a_2 = \frac{1}{2} = c_2 b_{21}. \text{ Mögliche Lösungen sind z.B.:} \end{aligned}$$

–  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  und  $a_2 = b_{21} = 1$  (Heun'sches Verfahren zweiter Ordnung)

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}h_n(f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_n, y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1})))$$

–  $c_1 = 0, c_2 = 1, a_2 = b_{21} = \frac{1}{2}$  (modifiziertes Euler Verfahren)

$$y_n = y_{n-1} + h_n f(t_{n-\frac{1}{2}}, y_{n-1} + \frac{1}{2}h_n f(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

- R=3: Wir haben 8 freie Parameter und 6 Gleichungen.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{2}, c_2 a_2^2 + c_3 a_3^3 = \frac{1}{3}, c_3 a_2 b_{32} = \frac{1}{6}, b_{21} - a_2 = 0, b_{31} - a_3 + b_{32} = 0$$

Mögliche Lösungen sind z.B.:

– das Heun'sche Verfahren dritter Ordnung:  $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{3}, b_{21} = \frac{1}{3}, b_{31} = 0, b_{32} = \frac{2}{3}$   
 $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{4}h_n(b_1 + 3k_3)$ , wobei  $k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1}), k_2 = f(t_{n-\frac{2}{3}}, y_{n-1} + \frac{1}{3}h_n k_1), k_3 = f(t_{n-\frac{1}{3}}, y_{n-1} + \frac{2}{3}h_n k_2)$  ist.

– das Kutta'sche Verfahren dritter Ordnung:  $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, b_{21} = \frac{1}{2}, b_{31} = -1, b_{32} = 2$   
 $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ , wobei  $k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1}), k_2 = f(t_{n-\frac{1}{2}}, y_{n-1} + \frac{1}{2}h_n b_1), k_3 = f(t_n, y_{n-1} - h_n b_1 + 2k_n b_2)$  ist.

- R=4: 13 freie Parameter, 11 Gleichungen. Eine der Lösungen von mehreren ist das "klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung":

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \frac{1}{6}h_n(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ wobei} \\ k_1 &= f(t_{n-1}, y_{n-1}), k_2 = f(t_{n-\frac{1}{2}}, y_{n-1} + \frac{1}{2}h_n k_1), k_3 = f(t_{n-\frac{1}{2}}, y_{n-1} + \frac{1}{2}h_n k_2), k_4 = f(t_n, y_{n-1} + h_n k_3) \end{aligned}$$

15.12.15:

Donnerstag, 18.12.25 über Zoom. Wird per E-Mail + Learnweb angesagt.

**Lokale Konvergenz und Fehlerabschätzung:**

### 13.11 Definition: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Einschrittformel heißt Lipschitz-stetig (L-stetig), falls ihre Verfahrensfunktion einer (gleichmäßigen) Lipschitzbedingung  $(\star)$   $\|F(h, t, x, y) - F(h, t, \tilde{x}, \tilde{y})\| \leq L(\|x - \tilde{x}\| + \|y - \tilde{y}\|)$  für beliebige Argumente  $(t, x), (t, \tilde{x}), (t, y), (t, \tilde{y}) \in I \times \mathbb{R}^d$  genügt.

### 13.12 Theorem: Diskrete Stabilität

Eine Lipschitz-stetige Differenzenformel ( $L_h y^h = h_n^{-1}(y_n - y_{n-1}) - F(h_n, t_{n-1}, y_n, y_{n-1}) = 0$   $(\star\star)$ ) ist (diskret) stabil, d.h. für beliebige Gitterfunktionen  $y^h = \{y_n\}_{n \geq 0}, z^h = \{z_n\}_{n \geq 0}$  gilt für genügend kleine Schrittweite  $h < \frac{1}{2}L^{-1}$  die Abschätzung

$\|y_n - z_n\| \leq e^{\kappa L(t_n - t_0)} [\|y_0 - z_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \| (L_h y^h - L_h z^h)_\nu \|]$  mit Lipschitzkonstante  $L$  der Verfahrensfunktion  $F(h, t, x, y)$  und der Konstanten  $\kappa = 4$  für allgemeine implizite Methoden. Für explizite Methoden ist  $\kappa = 1$  und die Schrittweitenbedingung kann entfallen.

### 13.13 Theorem: Konvergenzsatz

Sei die Differenzenformel (\*\*) in 13.12 L-stetig und konsistent mit dem Anfangswertproblem. Falls  $\|y_0 - u_0\| \rightarrow 0$  konvergiert, dann gilt  $\max_{t_n \in I} \|y_n - u(t_n)\| \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  und für genügend kleines  $h < \frac{1}{2}L^{-1}$  gilt die Fehlerabschätzung  $\|y_n - u(t_n)\| \leq e^{4L(t_n - t_0)} (\|y_0 - u_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\|)$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Für eine explizite Methode kann die Schrittweitenbedingung entfallen.

**Beweis:**

Da  $L_h y^h = 0$  und  $L_h u^h = \tau^h$  folgt die Behauptung unmittelbar aus dem diskreten Stabilitätssatz.

**Beweis 13.12:**

Habe ich keine Lust drauf:

Beweis von (13.12) Betrachte die zwei Gitterfunktionen  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  und  $\{z_n\}_{n \geq 0}$ . Vergleiche -3-

$$(L_h y^h)_n = h_n^{-1} (y_n - y_{n-1}) - F(h_n, t_n, y_n, y_{n-1}) \quad (L_h z^h)_n = h_n^{-1} (z_n - z_{n-1}) - F(h_n, t_n, z_n, z_{n-1}), \text{ also}$$

$$y_n - z_n = y_{n-1} - z_{n-1} + h_n [F(h_n, t_n, y_n, y_{n-1}) - F(h_n, t_n, z_n, z_{n-1})] + (L_h y^h - L_h z^h)_n$$

$$=: \varepsilon_n \text{ und definiere } \Sigma_n := (L_h y^h - L_h z^h)_n$$

(i) Expliziter Fall: Wegen der L-Stetigkeit der Vorfahreneinfüllmeth. gilt:  $\|\varepsilon_n\| \leq \|e_{n-1}\| + h_n L \|e_{n-1}\| + h_n \|\varepsilon_n\|$

Rekursive Anwendung dieser Abschätzung ergibt:  $\|\varepsilon_n\| \leq \|e_0\| + \sum_{\nu=0}^{n-1} h_{\nu+1} \|e_\nu\| + \sum_{\nu=0}^{n-1} h_\nu \|\varepsilon_\nu\|$

Das diskrete Gronwall Lemma ergibt:  $\|\varepsilon_n\| \leq \exp\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} h_{\nu+1}\right) \cdot \left[\|e_0\| + \sum_{\nu=0}^{n-1} h_\nu \|\varepsilon_\nu\|\right]$

=  $e^{L(t_n - t_0)} \left[\|e_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\|\right]$ . Diese Abschätzung gilt - wie behauptet - -4-

ohne jede Bedingung an die Schrittweite  $h_n$ .  $\|\varepsilon_n\| \leq \|e_{n-1}\| + h_n L (\|e_n\| + \|e_{n-1}\|) + h_n \|\varepsilon_n\|$

(ii) Impliziter Fall: Wegen der L-Stetigkeit der Vorfahren gilt hier:

Setze  $h_0 = 0$ . Beachte  $h < \frac{1}{2}L^{-1} \Rightarrow (1-h_n L) \|e_n\| \leq (1+h_n L) \|e_{n-1}\| + h_n \|\varepsilon_n\| = (1-h_{n-1} L) \|e_{n-1}\| + \frac{h_n + h_{n-1}}{1-h_{n-1} L} L (1-h_{n-1} L) \|e_{n-1}\|$

Nach der Notation  $w_n := (1-h_n L) e_n$  folgt dann, dass  $\|w_n\| \leq \|w_{n-1}\| + \frac{h_n + h_{n-1}}{1-h_{n-1} L} L \|w_{n-1}\| + h_n \|\varepsilon_n\|$

Rekursive Anwendung dieser Abschätzung ergibt, dass  $\|w_n\| \leq \|w_0\| + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h_{\nu+1} + h_\nu}{1-h_\nu L} L \|w_\nu\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\|$

Mit dem diskreten Gronwall Lemma erhalten wir -5-

$$\|e_n\| \leq \left( \frac{1}{1-h_n L} \right) \exp \left( L \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h_{\nu+1} + h_\nu}{1-h_\nu L} \right) \left[ \|e_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\| \right]$$

$$\leq \left( \frac{\exp(h_n L)}{1-h_n L} \right) \exp \left( L \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h_{\nu+1} + h_\nu}{1-h_\nu L} \right) \left[ \|e_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\| \right] \leq e^{4L(t_n - t_0)} \left[ \|e_0\| + \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\varepsilon_\nu\| \right] \text{ q.e.d.}$$

Bemerkung: Der Konvergenzsatz besagt, dass für L-stetige Einschrittverfahren die globale Konvergenzordnung (mindestens) gleich der lokalen Konsistenzordnung ist. Dies gilt damit z.B. für die Taylor-Verfahren, die Runge-Kutta-Verfahren. Diese genügen für L-stetiges  $f(t, x)$  automatisch der Bedingung  $(\star)$  in 13.11. Und man kann zeigen, dass sie unter der Bedingung  $\sum_{r=1}^R c_r = 1$  auch konsistent sind (eventuell in der Übung nochmal). Dasselbe gilt für das implizite Eulerverfahren, die Trapezregel und die sogenannte Einschritt-Mittelpunktsregel.

Bemerkung: Bisher haben wir eine globale Lipschitzbedingung angenommen, d.h. z.B.  $f(t, x) = x^2$  und  $f(t, x) = \sqrt{x}$  sind ausgeschlossen. Es genügt jedoch folgende Bedingung: Habe das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf dem Intervall  $\bar{I} = [t_0, t_0 + T]$  und genügen  $f(t, x)$  und  $F(t, x, y)$  einer Lipschitz-Bedingung auf dem Streifen  $U_\rho = \{(t, x) \text{ in } I \times \mathbb{R}^d \mid \|x - u(t)\| \leq \rho\}$  um die Lösung  $u(t)$  herum.

Globale Konvergenz: Die a priori Fehlerabschätzung im Konvergenzsatz 13.13 liefert eine realistische Fehlerschranke nur, wenn für relativ kleine Intervalle  $I$ . Der Term  $\exp(LT)$  wächst schnell für  $T \rightarrow \infty$ . Zudem kann man die Lipschitz-Konstante  $L$  meist nur sehr grob schätzen.

**Globale Konvergenz** die a priori Fehlerabschätzung in 13.13 liefert eine realistische Fehlerabschranke nur für relativ kleine Intervalle  $I = [t_0, t_0 + T]$ . Der Term  $\exp(LT)$  wächst sehr schnell für  $T \rightarrow \infty$ . Zudem kann man die Lipschitzkonstante  $L$  meist nur sehr grob schätzen. Wir betrachten hier wieder den Modellfall der Eulerschen Polygonzugmethode

$(\star) y_n = y_{n-1} + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1})$  und wenden sie auf ein Anfangswertproblem an, für das gilt: (hier ist  $(,)$  das Skalarprodukt)

$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq l(t)\|x - \tilde{x}\|$  (1) und  $-(f(t, x) - f(t, \tilde{x}), x - \tilde{x}) \geq \lambda(t)\|x - \tilde{x}\|$  (2)  $\forall (t, x), (t, \tilde{x}) \in I \times \mathbb{R}^d$  und stetigen Funktionen  $l(t), \lambda(t) \geq 0$ .

Definiere  $L := \max_I l(t), \lambda := \min_I \lambda(t)$ . Falls  $f(t, 0) = 0$ , multipliziere  $(\star)$  mit  $y_n$  und nutze  $2\|y_n\|^2 - 2(y_{n-1}, y_n) = \|y_n\|^2 + \|y_n - y_{n-1}\|^2 - \|y_{n-1}\|^2$ , um folgende Identität zu erhalten mit  $L_n := L(t_n)$  und  $\lambda_n := \lambda(t_n)$ :

$$\begin{aligned} \|y_n\|^2 + \|y_n - y_{n-1}\|^2 &\leq \|y_{n-1}\|^2 - 2\lambda_{n-1}h_n\|y_{n-1}\|^2 + 2h_nL_{n-1}\|y_{n-1}\|\|y_n - y_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|y_{n-1}\|^2 - 2\lambda_{n-1}h_n\|y_{n-1}\|^2 + h_n^2l_{n-1}^2\|y_{n-1}\|^2 + \|y_n - y_{n-1}\|^2 \\ &\Rightarrow \|y_n\|^2 \leq (1 + h_n^2L_{n-1}^2 - 2\lambda_{n-1}h_n)\|y_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Damit bleibt die Approximation  $y_n$  beschränkt bezüglich  $n$ , falls  $(1 + h_n^2L_{n-1}^2 - 2\lambda_{n-1}h_n) \leq 1$  ist, d.h. wenn für die Schrittweite  $h_n$  gilt, dass  $h_n \leq \frac{2\lambda_{n-1}}{L_{n-1}^2}, n \geq 1$ .

Falls diese Abschätzung gleichmäßig bezüglich  $n$  und im strikten Sinne erfüllt ist, kann man zeigen (für  $y_0 = u_0$ ), dass  $(\cdot)\|y_n - u(t_n)\| \leq c \max_{1 \leq \nu \leq n} \{h_\nu \max_{I_\nu} \|u''\|\}$  ist. Der Beweis für die Polygonzugmethode ist relativ kompliziert. Daher betrachten wir den Beweis für:

### 13.14 Theorem: Globale Konvergenz des impliziten Eulerverfahrens (als Bsp. zu oben Stehendem)

Sei das Anfangswertproblem Lipschitzstetig und monoton im Sinne von (1) und (2). Dann sind die Lösungen des impliziten Eulerverfahrens  $y_n = y_{n-1} + h_n f(t_n, y_n), n \geq 1, y_0 = u_0$  für beliebige Schrittweiten  $h_n$  wohldefiniert und es gilt die Fehlerabschätzung  $\|y_n - u(t_n)\| \leq \frac{1}{2} \min\{t_n - t_0, \lambda^{-1}\} \max_{1 \leq \nu \leq n} \{h_\nu \max_{I_\nu} \|u''\|\}$  für  $t_n \geq t_0$ .

Beweis:

1) In jedem Schritt des impliziten Euler-Verfahrens müssen wir ein Gleichungssystem der Form  $(\star) y_n - h_n f(t_n, y_n) = y_{n-1}$  lösen. Wegen (1) und (2) ist die Abb.  $g(x) := x - h_n f(t_n, x)$  L-stetig und strikt monoton im Sinne von  $(g(x) - g(z), x - z) \geq \gamma\|x - z\|^2$  für  $x, z \in \mathbb{R}^d$  und fester Konstante  $\gamma > 0$ .

$\Rightarrow (\star)$  hat eine eindeutige Lösung.

2) Für den Fehler  $e_n = y_n - u_n$  gilt die Differenzengleichung  $e_n = e_{n-1} + h_n[f(t_n, y_n) - f(t_n, u_n)] - h_n\tau_n$  mit dem Abschneidefehler  $\tau_n$  des impliziten Euler-Verfahrens:  $\|\tau_n\| \leq \frac{1}{2}h_n \max_{I_n} \|u''\|$ .

Multipliziere mit  $\|e_n\|^{-1}e_n$ . Dann erhalten wir  $\|e_n\| \leq \|e_n\|^1(e_{n-1}, e_n) - \lambda_n h_n \|e_n\| + h_n \|e_n\|^{-1}(\tau_n, e_n)$   
 $\Rightarrow (1 + \lambda_n h_n) \|e_n\| \leq \|e_{n-1}\| + h_n \|\tau_n\|$  bzw.  $\|e_n\| \leq \frac{1}{1+\lambda_n h_n} \|e_{n-1}\| + \frac{h_n}{1+\lambda_n h_n} \|\tau_n\|$ .

3) Falls  $\lambda \geq 0$  (schwache Monotonie) summieren wir diese letzte Ungleichung über  $\nu = 1, \dots, n$ . Da  $e_0 = 0$ , erhalten wir die T-abhängige Abschätzung  $\|e_n\| \leq \sum_{\nu=1}^n h_\nu \|\tau_\nu\| \leq (\sum_{\nu=1}^n h_\nu) \max_{1 \leq \nu \leq n} \|\tau_\nu\| \leq \frac{1}{2}(t_n - t_0) \max_{1 \leq \nu \leq n} \{h_\nu \max_{I_\nu} \|u''\|\}$ .

4) Falls  $\lambda > 0$  (strikte Monotonie) folgt mit Induktion, dass  $\|e_n\| \leq \lambda^{-1} \max_{1 \leq \nu \leq n} \|\tau_\nu\|$  bzw.

$$\|e_n\| \leq \frac{1}{2} \lambda^{-1} \max_{1 \leq \nu \leq n} \{h_\nu \max_{I_\nu} \|u''\|\}, \text{ denn: } \begin{array}{l} \text{Induktion:} \\ \|e_1\| \leq \frac{h_1}{1+\lambda h_1} \|\tau_1\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\tau_1\|. \end{array}$$

$$n = 1 : \|e_1\| \leq \frac{h_1}{1+\lambda h_1} \|\tau_1\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\tau_1\|. \text{ Gelte die Bedingung für } n-1. \text{ Dann folgt } \|e_n\| \leq \frac{1}{\lambda} \|e_{n-1}\| + \frac{h_n}{1+\lambda h_n} \|\tau_n\| \leq \frac{1}{1+\lambda h_n} \lambda^{-1} \max_{1 \leq \nu \leq n-1} \|\tau_\nu\| + \frac{h_n}{1+\lambda h_n} \|\tau_n\| \leq \frac{1}{\lambda} \max_{1 \leq \nu \leq n} \|\tau_\nu\|.$$

Gute, vernünftige Verfahren sollten jede (exponentiell) stabile Lösung global approximieren, egal ob das Problem selbst monoton ist oder nicht. Frage: Lassen sich globale Fehlerabschätzungen der Art  $(\cdot)$  herleiten allein mit Hilfe der angenommenen (exponentiellen) Stabilität der Lösung  $u(t)$  und ohne weitere Voraussetzungen? Antwort gibt das folgende Theorem:

### 13.15 Theorem: Globale Konvergenz

Das L-stetige AWP habe eine (globale) exponentiell stabile Lösung mit Stabilitätsparametern  $\delta, A, \alpha$ .

[Eine globale Lösung  $u$  eines AWPs heißt exponentiell stabil, wenn es Konstanten  $\delta, \alpha, A$  gibt, sodass zu jedem Zeitpunkt  $t_* \geq t_0$  und jedem  $w_* \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|w_*\| < \delta$  jede (globale) Lösung  $v$  des gestörten AWPs  $v'(t) = f(t, v(t)), t \geq t_*, v(T_*) = u(t_*) + w_*$  global ist und  $\|(v - u)(t)\| \leq Ae^{-\alpha(t-t_*)} \|w_*\|$ . Bemerkungen: 1) Asymptotische Stabilität ist eine schwächere Stabilitätsdefinition. 2) Alle Lösungen eines (lokal) L-stetigen und (stark) monotonen AWPs sind global und exponentiell stabil mit  $\delta$  beliebig und  $\alpha = A = 1$ . Falls  $\sup_{t \geq t_0} \|f(t, 0)\| < \infty \Rightarrow$  alle Lösungen sind gleichmäßig beschränkt.]

Für jedes Einschrittverfahren, welches mit dem AWP konsistent ist und einer Lipschitzbedingung genügt, gibt es dann positive Konstanten  $h_0$  und  $K$  (unabhängig von  $T$ ), sodass für  $h := \sup_{I_n} h_n \leq h_0$  gilt:  $\max_{t_n \in I_n} \|y_n - u(t_n)\| \leq K \max_{t_n \in I_n} \|\tau_n\|$ , wobei  $\tau_n$  das Maximum des Abschneidefehlers für alle möglichen Lösungen der Differentialgleichung bezeichnet, die in der Umgebung  $U_{\delta A} = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^d \mid \|x - u(t)\| < \delta A\}$  des Graphen von  $u$  verlaufen. (Beweis evtl. später, eher nicht)

**Schrittweitenkontrolle:** Wie kann man während einer Simulation die Schrittweite  $h_n$  so wählen, dass zu einer vorgegebenen Fehlertoleranz  $TOL > 0$  auf dem Intervall  $I$  die Schranke  $\max_{t_n \in I} \|e_n\| \leq TOL$  erreicht wird? Hier soll  $TOL$  deutlich größer als die Maschinengenauigkeit  $eps$  gewählt sein, z.B.  $TOL > \max_{t_n} \{h_n^{-1} \|y_{n-1} - u(t_n)\|\}$ .

Wir starten mit der a priori Fehlerabschätzung  $\max_{t_n \in I} \|e_n\| \leq K \sum_{t_n \in I} h_n \|\tau_n\| \leq KT \max_{t_n \in I} \|\tau_n\|$ . Wir nehmen an, dass Schätzungen für die lokalen Abschneidefehler  $\tau_n$  bekannt sind bzw. für die "Hauptabschneidefehlerfunktion"  $\tau_n^{(m)} = \tau^{(n)}(t_n)$ . Auf dem Intervall  $[t_{n-1}, t_n]$  zur Schrittweite  $h_n$  ist  $\tau_n = \tau^{(m)}(t_n)h_n^m + O(h_n^{m+1})$ .

Für das Taylor-Verfahren ist zum Beispiel  $\tau^{(m)}(t_n) = \frac{1}{(m+1)!} u^{(m+1)}(t_{n-1})$ . Obige Schätzungen kann man berechnen. (Ab hier nicht in der Klausur glaube ich)

1. Strategie: Wähle die Schrittweite  $h_n$  wie folgt:  $Kh_n^m \|\tau_n^{(m)}\| \approx \frac{TOL}{T}$  bzw.  $h_n \approx \left(\frac{TOL}{KT \|\tau_n^{(m)}\|}\right)^{1/m}$ .

Dann folgt wie gewünscht, dass  $\max_{t_n \in I} \|e_n\| \approx K \sum_{t_n \in I} h_n \{h_n^m \|\tau_n^{(m)}\|\} \approx \frac{TOL}{T} \sum_{t_n \in I} h_n$ . Die Anzahl der durchzuführenden Zeitschritte ergibt sich aus:

$$N = \sum_{t_n \in I} h_n h_n^1 \approx \sum_{t_n \in I} h_n \left(\frac{KT \|\tau_n^{(m)}\|}{TOL}\right)^{1/m} = \left(\frac{KT}{TOL}\right)^{1/m} \sum_{t_n \in I} h_n \|\tau_n^{(m)}\|^{1/m}.$$

Da  $\tau_n^{(m)} \approx u^{(m+1)}(t_{n-1})$  folgt, dass  $N \approx \left(\frac{KT}{TOL}\right)^{1/m} \int_I \|u^{(m+1)}\|^{1/m} dt$ .

2. Strategie: Wähle  $h_n$  so, dass  $Kh_n^{m+1} \|\tau_n^{(m)}\| \approx \frac{TOL}{N}$  bzw.  $h_n \approx \left(\frac{TOL}{KN \|\tau_n^{(m)}\|}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ . Hier ist  $N$  (Anzahl der Zeitschritte) noch unbekannt
- $$\Rightarrow \max_{t_n \in I} \|e_n\| \approx K \sum_{t_n \in I} \{h_n^{m+1} \|\tau_n^{(m)}\|\} \approx \frac{TOL}{N} \sum_{t_n \in I} 1 \text{ und}$$
- $$N \approx \sum_{t_n \in I} h_n \left(\frac{KN \|\tau_n^{(m)}\|}{TOL}\right)^{\frac{1}{m+1}} = \left(\frac{KN}{TOL}\right)^{\frac{1}{m+1}} \sum_{t_n \in I} h_n \|\tau_n^{(m+1)}\|^{1/(m+1)}.$$
- Da  $\tau_n^{(m)} \approx u^{(m+1)}(t_{n-1}) \Rightarrow N^{\frac{m}{m+1}} = N^{1-\frac{1}{m+1}} \approx \left(\frac{K}{TOL}\right)^{\frac{1}{m+1}} \int_I \|u^{(m+1)}\|^{1/(m+1)} dt$
- $$\Rightarrow N \approx \left(\frac{K}{TOL}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_I \|u^{(m+1)}\|^{1/(m+1)} dt\right)^{\frac{m+1}{m}}. \text{ Da } N \text{ a priori nicht bekannt ist, muss } N \text{ geschätzt werden und im Verlauf mehrerer Simulationen angepasst werden. Das erscheint aufwändiger als Strategie 1.}$$

Beide Strategien zur Schrittweitenwahl sind asymptotisch gleich effizient. Die globale Fehler-toleranz  $TOL$  wird mit  $N \approx TOL^{-\frac{1}{m}}$  Zeitschritten erreicht, allerdings mit kleinen Unterschieden bei den Konstanten. Was bedeutet dies?

Beispiel:  $m = 1$ , Eulersche Polygonzugmethode.

1. Strategie:  $N \approx \frac{KT}{TOL} \int_I \|u''\| dt$ ,
2. Strategie:  $N \approx \frac{K}{TOL} (\int_I \|u''\|^{\frac{1}{2}} dt)^2$ . Wie geht die Regularität der exakten Lösung in die Schrittzahl ein? Die 2. Strategie ist dann ökonomischer im Vergleich zur 1. Strategie, wenn  $(\int_I \|u''\|^{\frac{1}{2}} dt)^2 \ll T \int_I \|u''\| dt$  ist.

Beispiel: singuläre Lösungen, deren zweite Ableitung nicht integrierbar ist, z.B.  $u(t) = (1-t)^{\frac{1}{2}}$ .

Numerische Stabilität Ein Lipschitz-stetiges und (strikt) monotoner Anfangswertproblem  $u'(t) = f(t, u(t)), t \geq t_0, u(t_0) = u_0$  hat im Fall, dass  $\sup_{t > 0} |f(t, 0)| < 0$  ist, eine globale, gleichmäßig beschränkte Lösung. Falls  $f(t, 0) \equiv 0$  ist, dann fällt die Lösung exponentiell gegen 0 ab. Sei nun  $L(t)$  die Lipschitz-Konstante und  $\lambda(t)$  die Monotonie-Konstante von  $f(t, \cdot)$ . Man kann zeigen, dass das Polygonzugverfahren eine analoge Eigenschaft besitzt, wenn die strikte Schrittweitenbedingung  $\inf_{n \geq 0} \left\{ \frac{2\lambda_{n-1}}{h_n L_{n-1}^2} \right\} > 0$  erfüllt ist. Das heißt für solche Schrittweiten ist das Verfahren "numerisch stabil".

**Skalare Testgleichung:**  $u'(t) = \lambda u(t) = f(t, u(t)), \lambda \in \mathbb{C}, L = |\lambda|$ . Hier steht  $\lambda \in \mathbb{C}$  für die i.A. komplexen Eigenwerte der Jacobi-Matrix der rechten Seite. Wie zuvor: Eulersche Polygonzugmethode.

Für  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$  gilt:  $y_n = (1+h_n \lambda) y_{n-1} = \dots = (1+h_n \lambda)^n y_0$ . Das heißt für  $h > 2 \frac{|\lambda_{n-1}|}{L_{n-1}^2} = \frac{2}{|\lambda|}$  wächst diskrete Lösung exponentiell. [Erinnerung: Schrittweitenbedingung  $\inf_{n \geq 0} \left\{ \frac{2\lambda_{n-1}}{h_n L_{n-1}^2} > 0 \right\}$ ]

Für  $h = 2 \frac{|\lambda_{n-1}|}{L_{n-1}^2} = \frac{2}{|\lambda|}$  bleibt sie beschränkt, im Absolutbetrag sogar konstant.

Für  $h < 2 \frac{|\lambda_{n-1}|}{L_{n-1}^2} = \frac{2}{|\lambda|}$  fällt sie exponentiell.

Illustration:  $u'(t) = -200t[u(t)]^2, t \geq 0, u(0) = 1$  hat die Lösung  $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$ . Der Wert  $u(3) = \frac{1}{901}$  soll mithilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens approximiert werden. Das Verfahren konvergiert. Vermutung: Also können wir mit relativ großen Schrittweiten arbeiten. Dies ist falsch.

N	h	$ y_n - u(3) $
50	0,06	$\sim 2 \cdot 10^{-8}$
25	0,12	$\sim 2 \cdot 10^{-6}$
20	0,15	$\sim 7 \cdot 10^{-5}$
15	0,2	$\sim \text{overflow}(10^{38})$
20	0,1538	$\sim 7 \cdot 10^{-5}$
19	0,1579	$\sim \text{overflow}(10^{38})$

Es existiert eine numerische Instabilität, wenn die Schrittweite zu groß ist. Wie können wir dies besser verstehen?

Lineare Stabilitätsanalyse: Intuition: Ein Differenzenverfahren ist "numerisch stabil" für feste  $h$ , wenn im Falle  $\sup_{t>0} \|u(t)\| < \infty$  auch  $\sup_{n>0} \|y_n\| < \infty$  ist.

Betrachte unser Testproblem:  $u'(t) = \lambda u(t)$ , also  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ . Das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow \infty$  ist durch

- $Re\lambda < 0 \Rightarrow |u(t)| = |u_0|e^{Re\lambda t} \rightarrow 0$
- $Re\lambda = 0 \Rightarrow |u(t)| = |u_0|e^{Re\lambda t} \equiv |u_0|$
- $Re\lambda > 0 \Rightarrow |u(t)| = |u_0|e^{Re\lambda t} \rightarrow \infty$

charakterisiert.

### 13.16 Definition: Absolute Stabilität

Eine Einschrittmethode heißt "absolut stabil" für ein  $\lambda f \neq 0$ , wenn ihre Anwendung auf das skalare Testproblem  $u'(t) = \lambda u(t)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  für  $Re\lambda \leq 0$  beschränkte Näherungen erzeugt, d.h.  $\sup_{n \geq 0} |y_n| < \infty$ . Für die Polygonzugmethode liegt also absolute Stabilität genau dann vor, wenn

für den Faktor  $w := w(\lambda h) := (1 + \lambda h)$  gilt, dass  $|w| \leq 1$ . Wir nennen  $SG := \{z = \lambda h \in \mathbb{C} \mid |w(z)| \leq 1\}$  das Gebiet absoluter Stabilität (oder Stabilitätsgebiet) einer Einschrittformel. Für festes  $\lambda$  mit  $Re\lambda \leq 0$  muss die Schrittweite  $h$  der Polygonzugmethode so gewählt werden, dass  $\lambda h \in SG$  ist. Ansonsten wächst die Näherungslösung  $y_n$  für  $n \rightarrow \infty$  exponentiell, obwohl die exakte Lösung beschränkt ist oder exponentiell abfällt. Wir untersuchen nun die numerische Stabilität der Taylorformeln anhand unseres Testproblems  $u'(t) = \lambda u(t)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Taylormethode der Stufe R:  $y_n = y_{n-1} + h \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t_{n-1}, y_{n-1}) = y_{n-1} + h \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} \lambda^r y_{n-1}$ .

Der Verstärkungsfaktor ist  $w = \sum_{r=0}^R \frac{(\lambda h)^r}{r!}$ . Es ist zumeist schwierig, das volle Stabilitätsgebiet  $SG = \{z \in \mathbb{C} \mid |w(z)| \leq 1\}$  zu bestimmen. Daher betrachten wir hier nur das Stabilitätsintervall  $SI = \{z \in \mathbb{R} \mid |w(z)| \leq 1\}$ .

Es gilt:  $SI = [-2, 0]$  für  $R = 1$ ,  $[-2, 0]$  für  $R = 2$ ,  $[-2.51\dots, 0]$  für  $R = 3$ ,  $[-2.78\dots, 0]$  für  $R = 4$ .

Sei nun  $F(h; t, x, )$  die Verfahrensfunktion eines R-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens der Ordnung  $m = R \leq 4$ . Nach der Konstruktion gilt, dass  $F(h; t, u) = \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t, u) + O(h^R)$ . Für unser Testproblem ist  $F(h; t, u) = \sum_{r=1}^R c_r k_r(h; t, u)$  ein Polynom in  $h$  der Ordnung  $R - 1 \Rightarrow F(h; t, u) = \sum_{r=1}^R \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(t, u) + 0$ . Damit ist der Verstärkungsfaktor  $w$  der Runge-Kutta Formeln der Ordnung  $m = R \leq 4$  derselbe wie der der entsprechenden Taylorformeln. Aus unserer Stabilitätsanalyse folgt, dass für  $Re\lambda \ll -1$  die Stabilität der durch die Runge-Kutta-Verfahren erzeugten Lösungen eine entsprechend kleine Schrittweite  $h$  erfordert. Dann wäre eine Formel, mit einem in der komplexen Ebene möglichst weit nach links reichenden Stabilitätsgebiet optimal.

### 13.17 Definition: A-stabil

Eine Differenzenmethode heißt A-stabil, wenn für das Stabilitätsgebiet  $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z \leq 0\} \subset SG$  gilt. Man kann zeigen, dass explizite Methoden nicht A-stabil sein können. Man kann zeigen, dass die implizite Eulermethode und die Trapezregel A-stabil sind.

$$y_n = y_{n-1} + h f(t_n, y_n); \quad y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} h (f(t_n, y_n) + f(t_n, y_{n-1}))$$

Nutzung der linearen Stabilitätsanalyse: Betrachte das AWP  $u'(t) = f(t, u(t)), t \geq t_0, u(t_0) = u_0$  (nicht notwendig monoton). Dieses sei mit einem Einschrittverfahren diskretisiert

$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n; t_n, y_n, y_{n-1}, n \geq 0, y_0 = u_0)$ . Hier sei die Verfahrensfunktion L-stetig. Eine (globale) Lösung  $(y_n)_{n \geq 0}$  heißt (numerisch) stabil, wenn für jede Lösung  $(z_n)_{n \geq n^*}$  von  $z_n = z_{n-1} + h_n F(h_n; t_n, z_n, z_{n-1}), n \geq n^*, z_{n^*} = y_{n^*} + w_\star$  zu einem Zeitpunkt  $t_{n^*} \geq t_0$  mit hinreichend kleiner Störung  $\|w_\star\| \leq \delta$  gilt, dass  $\|z_n - y_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Bemerkung Analog zum kontinuierlichen Fall nennen wir die Lösung  $(y_n)_{n \geq 0}$  einer Differenzenapproximation exponentiell stabil, wenn für jede Lösung der gestörten Differenzengleichung  $\|z_n - y_n\| \leq A e^{-\alpha(t_n - t_\star)} \|w_\star\|, n \geq n_\star$  gilt.

Hypothese: Die (globale) Lösung  $u$  des allgemeinen AWP ist asymptotisch stabil.

.....

### 13.18 Discontinued

Klausurinfos am 22.01.26 werden noch ergänzt.

## 14 Nützlicher Stuff, z.B. Infos zur Klausur

Random Stuff:

- negativer Realteil impliziert stabil
- Lyapunov Funktionen werden in der Klausur gegeben
- Kein solcher/so langer Beweis wie zu 12.7 in der Klausur
- Aus Feld 13 eine Aufgabe in der Klausur
- Was besonders zu lernen ist, wird in einer VL bekannt gegeben
- Maximal eine Numerik-Aufgabe in der Klausur
- Am 19.01.2026 mehr Infos zur Klausur
- Bei Unter- und Oberfunktionen dürfen wir immer mit  $\leq, \geq$  rechnen

In der Musterlösung zu den Weihnachtsaufgaben:

Vergleichsprinzip durch Over- und Unterlösungen

in der Musterlösung  $\leq, \geq$

in der VL: (strikte, damals nicht strikt genannt) Ober- und Unterlösungen:  $<, >$

Was wir uns für die Klausur nochmal anschauen sollten(kommt nicht garantiert genau so dran, nur sehr wahrscheinlich: "Bitte noch einmal gut üben") (evtl. Montag 26.01. noch mehr Infos):

- Phasenraumanalyse (leichter als auf dem Beispielblatt für Weihnachten)
- Linearisieren, Stabilität etc.
- Existenz und Eindeutigkeit für konkrete Probleme (global, lokal) (evtl. Fixpunktsatz??  
→ Banachraum)
- Lipschitz  $\neq$  Differenzierbar; diffbar ist stärker; (global, lokal)
- Ober- und Unterlösungen
- Poincare Bendixson / Bendixson Kriterium
- Konsistenz/Konsistenzordnung (wenn Numerik, dann das hier)

180 Minuten wird geschrieben, 120 Minuten werden planmäßig benötigt