0 Infos zu diesem Skript

Dieses Skript ist nicht garantiert vollständig. An den Stellen, an denen "goodnotes x" für $x \in \mathbb{N}$ steht, fehlt ein Teil der Vorlesung. Dieser wird evtl. in Zukunft noch ergänzt. Bei Fragen oder ähnlichem Mail an jminor@uni-muenster.de.

1 Einleitung

16.10.25:
Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Unbekannte eine Funktion ist, statt einer Zahl. Dabei wird Gleichheit zwischen Ausdrücken, die die Funktion und ihre Ableitungen betreffen, beschrieben.
Relevanz von Differentialgleichungen in Biologie, Chemie, Computer/Datenwissenschaften, Ingenieurswesen, Medizin, Ökonomie,...
<diverse Beispiele>
Die meisten Differentialgleichungen sind nicht explizit lösbar. Wir könne sie diskretisieren und numerische Lösungen simulieren.
Wofür brauchen wir Analysis?
Der output einer numerischen Simulation ist eine Approximation. Diese muss bewertet werden.
Bsp.: 1950er Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gerieten Hochgeschwindigkeitsflugzeuge in tödliches Trudeln. Ingenieure hatten das nicht erwartet. Grund: Nichtlinearitäten, die (noch) besser approximiert werden mussten, spielten bei sehr hoher Geschwindigkeit plötzlich eine größere Rolle bei "kleineren hohen" Geschwindigkeiten.
"Dirac" - Man versteht eine Gleichung ungefähr, wenn man die Eigenschaften ihrer Lösungen vorhersagen kann, ohne die Gleichung selbst zu lösen.

2 Einige konkrete Beispiele

2.1

$x'(t) = 3x(t)$, Lösung $x(t) = ce^{3t}$ - sind das alle Lösungen?
Differentialgleichungen vom Typ $x'(t) = \mu x(t), \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ tauchen auf bei der Modellierung von Bakterienwachstum in der Petrischale, <diverse Beispiele>.

2.2

$tan'(t) = sec^2(t) = tan^2(t) + 1, sec(t) = \frac{1}{cos(t)}$
$x'(t) = x^2(t) + 1$
Ist $tan(t)$ die einzige Lösung? // Multiplikation mit Konstanten, um mehr Lösungen zu erzeugen, funktioniert hier nicht.
Versuch: Ausnutzung der Periodizität
$x(t) = tan(t + a)$ im Intervall $(-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$
Weiter ist $(-cot)' = -cot'(t) = csc^2(t) = (\frac{1}{sin(t)})^2 = (-cot(t))^2 + 1$ eine Lsg und $tan(t + \frac{\pi}{2}) = -cot(t)$

2.3

$x'(t) = \mu\sqrt{x(t)}, \mu > 0$. Hier $x(t) \geq 0$, damit die Wurzel gezogen werden kann.
Anwendung: x(t) beschreibt die Höhe einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Tank mit Radius R, welche durch ein kleines Loch im Boden ausläuft. ("Torncelli's Gesetz")

2.4 Wie können wir autonome Differentialgleichungen lösen?

$x'(t) = f(x(t))$ oder $x' = f(x)$ (das ist eine autonome DGL)
Bsp.: $x' = 3x$ bzw. $\frac{dx}{dt} = 3x$. Annahme $x \neq 0$, dann gilt:
$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 3$. Schreiben symbolisch: $\frac{dx}{x} = 3dt$. Integriere und behandle dabei x und t als unabhängige Variablen.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int 3\,dt \\ \Leftrightarrow ln|x| + c_1 &= 3t + c_2 \\ \Rightarrow ln|x| &= 3t + c, c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow |x(t)| &= e^{3t+c} = e^{3t}e^c = e^{3t}k, k > 0 \Rightarrow x(t) = ke^{3t}, k \neq 0 \end{aligned}$$

Da $k \neq 0$, haben wir nicht durch 0 geteilt. Aber $x(t) = 0$ ist auch eine Lösung.

2.4.1 Theorem

Sei $r \in \mathbb{R}$. Die Lösung von $x'(t) = r \cdot x(t)$ sind genau $x(t) = x_0 e^{rt}$, wobei $x_o = x(0)$ ist. Beweis:
Betrachte $y(t) = \frac{x(t)}{e^{rt}} = x(t)e^{-rt}$.
Dann gilt $y'(t) = -re^{-rt}x(t) + e^{-rt}x'(t) = e^{-rt}(-rx(t) + rx(t)) = 0$
$\Rightarrow y(t) = const. \Rightarrow$ Behauptung

2.5 Beispiel

$$\begin{aligned} x'(t) = x(t)^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = 1 \; falls \; x \neq 0 \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} &= \int dt \\ \Rightarrow -\frac{1}{x} + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} &= t + c \textbf{ mit } c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{1}{t+c} \textbf{ für } t \neq -c \end{aligned}$$

und $x \equiv 0$ ist ebenfalls eine Lösung.

2.6 Beispiel

$x' = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\frac{dx}{dt} = 1$ Hier wird nie durch 0 dividiert.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1}dx &= \int dt \\ \Leftrightarrow arctan(x) + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow arctan(x) &= t + a \text{ für eine Konstante a} \\ \Rightarrow x &= tan(t+a) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Intervall $(-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$ definiert.

20.10.25:
Learning Center Termin: 14-16 Uhr im ComputerPool

2.7 Beispiel: "Blow-Up" in endlicher Zeit, (2.5) bei ihr

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t}\{^{\to\ \text{inf für } t\to 1^-}_{\to -\text{inf für } t\to 1^+}$$

Bemerkung: Was bedeutet ein "blow-up"?

- Für die spezifische Anwendung spielt der Zeitpunkt des "blow-ups" keine Rolle, ist also irrelevant
- Die Anwendung beruht auf Modellhypothesen, die Nahe dem blow-up Zeitpunkt "zusammenbrechen"/ungültig werden
- Das untersuchte Phänomen durchläuft eine "katastrophale" Dynamik, z.B. thermisches Durchgehen von Batterien

Der Differentialgleichung selbst sieht man dieses Verhalten nicht ohne weiteres an. Hier spielt also die Definition, was eine Lösung ist, eine Rolle und die Existenz von solchen Lösungen.

2.8 Beispiel, (2.6) bei ihr

Betrachte $x''(t) + Ax'(t) = B$ für Konstanten $A, B; A \neq 0$. Da x selbst nicht vorkommt, betrachte $y = x' \Rightarrow y'(t) + Ay(t) = B$.

$$\int \frac{dy}{-Ay+B} = \int dt = t + c, \textbf{ für } y \neq \frac{B}{A}.$$

Setze $u = -Ay + B, du = -Ady.$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{-Ay+B} = \int \frac{-\frac{1}{A}du}{u} = -\frac{1}{A}ln|u| = -\frac{1}{A}ln| - Ay + B| \Rightarrow$ $ln| - Ay + B| = -At - Ac \Rightarrow -Ay + B = \overline{c}e^{-At}$, wobei $\overline{c} =^+_- e^{-Ac} \neq 0$.
Wir erhalten die Lösungsformel $y_k(t) = ke^{-At} + \frac{B}{A}$ für $k = -\overline{c}/A \neq 0$. Hier korrespondiert $k = 0$ zur Lösung $y = \frac{B}{A}$, die wir beim Dividieren ausschließen mussten.

Sei $y_k(t_0) = y_0$, dann ist $y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$, also $k = e^{At_0}(y_0 - \frac{B}{A})$
$\Rightarrow y(t) = (y_0 - \frac{B}{A}e^{-A(t-t_0)} + \frac{B}{A})\star$
Da $y = x' \Rightarrow x(t) = -\frac{k}{A}e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2 \Rightarrow x(t) = c_1e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2$ ist eine Lösung von $x'' + Ax' = B$ für beliebige konstanten c_1, c_2
Bemerkung:
Die allgemeine Formel $\star$ für eine Differentialgleichung $y' + Ay = B$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ taucht in Verbindung mit zwei Nobelpreisen auf: 1923 Mellikan - Physik; 1987 Solow - Ökonomie
Für $A = 0$ lautet die Differentialgleichung $x'' = B$, also $x(t) = \frac{B}{2}t^2 + c_1t + c_2$.
Wie vergleicht sich die Lösung für $A \neq 0$ im limes $A \to 0$ mit dieser Lösung.
$\underline{limA \to 0}$: Vergleiche (für y) die Lösung $ke^{-At} + \frac{B}{A}, k = -\frac{c}{A}, a \neq 0$ geht für $A \to 0$ nicht gegen $Bt + k$ für festes B,k
Fehler: k fest für $A \to 0$.
Der Anfangswert für $t_0 = 0$ $y_0 = k + \frac{B}{A}$ sollte fest sein, auch für $A \to 0$.
Für $A \neq 0, y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$, also $k = (y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}$. Dann ist die Lösung des AWP $y' + Ay = b, y(t_0) = y_0$ für $A \neq 0$ $(y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}e^{-At} + \frac{B}{A} = y_0e^{-A(t-t_0)} + B\frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A}\star$. Das AWP

$y' = B, y(t_0) = y_0$ für $A = 0$ hat die (eindeutige) Lösung $y_0 + B(t - t_0)$. Nun betrachte für festes B und y_0 (nicht festes k) für $A \to 0$ die rechte Seite von $\star$; $y_0 e^{-A(t-t_0)} \to y_0 e^{-0(t-t_0) \to y_0}$ und $\lim\limits_{A\to 0} \frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A} \underset{l'Hopital}{=} \frac{(t-t_0)e^{-A(t-t_0)}}{1} = t - t_0 \Rightarrow$ der limes $A \to 0$ ist $y_0 + B(t - t_0)$.

2.9 Separable Differentialgleichung ; bei ihr (2.7)

Definition: Sei $t \geq 0$. Eine separable Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form $x'(t) = a(t)f(x(t))$ bzw. $x(t) = a(t)f(x)$. Hier sind a und f bekannte Funktionen. Der Fall a = konst ist der Fall einer autonomen Differentialgleichung . Wir können auch schreiben $\frac{dx}{f(x)} = a(t)dt$, falls $f(x) \neq 0$ und $\int \frac{dx}{f(x)} = \int a(t)dt$.

3 Differentialgleichung erster Ordnung - eine dynamische Perspektive

"Poincare'sches Prinzip"
sehr verschiedene Phänomene können durch sehr ähnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Erkenntnisse über die Differentialgleichung in einer spezifischen Situation geben Hinweise über das Verhalten ihrer Lösungen und diese können dann auf jede konkrete Interpretation der Differentialgleichung angewendet werden.

3.1 Newton'sches Gesetz eines Abkühlvorgangs

(1701) anonym publiziert
Falls ein Objekt eine andere Temperatur als seine Umgebung hat, dann ist die rate des Wärmetransfers proportional zur Temperaturdifferenz von Objekt und Umgebung. $\to$ inspirierte Fourier zu den Fourierreihen.
Sei $x(t)$ die Temperatur des Objektes zum Zweitpunkt t (befindet sich z.B. in einem sehr großen Raum oder dem Boden eines Sees). Das umgebende Medium habe die Temperatur $T(t)$ (Luft, Wasser)
Dies wird nicht von Objekten beeinflusst. $x'(t) = -k(x(t) - T(t)), k > 0$. k wird durch die spezifischen physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Situation bestimmt.
Falls $T(t) = T_0 = const., x' = -k(x - T_0)$. Sei $x_0 := x(t_0)$. $x' = (x - T_0)' = -k(x - T_0) \Rightarrow y' = -ky \Rightarrow y(t) = c_0 e^{-kt} \Rightarrow x(t_0) = T_0 + (x_0 - T_0)e^{-k(t-t_0)}$, da $x_0 - T_0 = x(t_0) - T_0 = c_0 e^{-kt_0}$, also $c_0 = (x_0 - T_0)e^{kt_0}$.
Wir hätten auch $\frac{1}{x-T_0}\frac{dx}{dt} = -k \Leftrightarrow \frac{dx}{x-T_0} = -kdt$ ausnutzen können.
Experimentelle Überprüfung

(i) Entweder lassen wir die Anfangstemperatur des Objektes fest und plotten die Lösung für verschiedene k,

(ii) oder wir lassen k fest und plotten die Lösung für verschiedene x_0.

(i) bezieht sich auf viele Umgebungen, die alle von derselben Anfangstemperatur aus abkühlen.
(ii) bezieht sich auf eine gegebene Umgebung, die von verschiedenen Ausgangstemperaturen abkühlt.
Der exponentielle Abfall erklärt z.B. auch, warum kalte Getränke im Sommer so schnell warm werden.

23.10.25: $x = -k(x - T_0)$
Wie können wir durch zwei Messungen k bestimmen, unter der Voraussetzung, dass unsere Differentialgleichung das passende Modell ist und dass die Außentemperatur konstant T_0 ist? Mit Anfangstemperatur $x(0)$ und Temperatur zum Zeitpunkt 20, $x(20)$. Sei $T_0 = 80^{\circ}F, x(0) = 160^{\circ}F, x(20) = 145^{\circ}F$.

$$\begin{aligned} x(20) - T_0 &= (x(0) - T_0)e^{-20k} \\ \Rightarrow 145 - 80 &= (160 - 80)e^{-20k} \\ \Leftrightarrow 65 &= 80e^{-20k} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{20}ln(\frac{65}{80}) \approx 0,01038 \end{aligned}$$

Nun können wir Vorhersagen treffen:
Wie lange dauert es, bis das Objekt von seinen 145°F zum Zeitpunkt t auf 85°F abgekühlt ist? Sei nun $x(0) = 145, x(t) = 80 + 65e^{-kt}, x(t) \overset{!}{=} 85$, d.h. für $5 = 65e^{-kt} \Leftrightarrow 1 = 13e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{ln(13)}{k} \approx 246,6$.
Das Newton'sche Gesetz funktioniert nicht mehr, wenn die Objekt-Umgebungstemperaturdifferenz sehr groß ist.

4 Stationäre Zustände, Stabilität, Phasendiagramme

$x' = f(x)$ ist eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung.

4.1 Definition: stationäre Lösung

Eine stationäre Lösung einer autonomen Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ ist eine konstante Funktion $x(t) = c$, die diese Differentialgleichung löst, d.h. $f(c) = 0$.

4.2 Beispiele

Stationäre Lösungen von $x' = 3x$ und $x' = x^2$ sind $c = 0$

(a) $x' = 3x$ und $x' = x^2$ sind $c = 0$

(b) $x' = x^2 - s$ sind $c = 1$ und $c = -1$

(c) $x' = x^2 + 1$ existieren nicht für reelle c

(d) $x' = rx(1 - \frac{x}{K}), r, K > 0$ (logistische Gleichung) sind $c = 0$ und $c = K$, unabhängig von r.

4.3 Theorem

Betrachte $x'(t) = f(x(t))$ (autonome Differentialgleichung). Falls zwei voneinander verschiedene Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ existieren, dann berühren sich ihre Graphen <u>nie</u>. Falls $x(t)$ nicht konstant ist, dann liegt der zugehörige Graph <u>ganz</u> auf einer Seite der stationären Lösungen.

4.4 Definition: Stabilität von Lösungen von autonomen Differentialgleichungen

Eine stationäre Lösung c für die Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ heißt stabil, falls für $x_0 \approx c$ die Lösung des Anfangswertproblems (AWP) $x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$ für $t \to$ inf gegen c konvergiert (attraktiv)
c heißt instabil, falls ein r ¿ 0 existiert, sodass für alle $x_0 \approx c$ die Lösung des AWP ab einem gewissen Zeitpunkt einen Abstand $> r$ von c hat und für alle größeren Zeiten dort verbleibt (abstoßend)
c heißt semi-stabil, falls es auf einer Seite stabil und auf der anderen Seite instabil ist.
Bemerkung: Diese Klassifikation ist nicht vollständig. Beispiel: $x' = e^{-\frac{1}{x^2}} sin(\frac{1}{x}), c = 0$.
Stabilität bedeutet z.B., dass kleine Messfehler die Vorhersagen des Verhaltens in der Nähe stationärer Lösungen nicht beeinflussen. Instabile Lösungen sieht man im Experiment mit großer Wahrscheinlichkeit nicht.

4.5 Theorem

Betrachte die autonome Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ für $t \geq 0$ und "genügend glattes" f.
Sei $x(t) = c$ eine stationäre Lösung , d.h. $f(c) = 0$.

(i) c ist stabil, falls der Graph von f nah bei c die horizontale Achse von positiv nach negativ durchkreuzt, d.h. $f'(c) < 0$.

(ii) c ist instabil, falls $f'(c) > 0$

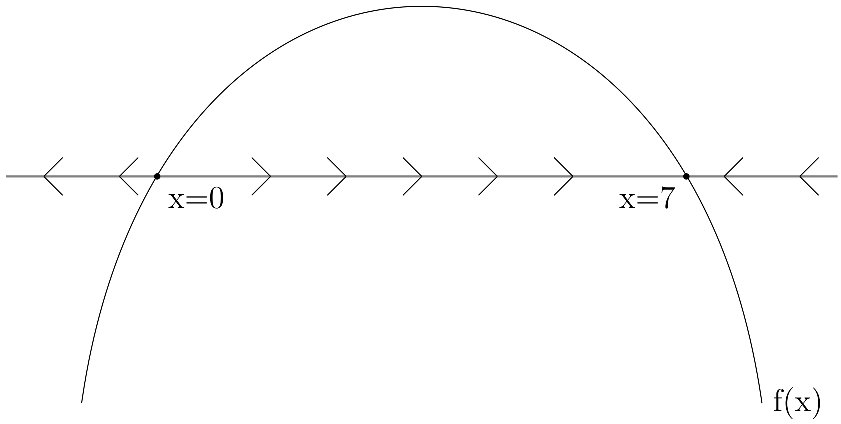
(iii) c ist semi-stabil, falls $f'(c) = 0$ und $f''(c) \neq 0$.

Falls $f'(c) = f''(c) = 0$, dann muss der Graph von f näher studiert werden.

4.6 Beispiel

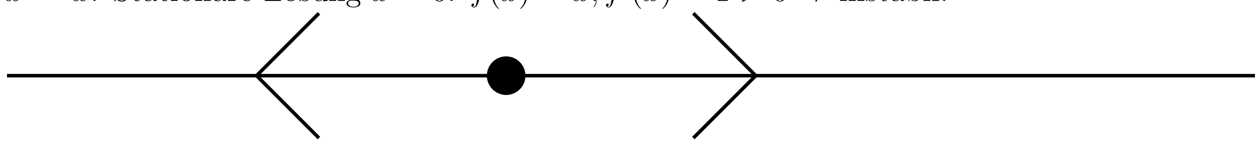
Betrachet die allgemeine logistische Differentialgleichung $x'(t) = rx(t)(1 - \frac{x}{K}) = rx - \frac{rx^2}{K}$ für $r, K > 0$ und $t \geq 0$.
Sei $x(0) \geq 0$. Dieses AWP besitzt die Lösung $x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0)+(K-x(0))e^{-rt}}$ (prüfe durch Einsetzen).
Die Lösungskurven $x(t)$ für $t \geq 0$ und $x(0) \geq 0$ wechseln Konkarität an der Horizontalen $\frac{K}{2}$ (Wendestellen). K zieht Lösungen an, 0 stößt Lösungen ab.

Phasenlinien/Phasendiagramme
$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$, hier mit Parameter $r = 2, K = 7$. Falls $x(0) = 0$ oder $x(0) = 7$ passiert nichts mehr.
Falls $x(0) > 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$,
Falls $0 < x(0) < 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) > 0$,
Falls $x(0) < 0 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$.
$f(x) = 2x(1 - \frac{x}{7}) \to$ Phasendiagramm:

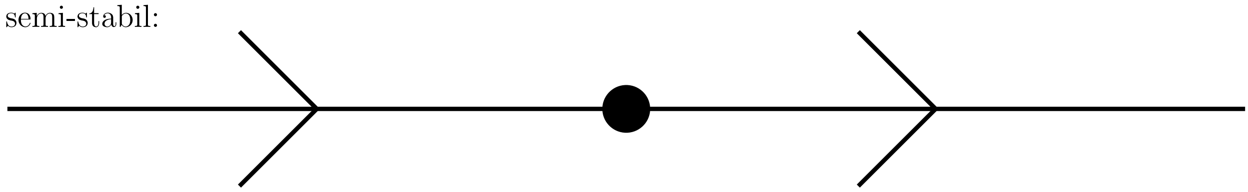


4.7 Beispiele

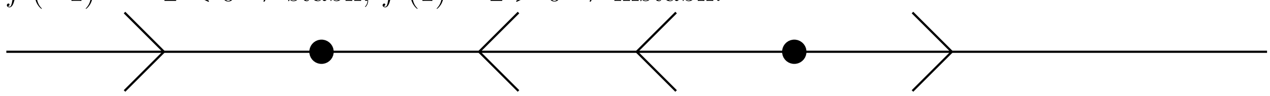
(a) $x' = x$: Stationäre Lösung $x = 0$. $f(x) = x, f'(x) = 1 > 0 \Rightarrow$ instabil:



(b) $x' = x^2$: Stationäre Lösung $x = 0$. $f(x) = x^2, f'(x) = 2x \overset{\text{für } x=0}{=} 0, f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ semi-stabil:



(c) $x' = x^2 - 1$. Stationäre Lösungen $x = 1, x = -1$. $f(x) = x^2 - 1, f'(x) = 2x$, $f'(-1) = -2 < 0 \Rightarrow$ stabil, $f'(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ instabil:



5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung und AWP

5.1 Definition

Für linerare Differentialgleichungen der Form $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$, legt das assoziierte AWP zwei Werte fest: $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = x'_0, x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$.

5.2 Theorem

Betrachte $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$.
Dann gibt es ein Lösungspaar $x_1(t), x_2(t)$, welches explizit durch Lösungen der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ beschrieben werden kann, sodass jede Lösung der Differentialgleichung eindeutig wie folgt ausgedrückt werden kann:
$x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Weiter gilt: Für jedes t_0 und jedes x_0, x'_0 existiert

genau eine solche Lösung , die das AWP mit $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$ erfüllt.
27.10.25:

5.3 Wichtiges praktisches Beispiel

(a) $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega > 0$
goodnotes 5 (Bild von Feder an der Wand, x ist Ausschlag)
Feder an der Wand, Masse an einer Feder. Annahme: Reibung spielt keine Rolle, $x(t)$ - Position der Feder. Ziehen oder Zusammendrücken der Feder lässt die Position der Masse oszillieren, $x = 0$ Ruhezustand. Das Bewegungsgesetz(Newton) und das Hook'sche Gesetz für Federn $mx'' + kx = 0$, wobei $m > 0$ die Masse des an der Feder befestigten Objektes ist und $k > 0$ die Federkonstante, d.h. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. (Bem. Es gibt auch nichtlineare Federn.)

(b) LC-Schaltkreis/Schwingkreis:
elektronischer Schaltkreis, der aus einer Induktivität (z.B. Spule) L und einem Kondensator besteht. Das Kirckhoffsche Gesetz besagt, dass der elektrische Strom $I(t)$ folgende Dynamik hat:
$LI''(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$. L ist die Induktivität und C die sogenannte Kapazität des Kondensators, d.h. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
Betrachte allgemein $x'' + ax' + bx = 0$.
Ansatz: $e^{\lambda t} = x(t)$. Dann ist $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}, x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Also $\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$ bzw. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.
Dies ist das charakteristische Polynom der DGL $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}, \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}$. Falls $\frac{a^2}{4} - b$ bzw. $a^2 - 4b > 0$, also λ_1, λ_2 reell erhalten wir zwei verschiedene Lösungen $x_1(t == e^{\lambda_1 t}, x_2(t == e^{\lambda_2 t}$. Damit ist eine allgemeine Lösung $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Betrachte: $x'' - x = 0$. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{-t} \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ist eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung .

5.4 Definition

Eine Linearkombination von Funktionen $f_1, f_2, ..., f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form $h(t) = c_1 f_1(t) + ... + c_m f_m(t), c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$.
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißen linear unabhängig, falls sie kein Vielfaches voneinander sind.

- $-5t^3 + 2t^2 - 3$ ist eine Linearkombination von t^3, t^2, t und $t^0 = 1$, die linear unabhängig sind.

- $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ sind linear unabhängig, falls $e^{\lambda_1 t} \neq ce^{\lambda_2 t}$. Dies ist der Fall für $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- Betrachte $x'' + x' - 2x = 0$. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_1 01, \lambda_2 = -2 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$ ist eine allgemeine Lösung.

- $x'' + bx = 0$. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + b = 0$. Falls $b < 0$, schreibe $b = -k^2$, also $\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm k \Rightarrow x(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$ ist eine allgemeine Lösung.
Falls $b > 0$, dann hat $\lambda^2 + b$ keine reelle Wurzel. Hier finden wir andere Lösungen als die zuvor vermuteten Exponentialfunktionen.

- x"+x=0. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ hat keine reellen Lösungen . $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -1$. Betrachte $x_1(t) = e^{it}$ und $x_2(t) = e^{-it}$. Für die allgemeine Differentialgleichung $x'' + ax' + bx = 0$ und Lösungen $u + iv$, u, v reell gilt:
  $(u'' + iv'') + a(u' + iv') + b(u + iv) = (u'' + au' + bu) + i(v'' + av' + bv) = 0$
  $\Rightarrow$ sowohl u wie v sind Lösungen der Differentialgleichung.
  $e^{it} = cos(t) + i \cdot sin(t), e^{-it} = cos(t) - i \cdot sin(t)$. Sowohl cos(t) wie sin(t) ist eine Lösung von $x'' + t = 0$.

- $x'' - 2x' + 2x = 0$. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 2\lambda + 2$. Setze es gleich 0. $\lambda_{1,2} = 1 \overset{+}{-} \sqrt{1-2} = 1 \overset{+}{-} i$. Komplexwertige Lösung sind $e^{(1+i)t}$ und $e^{(1-i)t}$ bzw. $e^t(cos(t) + i \cdot sin(t))$ und $e^t(cos(t) - i \cdot sin(t))$. Lösungen sind $x_1(t) = e^t cos(t), x_2(t) = e^t sin(t)$ (Prüfe nochmal durch einsetzen). Allgemeine Lösungen sind dann $x(t) = c_1 e^t cos(t) + c_2 e^t sin(t)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- $x'' - 2x' + x = 0$ Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ mit der einzigen Wurzel $\lambda = 1$: $x_1(t) = e^t$.
  <u>Versuch:</u> $x = te^t$. Dann ist $x' = te^t + e^t$ und $x''te^t + e^t + e^t = te^t + 2e^t \Rightarrow x'' - 2x' + x = te^t + 2e^t - 2te^t - 2e^t + te^t = 0$.
  $\Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$ ist eine allgemeine Lösung , $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. <u>Bemerkung:</u> e^{rt} und $te^r t$ sind linear unabhängig.

5.5 Theorem

Betrachte $x'' + ax' + bx = 0$ für $t \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$.
Seien λ_1, λ_2 die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $\Lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Definiere dazu sogenannte Grundlösungen $x_1(t), x_2(t)$ wie folgt:

1. Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beide reell, dann sei $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ und $x_2(t) := e^{\lambda_2 t}$
2. Falls $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, also $\lambda_1, \lambda_2 = r_0 \overset{+}{-} is_0$ mit $r_0 = \frac{-a}{2}, s_0 = \frac{1}{2}\sqrt{|a^2 - 4b|} = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2} > 0$
3. Falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dass sein $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ und $x_2(t) := e^{\lambda_1 t}$. Diese Lösungen sind linear unabhängig. <u>Alle</u> Lösungen der Differentialgleichung haben die Form $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und es existiert <u>genau ein</u> $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$ für jede Wahl von t_0, x_0, x'_0.

6 Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen und Eigenschaften

6.1 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$. Setze $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -ax'(t) - bx(t) + f(t) \\ &= -ay_2(t) - by_1(t) + f(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ System von Differentialgleichungen erster Ordnung, linear
$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ und $y'(t) = Ay(t) + F(t)$ für $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

Die Spur von A ist $(-a)$, die Determinante ist b. Das charakteristische Polynom von A ist $\lambda^2 - Spur(A) \cdot \lambda + det(a) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von A.

6.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte für $n > 1$ die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:
$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1x' + a_0x = f(t)$. Definiere $y_1 = x, y_2 = x', ..., y_n = x^(n-1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y_1' &= x' = y_2 \\ y_2' &= x'' = y_3 \\ &\quad ... \\ y_{(n-1)}' &= x^{(n-1)} = y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_n' = x^{(n)} &= -a_{n-1}x^{(n-1)} - ... - a_1x' - a_0x + f(t) \\ &= -a_0y_1 - a_1y_2 - ... - a_{n-2}y_{n-1} - a_{n-1}y_n + f(t) \end{aligned}$$

Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, dann ist $y'(t) = Ay(t) + F(t)$ für $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

30.10.25: Wie finden wir Lösungen ?

6.3 Beispiel

$n = 2$. Falls A eine Diagonalmatrix ist, wir also $x'(t) = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ betrachte, dann gilt $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \end{pmatrix}$. Mit $x(t_0) = x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ist $x_1(t) = \alpha e^{\lambda_1(t-t_0)}$ und $x_2(t) = \beta e^{\lambda_2(t-t_0)}$, da das System entkoppelt ist.
Für nicht-diagonale A verfahre wie folgt:
Seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängige Eigenvektoren. Also $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$ und $A\vec{w} = \lambda_2\vec{w}$. Diese existieren immer, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ in $\mathbb{R}$ sind. Dann können wir $x(t)$ mit Hilfe dieser Eigenvektorbasis ausdrücken: $x(t) = u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}$
Also $x'(t) = u_1'(t)\vec{v} + u_2'(t)\vec{w}$ und $Ax(t) = A(u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}) = u_1(t)A\vec{v} + u_2(t)A\vec{w} = \lambda_1u_1(t)\vec{v} + \lambda_2u_2(t)\vec{w}$
$\Rightarrow u_1'(t)\vec{v} + u_2'(t)\vec{w} = \lambda_1u_1(t)\vec{v} + \lambda_2u_2(t)\vec{w}$. Da $\vec{v}, \vec{w}$ eine <u>Basis bilden</u>, muss $u_1'(t) = \lambda_1u_1(t), u_2'(t) = \lambda_2u_2(t)$
$\Rightarrow u_1(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}, u_2(t) = u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)}$ und $x(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}\vec{v} + u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)}\vec{w}$
Also müssen die Eigenvektoren von A explizit berechnet werden. Für die Anfangswerte betrachten wir:

$u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w} = x(t) = x_1(t)\vec{e_1} + x_2(t)\vec{e_2}$

Definiere $E = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Also $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ bzw. $u(t) = E^{-1}x(t)$ auch für $t = t_0$.

7 Differentialgleichungen erster Ordnung, Existenz und Eindeutigkeit (von Lösungen) (Picard-Lindelöf)

7.1 Vorraussetzung

Betrachte $x'(t) = f(x(t), t)$ für $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ mit $x(t_0) = x_0$.
Sei S die Menge $\{(t, x) : t_0 \leq t \leq a, -\inf < x < \inf\}$. Sei f auf S definiert und erfülle f eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x, d.h.:
$(\star)$ $|f(x,t) - f(\overline{x}, t)| \leq L|x - \overleftarrow{\overline{x}}|, L \geq 0$.

7.2 Theorem

Gelte 7.1. Sei f stetig auf S, einschließlich $(\star)$.
Dann hat das Anfangswertproblem $x' = f(x,t), x(t_0 = x_0$ genau eine Lösung $x(t)$. Sie existiert auf ganz $t_0 \leq t \leq t_0 + a$.
Beweis: Wir wollen einen Fixpunktsatz verwenden. Definiere $J := [t_0, t_0 + a]$.
Sei $x(t)$ eine in J differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems. Da f stetig ist, ist auch $u(t) := f(x(t), t)$ in J stetig. Also $x(t)$ sogar stetig differenzierbar. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann:
$(\star\star)$ $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$. Umgekehrt genügt jede in J stetige Lösung von $(\star\star)$ der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$.
Die rechte Seite von $(\star\star)$ ist stetig differenzierbar und damit auch $x(t)$ und $x'(t) = f(x(t), t)$.
Unser Anfangswertproblem ist also gleichwertig mit der Integralgleichung $(\star\star)$.
Schreibe dies in der Form $x = Tx$ mit $(Tx)(t) = \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$.
Der Integraloperator ordnet jeder Funktion aus dem Banachraum $\{f \mid f$ ist stetige Funktion auf $J\} =: C(J)$ eine Funktion Tx aus demselben Raum zu. Die Lösungen unseres AWP in 7.1 sind also gerade die Fixpunkte des Operators $T : C(J) \to C(J)$. Nach dem Fixpunktsatz (siehe unten) ist unser Theorem bewiesen, falls wir zeigen können, dass T einer Lipschitzbedingung mit Konstante $k < 1$ genügt.
Normiere $C(J)$ mit der Maximumsnorm $||x||_0 := max\{|x(t)| : t \in J\}$.
Seien $x, y \in C(J)$. Dann gilt $|T(x)(t) - (Ty)(t)| = |\int_{t_0}^t f(x(s), s) - f(y(s), s)ds| \leq \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)|ds \leq L||x - y||_0(t - t_0)$
$\Rightarrow ||Tx - Ty||_0 \leq La||x - y||_0$. T genügt also einer Lipschitzbedingung, aber La ist nur dann < 1, wenn $a < \frac{1}{L}$.
Betrachte stattdessen eine gerichtete Maximum-Norm $||x||_\alpha := max\{|x(t)|e^{-\alpha t}|t \in J\}, \alpha > 0$.
Nun schätze wie folgt ab:
$L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)|e^{-\alpha s}e^{\alpha s}ds \leq L||x - y||_\alpha \int_{t_0}^t e^{\alpha s}ds \leq L||x - y||_\alpha \frac{e^{\alpha s}}{\alpha}$
$\Rightarrow |(Tx)(t) - (Ty)(t)|e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha}||x - y||_\alpha$. Wähle nun $\alpha = 2L$, dann genügt T einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten $\frac{1}{2}$ und wir haben Existenz im ganzen Intervall. Das Ganze geht auch für $[t_0 - b, t_0]$. $\square$

Fixpunktsatz: Sei B ein Banachraum, das heißt ein vollständiger, linearer, normierter Raum. Sei $\emptyset \neq D \subset B$ abgeschlossen. Sei $T : D \to T(D) \subset D$. Genügt T einer Lipschitzbedingung in D mit einer Lipschitzkonstante $k < 1$. Das heißt $||Tx - T\widetilde{x}|| \leq k||x - \widetilde{x}||$. Dann hat $Tx = x$ genau eine Lösung x =: $\overline{x}$.
Betrachte das Iterationsverfahren:
$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, ..., x_{n+1} = Tx_n$. Dann gilt:
$||\overline{x} - x_n|| \leq \frac{k^n}{1-k}||x_1 - x_0||$. Insbesondere konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\overline{x}$ im Sinne der Norm $||.||$.

Lokale Lipschitzbedingung (Unterkapitel ohne Nummer xD)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. $f(x,t)$ genügt in D einer <u>lokalen</u> Lipschitzbedingung bezüglich x, <u>wenn</u> zu jedem $(x_0, t_0) \in D$ eine Umgebung $U = U(x_0, t_0)$ und $L = L(x_0, t_0)$ existiert, sodass f in $D \cap U$ einer Lipschitzbedingung $|f(x,t) - f(\widetilde{x}, t)| \leq L|x - \widetilde{x}|$ genügt.
<u>Kriterium:</u> Falls D offen ist und $f \in C(D)$ eine in D stetige Ableitung f_x besitzt, dann genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.
<u>Beispiel:</u> $f(x,t) = x^2$: $|f(x,t) - f(\widetilde{x}, t)| = |x^2 - \widetilde{x}^2| = |x + \widetilde{x}||x - \widetilde{x}|$ genügt auf $\mathbb{R}^2$ einer lokalen, aber <u>keiner</u> globalen Lipschitzbedingung.
03.11.25: