

# 0 Infos zu diesem Skript

Dieses Skript ist nicht garantiert vollständig. An den Stellen, an denen "goodnotes  $x$ " für  $x \in \mathbb{N}$  steht, fehlt ein Teil der Vorlesung. Dieser wird evtl. in Zukunft noch ergänzt. Bei Fragen oder ähnlichem Mail an [jminor@uni-muenster.de](mailto:jminor@uni-muenster.de).

# 1 Einleitung

16.10.25:

Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Unbekannte eine Funktion ist, statt einer Zahl. Dabei wird Gleichheit zwischen Ausdrücken, die die Funktion und ihre Ableitungen betreffen, beschrieben.

Relevanz von Differentialgleichungen in Biologie, Chemie, Computer/Datenwissenschaften, Ingenieurswesen, Medizin, Ökonomie,...

<diverse Beispiele>

Die meisten Differentialgleichungen sind nicht explizit lösbar. Wir können sie diskretisieren und numerische Lösungen simulieren.

Wofür brauchen wir Analysis?

Der Output einer numerischen Simulation ist eine Approximation. Diese muss bewertet werden. Bsp.: 1950er Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gerieten Hochgeschwindigkeitsflugzeuge in tödliches Trudeln. Ingenieure hatten das nicht erwartet. Grund: Nichtlinearitäten, die (noch) besser approximiert werden mussten, spielten bei sehr hoher Geschwindigkeit plötzlich eine größere Rolle bei "kleineren hohen" Geschwindigkeiten.

"Dirac" - Man versteht eine Gleichung ungefähr, wenn man die Eigenschaften ihrer Lösungen vorhersagen kann, ohne die Gleichung selbst zu lösen.

## 2 Einige konkrete Beispiele

### 2.1

$x'(t) = 3x(t)$ , Lösung  $x(t) = ce^{3t}$  - sind das alle Lösungen?

Differentialgleichungen vom Typ  $x'(t) = \mu x(t), \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$  tauchen auf bei der Modellierung von Bakterienwachstum in der Petrischale, <diverse Beispiele>.

### 2.2

$$\tan'(t) = \sec^2(t) = \tan^2(t) + 1, \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$x'(t) = x^2(t) + 1$$

Ist  $\tan(t)$  die einzige Lösung? // Multiplikation mit Konstanten, um mehr Lösungen zu erzeugen, funktioniert hier nicht.

Versuch: Ausnutzung der Periodizität

$$x(t) = \tan(t + a) \text{ im Intervall } (-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$$

Weiter ist  $(-\cot)' = -\cot'(t) = \csc^2(t) = (\frac{1}{\sin(t)})^2 = (-\cot(t))^2 + 1$  eine Lsg und  $\tan(t + \frac{\pi}{2}) = -\cot(t)$

### 2.3

$x'(t) = \mu \sqrt{x(t)}, \mu > 0$ . Hier  $x(t) \geq 0$ , damit die Wurzel gezogen werden kann.

Anwendung:  $x(t)$  beschreibt die Höhe einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Tank mit Radius R, welche durch ein kleines Loch im Boden ausläuft. ("Torricelli's Gesetz")

## 2.4 Wie können wir autonome Differentialgleichungen lösen?

$x'(t) = f(x(t))$  oder  $x' = f(x)$  (das ist eine autonome DGL)

Bsp.:  $x' = 3x$  bzw.  $\frac{dx}{dt} = 3x$ . Annahme  $x \neq 0$ , dann gilt:

$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 3$ . Schreiben symbolisch:  $\frac{dx}{x} = 3dt$ . Integriere und behandle dabei x und t als unabhängige Variablen.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int 3 dt \\ \Leftrightarrow \ln|x| + c_1 &= 3t + c_2 \\ \Rightarrow \ln|x| &= 3t + c, c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow |x(t)| &= e^{3t+c} = e^{3t}e^c = e^{3t}k, k > 0 \Rightarrow x(t) = ke^{3t}, k \neq 0 \end{aligned}$$

Da  $k \neq 0$ , haben wir nicht durch 0 geteilt. Aber  $x(t) = 0$  ist auch eine Lösung.

### 2.4.1 Theorem

Sei  $r \in \mathbb{R}$ . Die Lösung von  $x'(t) = r \cdot x(t)$  sind genau  $x(t) = x_0 e^{rt}$ , wobei  $x_0 = x(0)$  ist. Beweis:

Betrachte  $y(t) = \frac{x(t)}{e^{rt}} = x(t)e^{-rt}$ .

Dann gilt  $y'(t) = -re^{-rt}x(t) + e^{-rt}x'(t) = e^{-rt}(-rx(t) + rx(t)) = 0$

$\Rightarrow y(t) = \text{const.} \Rightarrow$  Behauptung

## 2.5 Beispiel

$$\begin{aligned} x'(t) = x(t)^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = 1 \text{ falls } x \neq 0 \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} &= \int dt \\ \Rightarrow -\frac{1}{x} + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x} &= t + c \text{ mit } c = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{1}{t + c} \text{ für } t \neq -c \end{aligned}$$

und  $x \equiv 0$  ist ebenfalls eine Lösung.

## 2.6 Beispiel

$x' = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \frac{dx}{dt} = 1$  Hier wird nie durch 0 dividiert.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \int dt \\ \Leftrightarrow \arctan(x) + c_1 &= t + c_2 \\ \Leftrightarrow \arctan(x) &= t + a \text{ für eine Konstante } a \\ \Rightarrow x &= \tan(t + a) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Intervall  $(-a - \frac{\pi}{2}, -a + \frac{\pi}{2})$  definiert.

20.10.25:

Learning Center Termin: 14-16 Uhr im ComputerPool

## 2.7 Beispiel: "Blow-Up" in endlicher Zeit, (2.5) bei ihr

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{\rightarrow \inf}{\rightarrow -\inf} \text{ für } t \rightarrow 1^- \\ \stackrel{\rightarrow -\inf}{\rightarrow \inf} \text{ für } t \rightarrow 1^+ \end{array} \right.$$

Bemerkung: Was bedeutet ein "blow-up"?

- Für die spezifische Anwendung spielt der Zeitpunkt des "blow-ups" keine Rolle, ist also irrelevant
- Die Anwendung beruht auf Modellhypthesen, die Nahe dem blow-up Zeitpunkt "zusammenbrechen"/ungültig werden
- Das untersuchte Phänomen durchläuft eine "katastrophale" Dynamik, z.B. thermisches Durchgehen von Batterien

Der Differentialgleichung selbst sieht man dieses Verhalten nicht ohne weiteres an. Hier spielt also die Definition, was eine Lösung ist, eine Rolle und die Existenz von solchen Lösungen.

## 2.8 Beispiel, (2.6) bei ihr

Betrachte  $x''(t) + Ax'(t) = B$  für Konstanten  $A, B; A \neq 0$ . Da  $x$  selbst nicht vorkommt, betrachte  $y = x' \Rightarrow y'(t) + Ay(t) = B$ .

$$\int \frac{dy}{-Ay + B} = \int dt = t + c, \text{ für } y \neq \frac{B}{A}.$$

Setze  $u = -Ay + B, du = -Ady \Rightarrow \int \frac{dy}{-Ay + B} = \int \frac{-\frac{1}{A}du}{u} = -\frac{1}{A} \ln|u| = -\frac{1}{A} \ln|-Ay + B| \Rightarrow \ln|-Ay + B| = -At - Ac \Rightarrow -Ay + B = \bar{c}e^{-At}$ , wobei  $\bar{c} = \pm e^{-Ac} \neq 0$ .

Wir erhalten die Lösungsformel  $y_k(t) = ke^{-At} + \frac{B}{A}$  für  $k = -\bar{c}/A \neq 0$ . Hier korrespondiert  $k = 0$  zur Lösung  $y = \frac{B}{A}$ , die wir beim Dividieren ausschließen mussten.

Sei  $y_k(t_0) = y_0$ , dann ist  $y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$ , also  $k = e^{At_0}(y_0 - \frac{B}{A})$

$$\Rightarrow y(t) = (y_0 - \frac{B}{A}e^{-A(t-t_0)} + \frac{B}{A}) \star$$

Da  $y = x' \Rightarrow x(t) = -\frac{k}{A}e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2 \Rightarrow x(t) = c_1e^{-At} + \frac{B}{A}t + c_2$  ist eine Lösung von  $x'' + Ax' = B$  für beliebige konstanten  $c_1, c_2$

Bemerkung:

Die allgemeine Formel  $\star$  für eine Differentialgleichung  $y' + Ay = B$  mit Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$  taucht in Verbindung mit zwei Nobelpreisen auf: 1923 Mellikan - Physik; 1987 Solow - Ökonomie

Für  $A = 0$  lautet die Differentialgleichung  $x'' = B$ , also  $x(t) = \frac{B}{2}t^2 + c_1t + c_2$ .

Wie vergleicht sich die Lösung für  $A \neq 0$  im limes  $A \rightarrow 0$  mit dieser Lösung.

limA → 0: Vergleiche (für y) die Lösung  $ke^{-At} + \frac{B}{A}, k = -\frac{c}{A}, a \neq 0$  geht für  $A \rightarrow 0$  nicht gegen  $Bt + k$  für festes B,k

Fehler: k fest für  $A \rightarrow 0$ .

Der Anfangswert für  $t_0 = 0$   $y_0 = k + \frac{B}{A}$  sollte fest sein, auch für  $A \rightarrow 0$ .

Für  $A \neq 0, y_0 = ke^{-At_0} + \frac{B}{A}$ , also  $k = (y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}$ . Dann ist die Lösung des AWP  $y' + Ay = b, y(t_0) = y_0$  für  $A \neq 0$   $(y_0 - \frac{B}{A})e^{At_0}e^{-At} + \frac{B}{A} = y_0e^{-A(t-t_0)} + B \frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A} \star$ . Das AWP  $y' = B, y(t_0) = y_0$  für  $A = 0$  hat die (eindeutige) Lösung  $y_0 + B(t - t_0)$ . Nun betrachte für festes B und  $y_0$  (nicht festes k) für  $A \rightarrow 0$  die rechte Seite von  $\star$ ;  $y_0e^{-A(t-t_0)} \rightarrow y_0e^{-0(t-t_0)} \rightarrow y_0$  und  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1-e^{-A(t-t_0)}}{A} = \frac{(t-t_0)e^{-A(t-t_0)}}{1} = t - t_0 \Rightarrow$  der limes  $A \rightarrow 0$  ist  $y_0 + B(t - t_0)$ .

## 2.9 Separable Differentialgleichung ; bei ihr (2.7)

Definition: Sei  $t \geq 0$ . Eine separable Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form  $x'(t) = a(t)f(x(t))$  bzw.  $x(t) = a(t)f(x)$ . Hier sind  $a$  und  $f$  bekannte Funktionen. Der Fall  $a = \text{konst}$  ist der Fall einer autonomen Differentialgleichung. Wir können auch schreiben  $\frac{dx}{f(x)} = a(t)dt$ , falls  $f(x) \neq 0$  und  $\int \frac{dx}{f(x)} = \int a(t)dt$ .

## 3 Differentialgleichung erster Ordnung - eine dynamische Perspektive

”Poincare’sches Prinzip”

sehr verschiedene Phänomene können durch sehr ähnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Erkenntnisse über die Differentialgleichung in einer spezifischen Situation geben Hinweise über das Verhalten ihrer Lösungen und diese können dann auf jede konkrete Interpretation der Differentialgleichung angewendet werden.

### 3.1 Newton’sches Gesetz eines Abkühlvorgangs

(1701) anonym publiziert

Falls ein Objekt eine andere Temperatur als seine Umgebung hat, dann ist die Rate des Wärmetransfers proportional zur Temperaturdifferenz von Objekt und Umgebung. → inspirierte Fourier zu den Fourierreihen.

Sei  $x(t)$  die Temperatur des Objektes zum Zeitpunkt  $t$  (befindet sich z.B. in einem sehr großen Raum oder dem Boden eines Sees). Das umgebende Medium habe die Temperatur  $T(t)$  (Luft, Wasser)

Dies wird nicht von Objekten beeinflusst.  $x'(t) = -k(x(t) - T(t))$ ,  $k > 0$ .  $k$  wird durch die spezifischen physikalischen Eigenschaften der jeweiligen Situation bestimmt.

Falls  $T(t) = T_0 = \text{const.}$ ,  $x' = -k(x - T_0)$ . Sei  $x_0 := x(t_0)$ .  $x' = (x - T_0)' = -k(x - T_0) \Rightarrow y' = -ky \Rightarrow y(t) = c_0 e^{-kt} \Rightarrow x(t_0) = T_0 + (x_0 - T_0)e^{-k(t-t_0)}$ , da  $x_0 - T_0 = x(t_0) - T_0 = c_0 e^{-kt_0}$ , also  $c_0 = (x_0 - T_0)e^{kt_0}$ .

Wir hätten auch  $\frac{1}{x-T_0} \frac{dx}{dt} = -k \Leftrightarrow \frac{dx}{x-T_0} = -kdt$  ausnutzen können.

Experimentelle Überprüfung

(i) Entweder lassen wir die Anfangstemperatur des Objektes fest und plotten die Lösung für verschiedene  $k$ ,

(ii) oder wir lassen  $k$  fest und plotten die Lösung für verschiedene  $x_0$ .

(i) bezieht sich auf viele Umgebungen, die alle von derselben Anfangstemperatur aus abkühlen.

(ii) bezieht sich auf eine gegebene Umgebung, die von verschiedenen Ausgangstemperaturen abköhlt.

Der exponentielle Abfall erklärt z.B. auch, warum kalte Getränke im Sommer so schnell warm werden.

23.10.25:  $x = -k(x - T_0)$

Wie können wir durch zwei Messungen  $k$  bestimmen, unter der Voraussetzung, dass unsere Differentialgleichung das passende Modell ist und dass die Außentemperatur konstant  $T_0$  ist? Mit Anfangstemperatur  $x(0)$  und Temperatur zum Zeitpunkt 20,  $x(20)$ . Sei  $T_0 = 80^\circ F$ ,  $x(0) = 160^\circ F$ ,  $x(20) = 145^\circ F$ .

$$\begin{aligned}x(20) - T_0 &= (x(0) - T_0)e^{-20k} \\ \Rightarrow 145 - 80 &= (160 - 80)e^{-20k} \\ \Leftrightarrow 65 &= 80e^{-20k} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{20} \ln\left(\frac{65}{80}\right) \approx 0,01038\end{aligned}$$

Nun können wir Vorhersagen treffen:

Wie lange dauert es, bis das Objekt von seinen  $145^\circ F$  zum Zeitpunkt  $t$  auf  $85^\circ F$  abgekühlt ist?

Sei nun  $x(0) = 145$ ,  $x(t) = 80 + 65e^{-kt}$ ,  $x(t) = 85$ , d.h. für  $5 = 65e^{-kt} \Leftrightarrow 1 = 13e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{\ln(13)}{k} \approx 246,6$ .

Das Newton'sche Gesetz funktioniert nicht mehr, wenn die Objekt-Umgebungstemperaturdifferenz sehr groß ist.

## 4 Stationäre Zustände, Stabilität, Phasendiagramme

$x' = f(x)$  ist eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung.

### 4.1 Definition: stationäre Lösung

Eine stationäre Lösung einer autonomen Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  ist eine konstante Funktion  $x(t) = c$ , die diese Differentialgleichung löst, d.h.  $f(c) = 0$ .

### 4.2 Beispiele

Stationäre Lösungen von  $x' = 3x$  und  $x' = x^2$  sind  $c = 0$

- (a)  $x' = 3x$  und  $x' = x^2$  sind  $c = 0$
- (b)  $x' = x^2 - s$  sind  $c = 1$  und  $c = -1$
- (c)  $x' = x^2 + 1$  existieren nicht für reelle  $c$
- (d)  $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ ,  $r, K > 0$  (logistische Gleichung) sind  $c = 0$  und  $c = K$ , unabhängig von  $r$ .

### 4.3 Theorem

Betrachte  $x'(t) = f(x(t))$  (autonome Differentialgleichung). Falls zwei voneinander verschiedene Lösungen  $x_1(t), x_2(t)$  existieren, dann berühren sich ihre Graphen nie. Falls  $x(t)$  nicht konstant ist, dann liegt der zugehörige Graph ganz auf einer Seite der stationären Lösungen.

## 4.4 Definition: Stabilität von Lösungen von autonomen Differentialgleichungen

Eine stationäre Lösung  $c$  für die Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  heißt stabil, falls für  $x_0 \approx c$  die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)  $x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $c$  konvergiert (attraktiv)

$c$  heißt instabil, falls ein  $r > 0$  existiert, sodass für alle  $x_0 \approx c$  die Lösung des AWP ab einem gewissen Zeitpunkt einen Abstand  $> r$  von  $c$  hat und für alle größeren Zeiten dort verbleibt (abstoßend)

$c$  heißt semi-stabil, falls es auf einer Seite stabil und auf der anderen Seite instabil ist.

Bemerkung: Diese Klassifikation ist nicht vollständig. Beispiel:  $x' = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x}), c = 0$ .

Stabilität bedeutet z.B., dass kleine Messfehler die Vorhersagen des Verhaltens in der Nähe stationärer Lösungen nicht beeinflussen. Instabile Lösungen sieht man im Experiment mit großer Wahrscheinlichkeit nicht.

## 4.5 Theorem

Betrachte die autonome Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  für  $t \geq 0$  und "genügend glattes"  $f$ .

Sei  $x(t) = c$  eine stationäre Lösung, d.h.  $f(c) = 0$ .

- (i)  $c$  ist stabil, falls der Graph von  $f$  nah bei  $c$  die horizontale Achse von positiv nach negativ durchkreuzt, d.h.  $f'(c) < 0$ .
- (ii)  $c$  ist instabil, falls  $f'(c) > 0$
- (iii)  $c$  ist semi-stabil, falls  $f'(c) = 0$  und  $f''(c) \neq 0$ .

Falls  $f'(c) = f''(c) = 0$ , dann muss der Graph von  $f$  näher studiert werden.

## 4.6 Beispiel

Betrachtet die allgemeine logistische Differentialgleichung  $x'(t) = rx(t)(1 - \frac{x}{K}) = rx - \frac{rx^2}{K}$  für  $r, K > 0$  und  $t \geq 0$ .

Sei  $x(0) \geq 0$ . Dieses AWP besitzt die Lösung  $x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0)+(K-x(0))e^{-rt}}$  (prüfe durch Einsetzen).

Die Lösungskurven  $x(t)$  für  $t \geq 0$  und  $x(0) \geq 0$  wechseln Konkavität an der Horizontalen  $\frac{K}{2}$  (Wendestellen).  $K$  zieht Lösungen an,  $0$  stößt Lösungen ab.

Phasenlinien/Phasendiagramme

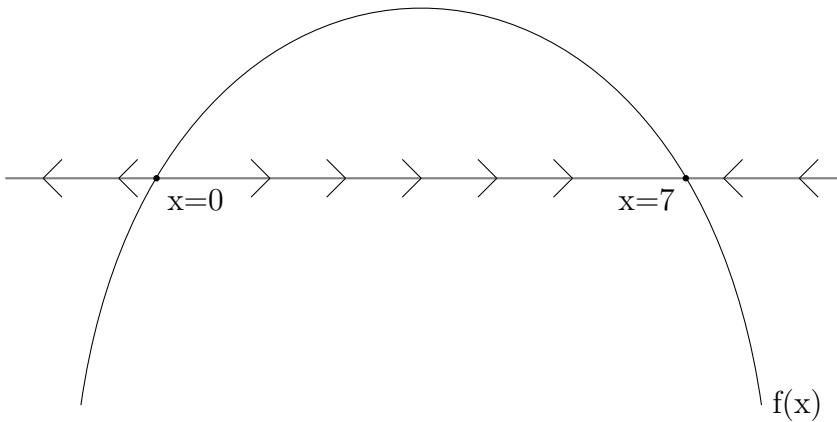
$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$ , hier mit Parameter  $r = 2, K = 7$ . Falls  $x(0) = 0$  oder  $x(0) = 7$  passiert nichts mehr.

Falls  $x(0) > 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$ ,

Falls  $0 < x(0) < 7 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) > 0$ ,

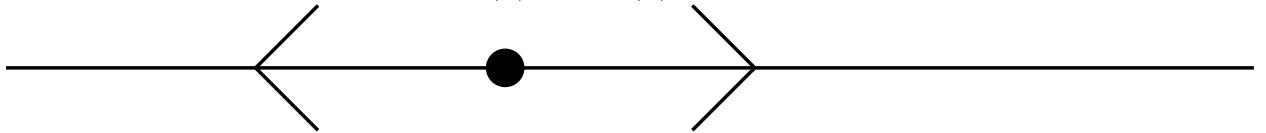
Falls  $x(0) < 0 \Rightarrow 2x(1 - \frac{x}{7}) < 0$ .

$f(x) = 2x(1 - \frac{x}{7}) \rightarrow$  Phasendiagramm:

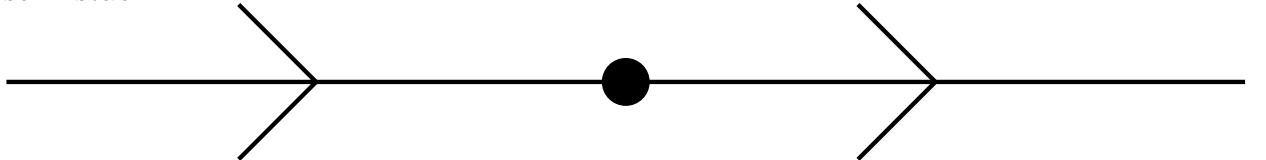


## 4.7 Beispiele

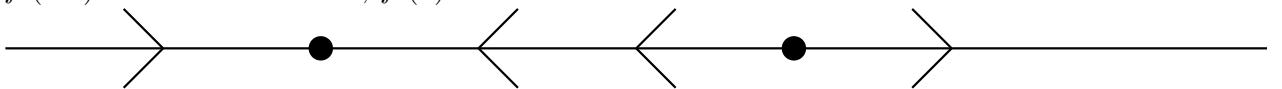
- (a)  $x' = x$ : Stationäre Lösung  $x = 0$ .  $f(x) = x, f'(x) = 1 > 0 \Rightarrow$  instabil:



- (b)  $x' = x^2$ : Stationäre Lösung  $x = 0$ .  $f(x) = x^2, f'(x) = 2x \stackrel{\text{für } x=0}{=} 0, f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$  semi-stabil:



- (c)  $x' = x^2 - 1$ . Stationäre Lösungen  $x = 1, x = -1$ .  $f(x) = x^2 - 1, f'(x) = 2x, f'(-1) = -2 < 0 \Rightarrow$  stabil,  $f'(1) = 2 > 0 \Rightarrow$  instabil:



## 5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung und AWP

### 5.1 Definition

Für lineare Differentialgleichungen der Form  $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , legt das assoziierte AWP zwei Werte fest:  $x(t_0) = x_0$  und  $x'(t_0) = x'_0, x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$ .

### 5.2 Theorem

Betrachte  $x'' + ax' + bx = 0, a, b \in \mathbb{R}, t \geq 0$ .

Dann gibt es ein Lösungspaar  $x_1(t), x_2(t)$ , welches explizit durch Lösungen der quadratischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  beschrieben werden kann, sodass jede Lösung der Differentialgleichung eindeutig wie folgt ausgedrückt werden kann:

$x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt: Für jedes  $t_0$  und jedes  $x_0, x'_0$  existiert

genau eine solche Lösung, die das AWP mit  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$  erfüllt.

27.10.25:

### 5.3 Wichtiges praktisches Beispiel

(a)  $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega > 0$

goodnotes 5 (Bild von Feder an der Wand, x ist Ausschlag)

Feder an der Wand, Masse an einer Feder. Annahme: Reibung spielt keine Rolle,  $x(t)$  - Position der Feder. Ziehen oder Zusammendrücken der Feder lässt die Position der Masse oszillieren,  $x = 0$  Ruhezustand. Das Bewegungsgesetz(Newton) und das Hook'sche Gesetz für Federn  $mx'' + kx = 0$ , wobei  $m > 0$  die Masse des an der Feder befestigten Objektes ist und  $k > 0$  die Federkonstante, d.h.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . (Bem. Es gibt auch nichtlineare Federn.)

(b) LC-Schaltkreis/Schwingkreis:

elektronischer Schaltkreis, der aus einer Induktivität (z.B. Spule) L und einem Kondensator besteht. Das Kirckhoff'sche Gesetz besagt, dass der elektrische Strom  $I(t)$  folgende Dynamik hat:

$LI''(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$ . L ist die Induktivität und C die sogenannte Kapazität des Kondensators, d.h.  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Betrachte allgemein  $x'' + ax' + bx = 0$ .

Ansatz:  $e^{\lambda t} = x(t)$ . Dann ist  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}, x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Also  $\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$  bzw.  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ .

Dies ist das charakteristische Polynom der DGL  $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}, \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4}) - b}$ . Falls  $\frac{a^2}{4} - b$  bzw.  $a^2 - 4b > 0$ , also  $\lambda_1, \lambda_2$  reell erhalten wir zwei verschiedene Lösungen  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Damit ist eine allgemeine Lösung  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Betrachte:  $x'' - x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{-t} \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  ist eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung .

### 5.4 Definition

Eine Linearkombination von Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form  $h(t) = c_1 f_1(t) + \dots + c_m f_m(t), c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ .

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißen linear unabhängig, falls sie kein Vielfaches voneinander sind.

- $-5t^3 + 2t^2 - 3$  ist eine Linearkombination von  $t^3, t^2, t$  und  $t^0 = 1$ , die linear unabhängig sind.
- $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  sind linear unabhängig, falls  $e^{\lambda_1 t} \neq ce^{\lambda_2 t}$ . Dies ist der Fall für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .
- Betrachte  $x'' + x' - 2x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$   $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$  ist eine allgemeine Lösung.
- $x'' + bx = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 + b = 0$ . Falls  $b < 0$ , schreibe  $b = -k^2$ , also  $\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm k \Rightarrow x(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$  ist eine allgemeine Lösung.

Falls  $b > 0$ , dann hat  $\lambda^2 + b$  keine reelle Wurzel. Hier finden wir andere Lösungen als die zuvor vermuteten Exponentialfunktionen.

- $x'' + x = 0$ . Das charakteristische Polynom  $\lambda^2 + 1$  hat keine reellen Lösungen .  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -1$ . Betrachte  $x_1(t) = e^{it}$  und  $x_2(t) = e^{-it}$ . Für die allgemeine Differentialgleichung  $x'' + ax' + bx = 0$  und Lösungen  $u + iv, u, v$  reell gilt:  
 $(u'' + iv'') + a(u' + iv') + b(u + iv) = (u'' + au' + bu) + i(v'' + av' + bv) = 0$   
 $\Rightarrow$  sowohl  $u$  wie  $v$  sind Lösungen der Differentialgleichung.  
 $e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t), e^{-it} = \cos(t) - i \cdot \sin(t)$ . Sowohl  $\cos(t)$  wie  $\sin(t)$  ist eine Lösung von  $x'' + t = 0$ .
- $x'' - 2x' + 2x = 0$ . Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ . Setze es gleich 0.  
 $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$ . Komplexwertige Lösung sind  $e^{(1+i)t}$  und  $e^{(1-i)t}$  bzw.  $e^t(\cos(t) + i \cdot \sin(t))$  und  $e^t(\cos(t) - i \cdot \sin(t))$ . Lösungen sind  $x_1(t) = e^t \cos(t), x_2(t) = e^t \sin(t)$  (Prüfe nochmal durch einsetzen). Allgemeine Lösungen sind dann  $x(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .
- $x'' - 2x' + x = 0$  Das charakteristische Polynom lautet  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$  mit der einzigen Wurzel  $\lambda = 1$ :  $x_1(t) = e^t$ .  
Versuch:  $x = te^t$ . Dann ist  $x' = te^t + e^t$  und  $x'' = te^t + e^t + e^t = te^t + 2e^t \Rightarrow x'' - 2x' + x = te^t + 2e^t - 2te^t - 2e^t + te^t = 0$ .  
 $\Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$  ist eine allgemeine Lösung ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Bemerkung:  $e^{rt}$  und  $te^{rt}$  sind linear unabhängig.

## 5.5 Theorem

Betrachte  $x'' + ax' + bx = 0$  für  $t \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ .

Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Wurzeln des charakteristischen Polynoms  $\Lambda^2 + a\lambda + b = 0$ . Definiere dazu sogenannte Grundlösungen  $x_1(t), x_2(t)$  wie folgt:

1. Falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  beide reell, dann sei  $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$  und  $x_2(t) := e^{\lambda_2 t}$
2. Falls  $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ , also  $\lambda_1, \lambda_2 = r_0 \pm is_0$  mit  $r_0 = \frac{-a}{2}, s_0 = \frac{1}{2}\sqrt{|a^2 - 4b|} = \sqrt{b - (\frac{a}{2})^2} > 0$
3. Falls  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , dass sein  $x_1(t) := e^{\lambda_1 t}$  und  $x_2(t) := e^{\lambda_1 t}$ . Diese Lösungen sind linear unabhängig. Alle Lösungen der Differentialgleichung haben die Form  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  und es existiert genau ein  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$  für jede Wahl von  $t_0, x_0, x'_0$ .

# 6 Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen und Eigenschaften

## 6.1 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte  $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$ . Setze  $y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'_1(t) &= y_2(t) \\ y'_2(t) &= -ax'(t) - bx(t) + f(t) \\ &= -ay_2(t) - by_1(t) + f(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  System von Differentialgleichungen erster Ordnung, linear

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \text{ und } y'(t) = Ay(t) + F(t) \text{ für } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Die Spur von  $A$  ist  $(-a)$ , die Determinante ist  $b$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist  $\lambda^2 - \text{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 + a\lambda + b$ . Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von  $A$ .

## 6.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung

Betrachte für  $n > 1$  die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = f(t). \text{ Definiere } y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_n = x^{(n-1)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y'_1 &= x' = y_2 \\ y'_2 &= x'' = y_3 \\ &\dots \\ y'_{(n-1)} &= x^{(n-1)} = y_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'_n = x^{(n)} = -a_{n-1}x^{(n-1)} - \dots - a_1x' - a_0x + f(t)$$

$$= -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-2}y_{n-1} - a_{n-1}y_n + f(t)$$

Sei  $y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ , dann ist  $y'(t) = Ay(t) + F(t)$  für  $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

30.10.25: Wie finden wir Lösungen ?

## 6.3 Beispiel

$n = 2$ . Falls  $A$  eine Diagonalmatrix ist, wir also  $x'(t) = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  betrachte, dann gilt  $\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \end{pmatrix}$ . Mit  $x(t_0) = x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  ist  $x_1(t) = \alpha e^{\lambda_1(t-t_0)}$  und  $x_2(t) = \beta e^{\lambda_2(t-t_0)}$ , da das System entkoppelt ist.

Für nicht-diagonale  $A$  verfahren wie folgt:

Seien  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear unabhängige Eigenvektoren. Also  $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$  und  $A\vec{w} = \lambda_2\vec{w}$ . Diese existieren immer, wenn  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  in  $\mathbb{R}$  sind. Dann können wir  $x(t)$  mit Hilfe dieser Eigenvektorbasis ausdrücken:  $x(t) = u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}$

Also  $x'(t) = u'_1(t)\vec{v} + u'_2(t)\vec{w}$  und  $Ax(t) = A(u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w}) = u_1(t)A\vec{v} + u_2(t)A\vec{w} = \lambda_1 u_1(t)\vec{v} + \lambda_2 u_2(t)\vec{w}$

$\Rightarrow u'_1(t)\vec{v} + u'_2(t)\vec{w} = \lambda_1 u_1(t)\vec{v} + \lambda_2 u_2(t)\vec{w}$ . Da  $\vec{v}, \vec{w}$  eine Basis bilden, muss  $u'_1(t) = \lambda_1 u_1(t), u'_2(t) = \lambda_2 u_2(t)$

$$\lambda_2 u_2(t)$$

$$\Rightarrow u_1(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}, u_2(t) = u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)} \text{ und } x(t) = u_1(t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}\vec{v} + u_2(t_0)e^{\lambda_2(t-t_0)}\vec{w}$$

Also müssen die Eigenvektoren von A explizit berechnet werden. Für die Anfangswerte betrachten wir:

$$u_1(t)\vec{v} + u_2(t)\vec{w} = x(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2$$

$$\text{Definiere } E = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ bzw. } u(t) = E^{-1}x(t) \text{ auch für } t = t_0.$$

# 7 Differentialgleichungen erster Ordnung, Existenz und Eindeutigkeit (von Lösungen) (Picard-Lindelöf)

## 7.1 Voraussetzung

Betrachte  $x'(t) = f(x(t), t)$  für  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$  mit  $x(t_0) = x_0$ .

Sei  $S$  die Menge  $\{(t, x) : t_0 \leq t \leq a, -\infty < x < \infty\}$ . Sei  $f$  auf  $S$  definiert und erfülle  $f$  eine Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$ , d.h.:

$$(\star) |f(x, t) - f(\bar{x}, t)| \leq L|x - \bar{x}|, L \geq 0.$$

## 7.2 Theorem

Gelte 7.1. Sei  $f$  stetig auf  $S$ , einschließlich  $(\star)$ .

Dann hat das Anfangswertproblem  $x' = f(x, t), x(t_0 = x_0)$  genau eine Lösung  $x(t)$ . Sie existiert auf ganz  $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ .

Beweis: Wir wollen einen Fixpunktsatz verwenden. Definiere  $J := [t_0, t_0 + a]$ .

Sei  $x(t)$  eine in  $J$  differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems. Da  $f$  stetig ist, ist auch  $u(t) := f(x(t), t)$  in  $J$  stetig. Also  $x(t)$  sogar stetig differenzierbar. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann:

$$(\star\star) x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \text{ Umgekehrt genügt jede in } J \text{ stetige Lösung von } (\star\star) \text{ der Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0.$$

Die rechte Seite von  $(\star\star)$  ist stetig differenzierbar und damit auch  $x(t)$  und  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

Unser Anfangswertproblem ist also gleichwertig mit der Integralgleichung  $(\star\star)$ .

Schreibe dies in der Form  $x = Tx$  mit  $(Tx)(t) = \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

Der Integraloperator ordnet jeder Funktion aus dem Banachraum  $\{f \mid f \text{ ist stetige Funktion auf } J\} =: C(J)$  eine Funktion  $Tx$  aus demselben Raum zu. Die Lösungen unseres AWP in 7.1 sind also gerade die Fixpunkte des Operators  $T : C(J) \rightarrow C(J)$ . Nach dem Fixpunktsatz (siehe unten) ist unser Theorem bewiesen, falls wir zeigen können, dass  $T$  einer Lipschitzbedingung mit Konstante  $k < 1$  genügt.

Normiere  $C(J)$  mit der Maximumsnorm  $\|x\|_0 := \max\{|x(t)| : t \in J\}$ .

Seien  $x, y \in C(J)$ . Dann gilt  $|T(x)(t) - (Ty)(t)| = |\int_{t_0}^t f(x(s), s) - f(y(s), s) ds| \leq \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \leq L\|x - y\|_0(t - t_0)$

$\Rightarrow \|Tx - Ty\|_0 \leq La\|x - y\|_0$ . T genügt also einer Lipschitzbedingung, aber La ist nur dann  $< 1$ , wenn  $a < \frac{1}{L}$ .

Betrachte stattdessen eine gerichtete Maximum-Norm  $\|x\|_\alpha := \max\{|x(t)|e^{-\alpha t} : t \in J\}$ ,  $\alpha > 0$ .

Nun schätzt wie folgt ab:

$$L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| e^{-\alpha s} e^{\alpha s} ds \leq L\|x - y\|_\alpha \int_{t_0}^t e^{\alpha s} ds \leq L\|x - y\|_\alpha \frac{e^{\alpha s}}{\alpha}$$

$\Rightarrow |(Tx)(t) - (Ty)(t)| e^{-\alpha t} \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|_\alpha$ . Wähle nun  $\alpha = 2L$ , dann genügt T einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten  $\frac{1}{2}$  und wir haben Existenz im ganzen Intervall. Das Ganze geht auch für  $[t_0 - b, t_0]$ .  $\square$

**Fixpunktsatz:** Sei  $B$  ein Banachraum, das heißt ein vollständiger, linearer, normierter Raum. Sei  $\emptyset \neq D \subset B$  abgeschlossen. Sei  $T : D \rightarrow T(D) \subset D$ . Genügt  $T$  einer Lipschitzbedingung in  $D$  mit einer Lipschitzkonstante  $k < 1$ . Das heißt  $\|Tx - T\tilde{x}\| \leq k\|x - \tilde{x}\|$ . Dann hat  $Tx = x$  genau eine Lösung  $x =: \bar{x}$ .

Betrachte das Iterationsverfahren:

$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n$ . Dann gilt:

$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$ . Insbesondere konvergiert die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\bar{x}$  im Sinne der Norm  $\|\cdot\|$ .

03.11.25:

Bemerkung (in Anschluss an Theorem 7.2):

- a) Ausgehend von einer in  $J$  stetigen Funktion  $y_0(t)$  approximiere  $y_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(y_k(s), s) ds$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Diese Folge konvergiert nach der Norm und damit auch gleichmäßig gegen die Lösung  $x(t)$  des AWP.
- b) Eine hinreichende Bedingung für die Erfüllung einer Lipschitzbedingung ist:  $f$  ist partiell nach  $x$  differenzierbar und  $|f_x(x, t)| \leq L$ .

### 7.3 Theorem

Sei  $R$  das Rechteck  $\{t_0 \leq t \leq t_0 + a : |x - x_0| \leq b\}$  mit  $a, b > 0$ . Genüge  $f \in C(R)$  in  $R$  einer Lipschitzbedingung, d.h.:

$|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$ . Dann existiert genau eine Lösung des AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  mindestens in einem Intervall  $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$  wobei  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{A}\}$  ist, mit  $A = \max_R |f|$ .

Hier ist  $f$  nicht in einem ganzen Streifen, sondern in einer Umgebung des Punktes  $(x_0, t_0)$  definiert.

### 7.4 Lokale Lipschitzbedingung (von Oben hierher verschoben)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$ .  $f(x, t)$  genügt in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich  $x$ , wenn zu jedem  $(x_0, t_0) \in D$  eine Umgebung  $U = U(x_0, t_0)$  und  $L = L(x_0, t_0)$  existiert, sodass  $f$  in  $D \cap U$  einer Lipschitzbedingung  $|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$  genügt.

Kriterium: Falls  $D$  offen ist und  $f \in C(D)$  eine in  $D$  stetige Ableitung  $f_x$  besitzt, dann genügt  $f$  in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung.

Beispiel:  $f(x, t) = x^2$ :  $|f(x, t) - f(\tilde{x}, t)| = |x^2 - \tilde{x}^2| = |x + \tilde{x}||x - \tilde{x}|$  genügt auf  $\mathbb{R}^2$  einer lokalen, aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

### 7.5 Theorem: Lokale Lösbarkeit

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen und genüge  $f \in C(D)$  einer Lokalen Lipschitzbedingung in  $D$ .

Dann ist das AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  für  $(x_0, t_0) \in D$  lokal eindeutig lösbar, d.h., in einer Umgebung von  $t_0$  existiert genau eine Lösung .

### 7.6 Theorem: Existenz und Eindeutigkeit

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen. Genüge  $f \in C(D)$  in  $D$  einer lokalen Lipschitzbedingung. Dann hat für jedes  $(x_0, t_0) \in D$  (jedes Tupel definiert ein AWP) das AWP  $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$  ( $\star$ ) eine Lösung  $\phi$ , welche nicht fortsetzbar ist und nach links und rechts dem Rand von  $D$  beliebig nahe kommt. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt. D.h. alle Lösungen von ( $\star$ ) sind Restriktionen von  $\phi$ .

Bemerkung: " $\phi$  kommt nach rechts dem Rand von  $D$  beliebig nahe" ist wie folgt definiert:

Sei  $G$  die abgeschlossene Hülle vom Graphen von  $\phi$ . Sei  $G_t$  die Menge aller  $(x, t) \in G$  mit  $t \geq t_0$ . Dann ist  $G_t$  keine kompakte Teilmenge von  $D$ .

Äquivalent und anschaulicher ist:

$\phi$  existiert nach rechts in  $[t_0, b)$  ( $b = \inf$  ist erlaubt) und es liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

- (i) Falls  $b = \inf$ : Die Lösung existiert für alle  $t \geq t_0$ .

- (ii) Falls  $b < \inf$  und  $\limsup_{t \rightarrow b^-} |\phi(t)| = \inf$ : Die Lösung wird unendlich.
- (iii) Falls  $b < \inf$  und  $\liminf_{t \rightarrow b^-} d(t, \phi(t)) = 0$ , wobei  $d(\tilde{t}, \tilde{x})$  der Abstand des Punktes  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  vom Rand von  $D$  ist: Die Lösung kommt dem Rand von  $D$  beliebig nahe.

Also ist  $G_t$  entweder unbeschränkt (i),(ii) oder beschränkt und enthält Randpunkte von  $D$  (iii).

## 7.7 Theorem: Existenzsatz von Peano

Sei  $f(x, t)$  in einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  stetig. Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, t_0) \in D$  mindestens eine Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(x, t)$ . Jede Lösung lässt sich nach rechts und nach links bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

## 7.8 Polygonzugverfahren von Cauchy

Sei  $f(x, t)$  stetig und beschränkt in  $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Betrachte  $x' = f(x, t)$  in  $[t_0, t_0 + a]$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Definiere  $t_k = t_0 + \alpha k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Setze für  $t_0 \leq t \leq t_1$ :  $u_\alpha(t) := x_0 + (t - t_0)f(x_0, t_0)$ , d.h.  $u_\alpha$  ist eine Gerade durch den Punkt  $(x_0, t_0)$  mit der Steigung  $f(x_0, t_0)$ . Für  $t_1 \leq t \leq t_2$  sei  $u_\alpha$  die Gerade durch den Punkt  $(x_1, t_1) := (u_\alpha(t_1), t_1)$ .

Jetzt folgt das Verfahren:

## 8 Ober- und Unterfunktionen

### 8.1 Lemma

Seien die Funktionen  $\phi(t), \psi(t)$  in  $J_0 := (t_0, t_0 + a]$  differenzierbar.  
gelte  $\phi < 2\psi(t)$  in  $(t_0, t_0 + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Dann gilt entweder

- (i)  $\phi < \psi$  in  $J_0$  oder
- (ii) Es existiert ein  $\tilde{t} \in J_0$ , sodass  $\phi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 < t < \tilde{t}$  und  $\phi(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t})$  und  $\phi'(\tilde{t}) \geq \psi'(\tilde{t})$ .

Beweis: Gelte (i) nicht, dann existiert ein erster Punkt  $\tilde{t} > 0$  mit  $\phi(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t})$ . Für die linksseitigen Differenzenquotienten an der Stelle  $\tilde{t}$  ( $h > 0$ ) gilt  $\frac{\phi(\tilde{t}) - \phi(\tilde{t}-h)}{h} > \frac{\psi(\tilde{t}) - \psi(\tilde{t}-h)}{h}$ , da links von  $\tilde{t}$  gilt, dass  $\phi < \psi$ . Die Behauptung folgt für  $h \rightarrow 0$ .

### 8.2 Definition: Defekt einer Funktion

Der Defekt  $P\phi$  einer Funktion  $\phi(t)$  bezüglich der Differentialgleichung  $x' = f(x, t)$  ist  $P\phi := \phi' - f(\phi, t)$ . Das heißt der Defekt gibt an, "wie gut"  $\phi$  der Differentialgleichung genügt. Eine Lösung  $Px$  der Differentialgleichung hat Defekt  $Px = 0$ .

### 8.3 Theorem

Sei  $f : D \rightarrow R, D \subset \mathbb{R}^2$  und seien  $\phi(t), \psi(t)$  Funktionen mit Graphen  $\phi, \psi \subset D$ . Seien  $\phi(t), \psi(t)$  in  $J_0 := (t_0, t_0 + a]$  differenzierbar und gelte a)  $\phi(t) < \psi(t)$  für  $t_0 < t < t_0 + \epsilon, \epsilon > 0$ , b)  $P\phi < P\psi$  in  $J_0$ .

Gelten die Beziehungen aus 8.1 und 8.2.

Dann ist  $\phi < \psi$  in  $J_0$ .

Beweis: Wir zeigen, dass (ii) In Lemma 8.1 nicht gilt: Sei  $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ . Dann gilt wegen Voraussetzung b), dass  $\phi'(t_0) = P\phi + f(\phi(t_0), t_0) < P\psi + f(\psi(t_0), t_0) = \psi'(t_0)$ , also gilt sicher nicht (ii). q.e.d.

Genauso gilt alles für ein links von  $t_0$  liegendes Intervall.

### 8.4 Definition: Unter-/Oberfunktion bezüglich eines AWP

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  und  $f(x, t)$  in  $D$  definiert. Dann heißt  $v(t)$  Unter- und  $w(t)$  Oberfunktion bezüglich des AWP  $x' = f(x, t)$  in  $J := [t_0, t_0 + a], x(t_0) = x_0$  ( $\star$ ), wenn  $v, w$  in  $J$  differenzierbar sind und  $v' < f(v, t)$  in  $J$  und  $v(t_0) \leq x_0$ ,  $w' < f(w, t)$  in  $J$  und  $w(t_0) \geq x_0$ , vorausgesetzt, dass die Graphen von  $v$  und  $w$  in  $D$  liegen.

Bemerkung: Falls  $v$  Unter- beziehungsweise  $w$  Oberfunktion und  $x$  eine Lösung des AWP ( $\star$ ) ist, dann gilt  $v(t) < x(t) < w(t)$  in  $(t_0, t_0 + a] \rightarrow$  Beweis Übungsblatt 4

Ein übliches Verfahren zur Bestimmung von Ober- und Unterfunktionen ist,  $f$  leicht abzuändern zu  $f_1(x, t) < f(x, t) < f_2(x, t)$  und dann die beiden AWPs  $v' = f_1(v, t)$  und  $w' = f_2(w, t)$  explizit zu lösen.

### 8.5 Beispiel

$x' = x^2 + t^2, x(0) = 1, t \geq 0$ . Für positive  $x$  folgt für  $f_1(x, t) = x^2$  und  $v' = v^2, v(0) = 1$ , dass  $v(t) = \frac{1}{1-t}$ . Diese Lösung existiert nach rechts höchstens bis zur Stelle  $t = 1$ . Sei also  $0 \leq t < 1$  und setze  $f_2(x, t) = x^2 + 1$ . Dann hat  $w' = w^2 + 1, w(0) = 1$  die Lösung  $w(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$ . Und für die Asymptote  $b \leq 1, x \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow b$ , gilt die Abschätzung  $0,78 < \frac{\pi}{4} < b \leq 1$ . WARUM? goodnotes 6

Neuer Ansatz: Neue Oberfunktion  $\tilde{w}(t) = \frac{1}{1-at}, a > 1$ . Die Ungleichung  $\tilde{w}' > \tilde{w}^2 + t^2$  ist gleichbedeutend mit  $a - 1 > (1 - at)^2 t^2$  für  $0 \leq t < \frac{1}{a}$ . Die rechte Seite dieser Ungleichung hat ihr Maximum bei  $t = \frac{1}{2a}$ , da  $[(1.at)^2 t^2]' = 2(1 - at)(-a)t^2 + 2t(1 - at)^2 = 0$  gilt für  $-2at^2 + 2t - 2at^2 = 0 \Leftrightarrow -2at + 2 - 2at = 0 \Leftrightarrow 4at = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2a}$   
 $\Rightarrow a - 1 > (1 - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{4a^2} \Rightarrow 16a^2(a - 1) > 1$ , also zum Beispiel für  $a = \frac{17}{16}$   
 $\Rightarrow \tilde{w}(t) = \frac{16}{16-17t}$  und  $b \geq \frac{16}{17} > 0,94$ . Die Lösung unseres AWP verläuft im schraffierten Bereich.  
goodnotes 7

## 9 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 9.1 •

Betrachte  $x' = F(x, t)$ , wobei  $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  und  $F(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ \vdots \\ f_n(x, t) \end{pmatrix}$ .

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit Elementen  $(x_1, \dots, x_n, t)$

## 9.2 Definition: Lipschitz-Bedingung

Eine Vektorfunktion  $F(x, t)$  genügt einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  mit Lipschitz-Konstante  $L$ , wenn  $|F(x, t) - F(\tilde{x}, t)| \leq L|x - \tilde{x}|$  für  $(x, t), (\tilde{x}, t) \in D$  und wobei  $|\cdot|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^n$  ist, zum Beispiel die euklidische Norm. Die Lipschitzkonstante  $L$  ist verschieden für unterschiedliche Normen.

## 9.3 Hilfssatz

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  konvex. Seien in  $D$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu}$  stetig und beschränkt,  $\nu, \mu = 1, \dots, n$ . Dann genügt  $F$  in  $D$  einer Lipschitzbedingung.

## 9.4 Folgerung

Sei  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $F(x, t)$  in  $D$  stetig differenzierbar. Dann genügt  $F$  in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

## 9.5 Theorem: Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet. Sei  $F(x, t)$  in  $D$  stetig und genüge  $F$  in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  (z.B.  $F \in C^1(D)$ ). Sei  $(x_0, t_0) \in D$ . Dann besitzt das AWP  $x'(t) = F(x, t), x(t_0) = x_0$  genau eine Lösung. Diese lässt sich nach links und rechts bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

## 9.6 Theorem: Existenzsatz von Peano

Sei  $F(x, t)$  im Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig. Sei  $(x_0, t_0) \in D$ . Dann besitzt das AWP  $x' = F(x, t), x(t_0) = x_0$  mindestens eine Lösung. Jede lässt sich nach links und rechts bis zum Rand von  $D$  fortsetzen.

# 10 Das klassische SIR-DGL-Modell

s-suszeptible (Diese können infiziert werden), i-infektiöse (Diese verbreiten die Krankheit), r- "removed" (Immun, in Quarantäne, verstorben). Neue Infektionen entstehen durch Kontakt zwischen s und i

$$(*) s' = -\alpha is, i' = \alpha is - \beta i, r' = \beta i$$

Bemerkung: Das entsprechende Differentialgleichungssystem mit "Erholung" lautet  $s' = -\alpha is + \varepsilon r, i' = \alpha is - \beta i, r' = \beta i - \varepsilon r, \varepsilon > 0$ . Es hat ein anderes Verhalten.... Eigenwerte der Linearisierung.

Schreibe (\*) um:  $i(s' + i' + r') = -\alpha is + \alpha is - \beta i + \beta i = 0$

$$\Rightarrow s + i + r = 1 \text{ (normiert)} \Rightarrow i' = i(\alpha s - \beta). \text{ Betrachte } (\log(s) + \frac{\alpha}{\beta} r)' = -\alpha i + \alpha i = 0$$

Damit haben wir zwei sogenannte Invarianten  $s + i + r = 1$  (Konstante normiert) und

$$(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta} s - \frac{\alpha}{\beta} i)' = 0, \text{ da } (1)' = 0 \text{ und } r = 1 - s - i$$

10.11.25:

Multipliziere  $(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta} s - \frac{\alpha}{\beta} i)$  mit  $(\beta s)$

$$\Rightarrow -\alpha is = (s') = -\beta s \log(s) + \alpha s^2 + \beta s \gamma(0) \text{ mit Integrationskonstante } \gamma(0), \text{ wobei } \gamma(0)\beta = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0) \text{ ist, denn } \beta s \log s - \alpha s^2 - \alpha is = \text{konst.} \beta s.$$

## Formale Überlegungen:

1. Falls  $s(0) \leq \frac{\beta}{\alpha}$  und da  $s$  fallend ist ( $s' = -\alpha s i$ ), fällt das  $i$  ebenfalls, da  $i' = i(\alpha s - \beta)$ ,  $(\alpha s - \beta) = 0$  für  $s = \frac{\beta}{\alpha} \sim$  Es gibt keinen epidemischen Ausbruch.
2. Falls  $s(0) > \frac{\beta}{\alpha}$ , dann steigt  $i$  zu Beginn, bis  $s$  auf  $\frac{\beta}{\alpha}$  gefallen ist. Also bricht eine Epidemie aus mit Maximum bei  $s = \frac{\beta}{\alpha}$ . Final geht  $i \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Was ist das finale Verhalten dieser Epidemie? Wir versuchen, das Verhalten  $t \rightarrow \infty$  zu verstehen.

$i(\infty) = 0$  und (Invariante):  $\beta \log(s(\infty)) - \alpha s(\infty) - \alpha i(\infty) = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0)$  und  $\frac{\partial}{\partial s}(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta}s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{\beta}$ , also  $\frac{\partial}{\partial s}(\log(s) - \frac{\alpha}{\beta}s)(\infty) = \frac{1}{s(\infty)} - \frac{\alpha}{\beta} \geq 0$  (denn  $\frac{1}{s(\infty)} \geq \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta \geq \alpha s(\infty) \Leftrightarrow 0 \geq (\alpha s - \beta)$  und  $s$  fällt wegen  $s' = -\alpha s i$ ).

Das heißt das Verhalten hängt von der strikt konkaven Kurve  $\beta \log(s) - \alpha s =: f(s)$  ab, die ihr globales Maximum bei  $s = \frac{\beta}{\alpha}$  hat.

Seien  $s(0), i(0) > 0$  beliebig. Da  $i(\infty) = 0$  und  $r = 1 - s - i$  wird sich der Anteil der "removed" für große Zeiten für große Zeiten ( $r(\infty) = 1 - s(\infty)$ ) der eindeutigen Lösung ( $r_1 - s$ ) von  $\beta \log(s) - \alpha s = \beta \log(s(0)) - \alpha s(0) - \alpha i(0)$  annähern mit  $s \leq \frac{\beta}{\alpha}$ .

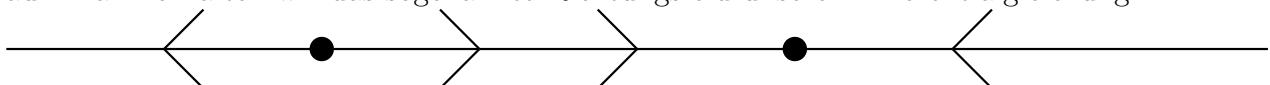
Achtung: formale Überlegungen, Positivität, Eindeutigkeit, Limes-Verhalten müssten noch gezeigt werden (gelten aber).

Der Wert  $\frac{\beta}{\alpha}$  ist die Herdenimmunität. Diese hat zwei Interpretationen:

1. Der maximal mögliche Anteil der betrachteten Population, der keine Infektion während der gesamten Epidemie erlitten hat.
2. Der Anteil der Suszeptiblen in der betrachteten Population, bei dem die Anzahl der Infektiösen anfängt zu fallen.

## 11 Phasenraumanalyse

Betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$ . Fasse  $x(t)$  also Punkt des Phasenraums  $\mathbb{R}$  auf, dessen Bewegung ("Fluss") durch die Differentialgleichung beschrieben wird. Wenn  $x(t)$  die Lösung des Differentialgleichung ist, dann ist  $\dot{x}(t)$  die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt bewegt. Trage in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  den Wert  $f(x) = \alpha x - \beta x^2$  in Form eines Vektors auf. Dann erhalten wir das sogenannte Richtungsfeld unserer Differentialgleichung .



Die Punkte sind die Stellen 0 und  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

Dieses gibt an, mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung sich der Punkt bewegt beziehungsweise wenn  $t \rightarrow x(t)$  die Differentialgleichung  $x' = f(x)$  (erfüllt?), dann ist  $f(x)$  der Tangentialvektor im Punkt  $x = x(t)$  an den Weg  $t \rightarrow x(t)$  in  $\mathbb{R}$ . 0 und  $\frac{\alpha}{\beta}$  sind Ruhepunkte/stationäre Punkte.

### 11.1 Das Räuber-Beute-Modell

$x(t)$  - Beutespezies,  $y(t)$  - Räuberspezies

Einfacher Ansatz:  $x' = (\alpha - \beta y)x$ ,  $y' = (-\gamma + \delta x)y$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

$Z(t) := (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto ((\alpha - \beta y)x, (\delta x - \gamma)y).z' = F(z).$

Eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist ein Weg  $Z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dessen Tangentialvektor  $Z'(t)$  im Punkt  $Z(t)$  durch  $F(Z(t))$  gegeben ist. Durch Anhalten des Vektors  $F(Z)$  an den Punkt  $Z \in \mathbb{R}^2$  erhalten wir das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Eine Lösung von  $Z' = F(Z)$  ist dann eine (durch  $t \in I \subset \mathbb{R}$  parametrisierte, orientierte) Kurve  $C$  in  $\mathbb{R}^2$  so, dass in jedem Punkt  $Z$  von  $C$  der Vektor  $F(Z)$  ein Tangentialvektor ist.

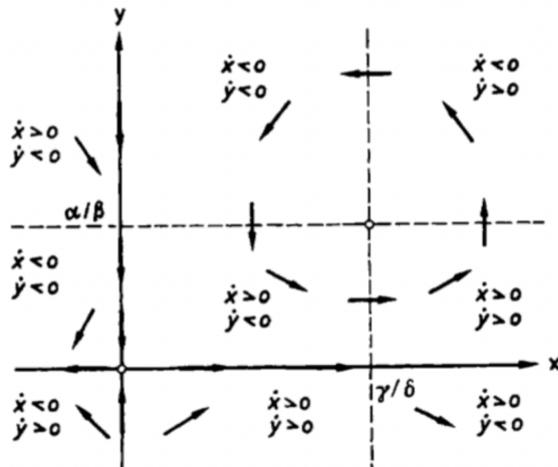


Abb. 3: Das Richtungsfeld für das System (12)

Unser Differentialgleichungssystem hat zwei Ruhepunkte:  $(0, 0)$  und  $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ . Man kann zeigen, dass das Phasenporträt für unser Räuber-Beute-Modell wie folgt aussieht:

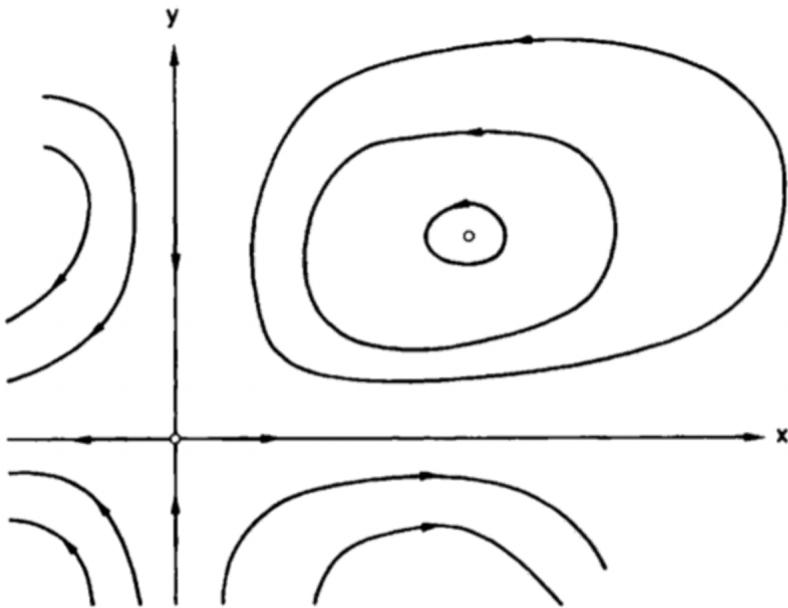


Abb. 4: Das Phasenporträt für das System (12)

Die Periodizität im 1. Quadranten ist zu begründen.

Das Phasendiagramm beschreibt das Langzeitverhalten der Population.

Wir wollen 2-dimensionale Flüsse klassifizieren. Betrachte also  $X' = AX$  in  $\mathbb{R}^2$  beziehungsweise  $x'_1 = ax_1 + bx_2, x'_2 = cx_1 + dx_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Für  $X(0) = I_d$  gilt  $X(t) = I_d + \int_0^t AX(\tau)d\tau = T_d + A \int_0^t X(\tau)d\tau$ . Diese legt folgende Iteration nahe:

$$X_0 := I_d, \\ X_1 := I_d + A \int_0^t X_0(\tau)d\tau = I_d + tA,$$

$$X_2(t) := T_d + A \int_0^t X_1(\tau) d\tau = I_d + tA + \frac{t^2}{2} A,$$

...,

$$X_{n+1}(t) = T_d + A \int_0^t X_n(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^k$$

13.11.25:

Weiter Räuber-Beute-System (Wiederholung von letzter VL):

$$x' = (\alpha - \beta y)x, \quad y' = (-\gamma + \delta x)y, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

$$(\alpha - \beta y) = 0 \text{ für } y = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (-\gamma + \delta x) = 0 \text{ für } x = \frac{\gamma}{\delta}$$

Es gelten:

- $\alpha - \beta y > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > y$
- $\alpha - \beta y < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < y$
- $-\gamma + \delta x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\gamma}{\delta}$
- $-\gamma + \delta x < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\gamma}{\delta}$

Betrachte folgende Fälle:

1.  $x' > 0$ , falls  $\frac{\alpha}{\beta} > y$  und  $x > 0$  oder falls  $\frac{\alpha}{\beta} < y$  und  $x < 0$
2.  $x' < 0$ , falls  $\frac{\alpha}{\beta} < y$  und  $x > 0$  oder falls  $\frac{\alpha}{\beta} > y$  und  $x < 0$
3.  $y' > 0$ , falls  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y > 0$  oder falls  $x < \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y < 0$
4.  $y' < 0$ , falls  $x < \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y > 0$  oder falls  $x > \frac{\gamma}{\delta}$  und  $y < 0$

Einschub: Nullklinen sind Geraden oder auch Kurven. Sie sind da, wo  $x' = 0$  oder  $y' = 0$ , hier bei  $x = \frac{\gamma}{\delta}$  und bei  $y = \frac{\alpha}{\beta}$  geraden.

Zwei Ruhepunkte  $(0,0)$  und  $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ .

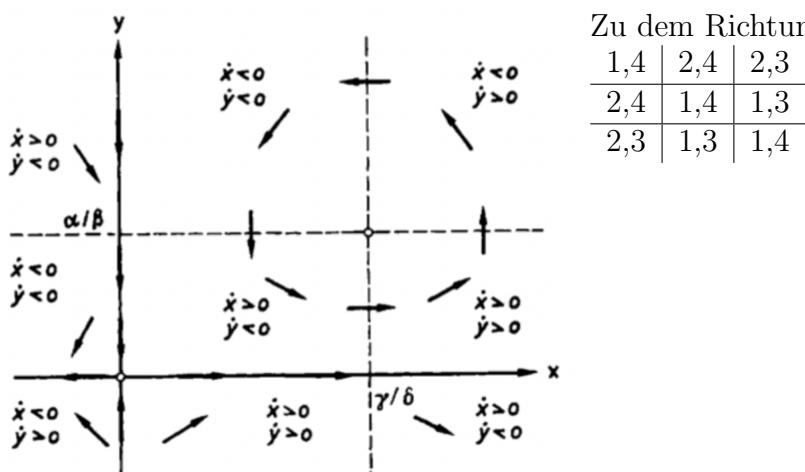


Abb. 3: Das Richtungsfeld für das System (12)

Es folgt das Phasendiagramm:

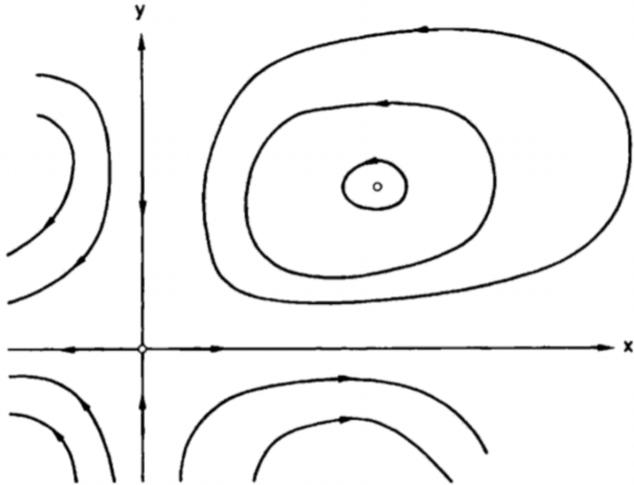


Abb. 4: Das Phasenporträt für das System (12)

Wir wollen 2-dimensionale lineare Flüsse klassifizieren. Betrachte also  $X' = AX$  in  $\mathbb{R}^2$ .  $x'_1 = ax_1 + bx_2, x'_2 = cx_1 + dx_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Für  $X(0) = I_d$  gilt  $X(t) = T_d + \int_0^t AX(\tau)d\tau = I_d + A \int_0^t x(\tau)d\tau$ .

Dies legt folgende Iteration nahe:

$$X_0 := I_d, X_1(t) := I_d + A \int_0^t X_0(\tau)d\tau = I_d + At, X_2(t) := I_d + A \int_0^t X_1(\tau)d\tau = I_d + At + A^2 \frac{t^2}{2}, \dots, x_{n+1}(t) = I_d + A \int_0^t X_n(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall von  $\mathbb{R}$  gegen  $e^{tA}$