Planification de mouvement

Joseph Mirabel

CNRS-LAAS, Toulouse, France

Planification de mouvement

Context

Industrial robots

aerial robots

autonomous vehicles

Mobile autonomous system

- moving in an environment cluttered with obstacles
- subject to kinematic or dynamic constraints

Motion planning : automatically computing a feasible trajectory between two configurations.

Context

Industrial robots

aerial robots

autonomous vehicles

Mobile autonomous system

- moving in an environment cluttered with obstacles
- subject to kinematic or dynamic constraints

Motion planning : automatically computing a feasible trajectory between two configurations.

Context

Industrial robots

aerial robots

autonomous vehicles

Mobile autonomous system

- moving in an environment cluttered with obstacles
- subject to kinematic or dynamic constraints

Motion planning : automatically computing a feasible trajectory between two configurations.

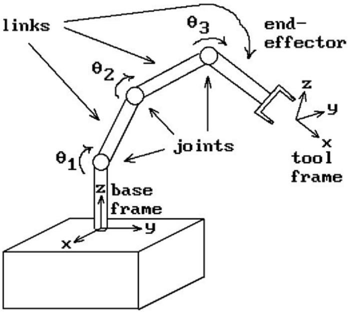
Planification de mouvement

Articulations

Robot : Ensemble de corps rigides liées les uns aux autres par des *articulations*.

Transformation : une translation $\mathbf{t}$ et une rotation R. L'ensemble des transformations forment l'espace $SE(3)$.

Articulation : transformation $(\mathbf{t}(\mathbf{q}), R(\mathbf{q}))$ entre deux repères paramétrés par une ou plusieurs variables $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

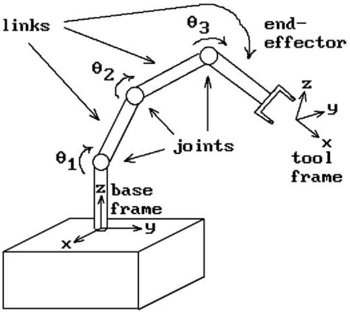


Articulations

Robot : Ensemble de corps rigides liées les uns aux autres par des *articulations*.

Transformation : une translation $\mathbf{t}$ et une rotation R. L'ensemble des transformations forment l'espace $SE(3)$.

Articulation : transformation $(\mathbf{t}(\mathbf{q}), R(\mathbf{q}))$ entre deux repères paramétrés par une ou plusieurs variables $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

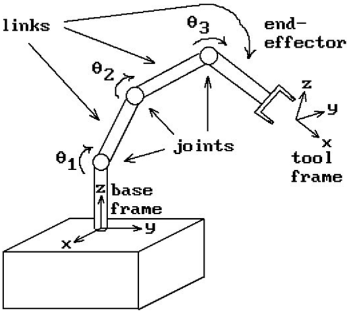


Articulations

Robot : Ensemble de corps rigides liées les uns aux autres par des *articulations*.

Transformation : une translation $\mathbf{t}$ et une rotation R. L'ensemble des transformations forment l'espace $SE(3)$.

Articulation : transformation $(\mathbf{t}(\mathbf{q}), R(\mathbf{q}))$ entre deux repères paramétrés par une ou plusieurs variables $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

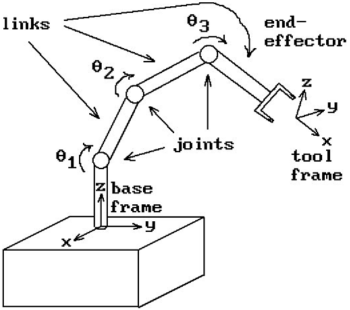


Articulations : Rotation 1D

- Rotation autour de **z** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & SE(3) \\ \mathbf{q}_0 & \rightarrow & (0_{\mathbb{R}^3}, R) \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}_0 & -\sin \mathbf{q}_0 & 0 \\ \sin \mathbf{q}_0 & \cos \mathbf{q}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

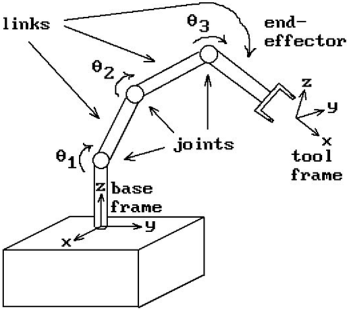


Articulations : Rotation 1D

- Rotation autour de $\mathbf{z}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & SE(3) \\ \mathbf{q}_0 & \rightarrow & (0_{\mathbb{R}^3}, R) \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}_0 & -\sin \mathbf{q}_0 & 0 \\ \sin \mathbf{q}_0 & \cos \mathbf{q}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



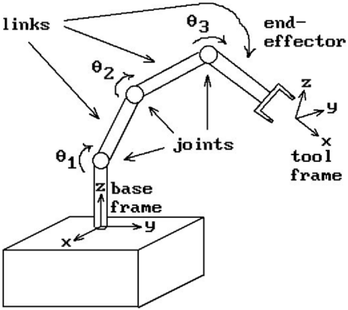
Articulations : Translation 1D

- Translation selon $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & SE(3) \\ \mathbf{q}_0 & \rightarrow & (\mathbf{t}, I_3) \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



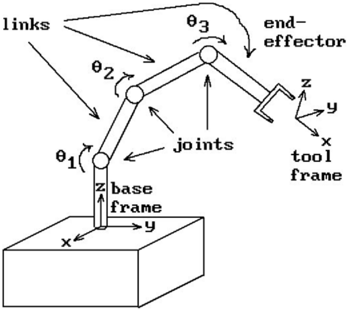
Articulations : Translation 1D

- Translation selon $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & SE(3) \\ \mathbf{q}_0 & \to & (\mathbf{t}, I_3) \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



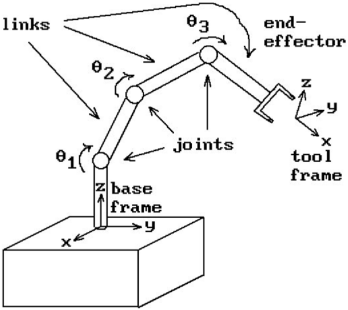
Articulations : Translation 3D

- Translation :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & SE(3) \\ (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) & \rightarrow & (\mathbf{t}, I_3) \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



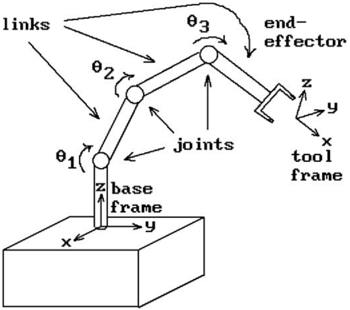
Articulations : Translation 3D

- Translation :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & SE(3) \\ (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) & \rightarrow & (\mathbf{t}, I_3) \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$$

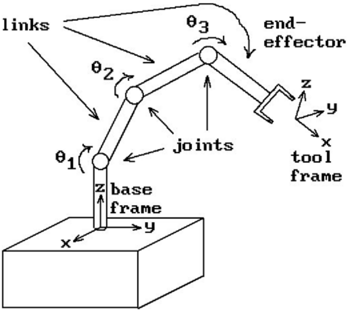
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Articulations : Rotation 3D

- Vecteur de taille 4 unitaire :

$$\mathbb{S}^4 = \{\mathbf{q} | \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, ||\mathbf{q}|| = 1\}$$



- Rotation :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^4 &\rightarrow SE(3) \\ \mathbf{q} &\rightarrow (0_{\mathbb{R}^3}, R(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2q_2q_1 - 2q_3q_0 & 2q_3q_1 + 2q_2q_0 \\ 2q_2q_1 + 2q_3q_0 & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2q_3q_2 - 2q_1q_0 \\ 2q_3q_1 - 2q_2q_0 & 2q_3q_2 + 2q_1q_0 & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{pmatrix}$$

$q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ is a quaternion.

Articulations : Rotation 3D

- Vecteur de taille 4 unitaire :

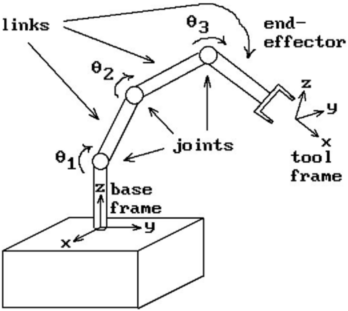
$$\mathbb{S}^4 = \left\{ \mathbf{q} | \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, ||\mathbf{q}|| = 1 \right\}$$

- Rotation :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}^4 & \rightarrow & SE(3) \\ \mathbf{q} & \rightarrow & (0_{\mathbb{R}^3}, R(\mathbf{q})) \end{array}$$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1-2(\mathbf{q}_2^2+\mathbf{q}_3^2) & 2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1-2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_0 & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1+2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0 \\ 2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1+2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_0 & 1-2(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_3^2) & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2-2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_0 \\ 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1-2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0 & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2+2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_0 & 1-2(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_2^2) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 i + \mathbf{q}_2 j + \mathbf{q}_3 k$ is a quaternion.



Articulations : Rotation 3D

- Vecteur de taille 4 unitaire :

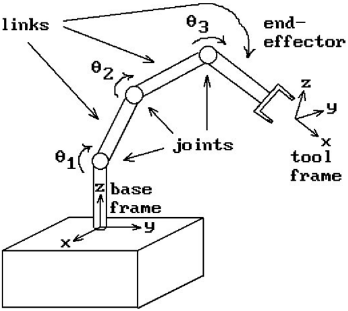
$$\mathbb{S}^4 = \left\{\mathbf{q} | \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4, ||\mathbf{q}|| = 1\right\}$$

- Rotation :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}^4 & \rightarrow & SE(3) \\ \mathbf{q} & \rightarrow & (0_{\mathbb{R}^3}, R(\mathbf{q})) \end{array}$$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1-2(\mathbf{q}_2^2+\mathbf{q}_3^2) & 2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1-2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_0 & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1+2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0 \\ 2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_1+2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_0 & 1-2(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_3^2) & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2-2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_0 \\ 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_1-2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_0 & 2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_2+2\mathbf{q}_1\mathbf{q}_0 & 1-2(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_2^2) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 i + \mathbf{q}_2 j + \mathbf{q}_3 k$ is a quaternion.



Digression : Quaternions

- Nombres complexes : $i^2 = -1$
- Quaternion : extension des nombres complexes

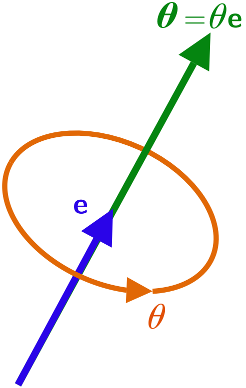
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

d'où l'on déduit

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$$

- $\mathbf{q} = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_0 i + \mathbf{q}_1 j + \mathbf{q}_2 k$, with $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$.
- Quaternion unitaire : $\mathbf{q}_3^2 + \mathbf{q}_0^2 + \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2 = 1$.

Digression : Rotation 3D et quaternion unitaire

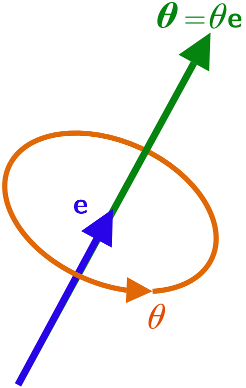


- Rotation identité : $\mathbf{q} = (0, 0, 0, 1)$
- Rotation de θ autour de $\mathbf{e}$

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, cos(\frac{\theta}{2})\right)$$

  avec $\mathbf{u} = sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{e}$.
- $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ représente la même rotation.

Digression : Rotation 3D et quaternion unitaire



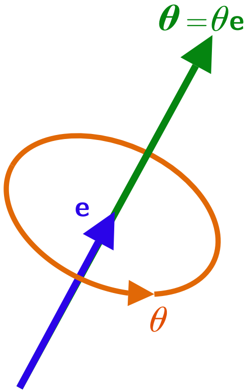
- Rotation identité : $\mathbf{q} = (0, 0, 0, 1)$
- Rotation de θ autour de $\mathbf{e}$

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, cos(\frac{\theta}{2})\right)$$

avec $\mathbf{u} = sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{e}$.

- $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ représente la même rotation.

Digression : Rotation 3D et quaternion unitaire



- Rotation identité : $\mathbf{q} = (0, 0, 0, 1)$
- Rotation de θ autour de $\mathbf{e}$

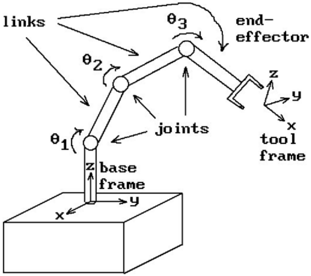
$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, cos(\frac{\theta}{2})\right)$$

avec $\mathbf{u} = sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{e}$.

- $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ représente la même rotation.

Chaîne cinématique

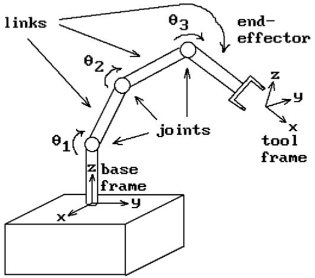
- Sequence de 3 rotations : ${}^{1}M_{1'}(\mathbf{q}_1)$, ${}^{2}M_{2'}(\mathbf{q}_2)$ et ${}^{3}M_{3'}(\mathbf{q}_3)$.
- Articulation rigidement liée entre elles : ${}^{0}M_1$, ${}^{1'}M_2$, ${}^{2'}M_2$ et ${}^{3'}M_{outil}$.
- Configuration du robot : $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$
- Calcul de la position de l'outil :



$$ {}^{0}M_{outil} = {}^{0}M_1.{}^{1}M_{1'}(\mathbf{q}_1).{}^{1'}M_2.{}^{2}M_{2'}(\mathbf{q}_2).{}^{2'}M_3.{}^{3}M_{3'}(\mathbf{q}_3).{}^{3'}M_{outil} $$

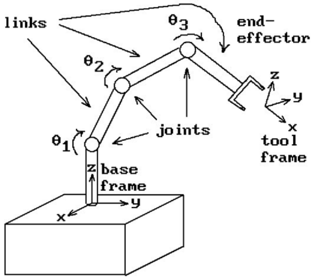
Chaîne cinématique : Jacobienne

- Contrôle du robot via les moteurs : $\mathbf{q}$
- On veut contrôler l'organe terminal : ${}^{0}M_{outil}$
- Relation entre $\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{V}_{A \in outil/0}$?
- Relation entre τ et $\mathbf{F}_{A,outil/0}$?



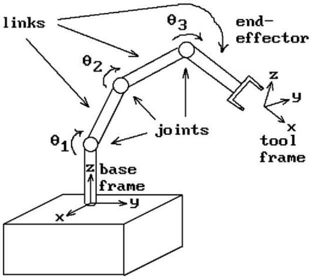
Chaîne cinématique : Jacobienne

- Contrôle du robot via les moteurs : $\mathbf{q}$
- On veut contrôler l'organe terminal : ${}^0M_{outil}$
- Relation entre $\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{V}_{A \in outil/0}$?
- Relation entre τ et $\mathbf{F}_{A,outil/0}$?



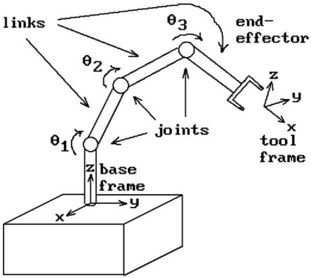
Chaîne cinématique : Jacobienne

- Contrôle du robot via les moteurs : $\mathbf{q}$
- On veut contrôler l'organe terminal : ${}^{0}M_{outil}$
- Relation entre $\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{V}_{A \in outil/0}$?
- Relation entre τ et $\mathbf{F}_{A,outil/0}$?



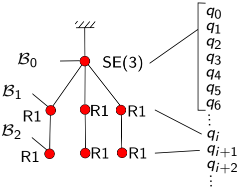
Chaîne cinématique : Jacobienne

- Contrôle du robot via les moteurs : $\mathbf{q}$
- On veut contrôler l'organe terminal : ${}^0M_{outil}$
- Relation entre $\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{V}_{A \in outil/0}$?
- Relation entre τ et $\mathbf{F}_{A,outil/0}$?



Un cas plus complexe : robot humanoïde

Chaîne cinématique :



Nécéssité de représenter un corps flottant.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{obst} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\}\end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{obst} \quad = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\}\end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{obst} \quad = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\} \end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{obst} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\} \end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{obst} \quad = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\} \end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Definitions

- *Espace de travail* dans lequel le robot bouge : $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ où $\mathbb{R}^3$
- Obstacle dans $\mathcal{W}$: sous-ensemble compact de $\mathcal{W}$, noté $\mathcal{O}$.
- Espace des configurations : $\mathcal{C}$.
- Position en une configuration $\mathbf{q}$ d'un point $M \in \mathcal{B}_i$: $\mathbf{x}_i(M, \mathbf{q})$.
- Obstacle dans l'espaces des configurations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{obst} \quad = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}, \quad & \exists i \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M \in \mathcal{B}_i,\ \mathbf{x}_i(M, \mathbf{q}) \in \mathcal{O} \text{ or} \\ & \exists i, j \in \{1, \cdots, m\},\ \exists M_i \in \mathcal{B}_i,\ \exists M_j \in \mathcal{B}_j, \\ & \mathbf{x}_i(M_i, \mathbf{q}) = x_j(M_j, \mathbf{q})\} \end{aligned}$$

- Espace des configurations *libres* : $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obst}$.

Chemin

- Chemin :
  - fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{C}$.
- Chemin sans collision :
  - fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{C}_{free}$.

Chemin

- Chemin :
  - fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}$.
- Chemin sans collision :
  - fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}_{free}$.

Probléme de planification de mouvement

- Étant donné un robot, des obstacles ainsi qu'une configuration initial et finale du robot,
  - trouver un chemin sans collision allant de la configuration initiale à la configuration finale.

Probléme de planification de mouvement

- Étant donné un robot, des obstacles ainsi qu'une configuration initial et finale du robot,
  - trouver un chemin sans collision allant de la configuration initiale à la configuration finale.

Probléme de planification de mouvement

- Étant donné un robot, des obstacles ainsi qu'une configuration initial et finale du robot,
  - trouver un chemin sans collision allant de la configuration initiale à la configuration finale.
- Étant donné un robot, $\mathcal{O}$, $(\mathbf{q}_{initiale}, \mathbf{q}_{finale}) \in \mathcal{C}^2$,

Probléme de planification de mouvement

- Étant donné un robot, des obstacles ainsi qu'une configuration initial et finale du robot,
  - trouver un chemin sans collision allant de la configuration initiale à la configuration finale.

- Étant donné un robot, $\mathcal{O}$, $(\mathbf{q}_{initiale}, \mathbf{q}_{finale}) \in \mathcal{C}^2$,
  - trouver $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathcal{C}_{free})$ telle que $f(0) = \mathbf{q}_{initiale}$ et $f(1) = \mathbf{q}_{finale}$.

Planification de mouvement

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Un peu d'histoire

Les premières approches sont déterministes :

- discretisation,
  - dimensionnalité
- diagrammes de Voronoï
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- décomposition cellulaire
  - dur à généraliser pour plus de 2-3 dimensions.
  - dimensionnalité
- champs de potentiel
  - dur à généraliser pour des corps complexes,
  - sujet au problème des minimums locaux.

Émergence de méthodes aléatoires dans les années 1990.

Méthodes aléatoires

Principe :

- tirer une configuration aléatoire,
- construire un graphe (carte) dont les noeuds sont des configurations,
- et dont les arêtes sont des interpolations linéaires sans collision.

Méthodes aléatoires

Principe :

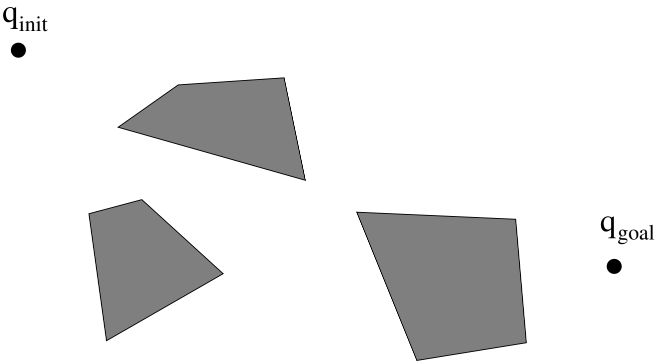
- tirer une configuration aléatoire,
- construire un graphe (carte) dont les noeuds sont des configurations,
- et dont les arêtes sont des interpolations linéaires sans collision.

Méthodes aléatoires

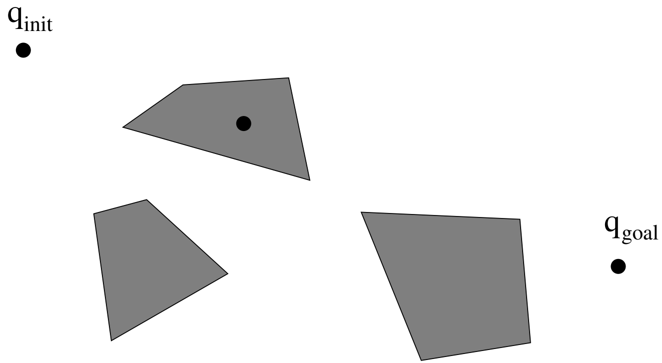
Principe :

- tirer une configuration aléatoire,
- construire un graphe (carte) dont les noeuds sont des configurations,
- et dont les arêtes sont des interpolations linéaires sans collision.

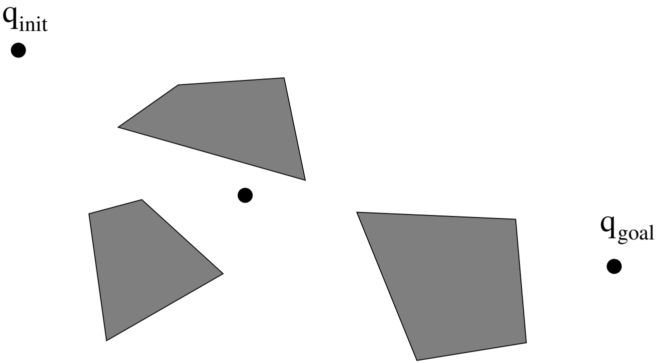
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



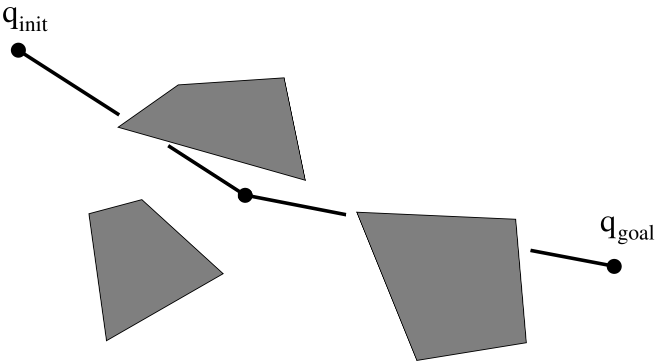
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



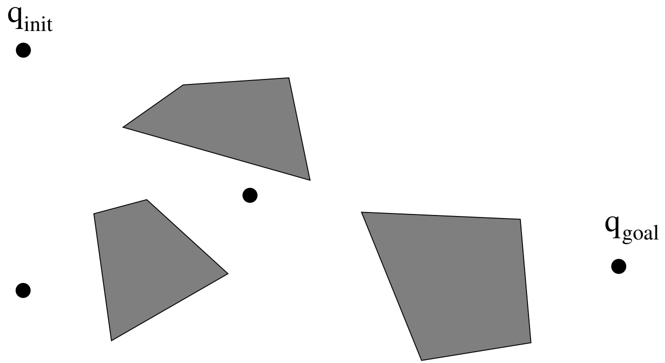
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



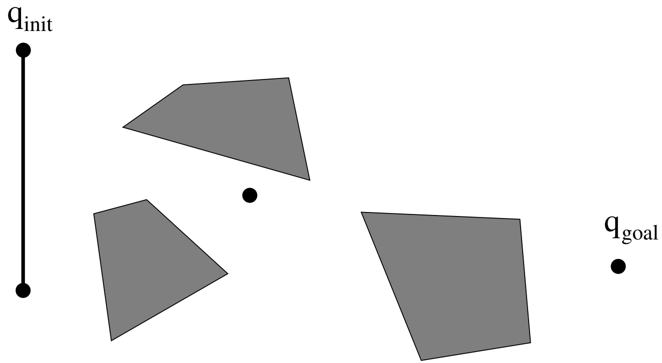
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



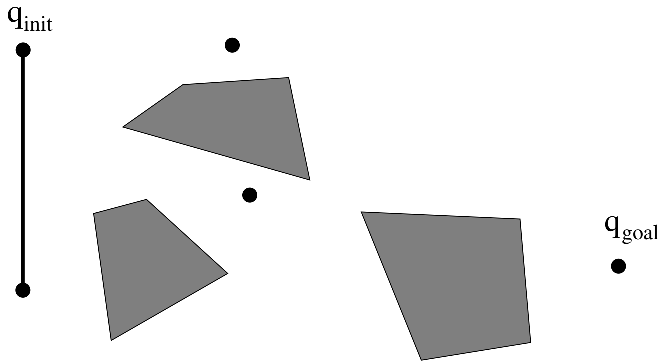
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



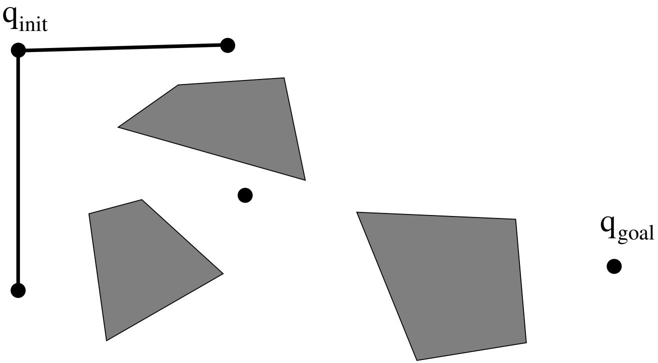
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



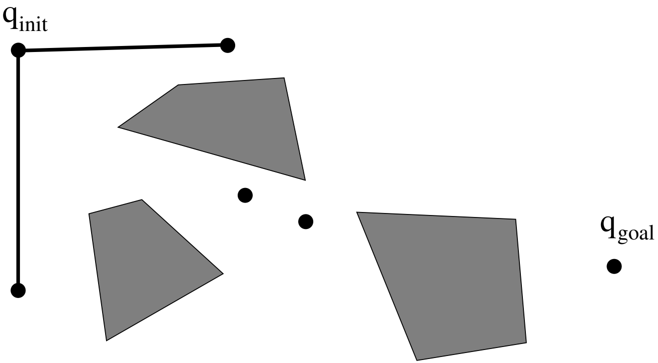
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



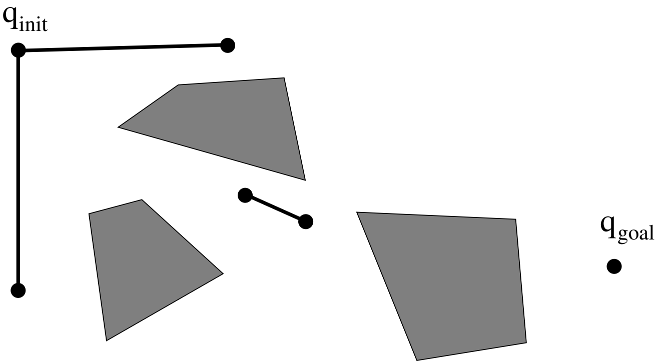
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



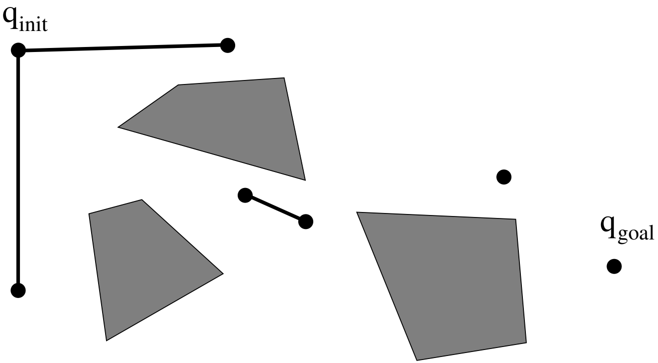
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



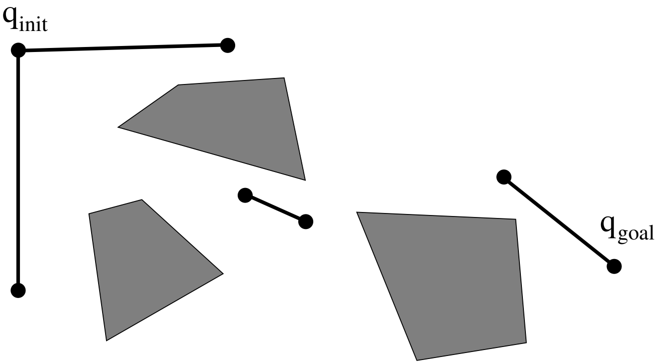
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



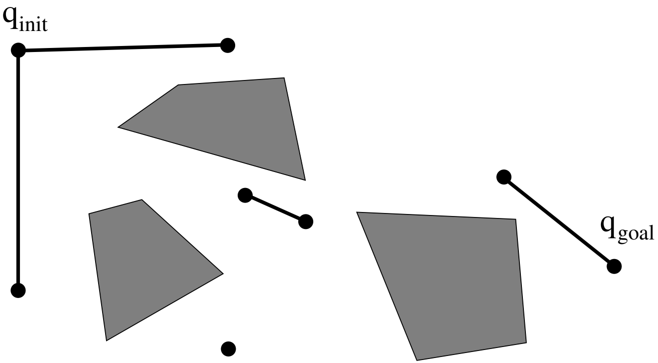
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



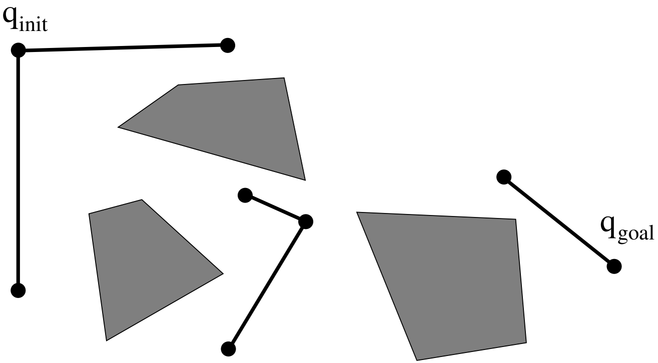
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



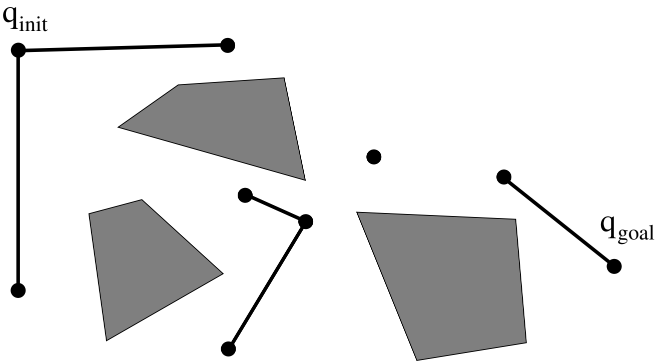
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



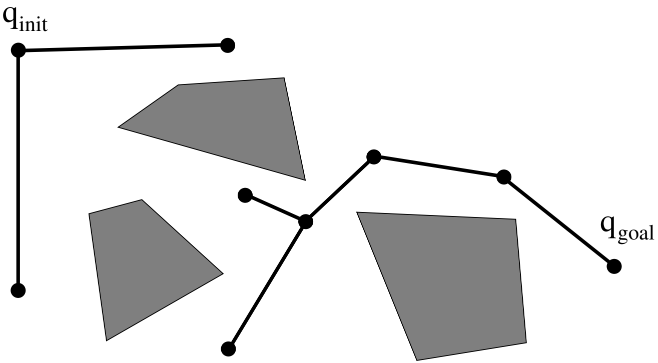
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



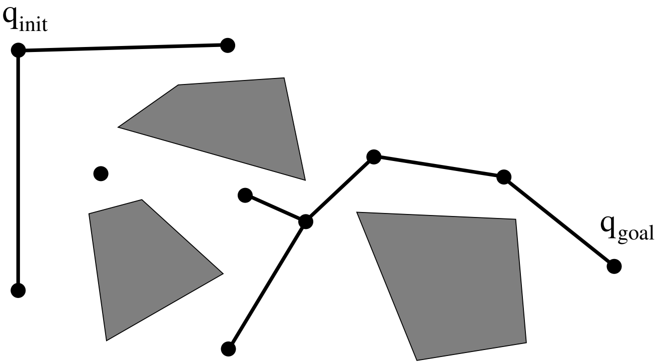
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



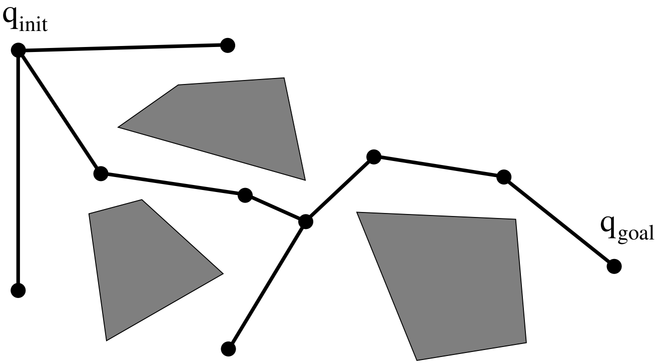
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



Probabilistic roadmap (PRM) 1994



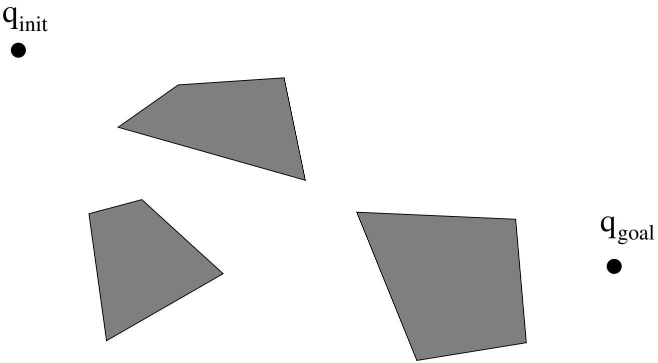
Probabilistic roadmap (PRM) 1994



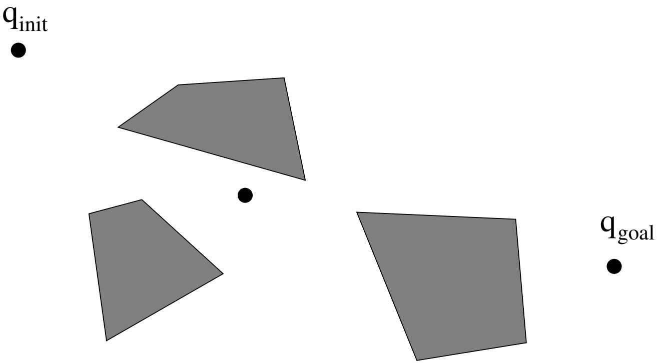
Probabilistic roadmap (PRM)

- Beaucoup de noeuds inutiles sont créés,
  - cela augmente le coût de connexion de nouveaux noeuds á la carte courrante.
- Amélioration : Visibility-based PRM
  - Seul les noeuds *intéressants* sont gardés.

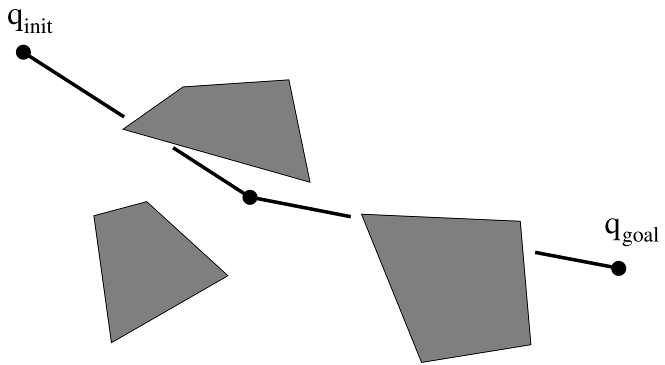
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



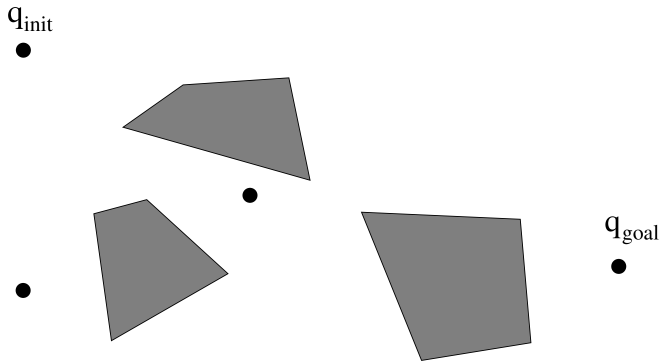
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



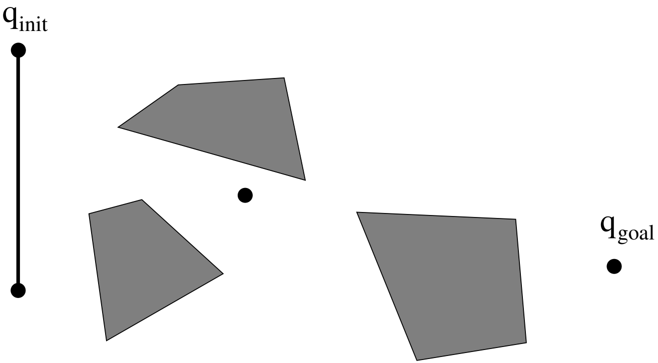
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



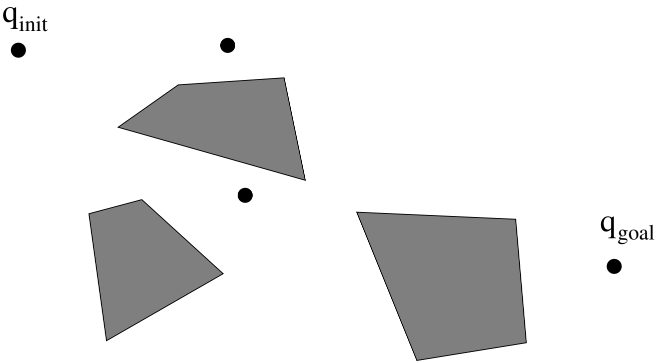
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



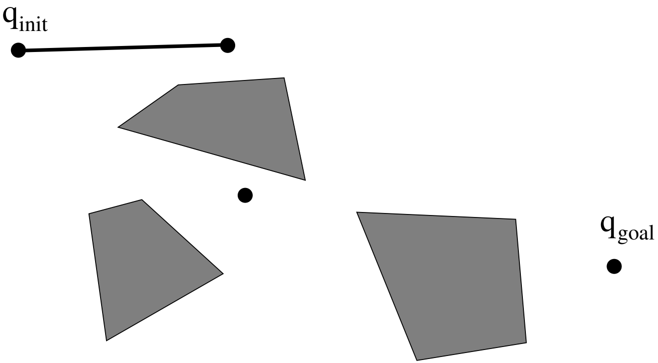
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



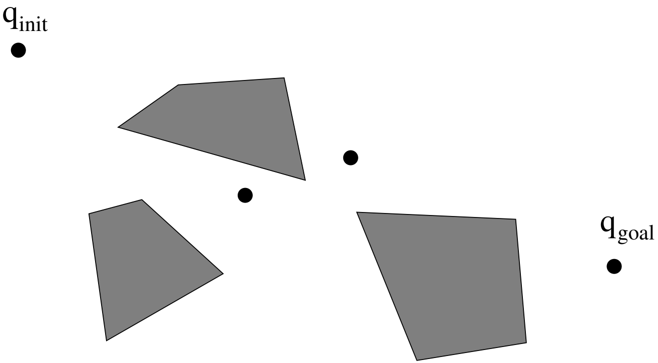
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



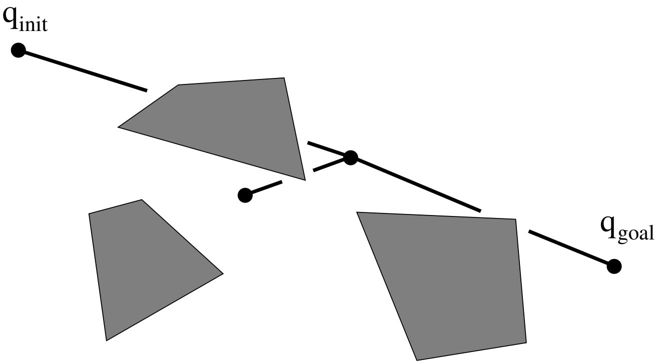
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



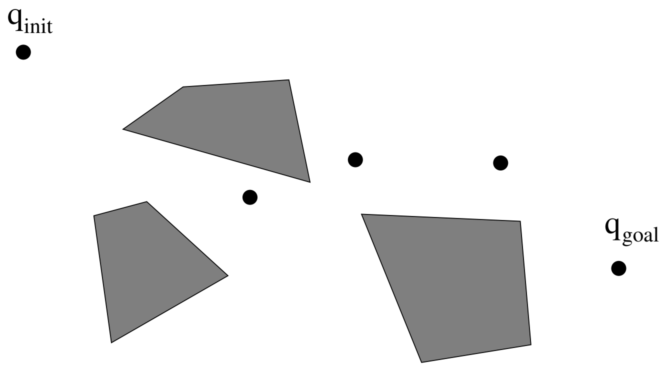
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



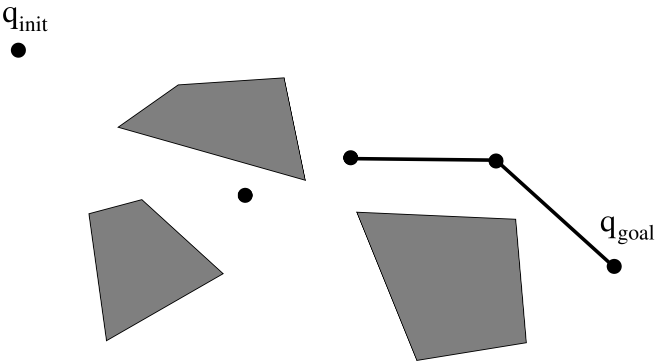
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



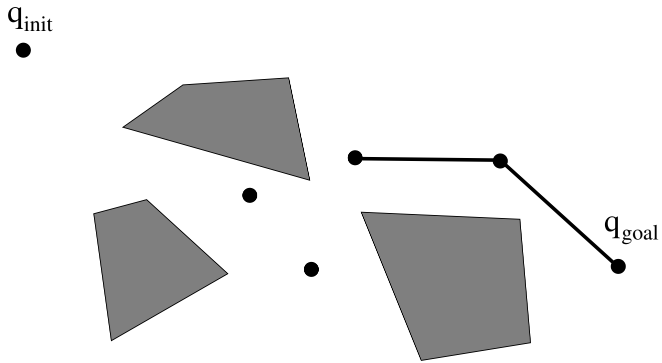
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



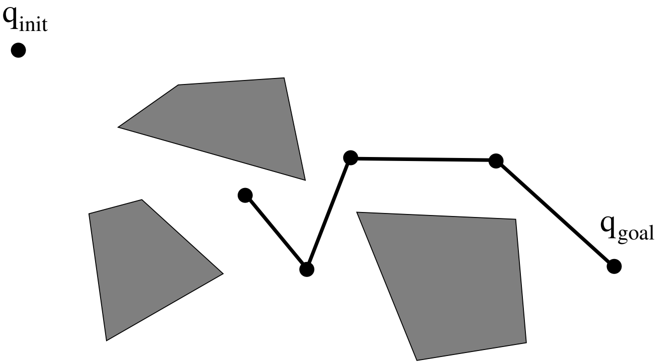
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



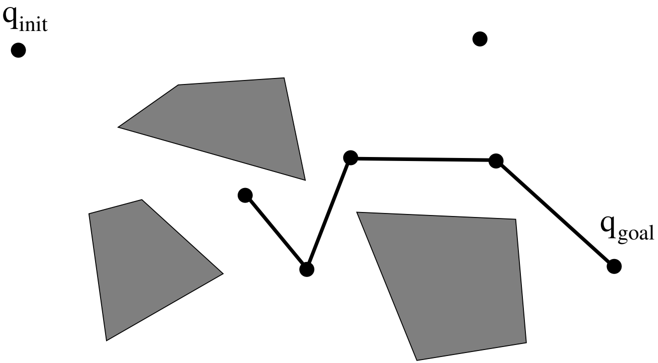
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



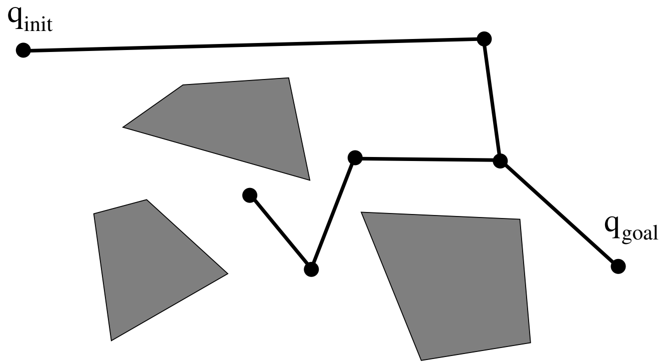
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



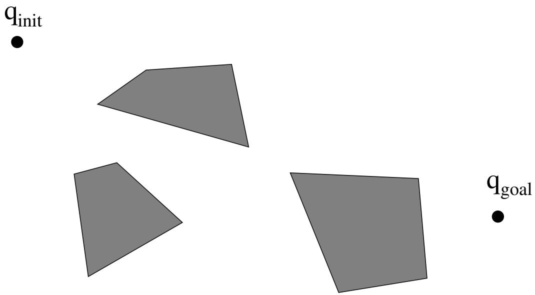
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



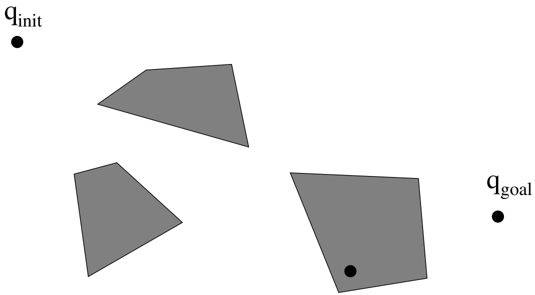
Visibility-based probabilistic roadmap (Visi-PRM) 1999



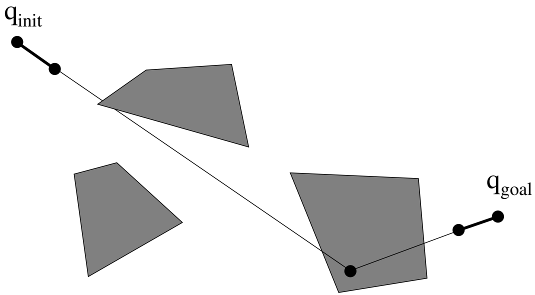
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



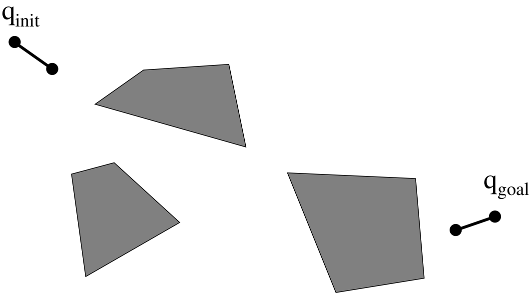
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



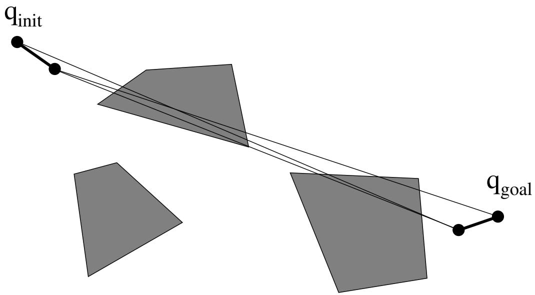
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



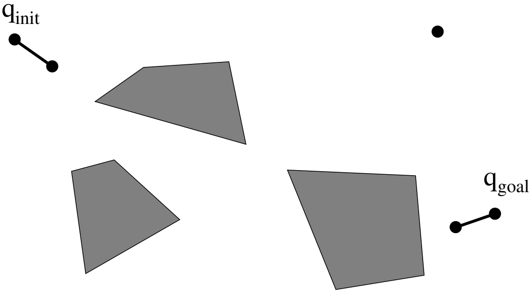
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



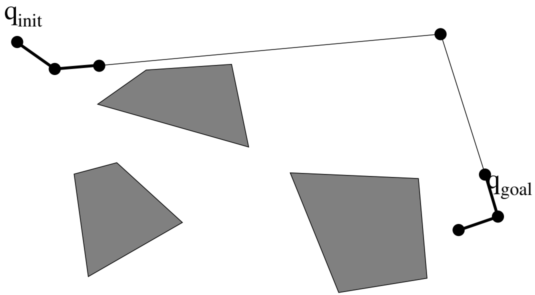
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



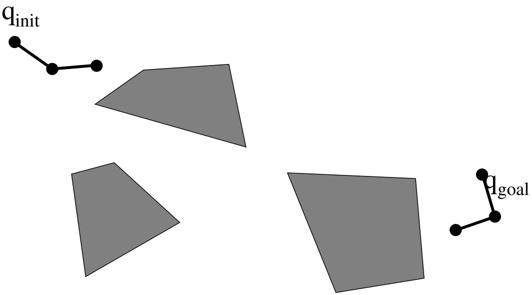
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



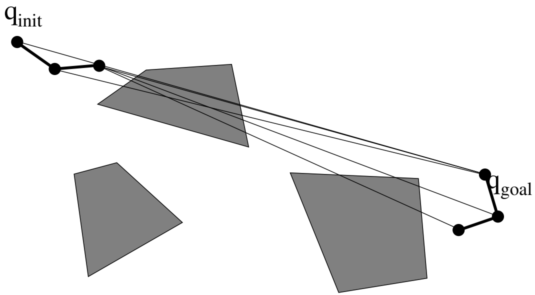
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



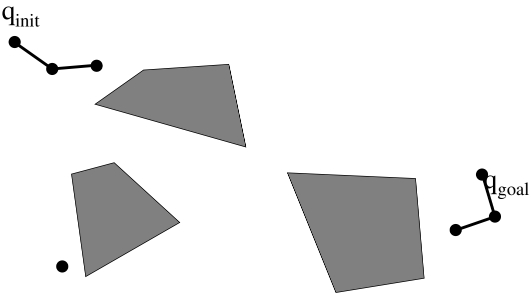
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



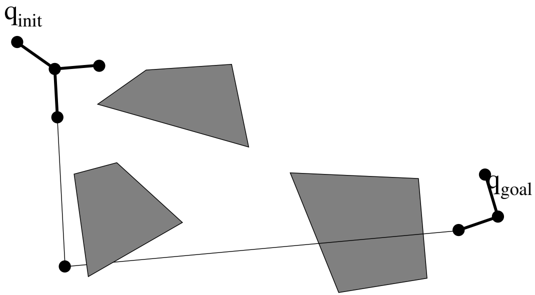
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



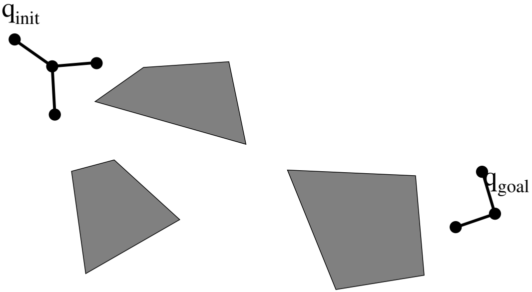
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



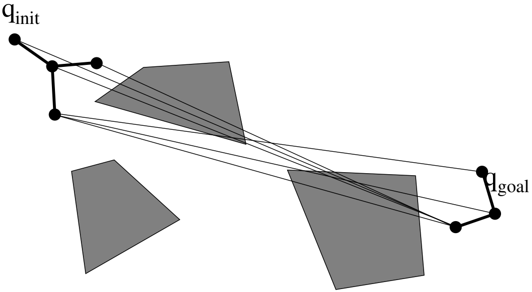
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



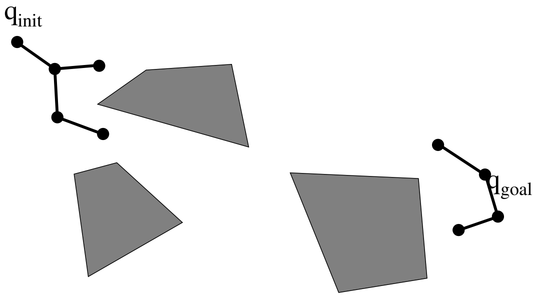
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



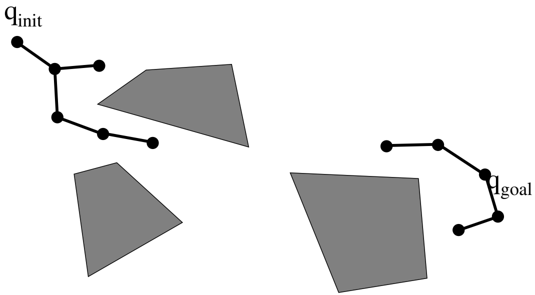
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



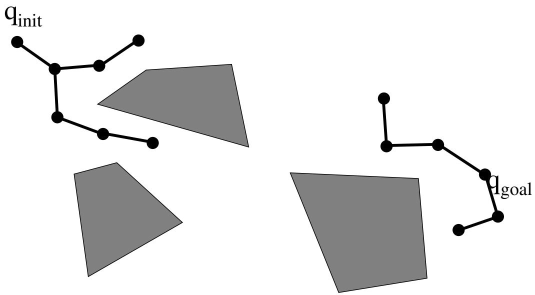
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



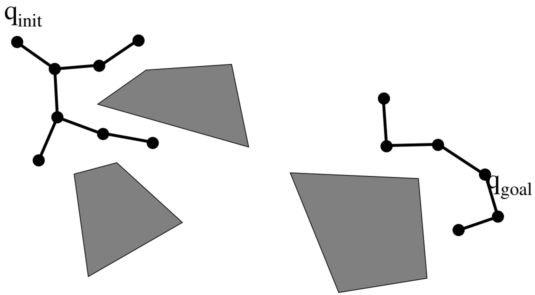
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



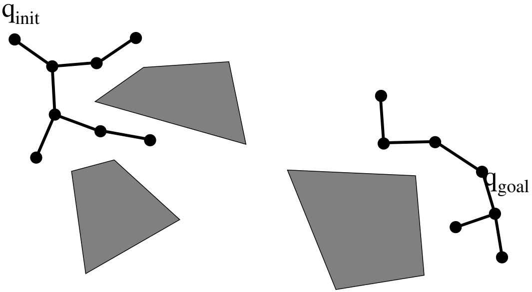
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



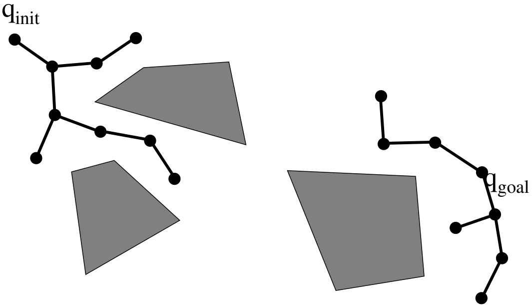
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



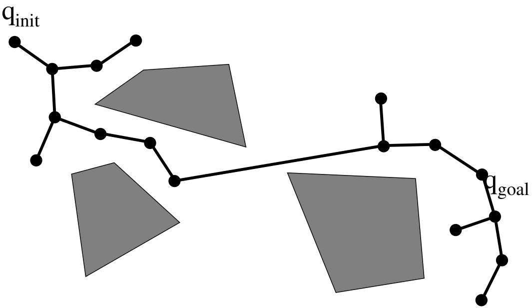
Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



Rapidly exploring Random Tree (RRT) 2000



Méthodes aléatoires

- Avantages :
  - pas de calcul explicites de l'espace des configurations libres,
  - facile á implémenter,
  - robuste.
- Inconvénients :
  - pas de complétude, seulement une complétude en probabilité.
  - difficile de trouver un passage étroit.
- Opérations requises :
  - test de collisions
    - pour des configurations (statique),
    - pour des chemins (dynamique)

Méthodes aléatoires

- Avantages :
  - pas de calcul explicites de l'espace des configurations libres,
  - facile á implémenter,
  - robuste.
- Inconvénients :
  - pas de complétude, seulement une complétude en probabilité.
  - difficile de trouver un passage étroit.
- Opérations requises :
  - test de collisions
    - pour des configurations (statique),
    - pour des chemins (dynamique)

Méthodes aléatoires

- Avantages :
  - pas de calcul explicites de l'espace des configurations libres,
  - facile á implémenter,
  - robuste.
- Inconvénients :
  - pas de complétude, seulement une complétude en probabilité.
  - difficile de trouver un passage étroit.
- Opérations requises :
  - test de collisions
    - pour des configurations (statique),
    - pour des chemins (dynamique)

Planification de mouvement

Motivations

- Comment générer une configuration satisfaisant des critères géométriques ?
  - position,
  - orientation,
  - centre de masse,
  - visibilité,
  - ...
- Interpolation linéraire dans $\mathcal{C}$:
  - courbe non linéraire dans $\mathcal{W}$

Motivations

- Comment générer une configuration satisfaisant des critères géométriques ?
  - position,
  - orientation,
  - centre de masse,
  - visibilité,
  - ...
- Interpolation linéraire dans $\mathcal{C}$:
  - courbe non linéraire dans $\mathcal{W}$

Motivations

- Comment générer une configuration satisfaisant des critères géométriques ?
  - position,
  - orientation,
  - centre de masse,
  - visibilité,
  - ...
- Interpolation linéraire dans $\mathcal{C}$:
  - courbe non linéraire dans $\mathcal{W}$

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Quelques exemples :

- position,
- centre de masse,
- orientation.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Quelques exemples :

- position,
- centre de masse,
- orientation.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Quelques exemples :

- position,
- centre de masse,
- orientation.

Définition

Contrainte : une equation de la forme

$$f(q) = 0$$

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$,
- m est la dimension de la contrainte.

Quelques exemples :

- position,
- centre de masse,
- orientation.

Résolution exacte

- donne l'ensemble des solutions d'une contrainte : $q \in \mathcal{C}, f(q) = 0$,
- possible pour certaines contraintes mais :
  - spécifique à chaque cas,
  - complexes à implémenter,
  - difficile, voire impossible à combiner.

Résolution exacte

- donne l'ensemble des solutions d'une contrainte : $q \in \mathcal{C}, f(q) = 0$,
- possible pour certaines contraintes mais :
  - spécifique à chaque cas,
  - complexes à implémenter,
  - difficile, voire impossible à combiner.

Résolution exacte

- donne l'ensemble des solutions d'une contrainte : $q \in \mathcal{C}, f(q) = 0$,
- possible pour certaines contraintes mais :
  - spécifique à chaque cas,
  - complexes à implémenter,
  - difficile, voire impossible à combiner.

Résolution exacte

- donne l'ensemble des solutions d'une contrainte : $q \in \mathcal{C}, f(q) = 0$,
- possible pour certaines contraintes mais :
  - spécifique à chaque cas,
  - complexes à implémenter,
  - difficile, voire impossible à combiner.

Résolution exacte

- donne l'ensemble des solutions d'une contrainte :
  $q \in \mathcal{C}, f(q) = 0$,
- possible pour certaines contraintes mais :
  - spécifique à chaque cas,
  - complexes à implémenter,
  - difficile, voire impossible à combiner.

Résolution numérique

Méthode itérative

- si $||\ f(\mathbf{q}_n)|| < \epsilon$ alors $\mathbf{q}_n$ est une solution,
- calcul de la dérivée de f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

- calcul de $\mathbf{q}_{n+1}$ avec une approximation
  - du 1er ordre

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha \left(\frac{||f(\mathbf{q}_n)||^2}{2||J^T f(\mathbf{q}_n)||^2} \right) J^T f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

  - du 2nd ordre : $J^\dagger$ est la pseudo-inverse de J

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha J^\dagger f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

Résolution numérique

Méthode itérative

- si $|| f(\mathbf{q}_n)|| < \epsilon$ alors $\mathbf{q}_n$ est une solution,
- calcul de la dérivée de f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

- calcul de $\mathbf{q}_{n+1}$ avec une approximation
  - du 1er ordre

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha \left(\frac{||f(\mathbf{q}_n)||^2}{2||J^T f(\mathbf{q}_n)||^2} \right) J^T f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

  - du 2nd ordre : $J^\dagger$ est la pseudo-inverse de J

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha J^\dagger f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

Résolution numérique

Méthode itérative

- si $||\ f(\mathbf{q}_n)|| < \epsilon$ alors $\mathbf{q}_n$ est une solution,
- calcul de la dérivée de f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

- calcul de $\mathbf{q}_{n+1}$ avec une approximation
  - du 1er ordre

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha \left(\frac{||f(\mathbf{q}_n)||^2}{2||J^T f(\mathbf{q}_n)||^2} \right) J^T f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0,1]$$

  - du 2nd ordre : $J^\dagger$ est la pseudo-inverse de J

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha J^\dagger f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0,1]$$

Résolution numérique

Méthode itérative

- si $|| \ f(\mathbf{q}_n)|| < \epsilon$ alors $\mathbf{q}_n$ est une solution,
- calcul de la dérivée de f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

- calcul de $\mathbf{q}_{n+1}$ avec une approximation
  - du 1er ordre

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha \left(\frac{||f(\mathbf{q}_n)||^2}{2||J^T f(\mathbf{q}_n)||^2} \right) J^T f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

  - du 2nd ordre : $J^\dagger$ est la pseudo-inverse de J

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha J^\dagger f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

Résolution numérique

Méthode itérative

- si $||\ f(\mathbf{q}_n)|| < \epsilon$ alors $\mathbf{q}_n$ est une solution,
- calcul de la dérivée de f :

$$J = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

- calcul de $\mathbf{q}_{n+1}$ avec une approximation
  - du 1er ordre

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha \left(\frac{||f(\mathbf{q}_n)||^2}{2||J^T f(\mathbf{q}_n)||^2} \right) J^T f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

  - du 2nd ordre : $J^\dagger$ est la pseudo-inverse de J

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha J^\dagger f(\mathbf{q}_n), \alpha \in]0, 1]$$

Digression : pseudo-inverse

Soit $J \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), n \geq m$ et soit le problème $Jx = b$.

- $x^* = J^\dagger b$ est la solution de norme minimale.
- la matrice $I_n - J^\dagger J$ est un projecteur sur le noyau de J.
- l'ensemble des solutions est $\left\{x^* + (I_n - J^\dagger J)u, u \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Digression : pseudo-inverse

Soit $J \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), n \geq m$ et soit le problème $Jx = b$.

- $x^* = J^\dagger b$ est la solution de norme minimale.
- la matrice $I_n - J^\dagger J$ est un projecteur sur le noyau de J.
- l'ensemble des solutions est $\left\{x^* + (I_n - J^\dagger J)u, u \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Digression : pseudo-inverse

Soit $J \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), n \geq m$ et soit le problème $Jx = b$.

- $x^* = J^\dagger b$ est la solution de norme minimale.
- la matrice $I_n - J^\dagger J$ est un projecteur sur le noyau de J.
- l'ensemble des solutions est $\left\{x^* + (I_n - J^\dagger J)u, u \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Planification de mouvement

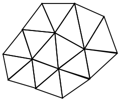
Test de collision

- Problème : étant donné
  - deux ensembles rigides de triangles,
  - la position relative d'un ensemble par rapport á l'autre,

  déterminer si l'intersection entre les ensembles est vide.

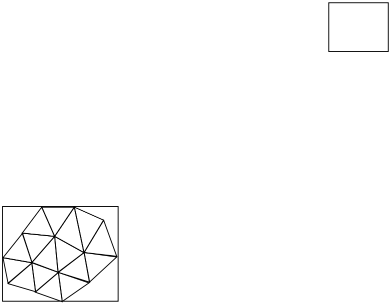
Hiérarchie de volumes englobants

- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.



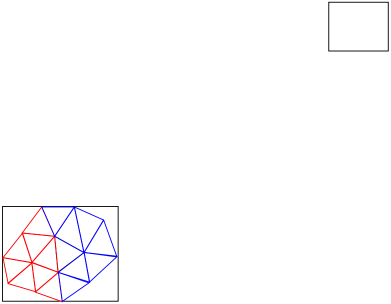
Hiérarchie de volumes englobants

- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.



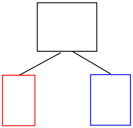
Hiérarchie de volumes englobants

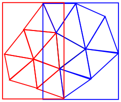
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.



Hiérarchie de volumes englobants

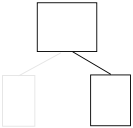
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.

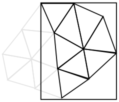




Hiérarchie de volumes englobants

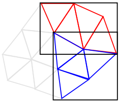
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.

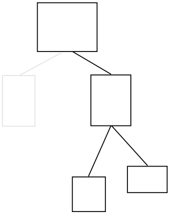




Hiérarchie de volumes englobants

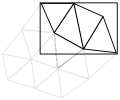
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.

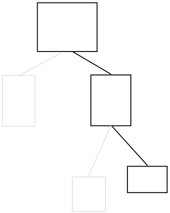




Hiérarchie de volumes englobants

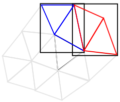
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.

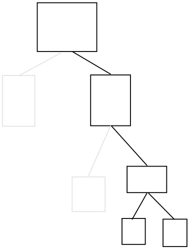




Hiérarchie de volumes englobants

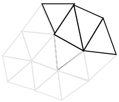
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.

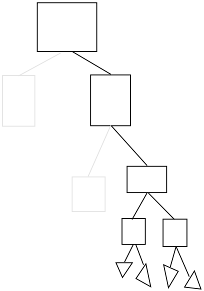




Hiérarchie de volumes englobants

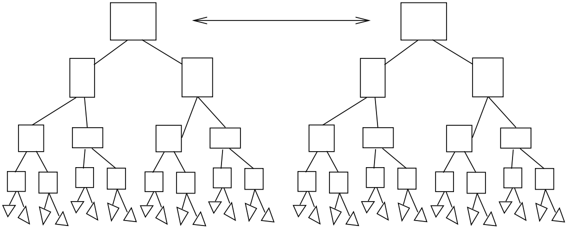
- Arbre binaire de volumes englobants tel que :
  - chaque noeud a deux enfants,
  - les feuilles sont les triangles.





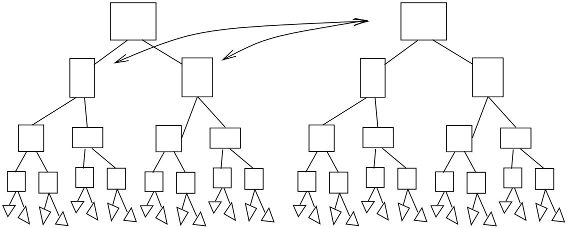
Test de collision pour des configurations

- Algorithme
  - si les éléments de la paire sont des feuilles, tester les triangles
  - si la paire de volume englobant (VE) courante, arrêter l'exploration du sous-arbre
  - déterminer le VE á *casser* en deux.
  - tester récursivement le VE non *cassé* avec les deux fils de l'autre.



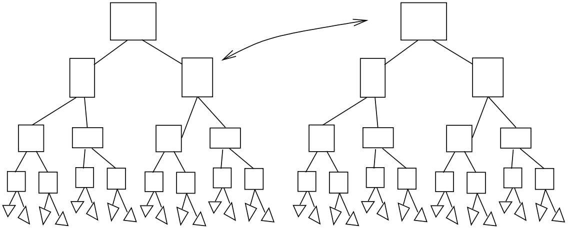
Test de collision pour des configurations

- Algorithme
  - si les éléments de la paire sont des feuilles, tester les triangles
  - si la paire de volume englobant (VE) courante, arrêter l'exploration du sous-arbre
  - déterminer le VE á *casser* en deux.
  - tester récursivement le VE non *cassé* avec les deux fils de l'autre.



Test de collision pour des configurations

- Algorithme
  - si les éléments de la paire sont des feuilles, tester les triangles
  - si la paire de volume englobant (VE) courante, arrêter l'exploration du sous-arbre
  - déterminer le VE á *casser* en deux.
  - tester récursivement le VE non *cassé* avec les deux fils de l'autre.

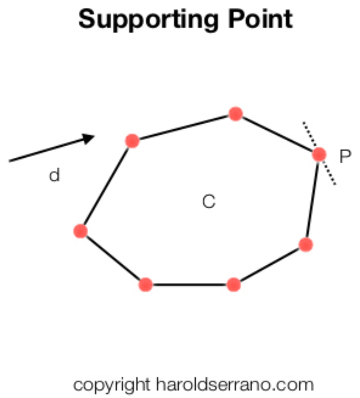


GJK : Gilbert-Johnson-Keerthi

- Test de collision entre deux ensembles *convexes*.
- Point support :

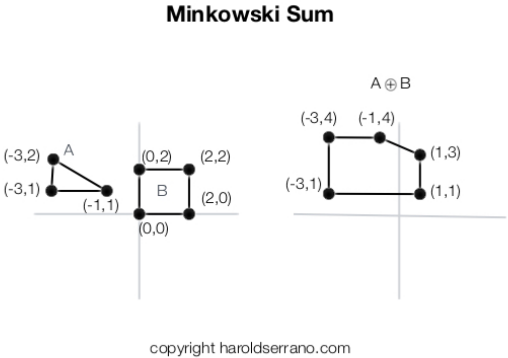
GJK : Gilbert-Johnson-Keerthi

- Test de collision entre deux ensembles *convexes*.
- Point support :



GJK : Gilbert-Johnson-Keerthi

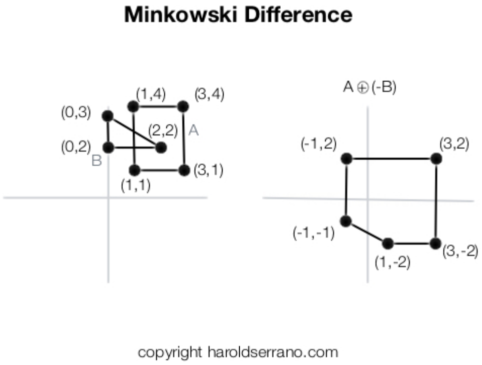
- Somme de Minkowski :



- Différence de Minkowski :

GJK : Gilbert-Johnson-Keerthi

- Somme de Minkowski :
- Différence de Minkowski :



GJK : Gilbert-Johnson-Keerthi