Практикум 3. Решение нестационарного уравнения теплопроводности

Практикум 3. Решение нестационарного уравнения теплопроводности

Исследование уравнения реакции-диффузии

Система нелинейных уравнений в частных производных описывает каталитическую реакцию, протекающую на отрезке единичной длины. В реакции участвуют два субстрата – активатор и ингибитор, второй подавляет скорость образования первого:

$$\partial u^{(1)} / \partial t = \lambda_1 \partial^2 u^{(1)} / \partial x^2 + \rho + k\,[u^{(1)}]^2 [u^{(2)}]^{-1} - \gamma u^{(1)},$$

$$\partial u^{(2)} / \partial t = \lambda_2 \partial^2 u^{(2)} / \partial x^2 + c\,[u^{(1)}]^2 - \nu u^{(2)}.$$

Здесь $\mathbf{x}$ – пространственная координата, $\mathbf{x} \in [0, 1]$, $\mathbf{t}$ – время, $\mathbf{t} \in [0, +\infty]$, $\mathbf{u^{(1)}(x, t)}$ – концентрация активатора и $\mathbf{u^{(2)}(x, t)}$ – концентрация ингибитора в точке $\mathbf{x}$ в момент времени $\mathbf{t}$.

При $\mathbf{x = 0}$, $\mathbf{x = 1}$ и при любом $\mathbf{t}$ ставятся граничные условия $\partial u^{(1)} / \partial x = 0$, $\partial u^{(2)} / \partial x = 0$ (условия нулевого потока каждого из реагентов через границу).

Слагаемое ρ описывает постоянную однородную по пространству подкачку активатора.

Слагаемое $k\,[u^{(1)}]^2 [u^{(2)}]^{-1}$ – скорость самообразования активатора, которая подавляется присутствующим ингибитором.

Слагаемое $c\,[u^{(1)}]^2$ описывает скорость образования ингибитора вследствие наличия активатора.

Слагаемые $[-\nu u^{(1)}]$ и $[-\gamma u^{(2)}]$ описывают естественный распад реагентов: активатора и ингибитора соответственно.

Пространственные взаимодействия (диффузия) описываются операторами дифференцирования по $\mathbf{x}$, параметры $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ характеризуют диффузию реагентов.

Параметры ρ, k, γ, ν, c – постоянные неотрицательные величины.

Начальные условия: $u^{(1)}(x, 0) > 0$, $u^{(2)}(x, 0) > 0$.

По смыслу задачи: $u^{(1)}(x, t) > 0$, $u^{(2)}(x, t) > 0$.

С целью численного изучения системы:

1) предложите и запишите схему для решения задачи.

2) подготовьте программу для расчета численных решений и анализа устойчивости счета.

3) подготовьте комплекты параметров для тестирования программы и проверьте программу.

4) по результатам тестов подготовьте краткий отчет.

В программе в том числе предусмотреть:

– возможность задания (изменения) всех параметров задачи;

– возможность задания (изменения) сетки как числа участков по **x** и шага по **t**;

– счет на установление (неограниченно долгий счет, чтобы численно «получить» предельную структуру, остановка счета «по требованию»);

– графический послойный вывод концентраций активатора и ингибитора;

– опция: вывод нормы решений на слое;

– возможность управления выводом (начало, конец, листать, переход на заданный номер слоя, переход заданное значение t, листать слои с управляемым шагом просмотра).

– опция: табличный послойный вывод;

– для послойного вывода графиков – стабильный масштаб.

Реализовать ввод начальных условий:

– возможность задать $\mathbf{u^{(1)}(x, 0)}$ и $\mathbf{u^{(2)}(x, 0)}$ в виде суперпозиции собственных функций $\mathbf{\cos(\pi l x)}$, $\mathbf{l = 0, 1, 2,}$, например, до числа $\mathbf{l = 20}$, коэффициенты при гармониках – двумерные векторы.

В структуре начальных условий нулевая гармоника ($\mathbf{l = 0}$) обязательна, коэффициенты (двумерный вектор) при нулевой гармонике по смыслу задачи могут быть только положительными.

Для остальных номеров ($\mathbf{l = 1, 2,\ \ 20}$) может быть предусмотрено одновременное использование не более пяти гармоник с ненулевыми векторами – коэффициентами.

При вводе начальных условий обеспечить контроль выполнения $\mathbf{u^{(1)}(x, t) > 0}$, $\mathbf{u^{(2)}(x, t) > 0}$.

При задании шагов сетки обеспечить вычислительную устойчивость (если нужно).

Анализ численных решений. Как минимум один из вариантов:

№1

Сравнение пары слоев численного решения (по норме, по всем узлам). Опция нужна для сравнения соседних (или «соседних с лагом») слоев на предмет выхода на стационарное решение.

№2

Сравнение двух численных решений, полученных разными способами, для слоев, соответствующих одному и тому же **t,** в общих узлах сетки по **x** (на предмет «устойчивости счета»). А именно, сравнение пары решений, полученных одной и той же схемой на разных (но сопоставимых) сетках.

№3

Сравнение двух численных решений, полученных разными способами, для слоев, соответствующих одному и тому же **t,** в общих узлах сетки по **x** (на предмет «устойчивости счета»). А именно, сравнение пары решений, полученных разными схемами на одной и той же сетке.

№4

Сравнение численных решений, полученных одним и тем же способом для одной и той же задачи, но для разных начальных условий (на предмет «единственности предельного решения»).

Формат сравнения решений: разность; послойно. Для ингибитора и активатора отдельно. Норма разности на слое. Управление просмотром послойного вывода. Для проверки сравнения: таблица или график.

Наличие в программе всех указанных возможностей сравнения приветствуется. Дополнительные опции сравнения приветствуются.

Рекомендации:

1) Координаты однородного по пространству стационарного решения вида $\mathbf{u^{(1)}(x, t) = const\_1 > 0}$, $\mathbf{u^{(2)}(x, t) = const\_2 > 0}$ в данной системе могут быть найдены явно.

2) Начальные условия можно взять в окрестности данного решения.

3) Предельное решение сравнить со стационарным, найденным аналитически.

4) Система допускает существование *устойчивых упорядоченных по времени и по пространству решений.*

При этом решение $\mathbf{u^{(1)}(x, t) = const\_1 > 0}$, $\mathbf{u^{(2)}(x, t) = const\_2 > 0}$ становится неустойчивым.

Рекомендации конечного использования:

В семестре 2, используя программу, провести численное исследование системы.

1) Подобрать два комплекта параметров и получить численно два устойчивых стационарных режима: стационарный однородный по пространству и стационарный неоднородный по пространству.

2) Подобрать два комплекта параметров и получить два устойчивых режима: нестационарное (периодическое) однородное по пространству устойчивое решение, нестационарное (периодическое) неоднородное по пространству устойчивое решение.

Используя опции программы, подтвердить (численно) устойчивость счета. Подтвердить возможность существования полученных режимов аналитическим исследованием расположения собственных чисел линеаризованных систем.

По результатам исследования семестра 2 также подготовить краткий отчет.

Примерные задачи на экзамен

Задача

Используя улучшенную аппроксимацию начальных условий,
постройте разностную схему для решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, x \in [0, 1], t \in [0, 20], \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \\ u_t(x,0) = 2x \end{cases}$$

Сетка равномерная по x, $t = t_j$ - слой j по времени.
Найдите численное решение на сетке (4, 50) на слое $t = 0.4$.

Задача

Постройте разностную схему для решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, x \in [0, 1], t \in [0, 20], \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \\ u_t(x,0) = 2x \end{cases}$$

Сетка равномерная по x, $t = t_j$ - слой j по времени.
Найдите численное решение на сетке (4, 50) на слое $t = 0.4$.

Задача

Обосновать применение прогонки
к решению разностной схемы модельной задачи VII
с различными типами граничных условий:
граничные условия на отрезке $[a, b]$
$u(a, t) = M_1$, $u(b, t) = M_2$

Демонстрационные материалы

Для просмотра используйте кнопку **«Режимы»**, расположенную *в правом нижнем углу*, на обрамлении *Окна просмотра основных материалов*.

Практикум 5. Построение и анализ консервативных разностных схем

Практикум 5. Построение и анализ консервативных разностных схем

Задачи

Задача №1

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}(k\frac{du}{dx}) - q\,u(x) = -f \text{ при } x\in(0,\,1),$$

$$k\frac{du}{dx}(0) = \beta_1\ u\,(0) - \mu_1,\ -k\frac{du}{dx}(1) = \beta_2\ u\,(1) - \mu_2 \text{ где},$$

$$k > 0,\ q \geq 0,\ \beta_1 + \beta_2 > 0,\ \beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,$$

запишите *разностную схему с типовой аппроксимацией граничных условий,* построенную интегрально-интерполяционным методом.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Коэффициенты k, q, f и β_1, β_2, μ_1 и μ_2 есть постоянные величины.

Задача №2

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}(k\frac{du}{dx}) - q\,u(x) = -f \text{ при } x\in(0,\,1),$$

$$k\frac{du}{dx}(0) = \beta_1\ u\,(0) - \mu_1,\ -k\frac{du}{dx}(1) = \beta_2\ u\,(1) - \mu_2 \text{ где},$$

$$k > 0,\ q \geq 0,\ \beta_1 + \beta_2 > 0,\ \beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,$$

запишите *разностную схему с улучшенной аппроксимацией граничных условий,* построенную интегрально-интерполяционным методом.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Коэффициенты k, q, f и β_1, β_2, μ_1 и μ_2 есть постоянные величины.

Задача №3

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 0.5,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 1,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (0, \xi) \\ 100,\ x \in (\xi, 1) \end{cases},$$

(в точке разрыва $\xi = 0.3$ ставятся условия сопряжения $w_+ = w_-$, $u_+ = u_-$) запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Предположим, что схема применяется на последовательности сеток, для которых точка разрыва является узлом сетки.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Задача №4

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 0.5,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 1,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (0, \xi) \\ 100,\ x \in (\xi, 1) \end{cases},$$

(в точке разрыва $\xi = 5/7$ ставятся условия сопряжения $w_+ = w_-$, $u_+ = u_-$) запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Пусть схема применяется на последовательности сеток, для которых точка разрыва не является узлом сетки.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Задача №5

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$k(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 0.5,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3,\ x \in (0, \xi) \\ 1,\ x \in (\xi, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (0, \xi) \\ 100,\ x \in (\xi, 1) \end{cases},$$

(в точке разрыва $\xi = 0.3$ ставятся условия сопряжения) предложена разностная схема:

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 3v_i = 0,\ x_{i+1} \geq \xi,\ i = 1, \ldots n \\ 3 \cdot \dfrac{v_i - v_{i-1}}{h} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v_{i+1} - v_i}{h},\ x_i = \xi \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - v_i = -100,\ x_{i-1} \leq \xi,\ i = 1, \ldots n \end{cases}.$$

Схема применяется на последовательности равномерных сеток, для которых точка разрыва является узлом.

Исследуйте погрешность аппроксимации, определите порядок аппроксимации и докажите сходимость. Определите порядок сходимости.

Исследуйте (аналитически или численно) дисбаланс схемы. Укажите, является ли схема консервативной.

Укажите, можно ли улучшить сходимость схемы и как.

Задача №6

С целью численного решения уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

$$k(x) = \begin{cases} x + 2, x \in (0,\xi) \\ exp(x), x \in (\xi,1) \end{cases} q(x) = \begin{cases} sin(x), x \in (0,\xi) \\ 2 - x^2, x \in (\xi,1) \end{cases} f(x) = \begin{cases} cos(2x), x \in (0,\xi) \\ x + 2, x \in (\xi,1) \end{cases},$$

(в точке разрыва $\xi=0.4$ ставятся условия сопряжения $w+ = w-$, $u+ = u-$) запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Предположим, что схема применяется на последовательности равномерных сеток, для которых $\xi = 0.4$ является узлом сетки.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Задача №7

С целью численного решения уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

$$k(x) = \begin{cases} x + 2, x \in (0,\xi) \\ exp(x), x \in (\xi,1) \end{cases} q(x) = \begin{cases} sin(x), x \in (0,\xi) \\ 2 - x^2, x \in (\xi,1) \end{cases} f(x) = \begin{cases} cos(2x), x \in (0,\xi) \\ x + 2, x \in (\xi,1) \end{cases},$$

(в точке разрыва $\xi=0.4$ ставятся условия сопряжения $w+ = w-$, $u+ = u-$) запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Предположим, что схема применяется на последовательности равномерных сеток, для которых $\xi = 0.4$ является узлом сетки.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) по формуле трапеций.

Задача №8

С целью численного решения уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

$$k(x) = \begin{cases} x+2, x \in (0,\xi) \\ exp(x), x \in (\xi,1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} sin(x), x \in (0,\xi) \\ 2 - x^2, x \in (\xi,1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} cos(2x), x \in (0,\xi) \\ x+2, x \in (\xi,1) \end{cases},$$

(в точке разрыва ξ=0.4 ставятся условия сопряжения $w+ = w-,\ u+ = u-$) запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Предположим, что схема применяется на последовательности равномерных сеток, для которых $\xi = 0.4$ является узлом сетки.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) по формуле средних прямоугольников.

Задача №9

С целью численного решения уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

$$k(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0.5, x \in (\xi, \zeta) \\ 100, x \in (\zeta, 1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 3, x \in (0, \xi) \\ 0, x \in (\xi, \zeta) \\ 1, x \in (\zeta, 1) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, \xi) \\ 0, x \in (\xi, \zeta) \\ 100, x \in (\zeta, 1) \end{cases},$$

поставьте *условия сопряжения* в каждой из точек разрыва.

Запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Предположим, что схема применяется на последовательности равномерных сеток, для которых $\xi = 0.3$ является узлом сетки, $\zeta = 5/7$ не является узлом сетки.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Задача №10

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$k(x)=\begin{cases} x+2, x\in(0,\xi) \\ exp(x), x\in(\xi,1) \end{cases} \quad q(x)=\begin{cases} sin(x), x\in(0,\xi) \\ 2-x^2, x\in(\xi,1) \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} cos(2x), x\in(0,\xi) \\ x+2, x\in(\xi,1) \end{cases}$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) = -5,\ u(1) = 7,$$

запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом. Аппроксимацией граничных условий – *типовая*.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Задача №11

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$k(x)=\begin{cases} x+2, x\in(0,\xi) \\ exp(x), x\in(\xi,1) \end{cases} \quad q(x)=\begin{cases} sin(x), x\in(0,\xi) \\ 2-x^2, x\in(\xi,1) \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} cos(2x), x\in(0,\xi) \\ x+2, x\in(\xi,1) \end{cases}$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) = -5,\ u(1) = 7,$$

запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом. Аппроксимацией граничных условий – *улучшенная*.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Задача №12

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$k(x)=\begin{cases} x+2, x\in(0,\xi) \\ exp(x), x\in(\xi,1) \end{cases} \quad q(x)=\begin{cases} sin(x), x\in(0,\xi) \\ 2-x^2, x\in(\xi,1) \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} cos(2x), x\in(0,\xi) \\ x+2, x\in(\xi,1) \end{cases}$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) = 5\,u(0) - 7,\ -k(1)\frac{du}{dx}(1) = 13\,u(1),$$

запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом. Аппроксимацией граничных условий – *типовая*.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Задача №13

Для решения задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$$k(x)=\begin{cases} x+2, x\in(0,\xi) \\ exp(x), x\in(\xi,1) \end{cases} \quad q(x)=\begin{cases} sin(x), x\in(0,\xi) \\ 2-x^2, x\in(\xi,1) \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} cos(2x), x\in(0,\xi) \\ x+2, x\in(\xi,1) \end{cases}$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) = 5\,u(0) - 7,\ -k(1)\frac{du}{dx}(1) = 13\,u(1),$$

запишите уравнения разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом. Аппроксимацией граничных условий – *улучшенная*.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Интегралы (коэффициенты схемы) вычислите (запишите) точно.

Приведите вывод уравнений, аппроксимирующих граничные условия.

Задача №14

Для проверки накопления вычислительной погрешности при решении задач вида

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\,u(x) = -f(x) \text{ } при\ x \in (0,\,1),$$

$$u(0) = \mu_1,\ u(1) = \mu_2,\ k(x) \geq C > 0,\ q(x) \geq 0,$$

по аналогии с примером, рассмотренным в лекциях, постройте свой тестовый пример (в узлах сетки точное решение разностной схемы должно совпадать с точным решением дифференциальной задачи).

Подготовьте программу и решите пример численно прогонкой на сетках от n = 10 до n = 1 000 000 (например, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000).

По итогам расчетов постройте таблицу или график, на которых для каждого n указано число действий в методе прогонки, вычислительная и общая погрешность численного решения (в норме $\|\ \|_\infty$).

В таблице для каждого n можно указать время счета.

1) Изучите таблицу, напишите выводы.

2) Какие изменения исходного уравнения могут способствовать росту (снижению) накопленной вычислительной погрешности? Подтвердите результатами расчетов.

Примерные задачи на экзамен

Задача

Запишите разностную схему (интегрально-интерполяционный метод, $\xi-$ узел сетки), *коэффициенты схемы запишите точно*. Проведите анализ структуры погрешности. Запишите все компоненты погрешности аппроксимации и укажите ее назначение.

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)\,u(x)=-f(x)\ \text{при}\ x\in(0,\,1),$$

$$u(0)=0,\ u(1)=1,$$

$$k(x)=\begin{cases}x^2+1, x\in(0,\xi)\\ \exp(-x), x\in(\xi,1)\end{cases}\quad q(x)=\begin{cases}2-x, x\in(0,\xi)\\ \exp(x), x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sin(2x), x\in(0,\xi)\\ x^2, x\in(\xi,1)\end{cases},\ \xi=0.6$$

Задача

Запишите разностную схему (интегрально-интерполяционный метод, $\xi-$ узел сетки) с коэффициентами *по формуле средних прямоугольников*. Проведите анализ структуры погрешности. Запишите все компоненты погрешности аппроксимации и укажите ее назначение.

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)\,u(x)=-f(x)\ \text{при}\ x\in(0,\,1),$$

$$u(0)=0,\ u(1)=1,$$

$$k(x)=\begin{cases}x^2+1, x\in(0,\xi)\\ \exp(-x), x\in(\xi,1)\end{cases}\quad q(x)=\begin{cases}2-x, x\in(0,\xi)\\ \exp(x), x\in(\xi,1)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sin(2x), x\in(0,\xi)\\ x^2, x\in(\xi,1)\end{cases},\ \xi=0.6$$

Задача

Запишите разностную схему (интегрально-интерполяционный метод, ξ – не узел сетки), *коэффициенты запишите точно*. Проведите анализ структуры погрешности. Запишите все компоненты погрешности аппроксимации и укажите ее назначение.

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$u(0) = 0$, $u(1) = 1$,

$$k(x) = \begin{cases} x^2+1, x \in (0,\xi) \\ \exp(-x), x \in (\xi,1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 2-x, x \in (0,\xi) \\ \exp(x), x \in (\xi,1) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x), x \in (0,\xi) \\ x^2, x \in (\xi,1) \end{cases}, \ \xi = 3/7.$$

Задача

Запишите разностную схему (интегрально-интерполяционный метод, ξ – не узел сетки) с коэффициентами *по формуле трапеций*. Проведите анализ структуры погрешности. Запишите все компоненты погрешности аппроксимации и укажите ее назначение.

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$u(0) = 0$, $u(1) = 1$,

$$k(x) = \begin{cases} x^2+1, x \in (0,\xi) \\ \exp(-x), x \in (\xi,1) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 2-x, x \in (0,\xi) \\ \exp(x), x \in (\xi,1) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x), x \in (0,\xi) \\ x^2, x \in (\xi,1) \end{cases}, \ \xi = 3/7.$$

Задача

Постройте модельную задачу вида

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)\, u(x) = -f(x) \text{ при } x \in (0,\ 1),$$

$u(0) = \mu_1$, $u(1) = \mu_2$, $k(x) \geq C > 0$, $q(x) \geq 0$,

такую, что ее решение совпадает в узлах любой равномерной сетки с решением разностной схемы, построенной интегрально-интерполяционным методом.

Какую компоненту погрешности содержит численное решение соответствующей разностной схемы?

Отвечая на вопросы, приведите выкладки.

Задача

Для задачи

$$u'' + 4u = x^2(1 - x),\ x \in [0, 1],\ u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

постройте разностную схему порядка аппроксимации
не ниже второго на равномерной сетке с числом разбиений n.
Найдите численное решение краевой задачи при $n = 4$.

Исследуйте погрешность аппроксимации
разностной схемы (порядок, главный член, оценка).
Исследуйте устойчивость схемы.

Задача

Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$u' + u = x + 1,\ x \in [0, 1],\ u(0) = 1$$

аппроксимирована разностной схемой

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = ih + 1$$

$$i = 1, \dots n\text{-}1,\ h = 1/n,\ u_0 = 1.$$

Задача

Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$u'' + u = \sin(x),\ x \in [0, 1],\ u(0) = 0,\ u(1) = 1$$

аппроксимирована разностной схемой

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = \sin(ih)$$

$$i = 1, \dots n\text{-}1,\ h = 1/n,\ u_0 = 0,\ u_n = 1.$$

Задача

Обосновать применение прогонки
к решению разностной схемы модельной задачи I
с различными типами граничных условий:
граничные условия на отрезке $[a, b]$
$u(a) = M_1,\ u'(b) = M_2$

Демонстрационные материалы

Для просмотра используйте кнопку **«Режимы»**, расположенную *в правом нижнем углу*, на обрамлении *Окна просмотра основных материалов*.

Практикум 6. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Практикум 6. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Теория

Необходимые теоретические сведения и примеры решения задач:
Лекции 7-8, учебно-методическая литература.

Задачи

Задача №1

Поставлена задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\Delta u(x,y) = -f(x,y) \text{ при } x \in (a,\, b),\, y \in (c,\, d),$$

$$u(a,y) = \mu_1(y),\;\; u(b,\, y) = \mu_2(y),\; y \in (c,\, d),$$

$$u(x,c) = \mu_3(x),\;\; u(x,\, d) = \mu_4(x),\; x \in (a,\, b).$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Функции $f(x,y)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(x)$, $\mu_4(x)$ и числа a, b, c, d считайте заданными.

Используя центральные разностные операторы численного дифференцирования $u_{x\bar{x}}, u_{y\bar{y}}$, построенные на симметричных трехточечных шаблонах, запишите разностную схему для решения задачи на прямоугольной сетке (n, m), равномерной по каждому из направлений x и y. Схему запишите в общем виде, то есть для произвольных $n > 1$, $m > 1$.

Затем, полагая, что: 1) вектор неизвестных значений сеточной функции не содержит компонент, соответствующих граничным узлам; 2) его компоненты упорядочены «слева направо» по x и затем «снизу вверх» по y; 3) уравнения схемы упорядочены также, запишите разностную схему *в матричном виде*. Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части:

а) для конкретного случая, когда $n > 3$, $m > 3$;

б) для случаев $(n, m) = (2, 2)$ и $(n, m) = (3, 3)$.

Для каждого из случаев укажите размерность матрицы, размерность искомого вектора и сравните блочную структуру полученных матриц.

Задача №2

В условиях задачи №1 полагая, что: 1) вектор неизвестных значений сеточной функции не содержит компонент, соответствующих граничным узлам; 2) его компоненты упорядочены «снизу вверх» по y и затем «слева направо» по x; 3) уравнения схемы упорядочены также, запишите разностную схему *в матричном виде*. Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части:

а) для конкретного случая, когда $n > 3$, $m > 3$;

б) для случаев $(n, m) = (2, 2)$ и $(n, m) = (3, 3)$.

Для каждого из случаев укажите размерность матрицы, размерность искомого вектора и сравните блочную структуру полученных матриц. Сравните результаты с решением задачи №1.

Задача №3

В условиях задачи №1 полагая, что 1) вектор неизвестных значений сеточной функции не содержит компонент, соответствующих граничным узлам; 2) его компоненты упорядочены «слева направо» по x и затем «снизу вверх» по y; 3) уравнения схемы упорядочены «снизу вверх» по y и затем «слева направо» по x, запишите разностную схему *в матричном виде*. Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части:

а) для конкретного случая, когда $n > 3$, $m > 3$;

б) для случаев $(n, m) = (2, 2)$ и $(n, m) = (3, 3)$.

Для каждого из случаев укажите размерность матрицы, размерность искомого вектора и сравните блочную структуру полученных матриц. Сравните результаты с решением задачи №1 и решением задачи №2.

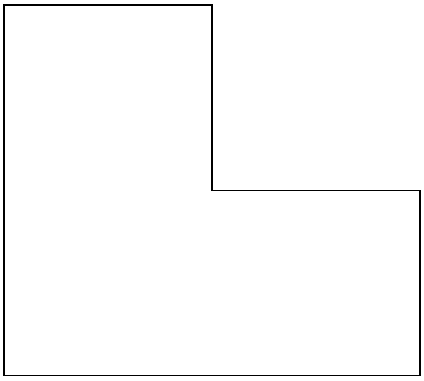
Задача №4

Поставлена задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x,y) = -f(x,y) \text{ при } (x,\ y) \in G,$$

$$u(x,y) = \mu(x,y) \text{ при } (x,y) \in \partial G.$$

Область $G \subset R^2$ вложена вместе с границей ∂G в прямоугольник $x \in [a,\ b]$, $y \in [c,\ d]$, см. рис. 1(а), 1(б). Функции $f(x,y)$, $\mu(x,\ y)$, числа $a,\ b,\ c,\ d$ и другие характеристики области считайте заданными.



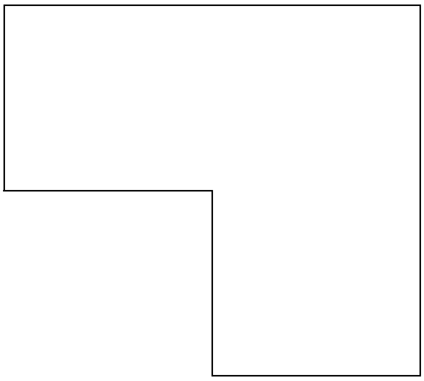


Рис. 1

Для решения задачи используйте центральные разностные операторы численного дифференцирования $u_{x\bar{x}}, u_{y\bar{y}}$, построенные на симметричных трехточечных шаблонах. Как основу для построения схемы используйте прямоугольную сетку (n, m), «натянутую» на $x \in [a,\ b]$, $y \in [c,\ d]$ и равномерную по каждому из направлений x и y.

Определите ограничения на кратность (n, m), запишите разностную схему. Сначала запишите схему в общем виде, то есть для произвольных $n > 1$, $m > 1$, удовлетворяющих ограничениям. Затем, полагая, что: 1) вектор неизвестных значений сеточной функции не содержит компонент, соответствующих граничным узлам; 2) его компоненты упорядочены «слева направо» по x и затем «снизу вверх» по y; 3) уравнения схемы упорядочены также, запишите разностную схему *в матричном виде*.

Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части для конкретных (n, m). Запишите размерность матрицы и вектора; опишите блочную структуру матрицы.

Обобщите результаты на другие (n, m).

Задача №5

Поставлена задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x, y) = -f(x, y) \text{ при } (x,\ y) \in G,$$

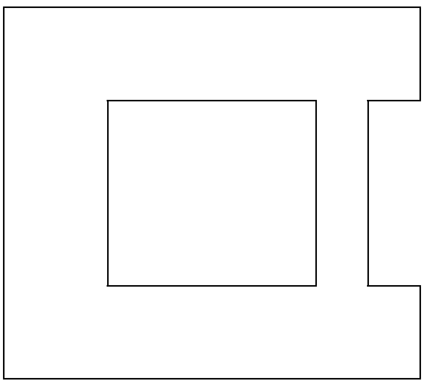
$$u(x, y) = \mu(x, y) \text{ при } (x, y) \in \partial G.$$

Область $G \subset R^2$ вложена вместе с границей ∂G в прямоугольник $x \in [a,\ b]$, $y \in [c,\ d]$, см. рис. 2. Функции $f(x,y)$, $\mu(x,\ y)$, числа $a,\ b,\ c,\ d$ и другие характеристики области считайте заданными.

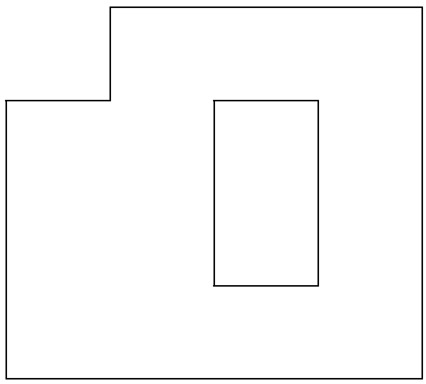
Используйте центральные разностные операторы численного дифференцирования $u_{x\bar{x}}, u_{y\bar{y}}$ на симметричных 3-точечных шаблонах. Основа - прямоугольная сетка $(n,\ m)$, «натянутая» на $x \in [a,\ b]$, $y\ \in [c,\ d]$ и равномерная по каждому из направлений x и y.

Определите ограничения на кратность (n, m) и запишите разностную схему. Сначала - в общем виде, для произвольных $n > 1$, $m > 1$, удовлетворяющих ограничениям. Затем, определив правило обхода, *в матричном виде* для конкретной сетки размерности $(n,\ m)$.

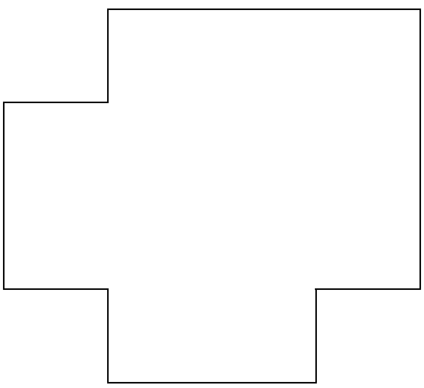
Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части. Запишите размерность матрицы и вектора; опишите блочную структуру матрицы. Обобщите результаты на другие, удовлетворяющие ограничениям, $(n,\ m)$.



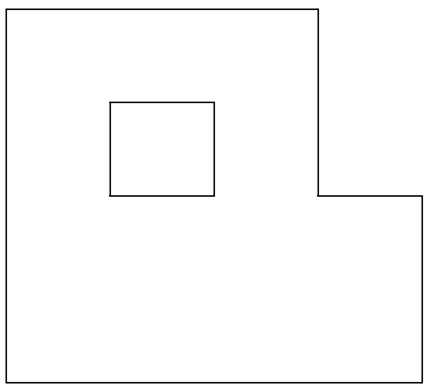
Вариант №1



Вариант №2



Вариант №3



Вариант №4

Задача №6

Поставлена задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x, y, z) = -f(x, y, \mathrm{z}) \text{ при } (x, y\ z) \in G,$$

$$u(x, y, z) = \mu(x, y, \mathrm{z}) \text{ при } (x, y, \mathrm{z}) \in \partial G.$$

Здесь $\Delta = \partial^2 \big/ \partial x^2 + \partial^2 \big/ \partial y^2 + \partial^2 \big/ \partial z^2$.

Рассматриваются случаи, когда область $G \subset R^3$ с границей ∂G: а) параллелепипед $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, $\mathrm{z} \in [p, q]$; б) вложена в параллелепипед $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, $\mathrm{z} \in [p, q]$, см. рис. 3. Функции $f(x,y,z)$, $\mu(x, y,z)$, числа a, b, c, d, p, q и иные параметры области считайте заданными.

Используя центральные разностные операторы численного дифференцирования $u_{x\bar{x}}, u_{y\bar{y}}, u_{z\bar{z}}$, построенные на симметричных трехточечных шаблонах, запишите разностную схему для решения задачи на прямоугольной сетке (n, m, r), равномерной по каждому из направлений x, y и z. Если нужно, определите ограничения на кратность (n, m, r).

Сначала запишите схему в общем виде, то есть для произвольных $n > 1$, $m > 1$, $r > 1$, удовлетворяющих ограничениям (условиям) на кратность.

Затем, сформулировав правило обхода, запишите схему для конкретных (n, m, r) в матричном виде. Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части. Укажите размерность матрицы и искомого вектора. Опишите блочную структуру матрицы.

Обобщите результаты на другие (n, m, r), удовлетворяющие требованиям кратности.

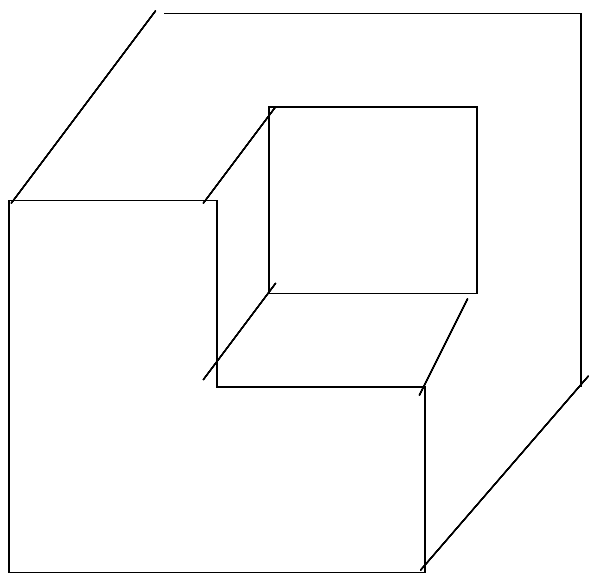


Рис. 3

Задача №7

Поставлена задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x, y) = -f(x, y) \text{ при } (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = \mu(x, y) \text{ при } (x, y) \in \partial G.$$

Область $G \subset R^2$ вложена вместе с границей ∂G в прямоугольник $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, см. рис. 4. Функции $f(x,y)$, $\mu(x, y)$, числа a, b, c, d и уравнение, описывающее «закругленный» край, считайте заданными.

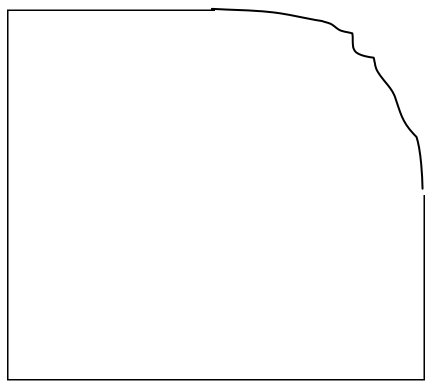


Рис. 4

Используя трехточечные разностные операторы численного дифференцирования, заданные на симметричных и несимметричных шаблонах, запишите разностную схему, пригодную для решения задачи. Как основу для построения схемы используйте прямоугольную сетку (n, m), «натянутую» на $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ и равномерную по каждому из направлений x и y. Для решения задачи используйте конкретную размерность (n, m).

Сформулировав правило обхода, запишите схему в *матричном виде*. Укажите явно все элементы матрицы, все компоненты искомого вектора и все компоненты правой части. Запишите размерность матрицы и искомого вектора. Опишите блочную структуру матрицы. Обобщите результаты на другие (n, m). Если нужно, введите ограничения на кратность числа разбиений.

Задача №8

В условиях каждой из задач №1, №4, №5, №6, №7 исследуйте:

1) симметричность и знакоопределенность матрицы;

2) обоснование возможности применять для решения разностной схемы методы Зейделя, Якоби и верхней релаксации;

3) обоснование применения других итерационных методов решения СЛАУ.

Задача №9

В условиях каждой из задач №1, №4, №5, №6, №7 получите формулы для реализации одного из методов (Зейдель, Якоби и верхняя релаксация); постройте соответствующий код (фрагмент кода).