

qubits

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Pour chaque état possible une mesure ne peut donner que $|0\rangle$ ou $|1\rangle$
- La probabilité d'obtenir $|0\rangle$ est $|\alpha|^2$, celle d'obtenir $|1\rangle$ est $|\beta|^2$
- Lorsque la mesure est faite, la superposition d'état est perdue et le qubit se retrouve immédiatement dans l'état mesuré.

avec 2 qubits : $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$

avec 3 qubits : $|\phi\rangle = a|000\rangle + b|001\rangle + c|010\rangle + d|011\rangle + e|100\rangle + f|101\rangle + g|110\rangle + h|111\rangle$

... et ainsi de suite : les systèmes de n qubits sont décrits dans un espace vectoriel de dimension 2^n (càd 2^{127} pour 127 qubits)

Le modèle d'un qubit peut être vu comme un espace vectoriel (à coefficients dans \mathbb{C}) engendré par les vecteurs de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (états observables). Les états quantiques sont les vecteurs de norme 1 dans cet espace.

opérateurs (gates, portes quantiques)

« PAULI » Operators

| | | | | |
|------------------------|--------------|---|-----------|--|
| rotation around x axis | \oplus | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qc.x(qr[n]) | RX | $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ |
| rotation around y axis | \mathbf{Y} | $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ qc.y(qr[n]) | RY | $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ |
| rotation around z axis | \mathbf{Z} | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qc.z(qr[n]) | RZ | $\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$ |
| Identity | \mathbf{I} | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qc.id(qr[n]) | | |

La Sphère de Bloch

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

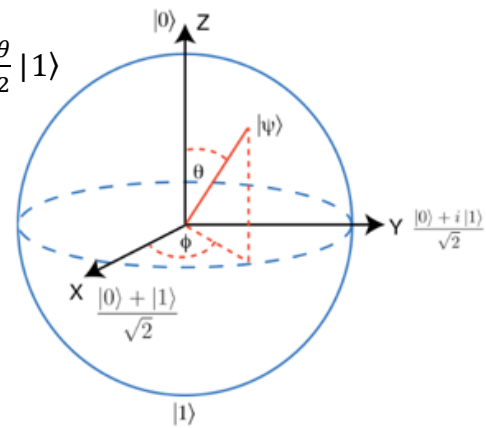
$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

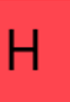
$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$$

$$XY = iZ ; ZX = iY ; YZ = iX$$

$$XY = -YX ; YZ = -ZY ; ZX = -ZX$$



superposition
 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Z)$
Hadamard gate



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ qc.h(qr[n])}$$

On a défini de nombreux autres opérateurs pour un ou plusieurs qubits : S, T, swap, cswap(Fredkin), ccnot(Toffoli), cz, ...)

les portes natives sur les machines d'IBM : CX, ID, RZ, SX, X

CNOT : flips target qubit according to control qubit state.

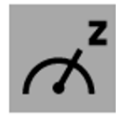


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CNOT

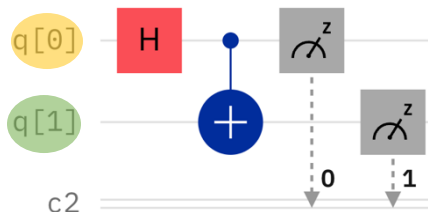
$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle \end{aligned}$$

measurement measures quantum state in quantum register into classical register (0/1)



circuits

les **circuits** utilisent des **quantum bits**, $q[0]$ et $q[1]$ initialisés à l'état $|0\rangle$, les **gates** (H, CNOT) sont appliquées en séquence sur les qubits de gauche à droite. A la fin une **mesure** produit le résultat dans un **registre classique** (ici c2 possède 2 bits)



« Bell State »

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

IBM Quantum Platform : <https://quantum.ibm.com>

La plateforme d'IBM propose des documentations des exemples et des tutoriels. On peut construire des circuits au moyen d'un composeur graphique et les exécuter sur un émulateur local ou sur de vrais ordinateurs quantiques gratuitement. On peut aussi utiliser la bibliothèque open source **qiskit** pour Python pour construire et exécuter les programmes sur les ordinateurs d'IBM.



Circuit Composer

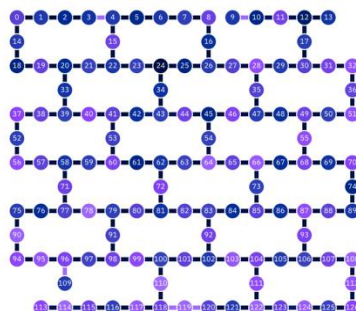
Explore the graphical interface for creating and testing circuits

Create a circuit →

Qiskit Notebooks

Create your first notebook and start using Qiskit

Create a notebook →



Qiskit in local environment

1. Install Qiskit

2. Follow the instructions to access the IBM

Quantum services from Qiskit, this is your API Token:

94add97f029749a3f8bde07df2cb9...

Copy token

Regenerate

Visitez

qiskit.org

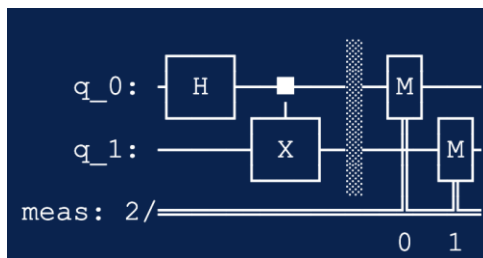
- Documentation,
- TextBook
- Chaîne Youtube
- Slack
- ...

venv :

python3 -m venv qc (création d'un environnement virtuel). puis : **pip install qiskit, matplotlib, jupyter ...** et pour activer :
win: qc\Scripts\activate.bat **mac: source qc/bin/activate (/deactivate pour revenir à base)**
python3 -m venv remove qc

qiskit : « Hello World! » émulateur local

```
from qiskit import QuantumCircuit
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.cx(0, 1)
qc.measure_all()
qc.draw()
```



```
import qiskit
print(qiskit.__version__)
```

```
from qiskit.primitives import StatevectorSampler
sampler = StatevectorSampler()
job = sampler.run([qc], shots=100)
result = job.result()

print(f"> Counts: {result[0].data['meas'].get_counts()}")
```

Postulats (simplifiés) de la mécanique quantique

- 1- Un système quantique est associé à un espace vectoriel \mathcal{E} (sur \mathbb{C}) dans lequel les états sont les vecteurs normés: $|\Psi\rangle$
- 2- A toute grandeur physique mesurable est associée un opérateur hermitien \hat{A} agissant sur \mathcal{E} , il est appelé observable et décrit complètement la grandeur physique associée.
- 3- La mesure d'une grandeur physique observable A ne peut avoir comme résultat que l'une des valeurs propres de l'opérateur \hat{A} .
- 4- Cette mesure effectuée sur un système dans l'état : $|\Psi\rangle$ fournira un vecteur propre u_i de \hat{A} avec la probabilité $P_{\Psi(u_i)}$, cette probabilité vaut le carré du module du coefficient c_i de l'écriture de $|\Psi\rangle$ dans la base $\{u_i\}$.
- 5- Quel que soit l'état initial, si la mesure d'une observable donne le résultat u_i alors immédiatement après la mesure, le vecteur d'état du système se trouve projeté sur le vecteur propre u_i .
- 6- L'évolution dans le temps de l'état $|\Psi\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :
 $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle$, où $H(t)$ est l'observable correspondant à l'énergie du système.

Mini formulaire

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \langle\psi|\varphi\rangle = (\alpha^* \quad \beta^*) \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha^* \gamma + \beta^* \delta$$

$$\forall \psi : \langle\psi|\psi\rangle = \alpha^* \alpha + \beta^* \beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\psi \text{ et } \varphi \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \langle\psi|\varphi\rangle = 0$$

$$H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{j=1} (-1)^{j \cdot x} |j\rangle$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{x=2^n-1} |x\rangle$$

$$H^{\otimes n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot j} |j\rangle$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \\ \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \\ \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \beta_1 \alpha_2 \beta_3 \\ \beta_1 \beta_2 \alpha_3 \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$CX|\psi\varphi\rangle \quad CX = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CU|\psi\varphi\rangle \quad CU = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$CZ = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CU \uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{11} & 0 & u_{21} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_{12} & 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{A} A|\psi\rangle \xrightarrow{B} BA|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle \xrightarrow{BA} BA|\psi\rangle$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{A} A|\psi\rangle \xrightarrow{A \otimes B} A \otimes B|\psi\varphi\rangle \equiv |\psi\rangle \xrightarrow{A \otimes B} A \otimes B|\psi\rangle$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$