ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
(Limits & Continuity of a Function)

ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of a Function)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

สำหรับฟังก์ชัน f ใดๆ ที่มีโดเมน และ เรนจ์ เป็นสับเซตของจำนวนจริง

1) x เข้าใกล้ a โดยที่ $x<a$ เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

   เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x\to a^-$

2) x เข้าใกล้ a โดยที่ $x>a$ เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางขวา

   เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x\to a^+$

- ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1
  เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย $(x<a)$ เรียกว่า ลิมิตซ้ายของ $f(x)$
  เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$
- ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2
  เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา $(x>a)$ เรียกว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$
  เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2$
- ถ้า $L_1=L_2=L$ จะได้ว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a
  เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x)=L$
- ถ้า $L_1\neq L_2$ จะได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ a
  นั่นคือหาค่าไม่ได้ $\lim_{x\to a} f(x)$

Ex.1 กำหนด $y = f(x) = x+4$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$

Ex.2 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x\geq 3 \\ x+6 & \text{เมื่อ } x<3 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$

Ex.3 กำหนด $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

Ex.4 $\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$

ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี โดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=M$

1. $\lim_{x\to a} c=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
2. $\lim_{x\to a} x=a$
3. $\lim_{x\to a} k\,f(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=kL_1$
4. $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$
5. $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=L_1\cdot L_2$
6. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}, L_2\neq 0$
7. $\lim_{x\to a} x^n=a^n$ เมื่อ $n\in I^+$

เทคนิคการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

แทน x ด้วย a แล้ว ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{\text{เลข}}$

ถ้าได้ $\frac{0}{\text{เลข}}$

ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{0}$

ถ้าได้ $\frac{0}{0}$

กรณีผลของลิมิตออกมาในรูป $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to a} f(x)$ อาจหาค่าไม่ได้ จึงต้องพยายามเปลี่ยนรูปให้สามารถตัดทอนกัน และหาค่าลิมิตได้โดยตรง

วิธีการเปลี่ยนรูปของ f(x) มีหลายวิธี ดังนี้

1. แยกตัวประกอบ
2. ใช้คอนจูเกต (conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน (พวก ติดรูท)
3. กฎของโลปิตาล (L 'Hopital 'Rule)
4. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

โอเรนด้าติวเตอร์.คอม
www.theorendatutor.com
แคลคูลัสเบื้องต้น

Ex กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$;

สูตรการแยกตัวประกอบ

- กำลังสองสมบูรณ์

  $(น+ล)^2 = น^2+2นล+ล^2$

  $(น-ล)^2 = น^2-2นล+ล^2$

- ผลต่างกำลังสอง

  $น^2+ล^2 = (น+ล)(น-ล)$

- กำลังสามสมบูรณ์

  $(น+ล)^3 = น^3+3น^2ล+3น^2ล+ล^3$

  $(น-ล)^3 = น^3-3น^2ล+3น^2ล-ล^3$

- ผลต่างกำลังสาม

  $น^3+ล^3 = (น+ล)(น^2-นล+ล^2)$

  $น^3-ล^3 = (น-ล)(น^2+นล+ล^2)$

ลิมิตที่อนันต์ (Limits at Infinity)

เมื่อเวลาจะหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ ก็ให้เอา x ที่มีกำลังสูงสุดที่ปรากฏในฟังก์ชันนั้นหารตลอดทั้งเศษและส่วน จะทำให้ x^n (n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n \geq 0$) กลายเป็นจำนวนคงค่า

Ex. จงหาค่าของ $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x}{7x^2+2}$

Ex. จงหาค่าของ $\lim_{x \to \infty} \frac{5^x-2^x}{3^x+4^x}$

Ex. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-4x}{\sqrt{7+6x^2}}$

Ex. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-2x+9x^6}}{x^3+2}$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Funtion)

นิยาม : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงปิด [a,b] และ $c \in [a,b]$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่

x=c ก็ต่อเมื่อ

1. f(c) หาค่าได้
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้

   โดย $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

   ดังนั้น f(x) ต่อเนื่องที่จุด x=c

**ถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งขาดไปแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่อง x=c

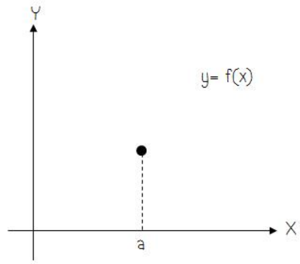
Ex.1 กำหนด $f(x) = x^3+x^2+4$ จงแสดงว่า ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่จุด x=1

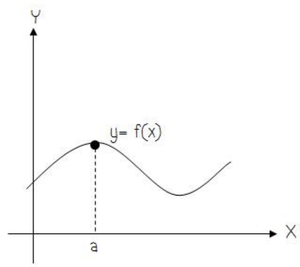
Ex.2 กำหนด $f(x) = |x+2|$ ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่จุด $x=-2$ หรือไม่

Ex.3 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x<0 \\ 1-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่จุด $x=0$ หรือไม่

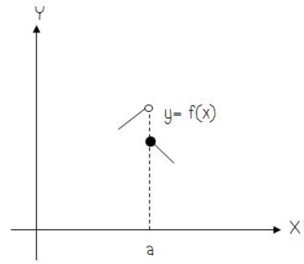
Ex.4 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x<-1 \\ x, & -1\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x>1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่จุด $x=1$ หรือไม่

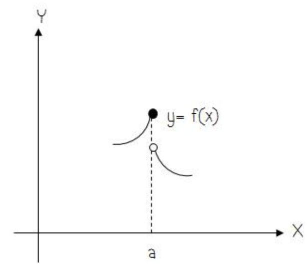
กราฟ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$





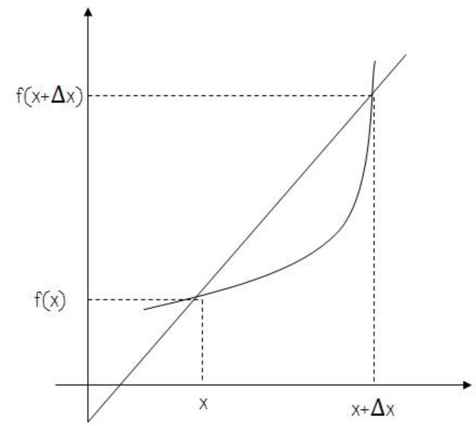
กราฟ $f(x)$ ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x=a$





อนุพันธ์ (Derivative)

ความชันเส้นสัมผัสโค้ง



ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง

$$m_L = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

หาความชันได้จากการ take lim ;

$$m_L = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลง, ความชันของกราฟก็ได้ ก็คือ อนุพันธ์ (Differential) นั่นเอง!!

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยนของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ $= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$

Ex1 จงหาความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $y=x^2-2x+1$ ที่จุด $(-1,2)$

Ex2 จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y=5x+2$ โดยใช้ four step rule

นิยามของอนุพันธ์ฟังก์ชัน

ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี โดเมน และ เรนจ์ เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง และ $\lim_{x\to h}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เรียกว่า ค่าลิมิตที่เรียกได้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' หรือ $f'(x)$ หรือ $\frac{d\,f(x)}{dx}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to h}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{dy}{dx}=y'$

****หมายเหตุ**

1. $\frac{dy}{dx}\neq\frac{y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ
3. เมื่อ s แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t หรือ $s=f(t)$ ถ้า v คือ ความเร็วขณะเวลาใดๆ จะได้ $v=\lim_{x\to h}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และ $s'=\frac{ds}{dt}=v$

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

ถ้า c, n เป็นค่าคงที่ใดๆ และ $u=f(x)$, $v=g(x)$, $w=h(x)$ เป็นฟังก์ชัน

สูตรที่ 1	$\frac{d}{dx}(c)=0$	สูตรที่ 2	$\frac{d}{dx}(x)=1$
สูตรที่ 3	$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{d}{dx}u$	สูตรที่ 4	$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$
สูตรที่ 5	$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$		
สูตรที่ 6	$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$		
สูตรที่ 7	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$		
สูตรที่ 8	$\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$		
สูตรที่ 9	$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{d}{dx}u$		

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน(โดยใช้สูตร)

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้

1. $y=10$
2. $y=2x-3$
3. $y=x^3$
4. $y=5-2x+2x^2$
5. $y=\sqrt{x}$
6. $y=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
7. $y=\left(2x^2+1\right)\left(x-2\right)$
8. $y=\frac{x^4}{x-1}$

กฎลูกโซ่

$y=f\left(u\right)$ และ $u=g\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ x ตามลำดับแล้ว

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Ex.1 กำหนดให้ $y=(1+2x)^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

Ex.2 กำหนดให้ $y=(3x^4-2x+1)^{50}$

Ex.3 กำหนดให้ $y=\frac{\sqrt{x^2+5}}{(x^2+4)^4}$

Ex.4 กำหนด $y=\frac{3}{\sqrt[4]{x^2+2}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

Ex.5 กำหนด $y=\frac{(2x+3)^3}{(4x^2-1)^8}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

อนุพันธ์ฟังก์ชันแฝง (Implicit Differentiation)

Ex.1 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ $y^4+4y-3x^3 = 5x^2+x-1$

Ex.2 หาความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y^4+3y-4x^3=5x+1$ หา $\frac{dy}{dx}$

Ex.3 จงหา $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ $x^4+4x^2+y^2-3xy^3+2x=0$

Ex.4 $3x-2y+4=2x^2+3y-7x$ หา $\frac{dy}{dx}$

<u>อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Derivative)</u>

หาอนุพันธ์ได้

1. จะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของ f(x) หรืออนุพันธ์ ของ f'(x) (diff ซ้อน diff) ว่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f(x)
2. สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์เป็น f'(x) หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$
   - อนุพันธ์อันดับที่ 1 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$
   - อนุพันธ์อันดับที่ 2 $f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$
   - อนุพันธ์อันดับที่ 3 $f'''(x)=f^3(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$
   - ...

<u>Ex.1</u> กำหนด $f(x)=4x^2-5x+8-\frac{3}{x}$ หา y'''

Ex.2 กำหนดให้ x^2+xy-y^2 จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

Ex.3 $y = x^4-3x^2+6$ จงหา y''

อนุพันธ์ของสมการอิงตัวแปรเสริม (Derivation of Parametric Equation)

สมการอิงตัวแปรเสริม คือ สมการที่ x และ y เขียนอยู่ในรูปตัวแปรอื่นๆ เช่น t,u,v,θ หรือ $x=f(t)$ หรือ $y=g(\theta)$

การหาอนุพันธ์ของสมการอิงตัวแปร ทำได้ 2 วิธี คือ

1. โดยการกำจัดตัวแปรเสริมออกไป เพื่อให้สมการอยู่ในรูป $y=f(x)$ แล้วจึงหาค่า $\frac{dy}{dx}$
2. โดยใช้กฎลูกโซ่

   ถ้า $x=f(x)$ และ $y=g(t)$

   จากกฎลูกโซ่ จะได้สูตร $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt}\neq 0$

   และสูตรการหาอนุพันธ์กำลังสอง คือ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ โดย $y'=\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt}\neq 0$

Ex จงหา y' จาก $x=t^2+1$, $y=\sqrt{t+1}$ เมื่อ $t=3$

Ex.1 จงหา $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ จาก $x=-\sqrt{t+2}$, $y=(2t+3)^2$ เมื่อ $t=-1$

Ex.2 $x=2t^2+3$, $y=\sqrt{(1-t)^3}$ จงหา $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

การประยุกต์อนุพันธ์

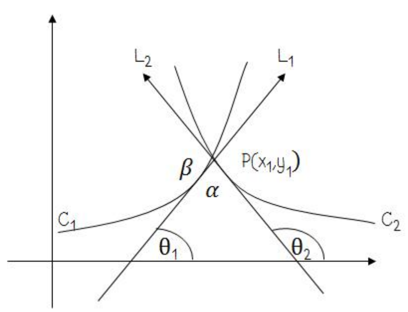
สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และสมการเส้นตั้งฉาก (Tangent & Normal line Equation)

ความชันของเส้นโค้ง

ถ้า $y=f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง ;

1. จะมีความชันของเส้นโค้ง (m) เท่ากับ $\frac{dy}{dx}= f'(x)$
2. เส้นสัมผัสเส้นโค้งผ่านจุด (x_0,y_0) ใดๆ จะมีความชัน (m) คือ $m=f'(x_0)$
3. สมการเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x_0,y_0)
   จะมีสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็น $y-y_0=m_L(x-x_0)$
   สมการเส้นปกติจะได้ $y-y_0=m_N(x-x_0)$
4. สมการเส้นตรงมีความชันเป็น m_N **ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส(เส้นปกติ)** กับ เส้นสัมผัสที่ (x_0,y_0) มีความชันเป็น m_N จะได้ว่า $m_N \times m_L = -1$
5. สมการเส้นตรงมีความชันเป็น m_1 **ขนานกับ** เส้นสัมผัสที่ (x_0,y_0) มีความชันเป็น m_2 จะได้ว่า $m_1=m_2$
6. เส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด คือ (x,y) และ (x_0,y_0) จะได้ว่าความชัน $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$

มุมที่เส้นโค้งตัดกัน (Angle of Intersection of Curves)



กำหนดให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งสองเส้นตัดกันที่จุด $P(x_1,y_1)$

L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ที่จุด $P(x_1,y_1)$ ตามลำดับ

β และ α เป็นมุมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างเส้นโค้งทั้งสอง โดยที่ $\beta+\alpha$ $=180^\circ$

m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 และ C_2

θ_1 และ θ_2 เป็นมุมเอียงของ L_1 และ L_2 ที่ลากต่อไปตัดกับแกน x

ดังนั้น $m_{L1} = \tan\theta_1$ และ $m_{L2} = \tan\theta_2$

จากรูป $\alpha = \theta_2 - \theta_1$

$$\theta_2 = \alpha+\theta_1$$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_1}$$

$$= \frac{m_{L2}-m_{L1}}{1+m_{L2}\cdot m_{L1}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{m_{L2}-m_{L1}}{1+m_{L2}\cdot m_{L1}}\right)$$

หมายเหตุ :

1. ถ้า $\tan\theta>0$ จะได้ θ เป็นมุมแหลม
   ถ้า $\tan\theta<0$ จะได้ θ เป็นมุมป้าน

ถ้า $\tan\theta=0$ เพราะ $m_{L1}=m_{L2}$ จะได้ $\theta=0^\circ$ แสดงว่าเส้นโค้งทั้งสองเส้นขนานหรือทับกันสนิท
ถ้า $\tan\theta$ หาค่าไม่ได้ เพราะ $m_{L1} \times m_{L2} = -1$ จะได้ว่า $\theta= 90^\circ$ แสดงว่าเส้นโค้งทั้งสองตั้งฉากกัน

2. ถ้าเส้นโค้งทั้งสองตัดกันมากกว่า 1 จุด จะต้องหามุมให้ครบทุกจุด
3. ถ้าจุดตั้งทั้งสองจุดสมมาตรกัน แสดงว่ามุมที่ตัดกันเท่ากัน หาจุดเดียว

Ex.1 จากเส้นโค้ง $y=\frac{3x^2-2}{x^3}$ จงหาความชันและสมการของเส้นสัมผัสและเส้นปกติที่จุด $(1,1)$

Ex.2 จงหาสมการเส้นปกติซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ ที่จุด $\left(2,\frac{1}{2}\right)$

ความเร็วและความเร่ง

ถ้า $s = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่

1. ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t^1 ถึง t^2 $= \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
2. ความเร็วขณะเวลา t $\frac{ds}{dt}=v=f'(t)$
3. ความเร่งขณะเวลา t $\frac{dv}{dt}=a=f''(t)$

Ex.1 ถ้าอนุภาค A เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S_A=3t^3-12t^2+18t+5$ เมตร ในเวลา t วินาที และอนุภาค B เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S_B=-t^3+9t^2-12t$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหาความเร่งและระยะทางของอนุภาค B ขณะที่อนุภาคทั้งสองมีความเร็วเท่ากัน

Ex.2 ยิงธนูขึ้นไปในแนวดิ่งจากพื้นราบตามสมการการเคลื่อนที่ $s=32t-4t^2$ โดยที่ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา

1. ลูกธนูอยู่สูงจากพื้นราบ 48 เมตร เมื่อเวลาใด
2. ลูกธนูขึ้นไปสูงสุดเท่าไร
3. ลูกธนูตกลงพื้นเมื่อเวลาเท่าไร

อัตราสัมพัทธ์

อัตราสัมพัทธ์จะเทียบกับเวลา เป็นการบอกอัตราการเปลี่ยนแปลงของสองปริมาณ

** ถ้า $\frac{dx}{dt}$ เพิ่มขึ้น เครื่องหมายเป็น +

ถ้า $\frac{dx}{dt}$ ลดลง เครื่องหมายเป็น −

Ex.1 อัดแก๊สเข้าบอลลูนกลม ด้วยอัตราคงที่ 20 ลบ.ซม./วินาที แก๊สมีแรงดันสม่ำเสมอทำให้บอลลูนขยายเป็นทรงกลม จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีบอลลูน ขณะที่บอลลูนมีรัศมี 25 ซม.

Ex.2 ถังเก็บน้ำรูปกรวย รัศมี 12 ซม. และสูง 30 ซม. มีจุดยอดอยู่ด้านล่าง ถ้าน้ำไหลเข้าด้วยอัตรา 20 ลบ.ซม/วินาที จงหาว่าความสูงของน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่น้ำอยู่สูง 25 ซม.

Ex.3 บันไดยาว 30 ฟุต พาดกับกำแพง ถ้าบันไดเคลื่อนที่ออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุต/วินาที ปลายบันไดจะเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่าไร ขณะที่เชิงบันไดอยู่ห่างกำแพง 12 ฟุต

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

1. หา $f'(x)$
2. จับ $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x ค่า x ที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต สมมติว่าได้ $x=c$
   - ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนความชันจาก + ไปเป็น – ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   - ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนความชันจาก – ไปเป็น + ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

จุดเปลี่ยนเว้า

1. หา $f''(x)$
2. จับ $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x ค่า x ที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต สมมติว่าได้ $x=c$
   - ถ้า $f''(x)$ เปลี่ยนจาก + ไปเป็น – แสดงว่ากราฟเปลี่ยนจากเว้าบนไปเป็นเว้าล่าง
   - ถ้า $f''(x)$ เปลี่ยนจาก – ไปเป็น + แสดงว่ากราฟเปลี่ยนจากเว้าล่างไปเป็นเว้าบน

Ex.1 กำหนดให้ $f(x) = 12x-3x^2-2x^3$ จงหาค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า

ปริพันธ์

การอินทิเกรต จะตรงข้ามกับ การหาอนุพันธ์

การอินทิเกรตแบบไม่จำกัดเขต

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี โดเมน และ เรนจ์ เป็นสับเซตของจำนวนจริงและ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f อินทิเกรตไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ โดยที่ $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

จากบทนิยามเรียกกระบวนการ $\int f(x)dx$ ว่าการอินทิเกรต

เครื่องหมาย $\int$ เรียกว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล

เรียก f(x) ว่า ตัวถูกอินทิเกรต

dx เป็นสัญลักษณ์ว่า การอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x

การอินทิเกรตแบบจำกัดเขต

ถ้าให้ F(x) เป็นอินทิเกรตของ f(x) อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง x=a ถึง x=b

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$

เรียก a ว่า ขอบล่าง และ เรียก b ว่า ขอบบน

หมายเหตุ **:** การอินทิเกรตจำกัดของฟังก์ชัน ไม่จำเป็นต้องบวกค่า c เข้าไป เนื่องจากเมื่อแทนค่า x=a และ x=b ใน F(x) แล้ว F(b) – F(a) ค่า c จะลบกันหมดไป

ทฤษฎีบท

1. $\int dx = x+c$
2. $\int kdx = kx+c$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ เมื่อ $n \neq -1$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
6. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

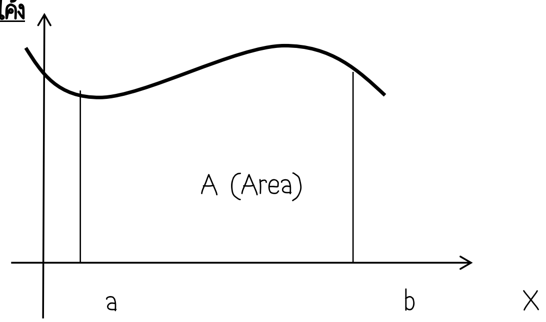
Ex.1 $\int 3x^4-4x^5+3x^2-1 \; dx$

Ex.2 $\int \frac{3x-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Ex.3 $\int_0^1 3x^2-5 \; dx$

Ex.4 $\int_{-1}^{2} (x^3+2x)^2(3x^2+2)dx$

<u>พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง</u>



ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และ $f(x) \geq 0$ แล้วพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ แกน x เส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ คือพื้นที่ A

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)dx$$

วิธีการหาคำนวณ

1. เขียนกราฟของสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ทุกครั้ง
2. หาขอบเขตที่กำหนดพื้นที่ (ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง กับ แกน x)
3. นำสมการมาอินทิเกรตแล้วใส่ขอบเขต
    - ถ้าพื้นที่มีค่าเป็นบวก$\rightarrow$ ช่วงกราฟจะอยู่เหนือแกน x
    - ถ้าพื้นที่มีค่าเป็นลบ $\rightarrow$ ช่วงกราฟจะอยู่เหนือแกน x
4. พื้นที่จะมีค่าเป็นบวกเสมอ เครื่องหมายของผลอินทิเกรตเป็นการบอกว่ากราฟอยู่ในช่วงใด

<u>Ex.1</u> จงหาพื้นที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $y=x^2$ จาก $x=-3$ ถึง $x=0$

<u>Ex.2</u> จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2-25$ จาก $x=-1$ ถึง 3

Ex.3 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x) = x^2-4x$ จาก $x=-1$ ถึง $x=5$

อนุพันธ์และอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ลิมิตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท ถ้า θ เป็นค่าที่วัดเป็นหน่วยเรเดียน จะได้ว่า

1. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$
2. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}=1$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตร

$$\frac{d}{dx}(\sin u)=\cos u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cot u)=-\operatorname{cosec}^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\cdot\tan u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u\cdot\cot u\frac{du}{dx}$$

Ex.1 $y = \sin(8x+3)$

Ex.2 $y = \cos\frac{x}{2}$

Ex.3 $y = \sin(3x^2+1)$

Ex.4 $y = \sec\sqrt{x-1}$

Ex.5 $y=\sqrt{1+3\tan^2 x}$

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$\int \sin u \; du = -\cos u + c$	$\int \cos u \; du = \sin u + c$
$\int \sec^2 u \; du = \tan u + c$	$\int \csc^2 u \; du = -\cot u + c$
$\int \sec u \cdot \tan u \; du = \sec u + c$	$\int \csc u \cdot \cot u du = -\csc u + c$

Ex.1 $\int \cos\left(5x-3\right)dx$

Ex.2 $\int \cos x \cdot \cos(\sin x)dx$

Ex.3 $\int \tan^2 3x \; dx$

Ex.4 $\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{\sin^3 x} \; dx$