INSTITUT AFRICAIN D'INFORMATIQUE (IAI – TOGO)
Tél : 22 21 27 06 **Fax** : 22 22 12 07 **E-mail** : iaitogo@iai-togo.com **BP** : 12456 Lomé -Togo

Cycle des Ingénieurs
des Travaux Informatiques
Année Académique : **2013 – 2014**

Enseignant : **M. MIHESSO**
Durée : **2 heures**
Filières : **TC 2 A & B**

DEVOIR SURVEILLE
ANALYSE MATHEMATIQUE 2

Date : 19/11/2014

Documents & calculatrice programmable non autorisés

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$; b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x\tan x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty} \ln(1+e^x)\ln(\frac{x+1}{x-1})$; d) $\lim_{x\to +\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$.

Exercice 2

1- Montrer que la fonction $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ possède une racine entre 0 et 1. (On pourra utiliser le théorème de Rolle)

2- Soient p et q deux nombres réels et n un entier strictement positif.

a) Démontrer que le polynôme $f(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair et plus de trois racines réelles si n est impair.

b) Donner le nombre de solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, si $p > 0$

c) Donner le nombre de solution de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, si $b - \frac{a^2}{3} > 0$

3- Démontrer l'inégalité suivante : $Arcsinx < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $si\ x \in]0,1[$

Exercice 3

Soient $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)$ et $g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + o(x^4)$ les développements limités à l'ordre 4 en 0 de deux fonctions $f\ et\ g$.

1- Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $h = fog - gof$

2- Déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$h(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$

Exercice 4

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = Arctan\left(1 - \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$.

1- Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ au voisinage de $+\infty$.

2- Donner le développement limité de Arctan(U) au voisinage de 0.

3- En déduire le développement limité de f au voisinage de $+\infty$

BON TRAVAIL

TD ANALYSE : LES INTEGRALES

EXO1

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; b) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; c) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$; e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}$
f) $\int \sqrt{1+t+t^2}\,dt$; g) $\int \frac{(x^2-1)\ln x}{(x^2+1)^2}dx$ h) $\int \cos^6 x\,dx$; i) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ j) $\int \frac{dt}{\sin^4 t}$.

EXO2

Soient a et x deux nombre réels vérifiant la relation : $1 < a < x$. Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_a^x \frac{3t^3+10t^2-2t}{(t^2-1)^2}dt$; $J = \int_a^x \frac{1}{t^3(1+t^2)}dt$

EXO 3

Calculer les intégrales suivantes :

1- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\cos 2x}$ et $J = \int_0^x \frac{\sin t+\sin^3 t}{\cos 2t}dt$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

2- $K = \int_0^x \frac{\cos t\,dt}{1+\sin^2 t}$, $x \in \mathbb{R}$ et $L = \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\cos^3 t+\cos^5 t}{\sin^2 t+\sin^4 t}dt$, $x \in]0, \pi[$.

3- Soient a et x deux nombres réels tels que chacune des intégrales suivantes soit définie :
a) $\int_a^x \frac{1}{2+\cos t}dt$; b) $\int_a^x \frac{1}{\sin^2 t\cos^2 t}dt$; c) $\int_a^x \frac{\tan t}{\cos^2 t}dt$; d) $\int_a^x \frac{dt}{3+ch\,t}$; e) $\int_a^x \frac{dt}{(sh\,t+ch\,t)^n}$

EXO 4

Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$.

a) Montrer, en utilisant un changement de variable, que l'on a : $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$.

b) En déduire que : $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et calculer I.

EXO5

Soit x un nombre réel strictement positif, démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{ix}{n}} = \frac{e^x-1}{x}$.

Utiliser ce résultat pour calculer $I = \int_0^x e^t\,dt$.

EXO 6

Calculer $I = \int_0^1 \ln(x+t)\,dx$, $t \in]0,+\infty[$ et en déduire $J = \int_0^1 \ln\big((x+1)(x+2)\dots(x+n)\big)\,dx$
$n \in \mathbb{N}^*$.

EXO7

Soit l'intégrale $I_n = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et calculer I_1, I_2, I_3 .

A.K.U

INSTITUT AFRICAIN D'INFORMATIQUE (IAI – TOGO)

Tél : *22 21 27 06* **Fax** : *22 22 12 07* **E-mail** : *iaitogo@iai-togo.com* **BP** : *12456 Lomé -Togo*

Cycle des Ingénieurs des Travaux Informatiques
Année Académique : **2013 ~ 2014**

Enseignant : **M. MIHESSO**
Durée : **2 heures**
Filières : **TC 2 A & B**

PARTIEL
ANALYSE MATHEMATIQUE 2

Date : 19/11/2014 — *Documents & calculatrice programmable non autorisés*

Exercice 1

1- Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ x^{-k}e^{\frac{-1}{x^2}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2- On pose : $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe C^∞.
On établira que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, (1) *il existe un polynôme* P_n *tel que* $f^n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$
(2) $f^n(0) = 0$
(Calculer effectivement P_1, P_2, P_3).

3- Si $n \in \mathbb{N}$, écrire le développement limité en 0 à l'ordre n de $f(x)$. Conclure que deux fonctions peuvent avoir, en un point donné, le même développement limité à tout ordre, sans pour autant être égales sur un voisinage de ce point.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a\,,\ b]$ de $\mathbb{R}$. On admet la proposition suivante : si f est continue sur $[a\,,\ b]$ alors

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \quad (*)$$

1- Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ puis Calculer $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2$.

2- En utilisant la formule (*), déduire la valeur de $\int_0^1 x^2dx$.

3- Retrouver ce résultat en utilisant la méthode par primitivation.

Exercice 3

Soit f une fonction continue dans $[0, \pi]$.

1- En faisant le changement de variable $x = \pi - t$, Montrer que l'on a : $\int_0^\pi xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sinx)dx$.

2- En déduire que : $I = \int_0^\pi \frac{xsinx}{1+cos^2x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et calculer I.

Exercice 4

Soit l'intégrale $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1- Par une primitivation par partie, montrer que $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)J_n\right]$.

2- Calculer I_1, puis déduire I_2 *et* I_3 .

BONNE CHANCE

INSTITUT AFRICAIN D'INFORMATIQUE (IAI – TOGO)
Tél : *22 21 27 06* **Fax** : *22 22 12 07* **E-mail** : *iaitogo@iai-togo.com* **BP** : *12456 Lomé -Togo*

Cycle des Ingénieurs des Travaux Informatiques
Année Académique : **2013 ~ 2014**

Enseignant : **M. MIHESSO**
Durée : **2 heures**
Filières : **TC 2 A & B**

DEVOIR SURVEILLE
ANALYSE MATHEMATIQUE 2

Date : 19/11/2014

Documents & calculatrice programmable non autorisés

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$; b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x\tan x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x)\ln(\frac{x+1}{x-1})$; d) $\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$.

Exercice 2

1- Montrer que la fonction $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ possède une racine entre 0 et 1. (On pourra utiliser le théorème de Rolle)

2- Soient p et q deux nombres réels et n un entier strictement positif.

a) Démontrer que le polynôme $f(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair et plus de trois racines réelles si n est impair.

b) Donner le nombre de solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, si $p > 0$

c) Donner le nombre de solution de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, si $b - \frac{a^2}{3} > 0$

3- Démontrer l'inégalité suivante : $Arcsinx < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $si\ x \in]0,1[$

Exercice 3

Soient $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)$ et $g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + o(x^4)$ les développements limités à l'ordre 4 en 0 de deux fonctions $f\ et\ g$.

1- Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $h = fog - gof$

2- Déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $h(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$

Exercice 4

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = Arctan\left(1 - \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$.

1- Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ au voisinage de $+\infty$.

2- Donner le développement limité de $\text{Arctan}(U)$ au voisinage de 0.

3- En déduire le développement limité de f au voisinage de $+\infty$

BON TRAVAIL

INSTITUT AFRICAIN D'INFORMATIQUE (IAI – TOGO)
Tél : 22 21 27 06 Fax : 22 22 12 07 E-mail : iaitogo@iai-togo.com BP : 12456 Lomé -Togo

Cycle des Ingénieurs
des Travaux Informatiques
Année Académique : **2013 ~ 2014**

Enseignant : **M. MIHESSO**
Durée : **2 heures**
Filières : **TC 1 A & B**

PARTIEL
ANALYSE MATHEMATIQUE

Documents & calculatrice programmable non autorisés

EXERCICE 1

1) En utilisant les équivalences de fonctions, calculer les limites suivantes :
   a) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-e^x+(\sin x)^3}{\sqrt{1+x^2+x^3}-1}$

2) Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

   a) Etudier la continuité de la fonction f en 0.
   b) Donner le prolongement par continuité de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 2

Construire le graphe des fonctions suivantes sans faire l'usage des dérivées pour leur étude :
a) $f(x) = Arccos(cosx)$
b) $f(x) = Arccos(sinx)$, (on pourra exprimer sinus en fonction de cosinus).

EXERCICE 3

Etude de la suite $U_n = x^n$ où x est un nombre réel.
1) On suppose que $x > 1$ et on pose $x = 1 + a$.
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
   En déduire que $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$.
2) On suppose $0 < x < 1$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.
3) Etudier les cas $x = 1$ et $x \leq 0$.

EXERCICE 4

1) Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$ avec a, b $\in \mathbb{R}$ et U_0, U_1 donnés.
   Etudier U_n en fonction des réels a et b.
2) En utilisant les résultats de 1) étudié la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par : $V_{n+2} = V_{n+1} + V_n$ avec $V_0 = V_1 = 1$.
3) Montrer que $\sum_1^n V_i = V_{n+2} - 1$ (On pourra utiliser la récurrence)
4) Démontrer que $\sum_0^n V_i^2 = V_n \times V_{n+1}$ (On pourra utiliser la récurrence).