

Program Termination and Order Theory

Mingyu Jo

Computer Science and Engineering, Korea University

December 6, 2024

1 Introduction

프로그램의 termination을 판단하는 문제는 halting problem과 관련이 있다. Halting problem은 주어진 프로그램이 주어진 입력에 대해 종료하는지 판단하는 문제로, Alan Turing이 1936년에 제안한 문제이다 [3].

이 문제는 다음과 같다.

Theorem 1.1. *there can be no machine which, supplied with any one F of these formulae, will eventually say whether F is provable.*

그러나 Halting problem이 시사하는 바는 모든 프로그램에 대해 termination을 판단하는 algorithm이 존재하지 않는다는 것이지, 모든 프로그램의 termination을 보일 수 없다는 것이 아니다. 따라서 지금까지 최대한 많은 프로그램에 대해서 termination을 증명하고자 하는 시도가 있었다. 그리고 이런 노력은 order theory와 관련이 있다. 해당 report는 이러한 부분에 주목하여 order theory가 program termination 증명에서 어떤 역할을 하는지 알아보려고 한다.

2 Several Topics in Program Termination

이 섹션에서는 프로그램의 termination을 증명하는데 사용되는 여러 방법들을 소개한다.

2.1 Well-founded Relation

이 장에서는 termination을 formal하게 다루는데 사용되는 well-founded relation에 대해 설명한다. 다음 정의를 보자: [2]

Definition 2.1. *A partially ordered set (W, \leq) is called well-founded, if W has no infinite descending chain $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \mid n < \omega\}$, i. e. with $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.*

And, $<$ is called a well-founded relation.

Example 2.1. 자연수 집합 N 에 대해 부등호 $<$ 를 부여하면 $(N, <)$ 는 well-founded set이다.

2.2 Program Termination

A program π , possibly nondeterministic, is terminating if every computation of π from an initial state is finite. If there is a computation of π from state x to state y , we say that y is reachable from x and write $y \sim x$. A state y is reachable if it is reachable from an initial state [1]

그러나 program의 state S 와 well-founded relation R 을 정의하는 것은 어려운 작업이다. 따라서 Ranking Function을 도입한다. ranking function은 $S \rightarrow N$ 으로 매핑되는 함수로, termination을 증명하는데 사용된다. 이는 program state S 를 well-founded set인 자연수 N 으로 매핑하는 함수로서 well-founded relation 을 명시적으로 구하는 것이다.

Example 2.2. *sigma*

3 Structural Induction

Structural induction is a proof technique that is used to prove properties of recursively defined objects. It is a generalization of mathematical induction to objects that have a recursive structure. The proof is done by induction on the structure of the object. The base case is proved for the simplest objects, and the induction step is proved for objects that are built from simpler objects. The proof is complete when all objects are covered by the base case and the induction step. Structural induction is used in many areas of computer science, including programming language semantics, type theory, and formal verification.

Example 3.1. *tree*

4 Conclusion

위에서 프로그램의 종료를 보장하는 가장 대표적인 방법에 대해 소개하였다. 저자는 structural induction을 이용하여 컴퓨터 분야에서 결정불가능하다고 알려진 또다른 문제인 프로그램 동일성 문제에 대해 연구하고 있다. 좋은 결과가 있기를 기대한다.

References

- [1] Andreas Blass and Yuri Gurevich. Program termination and well partial orderings. *ACM Trans. Comput. Logic*, 9(3), June 2008.
- [2] Egbert Harzheim. *Ordered sets*. Springer, 1st edition, 2005.
- [3] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1):230–265, 1937.