Análisis del número de comparaciones requeridas por Quicksort

$$C(N) = N+1 + \frac{C(0)+C(1)+\ldots+C(N-1)}{N} + \frac{C(N-1)+\ldots+C(1)+C(0)}{N}$$

$$C(N) = N+1 + \frac{2}{N}\left(C(0)+C(1)+\ldots+C(N-1)\right)$$

Multiplicando por N:

$$NC(N) = N^2+N+2\left(C(0)+C(1)+\ldots+C(N-1)\right) \qquad (1)$$

De forma similar para un vector de tamaño $N-1$ se tiene:

$$(N-1)C(N-1) = (N-1)^2+N-1+2\left(C(0)+\ldots+C(N-2)\right) \qquad (2)$$

$$(N-1)^2+N-1$$
$$= N^2-2N+\cancel{1}+N-\cancel{1}$$
$$= N^2-N$$

Restando $(1)-(2)$:

$$NC(N)-(N-1)C(N-1) = 2N + 2C(N-1)$$

$$NC(N) = 2N + (N+1)C(N-1)$$

Dividiendo por $N(N+1)$:

$$\frac{C(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C(N-1)}{N}$$

Reemplazando valores descendientes de N:

$$\frac{C(N-1)}{N} = \frac{2}{N} + \frac{C(N-2)}{N-1}$$

$$\frac{C(N-2)}{N-1} = \frac{2}{N-1} + \frac{C(N-3)}{N-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{C(2)}{3} = \frac{2}{3} + \frac{C(1)}{2} \longrightarrow C(1) \text{ es cero por ser el caso base}$$

Reemplazando hacia atrás se tiene

$$\frac{C(1)}{2} = 0$$

$$\frac{C(2)}{3} = \frac{2}{3}+0$$

$$\frac{C(3)}{4} = \frac{2}{4} + \frac{C(2)}{3} = \frac{2}{4}+\frac{2}{3}+0$$

$$\vdots$$

$$\frac{C(N-1)}{N} = \frac{2}{N} + \frac{C(N-2)}{N-1} = \frac{2}{N}+\frac{2}{N-1}+\ldots+\frac{2}{4}+\frac{2}{3}+0$$

$$\frac{C(N-1)}{N} = 2\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}+\ldots+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) \qquad \frac{C(N)}{N+1} = 2\left(\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{2}{3}\right)$$

Donde aparece la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

aquí tenemos

$$\sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} \sim \ln(N+1) - 1 - \frac{1}{2}$$

Reemplazando

$$\frac{C(N)}{N+1} \sim 2\cdot\ln(N+1)$$

Observemos además:

$$\ln(N) = \frac{\lg(N)}{\lg e}$$

$$\sim \frac{2\cdot\lg(N+1)}{\lg e} = \frac{2}{1.44}\cdot\lg(N+1) = 1.386\cdot\lg(N+1)$$

Concluyendo: $C(N) \sim 1.386\,(N+1)\lg(N+1)$ que es orden $O(N\cdot\lg N)$