

Métodos de ordenación (*Sorting*)

Generalidades

- Los métodos de ordenación hacen parte de la gran mayoría de sistemas transaccionales, de generación de reportes y gestores de base de datos.
- La idea básica es que los datos a ordenar poseen una llave y se desea ordenarlos bien sea en orden ascendente ó descendente con respecto a la llave.

Características generales

- Todos los métodos de ordenación dependen de dos operaciones básicas:
 - Comparar un par de llaves, para establecer si una es menor (o no) que la otra. (Operación *less()*)
 - Intercambiar la posición de un par de elementos. (Operación *exch()*)

Modelo general para métodos de ordenamiento

Los distintos métodos se implementan como bibliotecas de funciones con el siguiente patrón:

class OrdenacionNN		
static void	sort(Comparable[] a)	\\ Ordenar el arreglo
static boolean	less(Comparable a, Comparable b)	\\ Determinar si a<b
static void	exch(Comparable[] a, int i, int j)	\\ Intercambiar posiciones i y j
static void	show(Comparable[] a)	\\ Imprimir el arreglo
static boolean	isSorted(Comparable[] a)	\\ Verificar si está en orden

Modelo del problema

- `isSorted()` permite verificar si el vector está en orden.
- El tiempo de ejecución lo determinan principalmente las instrucciones de comparación e intercambio. Se toman estas como modelo de costo.
- Uso de memoria. Algunos algoritmos operan sobre los datos en el mismo vector de entrada (*in-situ*). Otros requieren copiar los datos, lo cual conlleva un consumo adicional.

Tipos de datos

- Se generaliza a cualquier tipo que posea una relación de orden. Esta relación define un orden total: Reflexiva, antisimétrica, transitiva.
- La generalización se logra estableciendo que implementan la interfaz `Comparable` al declarar el tipo.

`x.compareTo(y)` devuelve:
 <0 si x es menor a y
 0 si x es igual a y
 >0 si x es mayor que y

Ejemplo: Implementación de `Comparable` para el ADT Fecha

Ordenación por selección

- Idea general:
 - Buscar el menor dato e intercambiarlo con la posición 0 del arreglo.
 - Repetir buscando el menor entre las posiciones $i..N-1$ e intercambiando con la posición i .
 - Al completar la iteración $N-1$, el vector ya se encuentra ordenado.

Ordenación por selección

```
public static void sort(Comparable[] a) {  
    int N = a.length;  
    for (int i = 0; i < N-1; i++) {  
        int min = i;  
        for (int j = i+1; j < N; j++) {  
            if (less(a[j], a[min])) min = j;  
        }  
        exch(a, i, min);  
        assert isSorted(a, 0, i);  
    }  
    assert isSorted(a);  
}
```

[Ver código fuente completo](#)

Prueba de escritorio

[illegible]

Análisis

- Se toma como modelo de costo la comparación en el ciclo más interno.

$$\begin{aligned}C(N) &= \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} 1 \\&= \sum_{i=0}^{N-2} ((N-1) - (i+1) + 1) \\&= \sum_{i=0}^{N-2} (N-1-i) \\&= (N-1)(N-1) - \frac{(N-2)(N-1)}{2} \\&\sim \frac{N^2}{2} \\E(N) &= \sum_{i=0}^{N-2} 1 = N-1\end{aligned}$$

Conclusiones del análisis

Proposición

- El número de comparaciones es $\sim N^2/2$.
- El número de intercambios es $\sim N$.

Observaciones:

- El tiempo de ejecución es independiente de las entradas.
- El número de intercambios es muy pequeño.

Ordenación por Inserción

Idea general:

- Empezando de la posición 1 hasta la $N-1$:
- Si el elemento actual es menor a su predecesor, se intercambian. Se continua hasta no encontrar un elemento menor.

Ordenación por Inserción

```
public static void sort(Comparable[] a) {  
    int N = a.length;  
    for (int i = 1; i < N; i++) {  
        for (int j = i; j > 0 && less(a[j], a[j-1]); j--) {  
            exch(a, j, j-1);  
        }  
        assert isSorted(a, 0, i);  
    }  
    assert isSorted(a);  
}
```

[Ver código fuente completo](#)

Prueba de escritorio - 1

[illegible]

Prueba de escritorio - 2

[illegible]

Observaciones

- El tiempo de ejecución es dependiente de la entrada particular.
- Es menor para entradas parcialmente ordenadas.

Análisis de peor caso

- Se toma como modelo de costo la comparación en el ciclo más interno.

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^i 1 \\ &= \frac{(N-1)N}{2} \\ &\sim \frac{N^2}{2} \\ C(N) &= E(N) \end{aligned}$$

Análisis de caso medio

Ciclo interno

$$\overline{I(i)} = \frac{1 + 2 + \dots + i}{i}$$

Ciclo externo

$$\begin{aligned}\overline{C(N)} &= \sum_{i=1}^{N-1} \overline{I(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i+1}{2} \\ &= \frac{(N-1)N}{4} + \frac{N-1}{2} \\ &\sim \frac{N^2}{4}\end{aligned}$$

Análisis

Proposición

- En promedio se hacen $\sim N^2/4$ comparaciones y $\sim N^2/4$ intercambios.
- En el peor caso se hacen $\sim N^2/2$ comparaciones y $\sim N^2/2$ intercambios.
- En un mejor caso se hacen $N-1$ comparaciones y 0 intercambios.

Generalidades sobre la ordenación

- Se llama ***inversión*** a un par de datos fuera de orden.
- Se dice que el vector está parcialmente ordenado si el número de inversiones es menor a un factor constante del tamaño del arreglo.
- Ejemplo: El String E J E M P L O tiene 4 inversiones: J-E, M-L, P-L, P-O

Caso de la ordenación por inserción

Proposición

- El número de intercambios realizados por el algoritmo de inserción es igual al número de inversiones del arreglo.
- El número de comparaciones es igual al número de inversiones, más $N-1$.

Shellsort

- Extiende el método de InsertSort, pero operando no entre elementos adyacentes, sino con una secuencia de saltos (*gaps*) predeterminada.
- Dado un tamaño de salto h , al final de cada iteración toda subsecuencia de saltos de tamaño h está ordenada.
- Posteriormente se reduce h , hasta llegar a 1, momento en el que es equivalente a un InsertSort, pero reduciendo significativamente el número de intercambios a realizar.

Secuencia de saltos

- Hay muchas secuencias posibles, pero no hay una demostrada óptima.
- Una secuencia que arroja muy buen desempeño es

$$h = \frac{1}{2}(3^k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

empezando en el menor valor de h mayor o igual a $\lfloor N/3 \rfloor$

Algoritmo Shellsort

```
public static void sort(Comparable[] a) {  
    int N = a.length;  
    // 3x+1 increment sequence: 1, 4, 13, 40, 121, 364, 1093, ...  
    int h = 1;  
    while (h < N/3) h = 3*h + 1;  
    while (h >= 1) {  
        // h-sort the array  
        for (int i = h; i < N; i++) {  
            for (int j = i; j >= h && less(a[j], a[j-h]); j -= h) {  
                exch(a, j, j-h);  
            }  
        }  
        assert isHsorted(a, h);  
        h /= 3;  
    }  
    assert isSorted(a);  
}
```

[Ver código fuente completo](#)

Eficiencia de Shellsort

- Al usar saltos grandes ($h > 1$) se logra que los elementos se acerquen a su posición definitiva en pocos pasos.
- Cuando $h=1$, se hace la misma secuencia de InsertSort, pero en general se requerirán pocos intercambios.
- No hay una solución analítica para la eficiencia promedio. El número de comparaciones de esta versión es $\sim N^{3/2}$ (que es mucho menor a N^2).