

Métodos de ordenación

Quicksort
(Ordenación rápida)

Generalidades

- Es una de las técnicas de ordenación más utilizadas
 - Muy eficiente en el caso medio
 - Tiene unas constantes asociadas pequeñas
 - Opera *in-situ*

Estrategia de Quicksort

- También se trata de un algoritmo divide y vencerás.
- Su estrategia es la opuesta a mergesort: Primero se hace el trabajo en el rango completo y luego se invoca recursivamente en las divisiones.
- A diferencia de mergesort, las dos particiones del rango inicial no necesariamente son de igual tamaño.

Operación sobre un rango: Particionamiento

- Se toma un elemento arbitrario como pivote y se invoca el algoritmo `partition` en el rango $lo..hi$. Este intercambia los elementos del vector de forma que se cumplen las siguientes postcondiciones:
 - $a[k]$ queda en la posición final para el pivote (algún elemento k del rango).
 - $a[i] \leq a[k]$ para todo $lo \leq i < k$.
 - $a[k] \leq a[j]$ para todo $k < j \leq hi$.
- Se invoca recursivamente en los intervalos $lo..k-1$ y $k+1..hi$.

Implementación del algoritmo de partición

```
private static int partition(Comparable[] a, int lo, int hi) {  
    int i = lo;  
    int j = hi + 1;  
    Comparable v = a[lo];  
  
    while (true) {  
        while (less(a[++i], v))  
            if (i == hi) break;  
  
        while (less(v, a[--j]))  
            if (j == lo) break;  
  
        if (i >= j) break;  
        exch(a, i, j);  
    }  
    exch(a, lo, j);  
    return j;  
}
```

Eficiencia del algoritmo partition

- Dado un rango de $N = hi - lo + 1$ elementos:
- El pivote v se compara una vez con cada uno de los $N - 1$ elementos restantes.
- Los ciclos `while` internos hacen una comparación adicional cuando no se cumple, o sea que se tienen 2 comparaciones más.
- En total se realizan $N + 1$ comparaciones en un rango de tamaño N .

Implementación de quicksort

```
public static void sort(Comparable[] a) {  
    StdRandom.shuffle(a);  
    sort(a, 0, a.length - 1);  
    assert isSorted(a);  
}
```

```
// quicksort the subarray from a[lo] to a[hi]  
private static void sort(Comparable[] a, int lo, int hi) {  
    if (hi <= lo) return;  
    int j = partition(a, lo, hi);  
    sort(a, lo, j-1);  
    sort(a, j+1, hi);  
    assert isSorted(a, lo, hi);  
}
```

Eficiencia de Quicksort

- Es dependiente de la entrada. A diferencia de mergesort, el vector de entrada no se divide en mitades iguales.
- En el caso ideal cuando el vector se divide a la mitad, el número de comparaciones lo describe la recurrencia:

$$C(N) = 2C(N/2) + N$$

que es exactamente la misma recurrencia de mergesort, con solución:

$$N \lg(N)$$

Eficiencia media de Quicksort

- En general se debe considerar la posibilidad de que el pivote quede ubicado en cualquiera de las posiciones del arreglo.
- Se toma el número promedio de comparaciones de todos los posibles casos y se suma el número de comparaciones de la invocación inicial, dando la recurrencia

$$C(N) = (N + 1) + \frac{C(0) + \dots + C(N - 1)}{N} + \frac{C(N - 1) + \dots + C(0)}{N}$$

Solución de la recurrencia (1)

- Se observa que $C(0)=C(1)=0$.
- Tomando la diferencia de 2 casos consecutivos

$$NC(N) = N(N+1) + 2(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))$$

$$(N-1)C(N-1) = (N-1)N + 2(C(0) + C(1) + \dots + C(N-2))$$

$$NC(N) - (N-1)C(N-1) = 2N + 2C(N-1)$$

- Agrupando y simplificando

$$NC(N) = 2N + (N+1)C(N-1)$$

$$\frac{C(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C(N-1)}{N}$$

$$\vdots$$

$$\frac{C(2)}{3} = \frac{2}{3} + \frac{C(1)}{2}$$

$$\frac{C(1)}{2} = 0$$

Solución de la recurrencia (2)

- Y sustituyendo

$$\frac{C(N)}{N+1} = 2 \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{3} \right)$$

- donde aparece la serie armónica

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

- permitiendo concluir

$$C(N) \sim 2N \ln N$$

Referencia: [La serie armónica](#)

Peor caso de Quicksort

- Se presenta cuando el pivote queda ubicado en uno de los extremos del intervalo en todas las llamadas recursivas.
- Esto lleva a un número de comparaciones de la forma:

$$C(N) = N + (N - 1) + \dots + 1 = \frac{N(N + 1)}{2}$$

que es cuadrática. Sin embargo solo ocurre en casos muy específicos. Aleatorizar el vector antes de realizar la ordenación hace muy improbable que se presenten estos casos.

Mejoras a la implementación

- Algoritmo híbrido: Es más eficiente utilizar ordenación por inserción para vectores muy pequeños (e.g. $N < 15$).
- Media de tres: Para evitar que el pivote sea un valor extremo, tomar 3 muestras en el intervalo $l_o \dots h_i$ y utilizar el valor medio de las tres.
- Cuando el vector posee muchas llaves repetidas, conviene dividir el vector en tres partes: Menores al pivote, repeticiones del pivote y mayores al pivote. (Ver [Quick3way](#))

Ejemplo

- Encontrar la intersección/diferencia de dos conjuntos ordenados representados por medio de arreglos comparables.

