Colas de prioridad
Montículos

Heaps

Idea general

- Existen aplicaciones donde es necesario encontrar el mayor (o el menor) elemento de un conjunto.
- No es eficiente mantener todos los elementos en orden. Es necesario agregar o eliminar elementos con frecuencia.
- La cola de prioridad captura estos requerimientos. Su interfaz ofrece métodos para remover el mayor elemento y agregar elementos.

Aplicaciones de la cola de prioridad

- Atender/despachar eventos en orden de su prioridad.
- Planificación de tareas en sistemas operativos.
- Manejo de eventos en simuladores.
- Ordenación por montículo.

Definición del API

public class MaxPQ<Key extends Comparable<Key>>		
	MaxPQ()	Crear cola de prioridad
	MaxPQ(int max)	Crear cola de prioridad de tamaño fijo
	MaxPQ(Key[] a)	Crear cola de prioridad a partir de un arreglo de llaves
void	insert(Key v)	Agregar una llave
Key	max()	Obtener la mayor llave
Key	delMax()	Borrar la mayor llave y devolverla
boolean	isEmpty()	Esta vacía la cola?
int	size()	Número de elementos en la cola

Cola de mínima prioridad

- Simplemente se implementa la política opuesta: Las operaciones max() y delMax() se reemplazan por operación min() y delMin() para obtener el mínimo y borrar el mínimo elemento de la cola respectivamente.
- Solo requiere cambios menores en la implementación: Invertir orden de comparaciones.
- Se denomina `MinPQ`.

Ejemplo de aplicación

- Se tiene la lista de todas las canciones (N) con su votación.
- Determinar las M=10 canciones más populares.
- Sea N el número de canciones y M el número de elementos a seleccionar.
- Típicamente se tiene: N>>M

Soluciones sencillas

- Ordenar la lista tomando como llave la votación y tomar los primeros M elementos

$$\sim N \log(N) + M$$

- Mantener los M mayores elementos en un arreglo no ordenado. Al procesar cada elemento compararlo con los M actuales. Si el nuevo elemento es mayor que el mínimo, reemplazar el mínimo.

$$\sim NM$$

Montículo – *Binary heap*

- Las soluciones previas no son muy eficientes.
- Una idea para una implementación eficiente es utilizar un árbol tal que todo nodo padre es mayor o igual a sus nodos hijos.
- Esta propiedad se denomina propiedad del montículo.
- Obtener el mayor elemento es simplemente obtener la raíz del árbol.
- Pero hay que considerar también como agregar, eliminar o cambiar nodos del árbol.

Representación mediante árbol binario completo

- Una representación estándar de árbol binario utiliza 3 referencias por nodo.
- Existe una solución más sencilla para cuando el árbol binario es completo. Se dice que el árbol es completo cuando empezando en la raíz y recorriendo todos los niveles sucesivos de izquierda a derecha, todos los niveles están llenos.
- Es posible representar un árbol binario completo en un arreglo.

Montículo / *Heap*

- Es una colección de llaves que cumplen la propiedad del montículo y representadas en un árbol binario completo.
- Ejemplo
- Se observa que en el arreglo* (y para el árbol completo) los nodos hijos del nodo i se encuentran en las posiciones 2i y 2i+1.
- El nodo padre de un nodo j se encuentra en la posición j÷2.

* El arreglo se indexa con posiciones [1..N] para facilitar la aritmética.

Altura de árboles binarios completos

- Proposición: La altura de un árbol binario completo de N nodos es $\lfloor lg(N) \rfloor$

- Dem: Por inducción matemática en N

Implementación del montículo

- Se utiliza un arreglo pq[1..N] (la posición 0 simplemente no se usa).
- Las operaciones básicas que se requieren son:
  - eliminar la raíz
  - agregar una llave
  - cambiar el valor de una llave
- Cualquiera de estas operaciones puede invalidar la propiedad del montículo. Se restaura intercambiando nodos del árbol.

Operaciones sink/swim

- Si una llave se hace mayor, puede superar el valor de su padre y por tanto se debe intercambiar hasta que su antecesor sea mayor o igual: Operación *swim* (flotar).
- Si una llave se hace menor, puede pasar a ser inferior que sus hijos. Se intercambia con el mayor de los hijos, hasta que no se encuentren hijos mayores: Operación *sink* (hundir).

Implementación de las operaciones swim / sink

```
Key[] pq;
private int N=0;

private void swim(int k) {
    while(k>1 && less(k/2,k)) {
        exch(k/2,k);
        k /= 2;
    }
}


private void sink(int k) {
    while (2*k <= N) {
        int j = 2*k;
        if (j < N && less(j, j+1)) j++;
        if (!less(k, j)) break;
        exch(k, j);
        k = j;
    }
}
```

Implementación de otras operaciones

```
public void insert(Key v) {
    pq[++N] = v;
    swim(N);
}


public Key delMax() {
    Key max = pq[1];
    exch(1, N--);
    pq[N+1] = null;
    sink(1);
    return max;
}
```

Implementación completa

Ejercicio

- Suponer que la llave (Key) es un ADT que puede cambiar de valor.
- Si la llave cambia de valor, se invalida la propiedad del montículo para este nodo del árbol.
- Cómo restaurar la propiedad del montículo cuando cambia el valor de una llave?

Eficiencia de las operaciones del montículo

Proposición

- El algoritmo `insert` requiere como máximo lg(N) comparaciones.
- El algoritmo `delMax` requiere como máximo 2lg(N) comparaciones.

Dem

- `insert` agrega el elemento al final y hace una operación `swim`, la cual compara como máximo con todos los nodos padre en la ruta a la raíz.
- `delMax` reemplaza la raíz y hace una operación `sink`, la cual requiere 2 comparaciones por nivel del árbol.

Ejemplo
Problema de seleccionar los M mayores

- Utilizar un montículo invertido (MinPQ) de tamaño constante M+1.
- Para cada uno de los N elementos se invoca `insert` y se elimina el menor elemento (raíz).
- Observar que al final de cada iteración la cola contiene los M mayores elementos hasta el momento.
- Eficiencia: comparaciones ~Nlg(M), espacio~M.

Ordenación por montículo *Heapsort*

- Idea general: La operación delMax() retorna el mayor valor y lo elimina.
- Iterar obteniendo el mayor valor y guardándolo en una pila. Al final todos los elementos están en orden.
- Se puede ahorrar el espacio adicional, ubicando los elementos en las últimas posiciones del mismo vector.

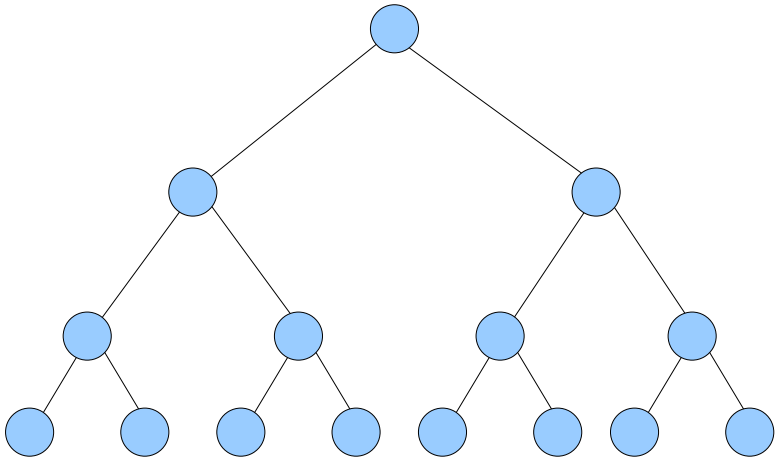
Creación del montículo

- Esta idea requiere que los datos a ordenar estén en un montículo.
- Una forma eficiente de convertir un vector en un montículo es recorriendolo de derecha a izquierda e invocar la operación sink en cada nodo. Esto efectivamente crea un subheap en cada nodo.
- Al llegar a la raíz el arreglo es un montículo.

Creación de montículo

- Proposición: La creación del montículo utilizando el proceso de derecha a izquierda y la operación sink requiere un número de comparaciones ~2N y un número de intercambios ~N.

Análisis de crear montículo



Observaciones:

- Se tienen 2^p nodos de profundidad p.
- Las hojas (p=h) requieren 0 comparaciones.
- Nodos de nivel 1 requieren 2 comparaciones en el llamado a *sink*.
- Nodos de profundidad p requieren como máximo 2(h-p) comparaciones en el llamado a *sink*, siendo h la altura del árbol.

$$C(h) = \sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot 2 \cdot (h-p)$$

Solución de la sumatoria como recurrencia

$$
\begin{aligned}
C(h) - C(h-1) &= 2\left(\sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot (h-p) - \sum_{p=0}^{h-2} 2^p \cdot (h-1-p)\right) \\
&= 2\left(2^{h-1}h - 2^{h-1}(h-1) + \sum_{p=0}^{h-2} 2^p\right) \\
&= 2\left(2^{h-1} + 2^{h-1} - 1\right) \\
&= 2^{h+1} - 2
\end{aligned}
$$

Y resolviendo la recurrencia

$$
\begin{aligned}
C(h) &= C(h-1) + 2^{h+1} - 2 \\
C(h-1) &= C(h-2) + 2^{h} - 2 \\
\vdots &= \vdots \\
C(0) &= 0 \\
C(1) &= 2^2 - 2 \\
C(2) &= 2^2 + 2^3 - 2 - 2 \\
\vdots &= \vdots \\
C(h) &= 2^2 + \ldots + 2^{h+1} - 2h \\
C(h) &= 2^{h+2} - 1 - 2^0 - 2^1 - 2h \\
\vdots &= \vdots \\
C(N) &= 2N - 2\lg(N+1)
\end{aligned}
$$

Algoritmo de ordenación por montículo (*heapsort*)

```
public static void sort(Comparable[] pq) {
    int N = pq.length;
    for (int k = N/2; k >= 1; k--)
        sink(pq, k, N);
    while (N > 1) {
        exch(pq, 1, N--);
        sink(pq, 1, N);
    }
}
```

Código fuente completo

Eficiencia de *heapsort*

- El primer ciclo `for` es la creación de montículo que requiere ~2N comparaciones y ~N intercambios.
- El segundo ciclo hace N-1 intercambios y N operaciones *sink*. Cada operación *sink* hace como máximo ~lg(N) intercambios y comparaciones.
- Ordenación *heapsort* tiene orden de crecimiento:

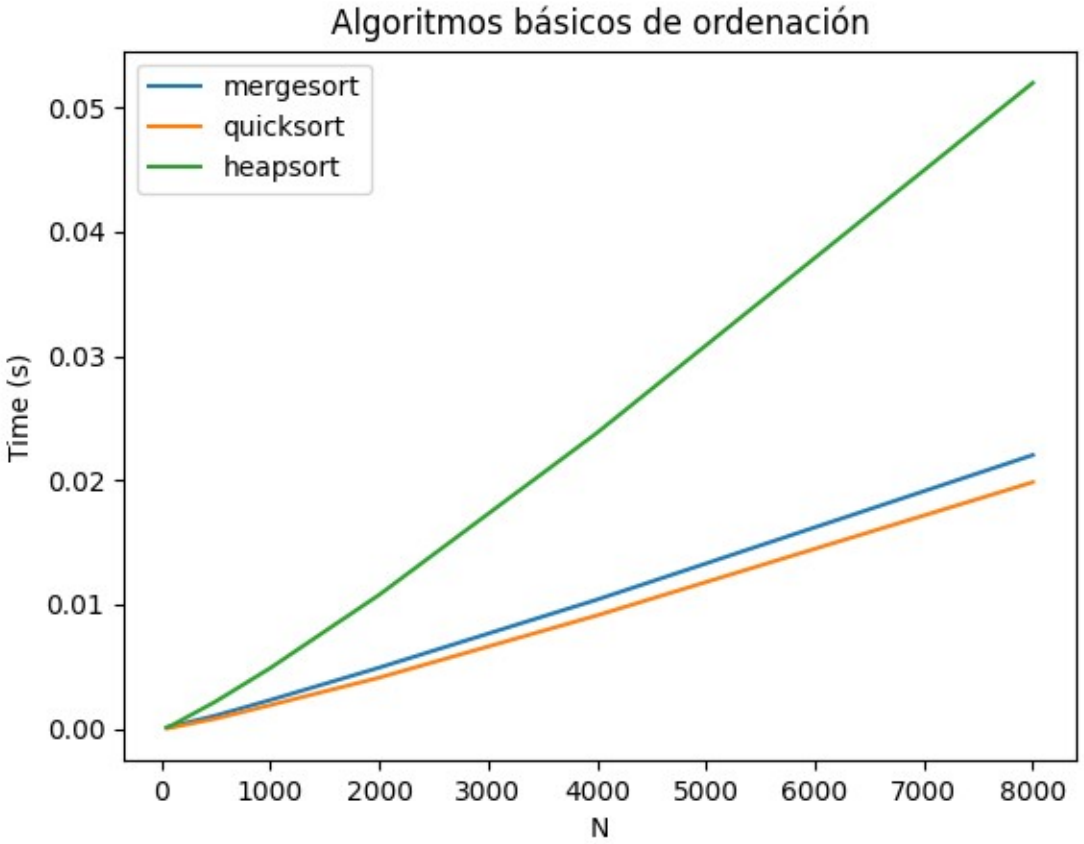
$$\sim N \lg(N)$$

Heapsort vs the others

- Heapsort es ~ N lg(N) en el peor caso y es un algoritmo *in-situ*.
- Quicksort solo logra ~ N ln(N) en caso medio e *in-situ*.
- Mergesort es ~ N lg(N), pero no es *in-situ*.

- Sin embargo, por los factores constantes (que ignora este tipo de análisis) heapsort en la práctica tiene un peor desempeño.

Comparación experimental (Python)



Sobre implementaciones en bibliotecas

Texto Guía	Python	Java
MinPQ	heapq	java.util.PriorityQueue
`MinPQ(Key[] x)`	`heapq.heapify(x)`	`PriorityQueue(Collection e)`
`insert(key)`	`heapq.push(x, key)`	`add(key) , offer(key)`
`Key delMin()`	`heapq.pop(x)`	`poll()`
		`peek()`
`Iterator<Key> iterator()`	`iter(x)`	`Iterator<E> iterator()`
	`heapq.pushpop(x, item)`	Agrega item y retorna el menor
	`heapq.replace(x, item)`	Retorna el menor y agrega item
	`heapq.nlargest(n,x)`	Top-N mayores
	`heapq.nsmallest(n,x)`	Top-N menores
	`heapq.merge(x1,x2,...)`	Fusionar listas ordenadas
		`contains(key)`
	`x.remove(key)`	`remove(key)`
	`x.clear()`	`clear()`
`size()`	`len(x)`	`size()`