

Colas de prioridad

Montículos

Heaps

Idea general

- Existen aplicaciones donde es necesario encontrar el mayor (o el menor) elemento de un conjunto.
- No es eficiente mantener todos los elementos en orden. Es necesario agregar o eliminar elementos con frecuencia.
- La cola de prioridad captura estos requerimientos. Su interfaz ofrece métodos para remover el mayor elemento y agregar elementos.

Aplicaciones de la cola de prioridad

- Atender/despachar eventos en orden de su prioridad.
- Planificación de tareas en sistemas operativos.
- Manejo de eventos en simuladores.
- Ordenación por montículo.

Definición del API

```
public class MaxPQ<Key extends Comparable<Key>>
```

| | | |
|---------|----------------|--|
| | MaxPQ() | Crear cola de prioridad |
| | MaxPQ(int max) | Crear cola de prioridad de tamaño fijo |
| | MaxPQ(Key[] a) | Crear cola de prioridad a partir de un arreglo de llaves |
| void | insert(Key v) | Agregar una llave |
| Key | max() | Obtener la mayor llave |
| Key | delMax() | Borrar la mayor llave y devolverla |
| boolean | isEmpty() | Esta vacía la cola? |
| int | size() | Número de elementos en la cola |

Cola de mínima prioridad

- Simplemente se implementa la política opuesta: Las operaciones `max()` y `delMax()` se reemplazan por operación `min()` y `delMin()` para obtener el mínimo y borrar el mínimo elemento de la cola respectivamente.
- Solo requiere cambios menores en la implementación: Invertir orden de comparaciones.
- Se denomina MinPQ.

Ejemplo de aplicación

- Se tiene la lista de todas las canciones (N) con su votación.
- Determinar las $M=10$ canciones más populares.
- Sea N el número de canciones y M el número de elementos a seleccionar.

Soluciones sencillas

- Ordenar la lista tomando como llave la votación y tomar los primeros M elementos

$$\sim N \log(N) + M$$

- Mantener los M mayores elementos en un arreglo no ordenado. Al procesar cada elemento compararlo con los M actuales. Si el nuevo elemento es mayor que el mínimo, reemplazar el mínimo.

$$\sim NM$$

Montículo – *Binary heap*

- Las soluciones previas no son muy eficientes.
- Una idea para una implementación eficiente es utilizar un árbol tal que todo nodo padre es mayor o igual a sus nodos hijos.
- Esta propiedad se denomina propiedad del montículo.
- Obtener el mayor elemento es simplemente obtener la raíz del árbol.
- Pero hay que considerar también como agregar, eliminar o cambiar nodos del árbol.

Representación mediante árbol binario completo

- Una representación estándar de árbol binario utiliza 3 referencias por nodo.
- Existe una solución más sencilla para cuando el árbol binario es completo. Se dice que el árbol es completo cuando empezando en la raíz y recorriendo todos los niveles sucesivos de izquierda a derecha, todos los niveles están llenos.
- Es posible representar un árbol binario completo en un arreglo.

Montículo / *Heap*

- Es una colección de llaves que cumplen la propiedad del montículo y representadas en un árbol binario completo.
- Ejemplo
- Se observa que en el arreglo* (y para el árbol completo) los nodos hijos del nodo i se encuentran en las posiciones $2i$ y $2i+1$.
- El nodo padre de un nodo j se encuentra en la posición $j \div 2$.

* El arreglo se indexa con posiciones $[1..N]$ para facilitar la aritmética.

Altura de árboles binarios completos

- Proposición: La altura de un árbol binario completo de N nodos es $\lfloor \lg(N) \rfloor$
- Dem: Por inducción matemática en N

Implementación del montículo

- Se utiliza un arreglo $pq[1..N]$ (la posición 0 simplemente no se usa).
- Las operaciones básicas que se requieren son:
 - eliminar la raíz
 - agregar una llave
 - cambiar el valor de una llave
- Cualquiera de estas operaciones puede invalidar la propiedad del montículo. Se restaura intercambiando nodos del árbol.

Operaciones sink/swim

- Si una llave se hace mayor, puede superar el valor de su padre y por tanto se debe intercambiar hasta que su antecesor sea mayor o igual: Operación *swim* (flotar).
- Si una llave se hace menor, puede pasar a ser inferior que sus hijos. Se intercambia con el mayor de los hijos, hasta que no se encuentren hijos mayores: Operación *sink* (hundir).

Implementación de las operaciones swim / sink

```
Key[] pq;  
private int n;  
  
private void swim(int k) {  
    while(k>1 && less(k/2,k)) {  
        exch(k/2,k);  
        k /= 2;  
    }  
}  
  
private void sink(int k) {  
    while (2*k <= N) {  
        int j = 2*k;  
        if (j < N && less(j, j+1)) j++;  
        if (!less(k, j)) break;  
        exch(k, j);  
        k = j;  
    }  
}
```

Implementación de otras operaciones

```
public void insert(Key v) {  
    pq[++N] = v;  
    swim(N);  
}
```

```
public Key delMax() {  
    Key max = pq[1];  
    exch(1, N--);  
    pq[N+1] = null;  
    sink(1);  
    return max;  
}
```

Implementación completa

Ejercicio

- Suponer que la llave (Key) es un ADT que puede cambiar de valor.
- Si la llave cambia de valor, se invalida la propiedad del montículo para este nodo del árbol.
- Cómo restaurar la propiedad del montículo cuando cambia el valor de una llave?

Eficiencia de las operaciones del montículo

Proposición

- El algoritmo `insert` requiere como máximo $\lg(N)$ comparaciones.
- El algoritmo `deℓMax` requiere como máximo $2\lg(N)$ comparaciones.

Dem

- `insert` agrega el elemento al final y hace una operación `swim`, la cual compara como máximo con todos los nodos padre en la ruta a la raíz.
- `deℓMax` reemplaza la raíz y hace una operación `sink`, la cual requiere 2 comparaciones por nivel del árbol.

Ejemplo

Problema de seleccionar los M mayores

- Utilizar un montículo invertido (MinPQ) de tamaño constante $M+1$.
- Para cada uno de los N elementos se invoca `insert` y se elimina el menor elemento (raíz).
- Observar que al final de cada iteración la cola contiene los M mayores elementos hasta el momento.
- Eficiencia: comparaciones $\sim N \lg(M)$, espacio $\sim M$.

Ordenación por montículo

Heapsort

- Idea general: La operación delMax() retorna el mayor valor y lo elimina.
- Iterar obteniendo el mayor valor y guardándolo en una pila. Al final todos los elementos están en orden.
- Se puede ahorrar el espacio adicional, ubicando los elementos en las últimas posiciones del mismo vector.

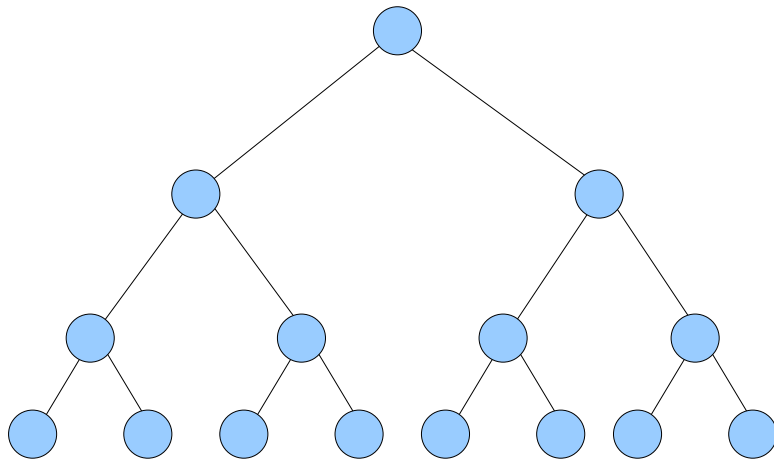
Creación del montículo

- Esta idea requiere que los datos a ordenar estén en un montículo.
- Una forma eficiente de convertir un vector en un montículo es recorriéndolo de derecha a izquierda e invocar la operación sink en cada nodo. Esto efectivamente crea un subheap en cada nodo.
- Al llegar a la raíz el arreglo es un montículo.

Creación de montículo

- Proposición: La creación del montículo utilizando el proceso de derecha a izquierda y la operación sink requiere un número de comparaciones $\sim 2N$ y un número de intercambios $\sim N$.

Análisis de crear montículo



Observaciones:

- Se tienen 2^p nodos de profundidad p .
- Las hojas ($p=h$) requieren 0 comparaciones.
- Nodos de nivel 1 requieren 2 comparaciones en el llamado a *sink*.
- Nodos de profundidad p requieren como máximo $2(h-p)$ comparaciones en el llamado a *sink*, siendo h la altura del árbol.

$$C(h) = \sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot 2 \cdot (h - p)$$

Solución de la sumatoria como recurrencia

$$\begin{aligned}C(h) - C(h-1) &= 2 \left(\sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot (h-p) - \sum_{p=0}^{h-2} 2^p \cdot (h-1-p) \right) \\&= 2 \left(2^{h-1}h - 2^{h-1}(h-1) + \sum_{p=0}^{h-2} 2^p \right) \\&= 2 (2^{h-1} + 2^{h-1} - 1) \\&= 2^{h+1} - 2\end{aligned}$$

Y resolviendo la recurrencia

$$\begin{aligned}C(h) &= C(h-1) + 2^{h+1} - 2 \\C(h-1) &= C(h-2) + 2^h - 2 \\&\vdots = \vdots \\C(0) &= 0 \\C(1) &= 2^2 - 2 \\C(2) &= 2^2 + 2^3 - 2 - 2 \\&\vdots = \vdots \\C(h) &= 2^2 + \dots + 2^{h+1} - 2h \\C(h) &= 2^{h+2} - 1 - 2^0 - 2^1 - 2h \\&\vdots = \vdots \\C(N) &= 2N - 2 \lg(N+1)\end{aligned}$$

Algoritmo de ordenación por montículo (*heapsort*)

```
public static void sort(Comparable[] pq) {  
    int N = pq.length;  
    for (int k = N/2; k >= 1; k--)  
        sink(pq, k, N);  
    while (N > 1) {  
        exch(pq, 1, N--);  
        sink(pq, 1, N);  
    }  
}
```

[Código fuente completo](#)

Eficiencia de *heapsort*

- El primer ciclo *for* es la creación de montículo que requiere $\sim 2N$ comparaciones y $\sim N$ intercambios.
- El segundo ciclo hace $N-1$ intercambios y N operaciones *sink*. Cada operación *sink* hace como máximo $\sim \lg(N)$ intercambios y comparaciones.
- Ordenación *heapsort* tiene orden de crecimiento:

$$\sim N \lg(N)$$

Heapsort vs the others

- Heapsort es $\sim N \lg(N)$ en el peor caso y es un algoritmo *in-situ*.
- Quicksort solo logra $\sim N \ln(N)$ en caso medio e *in-situ*.
- Mergesort es $\sim N \lg(N)$, pero no es *in-situ*.
- Sin embargo, por los factores constantes (que ignora este tipo de análisis) heapsort en la práctica tiene un peor desempeño.