Grafos

Introducción

- Multitud de aplicaciones prácticas se pueden modelar de forma sencilla por medio de entidades y relaciones entre estas entidades. E.g.
  - Redes (Datos, Energía, Teleco, etc.)
  - Mapas (GPS)
  - Redes sociales
  - Web
  - Comercio y finanzas

Concepto de grafo

- Un grafo es una abstración compuesta por
  - Vértices (nodos – *vertex/node*)
  - Aristas (enlaces – *links/edges*)
- La teoría de grafos estudia las propiedades de estos grafos y algoritmos para resolver problemas de grafos, los cuales tienen mucha utilidad práctica en las aplicaciones concretas.

Ejemplos de aplicación

- Encontrar la ruta más corta en un grafo : GPS, Enrutamiento en Internet.
- Encontrar un árbol de cubrimiento mínimo : Redes LAN Ethernet, diseño de redes de distribución (agua, energía).
- Encontrar nodos populares: Rankeo de páginas web en búscadores.

Tipos de grafos

Según la forma de las aristas se distinguen:

- No dirigidos: Las aristas no tienen un sentido. Se pueden recorrer en ambas direcciones. (e.g. Una conexión a la red)
- Dirigidos: Las aristas tienen una dirección asignada. Solo se pueden recorrer en el sentido de la arista. (e.g. Un link en una página web)

Grafos no dirigidos

- Son colecciones de vértices y aristas no dirigidas.
- Los vértices se identifican por números 0..V-1
- Las aristas se denotan por los pares no ordenados de los vértices que conectan, e.g. {a,b}
- Es posible tener bucles (self-loops) y aristas paralelas. Inicialmente no se consideran para simplificar.

Terminología

- **Camino**: Es una secuencia de vértices conectados por aristas. Es simple si no se repiten vértices. Es un ciclo si el primer y el último vértices coinciden.
- **Conexo**: Un grafo es conexo si existe un camino entre todo par de nodos del grafo. En caso contrario es **no conexo** y se identifican múltiples componentes conexas del grafo.

Terminología

- **Acíclico**: Es un grafo que no contiene ciclos. Por ejemplo todo árbol es un grafo conexo y acíclico y viceversa.
- **Grado de un nodo**: Es el número de aristas que se conectan al nodo. Alternativamente, es el número de nodos *adyacentes* al nodo.

Densidad de un grafo

- Hace referencia al número de aristas del grafo con respecto al número de nodos.
- Se dice que el grafo es no denso (o disperso) si el número de aristas se encuentra dentro de un factor constante del número de vértices:

$$E \leq cV$$

- En caso contrario, se dice que el grafo es denso.

Grafos bipartitos

- Cuando los vértices del grafo se pueden descomponer en dos conjuntos, de forma tal que toda arista conecta un vértice de un conjunto con un vértice del otro conjunto.

Grafo no dirigido como un tipo de dato abstracto

`class Graph`		
	`Graph(int V)`	// Constructor indicando número de vértices
	`Graph(In in)`	// Constructor utilizando un inputStream
`int`	`V()`	// Número de vértices
`int`	`E()`	// Número de aristas
	`addEdge(int u, int v)`	// Adicionar una arista
`Iterable<Integer>`	`adj(int v)`	// Determinar los nodos adyacentes a v
`int`	`degree(int v)`	// Grado del nodo
`String`	`toString()`	// Representación textual del grafo

Grafo dirigido como un tipo de dato abstracto

class Graph		
	Digraph(int V)	// Constructor indicando número de vértices
	Digraph(In in)	// Constructor utilizando un inputStream
int	V()	// Número de vértices
int	E()	// Número de aristas
	addEdge(int u, int v)	// Adicionar una arista
Iterable<Integer>	adj(int v)	// Determinar los nodos adyacentes a v
int	outdegree(int v)	// Grado saliente del nodo
int	indegree(int v)	// Grado entrante del nodo
String	toString()	// Representación textual del grafo

Representación de un grafo

Existen diversas formas, las dos más comunes:

- Matrix de adyacencia: A_{ij} es cero si no hay arista i-j, o uno en caso contrario.
- Listas de adyacencia: Se construyen V listas, cada una con los vértices adyacentes a cada nodo. Las listas se almacenan en un vector indexado por el id del nodo de partida.

Implementación del grafo no dirigido

```
public class Graph {
    private final int V;
    private int E;
    private Bag<Integer>[] adj;

    public Graph(int V) {
        if (V < 0) throw new IllegalArgumentException("Number of vertices must be nonnegative");
        this.V = V;
        this.E = 0;
        adj = (Bag<Integer>[]) new Bag[V];
        for (int v = 0; v < V; v++) {
            adj[v] = new Bag<Integer>();
        }
    }

    public int V() { return V; }
    public int E() { return E; }

    public void addEdge(int v, int w) {
        E++;
        adj[v].add(w);
        adj[w].add(v);
    }

    public Iterable<Integer> adj(int v) {
        return adj[v];
    }

    public int degree(int v) {
        return adj[v].size();
    }


}
```

Ver la implementación completa

Implementación del grafo dirigido

```
public class Digraph {
    private final int V;
    private int E;
    private Bag<Integer>[] adj;
    private int[] indegree;


    public void addEdge(int v, int w) {
        E++;
        adj[v].add(w);
        indegree[w]++;
        E++;
    }

    public int outdegree(int v) {
        return adj[v].size();
    }

    public int indegree(int v) {
        return indegree[v];
    }


}
```

Ver la implementación completa

Búsquedas en grafos
Recorrido de grafos

- Hay aplicaciones en las que se requieren operaciones tales como:
  - Visitar todos los nodos del grafo una vez
  - Encontrar un camino en el grafo
  - Determinar si el grafo es conexo
- Este tipo de problemas se resuelven por medio de algoritmos de recorrido de grafos.

Tipos de recorrido

- Recorrido en profundidad (Depth first search – DFS) : Se visita un nodo, se marca y se visitan recursivamente todos sus adyacentes aún no visitados.
- Recorrido en anchura (Breath first search – BFS): Al visitar un nodo se marca, luego se visitan todos sus adyacentes y solo después de esto se visitan los vecinos de los adyacentes.

Recorrido en profundidad (DFS) Versión recursiva

```
public class DepthFirstSearch {
    private boolean[] marked;    // marked[v] = is there an s-v path?
    private int count;           // number of vertices connected to s

    public DepthFirstSearch(Graph G, int s) {
        marked = new boolean[G.V()];
        dfs(G, s);
    }

    private void dfs(Graph G, int v) {
        count++;
        marked[v] = true;
        for (int w : G.adj(v)) {
            if (!marked[w]) {
                dfs(G, w);
            }
        }
    }

}
```

Ver implementación completa

Recorrido en profundidad (DFS) Versión no recursiva

```
public class NonrecursiveDFS  {
      private boolean[] marked;    // marked[v] = is there an s-v path?


      public NonrecursiveDFS(Graph G, int s) {
        marked = new boolean[G.V()];

        validateVertex(s);

        Iterator<Integer>[] adj = (Iterator<Integer>[]) new Iterator[G.V()];
        for (int v = 0; v < G.V(); v++)
            adj[v] = G.adj(v).iterator();

        // depth-first search using an explicit stack
        Stack<Integer> stack = new Stack<Integer>();
        marked[s] = true;
        stack.push(s);
        while (!stack.isEmpty()) {
            int v = stack.peek();
            if (adj[v].hasNext()) {
                int w = adj[v].next();
                // StdOut.printf("check %d\n", w);
                if (!marked[w]) {
                    marked[w] = true;
                    stack.push(w);
                    // StdOut.printf("dfs(%d)\n", w);
                }
            }
            else {
                // StdOut.printf("%d done\n", v);
                stack.pop();
            }
        }
    }

}
```

Implementación completa

Recorrido en anchura (Breath First Search - BFS)

```
public class RecorridoBFS {


     // Se asume que el grafo es conexo
     public static void BFS(Graph g, int s) {
         Queue<Integer> paraVisitar = new Queue<>();
         boolean[] marcados = new boolean[g.V()];
         paraVisitar.enqueue(s);
         marcados[s]=true;

         while(!paraVisitar.isEmpty()) {
             Integer actual = paraVisitar.dequeue();
             StdOut.println("Visitado: "+actual);
             for(Integer vecino: g.adj(actual)) {
                 if (!marcados[vecino]) {
                     marcados[vecino]=true;
                     paraVisitar.enqueue(vecino);
                 }
             }

         }

     }

     public static void main(String[] args) {
         Graph g = GraphGenerator.simple(10,20);
         BFS(g,0);
     }


}
```