Colas de prioridad Montículos

Heaps

Idea general

- Existen aplicaciones donde es necesario encontrar el mayor (o el menor) elemento de un conjunto.
- No es eficiente mantener todos los elementos en orden. Es necesario agregar o eliminar elementos con frecuencia.
- La cola de prioridad captura estos requerimientos. Su interfaz ofrece métodos para remover el mayor elemento y agregar elementos.

Aplicaciones de la cola de prioridad

- Atender/despachar eventos en orden de su prioridad.
- Planificación de tareas en sistemas operativos.
- Manejo de eventos en simuladores.
- Ordenación por montículo.

Definición del API

public class MaxPQ<Key extends Comparable<Key>>		
	MaxPQ()	Crear cola de prioridad
	MaxPQ(int max)	Crear cola de prioridad de tamaño fijo
	MaxPQ(Key[] a)	Crear cola de prioridad a partir de un arreglo de llaves
void	insert(Key v)	Agregar una llave
Key	max()	Obtener la mayor llave
Key	delMax()	Borrar la mayor llave y devolverla
boolean	isEmpty()	Esta vacía la cola?
int	size()	Número de elementos en la cola

Cola de mínima prioridad

- Simplemente se implementa la política opuesta: Las operaciones max() y delMax() se reemplazan por operación min() y delMin() para obtener el mínimo y borrar el mínimo elemento de la cola respectivamente.
- Solo requiere cambios menores en la implementación: Invertir orden de comparaciones.
- Se denomina `MinPQ`.

Ejemplo de aplicación

- Se tiene la lista de todas las canciones (N) con su votación.
- Determinar las M=10 canciones más populares.
- Sea N el número de canciones y M el número de elementos a seleccionar.

Soluciones sencillas

- Ordenar la lista tomando como llave la votación y tomar los primeros M elementos

$$\sim N \log(N) + M$$

- Mantener los M mayores elementos en un arreglo no ordenado. Al procesar cada elemento compararlo con los M actuales. Si el nuevo elemento es mayor que el mínimo, reemplazar el mínimo.

$$\sim NM$$

Montículo – *Binary heap*

- Las soluciones previas no son muy eficientes.
- Una idea para una implementación eficiente es utilizar un árbol tal que todo nodo padre es mayor o igual a sus nodos hijos.
- Esta propiedad se denomina propiedad del montículo.
- Obtener el mayor elemento es simplemente obtener la raíz del árbol.
- Pero hay que considerar también como agregar, eliminar o cambiar nodos del árbol.

Representación mediante árbol binario completo

- Una representación estándar de árbol binario utiliza 3 referencias por nodo.
- Existe una solución más sencilla para cuando el árbol binario es completo. Se dice que el árbol es completo cuando empezando en la raíz y recorriendo todos los niveles sucesivos de izquierda a derecha, todos los niveles están llenos.
- Es posible representar un árbol binario completo en un arreglo.

Montículo / *Heap*

- Es una colección de llaves que cumplen la propiedad del montículo y representadas en un árbol binario completo.
- Ejemplo
- Se observa que en el arreglo* (y para el árbol completo) los nodos hijos del nodo i se encuentran en las posiciones 2i y 2i+1.
- El nodo padre de un nodo j se encuentra en la posición $j \div 2$.

* El arreglo se indexa con posiciones [1..N] para facilitar la aritmética.

Altura de árboles binarios completos

- Proposición: La altura de un árbol binario completo de N nodos es $\lfloor lg(N) \rfloor$
- Dem: Por inducción matemática en N

Implementación del montículo

- Se utiliza un arreglo pq[1..N] (la posición 0 simplemente no se usa).
- Las operaciones básicas que se requieren son:
  - eliminar la raíz
  - agregar una llave
  - cambiar el valor de una llave
- Cualquiera de estas operaciones puede invalidar la propiedad del montículo. Se restaura intercambiando nodos del árbol.

Operaciones sink/swim

- Si una llave se hace mayor, puede superar el valor de su padre y por tanto se debe intercambiar hasta que su antecesor sea mayor o igual: Operación *swim* (flotar).
- Si una llave se hace menor, puede pasar a ser inferior que sus hijos. Se intercambia con el mayor de los hijos, hasta que no se encuentren hijos mayores: Operación *sink* (hundir).

Implementación de las operaciones swim / sink

```
Key[] pq;
private int N=0;

private void swim(int k) {
    while(k>1 && less(k/2,k)) {
        exch(k/2,k);
        k /= 2;
    }
}


private void sink(int k) {
    while (2*k <= N) {
        int j = 2*k;
        if (j < N && less(j, j+1)) j++;
        if (!less(k, j)) break;
        exch(k, j);
        k = j;
    }
}
```

Implementación de otras operaciones

```
public void insert(Key v) {
    pq[++N] = v;
    swim(N);
}


public Key delMax() {
    Key max = pq[1];
    exch(1, N--);
    pq[N+1] = null;
    sink(1);
    return max;
}
```

Implementación completa

Ejercicio

- Suponer que la llave (Key) es un ADT que puede cambiar de valor.
- Si la llave cambia de valor, se invalida la propiedad del montículo para este nodo del árbol.
- Cómo restaurar la propiedad del montículo cuando cambia el valor de una llave?

Eficiencia de las operaciones del montículo

Proposición

- El algoritmo `insert` requiere como máximo lg(N) comparaciones.
- El algoritmo `delMax` requiere como máximo 2lg(N) comparaciones.

Dem

- `insert` agrega el elemento al final y hace una operación `swim`, la cual compara como máximo con todos los nodos padre en la ruta a la raíz.
- `delMax` reemplaza la raíz y hace una operación `sink`, la cual requiere 2 comparaciones por nivel del árbol.

Ejemplo
Problema de seleccionar los M mayores

- Utilizar un montículo invertido (MinPQ) de tamaño constante M+1.
- Para cada uno de los N elementos se invoca `insert` y se elimina el menor elemento (raíz).
- Observar que al final de cada iteración la cola contiene los M mayores elementos hasta el momento.
- Eficiencia: comparaciones ~Nlg(M), espacio~M.

Ordenación por montículo *Heapsort*

- Idea general: La operación delMax() retorna el mayor valor y lo elimina.
- Iterar obteniendo el mayor valor y guardándolo en una pila. Al final todos los elementos están en orden.
- Se puede ahorrar el espacio adicional, ubicando los elementos en las últimas posiciones del mismo vector.

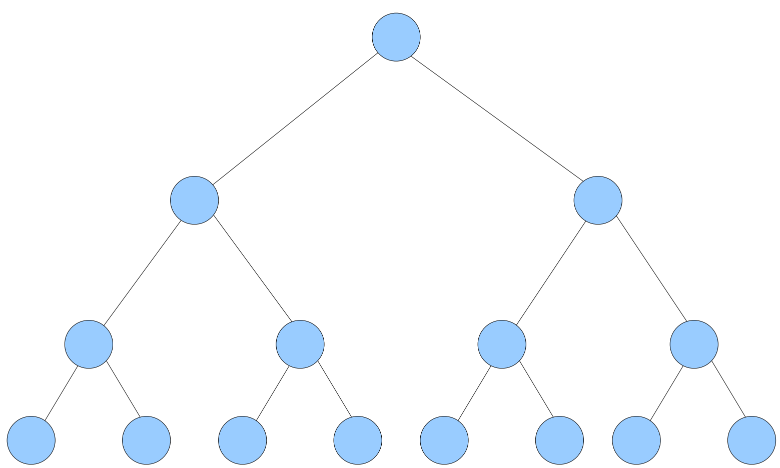
Creación del montículo

- Esta idea requiere que los datos a ordenar estén en un montículo.
- Una forma eficiente de convertir un vector en un montículo es recorriendolo de derecha a izquierda e invocar la operación sink en cada nodo. Esto efectivamente crea un subheap en cada nodo.
- Al llegar a la raíz el arreglo es un montículo.

Creación de montículo

- Proposición: La creación del montículo utilizando el proceso de derecha a izquierda y la operación sink requiere un número de comparaciones ~2N y un número de intercambios ~N.

Análisis de crear montículo



Observaciones:
- Se tienen 2^p nodos de profundidad p.
- Las hojas (p=h) requieren 0 comparaciones.
- Nodos de nivel 1 requieren 2 comparaciones en el llamado a *sink*.
- Nodos de profundidad p requieren como máximo 2(h-p) comparaciones en el llamado a *sink*, siendo h la altura del árbol.

$$C(h) = \sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot 2 \cdot (h-p)$$

Solución de la sumatoria como recurrencia

$$
\begin{aligned}
C(h) - C(h-1) &= 2\left(\sum_{p=0}^{h-1} 2^p \cdot (h-p) - \sum_{p=0}^{h-2} 2^p \cdot (h-1-p)\right) \\
&= 2\left(2^{h-1}h - 2^{h-1}(h-1) + \sum_{p=0}^{h-2} 2^p\right) \\
&= 2\left(2^{h-1} + 2^{h-1} - 1\right) \\
&= 2^{h+1} - 2
\end{aligned}
$$

Y resolviendo la recurrencia

$$
\begin{aligned}
C(h) &= C(h-1) + 2^{h+1} - 2 \\
C(h-1) &= C(h-2) + 2^{h} - 2 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
C(0) &= 0 \\
C(1) &= 2^2 - 2 \\
C(2) &= 2^2 + 2^3 - 2 - 2 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
C(h) &= 2^2 + \ldots + 2^{h+1} - 2h \\
C(h) &= 2^{h+2} - 1 - 2^0 - 2^1 - 2h \\
\vdots &= \quad \vdots \\
C(N) &= 2N - 2\lg(N+1)
\end{aligned}
$$

Algoritmo de ordenación por montículo (*heapsort*)

```
public static void sort(Comparable[] pq) {
    int N = pq.length;
    for (int k = N/2; k >= 1; k--)
        sink(pq, k, N);
    while (N > 1) {
        exch(pq, 1, N--);
        sink(pq, 1, N);
    }
}
```

Código fuente completo

Eficiencia de *heapsort*

- El primer ciclo `for` es la creación de montículo que requiere ~2N comparaciones y ~N intercambios.
- El segundo ciclo hace N-1 intercambios y N operaciones *sink*. Cada operación *sink* hace como máximo ~lg(N) intercambios y comparaciones.
- Ordenación *heapsort* tiene orden de crecimiento:

$$\sim N \lg(N)$$

Heapsort vs the others

- Heapsort es ~ N lg(N) en el peor caso y es un algoritmo *in-situ*.
- Quicksort solo logra ~ N ln(N) en caso medio e *in-situ*.
- Mergesort es ~ N lg(N), pero no es *in-situ*.

- Sin embargo, por los factores constantes (que ignora este tipo de análisis) heapsort en la práctica tiene un peor desempeño.