

# Validez de Expresiones Lógicas en el Cálculo de Predicados

# Validez de expresiones lógicas

- A diferencia del cálculo proposicional, demostrar la validez de una expresión de 1<sup>er</sup> orden no siempre es posible. Es un problema *indecidable*.
- Por el contrario, para demostrar que una expresión no es válida, basta encontrar un contraejemplo; es decir, un modelo que haga  $\neg A$  verdadera.

# Ejemplo

- Demostrar que esta expresión no es válida:

$$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

# Otro ejemplo

- Considere la expresión

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

Este ejemplo ilustra que, dada una expresión válida

$$\forall x A \rightarrow S_y^x A$$

la sustitución de variables ligadas puede llevar a expresiones no válidas

# Demostración de validez

- No existe una técnica general.
- Una forma es transformar la expresión en una tautología.
- Otra forma comúnmente usada es el hecho que si  $A$  solo puede ser válida si  $\neg A$  es contradictoria.

# Ejemplo

Considere la expresión

$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

Recordemos que

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

y su negación es

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

# Derivaciones:

## Particularización Universal (UI)

- Si la expresión  $\forall xP(x)$  es verdadera, entonces para  $P(t)$  es verdadera para cualquier término  $t$ .

$$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$$

- Nota: El término  $t$  no debe estar ligado en ningún otro cuantificador.
- La regla de inferencia correspondiente es:

$$\frac{\forall x A}{S_t^x A}$$

# Ejemplo: Particularización Universal

- Todo ser humano es mortal:  $M(x)$
- Juan es ser humano
- Juan es mortal :  $M(\text{Juan})$



# Ejemplo: Colisión de variables

- Debe evitarse utilizar una variable ligada al hacer la particularización universal.
- Sea el predicado:

$$P(x, y, z) : x+y=z$$

- Una expresión lógica *válida* es

$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$$

- Sin embargo la siguiente particularización *no es válida*

$$S_z^x(\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)) = \forall y \exists z P(z, y, z)$$

- Contraejemplo: Tóme  $y=1$ ,  $z+1=z \Rightarrow 1=0$

# Generalización Universal (GU)

- Sea  $A$  una expresión y  $x$  una variable que *no aparece libre en ninguna premisa*. Entonces

$$\frac{A}{\forall x A}$$

- Observar que es permitido que  $x$  aparezca ligada, o que no aparezca dentro de  $A$ .

# Variables libres y variables verdaderas

- Ya hemos distinguido entre variables ligadas (por un cuantificador) y variables libres.
- Las variables libres que aparecen en las premisas se denominan ***variables fijas***: Identifican un individuo del dominio a lo largo de toda una derivación.
- Se definen además las ***variables verdaderas*** (que también son libres), como variables que aparecen en las premisas, pero que no son fijas. *Solo se pueden generalizar universalmente las variables verdaderas.*
- Variables libres en las premisas se suponen fijas a menos que explícitamente se indique lo contrario.

# Ejemplo GU

- Ejemplo:  
P(x) : x estudia ing. Sel  
Q(x) : x le gusta la programación
- Demostrar

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

# Teorema de la Deducción y la GU

## Teorema de la deducción

- Se supone  $B$
- Se demuestra  $C$  empleando  $B$  como premisa
- Se prescinde de  $B$  y se concluye  $B \rightarrow C$

Y que pasa si  $B$  contiene una variable  $x$  como variable libre?

- Se lleva normalmente (sin generalizar) durante la deducción
- Una vez se prescinde de  $B$ , y si  $x$  no aparece libre en ninguna otra parte, se puede generalizar.

# Ejemplo

Sean

- $S(x)$  : x ha estudiado
- $P(x)$  : x ha aprobado

La premisa es que todo el que ha estudiado ha aprobado:

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$$

Demostrar que los que no aprobaron es porque no estudiaron:

$$\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg S(x))$$

# Omisión de cuantificadores universales

- Es muy común omitir los cuantificadores, por ejemplo:  $x+y=y+x$ , la propiedad conmutativa es para todos los reales  $x,y$ .
- En el cálculo de predicados, toda variable libre es fija: Se supone que corresponde a un único individuo a lo largo de la demostración.
- Llamamos a las variables no fijas *variables verdaderas*.
- Una variable se puede generalizar universalmente si y solo si es una variable verdadera.

# Ejemplo

- Sea  $P(x,y,z): x+y=z$
- Dadas las premisas:

$$P(x,0,x) \text{ y } P(x,y,z) \rightarrow P(y,x,z)$$

demostrar  $P(0,x,x)$ .

$x,y,z$  son variables verdaderas.



# Unificación

- Se dice que dos expresiones se unifican si existen particularizaciones legales que hagan idénticas las expresiones en cuestión.
- El acto de unificarlas se llama *unificación*.
- La particularización que las unifica se llama *unificador*.

# Ejemplo

Sean:

- $Q(a,y,z)$  y  $Q(y,b,c)$  aparecen en líneas diferentes.
- $a,b,c$  son variables fijas
- $y,z$  son variables verdaderas

Determinar si las dos expresiones se unifican y dar un unificador.

# El unificador puede no ser único

Ejemplo:

- $a, b, c$  constantes, las demás son variables verdaderas.
- Unificar  $R(a, x)$  y  $R(y, z)$ .

“Siempre se prefiere el unificador más general”

# Ejemplo de uso de la unificación

Se tienen

- Los predicados:  $\text{madre}(X,Y)$ ,  $\text{hermana}(X,Y)$  y  $\text{tia}(X,Y)$
- Las premisas:
  - $\text{madre}(\textit{juana}, \textit{braulio})$ ,
  - $\text{hermana}(\textit{juana}, \textit{lola})$  y
  - $\text{madre}(X,Y) \wedge \text{hermana}(X,Z) \rightarrow \text{tia}(Z,Y)$

Demostrar que *lola* es tía de *braulio*.

# Generalización Existencial

- Si existe un individuo  $t$  para el cual es válido el predicado  $P(t)$ , entonces se puede concluir que  $\exists x P(x)$ .
- Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia

$$\frac{S_t^x A}{\exists x A}$$

# Ejemplo

Demostrar

$$\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$$

# Particularización existencial

- Si es cierto que  $\exists xA$ , entonces tiene que haber un término  $t$  que satisfice  $A$ .
- Para indicar el individuo (cuando no se sabe el nombre específico) se puede utilizar una variable fija.
- Esto da lugar a la regla de inferencia

$$\frac{\exists x A}{S_b^x A}$$

# Variables resultado de particularizaciones universal y existencial

- La variable resultado de una particularización universal es una *variable verdadera*, por lo tanto se puede generalizar universalmente.
- La variable resultado de una particularización existencial es una *variable fija*, por lo que solo se puede generalizar existencialmente.



# Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

# Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \exists x (P(x) \vee Q(x)) \not\models \exists x Q(x)$$

# Equivalencias Lógicas

- Igual a como hicimos con el cálculo de proposiciones, es posible utilizar equivalencias lógicas para demostrar una expresión en el cálculo de predicados.

# Equivalencias Básicas

$$\forall xA \equiv A$$

$$\exists xA \equiv A$$

Si A no depende de x

$$\forall xA \equiv \forall yS_y^x A$$

$$\exists xA \equiv \exists yS_y^x A$$

Si y no es libre en A

$$\forall xA \equiv S_t^x A \wedge \forall xA$$

$$\exists xA \equiv S_t^x A \vee \exists xA$$

para cualquier término t

$$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall xB$$

$$\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists xB$$

Si A no depende de x

$$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$$

$$\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$$

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$$

$$\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$$

$$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$$

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$$

# Ejemplo:

## Expresiones equivalentes

- Eliminar las negaciones que preceden los cuantificadores de la siguiente expresión

$$\neg \forall z (\exists x P(x, z) \wedge \neg \forall x Q(x, z))$$

## Ejemplo:

### Distinguir variables por estandarización

- Distintas ocurrencias (dentro de distintos cuantificadores) del mismo nombre de variable se entienden como variables diferentes.
- Por claridad es recomendable utilizar nombres diferentes para cada variable.

Ejemplo:

$$\neg \forall z (\exists x P(x, y, z) \wedge \neg \forall x \exists y Q(x, y, z))$$

# Ejemplo

- Simplificar la expresión:

$$\forall x \forall y \exists z (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z))$$

Analizarla por medio de:

- Equivalencias lógicas
- Derivaciones lógicas