

Validez de Expresiones Lógicas en el Cálculo de Predicados

Validez de expresiones lógicas

- A diferencia del cálculo proposicional, demostrar la validez de una expresión de 1^{er} orden no siempre es posible. Es un problema *indecidable*.
- Por el contrario, para demostrar que una expresión no es válida, basta encontrar un contraejemplo; es decir, un modelo que haga $\neg A$ verdadera.

Ejemplo

- Demostrar que esta expresión no es válida:

$$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

Otro ejemplo

- Considere la expresión

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

Este ejemplo ilustra que, dada una expresión válida

$$\forall x A \rightarrow S_y^x A$$

la particularización de variables ligadas puede llevar a expresiones no válidas

Demostración de validez

- No existe una técnica general.
- Una forma es transformar la expresión en una tautología.
- Otra forma comúnmente usada es el hecho que si A solo puede ser válida si $\neg A$ es contradictoria.

Ejemplo

Considere la expresión

$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

Recordemos que

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

y su negación es

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Derivaciones:

Particularización Universal (UI)

- Si la expresión $\forall xP(x)$ es verdadera, entonces para $P(t)$ es verdadera para cualquier término t .

$$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$$

- Nota: El término t no debe estar ligado en ningún otro cuantificador. t será una *variable verdadera*.
- La regla de inferencia correspondiente es:

$$\frac{\forall x A}{S_t^x A}$$

Ejemplo: Particularización Universal

- Todo ser humano es mortal: $\forall xM(x)$
- Juan es ser humano
- Juan es mortal : $M(\text{Juan})$

Generalización Universal (GU)

- Sea A una expresión y x una variable que *no aparece libre en ninguna premisa*. Entonces

$$\frac{A}{\forall x A}$$

- Observar que es permitido que x aparezca ligada, o que no aparezca dentro de A .

Variables libres y variables verdaderas

- Ya hemos distinguido entre variables ligadas (por un cuantificador) y variables libres.
- Las variables libres que aparecen en las premisas se denominan ***variables fijas***: Identifican un individuo del dominio a lo largo de toda una derivación.
- Se definen además las ***variables verdaderas*** (que también son libres), como variables que aparecen en las premisas, pero que no son fijas. Variables libres en expresiones válidas son variables verdaderas: para cualquier particularización, la expresión siempre es V.
- *Solo se pueden generalizar universalmente las variables verdaderas.*
- Variables libres en las premisas se suponen fijas a menos que explícitamente se indique lo contrario.

Ejemplo GU

- Ejemplo:
P(x) : x estudia informática
Q(x) : x le gusta la programación
- Demostrar

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

Teorema de la Deducción y la GU

Teorema de la deducción

- Se supone B
- Se demuestra C empleando B como premisa
- Se prescinde de B y se concluye $B \rightarrow C$

Y que pasa si B contiene una variable x como variable libre?

- Se lleva normalmente (sin generalizar) durante la deducción
- Una vez se prescinde de B , y si x no aparece libre en ninguna otra parte (o es una variable verdadera), se puede generalizar.

Ejemplo

Sean

- $S(x)$: x ha estudiado
- $P(x)$: x ha aprobado

La premisa es que todo el que ha estudiado ha aprobado:

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$$

Demostrar que los que no aprobaron es porque no estudiaron:

$$\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg S(x))$$

Omisión de cuantificadores universales

- Es muy común omitir los cuantificadores, por ejemplo: $x+y=y+x$, la propiedad conmutativa es para todos los reales x,y .
- En el cálculo de predicados, toda variable libre es fija: Se supone que corresponde a un único individuo a lo largo de la demostración.
- Llamamos a las variables no fijas *variables verdaderas*.
- Una variable se puede generalizar universalmente si y solo si es una variable verdadera.

Ejemplo

- Sea $P(x,y,z): x+y=z$
- Dadas las premisas:

$$P(x,0,x) \text{ y } P(x,y,z) \rightarrow P(y,x,z)$$

demostrar $P(0,x,x)$.

x,y,z son variables verdaderas.

Unificación

- Se dice que dos expresiones se unifican si existen particularizaciones de las variables libres que hagan idénticas las expresiones en cuestión.
- El acto de unificarlas se llama *unificación*.
- La particularización que las unifica se llama *unificador*.

Ejemplo

Sean:

- $Q(a,y,z)$ y $Q(y,b,c)$ aparecen en líneas diferentes.
- a,b,c son variables fijas
- y,z son variables verdaderas

Determinar si las dos expresiones se unifican y dar un unificador.

Nota: Variables en distintas expresiones, son distintas variables (nombres pueden colisionar).

Ejercicios

- Determinar si unifican:

$Q(x,y,y)$ y $Q(y,y,c)$

$Q(x,a,x)$ y $Q(y,y,c)$

El unificador puede no ser único

Ejemplo:

- a, b, c constantes, las demás son variables verdaderas.
- Unificar $R(a, x)$ y $R(y, z)$.

“Siempre se prefiere el unificador más general”

Ejercicio

- Encontrar el unificador más general entre
 $P(x,y,x)$ y $P(y,z,a)$

Ejemplo de uso de la unificación

Se tienen

- Los predicados: $\text{madre}(X,Y)$, $\text{hermana}(X,Y)$ y $\text{tia}(X,Y)$
- Las premisas:
 - $\text{madre}(\textit{juana}, \textit{braulio})$,
 - $\text{hermana}(\textit{juana}, \textit{lola})$ y
 - $\text{madre}(X,Y) \wedge \text{hermana}(X,Z) \rightarrow \text{tia}(Z,Y)$

Demostrar que *lola* es tía de *braulio*.

Generalización Existencial

- Si existe un individuo t para el cual es válido el predicado $P(t)$, entonces se puede concluir que $\exists xP(x)$.
- Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia

$$\frac{S_t^x A}{\exists x A}$$

Ejemplo

Demostrar

$$\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$$

Solución

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\neg \exists x P(x)$ | Premisa |
| 2) $P(x)$ | Supuesto TD, x var. verdadera |
| 3) $\exists x P(x)$ | Generalizacion existencial |
| 4) $P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ | Teorema de la deduccion |
| 5) $\neg P(x)$ | Modus tollens |
| 6) $\forall x \neg P(x)$ | Generalizacion universal |

Particularización existencial

- Si es cierto que $\exists xA$, entonces tiene que haber un término t que satisfice A .
- Para indicar el individuo (cuando no se sabe el nombre específico) se puede utilizar una variable fija.
- Esto da lugar a la regla de inferencia

$$\frac{\exists x A}{S_b^x A}$$

Variables resultado de particularizaciones universal y existencial

- La variable resultado de una particularización universal es una *variable verdadera*, por lo tanto se puede generalizar universalmente.
- La variable resultado de una particularización existencial es una *variable fija*, por lo que solo se puede generalizar existencialmente.

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

Solución

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $\exists x \neg P(x)$ | Premisa |
| 2) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ | Premisa |
| 3) $\neg P(t)$ | Particularizacion existencial, t var. fija |
| 4) $P(x) \vee Q(x)$ | Particularizacion universal, x var. verdadera |
| 5) $P(t) \vee Q(t)$ | Particularizando x por t, unificando P(t) y P(x) |
| 6) $Q(t)$ | Silogismo disyuntivo |
| 7) $\exists x Q(x)$ | Generalizacion existencial |

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \exists x (P(x) \vee Q(x)) \not\models \exists x Q(x)$$

Equivalencias Lógicas

- Igual a como hicimos con el cálculo de proposiciones, es posible utilizar equivalencias lógicas para demostrar una expresión en el cálculo de predicados.

Equivalencias Básicas

$$\forall xA \equiv A$$

Si A no depende de x

$$\exists xA \equiv A$$

$$\forall xA \equiv \forall yS_y^x A$$

Si y no es libre en A

$$\exists xA \equiv \exists yS_y^x A$$

$$\forall xA \equiv S_t^x A \wedge \forall xA$$

para cualquier término t

$$\exists xA \equiv S_t^x A \vee \exists xA$$

$$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall xB$$

Si A no depende de x

$$\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists xB$$

$$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$$

$$\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$$

$$\forall x\forall yA \equiv \forall y\forall xA$$

$$\exists x\exists yA \equiv \exists y\exists xA$$

$$\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$$

$$\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$$

Ejemplo:

Expresiones equivalentes

- Eliminar las negaciones que preceden los cuantificadores de la siguiente expresión

$$\neg \forall z (\exists x P(x, z) \wedge \neg \forall x Q(x, z))$$

Ejemplo:

Distinguir variables por estandarización

- Distintas ocurrencias (dentro de distintos cuantificadores) del mismo nombre de variable se entienden como variables diferentes.
- Por claridad es recomendable utilizar nombres diferentes para cada variable.

Ejemplo:

$$\neg \forall z (\exists x P(x, y, z) \wedge \neg \forall x \exists y Q(x, y, z))$$

Ejemplo

- Simplificar la expresión:

$$\forall x \forall y \exists z (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z))$$

Analizarla por medio de:

- Equivalencias lógicas
- Derivaciones lógicas

Solución

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \exists z (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z)) &\equiv \forall x \forall y \exists z [\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee C(z)] && \text{eq. condicional} \\ &\equiv \forall x \forall y [\exists z \neg(A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] && \text{asociatividad } \exists \\ &\equiv \forall x \forall y [\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] && \text{predicado libre} \\ &\equiv \forall x \forall y [\neg(A(x) \wedge B(y))] \vee \exists z C(z) && \text{distributividad} \\ &\equiv \forall x \neg \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) && \text{d'Morgan} \\ &\equiv \neg \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) && \text{d'Morgan} \\ &\equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z C(z) && \text{eq. condicional}\end{aligned}$$