Ejemplos demostración por inducción matemática

1. Comprobar que $(n+2)!$ es par

Caso base: Para $n=0$, $(n+2)! = 2! = 2 \times 1 = 2$ es par

Hipótesis: Se asume $(n+2)!$ es par

Paso inductivo: Se debe comprobar para $n+1$ que:

$$((n+1)+2)! \text{ sea par}$$

Observamos que

$$(n+1+2)! = ((n+2)+1)!$$

$$= (n+2+1) \times \underbrace{(n+2) \times \ldots \times 2 \times 1}_{(n+2)!}$$

$$= (n+3) \cdot \underbrace{(n+2)!}_{\text{par por hipótesis}}$$

Y siempre que se multiplica un par por un natural el resultado es par.

Por el ppio de inducción matemática se concluye que $\forall n \, \left((n+2)! \text{ es par} \right)$

Inducción matemática fuerte:

Demostrar que todo natural no primo >1 se puede escribir como el producto de primos

Caso base: Cambio de base inductiva

Primer natural no primo >1 es 4.

$4 = 2 \cdot 2$ producto de primos.

Hipotesis inductiva: Se asume que para $n > 1$ no primo, n se puede escribir como producto de primos.

Paso inductivo: Sea $m > n$ un natural no primo.

Si m no es primo, existen al menos dos factores p, q tales que:

$$m = p \cdot q \quad y \quad p, q < m$$

Pueden ocurrir varios casos:

a). p, q son primos, entonces m es producto de primos.

b). p o q o ambos son compuestos.

Tomemos por ejemplo p compuesto.

En ese caso al ser $p < m$ aplica la hipótesis inductiva y se puede escribir:

$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots$ donde $p_1, p_2, \ldots$ son primos.

Similarmente para q:

$q = q_1 \cdot q_2$ con q_i primos

Y por lo tanto $m = p \cdot q = p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot q_1 \cdot q_2 \ldots$ es producto de primos.

Por el ppio de inducción matemática se concluye:

$\forall n$ ($n > 1$ y n no primo $\rightarrow$ n es producto de primos)

Serie aritmética:

$$a+(a+r)+(a+2r)+\ldots+(a+(n-1)r)=\sum_{i=0}^{n-1}(a+r\cdot i)$$

Demostrar:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+r\cdot i)=n\cdot a+r\cdot\frac{n(n-1)}{2} \qquad a, r \text{ constantes}$$

Por inducción matemática se tiene:

Caso base: Para $n=0$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{0-1}(a+r\cdot i)=0$

Sumatoria sin términos

y por el otro lado:

$$0\cdot a+r\cdot\frac{0(0-1)}{2}=0 \qquad \text{cumple}$$

Hipótesis: Se asume para n:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a+r\cdot i)=n\cdot a+r\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

Paso inductivo: Se debe comprobar para $n+1$:

$$\sum_{i=0}^{(n+1)-1}(a+ri)=(n+1)a+r\,\frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

Observemos que:

$$\sum_{i=0}^{(n+1)-1}(a+r\cdot i)=\sum_{i=0}^{n-1}(a+r\cdot i)+(a+r\cdot n)$$

$\downarrow$ por hipótesis

$$=na+r\frac{n(n-1)}{2}+(a+r\cdot n)$$

$$=(n+1)a+r\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)=(n+1)a+r\left(\frac{n(n-1)+2n}{2}\right)$$

$$=(n+1)a+r\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Por el ppio de inducción matemática se concluye:

$$\forall n\left(\sum_{i=0}^{n-1}(a+r\cdot i)=n\cdot a+r\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

Serie geométrica: (con $r \neq 1$)

$$a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \dots + a\cdot r^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a\cdot r^i = a\,\frac{r^n - 1}{r-1}$$

Demostración por inducción matemática:

Caso base: Para $n=0$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{0-1} a\cdot r^i = 0$

suma vacía

Por otro lado, $a\cdot\dfrac{r^0-1}{r-1} = 0$ cumple ✓

Hipótesis: Se asume

$$\sum_{i=0}^{n-1} a\cdot r^i = a\cdot\frac{r^n-1}{r-1}, \quad r\neq 1$$

Paso inductivo: Se debe comprobar que para $n+1$:

$$\sum_{i=0}^{(n+1)-1} a\cdot r^i = a\cdot\frac{r^{n+1}-1}{r-1}, \quad r\neq 1$$

Observemos que

$$\sum_{i=0}^{(n+1)-1} a\cdot r^i = \sum_{i=0}^{n-1} a\cdot r^i + a\cdot r^n$$ utilizando la hipótesis

$$= a\,\frac{r^n-1}{r-1} + ar^n$$

$$= \frac{a\left(r^n - 1 + r^n(r-1)\right)}{r-1} = a\cdot\frac{r^n - 1 + r^{n+1} - r^n}{r-1}$$

$$= a\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \checkmark$$

Se concluye por el principio de inducción matemática que:

$$\forall n \left(\sum_{i=0}^{n-1} a\cdot r^i = a\,\frac{r^n-1}{r-1}\right), \quad r\neq 1$$