Cálculo proposicional

Proposiciones Compuestas

- Atómicas: Solo una variable (P,Q,...) o una constante proposicional (V,F).
- Compuestas: Todas aquellas que contienen al menos un conector lógico
- Ejemplos:

$$P \wedge Q$$
$$(P \vee (\neg Q)) \rightarrow R$$

Uso de paréntesis

Es necesario para evitar ambigüedades en expresiones compuestas

Ejemplo

P = María termina su reportaje

Q = María es feliz

R = María va al cine esta noche

Qué significa la expresión $P \rightarrow Q \wedge R$?

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \text{ ó } (P \rightarrow Q) \wedge R$$

Reglas de Prioridad o Precedencia

- Permiten eliminar la necesidad de incluir todos los paréntesis
- Prioridades:

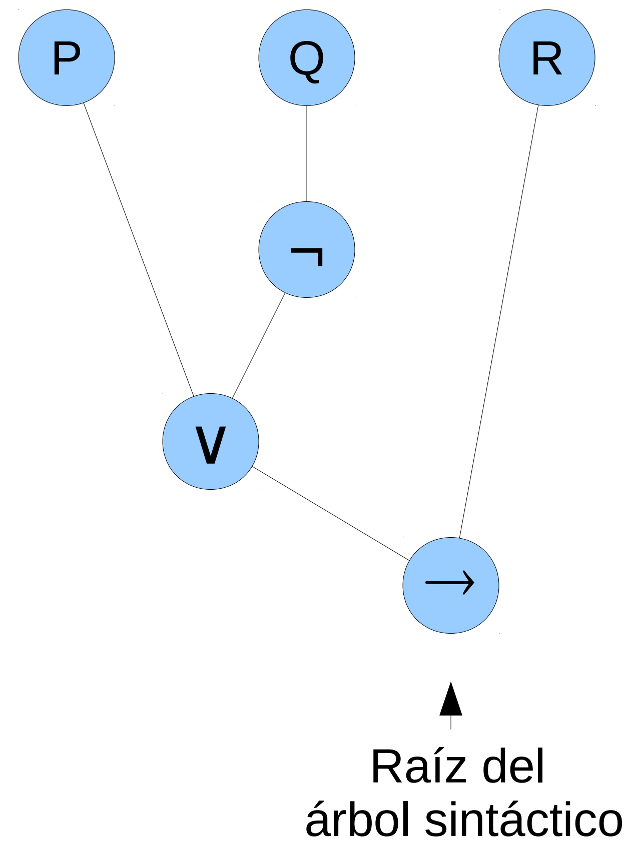
1)	¬
2)	∧
3)	∨
4)	→
5)	↔

- Ejemplos

Árbol sintáctico de una expresión lógica

- Se parte de las variables que componen la expresión.
- Se agregan operadores en el orden de evaluación y se conectan a los elementos sobre los que operan.
- Ejemplo:

$P \vee \neg Q \rightarrow R$



Reglas de asociatividad

- Por la izquierda: El conector a la izquierda tiene prioridad sobre el conector a la derecha
- Por la derecha: El conector a la derecha tiene prioridad sobre el conector a la izquierda

Todos los conectores lógicos binarios son asociativos por la izquierda

Ejemplo:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R$$

debe entenderse como

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

Identificadores y esquemas

- Podemos usar un identificador para referirnos a una expresión lógica
  $A = P \wedge Q$
  $B = P \vee Q$
- Una expresión que contenga identificadores se denomina un esquema, *e.g.*
  $A \rightarrow B$
  equivale a
  $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

Notaciones infija, prefija, postfija

Sea $\circ$ un operador

- Infija: El operador esta entre los operandos

$$A \circ B$$

- Prefija: El operador antecede los operandos

$$\circ \; A \, B$$

- Postfija: El operador sigue a los operados

$$A \, B \; \circ$$

Los operadores lógicos binarios se usan en notación infija. El operador ¬ en notación prefija.

Tautologías y Contradicciones

Tautologías

- Una expresión verdadera para todas las asignaciones de las variables lógicas es una *Tautología.*
- Se usa el símbolo $\models$ para indicar que una expresión es una tautología.

Ejemplos: Comprobar estas tautologías

$$\models P \lor \neg P$$

$$\models (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

Contradicciones

- Una expresión falsa para todas las asignaciones de las variables es una contradicción

Ejemplo: Comprobar la contradicción

$$P \wedge \neg P$$

Contingencia/Casualidad/ Eventualidad

- Una expresión lógica que no es ni una tautología ni una contradicción.

Implicaciones y Equivalencias Lógicas

Implicación y Equivalencia Lógica

Sean A, B dos expresiones lógicas.

- Si $A \to B$ es una tautología, entonces se dice que A implica lógicamente a B y se representa $A \Rightarrow B$
- Si A y B tienen siempre el mismo valor de verdad, se dice que son lógicamente equivalentes. Se escribe $A \equiv B$ si y solo si $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Ejemplos de equivalencias lógicas

Consideremos el siguiente ejemplo:

- El programa es correcto y está documentado
- El programa está documentado y es correcto

Observar que se trata de dos proposiciones de la forma

$$P \wedge Q \text{ y } Q \wedge P$$

- Si enumeramos los valores de verdad de ambas, son los mismos, por lo tanto son equivalentes:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

Demostración de equivalencias: 1. Tablas de verdad

Ejemplos:

Ley de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Contrarecíprocos

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

Ejemplos adicionales

Eliminación del condicional

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q$$

Eliminación del bicondicional

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$$

Demostración de equivalencias
2. Álgebra declarativa

Se parte de unas “leyes” – Equivalencias ya demostradas – y se transforma una expresión lógica en otra.

Leyes esenciales del álgebra declarativa

Ley del medio excluido	$P \lor \neg P \equiv V$
Ley de contradicción	$P \land \neg P \equiv F$
Leyes de identidad	$P \lor F \equiv P$
	$P \land V \equiv P$
Leyes de dominación	$P \lor V \equiv V$
	$P \land F \equiv F$
Leyes de idempotencia	$P \lor P \equiv P$
	$P \land P \equiv P$
Ley de la doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$
Leyes conmutativas	$P \lor Q \equiv Q \lor P$
	$P \land Q \equiv Q \land P$
Leyes asociativas	$(P \lor Q) \lor R \equiv P \lor (Q \lor R)$
	$(P \land Q) \land R \equiv P \land (Q \land R)$
Leyes distributivas	$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$
	$P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)$
Leyes de De Morgan	$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$
	$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$

Ejemplos

Leyes de Absorción

$$P \lor (P \land Q) \equiv P$$

$$P \land (P \lor Q) \equiv P$$

Demostrar

$$\neg((\neg P \land Q) \lor P) \equiv \neg(P \lor Q)$$

Formas normales

- **Forma normal disyuntiva**: La expresión lógica esta escrita como una disyunción de términos, todos los cuales son conjunciones de literales.

- **Forma normal conjuntiva**: La expresión lógica está escrita como una conjunción de términos, los cuales son disyunciones de literales.

- Un **literal** es una expresión de la forma P ó ¬P.

Ejemplo

Transformar a la forma normal disyuntiva la expresión

$$\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$$

Tablas de verdad y formas normales

Dada la tabla de verdad, es posible encontrar la expresión en forma normal disyuntiva así:

- Se hace una conjunción por cada fila verdadera de la tabla de verdad. Estas conjunciones se denominan minitérminos
- La función implícita es la disyunción de todos los minitérminos.
- Opcionalmente, simplificar la expresión final.

Ejemplo

Complementación y formas normales

El complemento de una expresión compleja se puede encontrar así:

- Forma dual: Reemplazar AND por OR y viceversa.
- Reemplazar todos los literales por sus complementos.

Ejemplos:

- Leyes de De Morgan
- Forma normal disyuntiva se transforma fácilmente en la forma normal conjuntiva

Ejemplo: Operación O-exclusiva

- Por la equivalencia del bicondicional tenemos la FND:

$$P\leftrightarrow Q \equiv (\neg P\wedge\neg Q) \vee (P\wedge Q)$$

- Y por dualidad su complemento es

$$\neg(P\leftrightarrow Q) \equiv (P\vee Q) \wedge (\neg P\vee\neg Q)$$

- Esta operación se conoce como la o-exclusiva y se simboliza

$$\neg(P\leftrightarrow Q) \equiv P\oplus Q$$

Diferencias en notación

	[GT96]	Otros autores
Condicional	$\Rightarrow$	$\rightarrow$
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Implicación lógica	$\Rrightarrow$	$\Rightarrow$
Equivalencia lógica	$\equiv$	$\Leftrightarrow$

Referencias

- Grassman y Tremblay. Cap 1
- Grimaldi. Secciones 2.1 – 2.3
- Stein et al. Sección 3.1