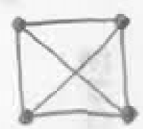
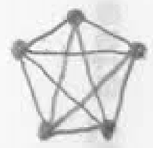
Ejemplo: Máximo de aristas en un Grafo

$n=1$  $a=0$

$n=2$  $a=1$

$n=3$  $a=3$

$n=4$  $a=6$

$n=5$  $a=4+3+2+1$

$a=10$

n general: $a = 1+2+3+\ldots+(n-1)$

$\downarrow$

Serie aritmética con valor inicial $=1$, incremento $=1$

$$a = \sum_{i=0}^{n-2} (1+1\cdot i)$$

Solución de acuerdo a la fórmula general:

$$a = \sum_{i=0}^{n-2} (1+1\cdot i) = (n-1)\cdot 1 + 1\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= (n-1)\left[1 + \frac{n-2}{2}\right] = (n-1)\left[\frac{\cancel{2}+n-\cancel{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

coincide con todos los casos de prueba

Comprobar $2^{2n}-1 \mid 3$

Caso base: $n=0$ $\quad 2^{2\cdot 0}-1 = 2^0-1 = 0$ y 0 es divisible por 3 ✓

Hipótesis: Se asume $2^{2n}-1 \mid 3$

Paso inductivo: Se debe comprobar para $n+1$

$$2^{2(n+1)}-1 = 2^{2n+2}-1 = \underbrace{2^{2n}\cdot 2^2-1}_{\text{Aquí no se puede usar directa la hipótesis}} \quad (*)$$

Observemos:

$$-1 = 3-4 = 3-2^2$$

Reemplazando en $(*)$:

$$2^{2n}\cdot 2^2-1 = 2^{2n}\cdot 2^2-2^2+3 = \underbrace{2^2\left(2^{2n}-1\right)}_{\text{por hipótesis es divisible por 3}} + \underbrace{3}_{\text{divisible por 3}}$$

El resultado es divisible por tres.

Por el principio de inducción matemática se concluye que $\forall n\left(2^{2n}-1 \mid 3\right)$

Comprobar $a^{2n}-b^{2n} \mid a+b$

Caso base: Para $n=0$, $a^{2\cdot 0}-b^{2\cdot 0} \mid a+b$?

$a^{2\cdot 0}-b^{2\cdot 0} = 1-1=0$ y $0 \mid a+b$ ✓

Hipótesis inductiva: Se asume $a^{2n}-b^{2n} \mid a+b$.

Paso inductivo: Comprobar para $n+1$:

$$a^{2(n+1)}-b^{2(n+1)} = \underbrace{\left(a^{2n}-b^{2n}\right)}_{\text{la misma expresión para } n}\left(a^2+b^2\right) - a^2b^2\underbrace{\left(a^{2(n-1)}-b^{2(n-1)}\right)}_{\text{la misma expresión para } n-1.}$$

Por el principio de inducción matemática fuerte, la expresión para n y la expresion para $(n-1)$ son divisibles por $(a+b)$.

Se concluye que toda la expresión es divisible por $(a+b)$.

Comprobar la recurrencia: $Q_0 = 1$

$$Q_n = 3Q_{n-1} + 4n$$

Su solución general $Q_n = 4 \cdot 3^n - 3 - 2n$

Caso base:

n	Q_n	$4 \cdot 3^n - 3 - 2n$
0	1	$4 \cdot 3^0 - 3 - 2 \cdot 0 = 1$ ✓ cumple
1	$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$	$4 \cdot 3^1 - 3 - 2 \cdot 1 = 7$ ✓ cumple

Hipótesis: Se asume $Q_n = 3Q_{n-1} + 4n$

Paso inductivo: Se debe comprobar para $n+1$

$$Q_{n+1} = 3 \cdot Q_n + 4(n+1)$$

por hipótesis

$$= 3(4 \cdot 3^n - 3 - 2n) + 4(n+1)$$

$$= 4 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3n + 4n + 4$$

$$= 4 \cdot 3^{n+1} - 9 - 6n + 4n + 4$$

$$= 4 \cdot 3^{n+1} - 5 - 2n$$

$$= 4 \cdot 3^{n+1} - 3 - 2n - 2$$

$$= 4 \cdot 3^{n+1} - 3 - 2(n+1)$$

Con lo que se concluye que en general $Q_n = 4 \cdot 3^n - 3 - 2n$

Comprobar la fórmula de Binet: $F_n = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$

Caso base: $F_0 = \dfrac{\phi^0 - (-\phi)^{-0}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$ ✓ cumple

Hipótesis: Se asume $F_n = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$

Paso inductivo: Se debe comprobar para $n+1$:

Por definición:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Longleftarrow \text{Por hipótesis inductiva fuerte}$$

$$= \left(\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\phi^{n-1} - (-\phi)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{\phi^n + \phi^{n-1} - (-\phi)^{-n} - (-\phi)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} \quad (*)$$

Desarrollando algunos términos por separado:

$$\phi^n + \phi^{n-1} = \phi^{n+1}\left(\phi^{-1} + \phi^{-2}\right) = \phi^{n+1}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}\right) = \phi^{n+1}\left(\frac{2(1+\sqrt{5})+4}{(1+\sqrt{5})^2}\right)$$

$$= \phi^{n+1}\left(\frac{2+2\sqrt{5}+4}{1+2\sqrt{5}+5}\right) = \phi^{n+1}$$

$$(-\phi)^{-n} + (-\phi)^{-(n-1)} = (-\phi)^{-(n+1)}\left((-\phi)^1 + (-\phi)^2\right) = (-\phi)^{-(n+1)}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$$

$$= (-\phi)^{-(n+1)}\left(\frac{(-1-\sqrt{5})\cdot 2 + (1+\sqrt{5})^2}{4}\right) = (-\phi)^{-(n+1)}\left(\frac{-2-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$= (-\phi)^{-(n+1)}$$

Reemplazando en (*) se obtiene:

$$F_{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - (-\phi)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}$$

Con lo que se concluye por el ppio de ind. mat. fuerte que la fórmula de Binet es válida para todo n.