Validez de Expresiones Lógicas en el Cálculo de Predicados

Validez de expresiones lógicas

- A diferencia del cálculo proposicional, demostrar la validez de una expresión de 1er orden no siempre es posible. Es un problema ***indecidible***.
- Por el contrario, para demostrar que una expresión no es válida, basta encontrar un contraejemplo; es decir, un modelo que haga ¬A verdadera.

Ejemplo

- Demostrar que esta expresión no es válida:

$$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$$

Otro ejemplo

- Considere la expresión

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

Este ejemplo ilustra que, dada una expresión válida

$$\forall x A \rightarrow S_y^x A$$

la particularización de variables ligadas puede llevar a expresiones no válidas

Demostración de validez

- No existe una técnica general.
- Una forma es transformar la expresión en una tautología.
- Otra forma comúnmente usada es el hecho que si A solo puede ser válida si ¬A es contradictoria.

Ejemplo

Considere la expresión

$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

Recordemos que

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

y su negación es

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Derivaciones: Particularización Universal (UI)

- Si la expresión ∀xP(x) es verdadera, entonces para P(t) es verdadera para cualquier término *t*.

$$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$$

- Nota: El término *t* no debe estar lígado en ningún otro cuantificador.
- La regla de inferencia correspondiente es:

$$\frac{\forall x A}{S_t^x A}$$

Ejemplo: Particularización Universal

- Todo ser humano es mortal: $\forall x M(x)$
- Juan es ser humano
- Juan es mortal : M(Juan)

Generalización Universal (GU)

- Sea A una expresión y *x* una variable que *no aparece libre en ninguna premisa*. Entonces

$$\frac{A}{\forall x A}$$

- Observar que es permitido que x aparezca ligada, o que no aparezca dentro de A.

Variables libres y variables verdaderas

- Ya hemos distinguido entre variables ligadas (por un un cuantificador) y variables libres.
- Las variables libres que aparecen en las premisas se denominan ***variables fijas***: Identifican un individuo del dominio a lo largo de toda una derivación.
- Se definen además las ***variables verdaderas*** (que también son libres), como variables que aparecen en las premisas, pero que no son fijas. Variables libres en expresiones válidas son variables verdaderas. Para cualquier particularización, la expresión siempre es V.
- *Solo se pueden generalizar universalmente las variables verdaderas*.
- Variables libres en las premisas se suponen fijas a menos que explícitamente se indique lo contrario.

Ejemplo GU

- Ejemplo:
  P(x) : x estudia ing. Sel
  Q(x) : x le gusta la programación
- Demostrar

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

Teorema de la Deducción y la GU

Teorema de la deducción

- Se supone B
- Se demuestra C empleando B como premisa
- Se prescinde de B y se concluye $B \rightarrow C$

Y que pasa si B contiene una variable *x* como variable libre?

- Se lleva normalmente (sin generalizar) durante la deducción
- Una vez se prescinde de B, y si x no aparece libre en ninguna otra parte (o es una variable verdadera), se puede generalizar.

Ejemplo

Sean

- S(x) : x ha estudiado
- P(x) : x ha aprobado

La premisa es que todo el que ha estudiado ha aprobado:

$$\forall x (S(x) \to P(x))$$

Demostrar que los que no aprobaron es porque no estudiaron:

$$\forall x (\neg P(x) \to \neg S(x))$$

Omisión de cuantificadores universales

- Es muy común omitir los cuantificadores, por ejemplo: x+y=y+x, la propiedad conmutativa es para todos los reales x,y.
- En el cálculo de predicados, toda variable libre es fija: Se supone que corresponde a un único individuo a lo largo de la demostración.
- Llamamos a las variables no fijas *variables verdaderas*.
- Una variable se puede generalizar universalmente si y solo si es una variable verdadera.

Ejemplo

- Sea $P(x,y,z)$: $x+y=z$
- Dadas las premisas:

$$P(x,0,x) \text{ y } P(x,y,z) \rightarrow P(y,x,z)$$

demostrar $P(0,x,x)$.

x,y,z son variables verdaderas.

Unificación

- Se dice que dos expresiones se unifican si existen particularizaciones de las variables libres que hagan idénticas las expresiones en cuestión.
- El acto de unificarlas se llama *unificación*.
- La particularización que las unifica se llama *unificador*.

Ejemplo

Sean:

- Q(a,y,z) y Q(y,b,c) aparecen en líneas diferentes.
- a,b,c son variables fijas
- y,z son variables verdaderas

Determinar si las dos expresiones se unifican y dar un unificador.

Nota: Variables en distintas expresiones, son distintas variables (nombres pueden colisionar).

Ejercicios

- Determinar si unifican:

$$Q(x,y,y) \text{ y } Q(y,y,c)$$

$$Q(x,a,x) \text{ y } Q(y,y,c)$$

El unificador puede no ser único

Ejemplo:

- a,b,c constantes, las demás son variables verdaderas.
- Unificar R(a,x) y R(y,z).

"Siempre se prefiere el unificador más general"

Ejercicio

- Encontrar el unificador más general entre

$$P(x,y,x) \text{ y } P(y,z,a)$$

Ejemplo de uso de la unificación

Se tienen

- Los predicados: madre(X,Y), hermana(X,Y) y tia(X,Y)
- Las premisas:
  - madre(*juana*, *braulio*),
  - hermana(*juana*, *lola*) y
  - $\text{madre}(X,Y) \wedge \text{hermana}(X,Z) \rightarrow \text{tia}(Z,Y)$

Demostrar que *lola* es tía de *braulio*.

Generalización Existencial

- Si existe un individuo t para el cual es válido el predicado P(t), entonces se puede concluir que ∃xP(x).
- Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia

$$\frac{S_t^x A}{\exists x A}$$

Ejemplo

Demostrar

$$\neg\exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$$

Solución

1)	$\neg\exists x P(x)$	Premisa
2)	$P(x)$	Supuesto TD, x var. verdadera
3)	$\exists x P(x)$	Generalizacion existencial
4)	$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$	Teorema de la deduccion
5)	$\neg P(x)$	Modus tollens
6)	$\forall x \neg P(x)$	Generalizacion universal

Particularización existencial

- Si es cierto que ∃xA, entonces tiene que haber un término t que satisface A.
- Para indicar el individuo (cuando no se sabe el nombre específico) se puede utilizar una variable fija.
- Esto da lugar a la regla de inferencia

$$\frac{\exists x A}{S_b^x A}$$

Variables resultado de particularizaciones universal y existencial

- La variable resultado de una particularización universal es una *variable verdadera*, por lo tanto <u>se puede generalizar universalmente</u>.
- La variable resultado de una particularización existencial es una *variable fija*, por lo que <u>solo se puede generalizar existencialmente</u>.

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

Solución

1)	$\exists x \neg P(x)$	Premisa
2)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	Premisa
3)	$\neg P(t)$	Particularizacion existencial, t var. fija
4)	$P(x) \vee Q(x)$	Particularizacion universal, x var. verdadera
5)	$P(t) \vee Q(t)$	Particularizando x por t, unificando P(t) y P(x)
6)	$Q(t)$	Silogismo disyuntivo
7)	$\exists x Q(x)$	Generalizacion existencial

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \exists x \left(P(x) \vee Q(x)\right) \nvdash \exists x Q(x)$$

Equivalencias Lógicas

- Igual a como hicimos con el cálculo de proposiciones, es posible utilizar equivalencias lógicas para demostrar una expresión en el cálculo de predicados.

Equivalencias Básicas

$\forall xA \equiv A$ $\exists xA \equiv A$	Si A no depende de x
$\forall xA \equiv \forall y S_y^x A$ $\exists xA \equiv \exists y S_y^x A$	Si y no es libre en A
$\forall xA \equiv S_t^x A \wedge \forall xA$ $\exists xA \equiv S_t^x A \vee \exists xA$	para cualquier término t
$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall xB$ $\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists xB$	Si A no depende de x
$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$ $\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$	
$\forall x \forall yA \equiv \forall y \forall xA$ $\exists x \exists yA \equiv \exists y \exists xA$	
$\neg \exists xA \equiv \forall x \neg A$ $\neg \forall xA \equiv \exists x \neg A$	

Ejemplo: Expresiones equivalentes

- Eliminar las negaciones que preceden los cuantificadores de la siguiente expresión

$$\neg\forall z(\exists x P(x,z) \wedge \neg\forall x Q(x,z))$$

Ejemplo:
Distinguir variables por estandarización

- Distintas ocurrencias (dentro de distintos cuantificadores) del mismo nombre de variable se entienden como variables diferentes.
- Por claridad es recomendable utilizar nombres diferentes para cada variable.

Ejemplo:

$$\neg\forall z(\exists x P(x, y, z) \wedge \neg\forall x \exists y Q(x, y, z))$$

Ejemplo

- Simplificar la expresión:

$$\forall x \forall y \exists z\, (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z))$$

Analizarla por medio de:
- Equivalencias lógicas
- Derivaciones lógicas

Solución

$$
\begin{array}{rcll}
\forall x \forall y \exists z (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z)) & \equiv & \forall x \forall y \exists z [\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee C(z)] & \text{eq. condicional} \\
& \equiv & \forall x \forall y [\exists z \neg(A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] & \text{asociatividad } \exists \\
& \equiv & \forall x \forall y [\neg(A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] & \text{predicado libre} \\
& \equiv & \forall x \forall y [\neg(A(x) \wedge B(y))] \vee \exists z C(z) & \text{distributividad} \\
& \equiv & \forall x \neg \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) & \text{d'Morgan} \\
& \equiv & \neg \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) & \text{d'Morgan} \\
& \equiv & \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z C(z) & \text{eq. condicional}
\end{array}
$$