Cálculo proposicional

Proposiciones Compuestas

- Atómicas: Solo una variable (P,Q,...) o una constante proposicional (V,F).
- Compuestas: Todas aquellas que contienen al menos un conector lógico
- Ejemplos:

$$P \wedge Q$$

$$(P \vee (\neg Q)) \rightarrow R$$

Uso de paréntesis

Es necesario para evitar ambigüedades en expresiones compuestas

Ejemplo

P : María termina su reportaje
Q : María es feliz
R : María va al cine esta noche

Qué significa la expresión $P \to Q \wedge R$?

$$P \to (Q \wedge R) \text{ ó}$$

$$(P \to Q) \wedge R$$

El valor de la expresión cambia en ambos casos.

Reglas de Prioridad o Precedencia

- Permiten eliminar la necesidad de incluir todos los paréntesis
- Prioridades:

1)	$\neg$
2)	$\wedge$
3)	$\vee$
4)	$\rightarrow$
5)	$\leftrightarrow$

Ejemplos

- Eliminar paréntesis redundantes de la expresión lógica:

$$\neg((\neg P)\vee(Q\wedge R))\rightarrow((P\wedge Q)\rightarrow(Q\vee R))$$

- Hacer explícitos todos los paréntesis en la expresión:

$$P\vee\neg R\rightarrow Q\wedge R\rightarrow\neg P$$

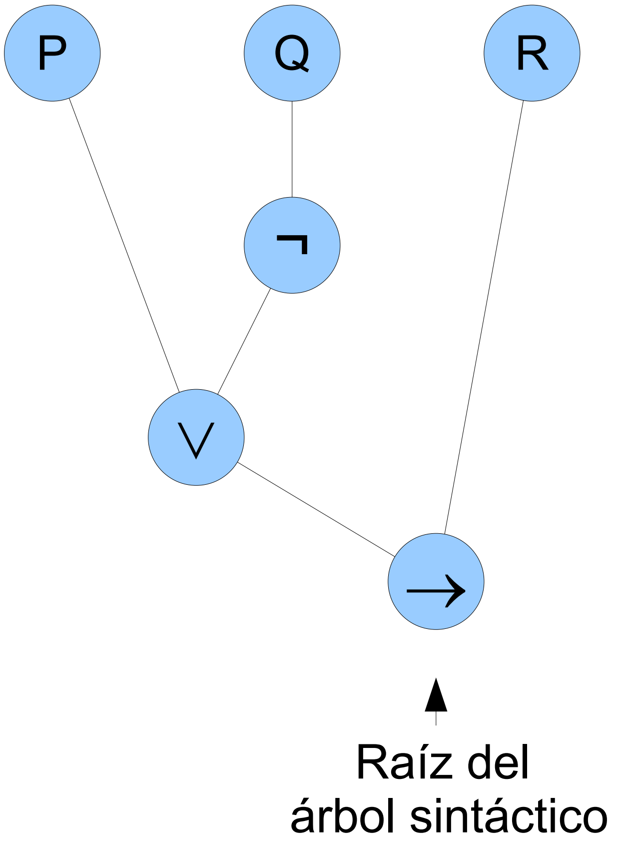
$\vee\neg\wedge\rightarrow\leftrightarrow$

Árbol sintáctico de una expresión lógica

- Se parte de las variables que componen la expresión.
- Se agregan operadores en el orden de evaluación y se conectan a los elementos sobre los que operan.

- Ejemplo:

$P \lor \neg Q \rightarrow R$



Reglas de asociatividad

- Por la izquierda: El conector a la izquierda tiene prioridad sobre el conector a la derecha
- Por la derecha: El conector a la derecha tiene prioridad sobre el conector a la izquierda

Todos los conectores lógicos binarios son asociativos por la izquierda

Ejemplo:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R$$

debe entenderse como

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

Ejemplo: Asociatividad por la derecha

- En lógica, aritmética y programación la mayoría de los operadores son asociativos por la izquierda.
- Algunas excepciones comunes en programación (Python):

Asignación

```
>>> a=b=1
>>> a
1
>>> b
1
>>>
```

Exponenciación

```
>>> 4**(2**3)
65536
>>> 4**2**3
65536
>>> (4**2)**3
4096
>>>
```

Identificadores y esquemas

- Podemos usar un identificador para referirnos a una expresión lógica
  $A = P \wedge Q$
  $B = P \vee Q$
- Una expresión que contenga identificadores se denomina un esquema, *e.g.*
  $A \rightarrow B$
  equivale a
  $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

Notaciones infija, prefija, postfija

Sea $\circ$ un operador

- Infija: El operador está entre los operandos

$$A \circ B$$

- Prefija: El operador antecede los operandos

$$\circ \; A \, B$$

- Postfija: El operador sigue a los operados

$$A \, B \; \circ$$

Los operadores lógicos binarios se usan en notación infija. El operador ¬ en notación prefija.

Tautologías y Contradicciones

Tautologías

- Una expresión verdadera para todas las asignaciones de las variables lógicas es una *Tautología.*
- Se usa el símbolo $\models$ para indicar que una expresión es una tautología.
- Ejemplo

$$\models P \vee \neg P$$

Ejercicios Tautologías

- Comprobar estas tautologías

$\models (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

$\models (P \wedge Q) \rightarrow P$

$\models P \rightarrow P \vee Q$

$\models (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$

$\models P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$

Contradicciones

- Una expresión falsa para todas las asignaciones de las variables es una contradicción
- Ejemplo

$$P \wedge \neg P$$

Ejercicios contradicciones

Comprobar las contradicciones:

- $P \leftrightarrow \neg P$
- $(P \wedge Q) \wedge \neg Q$
- $\neg P \wedge \neg(P \rightarrow Q \wedge R)$

Contingencia/Casualidad/ Eventualidad

- Una expresión lógica que no es ni una tautología, ni una contradicción.

  Ejemplos:

$$P \land Q$$

$$P \lor Q$$

$$P \to Q$$

Ejercicios contingencias

Comprobar que las siguientes expresiones son contingencias:

- $P \wedge (Q \vee R)$
- $P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$
- $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg R$

Implicaciones y Equivalencias Lógicas

Implicación y Equivalencia Lógica

Sean A, B dos expresiones lógicas.

- Si $A \rightarrow B$ es una tautología, entonces se dice que A implica lógicamente a B y se representa $A \Rightarrow B$
- Si A y B tienen siempre el mismo valor de verdad, se dice que son lógicamente equivalentes. Se escribe $A \equiv B$ si y solo si $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Ejemplos de equivalencias lógicas

Consideremos el siguiente ejemplo:

- El programa es correcto y está documentado
- El programa está documentado y es correcto

Observar que se trata de dos proposiciones de la forma

$$P \wedge Q \text{ y } Q \wedge P$$

- Si enumeramos los valores de verdad de ambas, son los mismos, por lo tanto son equivalentes:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

Demostración de equivalencias: 1. Tablas de verdad

Ejemplos:

Ley de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Contrarecíprocos

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

Ejemplos adicionales

Eliminación del condicional

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

Eliminación del bicondicional

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Demostración de equivalencias
2. Álgebra declarativa

Se parte de unas “leyes” – Equivalencias ya demostradas – y se transforma una expresión lógica en otra.

Leyes esenciales del álgebra declarativa

Ley del medio excluido	$P \vee \neg P \equiv V$
Ley de contradicción	$P \wedge \neg P \equiv F$
Leyes de identidad	$P \vee F \equiv P$
	$P \wedge V \equiv P$
Leyes de dominación	$P \vee V \equiv V$
	$P \wedge F \equiv F$
Leyes de idempotencia	$P \vee P \equiv P$
	$P \wedge P \equiv P$
Ley de la doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$
Leyes conmutativas	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Leyes asociativas	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Leyes distributivas	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Leyes de De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Ejemplos

Leyes de Absorción

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$P \vee (\neg P \wedge Q) \equiv P \vee Q$$

Demostrar

$$\neg((\neg P \wedge Q) \vee P) \equiv \neg(P \vee Q)$$

Ejemplos

Comprobar las equivalencias

$$\neg(P \land Q \land R) \equiv \neg P \lor \neg Q \lor \neg R$$

$$P \lor Q \rightarrow P \land Q \equiv P \leftrightarrow Q$$

Ejemplos

Simplificar las expresiones

$$P \vee R \rightarrow P \wedge \neg R$$

$$(P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow P$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

Formas normales

- **Forma normal disyuntiva**: La expresión lógica esta escrita como una disyunción de términos, todos los cuales son conjunciones de literales.

- **Forma normal conjuntiva**: La expresión lógica está escrita como una conjunción de términos, los cuales son disyunciones de literales.

- Un **literal** es una expresión de la forma P ó ¬P.

Ejemplo

Transformar a la forma normal disyuntiva la expresión

$$\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$$

Tablas de verdad y formas normales

Dada la tabla de verdad, es posible encontrar la expresión en forma normal disyuntiva así:

- Se hace una conjunción por cada fila verdadera de la tabla de verdad. Estas conjunciones se denominan minitérminos
- La función implícita es la disyunción de todos los minitérminos.
- Opcionalmente, simplificar la expresión final.

Ejemplo

Complementación y formas normales

El complemento de una expresión compleja se puede encontrar así:

- Forma dual: Reemplazar AND por OR y viceversa.
- Reemplazar todos los literales por sus complementos.

Ejemplos:

- Leyes de De Morgan
- Forma normal disyuntiva se transforma fácilmente en la forma normal conjuntiva

Ejemplo: Operación O-exclusiva

- Por la equivalencia del bicondicional tenemos la FND:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

- Y por dualidad su complemento es

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

- Esta operación se conoce como la o-exclusiva y se simboliza

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \oplus Q$$

Ejemplo

- Comprobar

$$P \leftrightarrow \neg Q \equiv \neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \oplus Q$$

Diferencias en notación

	[GT96]	Otros autores
Condicional	$\Rightarrow$	$\rightarrow$
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Implicación lógica	$\Rrightarrow$	$\Rightarrow$
Equivalencia lógica	$\equiv$	$\Leftrightarrow$

Referencias

- Grassman y Tremblay. Cap 1
- Grimaldi. Secciones 2.1 – 2.3
- Stein et al. Sección 3.1