

# Cálculo de Predicados

# Noción de predicados

- Muchas proposiciones lógicas involucran sujetos u objetos y que afectan el valor de verdad de la proposición.
- Ejemplo:

Ana y Maria son hermanas : V

Pedro y Juan son hermanos : F

- Llamamos ***predicado*** a la propiedad que se está considerando, e.g.
  - Ser hermanos
  - Ser número primo
- A los sujetos u objetos los llamamos ***términos***.

# Cuantificadores

El cálculo de predicados permite también el uso de cuantificadores para referirse a colecciones de objetos. Son 2 cuantificadores:

- Universal

Todos los gatos tienen cola

- Existencial

Existen números primos

# Elementos sintácticos del cálculo de predicados

- Incluye todos los del cálculo de proposiciones: Constantes, Variable proposicionales, Conectores lógicos
- Además tiene los términos, predicados y cuantificadores.
- El ***Universo del Discurso*** o ***Dominio*** es el conjunto de individuos considerados bajo un cierto contexto.
- A cada individuo se le identifica por una constante única.

# Ejemplos de predicados

Predicado	Dominio
Es de color azul	Objetos
Es número par	Los números enteros
Es buen estudiante	Estudiantes del grupo
Tiene sabor a menta	Alimentos
Es cuadrúpedo	Animales
Es número primo	Los números naturales

# Predicados

Un predicado como por ejemplo

María es la madre de Juan

se puede escribir

$$M(m,j)$$

donde el símbolo  $M$  es el predicado “es madre de”. Las constantes  $m,j$  representan los individuos considerados.

Observar que el orden de los argumentos es importante.

# Predicados

- El número de argumentos se denomina la ***aridad*** del predicado.
- Los valores de verdad de predicados binarios se pueden dar en una tabla: filas son el 1<sup>er</sup> argumento y columnas el 2<sup>o</sup>.

Ejemplo:

El predicado mayor que '>'

# Fórmulas atómicas y compuestas

- Un predicado seguido por su lista de argumentos es una **fórmula atómica**. *E.g.*

madre(María, Juana)

- Las fórmulas se pueden combinar mediante conectores lógicos. *E.g.*

madre(María, Juana)  $\rightarrow$   $\neg$ madre(Juana, María)

gato(Scratchy)  $\rightarrow$  tieneCola(Scratchy)



# Variables y Particularizaciones

- Muchas veces es deseable no particularizar el individuo. En ese caso se puede indicar mediante una variable, e.g.  $x, y, z$ .

Ejemplos:

$$\text{gato}(x) \rightarrow \text{tieneCola}(x)$$

$$\text{madre}(x, y) \rightarrow \neg \text{madre}(y, x)$$

- Así mismo, podemos dar un nombre a la expresión, e.g.

$$A = \text{gato}(x) \rightarrow \text{tieneCola}(x)$$

# Particularización

- Las variables pueden sustituirse por elementos del universo de discurso.
- Para indicar que la variable  $x$  se reemplaza por 'Scratchy' se utiliza la siguiente notación

$$S_{Scratchy}^x A$$

lo cual produce

$\text{gato(Scratchy)} \rightarrow \text{tieneCola(Scratchy)}$

# Ejemplo: Particularizaciones

- Solo se reemplazan las ocurrencias de la variable particularizada

$$S_a^x (P(a) \rightarrow Q(x)) = P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$S_a^y P(x) = P(x)$$

# Cuantificador Universal

- Con frecuencia se tienen predicados que aplican a todos los individuos de un dominio.
- Esto se indica mediante el cuantificador universal

$$\forall xA$$

$\forall$  se lee “para todo”

$A$  se denomina el ámbito o alcance

La variable  $x$  está ligada por el cuantificador (una variable no ligada está libre).

# Ejemplos: Cuantificador universal

- La suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados

$$\forall x (SumaAngulosInternos(x) = 180)$$

- Si la sintaxis del programa es correcta, el programa compila

$$\forall p (SintaxisCorrecta(p) \rightarrow Compila(p))$$

# Cuantificador Existencial

- Nos permite indicar que el predicado es verdadero para al menos un elemento del dominio.
- Esto se indica así

$$\exists xA$$

y se lee “Existe al menos un  $x$  tal que  $A$ ”

# Ejemplos: Cuantificador existencial

- Algunos gatos no comen ratones

$$\exists g \neg \text{ComeRatones}(g)$$

- Existen programas que compilan pero no son correctos

$$\exists p (\text{Compila}(p) \wedge \neg \text{Correcto}(p))$$

# Algunos ejercicios

- Nadie es perfecto
- Toda persona tiene una madre
- Para todo persona existe alguien que es su madre
- Todos los perros son mamíferos
- Perro que ladra no muerde
- Camarón que se duerme se lo lleva la corriente



# Más ejemplos

- Un natural  $n$  es primo si no es divisible por naturales distintos a sí mismo y a la unidad.
- **Fermat**: Para  $n > 2$  no existen  $x, y, z$  naturales tales que  $x^n + y^n = z^n$ .
- **Goldbach**: Todo  $n > 2$  par se puede escribir como la suma de dos primos:  $n = p + q$ .

# Expresiones

- Definición de primos

$$P(n) \leftrightarrow \neg \exists x (x \neq 1 \wedge x \neq n \wedge D(n, x))$$

- Teorema de Fermat

$$\forall n (n > 2 \rightarrow \neg \exists x \exists y \exists z (x^n + y^n = z^n))$$

# Variables libres y ligadas

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge \exists yR(y)$$

la variable  $y$  es libre en el ámbito del “para todo”, pero está ligada en el ámbito del “existe”.

Al hacer una sustitución, debe tenerse cuidado de no afectar variables ligadas y prevenir colisiones de nombres, por ejemplo

$$\begin{aligned} S_z^y (\forall x(P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge \exists yR(y)) \\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(z)) \wedge \exists yR(y) \end{aligned}$$

# Interpretación y Validez

Para poder determinar la verdad o falsedad de una expresión en cálculo de predicados es necesario tener:

- El universo del discurso claramente definido,
- una constante única asignada a cada término del universo del discurso,
- un término del universo del discurso asignado a cada variable libre, y
- El valor de verdad definido para cada predicado en la expresión.

# Interpretación de los cuantificadores

- Dado un universo de discurso  $\{a_1, \dots, a_n\}$  y un predicado  $P(x)$ , la interpretación de  $\forall x P(x)$  es

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

- De forma similar, el cuantificador existencial se interpreta de la siguiente forma

$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

# Ejemplos

- Comprobar que:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

# Determinar el valor de verdad de una expresión. Ejemplo:

- Escribir la expresión: “Existe alguien que admira a todo el mundo”. Utilicé  $Q(x,y)$  para indicar el predicado “ $x$  admira a  $y$ ”. El universo del discurso son  $a,b,c$ ; y el valor del predicado  $Q(x,y)$  está dado por

$Q(x,y)$	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
<b>a</b>	F	V	V
<b>b</b>	V	F	F
<b>c</b>	F	V	V

$$\exists x \forall y Q(x, y)$$

# Ejemplo

- Para el predicado  $Q(x,y)$  indicar en palabras las expresiones:

$$\forall y \exists x Q(x, y)$$

$$\forall x \forall y Q(x, y)$$

$$\exists x \exists y Q(x, y)$$

- Calcular el valor de verdad de cada expresión



# Predicados libres

- Sea el predicado  $R$ ="Tiene frío" y el universo del discurso son los individuos {Juan, María, Pedro, Laura}.
- Como se interpretan las expresiones:

$$\forall x R(y)$$

$$\exists x R(z)$$

# Interpretación de una expresión lógica

- Cuando en una expresión lógica aparecen variables libres, normalmente no es posible determinar su valor de verdad sino se particularizan estas variables.
- Una asignación particular de las variables libres en una expresión se llama una **interpretación**.
- Una expresión sin variables libres tiene una única interpretación. Cuando hay variables libres existen múltiples interpretaciones.

# Validez

- Una expresión es **válida** si es verdadera en todas las interpretaciones.
- Si  $A$  es una expresión válida, esto se indica de la siguiente forma

$$\models A$$

- Una interpretación de  $A$  que haga  $A$  verdadera, se llama un *modelo*.
- Si no existe ningún modelo de  $A$ , se dice que  $A$  es contradictoria.

# Implicación y Equivalencia

- Sean A y B dos expresiones.
- A es equivalente a B si  $A \leftrightarrow B$  es válida.  
Expresiones equivalentes se representan  $A \equiv B$ .
- A implica a B si  $A \rightarrow B$  es válida. La implicación lógica se representa  $A \Rightarrow B$

# Derivaciones

- Igual que con el cálculo proposicional, las equivalencias e implicaciones nos permiten manipular expresiones para construir argumentos correctos.
- Para indicar una implicación lógica, se usa la misma notación introducida en el cálculo de proposiciones:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models C$$

# Ejemplo

Verificar la siguiente ley

$$\forall x(P \rightarrow Q(x)) \equiv P \rightarrow \forall xQ(x)$$

# Sustituciones, Variables libres y ligadas

- Es posible sustituir un esquema por otro, siempre y cuando este no contenga la variable ligada y no afecte su validez.

Ejemplos:

- La siguiente es una sustitución válida en la expresión del slide anterior

$$\forall x((P \wedge Q) \rightarrow H(x)) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow \forall x H(x)$$

- La siguiente sustitución no es válida

$$\forall x(S(x) \rightarrow F(x)) \not\equiv S(x) \rightarrow \forall x F(x)$$

# Validez de expresiones lógicas de 1er orden

No existe un algoritmo general para determinar la validez de expresiones lógicas de 1er orden: Es un problema ***indecidable***.



# Diferencias en notación

	[GT96]	Otros autores
Condicional	$\Rightarrow$	$\rightarrow$
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Implicación lógica	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Equivalencia lógica	$\equiv$	$\Leftrightarrow$

# Referencias

- Grassman y Tremblay. Cap 2
- Grimaldi. Secciones 2.4 – 2.5
- Stein et al. Sección 3.2