Validez de Expresiones Lógicas en el Cálculo de Predicados

Validez de expresiones lógicas

- A diferencia del cálculo proposicional, demostrar la validez de una expresión de 1^{er} orden no siempre es posible. Es un problema indecidible.
- Por el contrario, para demostrar que una expresión no es válida, basta encontrar un contraejemplo; es decir, un modelo que haga ¬A verdadera.

Demostrar que esta expresión no es válida:

$$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$$

Otro ejemplo

Considere la expresión

$$\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$$

Este ejemplo ilustra que, dada una expresión válida

$$\forall x A \to S_y^x A$$

la particularización de variables ligadas puede llevar a expresiones no válidas

Demostración de validez

- No existe una técnica general.
- Una forma es transformar la expresión en una tautología.
- Otra forma comúnmente usada es el hecho que si A solo puede ser válida si ¬A es contradictoria.

Considere la expresión

$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

Recordemos que

$$A \to B \equiv \neg (A \land \neg B)$$

y su negación es

$$\neg (A \to B) \equiv A \land \neg B$$

Derivaciones: Particularización Universal (UI)

 Si la expresión ∀xP(x) es verdadera, entonces para P(t) es verdadera para cualquier término t.

$$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$$

- Nota: El término t no debe estar lígado en ningún otro cuantificador.
- La regla de inferencia correspondiente es:

$$\frac{\forall xA}{S_t^x A}$$

Ejemplo: Particularización Universal

- Todo ser humano es mortal: M(x)
- Juan es ser humano
- Juan es mortal : M(Juan)

Ejemplo: Colisión de variables

- Debe evitarse utilizar una variable ligada al hacer la particularización universal.
- Sea el predicado:

$$P(x, y, z) : x+y=z$$

Una expresión lógica válida es

$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$$

- Sin embargo la siguiente particularización *no es válida* $S_z^x(\forall x \forall y \exists z P(x,y,z)) = \forall y \exists z P(z,y,z)$
- Contraejemplo: Tóme y=1, z+1=z \Rightarrow 1=0

Generalización Universal (GU)

• Sea A una expresión y x una variable que no aparece libre en ninguna premisa. Entonces

$$\frac{A}{\forall xA}$$

 Observar que es permitido que x aparezca ligada, o que no aparezca dentro de A.

Variables libres y variables verdaderas

- Ya hemos distinguido entre variables ligadas (por un un cuantificador) y variables libres.
- Las variables libres que aparecen en las premisas se denominan variables fijas: Identifican un individuo del dominio a lo largo de toda una derivación.
- Se definen además las *variables verdaderas* (que también son libres), como variables que aparecen en las premisas, pero que no son fijas. *Solo se pueden generalizar universalmente las variables verdaderas*.
- Variables libres en las premisas se suponen fijas a menos que explícitamente se indique lo contrario.

Ejemplo GU

Ejemplo:

P(x): x estudia ing. Sel

Q(x): x le gusta la programación

Demostrar

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

Teorema de la Deducción y la GU

Teorema de la deducción

- Se supone B
- Se demuestra C empleando B como premisa
- Se prescinde de B y se concluye B→C

Y que pasa si B contiene una variable *x* como variable libre?

- Se lleva normalmente (sin generalizar) durante la deducción
- Una vez se prescinde de B, y si x no aparece libre en ninguna otra parte, se puede generalizar.

Sean

- S(x): x ha estudiado
- P(x): x ha aprobado

La premisa es que todo el que ha estudiado ha aprobado:

$$\forall x(S(x) \to P(x))$$

Demostrar que los que no aprobaron es porque no estudiaron: $\forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg S(x))$

14

Omisión de cuantificadores universales

- Es muy común omitir los cuantificadores, por ejemplo: x+y=y+x, la propiedad conmutativa es para todos los reales x,y.
- En el cálculo de predicados, toda variable libre es fija: Se supone que corresponde a un único individuo a lo largo de la demostración.
- Llamamos a las variables no fijas variables verdaderas.
- Una variable se puede generalizar universalmente si y solo si es una variable verdadera.

- Sea P(x,y,z): x+y=z
- Dadas las premisas:

$$P(x,0,x)$$
 y $P(x,y,z)\rightarrow P(y,x,z)$

demostrar P(0,x,x).

x,y,z son variables verdaderas.

Unificación

- Se dice que dos expresiones se unifican si existen particularizaciones legales que hagan idénticas las expresiones en cuestión.
- El acto de unificarlas se llama unificación.
- La particularización que las unifica se llama unificador.

Sean:

- Q(a,y,z) y Q(y,b,c) aparecen en líneas diferentes.
- a,b,c son variables fijas
- y,z son variables verdaderas

Determinar si las dos expresiones se unifican y dar un unificador.

El unificador puede no ser único

Ejemplo:

- a,b,c constantes, las demás son variables verdaderas.
- Unificar R(a,x) y R(y,z).

"Siempre se prefiere el unificador más general"

Ejemplo de uso de la unificación

Se tienen

- Los predicados: madre(X,Y), hermana(X,Y) y tia(X,Y)
- Las premisas:
 - madre(juana, braulio),
 - hermana(juana, lola) y
 - madre(X,Y) \wedge hermana(X,Z) \rightarrow tia(Z,Y)

Demostrar que lola es tía de braulio.

Generalización Existencial

- Si existe un individuo t para el cual es válido el predicado P(t), entonces se puede concluir que ∃xP(x).
- Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia

$$\frac{S_t^x A}{\exists x A}$$

Demostrar

$$\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$$

Particularización existencial

- Si es cierto que ∃xA, entonces tiene que haber un término t que satisface A.
- Para indicar el individuo (cuando no se sabe el nombre específico) se puede utilizar una variable fija.
- Esto da lugar a la regla de inferencia

$$\frac{\exists xA}{S_h^x A}$$

Variables resultado de particularizaciones universal y existencial

- La variable resultado de una particularización universal es una variable verdadera, por lo tanto se puede generalizar universalmente.
- La variable resultado de una particularización existencial es una variable fija, por lo que solo se puede generalizar existencialmente.

Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \forall x (P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \exists x (P(x) \lor Q(x)) \not\vdash \exists x Q(x)$$

Equivalencias Lógicas

 Igual a como hicimos con el cálculo de proposiciones, es posible utilizar equivalencias lógicas para demostrar una expresión en el cálculo de predicados.

Equivalencias Básicas

$\forall x A \equiv A$ $\exists x A \equiv A$	Si A no depende de x
$\forall xA \equiv \forall yS_y^xA$ $\exists xA \equiv \exists yS_y^xA$	Si y no es libre en A
$\forall xA \equiv S_t^xA \wedge \forall xA$ $\exists xA \equiv S_t^xA \vee \exists xA$	para cualquier término t
$\forall x(A \lor B) \equiv A \lor \forall xB$ $\exists x(A \land B) \equiv A \land \exists xB$	Si A no depende de x
$\forall x(A \land B) \equiv \forall xA \land \forall xB$ $\exists x(A \lor B) \equiv \exists xA \lor \exists xB$	
$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$ $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$	
$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$ $\neg \forall x A \equiv \exists A x \forall r$	

Ejemplo: Expresiones equivalentes

 Eliminar las negaciones que preceden los cuantificadores de la siguiente expresión

$$\neg \forall z (\exists x P(x,z) \land \neg \forall x Q(x,z))$$

Distinguir variables por estandarización

- Distintas ocurrencias (dentro de distintos cuantificadores) del mismo nombre de variable se entienden como variables diferentes.
- Por claridad es recomendable utilizar nombres diferentes para cada variable.

Ejemplo:

$$\neg \forall z (\exists x P(x, y, z) \land \neg \forall x \exists y Q(x, y, z))$$

Simplificar la expresión:

$$\forall x \forall y \exists z (A(x) \land B(y) \to C(z))$$

Analizarla por medio de:

- Equivalencias lógicas
- Derivaciones lógicas