Validez de Expresiones Lógicas en el Cálculo de Predicados

Validez de expresiones lógicas

- A diferencia del cálculo proposicional, demostrar la validez de una expresión de 1er orden no siempre es posible. Es un problema ***indecidible***.
- Por el contrario, para demostrar que una expresión no es válida, basta encontrar un contraejemplo; es decir, un modelo que haga $\neg A$ verdadera.

Ejemplo

- Demostrar que esta expresión no es válida:

$$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$$

Otro ejemplo

- Considere la expresión

$$\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y P(y, y)$$

Este ejemplo ilustra que, dada una expresión válida

$$\forall x A \to S_y^x A$$

la particularización de variables ligadas puede llevar a expresiones no válidas

Demostración de validez

- No existe una técnica general.
- Una forma es transformar la expresión en una tautología.
- Otra forma comúnmente usada es el hecho que si A solo puede ser válida si ¬A es contradictoria.

Ejemplo

Considere la expresión

$$\forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$$

Recordemos que

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \land \neg B)$$

y su negación es

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \land \neg B$$

Derivaciones: Particularización Universal (UI)

- Si la expresión ∀xP(x) es verdadera, entonces para P(t) es verdadera para cualquier término *t*.

$$\forall x A \Rightarrow S_t^x A$$

- Nota: El término *t* no debe estar lígado en ningún otro cuantificador.
- La regla de inferencia correspondiente es:

$$\frac{\forall x A}{S_t^x A}$$

Ejemplo: Particularización Universal

- Todo ser humano es mortal: M(x)
- Juan es ser humano
- Juan es mortal : M(Juan)

Ejemplo: Colisión de variables

- Debe evitarse utilizar una variable ligada al hacer la particularización universal.
- Sea el predicado:

P(x, y, z) : x+y=z

- Una expresión lógica *válida* es

$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$$

- Sin embargo la siguiente particularización *no es válida*

$$S_z^x(\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)) = \forall y \exists z P(z, y, z)$$

- Contraejemplo: Tóme y=1, z+1=z $\Rightarrow 1=0$

Generalización Universal (GU)

- Sea A una expresión y *x* una variable que *no aparece libre en ninguna premisa*. Entonces

$$\frac{A}{\forall x A}$$

- Observar que es permitido que x aparezca ligada, o que no aparezca dentro de A.

Variables libres y variables verdaderas

- Ya hemos distinguido entre variables ligadas (por un un cuantificador) y variables libres.
- Las variables libres que aparecen en las premisas se denominan ***variables fijas***: Identifican un individuo del dominio a lo largo de toda una derivación.
- Se definen además las ***variables verdaderas*** (que también son libres), como variables que aparecen en las premisas, pero que no son fijas. *Solo se pueden generalizar universalmente las variables verdaderas*.
- Variables libres en las premisas se suponen fijas a menos que explícitamente se indique lo contrario.

Ejemplo GU

- Ejemplo:
  P(x) : x estudia ing. Sel
  Q(x) : x le gusta la programación
- Demostrar

$$\forall x P(x), \forall x (P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

Teorema de la Deducción y la GU

Teorema de la deducción

- Se supone B
- Se demuestra C empleando B como premisa
- Se prescinde de B y se concluye $B \to C$

Y que pasa si B contiene una variable *x* como variable libre?

- Se lleva normalmente (sin generalizar) durante la deducción
- Una vez se prescinde de B, y si x no aparece libre en ninguna otra parte, se puede generalizar.

Ejemplo

Sean

- S(x) : x ha estudiado
- P(x) : x ha aprobado

La premisa es que todo el que ha estudiado ha aprobado:

$$\forall x(S(x) \to P(x))$$

Demostrar que los que no aprobaron es porque no estudiaron:

$$\forall x(\neg P(x) \to \neg S(x))$$

Omisión de cuantificadores universales

- Es muy común omitir los cuantificadores, por ejemplo: $x+y=y+x$, la propiedad conmutativa es para todos los reales x,y.
- En el cálculo de predicados, toda variable libre es fija: Se supone que corresponde a un único individuo a lo largo de la demostración.
- Llamamos a las variables no fijas *variables verdaderas*.
- Una variable se puede generalizar universalmente si y solo si es una variable verdadera.

Ejemplo

- Sea $P(x,y,z)$: $x+y=z$
- Dadas las premisas:

$$P(x,0,x) \text{ y } P(x,y,z) \rightarrow P(y,x,z)$$

demostrar $P(0,x,x)$.

x,y,z son variables verdaderas.

Unificación

- Se dice que dos expresiones se unifican si existen particularizaciones legales que hagan idénticas las expresiones en cuestión.
- El acto de unificarlas se llama *unificación*.
- La particularización que las unifica se llama *unificador*.

Ejemplo

Sean:

- Q(a,y,z) y Q(y,b,c) aparecen en líneas diferentes.
- a,b,c son variables fijas
- y,z son variables verdaderas

Determinar si las dos expresiones se unifican y dar un unificador.

El unificador puede no ser único

Ejemplo:

- a,b,c constantes, las demás son variables verdaderas.
- Unificar R(a,x) y R(y,z).

“Siempre se prefiere el unificador más general”

Ejemplo de uso de la unificación

Se tienen

- Los predicados: madre(X,Y), hermana(X,Y) y tia(X,Y)
- Las premisas:
  - madre(*juana*, *braulio*),
  - hermana(*juana*, *lola*) y
  - madre(X,Y) $\wedge$ hermana(X,Z) $\rightarrow$ tia(Z,Y)

Demostrar que *lola* es tía de *braulio*.

Generalización Existencial

- Si existe un individuo t para el cual es válido el predicado P(t), entonces se puede concluir que ∃xP(x).
- Esto da lugar a la siguiente regla de inferencia

$$\frac{S_t^x A}{\exists x A}$$

Ejemplo

Demostrar

$$\neg\exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$$

Solución

1)	$\neg\exists x P(x)$	Premisa
2)	$P(x)$	Supuesto TD, x var. verdadera
3)	$\exists x P(x)$	Generalizacion existencial
4)	$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$	Teorema de la deduccion
5)	$\neg P(x)$	Modus tollens
6)	$\forall x \neg P(x)$	Generalizacion universal

Particularización existencial

- Si es cierto que ∃xA, entonces tiene que haber un término t que satisface A.
- Para indicar el individuo (cuando no se sabe el nombre específico) se puede utilizar una variable fija.
- Esto da lugar a la regla de inferencia

$$\frac{\exists x A}{S_b^x A}$$

Variables resultado de particularizaciones universal y existencial

- La variable resultado de una particularización universal es una *variable verdadera*, por lo tanto se puede generalizar universalmente.
- La variable resultado de una particularización existencial es una *variable fija*, por lo que solo se puede generalizar existencialmente.

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x Q(x)$$

Solución

1)	$\exists x \neg P(x)$	Premisa
2)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	Premisa
3)	$\neg P(t)$	Particularizacion existencial, t var. fija
4)	$P(x) \vee Q(x)$	Particularizacion universal, x var. verdadera
5)	$P(t) \vee Q(t)$	Particularizando x por t, unificando P(t) y P(x)
6)	$Q(t)$	Silogismo disyuntivo
7)	$\exists x Q(x)$	Generalizacion existencial

Ejemplo

- Comprobar

$$\exists x \neg P(x), \exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \nvdash \exists x Q(x)$$

Equivalencias Lógicas

- Igual a como hicimos con el cálculo de proposiciones, es posible utilizar equivalencias lógicas para demostrar una expresión en el cálculo de predicados.

Equivalencias Básicas

$\forall xA \equiv A$ $\exists xA \equiv A$	Si A no depende de x
$\forall xA \equiv \forall y S_y^x A$ $\exists xA \equiv \exists y S_y^x A$	Si y no es libre en A
$\forall xA \equiv S_t^x A \wedge \forall xA$ $\exists xA \equiv S_t^x A \vee \exists xA$	para cualquier término t
$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall xB$ $\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists xB$	Si A no depende de x
$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$ $\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$	
$\forall x \forall yA \equiv \forall y \forall xA$ $\exists x \exists yA \equiv \exists y \exists xA$	
$\neg \exists xA \equiv \forall x \neg A$ $\neg \forall xA \equiv \exists x \neg A$	

Ejemplo: Expresiones equivalentes

- Eliminar las negaciones que preceden los cuantificadores de la siguiente expresión

$$\neg\forall z(\exists x P(x,z) \wedge \neg\forall x Q(x,z))$$

Ejemplo:
Distinguir variables por estandarización

- Distintas ocurrencias (dentro de distintos cuantificadores) del mismo nombre de variable se entienden como variables diferentes.
- Por claridad es recomendable utilizar nombres diferentes para cada variable.

Ejemplo:

$$\neg\forall z(\exists x P(x,y,z) \wedge \neg\forall x\exists y Q(x,y,z))$$

Ejemplo

- Simplificar la expresión:

$$\forall x \forall y \exists z \, (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z))$$

Analizarla por medio de:
- Equivalencias lógicas
- Derivaciones lógicas

Solución

$$
\begin{array}{rcll}
\forall x \forall y \exists z (A(x) \wedge B(y) \rightarrow C(z)) & \equiv & \forall x \forall y \exists z [\neg (A(x) \wedge B(y)) \vee C(z)] & \text{eq. condicional} \\
& \equiv & \forall x \forall y [\exists z \neg (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] & \text{asociatividad } \exists \\
& \equiv & \forall x \forall y [\neg (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z)] & \text{predicado libre} \\
& \equiv & \forall x \forall y [\neg (A(x) \wedge B(y))] \vee \exists z C(z) & \text{distributividad} \\
& \equiv & \forall x \neg \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) & \text{d'Morgan} \\
& \equiv & \neg \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \vee \exists z C(z) & \text{d'Morgan} \\
& \equiv & \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \rightarrow \exists z C(z) & \text{eq. condicional}
\end{array}
$$