Ejemplos inducción matemática

1. $H_0 = 0$, $H_{n+1} = 1 + 2H_n$ demostrar $H_n = 2^n - 1$

Caso base: $H_0 = 0$ definición

$$H_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{cumple}$$

Hipótesis inductiva: Se asume $H_n = 2^n - 1$

Paso inductivo: Debemos comprobar la proposición para el sucesor de n: $H_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Por definición: $H_{n+1} = 1 + 2H_n$

Por hipótesis: $H_{n+1} = 1 + 2(2^n - 1)$

$$= 1 + 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

Partiendo del supuesto $\underbrace{H_n = 2^n - 1}_{P(n)}$ se concluye $\underbrace{H_{n+1} = 2^{n+1} - 1}_{P(s(n))}$

Generalizando universal:

$$\forall n \left(H_n = 2^n - 1 \rightarrow H_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \right)$$

Además por el caso base tenemos $P(0)$

Por el principio de inducción matemática se concluye:

$$\forall n \left(H_n = 2^n - 1 \right)$$

2. n^3+2n es divisible por 3 : $n^3+2n \mid 3$

Caso base: Para $n=0$

$0^3+2\cdot 0=0$ 0 es divisible por 3 cumple ✓

Hipótesis: Se asume n^3+2n es divisible por 3

Paso inductivo: Se debe comprobar $(n+1)^3+2(n+1)$ es divisible por 3

$$(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1^3+2n+2$$

$$= n^3+2n + 3n^2+3n+3$$

$$= \underbrace{(n^3+2n)}_{\text{divisible por 3 por hipótesis}} + \underbrace{3(n^2+n+1)}_{\text{divisible por 3}}$$

Por el principio de inducción matemática se concluye:

$$\forall n \left(n^3+2n \mid 3\right)$$

3. Para todo n, $2(n+2) \leq (n+2)^2$

Caso base: $2(0+2) \overset{?}{\leq} (0+2)^2$

$4 \leq 4$ ✓ cumple

Hipotesis: $2(n+2) \leq (n+2)^2$

Paso inductivo Se debe comprobar que

$$2((n+1)+2) \leq ((n+1)+2)^2$$

$$2((n+1)+2) = 2(n+2) + 2$$

$$\leq (n+2)^2 + 2$$

Por el otro lado se tiene:

$$((n+1)+2)^2 = ((n+2)+1)^2$$

$$= (n+2)^2 + 2(n+2) + 1$$

$$= (n+2)^2 + 2 + 2n + 2 + 1$$

la expresión del lado izquierdo

Ademas, $2n+2+1 > 0$ para todo natural n

Por lo que se concluye:

$$2((n+1)+2) \leq ((n+1)+2)^2$$

Y por el principio de inducción matemática

$$\forall n \left(2(n+2) \leq (n+2)^2 \right).$$

4. Comprobar que $2^n < n!$ para $n \geq 4$

Observar que $2^0 \nless 0!$

$2^1 \nless 1!$

$2^4 = 16 \qquad 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$16 < 24$

Caso base: Cambio de base inductiva $n_0 = 4$

$2^4 < 4!$ cumple ✓

Hipotesis inductiva: Se asume $2^n < n!$ para $n \geq 4$

Paso inductivo: Se debe comprobar que

$2^{n+1} < (n+1)!$

Obsevemos que:

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n\,(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = (n+1)\cdot n!$

Además se tiene

$2 < n+1$ para $n \geq 2$

y por hipótesis: $2^n < n!$ para $n \geq 4$

multiplicando: $2^n 2 < (n+1)\,n!$

$2^{n+1} < (n+1)!$

Con lo que, por el principio de induccion matemática se concluye:

$\forall n\,(n \geq 4 \to 2^n < n!)$