Ing. de Sistemas e Informática
Matemáticas Discretas
Jorge Mario Londoño P.

Ejercicios de repaso 5

Inducción Matemática Simple

a) Demostrar que (n+2)! es par.
b) Demostrar que n^3-n es divisible por 3.
c) Demostrar que .$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$ Indicar para que valores de n es válida la expresión.
d) Demostrar que $n^2 > 6n-4$. A partir de que valor n_0 es válida?
e) Demostrar que la suma de los primeros n impares 1+3+5+...+(2n-1) es n^2.
f) Demostrar que la n-ésima derivada de x^n es n!.
g) $2^{2n}-1$ es divisible por 3.
h) n^3+5n es divisible por 6.
i) n(n+1) es par.
j) $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por a+b.*

Recurrencias

1. Sea la recurrencia

$$Q_n = 3\ Q_{n-1} + 4n\ ,\ \text{con}\ Q_0=1$$

Comprobar que la solución directa de la recurrencia es

$$Q_n = 4*3^n-3-2n$$

2. Sea la recurrencia

$$Q_n = 2\ Q_{n-1} + 3n\ ,\ \text{con}\ Q_0=1$$

Comprobar que la solución directa de la recurrencia es

$$Q_n = 7*2^n-6-3n$$

3. Los números de Fibonacci (Leonardo de Pisa) se definen por la recurrencia

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad con \quad F_0=0 \quad y \quad F_1=1$$

Comprobar:

a. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2=F_n F_{n-1}$

b. $F_n=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad siendo \quad \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Definiciones recursivas:

1. Para cada una de las siguientes expresiones lógicas indicar:

- Son expresiones SL o no?

- En caso de ser expresiones SL dar su árbol sintáctico.

a. $\neg(P\wedge(Q\vee\neg R))$

b. $(P\vee Q)\vee(\neg R\wedge P)$

c. $((P\vee Q)\wedge(R\vee\neg(Q)))$

d. $(\neg(R\vee(P\wedge\neg Q))\wedge(R\vee P))$

2. La notación polaca inversa (RPN – Reverse Polish Notation) es una notación aritmética utilizada en algunas calculadoras y también se utiliza para implementar la evaluación de expresiones en un compilador. La notación RPN es una notación postfija, en la que el operador se escribe después de los operandos. Por ejemplo la expresión

- (3+4)/(2*5+6)

se escribe así:

3 4 + 2 5 * 6 + / -

- Dar una definición recursiva de las expresiones aritméticas RPN.
- Escribir la expresión (-2*5+3/(4-9)/7*-1) en notación RPN y dar su árbol sintáctico.

Sugerencias

a) (n+2)! = (n+2) * (n+1)!

f) Observar que

$$\frac{dx^n}{dx}=n\,x^{n-1}$$

j) Descomponer $a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}$ en función de términos de grado <=k.

En caso de necesitar ayuda adicional, más abajo se da la descomposición.

j) Ayuda adicional

$$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=(a^{2k}-b^{2k})(a^2+b^2)-a^2b^2(a^{2(k-1)}-b^{2(k-1)})$$