

Inducción y Recursividad

Motivación

- Existen conjuntos con un número infinito de elementos:
 - Los números naturales
 - Los árboles binarios
 - ...
- Sin embargo existen necesidades muy concretas:
 - Como definir estos conjuntos con un número finito de reglas?
 - Como demostrar que cierta propiedad se cumple para todos sus elementos?

Diferencia entre inducción e inducción matemática

- Inducción es el proceso de ir de lo particular a lo general:
 - Hacer unas observaciones
 - Obtener una conclusión, asumiendo que es general para todos los casos
- La inducción matemática es un **método deductivo**. Una ley derivada por inducción matemática es válida siempre y cuando se empleen argumentos válidos y se parta de premisas verdaderas.

Inducción en \mathbb{N}

- Tomaremos el conjunto de los naturales como el conjunto

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

- En teoría de números, el conjunto de los naturales se construye de la siguiente forma:
 - Se toma 0 como el único símbolo especial
 - Todos los demás números se construyen con el mecanismo de *sucesor*:

$$\begin{array}{c} s(0) \\ s(s(0)) \end{array}$$

Axiomas de Peano (1889)

- 1.El 0 es un número natural.
- 2.Si n es natural, también lo es $s(n)$.
- 3.Para todo n , $s(n) \neq 0$.
- 4.Si $s(n) = s(m)$ entonces $n = m$.

Para más información ver:
http://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms

Inducción matemática

- Se apoya en el mecanismo de sucesión.
- Sea $P(n)$ una propiedad de un número natural.
- Utilizando $P(n)$ se demuestra que el sucesor de n también cumple la propiedad: $P(s(n))$ es cierta.
- La premisa P es verdadera para 0.

Argumento inductivo

- | | |
|--|------------------------------|
| 1. $\forall n (P(n) \rightarrow P(s(n)))$ | : Premisa |
| 2. $P(0)$ | : Premisa |
| 3. $P(0) \rightarrow P(1)$ | : Particularización |
| 4. $P(1)$ | : Modus Ponens |
| 5. $P(1) \rightarrow P(2)$ | : Particularización |
| 6. $P(2)$ | : Modus ponens |
| 7. ... | |
| 8. $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \dots$ | : 2,4,6,... combinación |
| 9. $\forall n P(n)$ | : 8, definición de \forall |

Inducción

- Sea \mathbb{N} el universo del discurso.
- Sea $P(n)$ una propiedad de los naturales.
- La inducción está dada por la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{P(0) \quad \forall n (P(n) \Rightarrow P(s(n)))}{\forall n P(n)}$$

Ejemplos

- Sea $H_n = 0$ para $n=0$, $H_{n+1} = 1 + 2H_n$ en caso contrario.
- Demostrar que $H_n = 2^n - 1$.

Ejemplos

- Demostrar que n^3+2n es divisible por 3.

Ejemplos

- Demostrar que para todo n , $2(n+2) \leq (n+2)^2$.

Una paradoja:

Todos los caballos son del mismo color

- En un conjunto de 1 caballo todos son del mismo color.
- Si suponemos que conjuntos de k caballos son del mismo color, se sigue que conjuntos de $k+1$ caballos tienen el mismo color.
- Conclusión: Todos los caballos tienen el mismo color!

Cuál es el error en este argumento?

Ver más información en:

http://en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color

Modificación de la base inductiva

- No es necesario partir de 0.
- El argumento inductivo se puede generalizar partiendo de un valor inicial n_0 :

$$\frac{P(n_0) \quad \forall n((n \geq n_0) \Rightarrow (P(n) \Rightarrow P(s(n))))}{\forall n((n \geq n_0) \Rightarrow P(n))}$$

Ejemplo

- Demostrar que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

Inducción fuerte

- **Base inductiva:** Se demuestra $P(0)$.
- **Hipótesis inductiva:** Se suponen $P(1), \dots, P(n)$.
- **Paso inductivo:** Se demuestra $P(n+1)$.

Ejemplo

- Demostrar que todo número natural no primo mayor que 1 se puede escribir como el producto de primos.

Sucesiones y Series

- Se define una *sucesión* como un conjunto de valores que siguen una determinada regla de formación.
- Ejemplos:
 - 2, 5, 8, 11, 14, ..., $(2+3*i)$ sumar una constante
 - 3, 6, 12, 24, 48, ..., $(3*2^i)$ multiplicar por una constante
- **Aritmética:** Cada nuevo término se obtiene sumando una constante.
- **Geométrica:** Cada nuevo término se obtiene multiplicando por una constante.

Series

- La suma de los términos de una sucesión se denomina una serie.
- Se denota S_n la suma de los primeros n términos de la serie.
- Ejemplos:

Aritmética:
$$S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = \sum_{i=0}^3 (2 + 3i)$$

Geométrica:
$$S_5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = \sum_{i=0}^4 (3 \cdot 2^i)$$

Solución general para series aritmética y geométrica

Aritmética:

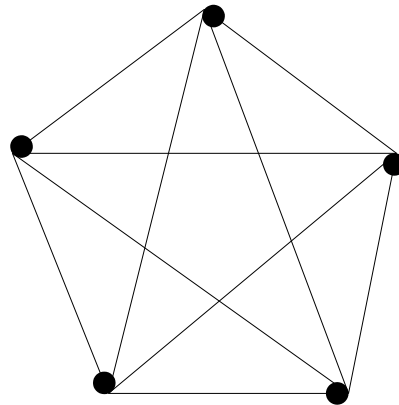
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a + r \cdot i) = na + r \frac{n(n-1)}{2}$$

Geométrica:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a \cdot r^i) = a \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

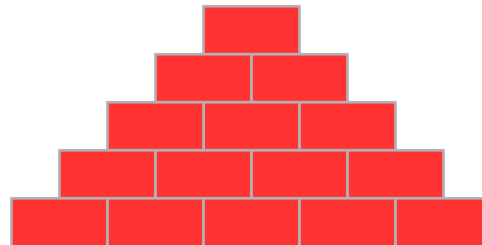
Ejemplo: Serie aritmética

- Se tienen n puntos. Cuantos segmentos de recta se pueden trazar entre pares de puntos?



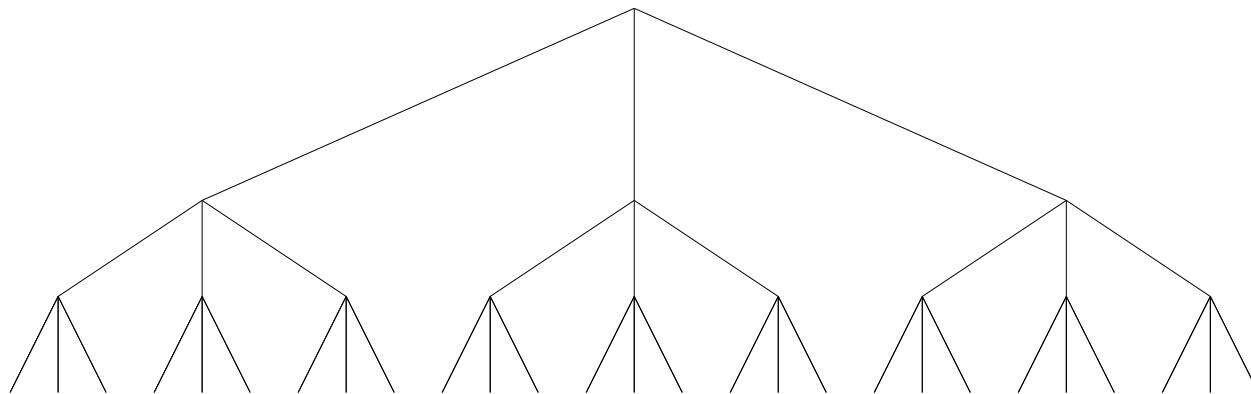
Ejemplo: Serie aritmética

- Se quiere construir una pared piramidal de n pisos. Cuantos ladrillos se requieren?



Ejemplo: Serie geométrica

- En un árbol genealógico, cada padre tiene 3 descendientes. Cuántos miembros tiene la familia luego de k generaciones?



La paradoja de Zenón

- Para llegar del punto A al punto B, primero hay que recorrer la mitad de la distancia,
- luego hay que recorrer la mitad de la distancia entre el punto medio y B,
- y así sucesivamente *ad infinitum*.
- Se tiene entonces:

$$\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d + \frac{1}{8}d + \dots$$

Para más detalles:

http://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradoxes#The_dichotomy_paradox

y una curiosidad: $1 = 0.999\dots$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= 0.333\dots + 0.333\dots + 0.333\dots \\ &= 0.999\dots \end{aligned}$$

Ejercicio:

Verificar el valor de esta serie

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6}$$