Inducción y Recursividad

Motivación

- Existen conjuntos con un número infinito de elementos:
  - Los números naturales
  - Los árboles binarios
  - ...
- Sin embargo existen necesidades muy concretas:
  - Como definir estos conjuntos con un número finito de reglas?
  - Como demostrar que cierta propiedad se cumple para todos sus elementos?

Diferencia entre inducción e inducción matemática

- Inducción es el proceso de ir de lo particular a lo general:
  - Hacer unas observaciones
  - Obtener una conclusión, asumiendo que es general para todos los casos
- La inducción matemática es un **método deductivo**. Una ley derivada por inducción matemática es válida siempre y cuando se empleen argumentos válidos y se parta de premisas verdaderas.

Inducción en $\mathbb{N}$

- Tomaremos el conjuntos de los naturales como el conjunto

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, ... \}$$

- En teoría de números, el conjunto de los naturales se construye de la siguiente forma:
  - Se toma 0 como el único símbolo especial
  - Todos los demás números se construyen con el mecanismo de *sucesor*:

$$s(0)$$

$$s(s(0))$$

Axiomas de Peano (1889)

1. El 0 es un número natural.
2. Si n es natural, también lo es s(n).
3. Para todo n, $s(n) \neq 0$.
4. Si $s(n)=s(m)$ entonces $n=m$.

Para más información ver:
http://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms

Inducción matemática

- Se apoya en el mecanismo de sucesión.
- Sea P(n) una propiedad de un número natural.
- Utilizando P(n) se demuestra que el sucesor de n también cumple la propiedad: P(s(n)) es cierta.
- La premisa P es verdadera para 0.

Argumento inductivo

1. $\forall n\ (\ P(n) \rightarrow P(s(n))\ )$	: Premisa
2. $P(0)$	: Premisa
3. $P(0) \rightarrow P(1)$	: Particularización
4. $P(1)$	: Modus Ponens
5. $P(1) \rightarrow P(2)$	: Particularización
6. $P(2)$	: Modus ponens
7. ...	
8. $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots$	: 2,4,6,... combinación
9. $\forall n P(n)$	: 8, definición de $\forall$

Inducción

- Sea $\mathbb{N}$ el universo del discurso.
- Sea P(n) una propiedad de los naturales.
- La inducción está dada por la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n (P(n) \Rightarrow P(s(n))) \end{array}}{\forall n P(n)}$$

Ejemplos

- Sea $H_n=0$ para $n=0$, $H_{n+1}=1+2H_n$ en caso contrario.
- Demostrar que $H_n=2^n-1$.

Ejemplos

- Demostrar que n^3+2n es divisible por 3.

Ejemplos

- Demostrar que para todo n, $2(n+2) \leq (n+2)^2$.

Una paradoja:
Todos los caballos son del mismo color

- En un conjunto de 1 caballo todos son del mismo color.
- Si suponemos que conjuntos de k caballos son del mismo color, se sigue que conjuntos de k+1 caballos tienen el mismo color.
- Conclusión: Todos los caballos tienen el mismo color!

Cuál es el error en este argumento?

Ver más información en:
http://en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color

Modificación de la base inductiva

- No es necesario partir de 0.
- El argumento inductivo se puede generalizar partiendo de un valor inicial n_0:

$$\frac{\begin{array}{l} P(n_0) \\ \forall n((n \geq n_0) \Rightarrow (P(n) \Rightarrow P(s(n)))) \end{array}}{\forall n((n \geq n_0) \Rightarrow P(n))}$$

Ejemplo

- Demostrar que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

Algunas falacias

Comprobar si el polínomio:

$$n^2 + n + 1$$

siempre arroja un número primo para n natural.

Comprobar la desigualdad:

$$n^2 - 3n - 1 < 0$$

Inducción fuerte

- **Base inductiva**: Se demuestra $P(n_0)$.
- **Hipótesis inductiva**: Se suponen
  - $P(n_0+1)$,
  - ...,
  - $P(n)$.
- **Paso inductivo**: Se demuestra $P(n+1)$.

Ejemplo

- Demostrar que todo número natural no primo mayor que 1 se puede escribir como el producto de primos.

Sucesiones y Series

- Se define una *sucesión* como un conjunto de valores que siguen una determinada regla de formación.
- Ejemplos:

2, 5, 8, 11, 14, …, $(2+3*i)$ sumar una constante
3, 6, 12, 24, 48, …, $(3*2^i)$ multiplicar por una constante

- **Aritmética**: Cada nuevo término se obtiene sumando una constante.
- **Geométrica**: Cada nuevo término se obtiene multiplicando por una constante.

Series

- La suma de los términos de una sucesión se denomina una serie.
- Se denota S_n la suma de los primeros n términos de la serie.
- Ejemplos:

Aritmética: $$S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = \sum_{i=0}^{3}(2 + 3i)$$

Geométrica: $$S_5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = \sum_{i=0}^{4}(3 \cdot 2^i)$$

Solución general para series aritmética y geométrica

Aritmética:

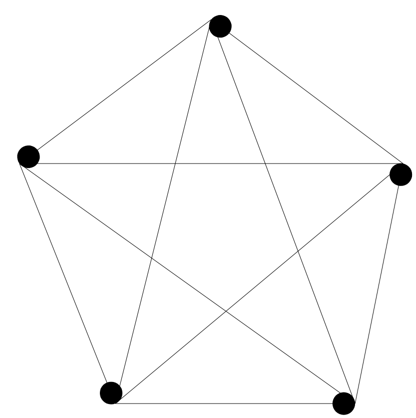
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(a + r \cdot i) = na + r\frac{n(n-1)}{2}$$

Geométrica:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(a \cdot r^i) = a\frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

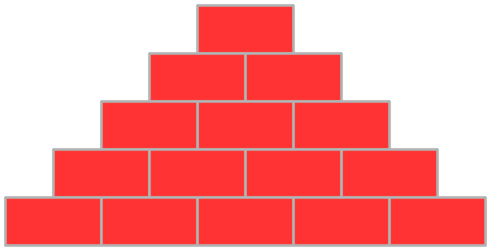
Ejemplo: Serie aritmética

- Se tienen n puntos. Cuantos segmentos de recta se pueden trazar entre pares de puntos?



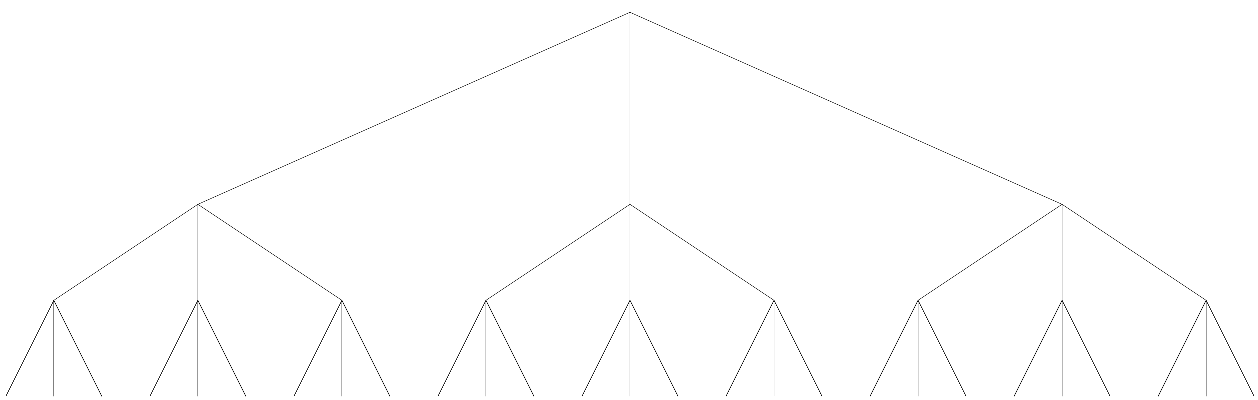
Ejemplo: Serie aritmética

- Se quiere construir una pared piramidal de n pisos. Cuantos ladrillos se requieren?



Ejemplo: Serie geométrica

- En un árbol genealógico, cada padre tiene 3 descendientes. Cuántos miembros tiene la familia luego de k generaciones?



La paradoja de Zenón

- Para llegar del punto A al punto B, primero hay que recorrer la mitad de la distancia,
- luego hay que recorrer la mitad de la distancia entre el punto medio y B,
- y así sucesivamente *ad infinitum*.
- Se tiene entonces:

$$\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d + \frac{1}{8}d + \dots$$

Para más detalles:
http://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradoxes#The_dichotomy_paradox

y una curiosidad: 1 = 0.999...

$$\begin{aligned} 1 &= 3\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \\ &= 0.333\ldots + 0.333\ldots + 0.333\ldots \\ &= 0.999\ldots \end{aligned}$$

Para más detalles:
http://en.wikipedia.org/wiki/0.999...

Cuántos naturales existen?

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Pares	0	2	4	6	8	10	12	14	16	...
Impares	1	3	5	7	9	11	13	15	17	...

Ejercicio:
Verificar el valor de esta serie

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6}$$

Calcular el número de bloques en la siguiente pirámide de altura h