Ing. de Sistemas e Informática
Matemáticas Discretas
Jorge Mario Londoño P.

Ejercicios de repaso 5

Inducción Matemática Simple

a) Demostrar que (n+2)! es par.
b) Demostrar que n^3-n es divisible por 3.
c) Demostrar que .$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$ Indicar para que valores de n es válida la expresión.
d) Demostrar que $n^2 > 6n-4$. A partir de que valor n_0 es válida?
e) Demostrar que la suma de los primeros n impares 1+3+5+...+(2n-1) es n^2.
f) Demostrar que la n-ésima derivada de x^n es n!.
g) $2^{2n}-1$ es divisible por 3.
h) n^3+5n es divisible por 6.
i) n(n+1) es par.
j) $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por a+b.*

Series

Cuenta la leyenda del rey Sheran que este ofrecio conceder lo que quisiera al inventor del ajedrez. Este pidió un grano por el primer cuadro, dos por el segundo y así sucesivamente cada cuadro duplica el número de granos respecto al anterior. Cuántos granos se requiren para cumplir la petición del inventor?

Recurrencias

1. Sea la recurrencia

$$Q_n = 3\ Q_{n-1} + 4n\ ,\ \text{con } Q_0=1$$

Comprobar que la solución directa de la recurrencia es

$$Q_n = 4*3^n-3-2n$$

2. Sea la recurrencia

$$Q_n = 2\ Q_{n-1} + 3n\ ,\ \text{con } Q_0=1$$

Comprobar que la solución directa de la recurrencia es

$$Q_n = 7*2^n-6-3n$$

3. Los números de Fibonacci (Leonardo de Pisa) se definen por la recurrencia

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad con \quad F_0=0 \ \ y \ \ F_1=1$$

Comprobar:

a. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2=F_n F_{n-1}$

b. $F_n=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \ \ siendo \quad \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Conocida como la fórmula de Binet. La constante φ se denomina la razón aurea (Golden ratio).

Definiciones recursivas y demostración por recursividad

1. Para cada una de las siguientes expresiones lógicas indicar:

- Son expresiones SL o no?

- En caso de ser expresiones SL dar su árbol sintáctico.

a. $\neg(P\wedge(Q\vee\neg R))$

b. $(P\vee Q)\vee(\neg R\wedge P)$

c. $((P\vee Q)\wedge(R\vee\neg(Q)))$

d. $(\neg(R\vee(P\wedge\neg Q))\wedge(R\vee P))$

2. La notación polaca inversa (RPN – Reverse Polish Notation) es una notación aritmética utilizada en algunas calculadoras y también se utiliza para implementar la evaluación de expresiones en un compilador. La notación RPN es una notación postfija, en la que el operador se escribe después de los operandos. Por ejemplo la expresión

- (3+4)/(2*5+6)

se escribe así:

3 4 + 2 5 * 6 + / -

- Dar una definición recursiva de las expresiones aritméticas RPN.
- Escribir la expresión (-2*5+3/(4-9)/7*-1) en notación RPN y dar su árbol sintáctico.

3. Se tienen las siguientes relaciones de parentesco:

```
padre(p, r).     % p es padre de r
padre(s, w).
padre(r, x).
padre(s, q).
padre(p, s).
padre(x, y).
```

- Utilizando la representación gráfica de árboles, ilustrar las relaciones indicadas.
- Usando la definición recursiva de árbol binario, indicar la representación textual de este árbol.

4. Indicar el resultado de las siguientes unificaciones con listas:

- [1,2,3,4] = [X|Y]
- [1,2,3,4] = [X,Y]
- [X|[b,c,a]] = [1|Y]
- [Z] = [1]

5. Dos listas son iguales si coinciden en todos los elementos (orden y valor de cada elemento). Dar una definición recursiva de la igualdad de listas. Opcional: Escribir un procedimiento recursivo que verifique si dos listas son iguales.

6. Demostrar las siguientes propiedades de los árboles binarios:

- Todo árbol binario de altura h tiene como mínimo h+1 nodos.
- Demostrar que todo árbol binario de n nodos tiene como máximo altura n-1.
- Todo árbol **ternario** (cada nodo puede tener hasta 3 hijos) de de altura h tiene como máximo $(3^{h+1}-1)/2$ nodos.
- **(*)** Demostrar que la negación del dual de una expresión lógica simple (SL) es equivalente a la expresión original reemplazando todos los literales por su negación.
- Cuántas hojas tiene como máximo un árbol de altura h?

Sugerencias

Inducción matemática

a) (n+2)! = (n+2) * (n+1)!

c) Primera solución: Usar inducción matemática. Segunda solución: Utilizar la formula general de la serie geométrica.

f) Observar que

$$\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}$$

j) Descomponer $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)}$ en función de términos de grado <=k.

En caso de necesitar ayuda adicional, más abajo se da la descomposición.

j) Ayuda adicional

$$a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} = (a^{2k} - b^{2k})(a^2 + b^2) - a^2 b^2 (a^{2(k-1)} - b^{2(k-1)})$$