

# Cálculo proposicional

# Proposiciones Compuestas

- Atómicas: Solo una variable (P,Q,...) o una constante proposicional (V,F).
- Compuestas: Todas aquellas que contienen al menos un conector lógico
- Ejemplos:

$$\begin{array}{c} P \wedge Q \\ (P \vee (\neg Q)) \rightarrow R \end{array}$$

# Uso de paréntesis

Es necesario para evitar ambigüedades en expresiones compuestas

Ejemplo

P : María termina su reportaje

Q : María es feliz

R : María va al cine esta noche

Qué significa la expresión  $P \rightarrow Q \wedge R$ ?

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \text{ ó } (P \rightarrow Q) \wedge R$$

El valor de la expresión cambia en ambos casos.

# Reglas de Prioridad o Precedencia

- Permiten eliminar la necesidad de incluir todos los paréntesis
- Prioridades:

1)	$\neg$
2)	$\wedge$
3)	$\vee$
4)	$\rightarrow$
5)	$\leftrightarrow$

# Ejemplos

- Eliminar paréntesis redundantes de la expresión lógica:

$$\neg((\neg P) \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R))$$

- Hacer explícitos todos los paréntesis en la expresión:

$$P \vee \neg R \rightarrow Q \wedge R \rightarrow \neg P$$

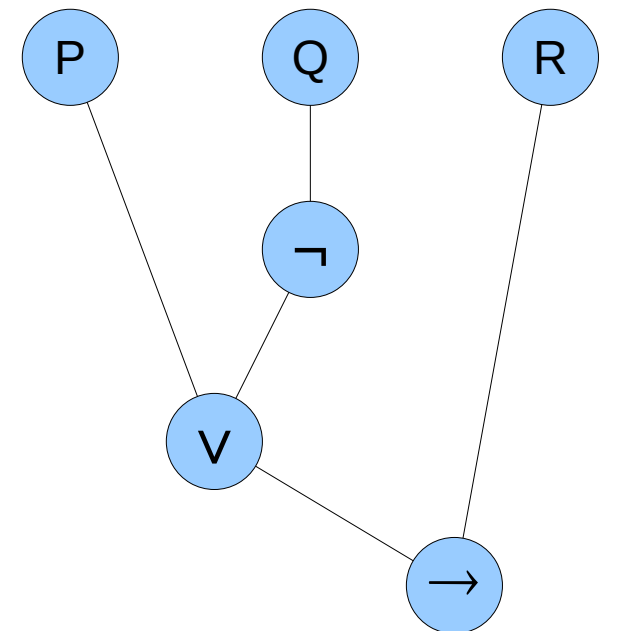
$$\vee \neg \wedge \rightarrow \leftrightarrow$$

# Árbol sintáctico de una expresión lógica

- Se parte de las variables que componen la expresión.
- Se agregan operadores en el orden de evaluación y se conectan a los elementos sobre los que operan.

- Ejemplo:

$$P \vee \neg Q \rightarrow R$$



↑  
Raíz del  
árbol sintáctico

# Reglas de asociatividad

- Por la izquierda: El conector a la izquierda tiene prioridad sobre el conector a la derecha
- Por la derecha: El conector a la derecha tiene prioridad sobre el conector a la izquierda

***Todos los conectores lógicos binarios son asociativos por la izquierda***

Ejemplo:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R$$

debe entenderse como

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

# Ejemplo:

## Asociatividad por la derecha

- En lógica, aritmética y programación la mayoría de los operadores son asociativos por la izquierda.
- Algunas excepciones comunes en programación (Python):

### Asignación

```
>>> a=b=1
>>> a
1
>>> b
1
>>> |
```

### Exponenciación

```
>>> 4**(2**3)
65536
>>> 4**2**3
65536
>>> (4**2)**3
4096
>>> |
```



# Identificadores y esquemas

- Podemos usar un identificador para referirnos a una expresión lógica

$$A = P \wedge Q$$

$$B = P \vee Q$$

- Una expresión que contenga identificadores se denomina un esquema, *e.g.*

$$A \rightarrow B$$

equivale a

$$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

# Notaciones infija, prefija, postfija

Sea  $\circ$  un operador

- Infija: El operador está entre los operandos

$$A \circ B$$

- Prefija: El operador antecede los operandos

$$\circ A B$$

- Postfija: El operador sigue a los operados

$$A B \circ$$

***Los operadores lógicos binarios se usan en notación infija. El operador  $\neg$  en notación prefija.***

# **Tautologías y Contradicciones**

# Tautologías

- Una expresión verdadera para todas las asignaciones de las variables lógicas es una *Tautología*.
- Se usa el símbolo  $\models$  para indicar que una expresión es una tautología.
- Ejemplo

$$\models P \vee \neg P$$

# Ejercicios Tautologías

- Comprobar estas tautologías

$$\models (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

$$\models (P \wedge Q) \rightarrow P$$

$$\models P \rightarrow P \vee Q$$

$$\models (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\models P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$$

# Contradicciones

- Una expresión falsa para todas las asignaciones de las variables es una contradicción
- Ejemplo

$$P \wedge \neg P$$

# Ejercicios contradicciones

Comprobar las contradicciones:

- ♦  $P \leftrightarrow \neg P$
- ♦  $(P \wedge Q) \wedge \neg Q$
- ♦  $\neg P \wedge \neg(P \rightarrow Q \wedge R)$

# Contingencia/Casualidad/ Eventualidad

- Una expresión lógica que no es ni una tautología, ni una contradicción.

Ejemplos:

$$P \wedge Q$$

$$P \vee Q$$

$$P \rightarrow Q$$



# Ejercicios contingencias

Comprobar que las siguientes expresiones son contingencias:

- ♦  $P \wedge (Q \vee R)$
- ♦  $P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$
- ♦  $\neg(P \wedge Q) \wedge \neg R$

# **Implicaciones y Equivalencias Lógicas**

# Implicación y Equivalencia Lógica

Sean  $A$ ,  $B$  dos expresiones lógicas.

- Si  $A \rightarrow B$  es una tautología, entonces se dice que  $A$  implica lógicamente a  $B$  y se representa  $A \Rightarrow B$
- Si  $A$  y  $B$  tienen siempre el mismo valor de verdad, se dice que son lógicamente equivalentes. Se escribe  $A \equiv B$  si y solo si  $A \leftrightarrow B$  es una tautología.

# Ejemplos de equivalencias lógicas

Consideremos el siguiente ejemplo:

- El programa es correcto y está documentado
- El programa está documentado y es correcto

Observar que se trata de dos proposiciones de la forma

$$P \wedge Q \text{ y } Q \wedge P$$

- Si enumeramos los valores de verdad de ambas, son los mismos, por lo tanto son equivalentes:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

# Demostración de equivalencias:

## 1. Tablas de verdad

Ejemplos:

Ley de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Contrarecíprocos

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

# Ejemplos adicionales

Eliminación del condicional

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

Eliminación del bicondicional

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

# Demostración de equivalencias

## 2. Álgebra declarativa

Se parte de unas “leyes” – Equivalencias ya demostradas – y se transforma una expresión lógica en otra.

# Leyes esenciales del álgebra declarativa

Ley del medio excluido	$P \vee \neg P \equiv V$
Ley de contradicción	$P \wedge \neg P \equiv F$
Leyes de identidad	$P \vee F \equiv P$
	$P \wedge V \equiv P$
Leyes de dominación	$P \vee V \equiv V$
	$P \wedge F \equiv F$
Leyes de idempotencia	$P \vee P \equiv P$
	$P \wedge P \equiv P$
Ley de la doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$
Leyes conmutativas	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Leyes asociativas	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Leyes distributivas	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Leyes de De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$



# Ejemplos

## Leyes de Absorción

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$P \vee (\neg P \wedge Q) \equiv P \vee Q$$

## Demostrar

$$\neg((\neg P \wedge Q) \vee P) \equiv \neg(P \vee Q)$$

# Ejemplos

Comprobar las equivalencias

$$\neg(P \wedge Q \wedge R) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

$$P \vee Q \rightarrow P \wedge Q \equiv P \leftrightarrow Q$$

# Ejemplos

Simplificar las expresiones

$$P \vee R \rightarrow P \wedge \neg R$$

$$(P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow P$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

# Formas normales

- **Forma normal disyuntiva:** La expresión lógica esta escrita como una disyunción de términos, todos los cuales son conjunciones de literales.
- **Forma normal conjuntiva:** La expresión lógica está escrita como una conjunción de términos, los cuales son disyunciones de literales.
- Un **literal** es una expresión de la forma  $P$  ó  $\neg P$ .

# Ejemplo

Transformar a la forma normal disyuntiva la expresión

$$\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$$

# Tablas de verdad y formas normales

Dada la tabla de verdad, es posible encontrar la expresión en forma normal disyuntiva así:

- Se hace una conjunción por cada fila verdadera de la tabla de verdad. Estas conjunciones se denominan minitérminos
- La función implícita es la disyunción de todos los minitérminos.
- Opcionalmente, simplificar la expresión final.

Ejemplo

# Ejemplo

Se quiere diseñar una alarma con las siguientes entradas:

- Alarma activada/desactivada
- Sensor de ventana abierta
- Sensor de puerta abierta

La alarma debe encender una sirena cuando este activada y se abra una puerta o una ventana.

# Complementación y formas normales

El complemento de una expresión compleja se puede encontrar así:

- Forma dual: Reemplazar AND por OR y viceversa.
- Reemplazar todos los literales por sus complementos.

Ejemplos:

- Leyes de De Morgan
- Forma normal disyuntiva se transforma fácilmente en la forma normal conjuntiva



# Ejemplo: Operación O-exclusiva

- Por la equivalencia del bicondicional tenemos la FND:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

- Y por dualidad su complemento es

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

- Esta operación se conoce como la o-exclusiva y se simboliza

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \oplus Q$$

# Ejemplo

- Comprobar

$$P \leftrightarrow \neg Q \equiv \neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \oplus Q$$

# Diferencias en notación

	[GT96]	Otros autores
Condicional	$\Rightarrow$	$\rightarrow$
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
Implicación lógica	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Equivalencia lógica	$\equiv$	$\Leftrightarrow$

# Referencias

- Grassman y Tremblay. Cap 1
- Grimaldi. Secciones 2.1 – 2.3
- Stein et al. Sección 3.1