José María Martín Luque
José Luis Ruiz Benito
Ricardo Ruiz Fernández de Alba

*Probabilidad*
D. G. en Ing. Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

21 de diciembre de 2019

# Entrega 1. Propiedades de la esperanza. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejercicio 1. *Demuestra las siguientes propiedades de la esperanza matemática de vectores aleatorios:*

1. *Linealidad. Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *un vector aleatorio tal que existe* $\mathrm{E}[X_i]$ *para todo* $i = 1, \dots, n$ *y para cualesquiera* $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *existe además* $\mathrm{E}[a_i X_i + b_i]$ *para todo* $i = 1, \dots, n$*. Entonces se tiene que*
$$\exists\, \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{E}[X_i] + b_i\,.$$
2. *Conservación del orden. Sean* $X_1$ *y* $X_2$ *dos variables aleatorias tales que* $X_1 \leq X_2$ *y existen tanto* $\mathrm{E}[X_1]$ *como* $\mathrm{E}[X_2]$*. Entonces se verifica que* $\mathrm{E}[X_1] \leq \mathrm{E}[X_2]$.

*Solución.* Veamos la solución por apartados.

1. Vemos primero el caso continuo, pues el caso discreto será análogo. Comenzamos probando la existencia. Que exista $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i\right]$ equivale a que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b_i\right| f_X(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n < \infty.$$
Aplicando la desigualdad triangular llegamos a que
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} &\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b_i\right| f_X(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|a_i x_i + b_i\right|\right) f_X(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n\end{aligned}$$
y como la integral de la suma es la suma de las integrales,
$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|a_i x_i + b_i\right| f_X(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[a_i X_i + b_i] \\ &< \infty,\end{aligned}$$

puesto que al existir dichas esperanzas por hipótesis, tenemos una suma de términos finitos.

Ahora, para ver que se da dicha igualdad observamos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b_i) f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (a_i x_i + b_i) f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} a_i x_i f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n + \int_{\mathbb{R}^n} b_i f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( a_i \int_{\mathbb{R}^n} x_i f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n + b_i \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \right),
\end{aligned}$$

donde la integral que multiplica a cada $a_i$ es $\mathrm{E}[X_i]$, y la que multiplica a $b_i$, la integral de la función de densidad —cuyo valor es 1 por definición—. En consecuencia, tenemos que

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \mathrm{E}[X_i] + b_i\right),$$

como queríamos.

En el caso discreto $-P(\mathbf{X} \in E_{\mathbf{X}}) = 1$, siendo $E_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}$ numerable—, que exista la esperanza $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i\right]$ equivale a que

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in E_{\mathbf{X}}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b_i \right| f_X(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n < \infty.$$

Aplicando la desigualdad triangular llegamos a que

$$\begin{aligned}
\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in E_{\mathbf{X}}} & \left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b_i \right| p_X(x_1, \dots, x_n) \\
&\le \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in E_{\mathbf{X}}} \left( \sum_{i=1}^{n} \left| a_i x_i + b_i \right| p_X(x_1, \dots, x_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in E_{\mathbf{X}}} \left| a_i x_i + b_i \right| p_X(x_1, \dots, x_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[a_i X_i + b_i] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

puesto que al existir dichas esperanzas por hipótesis, tenemos una suma de términos finitos.

Ahora, para ver que se da dicha igualdad observamos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b_i\right] \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i + b_i)p_X(x_1,\ldots,x_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} (a_ix_i + b_i)p_X(x_1,\ldots,x_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} a_ix_ip_X(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} b_ip_X(x_1,\ldots,x_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} x_ip_X(x_1,\ldots,x_n) + b_i \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_X} p_X(x_1,\ldots,x_n)\right),
\end{aligned}$$

donde la suma que multiplica a cada $a_i$ es $\mathrm{E}[X_i]$, y la que multiplica a $b_i$, la suma de los valores de la función masa de probabilidad —cuyo valor es 1 por definición—. En consecuencia, tenemos que

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\,\mathrm{E}[X_i] + b_i\right),$$

como queríamos.

2. *a*) Caso continuo: Suponemos que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio continuo y $f_X(x_1, x_2)$ su función de densidad. Utilizando que $X_1 \leq X_2$ y que si $x_1 > x_2$ se tiene que $f_X(x_1, x_2) = 0$, y calculando las respectivas esperanzas, llegamos a al resultado que buscamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1] &= \int_{\{(x_1,x_2)\,:\,x_1\leq x_2\}} x_1 f_X(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\
&\leq \int_{\{(x_1,x_2)\,:\,x_1\leq x_2\}} x_2 f_X(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \mathrm{E}[X_2].
\end{aligned}$$

   *b*) Caso discreto: Suponemos que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio discreto y $p_X(x_1, x_2)$ su función masa de probabilidad. De nuevo, utilizando que $X_1 \leq X_2$ y que si $x_1 > x_2$ se tiene que $p_X(x_1, x_2) = 0$, y calculando las respectivas esperanzas, llegamos a al resultado que buscamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1] &= \sum_{\{(x_1,x_2)\,:\,x_1\leq x_2\}} x_1 f_X(x_1,x_2) \\
&\leq \sum_{\{(x_1,x_2)\,:\,x_1\leq x_2\}} x_2 f_X(x_1,x_2) = \mathrm{E}[X_2].
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

> *Sean X, Y variables aleatorias tales que existen las esperanzas* $\mathrm{E}[X^2]$ *y* $\mathrm{E}[Y^2]$. *Entonces:*
>
> 1. $\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2 \leq \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$.
> 2. *Si X o Y es degenerada en cero o las dos son degeneradas, se da la igualdad.*
> 3. *Si X e Y son no degeneradas, se da la igualdad si y sólo si existen* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tales que* $\mathrm{P}[aX + bY = 0] = 1$.

*Solución.* Veamos la solución por apartados:

1. Sabemos por las propiedades de los momentos de segundo orden que si existen $\mathrm{E}[X^2]$ y $\mathrm{E}[Y^2]$ entonces existe $\mathrm{E}[XY]$. Analizamos de forma separada los casos $\mathrm{E}[X^2] = 0$ y $\mathrm{E}[X^2] \neq 0$.
   - Si $\mathrm{E}[X^2] = 0$, como $X^2 > 0$, debe cumplirse que $\mathrm{P}[X = 0] = 1$ y $\mathrm{P}[X = 0] = 1$, luego $\mathrm{E}[XY] = 0$. Por tanto se cumple la igualdad cuando cuando $\mathrm{E}[X^2] = 0$ o bien $\mathrm{E}[Y^2] = 0$ y con ello demostramos además la segunda afirmación.
   - Veamos ahora el caso en el que $\mathrm{E}[X^2] \neq 0$. Definimos el valor

     $$\alpha_0 = -\frac{\mathrm{E}[XY]}{\mathrm{E}[X^2]} \in \mathbb{R}$$

     y la variable aleatoria $Z = \alpha_0 X + Y$. Calculamos la esperanza de $Z^2$:

     $$\begin{aligned}
     \mathrm{E}[Z^2] &= \mathrm{E}\left[(\alpha_0 X + Y)^2\right] \\
     &= \mathrm{E}[\alpha_0^2 X^2 + Y^2 + 2\alpha_0 XY] \\
     &= \alpha_0^2\,\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2] + 2\alpha_0\,\mathrm{E}[XY] \\
     &= \frac{\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2}{\left(\mathrm{E}[X^2]\right)^2}\,\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2] - 2\frac{\mathrm{E}[XY]}{\mathrm{E}[X^2]}\,\mathrm{E}[XY] \\
     &= \frac{\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2}{\mathrm{E}[X^2]} + \mathrm{E}[Y^2] - 2\frac{\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2}{\mathrm{E}[X^2]} \\
     &= \mathrm{E}[Y^2] - \frac{\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2}{\mathrm{E}[X^2]}.
     \end{aligned}$$

     Como $\mathrm{E}[Z^2] \geq 0$, tenemos que

     $$\mathrm{E}[Y^2] - \frac{\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2}{\mathrm{E}[X^2]} \geq 0$$

     si y solo si $\left(\mathrm{E}[XY]\right)^2 \leq \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$, luego $\mathrm{E}[XY] \leq \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$, que es la desigualdad buscada.

2. Ya demostrado en el apartado anterior.

3. Puesto que ninguna de las variables es degenerada se tiene que $E[X^2] \neq 0$ y que $E[Y^2] \neq 0$. Veamos ambas implicaciones por separado.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Definimos de nuevo el valor

   $$\alpha_0 = -\frac{E[XY]}{E[X^2]} \in \mathbb{R}$$

   y recordamos que

   $$E\left[(\alpha_0 X + Y)^2\right] = E[Y^2] - \frac{\left(E[XY]\right)^2}{E[X^2]}.$$

   Si se verifica la igualdad, entonces

   $$E[Y^2] - \frac{\left(E[XY]\right)^2}{E[X^2]} = 0$$

   y se tiene que $E\left[(\alpha_0 X + Y)^2\right] = 0$. Como $(\alpha_0 X + Y)^2 \geq 0$, debe ser $P[\alpha_0 X + Y = 0] = 1$. Por tanto, $a = \alpha_0$ y $b = 1$.

   Falta comprobar que $a = \alpha_0 \neq 0$ o, equivalentemente, que $E[XY] \neq 0$, para lo que procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $E[XY] = 0$. Entonces se tiene que $E[X^2] = 0$ o bien $E[Y^2] = 0$, lo cual es imposible por hipótesis.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Partimos de que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $P[aX + bY = 0] = 1$, lo que equivale a que $P\left[Y = -{}^{a}\!/\!_{b}\, X\right] = 1$. Esto implica que

   $$E[Y^2] = \frac{a^2}{b^2} E[X^2] \quad \text{y que} \quad E[XY] = -\frac{a}{b} E[X^2],$$

   lo que se da si y solo si

   $$\left(E[XY]\right)^2 = E[X^2]\,E[Y^2].$$