Devoir maison
États cohérents, oscillateur harmonique, décohérence

Ce travail personnel est à rendre au plus tard le vendredi 18 décembre 2020. Aucun délai ne sera accordé.

Partie I Dans cette partie, nous introduisons et étudions la notion d'états cohérents. Nous nous plaçons dans le cas simple unidimensionnel, avec des opérateurs position X et impulsion P satisfaisant à la relation de commutation canonique $[X, P] = i\hbar$.

Un *état cohérent* est un état pour lequel la relation d'incertitude de Heisenberg est saturée : $\Delta X \Delta P = \hbar/2$. Physiquement, le comportement d'un système dans un état cohérent se rapproche, au moins qualitativement, de ce que l'on aurait dans la théorie classique. Comme nous le verrons, ceci est particulièrement clair dans le cas de l'oscillateur harmonique. Mathématiquement, les états cohérents ont aussi des propriétés intéressantes qui peuvent être utilisées pour simplifier certains calculs.

1) En reprenant la démonstration des inégalités de Heisenberg, montrer que l'état cohérent le plus général a une fonction d'onde gaussienne dépendant de trois paramètres réels, que l'on peut prendre égaux à $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ et $\ell = \sqrt{2}\Delta X$, par exemple. Explicitement, en choisissant le facteur de phase global par convenance ultérieure,
$$\psi(x) = \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar}\langle X\rangle\langle P\rangle}}{(\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\langle X\rangle)^2}{2\ell^2} + \frac{i\langle P\rangle x}{\hbar}} \,. \tag{1}$$

2) On introduit
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{X}{\ell} + \frac{i\ell P}{\hbar}\Big)\,. \tag{2}$$

   a) Calculer $[a, a^\dagger]$.

   b) Montrer que, pour tout nombre complexe α, a a un unique vecteur propre $|\alpha\rangle$, qui n'est rien d'autre que l'état cohérent (1) avec
$$\alpha = \langle a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\langle X\rangle}{\ell} + \frac{i\ell\langle P\rangle}{\hbar}\Big)\,. \tag{3}$$

c) Calculer $\langle 0|\alpha\rangle$ en effectuant directement l'intégrale gaussienne correspondante.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle\,. \tag{4}$$

(La notation que nous utilisons, qui est traditionnelle, est ambiguë : on fera attention à ne pas confondre les états $|n\rangle$, où $n \in \mathbb{N}$, et les états $|\alpha\rangle$, où $\alpha \in \mathbb{C}$; ceux-ci coïncident uniquement dans le cas $n = \alpha = 0$). Rappeler l'interprétation des états $|n\rangle$, et pourquoi en particulier ils forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert. Calculer $\langle n|\alpha\rangle$. En déduire que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha a^\dagger}|0\rangle\,. \tag{5}$$

e) En déduire que

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha\beta^*)}\,. \tag{6}$$

Pouvez-vous commenter sur le fait que $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ ne sont pas orthogonaux entre eux, même lorsque $\alpha \neq \beta$ (i.e., même lorsqu'ils correspondent à des valeurs propres distinctes de a) ?

f) Résoudre à nouveau le problème des vecteurs propres de a, mais en utilisant une méthode purement algégrique, en partant du développement des vecteurs propres sur la base des $|n\rangle$.

g) Dans cette question, on utilise l'interprétation en terme de particules des opérateurs a et $a^\dagger$. Quelle est la probabilité de trouver n particules dans l'état $|\alpha\rangle$? Savez-vous comment s'appelle la distribution de probabilité obtenue ? Quel est le nombre moyen de particules dans l'état $|\alpha\rangle$?

3) Pour tout nombre complexe α, on définit

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\,. \tag{7}$$

a) Montrer que $D(\alpha)$ est unitaire.

b) Montrer que

$$D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)}\,. \tag{8}$$

c) En déduire que

$$D(\alpha)|\beta\rangle = e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)}|\alpha+\beta\rangle\,, \tag{9}$$

d'où le nom "opérateur déplacement" souvent utilisé pour $D(\alpha)$.

4) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\iint \mathrm{dRe}(\alpha)\mathrm{dIm}(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I}\,, \tag{10}$$

où l'intégrale s'étend sur tout le plan complexe $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Cette relation donne une décomposition spectrale de l'espace de Hilbert en terme de l'opérateur a, bien que celui-ci ne soit pas auto-adjoint !

Partie II Dans cette partie, nous allons démontrer que les états cohérents ont une propriété remarquable pour l'oscillateur harmonique : ils sont préservés par l'évolution dans le temps. En particulier, le phénomène d'étalement du paquet d'onde, inévitable dans le cas d'une particule libre, n'a pas lieu pour les états cohérents de l'oscillateur harmonique !

On considère donc le hamiltonien

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \tag{11}$$

et on définit

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,. \tag{12}$$

1) Montrer que si l'oscillateur est initialement dans l'état cohérent $|\psi\rangle(t=0) = |\alpha\rangle$, alors à un temps t quelconque il est dans l'état cohérent

$$|\psi\rangle(t) = e^{-i\omega t/2}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle\,. \tag{13}$$

2) Calculer $\langle X\rangle(t)$, $\langle P\rangle(t)$, $(\Delta X)(t)$ $(\Delta P)(t)$, $\langle H\rangle(t)$ et $\Delta H(t)$. Commenter sur les dépendances temporelles de ces différentes quantités.

3) L'évolution de l'oscillateur harmonique dans un état cohérent se rapproche donc beaucoup de l'image classique pour cet oscillateur. On considère un oscillateur macroscopique, correspondant à un pendule pesant suspendu à un fil de longueur $L = 10\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$. Si θ est l'angle repérant la position du pendule par rapport à la verticale, on suppose que le pendule effectue de petites oscillations, d'amplitude $L|\theta_{\max}| = 1\,\mathrm{cm}$.

   Que vaut ω ? Que vaut ℓ ? Que vaut $|\alpha|^2$ pour l'état cohérent reproduisant au plus près le mouvement classique du pendule ? Que vaut $\Delta H/\langle H\rangle$? Conclusions ?

Partie III Dans cette partie, nous allons étudier, sur un modèle très simple, le phénomène de décohérence. En particulier, notre but sera de chercher à bien comprendre pourquoi on n'observe jamais un oscillateur macroscopique dans une superposition linéaire d'états macroscopiquement distinguables.

On considère donc un oscillateur harmonique "macroscopique." En pratique, ceci veut dire que son état initial est un état cohérent, ou une superposition d'états cohérents, caractérisés par un "nombre de particules" moyen très grand (par exemple 10^{30}).

On modélise l'environnement dans lequel est plongé cet oscillateur par un autre oscillateur harmonique de même fréquence (un modèle plus réaliste consisterait à modéliser l'environnement par un ensemble très grand (voire infini) d'oscillateurs ayant une certaine distribution de fréquences, mais le cas d'un unique oscillateur suffit pour dégager la physique qualitative du problème).

Le hamiltonien est

$$H = \hbar\omega\big(a^\dagger a + 1/2\big) + \hbar\omega\big(b^\dagger b + 1/2\big) + \hbar\lambda\big(ab^\dagger + a^\dagger b\big)\,. \tag{14}$$

Le premier terme dans H correspond à l'oscillateur macroscopique, le deuxième correspond à l'environnement et le troisième décrit le couplage entre l'environnement et l'oscillateur macroscopique (λ est une constante de couplage strictement positive).

L'espace de Hibert total est $\mathscr{H} = \mathscr{H}_a \otimes \mathscr{H}_b$, une base de $\mathscr{H}_a$ étant donnée par les $|n,a\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$ et une base de $\mathscr{H}_b$ par les $|n,b\rangle = (b^\dagger)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$. Une base de $\mathscr{H}$ est donnée par les $|n,a;m,b\rangle = |n,a\rangle \otimes |m,b\rangle$. (Remarquer que la notation utilisée, qui est traditionnelle, n'est pas parfaitement précise ; par exemple l'opérateur a est vu aussi bien comme un opérateur agissant sur $\mathscr{H}_a$ que sur $\mathscr{H}$, alors qu'en principe l'opérateur agissant sur $\mathscr{H}$ devrait être noté $a \otimes \mathbb{I}_{\mathscr{H}_b}$; L'état $|0\rangle$ représente tout aussi bien l'état fondamental $|0,a\rangle$, que $|0,b\rangle$ ou encore $|0,a;0,b\rangle$; etc...).

1) On introduit les opérateurs

$$A = \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,, \quad B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}\,\cdot \tag{15}$$

   a) Calculer tous les commutateurs entre les opérateurs A, $A^\dagger$, B et $B^\dagger$. Conclusion ?

   b) En déduire le spectre de H ainsi qu'une base de vecteurs propres de H.

2) On introduit les opérateurs déplacement D_a, D_b, D_A et D_B associés aux opérateurs a, b, A et B respectivement (voir la partie I, question 3), ainsi que les états cohérents, notés $|\alpha,a\rangle$, $|\alpha,b\rangle$ etc...

a) Montrer que

$$D_a(\alpha) = D_A(\alpha/\sqrt{2}) D_B(\alpha/\sqrt{2}) \,, \; D_b(\alpha) = D_A(\alpha/\sqrt{2}) D_B(-\alpha/\sqrt{2}) \,, \tag{16}$$

et que

$$D_A(\alpha) = D_a(\alpha/\sqrt{2}) D_b(\alpha/\sqrt{2}) \,, \; D_B(\alpha) = D_a(\alpha/\sqrt{2}) D_b(-\alpha/\sqrt{2}) \,. \tag{17}$$

b) On considère un état initial de la forme

$$|\psi\rangle(t=0) = |\alpha, a\rangle |0, b\rangle \,, \tag{18}$$

pour lequel l'oscillateur macroscopique est dans un état cohérent. En utilisant en particulier les résultats de la partie III, calculer $|\psi\rangle(t)$ pour tout temps t. Y a-t-il intrication entre l'oscillateur et l'environnement dans ce cas ? Commentaires ?

3) Pour étudier le phénomène de décohérence, on considère qu'initialement l'oscillateur macroscopique est dans une superposition linéaire d'états macroscopiquement distincts,

$$|\psi\rangle(t=0) = \mathcal{N}\big(|\alpha, a\rangle + |\beta, a\rangle\big)|0, b\rangle \,. \tag{19}$$

a) Comment se traduit le fait que les états $|\alpha, a\rangle$ et $|\beta, a\rangle$ sont macroscopiques, et le fait qu'ils sont macroscopiquement distinguables ? Par exemple, quelle est la relation entre α et β pour un oscillateur qui serait dans une superposition de deux mouvements classiques en opposition de phase ? Que vaut $\mathcal{N}$ sous ces hypothèses ?

b) Calculer $|\psi\rangle(t)$ et en déduire le temps de décohérence t_{D}. Comparer ce temps au temps de relaxation typique du système (temps caractéristique d'évolution macroscopique). Conclusions ?

c) Quel est le défaut principal de notre modèle ? Comment pourrait-on le modifier afin d'y pallier ?

d) Décrire qualitativement un processus de mesure, dans lequel l'oscillateur macroscopique servirait d'appareil de mesure, et la création de la superposition (19) serait le résultat d'une prémesure. Expliquer en quoi le phénomène de décohérence met en évidence un lien profond entre intrication et complémentarité, et en particulier permet d'interpréter le principe de "réduction du paquet d'onde."

Rappel : quelques formules utiles

Formule de Glauber : si A et B sont deux opérateurs qui commutent avec leur commutateur $[A, B]$,

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2} \,. \tag{20}$$

Intégrales gaussiennes : on note $(,)$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel de dimension n, A un opérateur symétrique, J un vecteur. On a

$$\int \mathrm{d}X e^{-\frac{1}{2}(X,A\cdot X)+(J,X)} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\, e^{\frac{1}{2}(J,A^{-1}\cdot J)} \,, \tag{21}$$

où l'intégrale est prise sur les vecteurs X, $\mathrm{d}X = \prod_{i=1}^n \mathrm{d}X_i$ si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ dans une base orthonormée. Noter que dans une telle base,

$$(X, A\cdot X) = \sum_{1\le i,j\le n} X_i A_{ij} X_j \,,\ (J, X) = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i \,,\ (J, A^{-1}\cdot J) = \sum_{1\le i,j\le n} J_i A^{-1}_{ij} J_j \,. \tag{22}$$

Par exemple, dans le cas $n = 1$, la formule (21) donne l'intégrale gaussienne élémentaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{b^2/(2a)} \,. \tag{23}$$

La formule (21) se démontre facilement en diagonalisant A. La formule se généralise au cas de la dimension infinie (intégrale de chemin).