PHYS-F302 - Mécanique Quantique

Devoir maison - Etats cohérents, oscillateur harmonique et décohérence

Moeil Juian

Université Libre de Bruxelles

Année académique 2021-2022

14 janvier 2022

Table des matières

Remarque 0.1. *Les termes en **gras** indiquent des opérateurs. On pose $\doteq$ comme un symbole pour "égal par définition à".*

1 Partie I - Etude des états cohérents

On se restreint au cas unidimensionnel, en se munissant des opérateurs position $\boldsymbol{X}$ et impulsion $\boldsymbol{P}$, satisfaisant la relation de commutation canonique $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}] = i\hbar$.

Introduction des concepts clés

Définition 1.1 (Ecart quadratique moyen)**.** *Soit $\boldsymbol{A}$ une observable. L'écart quadratique moyen de $\boldsymbol{A}$ dans l'état $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ pour tout $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ est*

$$\Delta \boldsymbol{A} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} = \left\langle (\boldsymbol{A} - \langle \boldsymbol{A} \rangle)^2 \right\rangle. \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (Inégalité de Heisenberg)**.** *Pour toute observable $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, nous avons que*

$$\Delta \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{B} \geq \frac{1}{2} \| \langle [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \rangle \|. \tag{1.2}$$

Définition 1.3. *On définit un état cohérent comme un état $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dans lequel l'inégalité de Heisenberg est saturée, c'est à dire tel que*

$$\Delta \boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{P} = \frac{\hbar}{2}. \tag{1.3}$$

En partant de cette définition, nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une définition algébrique (généralement plus simple à manipuler) d'un état cohérent. En particulier, l'étude des propriétés des états cohérents nous permettra d'obtenir deux formulations équivalentes ; l'une en terme de l'opérateur destruction dans la section 1.2, et l'autre - dans la section 1.3 - en terme de l'opérateur de déplacement. On finira par constater l'existence d'une relation de fermeture en 1.4. Pour faire tous cela, nous avons besoin de l'expression analytique d'un état cohérent : nous consacrons la section 1.1 à la déterminer.

1.1 Fonction d'onde d'un état cohérent

Proposition 1.4. *La fonction d'onde d'un état cohérent est donné par*

$$\psi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi} \langle \boldsymbol{X} \rangle \langle \boldsymbol{P} \rangle\right)}{(\pi l^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x - \langle \boldsymbol{X} \rangle)^2}{2l^2} + \frac{i \langle \boldsymbol{P} \rangle x}{\hbar}\right). \tag{1.4}$$

Remarque 1.5. *L'expression recherchée dépendra de trois paramètres réels, que nous prendrons dans cette discussion égales à $\langle \boldsymbol{X} \rangle$, $\langle \boldsymbol{P} \rangle$ et $l \doteq \sqrt{2}\Delta \boldsymbol{X}$.*

Démonstration. **Développement général**

Suivons le même raisonnement que celui exploité pour démontrer l'inégalité de Heisenberg dans le cours. On introduit $\mathscr{O}(\lambda) = f^\dagger(\lambda) f(\lambda)$, où $\begin{cases} f(\lambda) = \tilde{\boldsymbol{A}} + i\lambda \tilde{\boldsymbol{B}} \\ \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \langle \boldsymbol{A} \rangle \\ \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} - \langle \boldsymbol{B} \rangle \end{cases}$.

Observons que la valeur moyenne de $\mathscr{O}(\lambda)$ est positive. En effet,

$$\forall |\psi\rangle \in H, \quad \langle \psi | f^\dagger(\lambda) f(\lambda) | \psi \rangle = \| f(\lambda) |\psi\rangle \|^2 \geq 0.$$

Or, $\langle \mathscr{O}(\lambda)\rangle = \lambda^2 \left\langle \tilde{\boldsymbol{B}}^2 \right\rangle + \lambda \left\langle i[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}] \right\rangle + \left\langle \tilde{\boldsymbol{A}}^2 \right\rangle$. Notons qu'il s'agit d'une équation quadratique en λ : ainsi, le minimum doit donc être donné par

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\langle \mathscr{O}(\lambda)\rangle}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{min}} &= 0 = 2\lambda_{min} \left\langle \tilde{\boldsymbol{B}}^2 \right\rangle + \left\langle i[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}] \right\rangle \\ \lambda_{min} &= -\frac{\left\langle i[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}] \right\rangle}{2\left\langle \tilde{\boldsymbol{B}}^2 \right\rangle} = -\frac{\left\langle i[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}] \right\rangle}{2\left(\Delta \tilde{\boldsymbol{B}}\right)^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Notons que λ_{min} est bien un minimum, car l'équation décrivant $\langle \mathscr{O}(\lambda)\rangle$ est une équation du second degré en λ avec un coefficient en λ^2 positif.

Application aux opérateurs position et impulsion

Posons $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}$. Le minimum, λ_{min}, s'exprime alors par $\frac{\hbar}{2(\Delta \boldsymbol{P})^2}$. En particulier, nous trouvons alors que $\langle \mathscr{O}(\lambda)\rangle = 0$ si et seulement si

$$\left(\tilde{\boldsymbol{X}} + i\lambda_{min}\tilde{\boldsymbol{P}}\right)|\psi\rangle = 0$$

Ce que nous réécrivons comme

$$(\boldsymbol{X} - \langle \boldsymbol{X}\rangle)|\psi\rangle = -\frac{i\hbar}{2(\Delta \boldsymbol{P})^2}(\boldsymbol{P} - \langle \boldsymbol{P}\rangle)|\psi\rangle \tag{1.6}$$

Posons $l = 2\Delta \boldsymbol{X}$. Puisqu'un état cohérent sature l'inégalité de Heisenberg, nous pouvons écrire $2(\Delta \boldsymbol{P})^2 = \frac{\hbar^2}{2(\Delta \boldsymbol{X})^2} = \frac{\hbar^2}{l^2}$, de sorte que (1.6) se réécrive

$$(\boldsymbol{X} - \langle \boldsymbol{X}\rangle)|\psi\rangle = -i\frac{l^2}{\hbar}(\boldsymbol{P} - \langle \boldsymbol{P}\rangle)|\psi\rangle \tag{1.7}$$

Finalement, en notant que dans la base position l'opérateur impulsion s'écrit $\boldsymbol{P}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}|\psi\rangle$, nous pouvons alors mettre en évidence l'*équation différentielle*

$$\begin{aligned} -x\psi(x) + \langle \boldsymbol{X}\rangle \psi(x) &= \frac{il^2}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{i}\psi'(x) - \langle \boldsymbol{P}\rangle \psi(x)\right) \\ \psi'(x) &= \left[\frac{\langle \boldsymbol{X}\rangle - x}{l^2} + \frac{i}{\hbar}\langle \boldsymbol{P}\rangle\right]\psi(x). \end{aligned}$$

Que nous résolvons par séparation des variables. Cela donne :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) &= \left[\frac{\left(\boldsymbol{X} - \frac{1}{2}x\right)x}{l^2} + \frac{i}{\hbar}\langle \boldsymbol{P}\rangle x\right] \qquad \forall \psi_0 \in \mathbb{C} \\ \ln\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right) &= \left[-\frac{(x - \langle \boldsymbol{X}\rangle)^2}{2l^2} + \frac{\langle \boldsymbol{X}\rangle}{2l} + \frac{i}{\hbar}\langle \boldsymbol{P}\rangle x\right] \\ \psi(x) &= \psi_0 \exp\left(-\frac{(x - \langle \boldsymbol{X}\rangle)^2}{2l^2} + \frac{i}{\hbar}\langle \boldsymbol{P}\rangle x\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

La fonction d'onde d'un état cohérent est donc donnée par une *gaussienne* !

Constante de normalisation

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la valeur de $\psi_0 \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, nous exploitons la propriété suivante

Proposition 1.6. *Pour toute fonction d'onde $\Psi(x,t)$, la condition de normalisation s'écrit*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \|\Psi(x,t)\|^2 = 1. \tag{1.9}$$

Démonstration. Il s'agit d'une condition imposée par les postulats de la mécanique quantique. Nous la prenons donc pour acquise et ne devons pas la prouver. ■

Commencons par réarranger les termes dans l'exponentielle

$$\psi(x) = \psi_0 \ \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2} - \frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle^2}{2l^2} + x \left(\frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle}{l^2} + \frac{i \langle \boldsymbol{P} \rangle}{\hbar} \right) \right)$$

La condition de normalisation nous indique alors que

$$\|\psi_0\|^2 \exp\left(-\frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle^2}{l^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \exp\left(-\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{2 \langle \boldsymbol{X} \rangle}{l^2} x \right) = 1$$

$$\|\psi_0\|^2 \sqrt{\pi l^2} = 1 \qquad \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} \in \mathbb{R}$$

Puisque le choix de phase globale n'a aucune importance physique, nous avons la liberté de prendre une phase de notre choix. En particulier, nous pouvons donc écrire

$$\psi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi} \langle \boldsymbol{X} \rangle \langle \boldsymbol{P} \rangle \right)}{(\pi l^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x - \langle \boldsymbol{X} \rangle)^2}{2l^2} + \frac{i \langle \boldsymbol{P} \rangle x}{\hbar} \right)$$

ce qui conclut notre discussion sur la fonction d'onde d'un état cohérent. ■

1.2 Opérateurs d'échelle

Introduisons l'opérateur

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{X}}{l} + \frac{il\boldsymbol{P}}{\hbar} \right). \tag{1.10}$$

$\boldsymbol{a}$ porte le nom d'*opérateur destruction*. Nous dressons un rappel-issu du cours théorique- de ses propriétés dans la base de Fock en 1.2.4 : cela suffira à comprendre la logique derrière son nom.

1.2.1 Commutateur $[a, a^\dagger]$

L'expression de commutation des bosons est donnée par

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^\dagger] = \frac{1}{2} [\frac{\boldsymbol{X}}{l} + \frac{il\boldsymbol{P}}{\hbar}, \frac{\boldsymbol{X}}{l} - \frac{il\boldsymbol{P}}{\hbar}] = -\frac{i}{2\hbar}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}] - \frac{i}{2\hbar}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}] = -\frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}] = \mathbb{I}, \tag{1.11}$$

en exploitant directement la définition de $\boldsymbol{a}$.

1.2.2 Valeur propre de a - résolution analytique

Placons nous dans un espace de Hilbert, et prenons un vecteur $|\psi\rangle$ lui appartenant. Nous recherchons les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\boldsymbol{a} |\psi\rangle = \alpha |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{X}}{l} + \frac{il\boldsymbol{P}}{\hbar} \right) |\psi\rangle .$$

Commencons par remarquer que l'expression précédente nous permet de directement déduire la relation (3) de l'énoncé :

$$\langle \psi | \boldsymbol{a} | \psi \rangle = \alpha \langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle}{l} + \frac{il \langle \boldsymbol{P} \rangle}{\hbar} \right).$$

Le problème se réduit donc à résoudre

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{X}}{l} + \frac{il\boldsymbol{P}}{\hbar} \right) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\langle \boldsymbol{X} \rangle}{l} + \frac{il \langle \boldsymbol{P} \rangle}{\hbar} \right) |\psi\rangle$$

$$(\boldsymbol{X} - \langle \boldsymbol{X} \rangle) |\psi\rangle = -\frac{il^2}{\hbar} (\boldsymbol{P} - \langle \boldsymbol{P} \rangle) |\psi\rangle .$$

Or, il s'agit de l'équation (1.7), que nous avons déjà entièrement résolu en 1.1. Nous voyons en particulier que, à l fixé, la solution est unique. Par convention, nous posons $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$. La fonction d'onde $\langle x|\psi\rangle = \langle x|\alpha\rangle$ est déterminée par la gaussienne que nous avons trouvé en 1.1.

Théorème 1.7. *$|\alpha\rangle$ est un état cohérent (tel que défini en 1.3) si et seulement si $|\alpha\rangle$ vérifie l'équation aux valeurs propres*

$$\boldsymbol{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{C} \tag{1.12}$$

c'est à dire si et seulement si $|\alpha\rangle$ est un état propre de l'opérateur annihilation $\boldsymbol{a}$.

Démonstration. La preuve dans le sens direct est le développement débutant au début de 1.2.2. Nous ne faisons pas la preuve dans le sens réciproque ($\boldsymbol{a}\,|\psi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle$ pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$ implique que $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ est de la forme 1.4), car cela ne fait pas l'objet de ce devoir. ∎

Remarque 1.8. *Observons que, comme annoncé, nous venons de mettre en évidence une formulation équivalente à 1.3 d'un état cohérent, en exploitant l'opérateur annihilation.*

Nous avons à présent les connaissances pour démontrer la proposition suivante. Elle sera particulièrement utile dans la suite.

Proposition 1.9. *Soit $\{|n\rangle : n\in\mathbb{N}\}$ une base de Fock, et soit $\{|\alpha\rangle : \alpha\in\mathbb{C}\}$ un ensemble d'états cohérents. Alors, pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha\rangle = e^{-\|\alpha\|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$.*

Démonstration. Puisque la base de Fock et la base des états cohérents peuvent tous les deux être utilisés pour décrire un Oscillateur Harmonique, il doit être possible d'exprimer tout vecteur dans l'une des bases en terme de l'autre. En particulier, cela se traduit par $|\alpha\rangle = \sum_n c_n\,|n\rangle$, pour tout $c_n\in\mathbb{C}$. En exploitant (1.12), nous trouvons

$$\boldsymbol{a}\,|\alpha\rangle = \sum_n c_n a\,|n\rangle = \sum_n c_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \alpha\sum_n c_n\,|n\rangle$$

De cette égalité, nous déduisons $c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$. Par récurrence, nous pouvons alors montrer que $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$. En injectant cela dans notre somme, on se retrouve avec $|\alpha\rangle = c_0\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$. Par normalisation,

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = \|c_0\|^2\sum_{n,m\geq 0}\frac{\bar{\alpha}^m\alpha^n}{\sqrt{n!m!}}\,\langle m|n\rangle = \|c_0\|^2\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n}{n!} = \|c_0\|^2 e^{\|\alpha\|^2}$$

où nous avons utilisé la représentation sous forme de série de la fonction exponentielle. En particulier, nous avons alors $c_0 = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}$, ce qui implique la relation recherchée. ∎

1.2.3 Produit scalaire avec le vide

Nous voulons déterminer la valeur de $\langle 0|\alpha\rangle$. Pour ce faire, nous verrons qu'il existe plusieurs méthodes distinctes. Nous trouverons ici le résultat en résolvant une intégrale gaussienne, et ensuite en invoquant le résultat 1.9. En particulier, nous verrons que cette dernière proposition permet de grandement simplifier le développement.

Résolution par intégrale gaussienne

Proposition 1.10. *Dans la représentation position, la relation*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\;\,|x\rangle\langle x| = \mathbb{I} \tag{1.13}$$

forme une relation de fermeture.

Démonstration. La démonstration est donnée dans le cours théorique. ∎

En exploitant cette propriété, nous pouvons résoudre le problème assez facilement. En effet,

$$|0\rangle\langle\alpha| = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \langle 0|x\rangle \langle x|\alpha\rangle$$

Or, le terme $\langle x|0\rangle$ correspond à l'état fondamental d'un état cohérent ! Sa valeur est donnée dans le cours théorique. Le terme $\langle x|\alpha\rangle$ correspond à la fonction gaussienne déterminée en 1.1.

$$\begin{aligned}\langle 0|\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)}{(\pi l^2)^{1/4}}\right)\left[\frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\langle \boldsymbol{X}\rangle\langle \boldsymbol{P}\rangle\right)}{(\pi l^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{(x-\langle \boldsymbol{X}\rangle)^2}{2l^2}+\frac{i\langle \boldsymbol{P}\rangle x}{\hbar}\right)\right]\\ &= \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\langle \boldsymbol{X}\rangle\langle \boldsymbol{P}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{X}\rangle^2}{2l^2}\right)}{l\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \exp\left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + x\underbrace{\left(\frac{\langle \boldsymbol{X}\rangle}{l^2}+\frac{i\langle \boldsymbol{P}\rangle}{\hbar}\right)}_{\frac{\sqrt{2}\alpha}{l}}\right)\end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'une intégrale gaussienne. En posant $a = \frac{2}{l^2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}\alpha}{l}$, nous pouvons la résoudre selon la formule (23) de l'énoncé.

$$\langle 0|\alpha\rangle = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\langle \boldsymbol{X}\rangle\langle \boldsymbol{P}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{X}\rangle^2}{2l^2}\right)}{l\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}l\exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}$$

Résolution par la propriété 1.9

La solution est directe en utilisant cette propriété. En effet,

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha^2\|}$$

où nous avons exploité le fait que $\langle 0|n\rangle$ est nul pour tout $n \neq 0$.

1.2.4 'Fock state' vs. 'Coherent state'

Dans le cours théorique, nous avons introduit la base de Fock comme étant l'ensemble des vecteurs $|n\rangle$ diagonalisant l'opérateur nombre $N = \boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$. Nous avons en particulier démontré une série de propriétés remarquables sur ces vecteurs propres $|n\rangle$, en voici quelques unes.

Lemme 1.11. *L'opérateur nombre* $\boldsymbol{N}$ *est hermitien :* $\boldsymbol{N}^\dagger = \boldsymbol{a}^\dagger\left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^\dagger$.

Proposition 1.12. *L'opérateur nombre* $\boldsymbol{N}$ *est positif, dans le sens défini au cours : tout vecteur propre* $|n\rangle$ *de* $\boldsymbol{N}$ *est associé à une valeur propre* $n \geq 0$.

Lemme 1.13. $[\boldsymbol{N}, a] = -a$ *et* $[\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a}^\dagger] = \boldsymbol{a}^\dagger$

Proposition 1.14. *Soit* $|\varphi\rangle$ *un vecteur propre de* $\boldsymbol{N}$ *de valeur propre* ν *:* $\boldsymbol{N}|\varphi\rangle = \nu|\varphi\rangle$. *Alors,*

— $\boldsymbol{a}|\varphi\rangle$ *est vecteur propre de* $\boldsymbol{N}$ *de valeur propre* $\nu - 1$.

— *Si* $\nu = 0$, *alors* $\boldsymbol{a}|\varphi\rangle = 0$ *: cela correspond à l'état fondamental.*

Cette propriété nous assure que si nous trouvons un vecteur propre $|n\rangle$ de valeur propre n sur $\boldsymbol{N}$, alors nous pouvons construire un vecteur propre linéairement indépendant $\boldsymbol{a}|n\rangle$ tel que $n-1$ soit une valeur propre de $\boldsymbol{N}$.

Remarque 1.15. *Cela justifie le nom de l'opérateur* $\boldsymbol{a}$ *: l'opérateur annihilation.*

Proposition 1.16. *Soit* $|\varphi\rangle$ *un vecteur propre de* $\boldsymbol{N}$ *de valeur propre* ν *:* $\boldsymbol{N}|\varphi\rangle = \nu|\varphi\rangle$. *Alors,*

— $\boldsymbol{a}^\dagger |\varphi\rangle$ *est non nul.*
— $\boldsymbol{a}^\dagger |\varphi\rangle$ *est un vecteur propre de valeur propre* $\nu + 1$.

Cette propriété nous assure que si nous trouvons un vecteur propre $|n\rangle$ de valeur propre n sur $\boldsymbol{N}$, alors nous pouvons construire un vecteur propre linéairement indépendant $\boldsymbol{a}^\dagger |n\rangle$ tel que $n+1$ soit une valeur propre de $\boldsymbol{N}$.

Remarque 1.17. *Cela justifie le nom que porte l'opérateur* $\boldsymbol{a}^\dagger$ *: l'opérateur création.*

Finalement, ces propriétés nous permettent de voir le résultat suivant.

Théorème 1.18. *Soit l'opérateur nombre* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$. *Le spectre de* $\boldsymbol{N}$ *est un sous-ensemble des naturels :* $Spectre\boldsymbol{N} \subseteq \mathbb{N}$.

De ce théorème, nous tirons notre interprétation des états $|n\rangle$. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs - linéairement indépendant les uns des autres - diagonalisant l'opérateur $\boldsymbol{N}$. Ces états forment une base - la *base de Fock*, orthonormée.

Cette dernière base est bien à distinguer de la base des états cohérents : en effet, si $|n\rangle$ est un élément de l'espace de Fock, rien n'assure que $|n\rangle$ diagonalise l'opérateur annihilation $\boldsymbol{a}$. De même, si $|\alpha\rangle$ est un état cohérent, $\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} |\alpha\rangle = \alpha \boldsymbol{\alpha}^\dagger |\alpha\rangle$ ne donne aucune information sur les états propres de $\boldsymbol{N}$. A la différence des états propres de $\boldsymbol{N}$ - décrivant un nombre fixe d'excitations - les états $|\alpha\rangle$ en possèdent un nombre indéterminé : elles se dotent cependant d'une *phase fixe.* Nous avons bien deux bases distinctent, donnant des informations différentes sur les opérateurs introduit par la solution de Dirac de l'Oscillateur Harmonique.

Maintenant que la différence entre les deux bases est claire, attelons-nous à montrer ce qui les relie. Introduisons la relation $|n\rangle = \frac{(\boldsymbol{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$. Notons que tout état cohérent $|\alpha\rangle$ peut se réécrire sous la forme $\sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle$, où nous avons utilisé la relation de fermeture des états de Focks. En particulier, cela nous incline à déterminer la valeur du produit scalaire $\langle n|\alpha\rangle$. Rappelons la relation $\boldsymbol{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, dont l'adjointe est $\langle n| \boldsymbol{a} = \langle n+1| \sqrt{n+1}$.

$$\langle n| \boldsymbol{a} |\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n+1|\alpha\rangle$$

En remplacant n par $n-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha \langle n-1|\alpha\rangle &= \sqrt{n}\,\langle n|\alpha\rangle \\ \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1|\alpha\rangle &= \langle n|\alpha\rangle \end{aligned}$$

Soit, par récurrence,

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{1.14}$$

Nous continuerons ce raisonnement dans la section 1.2.6.

1.2.5 Note sur la non-orthogonalité de la base des états cohérents

Nous pouvons voir directement, en exploitant la proposition 1.9, que la base des états cohérents n'est **pas** orthonormale. En effet, pour tout α, β sur le plan complexe

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_{n,m\geq 0} \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\beta^*\alpha} \tag{1.15}$$

où nous avons à nouveau utilisé la représentation de la fonction exponentielle en terme de série. Observons que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\|\beta\|^2 - \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 + \beta^*\alpha &= -\frac{1}{2}\beta^*\beta - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha + \beta^*\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\left(\beta^*\beta + \alpha^*\alpha - \beta^*\alpha - \alpha^*\beta - \beta^*\alpha + \alpha^*\beta\right) \\ &= -\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha\right) \end{aligned}$$

En particulier, notons que $\|\alpha-\beta\|^2$ est un nombre réel, tandis que $\alpha^*\beta - \beta^*\alpha$ est bien complexe.

Remarque 1.19. *Nous exploiterons ce résultat dans le cadre de la relation de complétude des états cohérents dans la section 1.4.*

Nous pouvons alors réécrire (1.15) sous la forme

$$\langle m|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^*\beta-\beta^*\alpha)} = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2} e^{-iIm\{\alpha^*\beta\}}.$$

Cela nous donne une condition de *presqu'orthogonalité*.

$$\langle m|n\rangle \approx 0$$

lorsque $\|\alpha-\beta\|^2$ » 1.

1.2.6 Valeur propre de a - résolution algébrique

Reprenons le raisonnement développé dans le cadre de la section 1.2.4. En particulier, rappelons que tout état cohérent peut se réécrire avec la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle$. Le produit scalaire entre un état cohérent et un élément de la base de Fock est donné par (1.14), et nous permet donc d'écrire

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\alpha \boldsymbol{a}^\dagger\right)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2+\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} |0\rangle \tag{1.16}$$

On voit donc qu'un état cohérent peut-être *généré* à partir du vide.

1.2.7 Interprétation en terme de particules

Pour terminer cette section sur les opérateurs d'échelle, posons nous quelques questions statistiques sur l'état $|\alpha\rangle$, en interprétant cette fois les opérateurs $\boldsymbol{a}^\dagger$ et $\boldsymbol{a}$ en terme de particules. En effet, nous pouvons voir $|n\rangle$ comme un système contenant n particules d'énergie $\hbar\omega$ n'intéragissant pas entre-eux. Dans cette vision, l'opérateur annihilation $\boldsymbol{a}^\dagger$ peut-être vu comme traduisant le retrait d'une particule dans le système. L'opérateur création $\boldsymbol{a}$ caractérise alors l'ajout d'une particule dans le système. Par exemple, l'opérateur $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$ traduit la création de deux particules à la suite de la destruction (l'annihilation) de deux autres.

La probabilité de trouver n particules dans le système dans l'état $|n\rangle$ est donnée par la règle de Born.

$$P(n) = \|\langle n|\alpha\rangle\|^2 = \frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n e^{-\|\alpha\|^2}}{n!}$$

Il s'agit d'une *distribution de probabilité de Poisson*, de paramètre $\lambda = \|\alpha\|^2$.

Similairement, le nombre moyen de particules dans l'état $|\alpha\rangle$ s'exprime par la relation

$$\langle \boldsymbol{N}\rangle = \|\alpha\|^2 \tag{1.17}$$

1.3 Opérateur déplacement

Introduisons, pour tout nombre complexe α, l'opérateur déplacement, noté $\boldsymbol{D}(\alpha)$, défini par la relation

$$\boldsymbol{D}(\alpha) = e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}}. \tag{1.18}$$

Rappelons la relation suivante : elle sera particulièrement utile dans les discussions qui vont suivre.

Proposition 1.20 (Relation de Glauber)**.** *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux opérateurs. L'égalité*

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}e^{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} \tag{1.19}$$

tient si et seulement si les opérateurs commutent avec $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$.

Lemme 1.21. *L'opérateur déplacement peut - de manière tout à fais équivalente - être défini par la relation*

$$\boldsymbol{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2\mathbb{I}} e^{\alpha \boldsymbol{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \boldsymbol{a}} \tag{1.20}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que le commutateur $\left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger, -\alpha^*\boldsymbol{a}\right] = \|\alpha\|^2\mathbb{I} \neq 0$: en particulier, nous avons alors que tout opérateur $\boldsymbol{A}$ commute avec $\left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger, \alpha^\alpha\boldsymbol{a}\right]$, car tout opérateur commute avec l'opérateur identité. Les hypothèses de 1.20 sont alors respectées : il suffit d'isoler l'exponentielle de la somme d'opérateurs dans (1.19) pour obtenir la relation recherchée. ■

On introduit à présent la proposition suivante - elle nous permettra d'énoncer un résultat général sur les états cohérents.

Proposition 1.22. *Nous pouvons similairement définir un état cohérent comme un état généré par l'opérateur déplacement $\boldsymbol{D}(\alpha)$ appliqué à l'état du vide $|0\rangle$.*

Démonstration.

$$\boldsymbol{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\boldsymbol{a}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} \sum_k (-1)^k \frac{\boldsymbol{a}^k}{k!}|0\rangle$$

Or, nous avons que $\sum_k \boldsymbol{a}^k|0\rangle = \boldsymbol{a}^0|0\rangle = |0\rangle$.

$$\boldsymbol{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!}\left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^n|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!}|n\rangle = |\alpha\rangle$$

Ce qui met en lumière la logique derrière le nom de cet opérateur déplacement $\boldsymbol{D}(\alpha)$. ■

Théorème 1.23. *$|\alpha\rangle$ est un état cohérent si et seulement si $|\alpha\rangle$ vérifie la relation*

$$|\alpha\rangle = \boldsymbol{D}(\alpha)|0\rangle$$

c'est à dire si et seulement si l'état cohérent est généré par le vide à travers l'opérateur déplacement.

1.3.1 Unitarité de l'opérateur déplacement

Définition 1.24. *Un opérateur $\boldsymbol{O}$ est unitaire si et seulement si $\boldsymbol{O}^\dagger\boldsymbol{O} = \mathbb{I}$, c'est à dire si et seulement si $\boldsymbol{O}^\dagger = \boldsymbol{O}^{-1}$.*

Observons que $\boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(-\alpha) = \mathbb{I}$. Montrer que $\boldsymbol{D}(\alpha)$ est un opérateur unitaire revient dès lors à montrer que $\boldsymbol{D}^\dagger(\alpha) = \boldsymbol{D}(-\alpha)$.

$$\boldsymbol{D}^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^*\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a}^\dagger} = \boldsymbol{D}(-\alpha)$$

1.3.2 Déplacement + Déplacement = Déplacement ?

Note : Je répond aux questions 3.b et 3.c ici.

Considérons l'opérateur déplacement de paramètre $\alpha + \beta$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Celui-ci vaut, par définition,

$$\boldsymbol{D}(\alpha+\beta) = \exp\left(\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}\right)$$

Ce qui revient à faire la somme de deux opérateurs ; soit $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{B} = \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}$.

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}\right] = \alpha^*\beta - \alpha\beta^* = 2iIm(\alpha^*\beta)\mathbb{I}$$

En utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 1.21, nous avons donc que $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ commutent avec leur commutateur. Alors, (1.19) nous autorise à écrire

$$\boldsymbol{D}(\alpha+\beta) = e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}} e^{\beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}} e^{iIm(\alpha^*\beta)} = \boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(\beta)e^{iIm(\alpha^*\beta)}.$$

En particulier, en appliquant $\boldsymbol{D}(\alpha+\beta)$ sur l'état du vide $|0\rangle$., il est clair que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(\alpha+\beta)|0\rangle &= |\alpha+\beta\rangle \\
e^{iIm(\alpha^*\beta)}\boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(\beta)|0\rangle &= |\alpha+\beta\rangle \\
\boldsymbol{D}(\alpha)|\beta\rangle &= e^{-iIm(\alpha^*\beta)}|\alpha+\beta\rangle
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Remarque 1.25. *Le facteur $e^{\pm iIm(\alpha^*\beta)}$ est une phase globale : il n'a donc aucune importance physique !*

1.4 Relation de fermeture

Proposition 1.26. *La base des états cohérents* $\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathbb{C}\}$ *admet la relation de fermeture*

$$\frac{1}{\pi}\iint dRe(\alpha)dIm(\alpha)\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I} \tag{1.22}$$

Démonstration. Adoptons la notation $d^2\alpha = dRe(\alpha)dIm(\alpha)$. En vertu de la propriété 1.9, nous avons

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m\geq 0}\frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{n!m!}}\left[\int d^2\alpha\ e^{-\|\alpha\|^2}\bar{\alpha}^m\alpha^n\right] \tag{1.23}$$

Passons en coordonnées polaires, en posant $\alpha = re^{i\theta}$ et $\alpha = rdrd\theta$.

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m\geq 0}\frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{n!m!}}\left[\int_0^{+\infty} dr\ r^{m+n+1}e^{-r^2}\ \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{i(n-m)\theta}\right]$$

Or, il se trouve que [1]

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{n,m}$$

Dès lors, l'intégrale se réduit à l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = 2\sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\left[\int_0^{+\infty} dr\ r^{2n+1}e^{-r^2}\right]$$

En effectuant le changement de variable $s = r^2$ (soit donc $ds = 2r\ dr$), il est claire que nous nous réduisons à $\Gamma(n+1) = n!$

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$$

Ce qui conclut notre preuve.

\end{proof}

∎

1.4.1 Commentaire sur l'indépendance linéaire

Nous pouvons prendre cette partie comme le commentaire demandé à l'exercice 2.e.

Tout vecteur $|\psi\rangle$ dans la base de Hilbert (dans laquelle se trouve la base des états cohérents) peut donc s'écrire

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

En particulier, si $|\psi\rangle = |\beta\rangle$ est dans la base des états cohérents,

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)\right) \tag{1.24}$$

où nous avons utilisé la relation de non-orthogonalité des états cohérents. Cette équation montre que *les états cohérents ne sont pas linéairement indépendants* : tout état cohérent $|\alpha\rangle$ peut s'écrire en terme d'un autre.

Remarque 1.27. *Le terme "base des états cohérents" est donc un abus de language ! Nous continuerons à l'utiliser, mais il faut garder en tête que les états cohérents ne forment* ***pas*** *une base.*

1. En effet, lorsque $n = m$, l'intégrant vaut 1. Lorsque $n \neq m$, nous observons que la primitive est 2π périodique. Puisque nous intégrons sur cette période, l'intégrale doit forcément être nulle.

Résumé
Nous avons défini trois formulations équivalentes des états cohérents. Celles-ci sont données par les relations suivantes :

$$\psi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\langle \boldsymbol{X}\rangle \langle \boldsymbol{P}\rangle\right)}{(\pi l^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\langle \boldsymbol{X}\rangle)^2}{2l^2} + \frac{i\langle \boldsymbol{P}\rangle x}{\hbar}\right) \quad \text{(Fonction d'onde d'un état cohérent)}$$
$$\boldsymbol{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad \text{(Valeur propre de l'opérateur destruction)}$$
$$|\alpha\rangle = \boldsymbol{D}(\alpha)\,|0\rangle \quad \text{(Généré par l'opérateur déplacement)}$$

Nous exploiterons principalement les deux dernières relations dans la suite de ce devoir.

2 Partie II - Oscillateur hamonique

Considérons l'Hamiltonien classique d'un oscillateur harmonique,

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega \boldsymbol{X})^2 \tag{2.1}$$

Posons $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. En introduisant l'opérateur nombre $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est l'opérateur destruction étudié précédemment. On définit les opérateurs position et impulsion de sorte à nous retrouver avec le système

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^\dagger\right) \\ \boldsymbol{P} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^\dagger\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous pouvons alors réécrire l'Hamiltonien sous la *forme normale*, soit

$$\boldsymbol{H} = \hbar\omega\left(\boldsymbol{N} + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right). \tag{2.3}$$

En particulier, sous cette forme, il est évident que l'énergie est quantifiée et de valeur $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Définition 2.1. *La moyenne $\langle \boldsymbol{A}\rangle$ d'une observable $\boldsymbol{A}$ par rapport à un état $|\psi\rangle$ est donnée par*

$$\langle \boldsymbol{A}\rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n \langle\psi|\boldsymbol{P}_n|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_n a_n P_n|\psi\rangle \qquad \langle \boldsymbol{A}\rangle = \langle\psi|\boldsymbol{A}|\psi\rangle$$

2.1 Evolution temporelle

2.1.1 Evolution temporelle de l'état cohérent d'un oscillateur harmonique

Selon le postulat d'évolution, à tout état $|\psi\rangle$ peut-être associé un opérateur hermitien $\boldsymbol{H}$, appelé Hamiltonien, régissant l'évolution temporelle du vecteur d'état au travers de l'équation de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t,\vec{r})\rangle = \boldsymbol{H}\,|\psi(t,\vec{r})\rangle$$

En particulier, nous avons donc que $|\psi(t,\vec{r})\rangle = \boldsymbol{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0,\vec{r})\rangle$, où $\boldsymbol{U}(t,t_0)$ est un opérateur unitaire, appelé opérateur d'évolution. Il peut toujours être écrit sous la forme $\boldsymbol{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i\boldsymbol{H}}{\hbar}(t-t_0)}$.

Supposons que l'oscillateur harmonique est initialement dans l'état cohérent $|\psi(t_0=0)\rangle = |\psi_0\rangle = |\alpha\rangle$. *Dans quel état sera-t-il en un temps ultérieur* $t > 0$? Déterminons $|\psi\rangle(t)$ dans la base de Fock $\{|n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$. Nous aurons ainsi accès à la base diagonalisant l'Hamiltonien, de sorte que ce dernier se simplifie en

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\boldsymbol{H}t}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}\sum_{n\geq 0} e^{-i\omega t n}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle \tag{2.4}$$

où nous avons utilisé la proposition (1.9). Nous pouvons réécrire (2.4) sous la forme, plus propre

$$|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle \qquad \text{Où } |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t} |n\rangle \right).$$

Observons que, comme attendu, $|\alpha(t)\rangle$ est normalisé. En effet,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(t)|\alpha(t)\rangle = e^{-\|\alpha\|^2} \left(\sum_{n,m\geq 0} \frac{\bar{\alpha}^m \alpha^n}{\sqrt{n!m!}} e^{-i\omega t(n-m)} \langle m|n\rangle \right) &= e^{-\|\alpha\|^2} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(\|\alpha\|^n)^2}{n!} \right) \\
&= e^{-\|\alpha\|^2} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n}{n!} \right) = e^{-\|\alpha\|^2} e^{\|\alpha\|^2} = 1.
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la représentation en terme de série de la fonction exponentielle.

Déterminons déjà la valeur de $\boldsymbol{a}\,|\alpha(t)\rangle$, afin de faciliter les calculs dans la suite.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t} a\,|n\rangle \right) &= e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t} \sqrt{n}\,|n-1\rangle \right) \\
&= \alpha e^{-i\omega t} e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} e^{-i\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\omega t} |n-1\rangle \right)
\end{aligned}$$

Le terme en $n = 0$ n'a pas de sens : on pose alors $m = n - 1$, afin de pouvoir réécrire la somme en démarrant en $m = 0$.

$$\boldsymbol{a}\,|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t} e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}} \left(\sum_{m\geq 0} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} e^{-i\left(\frac{1}{2}+m\right)\omega t} |m\rangle \right) = \alpha e^{-i\omega t} |\alpha(t)\rangle \tag{2.5}$$

On en déduit directement un résultat similaire en terme de bra [2]

$$\langle \alpha(t)|\, \boldsymbol{a}^\dagger = \langle \alpha(t)|\, \alpha^* e^{i\omega t} \tag{2.6}$$

2.1.2 Evolution temporelle de l'opérateur position

Moyenne de la position

La moyenne dans l'état $|\psi(t)\rangle$ est donnée par la relation

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(t)|\boldsymbol{X}|\alpha(t)\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Big[\langle \alpha(t)|\boldsymbol{a}|\alpha(t)\rangle + \langle \alpha(t)|\boldsymbol{a}^\dagger|\alpha(t)\rangle \Big] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right] \langle \alpha(t)|\alpha(t)\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right]
\end{aligned}$$

On peut poser $\alpha = \|\alpha\| e^{i\varphi}$: l'expression de la moyenne de l'opérateur position $\boldsymbol{X}$ dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ se simplifie alors grandement.

$$\langle \boldsymbol{X} \rangle (t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \|\alpha\| \cos(\omega t - \varphi) \tag{2.7}$$

2. C'est à dire dans la base duale

Ecart quadratique moyen de la position

Du système (2.2) nous trouvons que

$$\boldsymbol{X}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\boldsymbol{a}^2 + \left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^2 + 2\boldsymbol{a}^\dagger a + 1\right)$$

où nous avons utiliser la relation de commutation des bosons pour mettre l'équation sous *forme normale*. Nous pouvons alors déterminer la moyenne de X^2.

$$\begin{aligned}\langle\alpha(t)|\boldsymbol{X}^2|\alpha(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle\alpha(t)|\boldsymbol{a}^2|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|\left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^2|\alpha(t)\rangle + 2\langle\alpha(t)|\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle\right)\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^2 + \left(\alpha^* e^{i\omega t}\right)^2 + 2\|\alpha\|^2 + 1\right]\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right)^2 + 1\right] = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\|\alpha\|^2\left(e^{i\varphi}e^{-i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{i\omega t}\right)^2 + 1\right]\end{aligned}$$

Où nous avons posé $\alpha = \|\alpha\| e^{i\varphi}$. Nous trouvons finalement que

$$\left\langle\boldsymbol{X}^2\right\rangle(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \varphi) + 1\right] \tag{2.8}$$

En vertu de (1.1), nous avons alors que l'incertitude sur la position est donnée par

$$\Delta\boldsymbol{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\left[4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \theta) + 1\right] - \frac{2\hbar}{m\omega}\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \theta)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{2.9}$$

Remarque 2.2. *Puisque nous avons défini un état cohérent comme un état saturant l'inégalité de Heisenberg, on s'attend à ce que $\Delta\boldsymbol{P}$ soit tel que $\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{P} = \frac{\hbar}{2}$, c'est à dire que $\Delta\boldsymbol{P} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$.*

2.1.3 Evolution temporelle de l'opérateur impulsion

Nous adaptons ici les calculs effectués en 2.1.2, pour l'opérateur impulsion.

Moyenne de l'impulsion

La moyenne dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ est donnée par la relation

$$\begin{aligned}\langle\alpha(t)|\boldsymbol{P}|\alpha(t)\rangle &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\langle\alpha(t)|a|\alpha(t)\rangle - \langle\alpha(t)|\boldsymbol{a}^\dagger|\alpha(t)\rangle\right)\\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\alpha e^{-i\omega t} - \alpha^* e^{i\omega t}\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

En posant $\alpha = \|\alpha\| e^{i\varphi}$, nous pouvons simplifier (2.10) : de la sorte, la moyenne de l'impulsion est donnée par une expression similaire à (2.7).

$$\begin{aligned}\langle\alpha(t)|\boldsymbol{P}|\alpha(t)\rangle &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\|\alpha\|\left(e^{i\varphi}e^{-i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{i\omega t}\right)\\ &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\|\alpha\|\left(-2i\sin\omega t - \varphi\right)\\ \langle\boldsymbol{P}\rangle(t) &= -\sqrt{2m\hbar\omega}\|\alpha\|\sin(\omega t - \varphi)\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ecart quadratique moyen de l'impulsion

Du système (2.2), nous apprenons que

$$\boldsymbol{P}^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^2 + a^2 - 2\boldsymbol{a}^\dagger a - 1\right)$$

où nous avons exprimé l'égalité sous la *forme normale*. Nous pouvons alors déterminer la moyenne de $\boldsymbol{P}^2$, ce qui donne, sans surprise, un résultat tout à fais similaire à (2.8).

$$\left\langle \boldsymbol{P}^2 \right\rangle(t) = \frac{m\hbar\omega}{2}\left[4\|\alpha\|^2 \sin^2(\omega t - \varphi) + 1\right] \tag{2.12}$$

L'incertitude sur P s'ensuit.

$$\Delta \boldsymbol{P} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}\left[4\|\alpha\|^2 \sin^2(\omega t - \varphi) + 1\right] - 2m\hbar\omega\|\alpha\|^2 \sin^2(\omega t - \varphi)} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

Remarque 2.3. *L'incertitude de Heisenberg est bien saturée ! Hallelujah !*

Avant de passer à la suite, quelques observations/commentaires sur les différentes quantités obtenue :

— Les moyennes des opérateurs - et de leur carré - dépendent explicitement, périodiquement, du temps.

— L'incertitude sur ces mêmes opérateurs, par contre, est indépendante du temps : à tout instant donné, l'incertitude sur la mesure de X (resp. de P) dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ est la même.

— La moyenne de la position (2.7) et la moyenne de l'impulsion (2.11) de l'oscillateur harmonique quantique dans un état cohérent oscillent *de la même manière* que dans un oscillateur harmonique classique ! On voit donc ici la véritable puissance de la notion d'état cohérent.

Remarque 2.4. *Attention cependant, l'état $|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle$ sera, après une mesure, en vertu des postulats, projeté sur le sous-espace propre associé au résultat de la mesure. Les résultats que nous avons développé ici ne seront alors plus pertinents pour toute mesure ultérieure à la mesure.*

2.1.4 Evolution temporelle de l'Hamiltonien

En vertu de l'expression de l'Hamiltonien d'un Oscillateur Harmonique, le calcul de la moyenne se réduit à calculer la moyenne de $\boldsymbol{P}^2$ et de $\boldsymbol{X}^2$, ce qui a été fais en 2.1.2 et en 2.1.3. En particulier, le problème de la moyenne de l'Hamiltonien se réduit donc à injecter (2.8) et (2.12) dans (2.1).

$$\begin{aligned}
\langle\alpha(t)|\boldsymbol{H}|\alpha(t)\rangle &= \frac{1}{2m}\left(\langle\alpha(t)|\boldsymbol{P}^2|\alpha(t)\rangle\right) + \frac{m\omega^2}{2}\langle\alpha(t)|\boldsymbol{X}^2|\alpha(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\left[\frac{m\hbar\omega}{2}\left(4\|\alpha\|^2\sin^2(\omega t - \varphi) + 1\right)\right] + \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{\hbar}{2m\omega}\left(4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \varphi) + 1\right)\right] \\
\langle \boldsymbol{H}\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\|\alpha\|^2 + 1\right) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Remarque 2.5. *Une méthode alternative aurait été de calculer la moyenne de $\boldsymbol{H}$ en exploitant la relation (2.3). Il aurait alors été suffisant d'invoquer (2.5),(2.6) et le fait que les états $|\alpha(t)\rangle$ sont normaux pour trouver (2.13).*

Remarque 2.6. *Observons directement que, contrairement à la moyenne de la position et de l'impulsion, la moyenne de l'Hamiltonien semble être indépendante du temps. Cela fait sens : l'interprétation de l'Hamiltonien d'un système est celui de l'énergie totale présent dans celui-ci. Or, pour un système isolé - tel notre oscillateur harmonique - l'énergie totale doit être conservé, c'est à dire $\dot{\boldsymbol{H}} = 0$. On aurait pu prédire ce résultat en invoquant le* théorème d'Ehrenfest*. En effet, le théorème nous apprend que pour toute observable $\boldsymbol{A}$, l'évolution de $\boldsymbol{A}$ peut-être donnée par la relation*

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}]\rangle + \left\langle\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right\rangle.$$

Si on applique ce résultat à l'observable $\boldsymbol{H}$, le second terme du côté droit se simplifie car $\boldsymbol{H}$ ne dépend pas explicitement du temps. Naturellement, nous avons également que $\boldsymbol{H}$ commute avec lui-même : dès lors, le théorème d'Ehrenfest nous indique que la moyenne de $\boldsymbol{H}$ est indépendante du temps*, comme nous l'observons.*

Pour calculer l'incertitude sur $\boldsymbol{H}$, il y a essentiellement deux méthodes : la première (la méthode longue) consiste à déterminer $\boldsymbol{H}^2$ en utilisant (2.1), ce qui reviendrait à faire le calcul de la moyenne de $\boldsymbol{X}^4, \boldsymbol{P}^4$, etc. La seconde méthode, plus courte, revient à déterminer $\boldsymbol{H}^2$ en exploitant son expression en terme des bosons. Appliquons cette dernière méthode :

$$\boldsymbol{H}^2 = (\hbar\omega)^2 \left[\boldsymbol{a}^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right]^2 = (\hbar\omega)^2 \left[\left(\boldsymbol{a}^\dagger a\right)^2 + \boldsymbol{a}^\dagger a + \frac{1}{4}\right]$$

La moyenne de $\boldsymbol{H}^2$ est alors donné par :

$$\begin{aligned}
\langle\alpha(t)|\boldsymbol{H}^2|\alpha(t)\rangle &= \hbar^2\omega^2 \left[\langle\alpha(t)|\boldsymbol{a}^\dagger a\boldsymbol{a}^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|\boldsymbol{a}^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \frac{1}{4}\right] \\
&= \hbar^2\omega^2 \left[\|\alpha\|^2 \langle\alpha(t)|a\boldsymbol{a}^\dagger|\alpha(t)\rangle + \|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] \\
&= \hbar^2\omega^2 \left[\|\alpha\|^2 \langle\alpha(t)|\mathbb{I} + \boldsymbol{a}^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] \\
\left\langle \boldsymbol{H}^2 \right\rangle &= \hbar^2\omega^2 \left[\|\alpha\|^4 + 2\|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right]
\end{aligned}$$

Sans surprise cette fois, la moyenne de $\boldsymbol{H}^2$ est indépendante du temps. Pour finir, nous pouvons déterminer la valeur de l'incertitude de l'Hamiltonien selon la méthode usuelle :

$$\Delta\boldsymbol{H} = \sqrt{\hbar^2\omega^2 \left[\|\alpha\|^4 + 2\|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\|\alpha\|^4 + 4\|\alpha\|^2 + 1\right)} = \hbar\omega\|\alpha\| \tag{2.14}$$

2.2 Comparaison avec un oscillateur harmonique classique

Nous voulons maintenant comprendre le lien entre la théorique classique et la théorique quantique d'un oscillateur harmonique. En particulier, considérons dans le cadre classique un oscillateur harmonique (macroscopique) correspondant à un pendule. Un pendule consiste en un câble de longueur L attaché par une extrémité à un point fixe, et par l'autre à une masse m. Supposons que le pendule oscille autour d'une position d'équilibre.

De manière générale, un système possédant une énergie potentielle $V(x)$ peut-être approximée en $x = x_0$ par la série de Taylor

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} + \mathscr{O}(x-x_0)^3$$

Le système tendra à tourner autour de la configuration minimisant $V(x)$ - or, par définition, il s'agit de l'endroit où $\frac{dV}{dx}$ disparaît. Dès lors, en posant $\Delta x = x - x_0$, nous avons que $V(x) = \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} + \mathscr{O}(\Delta x^3) \approx \frac{1}{2}k\Delta x^2$. Il s'agit du potentiel d'un oscillateur harmonique pour des petites oscillations autour de x_0.

Analysons le système décrit au premier paragraphe en exploitant la formulation Lagrangienne de la mécanique classique. Ce devoir ne traitant pas de mécanique (classique), nous passerons les détails de calcul pour se focaliser sur l'interprétation physique. Placons-nous dans un champ gravitationel $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{y}$. La Lagrangien du système est

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\cos\theta$$

L'équation d'Euler-Lagrange permet de pleinement résoudre cette équation, et donne $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. En considérant de faibles oscillations autour de la position d'équilibre, nous pouvons admettre l'approximation de MacLaurin $\sin\theta = \theta$, de sorte que nous nous retrouvions avec l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$. La solution générale d'une telle équation est donnée par

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi\right) \tag{2.15}$$