PHYS-F302 - Mécanique Quantique

Devoir maison - Etats cohérents, oscillateur harmonique et décohérence

Moeil Juian

Université Libre de Bruxelles
Année académique 2021-2022

Table des matières

1 Partie I - Etude des états cohérents

Introduction des concepts clés

Nous allons étudier la notion d'*état cohérent* dans un cadre unidimensionnel, en se munissant des opérateurs position X et impulsion P, satisfaisant la relation de commutation canonique $[X, P] = i\hbar$.

Définition 1.1. *Un état cohérent est un état qui sature la relation d'incertitude de Heisenberg, c'est à dire tel que $\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}$. Mathématiquement, on définit un état cohérent $|\alpha\rangle$ comme l'unique état propre de l'opérateur destruction $\boldsymbol{a}$, soit*

$$\boldsymbol{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{1.1}$$

Notons que puisque $\boldsymbol{a}$ n'est pas hermitien, α est en général un nombre complexe.

Proposition 1.2. *Soit $\{|n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ la base de Fock (orthonormale !) d'un oscillateur Harmonique, et soit $\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathbb{C}\}$ une base normale des états cohérents. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha\rangle = e^{-\|\alpha\|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$.*

Démonstration. Puisque la base de Fock et la base des états cohérents peuvent tous les deux être utilisés pour décrire un Oscillateur Harmonique, il doit être possible d'exprimer tout vecteur dans l'une des bases en terme de l'autre. En particulier, cela se traduit par $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, pour tout $c_n \in \mathbb{C}$. En exploitant (1.1), nous trouvons

$$\boldsymbol{a}\,|\alpha\rangle = \sum_n c_n a\,|n\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle = \alpha \sum_n c_n\,|n\rangle \tag{1.2}$$

De cette égalité, nous déduisons $c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$. Par récurrence, nous pouvons alors montrer que $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$. En injectant cela dans notre somme, on se retrouve avec $|\alpha\rangle = c_0 \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$. Puisque les états cohérents sont normaux, nous avons

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = \|c_0\|^2 \sum_{n,m\geq 0} \frac{\bar{\alpha}^m \alpha^n}{\sqrt{n!m!}} \langle m|n\rangle = \|c_0\|^2 \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n}{n!} = \|c_0\|^2 e^{\|\alpha\|^2} \tag{1.3}$$

où nous avons utilisé la représentation sous forme de série de la fonction exponentielle. En particulier, nous avons alors $c_0 = e^{\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}$, ce qui implique la relation recherchée. ■

1.1 Fonction d'onde la plus générale d'un état cohérent

Nous voulons déterminer la forme de la fonction d'onde la plus générale décrivant un état cohérent. Nous savons que ce dernier dépendra de trois paramètres réels, que nous prendrons dans cette discussion égales à $\langle X\rangle, \langle P\rangle$ et $l = \sqrt{2}\Delta X$.

De manière extrêmement générale, introduisons les observables $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. En particulier, nous introduisons le raccourcis $|\psi_A\rangle = \Delta\boldsymbol{A}\,|\psi\rangle$ et $|\psi_B\rangle = \boldsymbol{B}\,|\psi\rangle$, qui seront utiles dans le reste de cette discussion. Nous pouvons relier les deux vecteurs par la relation

$$\langle\psi_A|\psi_A\rangle \langle\psi_B|\psi_B\rangle \geq \|\langle\psi_A|\psi_B\rangle\|^2 \tag{1.4}$$

où nous avons exploité l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Notons que l'égalité est stricte si et seulement si $|\psi_A\rangle = \lambda\,|\psi_B\rangle$, pour tout nombre λ *à priori* sur le plan complexe. Développons le terme $\langle\psi_A|\psi_B\rangle$.

$$\langle\psi_A|\psi_B\rangle = \langle\psi|\,\Delta\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\,|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|\,\Delta\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} - \Delta\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A}\,|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi|\,\Delta\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\,|\psi\rangle \tag{1.5}$$

Notons que le premier terme de cette égalité nous redonne bien le principe d'incertitude : $\Delta\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} \geq \frac{1}{2}\|\langle\psi|\,[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\,|\psi\rangle\|^2$. Cependant, pour avoir l'égalité stricte recherchée (définissant un état cohérent), nous devons imposer que le second terme dans la somme soit nulle. En particulier, nous devons imposer que les deux conditions suivantes soient simultanément satisfaites :

$$\Delta\boldsymbol{A}\,|\psi\rangle = \lambda\Delta\boldsymbol{B}\,|\psi\rangle \tag{1.6a}$$

$$\frac{1}{2}\langle\psi|\,\Delta\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\,|\psi\rangle = 0 \tag{1.6b}$$

En particulier, en injectant (1.6a) dans (1.6b), nous trouvons

$$\lambda^* \langle\psi|(\Delta\boldsymbol{B})^2|\psi\rangle + \lambda \langle\psi|(\Delta\boldsymbol{B})^2|\psi\rangle = 0 \tag{1.7}$$

$$(\lambda + \lambda^*) \langle\psi|(\Delta\boldsymbol{B})^2|\psi\rangle = 0 \tag{1.8}$$

Cela nous indique que λ doit-être purement imaginaire : soit $\lambda = i\mu$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. La condition (1.6a) se réécrit alors

$$(\Delta\boldsymbol{A})^2 = (\mu\Delta\boldsymbol{B})^2 \tag{1.9}$$

Nous obtenons alors que $\psi(x) = \psi_0\ e^{-\frac{(x-\langle X\rangle)^2}{2l^2}+\frac{i\langle P\rangle x}{\hbar}}$, ce qui conclut presque cette section : il nous reste plus qu'à déterminer la constante de normalisation $\psi_0 \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, exploitons la propriété suivante :

Proposition 1.3. *Pour toute fonction d'onde $\Psi(x,t)$, la condition de normalisation s'écrit*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \|\Psi(x,t)\|^2 = 1. \tag{1.10}$$

Nous voulons appliquer cette condition sur la fonction d'onde décrite ci-dessus. Pour ce faire, commencons par réarranger les termes dans l'exponentielle :

$$\psi(x) = \psi_0\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{\langle X\rangle^2}{2l^2} + x\left(\frac{\langle X\rangle}{l^2} + \frac{i\langle P\rangle}{\hbar}\right)\right) \tag{1.11}$$

La condition de normalisation nous indique alors que

$$\|\psi_0\|^2 \exp\left(-\frac{\langle X\rangle^2}{l^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{2\langle X\rangle}{l^2}x\right) = 1 \tag{1.12}$$

$$\|\psi_0\|^2\sqrt{\pi l^2} = 1 \qquad\qquad \psi_0 = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} \tag{1.13}$$

Puisque le choix de phase globale n'a aucune importance physique, nous avons la liberté de prendre une phase de notre choix. En particulier, nous pouvons donc écrire [1]

$$\psi(x) = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2\pi}\langle X\rangle\langle P\rangle\right)}{(\pi l^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\langle X\rangle)^2}{2l^2} + \frac{i\langle P\rangle x}{\hbar}\right) \tag{1.14}$$

1.2 Opérateurs d'échelle

1.2.1 Commutateur $[a, a^\dagger]$

Soit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{l} + \frac{ilP}{\hbar}\right)$ - l'opérateur destruction. Nous comprendrons plus tard, en étudiant ses propriétés, la logique derrière son nom. De sa définition, nous trouvons directement l'expression de la commutation des bosons :

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}[\frac{X}{l} + \frac{ilP}{\hbar}, \frac{X}{l} - \frac{ilP}{\hbar}] = -\frac{i}{2\hbar}[X,P] - \frac{i}{2\hbar}[X,P] = -\frac{i}{\hbar}[X,P] = 1. \tag{1.15}$$

Remarque 1.4. *Insistons que le résultat $[a, a^\dagger] = 1$ nous indique que la commutation des bosons est égale à l'opérateur identité, $\mathbb{I}$.*

Remarque 1.5. *Dans les calculs ultérieurs, lorsque nous voudrons insister qu'un opérateur identité est un opérateur et non le scalaire* 1.

1. Je ne vois pas pourquoi on fait ce choix-là en particulier ...

1.2.2 Valeur propre de a - résolution analytique

Attelons-nous à déterminer le vecteur propre de l'équation aux valeurs propre (1.1), en admettant la valeur propre

$$\alpha = \langle a \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\langle X \rangle}{l} + \frac{il}{\hbar} \langle P \rangle \right) \tag{1.16}$$

Remarque 1.6. *L'opérateur impulsion P peut-être réexprimé en terme de l'opérateur position selon la relation*

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}. \tag{1.17}$$

En particulier, cela revient à résoudre l'équation différentielle

$$\left(\frac{X}{l} + \frac{ilP}{\hbar} \right) \alpha = \left(\frac{X}{l} + l\partial_x \right) \boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\langle X \rangle}{l} + \frac{il}{\hbar} \langle P \rangle \right) \boldsymbol{\alpha} \tag{1.18}$$

Elle se résoud exactement par séparation des variables :

$$\frac{\partial_X \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{\langle X \rangle}{l} + \frac{il}{\hbar} \langle P \rangle - \frac{X}{l} \right) \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = C \exp\left(\frac{\langle X \rangle}{l} X + \frac{il}{\hbar} \langle P \rangle X - \frac{X^2}{2l} \right) \tag{1.20}$$

où C est une constante d'intégration. Observons que cette solution diverge en $+\infty$: elle est donc fausse. **Why ?**

1.2.3 Intégrale gaussienne

1.2.4 'Fock state' vs. 'Coherent state'

Dans le cours théorique, nous avons introduit la base de Fock comme étant l'ensemble des vecteurs $|n\rangle$ diagonalisant l'opérateur nombre $N = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$. Nous avons en particulier démontré une série de propriétés remarquables sur ces vecteurs propres $|n\rangle$, en voici quelques unes.

Lemme 1.7. *L'opérateur nombre $\boldsymbol{N}$ est hermitien : $\boldsymbol{N}^\dagger = \boldsymbol{a}^\dagger \left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^\dagger$.*

Proposition 1.8. *L'opérateur nombre $\boldsymbol{N}$ est positif, dans le sens défini au cours : tout vecteur propre $|n\rangle$ de $\boldsymbol{N}$ est associé à une valeur propre $n \geq 0$.*

Lemme 1.9. $[\boldsymbol{N}, a] = -a$ *et* $[\boldsymbol{N}, a^\dagger] = a^\dagger$

Proposition 1.10. *Soit $|\varphi\rangle$ un vecteur propre de $\boldsymbol{N}$ de valeur propre ν : $\boldsymbol{N} |\varphi\rangle = \nu |\varphi\rangle$. Alors,*

— *$\boldsymbol{a} |\varphi\rangle$ est vecteur propre de $\boldsymbol{N}$ de valeur propre $\nu - 1$.*

— *Si $\nu = 0$, alors $\boldsymbol{a} |\varphi\rangle = 0$: cela correspond à l'état fondamental.*

Cette propriété nous assure que si nous trouvons un vecteur propre $|n\rangle$ de valeur propre n sur $\boldsymbol{N}$, alors nous pouvons construire un vecteur propre linéairement indépendant $\boldsymbol{a} |n\rangle$ tel que $n - 1$ soit une valeur propre de $\boldsymbol{N}$.

Remarque 1.11. *Cela justifie le nom de l'opérateur $\boldsymbol{a}$: l'opérateur annihilation.*

Proposition 1.12. *Soit $|\varphi\rangle$ un vecteur propre de $\boldsymbol{N}$ de valeur propre ν : $\boldsymbol{N} |\varphi\rangle = \nu |\varphi\rangle$. Alors,*

— *$\boldsymbol{a}^\dagger |\varphi\rangle$ est non nul.*

— *$\boldsymbol{a}^\dagger |\varphi\rangle$ est un vecteur propre de valeur propre $\nu + 1$.*

Cette propriété nous assure que si nous trouvons un vecteur propre $|n\rangle$ de valeur propre n sur $\boldsymbol{N}$, alors nous pouvons construire un vecteur propre linéairement indépendant $\boldsymbol{a}^\dagger |n\rangle$ tel que $n + 1$ soit une valeur propre de $\boldsymbol{N}$.

Remarque 1.13. *Cela justifie le nom que porte l'opérateur $\boldsymbol{a}^\dagger$: l'opérateur création.*

Finalement, ces propriétés nous permettent de voir le résultat suivant.

Théorème 1.14. *Soit l'opérateur nombre* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$. *Le spectre de* $\boldsymbol{N}$ *est un sous-ensemble des naturels : Spectre*$\boldsymbol{N} \subseteq \mathbb{N}$.

De ce théorème, nous tirons notre interprétation des états $|n\rangle$. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs - linéairement indépendant les uns des autres - diagonalisant l'opérateur $\boldsymbol{N}$. Ces états forment une base - la base de Fock, orthonormée.

Cette dernière base est bien à distinguer de la base des états cohérents : en effet, si $|n\rangle$ est un élément de l'espace de Fock, rien n'assure que $|n\rangle$ diagonalise l'opérateur annihilation $\boldsymbol{a}$. De même, si $|\alpha\rangle$ est un état cohérent, $\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} |\alpha\rangle = \alpha \boldsymbol{\alpha}^\dagger |\alpha\rangle$ ne donne aucune information sur les états propres de $\boldsymbol{N}$. A la différence des états propres de $\boldsymbol{N}$ - décrivant un nombre fixe d'excitations - les états $|\alpha\rangle$ en possèdent un nombre indéterminé : elles se dotent cependant d'une *phase fixe*. Nous avons bien deux bases distinctent, donnant des informations différentes sur les opérateurs introduit par la solution de Dirac de l'Oscillateur Harmonique.

Maintenant que la différence entre les deux bases est claire, attelons-nous à montrer ce qui les relie. Introduisons la relation $|n\rangle = \frac{(\boldsymbol{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$. Notons que tout état cohérent $|\alpha\rangle$ peut se réécrire sous la forme $\sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle$, où nous avons utilisé la relation de fermeture des états de Focks. En particulier, cela nous incline à déterminer la valeur du produit scalaire $\langle n|\alpha\rangle$. Rappelons la relation $\boldsymbol{a}^\dagger |\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$, dont l'adjointe est $\langle\alpha| \boldsymbol{a} = \langle n+1| \sqrt{n+1}$.

$$\langle n| a |\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle \tag{1.21}$$

En remplacant n par $n-1$, nous obtenons

$$\alpha \langle n-1|\alpha\rangle = \sqrt{n} \langle n|\alpha\rangle \tag{1.22}$$
$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1|\alpha\rangle = \langle n|\alpha\rangle \tag{1.23}$$

Par récurrence, nous avons alors la relation

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \tag{1.24}$$

En particulier, nous pouvons réécrire l'état

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1.25}$$

On voit alors que le terme $\langle 0|\alpha\rangle$ doit absolument être une constante – de valeur $e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}$: la dérivation de ce résultat est tout à fais similaire à la dérivation de la constante c_0 dans la preuve de la proposition 1.2.

Tout état cohérent peut donc être généré à partir du vide selon

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{\left(\alpha \boldsymbol{a}^\dagger\right)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^n + \alpha \boldsymbol{a}^\dagger} |0\rangle \tag{1.26}$$

De même, le produit scalaire doit être de la forme

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{1.27}$$

1.2.5 Note sur la non-orthogonalité de la base des états cohérents

Nous pouvons voir directement, en exploitant le résultat 1.2, que la base des états cohérents n'est **pas** orthonormale. En effet, pour tout α, β sur le plan complexe

$$\langle \beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_{n,m\geq 0} \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}\|\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\beta^* \alpha} \tag{1.28}$$

où nous avons à nouveau utilisé la représentation de la fonction exponentielle en terme de série. Observons que

$$-\frac{1}{2}\|\beta\|^2 - \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 + \beta^*\alpha = -\frac{1}{2}\beta^*\beta - \frac{1}{2}\alpha^*\alpha + \beta^*\alpha \tag{1.29}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\beta^*\beta + \alpha^*\alpha - \beta^*\alpha - \alpha^*\beta - \beta^*\alpha + \alpha^*\beta\right) \tag{1.30}$$

$$= -\frac{1}{2}\|\alpha - \beta\|^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha\right) \tag{1.31}$$

En particulier, notons que $\|\alpha - \beta\|^2$ est un nombre réel, tandis que $\alpha^*\beta - \beta^*\alpha$ est bien complexe. Nous pouvons alors réécrire (1.28) sous la forme

$$\langle m|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^*\beta-\beta^*\alpha)} = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2} e^{-iIm\{\alpha^*\beta\}}. \tag{1.32}$$

Nous observons finalement que

$$\langle m|n\rangle \approx 0 \tag{1.33}$$

lorsque $\|\alpha - \beta\|^2$ » 1.

1.2.6 Valeur propre de a - solution algébrique

1.2.7 Interprétation en terme de particules

Pour terminer cette section sur les opérateurs d'échelle, posons nous quelques questions statistiques sur l'état $|\alpha\rangle$, en interprétant cette fois les opérateurs $\boldsymbol{a}^\dagger$ et $\boldsymbol{a}$ en terme de particules. En effet, nous pouvons voir $|n\rangle$ comme un système contenant n particules d'énergie $\hbar\omega$ n'intéragissant pas entre-eux. Dans cette vision, l'opérateur annihilation $\boldsymbol{a}^\dagger$ peut-être vu comme traduisant le retrait d'une particule dans le système. L'opérateur création $\boldsymbol{a}$ caractérise alors l'ajout d'une particule dans le système. Par exemple, l'opérateur $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$ traduit la création de deux particules à la suite de la destruction (l'annihilation) de deux autres.

La probabilité de trouver n particules dans le système dans l'état $|n\rangle$ est donnée par la règle de Born.

$$P(n) = \|\langle n|\alpha\rangle\|^2 = \frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n e^{-\|\alpha\|^2}}{n!} \tag{1.34}$$

Il s'agit d'une *distribution de probabilité de Poisson*, de paramètre $\lambda = \|\alpha\|^2$.

Similairement, le nombre moyen de particules dans l'état $|\alpha\rangle$ s'exprime par la relation

$$\langle \boldsymbol{N}\rangle = \|\alpha\|^2 \tag{1.35}$$

1.3 Opérateur déplacement

Introduisons, pour tout nombre complexe α, l'opérateur déplacement, noté $\boldsymbol{D}(\alpha)$, défini par la relation

$$\boldsymbol{D}(\alpha) = e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}}. \tag{1.36}$$

Proposition 1.15 (Relation de Glaubert)**.** *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux opérateurs. L'égalité*

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}e^{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} \tag{1.37}$$

tient si et seulement si les opérateurs commutent avec $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$.

Lemme 1.16. *L'opérateur déplacement peut - de manière tout à fais équivalente - être défini par la relation*

$$\boldsymbol{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2\mathbb{I}} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\boldsymbol{a}} \tag{1.38}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que le commutateur $\left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger, -\alpha^*\boldsymbol{a}\right] = \|\alpha\|^2\mathbb{I} \neq 0$: en particulier, nous avons alors que tout opérateur $\boldsymbol{A}$ commute avec $\left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger, \alpha^\alpha\boldsymbol{a}\right]$, car tout opérateur commute avec l'opérateur identité. Les hypothèses de 1.15 sont alors respectées : il suffit d'isoler l'exponentielle de la somme d'opérateurs dans (1.37) pour obtenir la relation recherchée. ■

Proposition 1.17. *Nous pouvons similairement définir un état cohérent comme un état généré par l'opérateur déplacement $\boldsymbol{D}(\alpha)$ appliqué à l'état du vide $|0\rangle$.*

Démonstration.

$$\boldsymbol{D}(\alpha)\,|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\boldsymbol{a}}\,|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger} \sum_k (-1)^k \frac{\boldsymbol{a}^k}{k!}\,|0\rangle \tag{1.39}$$

Or, nous avons que $\sum_k \boldsymbol{a}^k\,|0\rangle = \boldsymbol{a}^0\,|0\rangle = |0\rangle$.

$$\boldsymbol{D}(\alpha)\,|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger}\,|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_i \frac{\alpha^i}{i!}\left(\boldsymbol{a}^\dagger\right)^i |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2} \sum_i \frac{\alpha^i}{i!}\,|i\rangle = |\alpha\rangle \tag{1.40}$$

Ce qui met en lumière la logique derrière le nom de cet opérateur déplacement $\boldsymbol{D}(\alpha)$. ■

1.3.1 Unitarité de l'opérateur déplacement

Définition 1.18. *Un opérateur $\boldsymbol{O}$ est unitaire si et seulement si $\boldsymbol{O}^\dagger\boldsymbol{O} = \mathbb{I}$, c'est à dire si et seulement si $\boldsymbol{O}^\dagger = \boldsymbol{O}^{-1}$.*

Observons que $\boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(-\alpha) = \mathbb{I}$. Montrer que $\boldsymbol{D}(\alpha)$ est un opérateur unitaire revient dès lors à montrer que $\boldsymbol{D}^\dagger(\alpha) = \boldsymbol{D}(-\alpha)$.

$$\boldsymbol{D}^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^*\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a}^\dagger} = \boldsymbol{D}(-\alpha) \tag{1.41}$$

1.3.2 Déplacement + Déplacement = Déplacement ?

Note : Je répond aux questions 3.b et 3.c ici.

Considérons l'opérateur déplacement de paramètre $\alpha + \beta$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Celui-ci vaut, par définition,

$$\boldsymbol{D}(\alpha + \beta) = \exp\Big(\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}\Big) \tag{1.42}$$

Ce qui revient à faire la somme de deux opérateurs ; soit $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{B} = \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}$.

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \left[\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}\right] = \alpha^*\beta - \alpha\beta^* = 2iIm(\alpha^*\beta)\mathbb{I} \tag{1.43}$$

En utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 1.16, nous avons donc que $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ commutent avec leur commutateur. Alors, (1.37) nous autorise à écrire

$$\boldsymbol{D}(\alpha + \beta) = e^{\alpha\boldsymbol{a}^\dagger - \alpha^*\boldsymbol{a}} e^{\beta\boldsymbol{a}^\dagger - \beta^*\boldsymbol{a}} e^{iIm(\alpha^*\beta)} = e^{iIm(\alpha^*\beta)}\boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(\beta). \tag{1.44}$$

En particulier, en appliquant l'état du vide $|0\rangle$ sur $\boldsymbol{D}(\alpha + \beta)$, il est clair que

$$\boldsymbol{D}(\alpha + \beta)\,|0\rangle = e^{iIm(\alpha^*\beta)}\boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{D}(\beta)\,|0\rangle = e^{iIm(\alpha^*\beta)}\boldsymbol{D}(\alpha)\,|\beta\rangle = e^{iIm(\alpha^*\beta)}\,|\alpha + \beta\rangle\,. \tag{1.45}$$

Remarque 1.19. *Le facteur de phase $e^{iIm(\alpha^*\beta)}$ est une phase globale : elle n'a donc aucune importance physique !*

1.4 Relation de fermeture

Proposition 1.20. *La base des états cohérents $\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathbb{C}\}$ admet la relation de fermeture*

$$\frac{1}{\pi}\iint dRe(\alpha)dIm(\alpha)\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I} \tag{1.46}$$

Démonstration. Adoptons la notation $d^2\alpha = dRe(\alpha)dIm(\alpha)$. En vertue de la propriété 1.2, nous avons

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m\geq 0}\frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{n!m!}}\left[\int d^2\alpha\ e^{-\|\alpha\|^2}\bar{\alpha}^m\alpha^n\right] \tag{1.47}$$

Passant en coordonnées polaires, en posant $\alpha = re^{i\theta}$ et $\alpha = rdrd\theta$.

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m\geq 0}\frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{n!m!}}\left[\int_0^{+\infty} dr\ r^{m+n+1}e^{-r^2}\ \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{i(n-m)\theta}\right] \tag{1.48}$$

Or, il se trouve que [2]

$$\int_0^{2\pi} d\theta\ e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{n,m} \tag{1.49}$$

Dès lors, l'intégrale se réduit à l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = 2\sum_n\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\left[\int_0^{+\infty} dr\ r^{2n+1}e^{-r^2}\right] \tag{1.50}$$

En effectuant le changement de variable $s = r^2$ (soit donc $ds = 2r\ dr$), il est claire que nous nous réduisons à $\Gamma(n+1) = n!$

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I} \tag{1.51}$$

Ce qui conclut notre preuve.

\end{proof}

■

1.4.1 Commentaire sur l'indépendance linéaire

Nous pouvons prendre cette partie comme le commentaire demandé à l'exercice 2.e.

Tout vecteur $|\psi\rangle$ dans la base de Hilbert (dans laquelle se trouve la base des états cohérents) peut donc s'écrire

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \tag{1.52}$$

En particulier, si $|\psi\rangle = |\beta\rangle$ est dans la base des états cohérents,

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,|\alpha\rangle\exp\Big(-\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)\Big) \tag{1.53}$$

où nous avons utilisé la relation de non-orthogonalité des états cohérents. Cette équation montre que *les états cohérents ne sont pas linéairement indépendants* : tout état cohérent $|\alpha\rangle$ peut s'écrire en terme d'un autre.

Remarque 1.21. *Le terme "base des états cohérents" est donc un abus de language ! Nous continuerons à l'utiliser*[3]*, mais il faut garder que les états cohérents ne forment PAS une base.*

2. En effet, lorsque $n = m$, l'intégrant vaut 1. Lorsque $n \neq m$, nous avons l'intégrale de la combinaison linéaire de deux fonctions périodique sur une période ; ce qui est égal à 0.

3. Surtout parceque la suite est déjà rédigée ...

2 Partie II - Oscillateur hamonique

Considérons l'Hamiltonien classique d'un oscillateur harmonique,

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega X)^2 \tag{2.1}$$

Posons $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. En introduisant l'opérateur nombre $N = a^\dagger a$, où a est l'opérateur destruction étudié précédemment. On définit les opérateurs position et impulsion de sorte à nous retrouver avec le système

$$\begin{cases} X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \\ P = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous pouvons alors réécrire l'Hamiltonien sous la *forme normale*, soit

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right). \tag{2.3}$$

En particulier, sous cette forme, il est évident que l'énergie est quantifiée et de valeur $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

2.1 Evolution temporelle

2.1.1 Evolution temporelle de l'état cohérent d'un oscillateur harmonique

Selon le postulat d'évolution, à tout état $|\psi\rangle$ peut-être associé un opérateur hermitien H, appelé Hamiltonien, régissant l'évolution temporelle du vecteur d'état au travers de l'équation de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t,\boldsymbol{r})\rangle = H|\psi(t,\boldsymbol{r})\rangle \tag{2.4}$$

En particulier, nous avons donc que $|\psi(t,\boldsymbol{r})\rangle = \boldsymbol{U}(t,t_0)|\psi(t_0,\boldsymbol{r})\rangle$, où $\boldsymbol{U}(t,t_0)$ est un opérateur unitaire, appelé opérateur d'évolution. Il peut toujours être écrit sous la forme $\boldsymbol{U}(t,t_0) = e^{-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)}$.

Supposons que l'oscillateur harmonique est initialement dans l'état cohérent $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\psi_0\rangle = |\alpha\rangle$. *Dans quel état sera-t-il en un temps ultérieur,* $t > t_0 = 0$?

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi_0\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\alpha\rangle \tag{2.5}$$

Bien que cette équation soit vraie, elle ne nous apporte pas vraiment de connaissances utiles : nous voulons exprimer $|\psi\rangle(t)$ dans la base de Fock $\{|n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$. Nous aurons ainsi accès à la base diagonalisant l'Hamiltonien, de sorte que ce dernier se simplifie en

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}\sum_{n\geq 0}e^{-i\omega tn}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}e^{-\frac{1}{2}\|\alpha\|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle \tag{2.6}$$

où nous avons utilisé la proposition (1.2). Nous pouvons réécrire (2.6) sous la forme, plus propre :

$$|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle \qquad \text{Où } |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t}|n\rangle\right) \tag{2.7}$$

Observons que $|\alpha(t)\rangle$ est normalisé. En effet,

$$\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle = e^{-\|\alpha\|^2}\left(\sum_{n,m\geq 0}\frac{\bar{\alpha}^m\alpha^n}{\sqrt{n!m!}}e^{-i\omega t(n-m)}\langle m|n\rangle\right) = e^{-\|\alpha\|^2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\|\alpha\|^n\right)^2}{n!}\right) \tag{2.8}$$

$$= e^{-\|\alpha\|^2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\|\alpha\|^2\right)^n}{n!}\right) = e^{-\|\alpha\|^2}e^{\|\alpha\|^2} = 1. \tag{2.9}$$

où nous avons utilisé la représentation en terme de série de la fonction exponentielle.

Déterminons déjà la valeur de $a\,|\alpha(t)\rangle$, afin de faciliter les calculs dans la suite.

$$a\,|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t}a\,|n\rangle\right) = e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\left(\frac{1}{2}+n\right)\omega t}\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) \tag{2.10}$$

$$= \alpha e^{-i\omega t}e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}e^{-i\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\omega t}\,|n-1\rangle\right) \tag{2.11}$$

Le terme en $n = 0$ n'a pas de sens : on pose alors $m = n - 1$, afin de pouvoir réécrire la somme en démarrant en $m = 0$.

$$a\,|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t}e^{-\frac{\|\alpha\|^2}{2}}\left(\sum_{m\geq 0}\frac{\alpha^m}{\sqrt{(m)!}}e^{-i\left(\frac{1}{2}+m\right)\omega t}\,|m\rangle\right) = \alpha e^{-i\omega t}\,|\alpha(t)\rangle \tag{2.12}$$

Cette relation nous indique directement la relation correspondante dans la base duale associée.

$$\langle\alpha(t)|\,a^\dagger = \langle\alpha(t)|\,\alpha^* e^{i\omega t} \tag{2.13}$$

Définition 2.1. *La moyenne $\langle A\rangle$ d'une observable A par rapport à un état $|\psi\rangle$ est donnée par*

$$\langle A\rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n\,\langle\psi|P_n|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_n a_n P_n|\psi\rangle \qquad \langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{2.14}$$

Proposition 2.2. *L'écart quadratique moyen d'une obserable A dans l'état $|\psi\rangle$ est donnée par*

$$\Delta A = \sqrt{\langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2} \tag{2.15}$$

2.1.2 Evolution temporelle de l'opérateur position

Moyenne de la position

La moyenne dans l'état $|\psi(t)\rangle$ est donnée par la relation

$$\langle\alpha(t)|X|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle\alpha(t)|a|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|a^\dagger|\alpha(t)\rangle\right] \tag{2.16}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right]\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle \tag{2.17}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right] \tag{2.18}$$

On peut poser $\alpha = \|\alpha\|e^{i\varphi}$: l'expression de la moyenne de l'opérateur position X dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ se simplifie alors grandement.

$$\langle X\rangle(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\|\alpha\|\cos(\omega t - \varphi) \tag{2.19}$$

Ecart quadratique moyen de la position

Du système (2.2) nous trouvons que

$$X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + \left(a^\dagger\right)^2 + 2a^\dagger a + 1\right) \tag{2.20}$$

où nous avons utiliser la relation de commutation des bosons pour mettre l'équation sous *forme normale*. Nous pouvons alors déterminer la moyenne de X^2.

$$\langle\alpha(t)|X^2|\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\langle\alpha(t)|a^2|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|\left(a^\dagger\right)^2|\alpha(t)\rangle + 2\langle\alpha(t)|a^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle\Big) \tag{2.21}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^2 + \left(\alpha^* e^{i\omega t}\right)^2 + 2\|\alpha\|^2 + 1\right]\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle \tag{2.22}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right)^2 + 1\right] = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\|\alpha\|^2\left(e^{i\varphi}e^{-i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{i\omega t}\right)^2 + 1\right] \tag{2.23}$$

Où nous avons posé $\alpha = \|\alpha\|e^{i\varphi}$. Nous trouvons finalement que

$$\left\langle X^2\right\rangle(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \varphi) + 1\right] \tag{2.24}$$

En vertue de (2.15), nous avons alors que l'incertitude sur la position est donnée par

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\left[4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \theta) + 1\right] - \frac{2\hbar}{m\omega}\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t - \theta)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{2.25}$$

Remarque 2.3. *Puisque nous avons défini un état cohérent comme un état saturant l'inégalité de Heisenberg, on s'attend à ce que* ΔP *soit tel que* $\Delta X\Delta P = \frac{\hbar}{2}$*, c'est à dire que* $\Delta P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$.

2.1.3 Evolution temporelle de l'opérateur impulsion

Cette partie est une adaptation des calculs effectués en 2.1.2, pour l'opérateur impulsion.

Moyenne de l'impulsion

La moyenne dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ est donnée par la relation

$$\langle\alpha(t)|P|\alpha(t)\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\Big(\langle\alpha(t)|a|\alpha(t)\rangle - \langle\alpha(t)|a^\dagger|\alpha(t)\rangle\Big) \tag{2.26}$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\alpha e^{-i\omega t} - \alpha^* e^{i\omega t}\right) \tag{2.27}$$

En posant $\alpha = \|\alpha\|e^{i\varphi}$, nous pouvons simplifier (2.27) : de la sorte, la moyenne de l'impulsion est donnée par une expression similaire à (2.19).

$$\langle\alpha(t)|P|\alpha(t)\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\|\alpha\|\left(e^{i\varphi}e^{-i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{i\omega t}\right) \tag{2.28}$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\|\alpha\|\left(-2i\sin\omega t - \varphi\right) \tag{2.29}$$

$$\langle P\rangle(t) = -\sqrt{2m\hbar\omega}\|\alpha\|\sin(\omega t - \varphi) \tag{2.30}$$

Ecart quadratique moyen de l'impulsion

Du système (2.2), nous apprenons que

$$P^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\left(a^\dagger\right)^2 + a^2 - 2a^\dagger a - 1\right) \tag{2.31}$$

où nous avons exprimer l'égalité sous la *forme normale*. Nous pouvons alors déterminer la moyenne de P^2, ce qui donne, sans surprise, un résultat tout à fais similaire à (2.23).

$$\left\langle P^2\right\rangle(t) = \frac{m\hbar\omega}{2}\left[4\|\alpha\|^2\sin^2(\omega t - \varphi) + 1\right] \tag{2.32}$$

L'incertitude sur P s'ensuit.

$$\Delta P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}\left[4\|\alpha\|^2\sin^2(\omega t-\varphi)+1\right] - 2m\hbar\omega\|\alpha\|^2\sin^2(\omega t-\varphi)} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \tag{2.33}$$

Remarque 2.4. *L'incertitude de Heisenberg est bien saturée ! Hallelujah !*

Avant de passer à la suite, quelques observations/commentaires sur les différentes quantités obtenue :

— Les moyennes des opérateurs - et de leur carré - dépendent explicitement, périodiquement, du temps.

— L'incertitude sur ces mêmes opérateurs, par contre, est indépendante du temps : à tout instant donné, l'incertitude sur la mesure de X (resp. de P) dans l'état $|\alpha(t)\rangle$ est la même.

— La moyenne de la position (2.19) et la moyenne de l'impulsion (2.30) de l'oscillateur harmonique quantique dans un état cohérent oscillent *de la même manière* que dans un oscillateur harmonique classique ! On voit donc ici la véritable puissance de la notion d'état cohérent.

Remarque 2.5. *Attention cependant, l'état $|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle$ sera, après une mesure, en vertue des postulats, projeté sur le sous-espace propre associé au résultat de la mesure. Les résultats que nous avons développé ici ne seront alors plus pertinents pour toute mesure ultérieure à la mesure.*

2.1.4 Evolution temporelle de l'Hamiltonien

En vertue de l'expression de l'Hamiltonien d'un Oscillateur Harmonique, le calcul de la moyenne se réduit à calculer la moyenne de P^2 et de X^2, ce qui a été fais en 2.1.2 et en 2.1.3. En particulier, le problème de la moyenne de l'Hamiltonien se réduit donc à injecter (2.23) et (2.32) dans (2.1).

$$\begin{aligned}
\langle\alpha(t)|H|\alpha(t)\rangle &= \frac{1}{2m}\Big(\langle\alpha(t)|P^2|\alpha(t)\rangle\Big) + \frac{m\omega^2}{2}\langle\alpha(t)|X^2|\alpha(t)\rangle && (2.34)\\
&= \frac{1}{2m}\left[\frac{m\hbar\omega}{2}\Big(4\|\alpha\|^2\sin^2(\omega t-\varphi)+1\Big)\right] + \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{\hbar}{2m\omega}\Big(4\|\alpha\|^2\cos^2(\omega t-\varphi)+1\Big)\right] && (2.35)\\
\langle H\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\Big(2\|\alpha\|^2+1\Big) && (2.36)
\end{aligned}$$

Remarque 2.6. *Observons directement que, contrairement à la moyenne de la position et de l'impulsion, la moyenne de l'Hamiltonien semble être indépendant du temps. Cela fait sens : l'interprétation de l'Hamiltonien d'un système est celui de l'énergie totale présent dans celui-ci. Or, pour un système isolé - tel notre oscillateur harmonique - l'énergie totale doit être conservé, c'est à dire $\dot{H} = 0$.*

Pour calculer l'incertitude sur H, il y a essentiellement deux méthodes : la première (la méthode longue) consiste à déterminer H^2 en utilisant (2.1), ce qui reviendrait à faire le calcul de la moyenne de X^4, P^4, etc. La seconde méthode, plus courte, revient à déterminer H^2 en exploitant son expression en terme des bosons. Appliquons cette dernière méthode :

$$H^2 = (\hbar\omega)^2\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right]^2 = (\hbar\omega)^2\left[\Big(a^\dagger a\Big)^2 + a^\dagger a + \frac{1}{4}\right] \tag{2.37}$$

La moyenne de H^2 est alors donné par :

$$\begin{aligned}
\langle\alpha(t)|H^2|\alpha(t)\rangle &= \hbar^2\omega^2\left[\langle\alpha(t)|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|a^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \frac{1}{4}\right] && (2.38)\\
&= \hbar^2\omega^2\left[\|\alpha\|^2\langle\alpha(t)|a a^\dagger|\alpha(t)\rangle + \|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] && (2.39)\\
&= \hbar^2\omega^2\left[\|\alpha\|^2\langle\alpha(t)|\mathbb{I} + a^\dagger a|\alpha(t)\rangle + \|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] && (2.40)\\
\left\langle H^2\right\rangle &= \hbar^2\omega^2\left[\|\alpha\|^4 + 2\|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] && (2.41)
\end{aligned}$$

Sans surprise cette fois, la moyenne de H^2 est indépendante du temps. Pour finir, nous pouvons déterminer la valeur de l'incertitude de l'Hamiltonien selon la méthode usuelle :

$$\Delta H = \sqrt{\hbar^2\omega^2\left[\|\alpha\|^4 + 2\|\alpha\|^2 + \frac{1}{4}\right] - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\Big(4\|\alpha\|^4 + 4\|\alpha\|^2 + 1\Big)} = \hbar\omega\|\alpha\| \tag{2.42}$$

2.2 Comparaison avec un oscillateur harmonique classique

Nous voulons maintenant comprendre le lien entre la théorie classique de l'oscillateur harmonique et sa théorie quantique. En particulier, pour ce faire, considérons un oscillateur macroscopique correspondant à un pendule, de masse $m = 1$kg et de longueur $L = 10$cm. On suppose que ce pendule effectue des petites oscillations autour de sa position d'équilibre, d'amplitude $L|\theta_{max}| = 1$cm.

De manière générale, un système possédant une énergie potentielle $V(x)$ peut-être approximée en $x = x_0$ par la série de Taylor

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} + \mathscr{O}(x - x_0)^3 \tag{2.43}$$

Le système tendra à tourner autour de la configuration minimisant $V(x)$ - or, par définition, il s'agit de l'endroit où $\frac{dV}{dx}$ disparaît. Dès lors, nous avons que $V(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} + \mathscr{O}(x-x_0)^3 \approx \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2$. Il s'agit du potentiel d'un oscillateur harmonique pour des petites oscillations autour de x_0.

Analysons le système décrit au premier paragraphe en exploitant la formulation Lagrangienne de la mécanique. Ce devoir ne traitant pas de mécanique classique, nous passerons les détails de calcul pour se focaliser sur l'interprétation physique. Placons-nous dans un champ gravitationel $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{y}$. La Lagrangien du système est

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \tag{2.44}$$

L'équation d'Euler-Lagrange permet de pleinement résoudre cette équation, et nous donne le résultat $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. En considérant de faibles oscillations autour de la position d'équilibre, nous pouvons admettre l'approximation de MacLaurin $\sin\theta = \theta$, de sorte que nous nous retrouvions avec l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$. La solution générale d'une telle équation est donnée par

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi\right) \tag{2.45}$$

où A est l'amplitude et φ est une phase quelconque ; ces deux constantes dépendant des conditions initiales.

Un état cohérent imite donc intimement l'évolution d'un oscillateur harmonique classique. En particulier, en mettant en parallèle les équations (2.19) et (2.45), nous trouvons les relations suivantes.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{L\hbar}{mg}} \qquad A = \sqrt{2}l\|\alpha\| = \sqrt{\frac{2L\hbar}{mg}}\|\alpha\| \tag{2.46}$$

Or, nous connaissons la valeur de A pour notre OH classique ! Elle est donnée par $A = L|\theta_{max}| = 1$cm. En isolant le terme $\|\alpha\|$ dans l'expression de A, nous avons alors que

$$\|\alpha\| = A\sqrt{\frac{mg}{2L\hbar}} \tag{2.47}$$

pour l'état cohérent reproduisant le plus fidèlement le mouvement du pendule.

Finalement, en associant nos résultats (2.36), (2.42) et (2.47), nous trouvons

$$\frac{\Delta H}{\langle H\rangle} = \frac{2\|\alpha\|}{2\|\alpha\|^2 + 1} = \frac{A\sqrt{2mgL\hbar}}{mgA^2 + L\hbar} \tag{2.48}$$

Application numérique : FLEMME

3 Partie III - Décohérence

3.1 Spectre de l'Hamiltonien

3.2 Une histoire de déplacement ...