Représentations de la position et de l'impulsion en Mécanique Quantique Considérons une particule dans l'espace d

Nous avons vu lors du développement du formalisme de Dirac que l'onde plane $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ e^{ipx/\hbar}$ constituait une

où $\hat{\psi_p} = (v_p, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ dx\ v_p^* \psi(x)$.
Rappelons également que l'on ne doit pas perdre de vue qu'à tout état **physique** doit être associé une fonction de carré

Dans la suite, nous utiliserons les deux bases continues suivantes :
$\{\xi_{x_0}(x)\}$ où $\xi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$
$\{v_{p_0}(x)\}$ où $v_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ e^{ip_0 x/\hbar}$

Nous chercherons à représenter les opérateurs position $\hat{X}$ et impulsion $\hat{P}$ grâce à cette base. En effet, ces deux opérateu
[label = $\bullet$]$x_0 \equiv$ état propre de l'opérateur $\hat{X}$, correspondant à la "fonction propre" $\delta(x - x_0)$, de valeur propre x_0. $p_0 \equiv$
*Relations d'orthonormalisation et de fermeture
Par définition du produit scalaire, nous avons que
[label=$\bullet$]$x_0|x_0' = \int dx\ \delta(x - x_0)\delta(x - x_0') = \delta(x_0 - x_0')$ $p_0|p_0' = \int dx\ \frac{e^{-ip_0 x/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{e^{ip_0' x/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int dx \frac{e^{-i(p_0 - p_0')x/\hbar}}{2\pi\hbar} = \int du\ \frac{e^{-i(p_0 - p_0')}}{2\pi}$

Les bases que l'on a défini sont donc bien orthonormées au sens large ; ceci nous donne ainsi une *relation d'orthono*

Puisque $\{x_0\}$ et $\{p_0\}$ forment une base orthonormée dans l'espace des états, nous pouvons également écrire les *rela*
[label=$\bullet$]$\int dx_0\ x_0 x_0 = I$ $\int dp_0\ p_0 p_0 = I$
*Composantes d'un ket
Considérons un état quantique ψ, correspondant à la fonction d'onde $\psi(x)$. En exploitant les relations de fermeture
$\psi = \int dp_0\ p_0 p_0|\psi$
De plus, nous observons que : $\mathrm{x}_0|\psi = \int dx\ \xi_{x_0}^*(x)\psi(x)$ (par définition du produit scalaire)
$= \int dx\ \delta(x - x_0)\psi(x)$
$= \psi(x_0)$
et $p_0|\psi = p_0 I\psi = p_0 \left(\int dx\ x_0 x_0\right)\psi$
$= \int dx\ p_0|x_0 x_0|\psi$ où $p_0|x_0 = \int dx\ p_0^*(x)\delta(x - x_0) = p_0^*(x_0)$
$= \int dx\ \frac{e^{-ip_0 x_0/\hbar}}{\sqrt{e\pi\hbar}}\psi(x_0)$
$= \tilde{\psi}(p_0)$ (transformée de Fourier de $\psi(x)$)

En résumé, nous avons donc obtenu ces deux relations importantes : redIci ce serait bien d'écrire ces deux relations
[label=$\bullet$]$x|\psi = \psi(x)$ $p|\psi = \tilde{\psi}(p)$
*Produit scalaire de deux vecteurs A l'aide des relations de fermeture, nous allons écrire le produit de deux vecteur
En effet, nous avions déjà défini le produit scalaire dans cet espace comme $(f, g) = \int dx\ f^* g$; nous verrons que c'est ce
$\varphi|\psi = \varphi\left(\int dx\ xx\right)\psi$
$= \int dx\ \varphi|xx|\psi$
$= \int dx\ \varphi^*(x)\psi(x)$
$\varphi|\psi = \varphi\left(\int dp\ pp\right)\psi$
$= \int dp\ \varphi|pp|\psi$
$= \int dp\ \tilde{\varphi}^*(p)\tilde{\psi}(p)$
*Opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$
Supposons que l'on ait :
[label=$\bullet$]$x \equiv$ "vecteur propre" de l'opérateur $\hat{X}$ de "valeur propre" x ; $\hat{X}x = xx$ $p \equiv$ "vecteur propre" de l'opérateur $\hat{P}$
Ainsi, nous en déduisons directement que : $\mathrm{x}\hat{X}\psi = xx|\psi = x\ \psi(x)$
$p\hat{P}\psi = pp|\psi = p\ \tilde{\psi}(p)$

Nous allons maintenant calculer 2 quantités ($x\hat{P}\psi$ et $\varphi\hat{P}\psi$) qui nous permettront de montrer la relation de commut
Commençons par calculer $x\hat{P}\psi$: redA vérifier cette partie/ajouter commentaires
$\mathrm{x}\hat{P}\psi = x\left(\int dp\ pp\right)\hat{P}\psi$
$= \int dp\ x|pp\hat{P}\psi$
$= \int dp\ \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} p\tilde{\psi}(p)$
$= -i\hbar\ \partial_x \left(dp\ \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\psi}(p)\right)$
$= -i\hbar\ \partial_x \psi(x)$ (par propriété de la transformée de Fourier)
Ceci est bien cohérent avec l'équivalence faite au début du cours entre l'opérateur impulsion $\hat{P}$ et $-i\hbar\ \partial_x$ afin de dé
Nous pouvons en déduire facilement $\varphi\hat{P}\psi$:
$\varphi\hat{P}\psi = \int dx\ \varphi|x x\hat{P}\psi$
$= \int dx\ \varphi^*(x)\left(-i\hbar\ \partial_x \psi(x)\right)$

Montrons à présent la relation $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\ I$: $\mathrm{x}[\hat{X}, \hat{P}]\psi = x\hat{X}\hat{P}\psi - x\hat{P}\hat{X}\psi$
$= xx\hat{P}\psi - x\hat{P}(\hat{X}\psi) = xx\hat{P}\psi - (-i\hbar\partial_x x\hat{X}\psi) =$
$= (-i\hbar\partial_x x|\psi)\, x + i\hbar\partial_x(x\psi(x))$
$= -i\hbar x\partial_x \psi(x) + i\hbar x\partial_x \psi(x) + i\hbar\psi(x)$
$= i\hbar\psi(x) = xi\hbar\ I\psi$ Ceci étant valabe pour tout x, ψ, nous avons bien que