

Spin 1/2 Une très brève introduction à la quantification du moment angulaire

(Pour une vision + complète, voir cours de BA3 MQ
 et Cohen-Tannoudji: chapitres VI, IX, X)
 et cours de math BA3 groupes de Lie)

Groupe des Rotations

Matrices $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telle que $R^T R = \mathbb{I}$

Si \vec{n} est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 et θ un angle,
 $R(\theta, \vec{n})$ est la rotation (ds le sens anti horlogique) autour de
 l'axe \vec{n} d'angle θ .

$$R(\theta, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_x) \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_y) \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_z) \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que $R(\theta, \vec{n}) = \exp(i\theta \vec{n} \cdot \vec{L})$
 ou $\vec{n} \cdot \vec{L} = n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z$

$L_x, L_y, L_z =$ générateurs du groupe des rotations

Relations de commutation

$$[L_x, L_y] = i L_z \quad [L_y, L_z] = i L_x \quad [L_z, L_x] = i L_y$$

interprétation :

$$\begin{aligned} R(-\theta, y) R(-\theta, x) R(\theta, y) R(\theta, x) &= \mathbb{I} + \theta^2 [L_x, L_y] + O(\theta^3) \\ &= R(\theta^2, L_z) \text{ à l'ordre } \theta^2 \end{aligned}$$

En physique, de nombreux objets se transforment sous l'action d'une rotation (pas seulement les vecteurs).

Une représentation du groupe des rotations est un ensemble de 3 opérateurs J_x, J_y, J_z qui satisfont $[J_x, J_y] = i J_z$ (+ permutations cycliques)

et tel que sous une rotation d'angle θ autour de l'axe \vec{n} , un état $| \psi \rangle$ se transforme comme

$$| \psi \rangle \xrightarrow{R(\theta, \vec{n})} \exp(i \theta \vec{n} \cdot \vec{J}) | \psi \rangle$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J} = n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z$$

exemple : $J_x = y p_z - z p_y$

$$J_y = z p_x - x p_z$$

$$J_z = x p_y - y p_x$$

Un système est invariant par rotation si

$$e^{-itH} e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}} |4\rangle = e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}} e^{-itH} |4\rangle \quad \forall |4\rangle, \forall \vec{n}, \text{ et}$$

(faire une rotation, puis évoluer dans le temps \equiv évoluer dans le temps, puis faire la rotation).

Si on prends θ et t infinitésimaux, on trouve

$$[H, J_x] = [H, J_y] = [H, J_z] = 0$$

Conséquence :

1) si $|\psi(t)\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger $i\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$$\text{Alors } \langle \psi(t) | J_x | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | J_x | \psi(0) \rangle$$

2) si $|\psi\rangle$ est vecteur propre de J_x

$$J_x |\psi\rangle = j |\psi\rangle$$

Alors $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle$ est aussi vecteur propre de J_x

$$J_x |\psi(t)\rangle = j |\psi(t)\rangle$$

La grandeur conservée à cause de l'invariance par rotation est le Moment Angulaire

Quantification du Moment Angulaire

Théorème

$$[J_x, J_y] = i J_z \Rightarrow \text{les valeurs propres de } J_z$$

$$J_z |\psi\rangle = m |\psi\rangle$$

m est demi-entier $m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Théorème

} une représentation irréductible (= non triviale)
du groupe des rotations par des matrices $d \times d$.
et dans ce cas $J_z = -d/2, -d/2+1, \dots, +d/2$



Cas le plus simple non trivial.

matrices 2×2 = Matrices de Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{1}{2} \sigma_x$$

$$J_y = \frac{1}{2} \sigma_y$$

$$J_z = \frac{1}{2} \sigma_z$$

~~Rotations~~

On vérifie que $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} \mathbb{I}$$

$$\text{Tr}(\sigma_a) = 0$$

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{I} + i \epsilon_{abc} \sigma_c$$

vecteurs propres :

$$\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \quad \psi_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

vecteur unitaire $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre +1

$$= \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle$$

Les particules élémentaires e^- , p^+ , n ont un spin $1/2$
 Elles ont un espace de Hilbert interne de dimension 2
 qui transforme sous rotations comme $\exp(i\frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$

Remarque

Dans cette section, nous avons travaillé en unités où $\hbar = 1$.

Alternativement, si $\tilde{L}_x, \tilde{L}_y, \tilde{L}_z$ désignent les vrais opérateurs moment angulaire, nous avons utilisés les opérateurs sans dimension $L_x = \frac{\tilde{L}_x}{\hbar}$, $L_y = \frac{\tilde{L}_y}{\hbar}$, $L_z = \frac{\tilde{L}_z}{\hbar}$ (\hbar et L ont les mêmes dimensions).

Donc une rotation d'angle θ autour de l'axe x est $\exp(i\theta L_x) = \exp(i\theta \frac{\tilde{L}_x}{\hbar})$.

Et la relation de commutation des moments angulaires $[L_x, L_y] = i L_z$ ~~est~~ est en réalité $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] = i\hbar \tilde{L}_z$.

Remarque: les mêmes considérations liant invariance par rotation et conservation du moment angulaire s'appliquent aussi à l'invariance par translation et la conservation de l'impulsion, voir chapitre suivant.