Spin 1/2

Une très brève introduction à la quantification du moment angulaire

(Pour une vision + complète, voir cours de BA3 MQ et Cohen-Tannoudji chapitres VI, IX, X)
et cours de math BA3 Groupes de Lie

Groupe des Rotations

Matrices $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $R^T R = \mathbb{I}$

Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et θ un angle,
$R(\theta,\vec{n})$ est la rotation (ds le sens antihorlogique) autour de l'axe $\vec{n}$ d'angle θ.

$$R(\theta,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_x) \qquad L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_y) \qquad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta,3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_3) \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que $R(\theta,\vec{n}) = \exp(i\theta\, \vec{n}\cdot\vec{L})$
où $\vec{n}\cdot\vec{L} = n_x L_x + n_y L_y + n_3 L_3$

L_x, L_y, L_z = générateurs du groupe des rotations

Relations de Commutations

$$[L_x, L_y] = i L_z \qquad [L_y, L_z] = i L_x \qquad [L_z, L_x] = i L_y$$

interprétation :

$$R(-\theta, y)\, R(-\theta, x)\, R(\theta, y)\, R(\theta, x) = \mathbb{I} + \theta^2 [L_x, L_y] + O(\theta^3)$$

$$= R(\theta^2, L_z) \quad \text{à l'ordre } \theta^2$$

En physique, de nombreux objets se transforment sous l'action d'une rotation (pas seulement les vecteurs).

Une <u>représentation du groupe des rotations</u> est un ensemble de 3 opérateurs J_x, J_y, J_z qui satisfont $\boxed{[J_x, J_y] = i J_z}$ (+ permutations cycliques)

et tel que sous une rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$, un état $|\psi\rangle$ se transforme comme

$$|\psi\rangle \xrightarrow{R(\theta, \vec{n})} \exp(i\theta\, \vec{n}\cdot\vec{J})\, |\psi\rangle$$

$$\vec{n}\cdot\vec{J} = n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z$$

<u>exemple</u> :

$$J_x = y p_z - z p_y$$

$$J_y = z p_x - x p_z$$

$$J_z = x p_y - y p_x$$

Un système est <u>invariant par rotation</u> si

$$e^{-itH}\, e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\,|\psi\rangle = e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\, e^{-itH}\,|\psi\rangle \qquad \forall|\psi\rangle,\ \forall\vec{n}, \theta, t$$

(faire une rotation, puis évoluer dans le temps $\equiv$ évoluer dans le temps, puis faire la rotation).

Si on prend θ et t infinitésimaux, on trouve

$$[H, J_x] = [H, J_y] = [H, J_z] = 0$$

<u>Conséquence :</u>

1) si $|\psi(t)\rangle$ est solutions de l'équation de Schrödinger $i\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$

Alors $\langle\psi(t)|\,J_x\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\,J_x\,|\psi(0)\rangle$

2) si $|\psi\rangle$ est vecteur propre de J_x

$$J_x|\psi\rangle = j|\psi\rangle$$

Alors $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi\rangle$ est aussi vecteur propre de J_x

$$J_x|\psi(t)\rangle = j\,|\psi(t)\rangle$$

La grandeur conservée à cause de l'invariance par rotation est le <u>Moment Angulaire</u>

Quantification du Moment Angulaire

Théorème

$[J_x, J_y) = i J_z \implies$ les valeurs propres de J_z

$J_z |\psi\rangle = m |\psi\rangle$

m est demi-entier $m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Théorème

$\exists$ une représentation irréductible (= non triviale) du groupe des rotations par des matrices $d \times d$.

et dans ce cas $J_z = -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}+1, \dots, +\frac{d}{2}$

Cas le plus simple non trivial.

matrices 2×2 = Matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{1}{2}\sigma_x \qquad J_y = \frac{1}{2}\sigma_y \qquad J_z = \frac{1}{2}\sigma_z$$

~~Rotations~~

On vérifie que $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\,\varepsilon_{abc}\,\sigma_c$

$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\,\mathbb{I}$

$\mathrm{Tr}(\sigma_a) = 0$

$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab}\,\mathbb{I} + i\,\varepsilon_{abc}\,\sigma_c$

<u>vecteurs propres</u> : $\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ $\psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

$\psi_{z+} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$ $\psi_{z-} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$

vecteur unitaire $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

On vérifie que $\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\, e^{i\varphi}\end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre +1

$$= \cos\tfrac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\theta/2\, e^{i\varphi}|\downarrow\rangle$$

Les particules élémentaires e^-, p^+, n ont un spin 1/2
Elles ont un espace de Hilbert interne de dimension 2
qui transforme sous rotations comme $\exp(i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$

Remarque

Dans cette section, nous avons travaillé en unités où $\hbar = 1$.

Alternativement, si $\tilde{L}_x, \tilde{L}_y, \tilde{L}_z$ désignent les vrais opérateurs moment angulaire, nous avons utilisés les opérateurs sans dimension $L_x = \dfrac{\tilde{L}_x}{\hbar}$, $L_y = \dfrac{\tilde{L}_y}{\hbar}$, $L_z = \dfrac{\tilde{L}_z}{\hbar}$ ($\hbar$ et $\tilde{L}$ ont les mêmes dimensions).

Donc une rotation d'angle θ autour de l'axe x est

$$\exp(i\theta L_x) = \exp\left(i\frac{\theta \tilde{L}_x}{\hbar}\right).$$

Et la relation de commutation des moments angulaires $[L_x, L_y] = i L_z$ [redacted] est en réalité $[\tilde{L}_x, \tilde{L}_y] = i\hbar \tilde{L}_z$.

~

<u>Remarque</u>: les mêmes considérations liant invariance par rotation et conservation du moment angulaire s'appliquent aussi à l'invariance par translation et la conservation de l'impulsion, voir chapitre suivant.