Première partie

Appendice

A Résultats élémentaires d'Algèbre Linéaire

Rappelons une série de résultats classiques d'Algèbre Linéaire pertinents à la Mécanique Quantique.

Définition A.1 (Produit Hermitien)**.** *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On y définit le produit hermitien, c'est à dire une application*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \to & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{array}$$

tel que $\forall$ x,y,x',y' $\in$ V, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

1. $y \cdot x = \bar{x} \cdot \bar{y}$
2. $(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$, *et* $x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$
3. $(\lambda x) \cdot y = \lambda\,(x \cdot y)$ *et* $x \cdot (\lambda y) = \bar{\lambda}(x \cdot y)$
4. $x \cdot x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \forall x, et x \cdot x = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

Un espace hermitien est un espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien.

Proposition A.2. *Soit V un espace Hermitien de dimension n. Si $E \doteq (e_1, ..., e_n)$ est un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonales, alors E est une base de V.*

Proposition A.3. *Soit V un espace Hermitien. Alors il existe une base orthonormale V.*

Nous pouvons utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour ortogonaliser une base de V d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Définition A.4. *Une matrice $a \in GL(V_{\mathbb{C}})$ est unitaire si $a^{-1} = \bar{a}^T$. L'ensemble des matrices unitaires de taille $n \times n$ est dénotée par U_n.*

Définition A.5. *Une matrice $a \in Mat(\mathbb{C})$ est Hermitienne si $\bar{a}^T = a$.*

Proposition A.6. *A est une isométrie si et seulement si a est unitaire (si $V_{\mathbb{C}}$).*

Voici une série de propriétés classiques des isométries :

1. Les isométries conservent les distances (normes) et les angles.
2. Supposons que E est orthonormale. Alors A est une isométrie si et suelement si les vecteur qui forment les colonnes de a sont :
   (a) deux à deux orthogonaux
   (b) de norme 1.
3. Si λ est une valeur propre de A, alors $\|\lambda\| = 1$.
4. Si A est une isométrie, alors $\|det(a)\| = 1$.
5. Si E et F sont des bases orthonormales de V, alors il existe une unique isométrie A tel que $A(e_i) = f_i$.
6. Tous les éléments de O_3 sont d'un des trois types suivants :
   (a) Rotations autour d'une droite passant par l'origine.
   (b) Symétries par rapport à un plan passant par l'origine.
   (c) Une composition d'isométries de type (I) et (II).

Lemme A.7. *Toutes les valeurs propres d'une matrice Hermitienne sont réelles.*

Théorème A.8. *Soit $a \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ Hermitienne. Il existe une base orthonormale de V contenant que des vecteurs propres de a. En d'autres mots, il existe une matrice O, unitaire, tel que*

$$O^{-1} a O = \bar{O}^T a O \tag{I.1}$$

Définition A.9. *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. $\mathbb{H}$ est séparable si il possède une base dénombrable.*

Remarque A.10. *Soit u_i une base $\forall i \in \mathbb{N}$. Par Gram-Schmidt, nous pouvons prendre la base orthonormée $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.*