

Remarque 0.1. *Ce cours traite de l'interprétation de Copenhague de la Mécanique Quantique.*

Première partie

Principe d'incertitude d'Heisenberg

Empiriquement, il est impossible de déterminer à la fois la position x et l'impulsion p d'une particule au delà d'une certaine précision

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{I.1})$$

où $\Delta x, \Delta p$ sont les **écart-types** des grandeurs liées. Il s'agit de l'Incertitude de Heisenberg.

Nous avons donc que pour tout état quantique, x et p sont incertains : leurs incertitude obéissent à la relation I.1. Cela est liée au caractère probabiliste de la Mécanique Quantique : chaque résultat d'une mesure est aléatoire.

Notons la relation de longueur d'onde de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{I.2})$$

1 Applications du Principe d'Incertitude

Les différents calculs qui vont suivre servent à déterminer un ordre de grandeur : nous ne prêtons pas attention aux constantes multiplicatives tel que le facteur $\frac{1}{2}$ devant I.1.

1.1 Application à l'atome d'Hydrogène

Empiriquement, nous trouvons que l'énergie d'un atome d'hydrogène sera donné par la relation

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (\text{I.3})$$

Où $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

Or, nous avons que l'électron de l'atome sera confiné dans une zone de rayon r . Dès lors, en utilisant I.1, nous aurons que $\Delta p \approx \frac{\hbar}{r}$. Dès lors,

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \quad (\text{I.4})$$

Il suffit alors de dériver cette dernière pour obtenir l'énergie minimale :

$$\begin{aligned} E_{min} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \right) = 0 \\ &= -\frac{2\hbar^2}{2mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \\ &= \frac{1}{r^2} \left[e^2 - \frac{\hbar^2}{mr} \right] = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit dès lors que

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad E_{min} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Nous pouvons en déduire la valeur du **rayon de Bohr** - soit la distance séparant, dans l'atome d'hydrogène, le proton de l'électron. Il s'agit donc d'un ordre de grandeur du rayon des atomes. Il correspond à

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (\text{I.5})$$

Similairement, nous avons l'énergie de liaison de l'atome d'Hydrogène - également appelée **énergie de Rydberg** :

$$R_y = \frac{me^4}{2\hbar^2} \quad (\text{I.6})$$

Nous pouvons retrouver les états liés en suivant

$$E_n = -R_y \frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (\text{I.7})$$

Où $n = 1, 2, 3, \dots$

1.2 Application à l'Oscillateur Harmonique

Soit $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$. Posons $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la fréquence angulaire. Par définition, l'état fondamental est de longueur Δx . Dès lors, I.1 nous implique que l'impulsion est donnée par $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$. En partant de là,

$$E(\Delta x) = \frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad (\text{I.8})$$

En dérivant cette dernière équation, nous avons que le minimum d'énergie est donnée en $\Delta x \approx \frac{\hbar^{\frac{1}{2}}}{(mk)^{\frac{1}{4}}}$. Cela implique que

$$E_{\min} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar \approx w \hbar \quad (\text{I.9})$$

La relation exacte correspond effectivement. En effet :

$$E_n = \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{I.10})$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar w \quad (\text{I.11})$$

Notons que cette dernière est ce que nous appelons l'**énergie de point zéro**.

1.3 Application au cas relativiste

L'incertitude d'Heisenberg est également valide dans le cas relativiste. La relation de dispersion nous donne que $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ pour une particule libre relativiste. En posant $\Delta x \approx \frac{\hbar}{mc}$, nous avons que $\Delta p \approx mc$: il s'agit d'une particule relativiste. Dès lors,

- L'incertitude sur l'énergie sera de l'ordre $\Delta E \approx mc^2$.
- Supposons que nous avons un électron $e(-)$ dans une boîte de taille $\approx \frac{\hbar}{mc}$. L'incertitude sur l'énergie permet alors de créer des paires d'électrons et de positrons. **La notion de particule perd son sens dans le cadre de la mécanique quantique relativiste.** Cette taille est appelée à longueur d'onde de Compton, et vaut exactement $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$.

1.4 Application à la Masse de Planck

Considérons une particule de masse M confinée dans une boule de rayon R . Nous avons alors plusieurs longueurs caractéristiques intéressantes.

1. **Première longueur caractéristique.** La longueur de Compton : $\lambda_C = \frac{\hbar}{Mc}$.
2. **Seconde longueur caractéristique.** Le rayon de Schwarzschild : $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Il s'agit du rayon que doit prendre un objet de masse M pour devenir un trou noir ; c'est à dire dont la vitesse de libération est de l'ordre c .

La masse de Planck est alors donnée par la relation $M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$. En particulier, nous avons que :

- Si $M < M_{Pl}$, alors $\lambda_C > R_S$: nous avons une particule élémentaire.
- Si $M > M_{Pl}$, nous aurons un trou noir.
- Si $M \approx M_{Pl}$, nous ne connaissons pas la nature de l'objet.

1.5 Application à la masse des étoiles

Soit N le nombre d'atomes d'hydrogène dans une boule de rayon R , soumis à l'attraction gravitationnelle. Le volume par atome est de l'ordre $\frac{R^3}{N}$. A partir de là, nous pouvons déduire :

- **Le rayon de confinement de chaque électron et proton.** $\Delta x_e = \Delta x_p = \frac{R}{N^{\frac{1}{3}}}$.
- **Le moment de ces mêmes électrons et protons**¹. $\Delta p_e = \Delta p_p = \frac{\hbar N^{\frac{1}{3}}}{R}$.

1. A partir de I.1.

De ces relations, nous pouvons écrire les énergies cinétiques et gravitationnelle de l'objet :

$$\begin{array}{cc} \text{Energie cinétique} & \text{Energie gravitationnelle} \\ N \left(m_e c^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta P_e^2}{m_e} + m_p c^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta P_p^2}{m_p} \right) & -G \frac{(Nm_p)^2}{R} \end{array}$$

Notons que nous négligeons le dernier terme de l'énergie cinétique : de fait, $m_p \gg m_e$. Dès lors, l'énergie sera donnée par

$$E(R) \approx -G \frac{(Nm_p)^2}{R} + Nm_e c^2 + Nm_p c^2 + \frac{N}{2m_e} \frac{\hbar^2 N^{\frac{2}{3}}}{R^2} \quad (\text{I.12})$$

Dès lors, l'énergie sera minimum en $R^* \approx \frac{\hbar^2}{Gm_p^2 m_e N^{\frac{1}{3}}}$. Remarquons que lorsque le nombre de particules N augmente, R^* diminue.

Quand est-ce que les électrons deviennent relativistes ? Remarquons que $\Delta p_e \approx cm_e = \frac{\hbar N^{\frac{1}{3}}}{R^*} = \frac{Gm_e m_p^2 N^{2/3}}{\hbar}$. Nous pouvons en déduire que

$$N = \left(\frac{M_{Pl}}{m_p} \right)^3 \quad (\text{I.13})$$

Lorsque les particules deviennent relativistes, les réactions nucléaires deviennent possibles. Nous avons donc de la fusion nucléaire, ce qui donne une étoile !

Dans une première approximation, nous aurons alors que la masse d'une étoile est donnée par

$$M \approx m_p N \approx m_p \left(\frac{M_{Pl}}{m_p} \right)^3 \quad (\text{I.14})$$

Donner les ordres de grandeur de ces nombres.

$$\begin{array}{cc} \text{Masse de Planck} & \text{Masse d'un proton} \\ M_{Pl} \approx 10^{19} \frac{GeV}{c^2} & m_p \approx 1 \frac{GeV}{c^2} \end{array}$$

Dès lors, $M_\odot \approx 10^{57} \frac{GeV}{c^2}$. La valeur exacte est de $1.0410^{57} \frac{GeV}{c^2}$.

Nous estimons les plus petites étoiles à $M \approx 0.08 M_\odot$, et les plus grandes à $M \approx 100 M_\odot$.

1.6 Masse de Chandrasekhar

Reprenons $E(R)$ pour N atomes d'hydrogènes dans une boule de rayon R , à température nulle et en tenant compte les effets relativistes.

$$E(R) \approx -\frac{GN^2 m_p^2}{R} + Nm_p c^2 + N \sqrt{m_e^2 c^4 + \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{R^2} c^2} \quad (\text{I.15})$$

Soit N^* une valeur limite. Lorsque $N = N^*$:

$$\lim_{R \rightarrow 0} E(R) = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} -\frac{GN^2 m_p^2}{R} + \frac{N^{\frac{4}{3}} \hbar c}{R} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$N^* = \left(\frac{\hbar c}{G} \frac{1}{m_p^3} \right) = \frac{M_{Pl}^3}{m_p^3} \quad (\text{I.18})$$

A température nulle, si $N > \frac{M_{Pl}^3}{m_p^3} = N^*$, alors la boule ne peut pas résister à son attraction gravitationnelle : elle se collapse en un trou noir.

La masse limite à la masse de Chandrasekhar : elle vaut approximativement $1.4 M_\odot$. Il s'agit de l'origine des trous noirs et des supernovae.

Résumé du chapitre

Formules.