

## Première partie

# Applications de la Mécanique Quantique

## 1 Interféromètre de Mech-Zehnder

Cet exemple est tiré de l'optique. Nous allons regarder ce qu'il se passe en optique classique, et nous allons ensuite utiliser le formalisme quantique. Ce faisant, nous pourrions mettre en évidence les différences entre les deux.

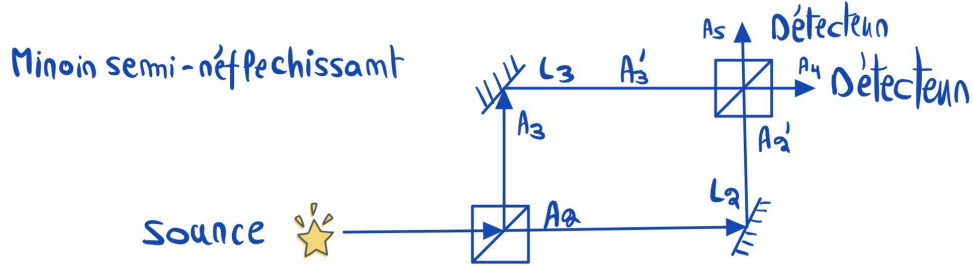


FIGURE 1 – Représentation du principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Notons que les longueurs  $L_i$  représentent la longueur totale du trajet dans le chemin  $i$  suivit.

### 1.1 Lumière classique

Au niveau des détecteurs, plusieurs chemins sont possibles, comme l'illustre l'image ci-contre.

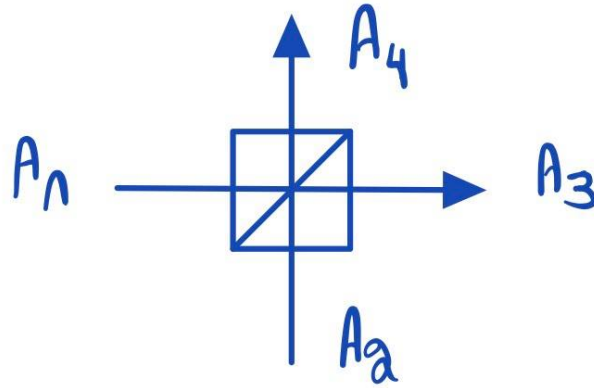


FIGURE 2 – Les ondes incidentes - arrivants de deux endroits différents, respectivement  $A_1$  et  $A_2$  peuvent suivre deux chemins différents :  $A_3$  et  $A_4$ .

En supposant partant de la description d'une onde plane, nous pouvons écrire

$$A_1(t) = A_1 e^{-i\omega t} \quad (\text{I.1a})$$

$$A_2(t) = A_2 e^{-i\omega t} \quad (\text{I.1b})$$

Pour les ondes incidentes, ainsi que

$$A_3(t) = \cos \theta A_1 e^{-i\omega t} + i \sin \theta A_2 e^{-i\omega t} \quad (\text{I.2a})$$

$$A_4(t) = \cos \theta A_2 e^{-i\omega t} + i \sin \theta A_1 e^{-i\omega t} \quad (\text{I.2b})$$

pour les ondes sortantes.

**Remarque 1.1.** Par convention, les ondes transmises ne subissent aucun déphasage, là où les ondes réfléchies bénéficient d'un déphasage de  $\pi/2$ . D'autres conventions sont possibles.

Notons que nous pouvons introduire un facteur  $e^{ikL}$  tenant compte de la distance parcourue, i.e. un point en  $x = 0$  peut-être décrit par  $A(t) = Ae^{-i\omega t}$  et un point en  $x = L$  peut-être décrit par  $A'(t) = Ae^{-i\omega t}e^{ikL}$ . Le détecteur est de sorte que  $I(t) = e\|A(t)\|^2$ . Soit

$$A(t) = Ae^{-i\omega t} \quad I_{Initial} = \|A(t)\|^2$$

Nous avons alors que

$$A_2(t) = \frac{A(t)}{\sqrt{2}} \quad A_3(t) = i \frac{A(t)}{\sqrt{2}}$$

En particulier, nous pouvons écrire les chemins  $A'_2$  et  $A'_3$  de 2 selon

$$A'_2(t) = A_2(t)e^{ikL_2} \quad (I.3a)$$

$$A'_3(t) = A_3(t)e^{ikL_3} \quad (I.3b)$$

$$A_4(t) = \frac{A'_3(t)}{\sqrt{2}} + i \frac{A'_2(t)}{\sqrt{2}} = \frac{A_3(t)e^{ikL_3}}{\sqrt{2}} + i \frac{A_2(t)e^{ikL_2}}{\sqrt{2}} = i \frac{A}{2} (e^{ikL_3} + e^{ikL_2}) \quad (I.3c)$$

$$A_5(t) = \frac{A'_2(t)}{\sqrt{2}} + i \frac{A'_3(t)}{\sqrt{2}} = \frac{A_2(t)e^{ikL_2}}{\sqrt{2}} + i \frac{A_3(t)e^{ikL_3}}{\sqrt{2}} = i \frac{A}{2} (-e^{ikL_3} + e^{ikL_2}) \quad (I.3d)$$

En introduisant le terme  $\Delta\Phi = kL_3 - kL_2$ , nous pouvons conclure que

## 1.2 Lumière quantique

L'algèbre est la même : l'interprétation change.

## 2 Oscillations de neutrinos

Les neutrinos sont des particules neutres, interagissant très faiblement avec la matière. Elle fût prédite par Pauli pour expliquer le spectre des  $e^-$  dans la désintégration du  $\beta : n \Rightarrow p^+ + e^- + \nu$ .

## 3 MASER $NH_3$

Dans cette section, nous allons discuter d'un appareil fort pratique : le MASER<sup>1</sup> d'ammonium  $NH_3$  ; l'un des ancêtres des LASER<sup>2</sup>

## 4 Spin $\frac{1}{2}$

Nous voyons en cette section une très brève introduction à la quantification du moment angulaire en Mécanique Quantique. Pour ce faire, introduisons le Groupe des Rotations.

Considérons l'ensemble des matrices  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $R^T R = \mathbb{I}$ . Si  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  et  $\theta$  un angle, alors  $R(\theta, \mathbf{n})$  est la rotation (en son sens anti-horlogique) autour de l'axe  $\mathbf{n}$  d'angle  $\theta$ .

$$\begin{aligned} R(\theta, x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_x) & L_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, y) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_y) & L_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, z) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_z) & L_z &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Acronyme anglais pour 'Microwave Amplicifaction by Stimulated Emission of Radiation'.

2. Acronyme anglais pour 'Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation'.

Nous avons alors que  $R(\theta, \mathbf{n}) = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L})$ , où  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = n_i L_i$ . Les vecteurs  $L_x, L_y, L_z$  sont appelés les *générateurs du Groupe des Rotations*.

En physique, de nombreux objets (et non pas seulement les vecteurs) sont invariants ou se transforment sous l'effet d'une rotation. Une autre représentation du Groupe des Rotations est l'ensemble des 3 opérateurs  $J_x, J_y, J_z$  tels que  $[J_x, J_y] = J_z$  (ainsi que toute permutation cyclique de cela) et tel que, sous toute rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{n}$ , un état  $|\Psi\rangle$  se transforme en

$$|\Psi\rangle \rightarrow \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\Psi\rangle \quad (\text{I.5})$$

**Exemple 4.1.** Les opérateurs

- $J_x = yp_z - zp_y$
- $J_y = zp_x - xp_z$
- $J_z = xp_y - yp_x$  sont des exemples de représentation du Groupe des Rotations.

Un système est invariant par rotation lorsque

$$\exp(-itH) \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\Psi\rangle = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \exp(-itH) |\Psi\rangle \quad \forall |\Psi\rangle, \forall \mathbf{n}, \theta, t$$

Cela revient à dire que *faire une rotation* et ensuite *évoluer dans le temps* est identique à *évoluer dans le temps* et puis *faire une rotation*.

**Lemme 4.1.** Pour  $\theta$  et  $t$  infinitésimaux, nous avons que

$$[H, J_x] = [H, J_y] = [H, J_z] = 0 \quad (\text{I.6})$$

Les conséquences en sont nombreuses. Nous avons notamment alors que :

1. Si  $|\Psi(t)\rangle$  est une solution de l'équation de Schrödinger (??), alors  $\langle \Psi(t) | J_x | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | J_x | \Psi(0) \rangle$ .
2. Si  $|\Psi\rangle$  est un vecteur propre de  $J_x$ ,

$$J_x |\Psi\rangle = j |\Psi\rangle \quad (\text{I.7})$$

alors  $|\Psi(t)\rangle = \exp(-iHt) |\Psi\rangle$  est aussi un vecteur propre de  $J_x$ .

Le Théorème d'Emmy Noether nous apprend que la grandeur conservée par la symétrie de rotation est le moment angulaire.

## 4.1 Quantification du moment angulaire

**Théorème 4.1.** Soit  $[J_x, J_y] = iJ_z$ . Nous avons alors que les valeurs propres de  $J_z$  est un demi-entier :  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

$$J_z |\Psi\rangle = m |\Psi\rangle$$

**Théorème 4.2.** Il existe une représentation non triviale du Groupe des Rotations par des matrices  $d \times d$ . Dans ce cas,  $J_z = -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2} + 1, \dots, +\frac{d}{2}$ .

**Exemple 4.2.** Le cas le plus simple est celle des matrices de Pauline (matrices  $2 \times 2$ ) :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ J_x = \frac{1}{2} \sigma_x \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ J_y = \frac{1}{2} \sigma_y \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ J_z = \frac{1}{2} \sigma_z \end{array} \right|$$

Nous pouvons vérifier que les différentes relations que nous avons vu plus haut sont vérifiées.