Représentations position et impulsion

Cohen Chap II . E . 1 "repr. r et p"

Considérons une particule.
L'espace de Hilbert est $L_2(\mathbb{R})$ ou $L_2(\mathbb{R}^3)$: les fonctions de carré sommable.

Les opérateurs position X et impulsion P n'ont pas de vecteurs propres dans l'espace de Hilbert.

Néanmoins on peut faire comme si X et P avaient des vecteurs propres. On expliquera plus bas comment on peut justifier cette approche.

$|x_0\rangle$ = état propre de l'opérateur X de valeur propre x_0
correspond à la "fonction d'onde" $\delta(x-x_0)$

$|p_0\rangle$ = état propre de l'opérateur P de valeur propre p_0
correspond à la "fonction d'onde" $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}}$

Normalisation

$$\langle x_0 | x_0' \rangle = \int dx \; \delta(x-x_0)\,\delta(x-x_0') = \delta(x_0-x_0') \qquad (1)$$

$$\langle p_0 | p_0' \rangle = \int dx \; \frac{e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \; \frac{e^{i\frac{p_0' x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$= \int du \; \frac{e^{-i(p_0-p_0')u}}{2\pi} \qquad u = \frac{x}{\hbar}$$

$$= \delta(p_0-p_0') \qquad (2)$$

Complétude $\{|x_0\rangle\}$ et $\{|p_0\rangle\}$ forment une base

$$\longrightarrow \int dx_0 \, |x_0\rangle\langle x_0| = \mathbb{I} \qquad (3)$$

$$\int dp_0 \, |p_0\rangle\langle p_0| = \mathbb{I} \qquad (4)$$

Composante d'un ket

Soit $|\psi\rangle$ un état quantique, de fonction d'onde $\psi(x)$

On identifie $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ (5)

En utilisant (3), on a $|\psi\rangle = \left(\int dx \, |x\rangle\langle x|\right)|\psi\rangle = \int dx \, |x\rangle \langle x|\psi\rangle$

$$= \int dx \, \psi(x) \, |x\rangle \qquad (6)$$

En particulier, en prenant pour $|\psi\rangle = |p_0\rangle$ on a

$$\langle x|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} \qquad (7)$$

On a alors $\langle p|\psi\rangle = \langle p| \, \mathbb{I} \, |\psi\rangle$

$$= \langle p| \int dx \, |x\rangle\langle x| \, |\psi\rangle \qquad \left(\text{utiliser } (3)\right)$$

$$= \int dx \, \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle$$

$$= \int dx \, \frac{e^{-i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, \psi(x) \qquad (\text{utiliser } (5) \text{ et } (7))$$

$$= \tilde{\psi}(p) = \text{transformée de Fourier de } \psi.$$

Produit Scalaires de 2 vecteurs

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \left(\int dx \, |x\rangle\langle x| \right) | \psi \rangle$$
$$= \int dx \, \langle \varphi | x \rangle \langle x | \psi \rangle$$
$$= \int dx \, \overline{\varphi}(x) \, \psi(x)$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \left(\int dp \, |p\rangle\langle p| \right) | \psi \rangle$$
$$= \int dp \, \langle \varphi | p \rangle \langle p | \psi \rangle$$
$$= \int dp \, \overline{\tilde{\varphi}}(p) \, \tilde{\psi}(p)$$

Opérateurs X et P

$|x_0\rangle$ est vecteur propre de X de valeur propre x_0

$$X|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle \qquad (8)$$

$$\longrightarrow \langle x|X|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\,\psi(x)$$

de même, $|p_0\rangle$ est vecteur propre de P de valeur propre p_0

$$P|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle \qquad (9)$$

$$\longrightarrow \langle p|P|\psi\rangle = p\langle p|\psi\rangle = p\,\tilde{\psi}(p)$$

Calculons $\langle x|P|\psi\rangle = \int dp \langle x|p\rangle\langle p|P|\psi\rangle$

$$= \int dp \frac{e^{i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, p\,\tilde{\psi}(p)$$

$$= -i\hbar\partial_x \left(\int dp \frac{e^{i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \tilde{\psi}(p)\right)$$

$$= -i\hbar\partial_x \psi(x)$$

(10) $\boxed{\langle x|P|\psi\rangle = -i\hbar\partial_x \langle x|\psi\rangle}$

Calculons $\langle \varphi|P|\psi\rangle = \int dx \langle\varphi|x\rangle\langle x|P|\psi\rangle$

$$= \int dx\, \overline{\varphi}(x)\left(-i\hbar\partial_x\psi(x)\right)$$

$$\boxed{[X, P] = i\hbar \mathbb{I}} \quad (11)$$

Preuve $\langle x | [X,P] | \psi\rangle = \langle x | XP|\psi\rangle - \langle x | PX|\psi\rangle$

$= x \langle x | P|\psi\rangle - \langle x | PX|\psi\rangle$

utilser (10) $= x \left(-i\hbar\partial_x \langle x|\psi\rangle\right) - \left(-i\hbar\partial_x \underbrace{\langle x | X|\psi\rangle}_{x\langle x|\psi\rangle}\right)$

$= \underbrace{x\left(-i\hbar\partial_x\right)\psi(x)}_{-i\hbar x\left(\partial_x\psi(x)\right)} + \underbrace{i\hbar\partial_x\left(x\psi(x)\right)}_{i\hbar x\left(\partial_x\psi(x)\right) + i\hbar\psi(x)}$

$= i\hbar\psi(x)$

$= \langle x| i\hbar\mathbb{I}|\psi\rangle$

Vrai pour tout $|x\rangle, |\psi\rangle \Longrightarrow$ (11)

Comment justifier ces notations ?
"Rigged Hilbert Space".

$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ = espace de Hilbert des fonctions de carré sommables.

→ Si $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ on a le produit scalaire $\langle\varphi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$

Si $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire, on peut calculer $\langle\varphi|A|\psi\rangle$

Soit $S = \{$ fonctions C^∞ à décroissance rapide $\} \subset \mathcal{H}$

Soit $S^* = \{$ formes linéaires continues sur $S\}$ = distributions tempérées.

on a $S \subset \mathcal{H} \subset S^*$

Si $|\phi\rangle \in S$ et $|T\rangle \in S^*$, $\langle T|\phi\rangle$ est bien défini

Si $A : S \to S$ est un opérateur linéaire, alors

$A|T\rangle$ est défini par $\langle\phi|(A|T\rangle) = (\langle\phi|A)|T\rangle \quad \forall |T\rangle \in S^*, \ |\phi\rangle \in S$

On peut ainsi élargir l'espace de Hilbert à S^*.

Il reste à voir dans quelle mesure on peut définir des grandeurs comme $\langle T|T'\rangle$ pour $|T\rangle, |T'\rangle \in S^*$

Opérateur translation

(voir Cohen-Tannoudji complément E_{II})
pour la définition de $S(\lambda)$

Soit X et P les opérateurs position et impulsion

$$[X, P] = i\hbar \mathbb{I}$$

Soit $S(\lambda) = \exp\left(-i\frac{\lambda P}{\hbar}\right)$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$S(\lambda)$ est unitaire et $\boxed{S^{+}(\lambda) = S(-\lambda)}$ et $\boxed{S(\lambda)S(\lambda') = S(\lambda+\lambda')}$

Que vaut $[X, S(\lambda)] = ?$

1°) $\forall$ opérateurs A, B, C $\quad \boxed{[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]}$ (12)

2°) $\boxed{[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}}$ (13)

Preuve par récurrence.

$$[X, P^{n+1}] = [X, P.P^n] \overset{(12)}{=} \underbrace{[X,P]}_{i\hbar} P^n + P \underbrace{[X, P^n]}_{\substack{i\hbar n P^{n-1} \\ \text{par hypothèse} \\ \text{de récurrence}}}$$

$$= i\hbar(n+1)P^n$$

3°) Soit $F(P) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n$ une fonction de P

$\boxed{[X, F(P)] = i\hbar F'(P)}$ (14)

Preuve $[X, F(P)] = [X, \sum_n a_n P^n] = \sum_n a_n [X, P^n]$

$$= \sum_n a_n i\hbar n P^{n-1} = i\hbar F'(P)$$

Par Conséquent $[X, S(\lambda)] \overset{(14)}{=} i\hbar\left(-i\frac{\cancel{\lambda}}{\hbar}\right)S(\lambda) = \lambda S(\lambda)$

$$\boxed{[X, S(\lambda)] = \lambda S(\lambda)} \quad (15)$$

Soit $|x_0\rangle$ un vecteur propre de X de valeur propre x_0

$$X|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$$

Alors $\boxed{S(\lambda)|x_0\rangle = |x_0+\lambda\rangle}$ (16)

Preuve : $X\left(S(\lambda)|x_0\rangle\right) \overset{(15)}{=} \left(S(\lambda)X + \lambda S(\lambda)\right)|x_0\rangle$

$$= S(\lambda)\underbrace{X|x_0\rangle}_{x_0|x_0\rangle} + \lambda S(\lambda)|x_0\rangle$$

$$= (x_0+\lambda)\, S(\lambda)|x_0\rangle$$

Par conséquent si $|\psi\rangle$ est un ket de fonction d'onde $\psi(x)$

Alors $S(\lambda)|\psi\rangle$ est un ket de fonction d'onde $\psi(x-\lambda)$.

Preuve : $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$

$$\langle x|S(\lambda)|\psi\rangle = \langle x-\lambda|\psi\rangle = \psi(x-\lambda)$$

$\longrightarrow$ $\boxed{S(\lambda) = \exp\left(-i\frac{\lambda P}{\hbar}\right) \text{ est appelé l'opérateur de translation}}$

~~Conséquence~~ Invariance par translation

Supposons que l'évolution temporelle est indépendante de la position (invariance par translation)

Alors $\forall t, \forall \lambda, \forall |\psi\rangle$

$$e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} S(\lambda)|\psi\rangle = S(\lambda)\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi\rangle$$

Prenons $t = \lambda = \varepsilon$ et calculons à l'ordre ε^2

$$\left(\mathbb{I} - i\frac{H\varepsilon}{\hbar} - \frac{H^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(\mathbb{I} - i\frac{\varepsilon P}{\hbar} - \frac{P^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\mathbb{I} - i\frac{P\varepsilon}{\hbar} - \frac{P^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(\mathbb{I} - i\frac{H\varepsilon}{\hbar} - \frac{H^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \left(\mathbb{I} - i\frac{H}{\hbar}\varepsilon - i\frac{P}{\hbar}\varepsilon - \frac{H^2\varepsilon^2}{2\hbar^2} - HP\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} - P^2\frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\mathbb{I} - i \cdots\cdots\cdots - PH\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} - \cdots\right)|\psi\rangle$$

$$\rightarrow HP|\psi\rangle = PH|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \boxed{[H, P] = 0}$$

<u>Par conséquent</u> si $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$

$$\boxed{\langle\psi(t)|\, P\, |\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\, P\, |\psi(0)\rangle} \quad (15)$$

Car si $[H,P]=0$ alors $[F(H),P]=0$ $\forall$ fonction F

$$\longrightarrow \left[e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}, P\right]=0 \quad (16)$$

$$\longrightarrow \langle\psi(t)|\, P\, |\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\, e^{i\frac{Ht}{\hbar}}\, P\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\, |\psi(0)\rangle$$

$$\overset{(16)}{=} \langle\psi(0)|\, \underbrace{e^{+i\frac{Ht}{\hbar}}\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}}_{\mathbb{I}}\, P\, |\psi(0)\rangle$$

$$= \langle\psi(0)|\, P\, |\psi(0)\rangle$$

<u>Par conséquent</u>, si $|p_0\rangle$ est vecteur propre de P de valeur propre p_0 : $P|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle$

Alors $e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|p_0\rangle$ est aussi vecteur propre de P de valeur propre p_0.

$$P\left(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|p_0\rangle\right) \overset{(16)}{=} e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\, P\,|p_0\rangle = p_0\left(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|p_0\rangle\right)$$

$\longrightarrow$ L'invariance par translation implique la conservation des générateurs des translations, c'est à dire la conservation de l'impulsion.

(voir Théorème de Noether en mécanique classique).

Relations d'Incertitude

Cohen-Tannoudji Complément CII

Soit A et B deux observables

Soit $|\psi\rangle$ un état

Notation: $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

$\langle A^2\rangle = \langle\psi|A^2|\psi\rangle$

$\Delta A^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$

Soit $A' = A - \langle A\rangle$, Alors $\Delta A^2 = \langle A'^2\rangle$

De même $B' = B - \langle B\rangle$

Note: $[A,B] = [A',B']$

Théorème $\boxed{\Delta A . \Delta B \geqslant \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|}$

Preuve : Soit $|\varphi(\lambda)\rangle = (A' + i\lambda B')|\psi\rangle$

$0 \leqslant \langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|(A' - i\lambda B')(A' + i\lambda B')|\psi\rangle$

$= \langle A'^2\rangle + \lambda\langle i[A',B']\rangle + \lambda^2\langle B'^2\rangle$

Note si A', B' sont hermitien, alors $([A',B'])^\dagger = -[A',B']$

$\rightarrow i[A',B']$ est hermitien

$\rightarrow i\langle[A',B']\rangle$ est réel. $\rightarrow \langle[A',B']\rangle$ est imaginaire pur

$\rightarrow$ Polynôme du second degré à coefficients réels toujours positif.

$\rightarrow \Delta = (i\langle[A',B']\rangle)^2 - 4\langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \leqslant 0$

$\rightarrow \langle A'^2\rangle\langle B'^2\rangle \geqslant -\frac{1}{4}(i\langle[A',B']\rangle)^2 = \frac{1}{4}|\langle[A',B']\rangle|^2$

$\rightarrow \Delta A^2 \Delta B^2 \geqslant \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$

Application $[X, P] = i\hbar$

$$\longrightarrow |\langle [X,P] \rangle|^2 = |\langle \psi | i\hbar | \psi \rangle|^2 = \hbar^2$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta X \ \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Paquets d'onde minimaux.
États pour lesquels $\Delta X \, \Delta P = \frac{\hbar}{2}$.

$X' = X - \langle X \rangle$
$P' = P - \langle P \rangle$
$|\varphi(\lambda)\rangle = (X' + i\lambda P')|\psi\rangle$

$\Delta = 0 \implies \langle \varphi(\lambda)|\varphi(\lambda)\rangle = \langle X'^2 \rangle + \lambda\hbar + \lambda^2 \langle P'^2 \rangle$
a une racine double λ_0.

$$\implies \langle \varphi(\lambda_0)|\varphi(\lambda_0)\rangle = 0$$

$$\implies (X' + i\lambda_0 P')|\psi\rangle = 0$$

$$\implies \Big(X - \langle X \rangle + i\lambda_0 (P - \langle P \rangle)\Big)|\psi\rangle = 0$$

notation $\bar{x} = \langle X \rangle \quad \bar{p} = \langle P \rangle$

$$\implies \left\{x - \bar{x} + i\lambda_0 \left(-i\hbar\partial_x - \bar{p}\right)\right\}\psi(x) = 0$$

$$\implies \hbar\lambda_0 \partial_x\psi + (x - \bar{x})\psi - i\lambda_0 \bar{p}\,\psi = 0$$

$$\implies \partial_x\psi = -\frac{(x-\bar{x})}{\hbar\lambda_0}\psi + i\frac{\bar{p}}{\hbar}\psi$$

solution : $\implies \boxed{\psi(x) = C\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\hbar\lambda_0}}\, e^{+i\frac{\bar{p}x}{\hbar}}}$ $\qquad C = \text{cte.}$

Paquets d'onde Gaussiens.