Première partie

Représentations de la position et de l'impulsion en $\mathcal{M}$écanique $\mathcal{Q}$uantique

Dans ce chapitre, nous allons de nouveau considérer une particule ; en particulier, nous voulons pouvoir définir les notions de position et d'impulsion.

Nous allons travailler dans les espaces de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ ou $L_2(\mathbb{R}^3)$. Nous aurons alors des fonctions de carré sommable. Dans ces espaces, *les opérateurs position X et impulsion P n'ont pas de vecteurs propres.* Nous pouvons néamoins faire comme si ils en avaient : nous expliqueront ultérieurement comment nous pouvons justifier cette approche.

Introduisons les notations :

$\|x_0\rangle$	Etat propre de l'opérateur X de valeur propre x_0. Cela correspond à la "fonction d'onde" $\delta(x-x_0)$.
$\|p_0\rangle$	Etat propre de l'opérateur P de valeur propre p_0. Cela correspond à la "fonction d'onde" $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{p_0x}{\hbar}}$

Nous pouvons effectuer plusieurs opératuions sur ces objets.

1. **Normalisation**
   Nous voulons calculer $\langle x_0|x_0'\rangle$ et $\langle p_0|p_0'\rangle$.

$$\langle x_0|x_0'\rangle = \int dx\delta(x-x_0)\delta(x-x_0') = \delta(x_0-x_0)$$

$$\begin{aligned}\langle p_0|p_0'\rangle &= \int dx\frac{e^{-i\frac{p_0x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{e^{i\frac{p_0'x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &= \int du\frac{e^{-i(p_0-p_0')u)}}{2\pi} \qquad\qquad u=\frac{x}{\hbar} \\ &= \delta(p_0-p_0')\end{aligned}$$

   Ce faisant, nous montrons que les deux bases définies par ces opérations sont orthonormées.

2. A partir de là, nous obtenons les relations fondamentales suivantes :

$\langle x_0\|x_0'\rangle = \delta(x_0-x_0)$	$\langle p_0\|p_0'\rangle = \delta(p_0-p_0')$
$\int d^3x_0 \|x_0\rangle\langle x_0\| = \mathbb{I}$	$\int dp_0 \|p_0\rangle\langle p_0\| = \mathbb{I}$

   Nous avons alors deux relations de *complétude*, ou de *fermeture*.

3. Considérons un état quantique $|\Psi\rangle$, correspondant à la fonction d'onde $\Psi(x)$. En exploitant les relations de fermetures définies ci-dessus, nous pouvons alors écrire l'état quantique sous les deux formes suivantes :

$$|\Psi\rangle = \int d^3x_0\,|x_0\rangle\langle x_0|\,|\Psi\rangle \tag{I.1}$$

$$|\Psi\rangle = \int d^3p_0\,|p_0\rangle\langle p_0|\,|\Psi\rangle \tag{I.2}$$