## Première partie

# Représentations de la position et de l'impulsion en $\mathcal{M}$écanique $\mathcal{Q}$uantique

Dans ce chapitre, nous allons de nouveau considérer une particule ; en particulier, nous voulons pouvoir définir les notions de position et d'impulsion.

Nous allons travailler dans les espaces de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ ou $L_2(\mathbb{R}^3)$. Nous aurons alors des fonctions de carré sommable. Dans ces espaces, *les opérateurs position X et impulsion P n'ont pas de vecteurs propres.* Nous pouvons néamoins faire comme si ils en avaient : nous expliqueront ultérieurement comment nous pouvons justifier cette approche.

Dans cette section, nous utiliserons intensément les résultats obtenus en **??**.

Introduisons les notations :

| | |
|---|---|
| $\|x_0\rangle$ | Etat propre de l'opérateur X de valeur propre $x_0$. Cela correspond à la "fonction d'onde" $\delta(x - x_0)$. |
| $\|p_0\rangle$ | Etat propre de l'opérateur P de valeur propre $p_0$. Cela correspond à la "fonction d'onde" $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}}$ |

Nous pouvons effectuer plusieurs opérations sur ces objets.

### Normalisation

Nous voulons calculer $\langle x_0|x_0'\rangle$ et $\langle p_0|p_0'\rangle$.

$$\langle x_0|x_0'\rangle = \int dx \delta(x - x_0)\delta(x - x_0') = \delta(x_0 - x_0)$$

$$\langle p_0|p_0'\rangle = \int dx \frac{e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{e^{i\frac{p_0' x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int du \frac{e^{-i(p_0 - p_0')u}}{2\pi} = \delta(p_0 - p_0') \qquad u = \frac{x}{\hbar}$$

Ce faisant, nous montrons que les deux bases définies par ces opérations sont orthonormées.

### Relation de complétude

A partir de là, nous obtenons les relations fondamentales suivantes :

$$\begin{array}{c|c} \langle x_0|x_0'\rangle = \delta(x_0 - x_0) & \langle p_0|p_0'\rangle = \delta(p_0 - p_0') \\ \int d^3 \ |x_0\rangle \langle x_0| = \mathbb{I} & \int dp_0 \ |p_0\rangle \langle p_0| = \mathbb{I} \end{array}$$

Nous avons alors deux relations de *complétude*, ou de *fermeture*.

### Composante d'un ket

Considérons un état quantique $|\Psi\rangle$, correspondant à la fonction d'onde $\Psi(x)$. En exploitant les relations de fermetures définies ci-dessus, nous pouvons alors écrire l'état quantique sous les deux formes suivantes :

$$|\Psi\rangle = \int d^3x_0 \ |x_0\rangle \langle x_0| \, |\Psi\rangle \tag{I.1}$$

$$|\Psi\rangle = \int d^3p_0 \ |p_0\rangle \langle p_0| \, |\Psi\rangle \tag{I.2}$$

On pose $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Observons que

$$|\psi\rangle = \int dx \ |x\rangle \langle x| \ |\psi\rangle = \int dx \ |X\rangle \langle x|\psi\rangle \tag{I.3}$$

$$= \int \psi(x) \, |x\rangle \, . \tag{I.4}$$

En particulier, en prenant $|\psi\rangle = |p\rangle$, nous avons que

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} \tag{I.5}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\langle p|\psi\rangle &= \langle p|\mathbb{I}|\psi\rangle \\
&= \langle p| \int dx\, |x\rangle \langle x|\, |\psi\rangle\rangle \\
&= \int dx\, \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle \\
\langle p|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\; e^{i\frac{px}{\hbar}}\, \psi(x) = \tilde{\psi}(p) \qquad \text{(I.6)}
\end{aligned}$$

Où $\tilde{\psi}(p)$ est par définition la transformée de Fourier de $\psi(r)$.

Pour résumer, nous avons que

$$\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle = \psi(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(I.7)}$$

$$\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = \tilde{\psi}(\boldsymbol{p}) \qquad \text{(I.8)}$$

### Produit scalaire de deux vecteurs

En vertue des relations de complétude $I$, il est possible de retrouver le produit scalaire (**??**).

$$\begin{aligned}
\langle \varphi|\psi\rangle &= \langle \varphi| \int dx\;\; |x\rangle \langle x|\,|\,|\psi\rangle\rangle & \langle \varphi|\psi\rangle &= \langle \varphi| \int dp\;\; |p\rangle \langle p|\,|\psi\rangle \\
&= \int dx\;\; \langle \varphi|x\rangle \langle x|\psi\rangle & &= \int dp\;\; \langle \varphi|p\rangle \langle p|\psi\rangle \\
\langle \varphi|\psi\rangle &= \int dx\; \varphi^*(x)\psi(x) & \langle \varphi|\psi\rangle &= \int dp\tilde{\varphi}^*(p)\tilde{\psi}(p) \qquad \text{(I.9)}
\end{aligned}$$

### Opérateurs X et P

Soit $|\psi\rangle$ un ket quelconque et $\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle \doteq \psi(x,y,z)$ la fonction d'onde correspondante. On définit l'opérateur X de sorte que

$$|\psi'\rangle = X\,|\psi\rangle \qquad \text{(I.10)}$$

soit définit à travers la base $\{\boldsymbol{r}\}$ par la fonction $\langle \boldsymbol{r}|\psi'\rangle = \psi'(\boldsymbol{r})$, où

$$\psi'(\boldsymbol{r}) = x\psi(x,y,z). \qquad \text{(I.11)}$$

Dans cette base, l'opérateur X représente donc la multiplication par x. De manière analogue, nous introduisons les opérateurs Y et Z :

$$\langle \boldsymbol{r}|X|\psi\rangle = x\,\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle \qquad \langle \boldsymbol{r}|Y|\psi\rangle = y\,\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle \qquad \langle \boldsymbol{r}|Z|\psi\rangle = z\,\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle \qquad \text{(I.12)}$$

Similairement, on définit l'opérateur $\boldsymbol{P}$, dont l'action dans la base $|\boldsymbol{p}\rangle$ est donnée par

$$\langle \boldsymbol{p}|P_x|\psi\rangle = p_x\,\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = p_x\tilde{\psi}(p_x) \qquad \langle \boldsymbol{p}|P_y|\psi\rangle = p_y\,\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = p_y\tilde{\psi}(p_y) \qquad \langle \boldsymbol{p}|P_z|\psi\rangle = p_z\,\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = p_z\tilde{\psi}(p_z) \qquad \text{(I.13)}$$

**Proposition 0.1.** $\langle x|P|\psi\rangle = -i\hbar\partial_x\,\langle x|\psi\rangle$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\langle x|P|\psi\rangle &= \int dp\;\; \langle x|p\rangle \langle p|P|\psi\rangle \\
&= \int dp\; \frac{e^{i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} p\tilde{\psi}(p) \\
&= -i\hbar\partial_x( \int dp\; \frac{e^{i\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\psi}(p) \\
\langle x|P|\psi\rangle &= -i\hbar\partial_x\psi(x) \qquad \text{(I.14)}
\end{aligned}$$

■

**Proposition 0.2.** $[X,P] = i\hbar\mathbb{I}$

*Démonstration.* La preuve est détaillée dans le livre de référence. ■

Nous pouvons en déduire que

$$[R_i, R_j] = 0 \qquad [P_i, P_j] = 0 \qquad [R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad \text{(I.15)}$$