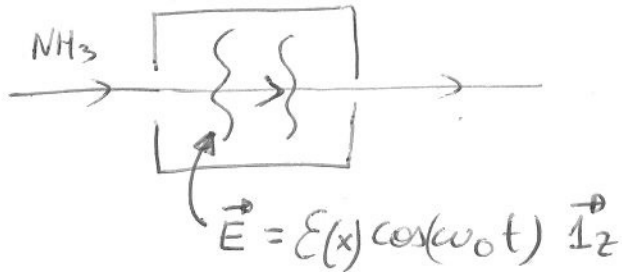


# Oscillations de Rabi

V. Rabi 1

Molécule d'Ammoniac dans une cavité RF avec un champ résonant.



Comme la molécule traverse la cavité à une vitesse  $v$  il voit un champ  $E_0(t) \cos(\omega_0 t)$

↑  
lentement  
variable.

Situation analogue : atome à 2 niveaux et  
impulsion laser résonante.

→ permet de manipuler l'état des atomes.

Hamiltonien

$$H(t) = \begin{pmatrix} E_0 + \mu \mathcal{E}(t) \cos(\omega_0 t) & -A \\ -A & E_0 - \mu \mathcal{E}(t) \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = C_1(t) |1\rangle + C_2(t) |2\rangle$$

récrivons

$$|\psi\rangle = \chi_I(t) e^{-i \frac{(E_0 + A)t}{\hbar}} |I\rangle + \chi_{II}(t) e^{-i \frac{(E_0 - A)t}{\hbar}} |II\rangle$$

$$\text{avec } |I\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad |II\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$$

pour tenir compte de l'évolution si  $\mathcal{E}_0 = 0$ 

En effet si  $\mathcal{E}_0 = 0$  alors la solution est  $\chi_I = \text{cte}$   
 $\chi_{II} = \text{cte}.$

L'équation de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

devient

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\delta_I}{dt} = \mu \varepsilon_0(t) \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} \delta_{II}(t) \\ i\hbar \frac{d\delta_{II}}{dt} = \mu \varepsilon_0(t) \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} \delta_I(t) \end{cases}$$

avec  $\omega = \frac{2A}{\hbar}$  = fréquence de Bohr

Hypothèse :  $\begin{cases} \varepsilon_0(t) \text{ varie lentement} \\ \omega_0 \approx \omega \end{cases}$

→ on écrit  $\cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} = \frac{1}{2} e^{i(\omega + \omega_0)t} + \frac{1}{2} e^{i(\omega - \omega_0)t}$

↳ néglige  
cosinus  
très rapidement  
(rotating wave  
approximation)

→ 
$$\begin{cases} i\hbar \dot{\delta}_I = \mu \varepsilon_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} \delta_{II} \\ i\hbar \dot{\delta}_{II} = \mu \varepsilon_0(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \delta_I \end{cases}$$

Un des très rares cas où l'équation de Schrödinger dépendant du temps est soluble.

On va regarder le cas  $\omega = \omega_0$

IR4

$$\rightarrow \begin{cases} i \hbar \dot{\gamma}_I = \mu \varepsilon_0(t) \gamma_{II} \\ i \hbar \dot{\gamma}_{II} = \mu \varepsilon_0(t) \gamma_I \end{cases}$$

$$\gamma_+ = \frac{\gamma_I + \gamma_{II}}{\sqrt{2}} \quad \gamma_- = \frac{\gamma_I - \gamma_{II}}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} i \hbar \dot{\gamma}_+ = \mu \varepsilon_0(t) \gamma_+ \\ i \hbar \dot{\gamma}_- = -\mu \varepsilon_0(t) \gamma_- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_+(t) = \gamma_+(-\infty) e^{-i\Phi(t)} \\ \gamma_-(t) = \gamma_-(-\infty) e^{+i\Phi(t)} \\ \Phi(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{\mu \varepsilon_0(t')}{\hbar} \end{cases}$$

On s'intéresse à l'état à la sortie de la cavité  
(A l'état d'un atome après passage de l'impulsion lumineuse)

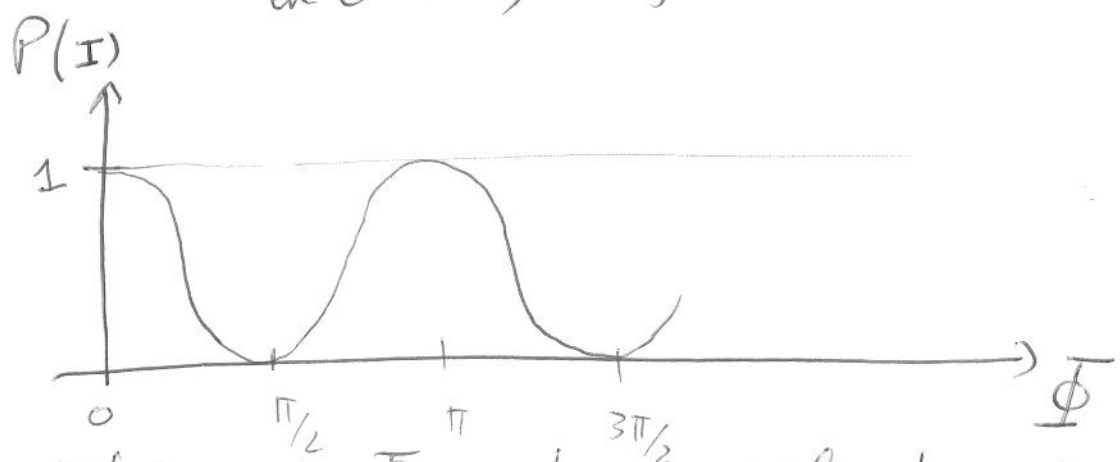
$$\begin{cases} \gamma_+(+\infty) = \gamma_+(-\infty) e^{-i\Phi} \\ \gamma_- (+\infty) = \gamma_- (-\infty) e^{i\Phi} \\ \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\mu \mathcal{E}(t')}{\hbar} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \gamma_I(t=+\infty) = \gamma_I(t=-\infty) \cos \Phi + i \gamma_{II}(t=-\infty) \sin \Phi \\ \gamma_{II}(t=+\infty) = i \gamma_I(t=-\infty) \sin \Phi + \gamma_{II}(t=-\infty) \cos \Phi \end{cases}$$

dans l'espace des états propres  
on a fait une rotation dont l'angle est  
déterminé par  $\Phi$ .

Exemple : si  $\gamma_I(-\infty) = 1$   $\gamma_{II}(-\infty) = 0$  On est initialement dans l'état **I**.

Quelle est la probabilité de trouver l'état **I**  
en  $t=+\infty$ , en fonction de  $\Phi$



On peut faire varier  $\Phi$  en changeant la vitesse des molécules  
ou l'intensité du champ électrique.

## Oscillations de Rabi

V.R.B.

Systèmes à 2 niveaux  $|g\rangle = \text{ground state}$   
 $|e\rangle = \text{excited state}$

séparé par énergie  $\Delta E = E_e - E_g$ .

Illuminé par impulsion électro-magnétique quasi résonante

$$E(t) = E_0(t) \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$\hookrightarrow$  lentement variable

$$\omega_0 \simeq \omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

Permet de réaliser n'importe quelle transformation unitaire dans l'espace  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  en fonction de  $\phi$ ,  $\omega_0 - \omega$ , et  $\int dt E_0(t)$ .

Est à la base d'une grande partie de la physique atomique moderne.

Applications : - Résonance Magnétique Nucléaire (RMN)  
- Horloges Atomique au Cs