1 Formalisme de Dirac

Une des idées principales de la Mécanique Quantique est que les états sont quantifiés : un système physique a plusieurs états possibles. Nous n'avons pas encore défini ce qu'était un *état.* Nous définirons alors dans cette section l'**espace des états** en tant que structure mathématique (un espace vectoriel avec certaines propriétés).

Le **dual** de cet espace a aussi une importance particulière.

1.1 Corps

Le corps sur lequel seront définis les espaces mentionnés est le corps des complexes $\mathbb{C}$.

1.2 Espace des états $\mathcal{H}$ – Espace de Hilbert

Les états d'un système quantique appartiennent à un espace vectoriel complexe nommé "Espace de Hilbert" et noté $\mathcal{H}$. Plus précisément, il s'agit d'un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire hermitien et tel que toute suite de Cauchy converge. Il est dit **séparable** s'il possède une base **dénombrable** : une base $\{\boldsymbol{u_i}\}$ telle que, en développant tout vecteur $\boldsymbol{x}$ dessus, comme (0.1),

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{H} \; : \; \boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{u}_i \; , \tag{0.1}$$

la norme du vecteur $\boldsymbol{x}$ converge ((0.2)).

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \doteq \sum_i |x_i|^2 < \infty \tag{0.2}$$

En mécanique quantique, $\mathcal{H}$ est séparable.

Résumé pour $\mathcal{H}$:
- Espace vectoriel complexe
- Produit scalaire hermitien
- Suites de Cauchy convergent
- Peut être séparable si il respecte (0.2)

1.3 Espace dual $\mathcal{H}^\star$

A tout espace vectoriel, en particulier $\mathcal{H}$, on peut associer un espace de formes linéaires, appelé espace dual $\mathcal{H}^\star$. $\mathcal{H}^\star$ est donc l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire des formes de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

Un élément du dual de $\mathcal{H}$ est donc une forme qui transforme tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathcal{H}$ en un vecteur $\boldsymbol{x}'$ de $\mathcal{H}$. Les éléments de $\mathcal{H}^\star$ agissent sur ceux de $\mathcal{H}$.

Par le théorème de Riesz (rappelé ci-dessous), l'action d'une forme linéaire sur un vecteur peut être équivalente à celle d'un produit scalaire entre $\boldsymbol{x}$ et un unique vecteur de $\mathcal{H}$.

Théorème 1.1. *Théorème de Riesz.*

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}^\star, \; \forall x \in \mathcal{H}, \exists 1! \; \boldsymbol{y} \in \mathcal{H} \; : \; \varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{0.3}$$

Ce théorème est intéressant car il permet de voir l'action d'une forme linéaire comme un produit scalaire avec un certain vecteur de $\mathcal{H}$, qui est unique à chaque fois.
La définition suivante n'a pas d'utilité pour le moment mais sera mentionnée par la suite.

Définition 1.2. *Le crochet de dualité est la forme bilinéaire non-dégénérée*

$$\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle : \mathcal{H}^\star \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \varphi, \boldsymbol{x} \longmapsto \langle \varphi, \boldsymbol{x} \rangle \doteq \varphi(\boldsymbol{x}) \tag{0.4}$$