

## Première partie

# Applications des postulats de la Mécanique Quantique

## 1 Interféromètre de Mech-Zehnder

Cet exemple est tiré de l'optique. Nous allons regarder ce qu'il se passe en optique classique, et nous allons ensuite utiliser le formalisme quantique. Ce faisant, nous pourrions mettre en évidence les différences entre les deux.

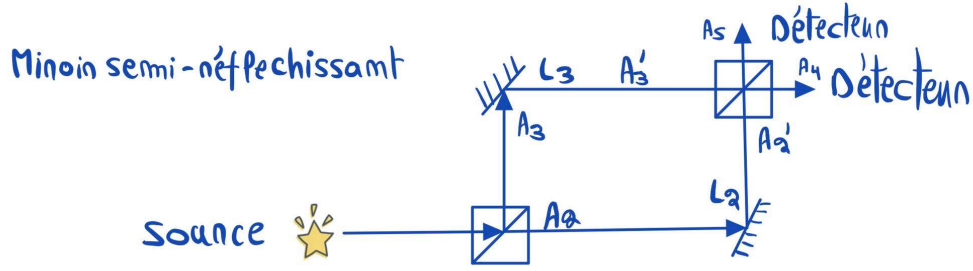


FIGURE 1: Représentation du principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Notons que les longueurs  $L_i$  représentent la longueur totale du trajet dans le chemin  $i$  suivi.

### 1.1 Brève description des détecteurs

Au niveau des détecteurs, plusieurs chemins sont possibles, comme l'illustre l'image ci-contre.

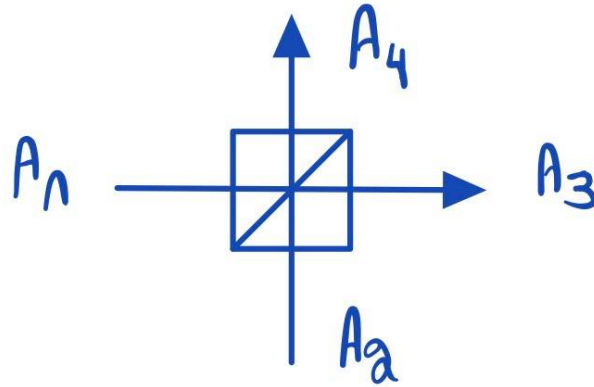


FIGURE 2: Les ondes incidentes arrivants de  $A_1$  et  $A_2$  poursuivent leur chemin, respectivement en  $A_3$  et  $A_4$ .

Nous avons un miroir semi-transparent. Nous envoyons dessus par le port 1 un faisceau de lumière d'amplitude  $A_1$ , et d'intensité  $I_1 = \|A_1\|^2$ ; par le port 2, nous envoyons un faisceau d'amplitude  $A_2$  et d'intensité  $I_2 = \|A_2\|^2$ . En supposant qu'il n'y a pas de pertes, nous avons que la somme des intensités entrantes est égale à la somme des intensités sortantes :  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ . Puisque les équations de l'électromagnétisme sont linéaires, nous avons  $A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Nous pouvons facilement mesurer les valeurs absolues de ces coefficients. En posant  $A_2 = 0$ , nous pouvons mesurer  $I_3$ ; nous trouverons  $\|\alpha\|^2$ .

Partons de la description d'une onde plane. Nous aurons

$$A_1(t) = A_1 e^{-i\omega t}, \quad (1.1a)$$

$$A_2(t) = A_2 e^{-i\omega t}, \quad (1.1b)$$

pour les ondes incidentes, ainsi que

$$A_3(t) = cA_1e^{-i\omega t} + isA_2e^{-i\omega t} \quad (1.2a)$$

$$A_4(t) = cA_2e^{-i\omega t} + isA_1e^{-i\omega t} \quad (1.2b)$$

pour les ondes sortantes. La discussion précédente nous permet de choisir un des coefficients - soit  $\|c\|^2$  - en choisissant le miroir semi-transparent. Le coefficient  $\|s\|^2$  est alors fixé par

$$\|c\|^2 + \|s\|^2 = 1. \quad (1.3)$$

Il nous reste une liberté de phase : nous pouvons redéfinir la phase de  $A_1 = e^{i\Phi}A'_1$ , et de même pour  $A_2, A_3$  et  $A_4$ . Il s'agit d'une question de convention.

**Remarque 1.1.** *Par convention, les ondes transmises ne subissent aucun déphasage, là où les ondes réfléchies bénéficient d'un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ . D'autres conventions sont possibles.*

**Remarque 1.2.** *Nous pouvons prendre  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$  pour un argument  $\theta$ , ce qui explique la notation utilisée.*

## 1.2 Lumière classique

Pour simplifier, prenons  $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = s$ . Notons que nous pouvons introduire un facteur  $e^{ikL}$  tenant compte de la distance parcourue, i.e. un point en  $x = 0$  peut-être décrit par  $A(t) = Ae^{-i\omega t}$  et un point en  $x = L$  peut-être décrit par  $A'(t) = Ae^{-i\omega t}e^{ikL}$ . Notre détecteur repère le courant électrique  $I(t)$  selon  $I(t) = e\|A(t)\|^2$  - soit

$$A(t) = Ae^{-i\omega t} \quad I_0 = \|A(t_0 = 0)\|^2 = \|A\|^2.$$

Nous avons alors que

$$A_2(t) = \frac{A(t)}{\sqrt{2}} \quad A_3(t) = i\frac{A(t)}{\sqrt{2}}$$

En particulier, nous pouvons écrire les chemins  $A'_2$  et  $A'_3$  selon :

$$A'_2(t) = A_2(t)e^{ikL_2} \quad A'_3(t) = A_3(t)e^{ikL_3} \quad (1.4a)$$

De même, les chemins  $A_4$  et  $A_5$  s'écrivent :

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 + iA'_2) = i\frac{A(t)}{2}(e^{ikL_3} + e^{ikL_2}) \quad A_5 = \frac{A(t)}{2}(e^{ikL_2} - e^{ikL_3}) \quad (1.4b)$$

En introduisant le terme  $\Delta\Phi = kL_3 - kL_2$ , nous pouvons conclure que :

$$I_4 = \frac{\|A\|^2}{4} \|e^{ikL_2} + e^{ikL_3}\|^2 = \|A\|^2 \cos^2 \frac{k(L_3 - L_2)}{2} = \|A\|^2 \cos^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (1.5a)$$

$$I_5 = \|A\|^2 \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (1.5b)$$

Remarquons que  $I_4 + I_5 \doteq I_0$  - soit  $I_0 = \|A\|^2$ , comme prévu. Hourra.

## 1.3 Lumière quantique

Le photon peut suivre plusieurs chemin simultanément : par superposition, nous écrivons l'état comme

$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle \quad (1.6)$$

Où  $|i\rangle$  décrit le photon dans le chemin  $i$ .

Dans un beam splitter tel que décrit par (2), nous décrivons alors les transitions

$$|1\rangle \rightarrow c|3\rangle + is|4\rangle, \quad (1.7)$$

$$|2\rangle \rightarrow is|3\rangle + c|4\rangle. \quad (1.8)$$

Cette transition est décrite par la matrice  $\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix}$ , unitaire.

Soit une mesure dans la base  $|1\rangle, |2\rangle$ ; donnée par l'état  $|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle$ . Dès lors, les probabilités de détection seront données par  $P_1 = \|\alpha\|^2$  et  $P_2 = \|\beta\|^2$ .

Il s'ensuit que la description de l'interféromètre 2 sera la suivante :

— **Chemins 2 et 3.**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle \quad (1.9)$$

— **Chemins 2' et 3'.**

$$|\psi\rangle = \frac{e^{ikL_2}}{\sqrt{2}} |2'\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{ikL_3} |3'\rangle \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

— **Chemins 4 et 5.**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (e^{ikL_2} - e^{ikL_3}) |5\rangle + \frac{i}{2} (e^{ikL_2} + e^{ikL_3}) |4\rangle \quad (1.12)$$

Dès lors, nous avons que les probabilités de détections en 4 et en 5 seront :

$$P_4 = \cos^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (1.13)$$

$$P_5 = \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (1.14)$$

*Le photon est simultanément dans les chemins 2 et 3.*

Remarquons que si nous supprimons le beam splitter à la fin, les probabilités de présence se réduisent à

$$P_4 = \frac{1}{2} = P_5 \quad (1.15)$$

Les *delayed choice experiment* (Wheeler, 1978) - qui consistent à enlever/remettre le beam splitter, ou à changer la phase  $\Delta\Phi$  après que le photon soit entré dans l'interféromètre - nous apprennent que **toute interprétation ou l'on suppose que le photon "sait à l'avance ce qu'il doit faire", ne tient pas.**

## 2 Résonance quantique

### 2.1 Exemple 1 : l'atome de $NH_3$

**Insérer graphique.**

Dans la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ , l'Hamiltonien de ce système s'exprime par

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Il se trouve que dans la base  $D = \{|E_0 - A\rangle, |E_0 + A\rangle\}$  des états propres d'énergie, cette matrice est diagonale. Nous observons alors que l'énergie fondamentale  $E_0 > E_0 - A$ . Nous en concluons que si l'atome peut effectivement être stable dans l'état non-dégénéré d'énergie  $E_0$ , il l'est encore plus dans l'état doublement dégénéré d'énergie  $E_0 - A$ . D'autres exemples similaires existent, tel que celui de la molécule de Benzène.

## 3 Spin $\frac{1}{2}$

Ce chapitre consiste une brève introduction à la quantification du moment angulaire. Débutons par une introduction au concept de groupes de rotations.

### 3.1 Groupe de rotations

Considérons l'ensemble des matrices  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $R^T R = \mathbb{I}$ . Si  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  et  $\theta$  un angle, alors  $R(\theta, \mathbf{n})$  est la rotation (dans le sens trigonométrique) autour de l'axe  $\mathbf{n}$  d'angle  $\theta$ .

$$\begin{aligned} R(\theta, x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_x) & \text{où } L_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, y) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_y) & \text{où } L_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, z) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_z) & \text{où } L_z &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons alors que  $R(\theta, \mathbf{n}) = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L})$ , où  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = n_i L_i$ . Les vecteurs  $L_x, L_y, L_z$  sont les *générateurs du Groupe des Rotations*.

**Proposition 3.1.** *Les générateurs du groupe des rotations commutent selon*

$$[L_i, L_j] = L_k \quad (1.17)$$

pour tout  $i, j \neq k$ .

En physique, de nombreux objets (et non pas seulement les vecteurs) sont invariants ou se transforment sous l'effet d'une rotation. Une autre représentation du *Groupe des Rotations* est l'ensemble des 3 opérateurs  $J_x, J_y, J_z$  tels que  $[J_x, J_y] = J_z$  (et toutes ses permutations cycliques) et tel que, sous toute rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{n}$ , un état  $|\psi\rangle$  se transforme en

$$|\psi\rangle \rightarrow \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\psi\rangle \quad (1.18)$$

**Exemple 3.2.** *Les opérateurs*

- $J_x = yp_z - zp_y$
- $J_y = zp_x - xp_z$
- $J_z = xp_y - yp_x$

sont des exemples de représentation du *Groupe des Rotations*.

Un système est invariant par rotation si

$$\exp(-itH) \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\psi\rangle = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \exp(-itH) |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle, \forall \mathbf{n}, \theta, t \quad (1.19)$$

Cela revient à dire que *faire une rotation* et ensuite *évoluer dans le temps* est identique à *évoluer dans le temps* et puis *faire une rotation*.

**Proposition 3.3.** *Pour tout petit angle sur des temps négligeables,*

$$[H, J_x] = [H, J_y] = [H, J_z] = 0. \quad (1.20)$$

Les conséquences en sont nombreuses. Voici quelques exemples.

**Proposition 3.4.** *Si  $|\psi(t)\rangle$  est une solution de l'équation de Schrödinger (??), alors*

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | J_i | \psi(t) \rangle = 0 \quad (1.21)$$

Nous avons en particulier que  $\langle \psi(t) | J_i | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | J_i | \psi(0) \rangle$ .

**Proposition 3.5.** *Si  $|\psi_0\rangle$  est un vecteur propre de  $J_i$  tel que  $J_i |\psi_0\rangle = j |\psi_0\rangle$ , alors le vecteur  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi_0\rangle$  est également un vecteur propre de  $J_i$  :*

$$J_i |\psi(t)\rangle = j |\psi(t)\rangle. \quad (1.22)$$

Le théorème d'Emmy Nöther permet de montrer que la symétrie de rotation implique la conservation d'une quantité : le moment angulaire.

### 3.2 Quantification du moment angulaire

**Théorème 3.6.** Soit  $[J_x, J_y] = iJ_z$ . Nous avons alors que les valeurs propres de  $J_z$  est un demi-entier :  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

$$J_z |\psi\rangle = m |\psi\rangle$$

**Théorème 3.7.** Il existe une représentation non triviale du Groupe des Rotations par des matrices  $d \times d$ . Dans ce cas,  $J_z = -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2} + 1, \dots, +\frac{d}{2}$ .

**Exemple 3.8.** Le cas le plus simple est celle des matrices de Pauli (matrices  $2 \times 2$ ) :

$$\begin{array}{c} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ J_x = \frac{1}{2}\sigma_x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ J_y = \frac{1}{2}\sigma_y \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ J_z = \frac{1}{2}\sigma_z \end{array}$$

Nous pouvons vérifier que les différentes relations démontrées ci-dessus sont respectées (exercice).

En particulier, nous pouvons vérifier que

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c \quad | \quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\sigma_{ab}\hat{I} \quad | \quad \text{Tr}(\sigma_a) = 0 \quad | \quad \sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\hat{I} + i\varepsilon_{abc}\sigma_c$$

Les matrices de Pauli sont de valeur propres  $\pm 1$ . Les vecteurs propres associés sont

$$\begin{array}{l} \psi_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_y^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_z^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \psi_x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_y^- = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \\ \psi_z^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle \end{array} \right.$$

Introduisons le vecteur unitaire associé aux coordonnées sphériques  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Observons que

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

De même, observons que  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$  est le vecteur propre de valeur propre  $+1$ . Nous pouvons réécrire, dans la base des vecteurs up and down,

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |\downarrow\rangle \quad (1.24)$$

Les particules élémentaires ont un spin  $1/2$ . Elles sont munies d'un espace de Hilbert de dimension 2, se transformant sous rotations par  $e^{i\frac{\theta}{2}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$ .