Première partie

Formalisme de Dirac

Paul Dirac, l'un des fondateurs de la Mécanique Quantique, introduit certaines notations encore utilisés aujourd'hui particulièrement utile. Effectivement, elles mettent en évidence XX.

1 Expérience de Stern-Gerlach

L'expérience consister à faire passer des atomes d'argent dans un champ magnétique non uniforme. Classiquement, les atomes d'argent, ayant un moment cinétique et un moment magnétique orbital également nul, ne devraient pas subir l'influence du champ magnétique. L'expérience montre que le faisceau se **sépare en deux**. Nous expliquons ce résultat en introduisant le moment cinétique de spin.

Mathématiquement, rappellons à toute fin utile que :

$$\text{Moment angulaire } \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{I.1}$$

$$\text{Moment magnétique } \boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{1}{2}evr = \frac{1}{2}\frac{e}{m}L \qquad I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{I.2}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\boldsymbol{L} \tag{I.3}$$

Où I est le courant et $\boldsymbol{S}$ est la surface considérée.

En pratique, les atomes/particules élémentaires suivent cette relation à un facteur prêt : $\boldsymbol{m} = \frac{g}{2}\frac{e}{m}\boldsymbol{L}$, où g est le **facteur de Londé**. Elle prend différentes valeurs en fonction de ce que nous considérons : nous avons $g = -2.002$ pour un électron, $g_n = -3.8$ et $g_p = 5.6$.

En pratique, nous mettrons en évidence la quantification du moment angulaire en mesurant le moment magnétique. L'énergie d'un moment magnétique dans un champ magnétique sera donnée par l'expression

$$E = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} \tag{I.4}$$

Lorsque le champ est non-uniforme, nous observons un gradient d'énergie :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (E) \tag{I.5}$$

En faisant l'expérience, nous nous attendons donc à observer ce gradiant d'énergie - et donc un "gradiant de résultats". Ce n'est pas le cas : seul deux tâches sont observées. Chaque électron se comporte comme un aimant à seulement deux directions vertiables possibles : Nord-Sud ou Sud-Nord. Cette propriété quantique s'appelle le spin, et s'écrit :

$$S = \pm\frac{\hbar}{2} \tag{I.6}$$

Dans le cadre de la Mécanique Quantique, nous nous placerons dans des expaces de Hilbert $\mathbb{H}$ séparables.

2 Notations propre à la Mécanique Quantique

Nous introduisons :
— Vecteur $\in \mathbb{H}$: $|\Psi\rangle$. Il s'agit d'un vecteur colonne v, appelé le ket.
— Vecteur transposé conjugué $\in \mathbb{H}$: $\langle\Psi|$. Il s'agit du vecteur ligne[1] $\bar{v}^T$, appelé le braket.
— Le produit scalaire $\langle\varphi, \Psi\rangle$, appelé le braket.

1. Nous pouvons également le voir comme un élément du dual $\mathbb{H}^*$

2.1 Correspondance entre bra et ket

Si $|\Psi\rangle = \alpha |\Phi\rangle + \beta |\Phi'\rangle$, alors $\langle\Psi| = \bar{\alpha} \langle\Phi| + \bar{\beta} \langle\Phi'|$. Notons que les états quantiques sont :

1. *normalisés* :
$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \tag{I.7}$$
en raison de l'interprétation probabiliste.
2. *définis à une phrase prêt* :
$$|\Psi\rangle \qquad\qquad\qquad\qquad e^{i\varphi} |\Psi\rangle \tag{I.8}$$
représentent le même état quantique.

Nous sommes dans un espace projectif de Hilbert. Dès lors,

$$|\Psi\rangle \sim |\varphi\rangle \quad \text{quand} \quad |\Psi\rangle = \lambda |\varphi\rangle$$

2.1.1 Exemples

Spin $\frac{1}{2}$: base orthonormée = $\Big\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\Big\}$.

Nous pouvons définir un état arbitraire :

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \tag{I.9}$$

Où $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$ et θ, φ appartiennent à la sphère de Bloch.

Si $|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta'}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi'} \sin\frac{\theta'}{2} |\downarrow\rangle$, alors le produit scalaire donnera

$$\langle\varphi|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\cos'}{2} + e^{\varphi-\varphi'} \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2} \tag{I.10}$$

Oscillateur harmonique : base orthonormée = $\Big\{ |n\rangle : n = 0, 1, 2, ... \Big\}$ et les états d'énergies sont donnés par $E_n = \hbar\omega \Big\{ n + \frac{1}{2} \Big\}$.

Nous pouvons définir un état arbitraire par $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ avec $\sum_n \|c_n\|^2 = 1$.

3 Opérateurs linéaires

Soit $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : |\Psi\rangle \to A|\Psi\rangle$ un opérateur linéaire, c'est à dire tel quel $A(a|\Psi\rangle + b|\varphi\rangle) = a(A|\Psi\rangle) + b(A|\varphi\rangle)$. Soit B un autre opérateur linéaire. Nous pouvons définir plusieurs opérateurs, comme :

— **Produit d'opérateurs** : $(AB)|\Psi\rangle = A(B|\Psi\rangle)$.
— **Commutateur** : [A,B]=AB-BA.
— **Anticommutateur** : $\Big\{A, B\Big\} = AB + BA$.

Action de A sur le dual/les bras. Soit $A : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^* : \langle\varphi| \to \langle\varphi| A$ est défini par $\Big\{ \langle\varphi| A \Big\} |\Psi\rangle = \langle\varphi| \Big\{ A|\Psi\rangle \Big\}$, pour tout$|\varphi\rangle, |\Psi\rangle$. Nous le noterons $\langle\varphi|A|\Psi\rangle$.