Première partie
Notions mathématiques

1 Série de Fourier

Une série de Fourier est une série de la forme

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx f(x) e^{-2\pi i(\frac{n}{T})x} \tag{I.1a}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i(\frac{n}{T})x} \tag{I.1b}$$

2 Transformées de Fourier

$$\hat{f}(k) = F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{e^{-i\boldsymbol{k}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{I.2a}$$

$$f(x) = F^{-1}(\hat{h}) = \int d\boldsymbol{k} \hat{f}(\boldsymbol{k} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{I.2b}$$

Remarque 2.1. *Si f est à support borné et $\{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\}$ contraint le support, alors $C_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\hat{f}(\frac{2\pi n}{T})$.*

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\hat{f}(\frac{2\pi n}{T}) e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \tag{I.3}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k_n)\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}\Delta k \qquad k_n = \frac{2\pi n}{T} \textbf{ et } \Delta k = \frac{2\pi}{T} \tag{I.4}$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{I.5}$$

Remarque 2.2. *Ces fonctions suivent certaines propriétés intéressantes. Soit $h(x)$ et $\hat{h}(x)$ deux fonctions reliées par une transformations de Fourier. Dès lors,*

- *Si $h(x)$ est linéaire, alors $\hat{h}(x)$ l'est également : $h(x) = af(x) + bg(x)$, alors $\hat{h}(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$.*
- *Si $h(x) = f(x - x_0)$, alors $\hat{h}(k) = e^{-ikx_0}\hat{f}(k)$. Il s'agit d'une translation. Inversement, la propriété de modulation s'écrit $h(x) = f(x)e^{ik_0 x}$, alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k - k_0)$.*
- *Si $h(x) = f(ax)$, le changement d'échelle implique que $\hat{h}(k) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{k}{a})$.*
- *La relation de conjuguaison sous une transformation de Fourier est que $h(x) = \bar{f}(x)$ implique $\hat{h}(k) = f(\bar{\hat{-}}k)$. Notons que si $f(x)$ est réel, alors $\hat{f}(k) = -\hat{f}(k)$.*
- *$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$.*
- *La dérivée de $\hat{f}(k)$ est $ik\hat{f}(k)$. Cela se généralise à $f\hat{(}n) = (ik)^n\hat{f}(k)$. En particulier, si $f(x)x^n$ est intégrable, alors $\hat{f}(k)$ est n-fois dérivable. Inversement, si $f(x)$ est n-fois intégrable, alors $\hat{f}(k)k^n$ est intégrable.*
- *La propriété de convolution établit que si $h(x) = (f \circ h)(x) = \int dy f(y)g(x-y)$, alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k) \times \hat{g}(k)$.*

Théorème 2.1 (Plancherel)**.** *Soit $f(x)$ une fonction, et $\hat{f}(k)$ sa transformée de Fourier. Nous avons alors l'équivalence des intégrales :*

$$\int dx f(x)\bar{g}(x) = \int dk \hat{f}(k)\bar{\hat{g}}(k) \tag{I.6}$$

Théorème 2.2 (Égalité de Parceval)**.** *Soit $f(x)$ une fonction, et $\hat{f}(k)$ sa transformée de Fourier. Alors,*

$$\int dx \|f(x)\|^2 = \int dk \left\|\hat{f}(k)\right\|^2 \tag{I.7}$$

3 Distribution

3.1 Espaces de fonctions test

Soient D, l'ensemble des fonctions C^{∞} à support compact (distrubution D'), et S - l'ensemble des fonctions C^{∞} à décroissance rapide (distrubtion tempérée S'). Imposons une notion de continuité/topologie sur les fonctions test :

$$\varphi_k = \varphi \text{ si et seulement si } (\partial_x^{(\alpha)}\varphi_x) = (\partial_x^{(\alpha)}\varphi) \tag{I.8}$$

uniformément pour tout α.

Soit T des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions tests.

Propriété 3.1. *Soit $T : D \to \mathbb{R} : \varphi \to T \cdot \varphi$. Si $\varphi_k = \varphi$, alors $T \cdot \varphi_k \to T \cdot \varphi$ généralise la notion de fonction.*

3.2 Opérations sur les distributions

Propriété 3.2 (Dérivée d'une distrubution)**.** $T' \cdot \varphi = T \cdot (-\varphi')$

Propriété 3.3 (Multiplication d'une distribution par une fonction test)**.** $\Phi T \cdot \varphi = T \cdot \varphi\Phi$ ***Nous ne pouvons pas multiplier des distributions entre-elles.***

Théorème 3.1 (Théorème de structure)**.** *Localement, une distrubution est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue. Elle est dite tempérée lorsqu'elle est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue à croissance lente*[1]*.*

3.3 Distributions tempérées

A partir de maintenant, nous noterons F une transformée de Fourier, et $\mathbb{S}$ une invariance sous F.

Définition 3.1. *Soit $T \in \mathbb{S}$. Alors, FT existe et est défini par $FT \cdot \Phi = T \cdot F\Phi$.*

Si f est une fonction, alors :

$$FT_f \cdot \Phi = T_f \cdot F\Phi \qquad \text{Où} \int dx(\int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x))\Phi(k) \text{ et } \int dx f(x)(\int dk \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\Phi(k)) \tag{I.9}$$

3.4 δ de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty \text{ en x} = 0 \\ 0 \text{ en } x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x) = 1 \tag{I.10}$$

$$\delta(x) = \lim_{x\to 0} f_\alpha(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_\alpha(x) = 1 \tag{I.11}$$

Où $f_\alpha(x)$ est strictement positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \tag{I.12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(\Gamma - x)\delta(x - \zeta) = \delta(\Gamma - \zeta) \tag{I.13}$$

$$\delta'(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) = [\delta(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x)f'(x) \tag{I.14}$$

$$= -f'(0) \tag{I.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\delta(x') = \theta(x) \qquad \int dx f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{I.16}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\|\alpha\|}\delta(x) \qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{\|g'(x_0)\|}\delta(x - x_0)\delta(-x) = \delta(x)$$

(I.17)

(I.18)

1. ne croissant pas plus vite qu'un polynome.

3.5 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Si $x(t)$ est une fonction de période T tel que $x(t+T) = x(t)$. Alors $x(t)$ peut-être représenté comme une série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{i}{T}} \tag{I.19}$$

Prenons la transformée de Fourier de (I.18).

$$\hat{x}(\omega) = \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} x(t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi i k \frac{t}{T}} \tag{I.20}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{2\pi} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \tag{I.21}$$

Nous appelons $\hat{x}(\omega)$ est la somme des deltas espacés de $\frac{2\pi}{T}$.