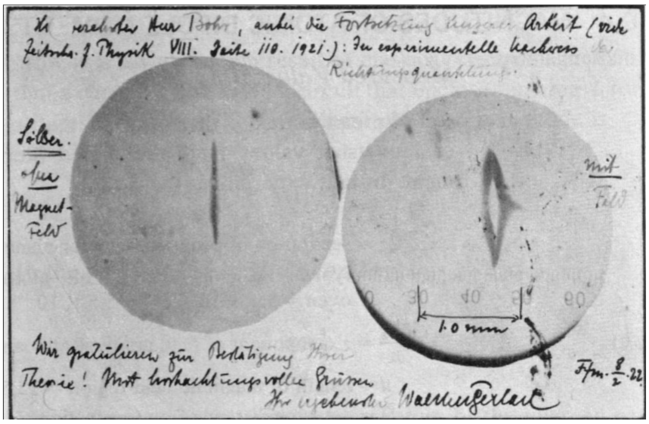

FIGURE 1 – Une photo du rayon séparé, avec un messages. La traduction donne : "Ci-contre, une preuve expérimentale du spin quantique. Nous vous félicitons pour la vérification de votre théorie".

Première partie

Formalisme de Dirac

1 Expérience de Stern-Gerlach

L'expérience consister à faire passer des atomes d'argent dans un champ magnétique non uniforme. Classiquement, les atomes d'argent, ayant un moment cinétique et un moment magnétique orbital également nul, ne devraient pas subir l'influence du champ magnétique. L'expérience montre que le faisceau se **sépare en deux**. Nous expliquons ce résultat en introduisant le moment cinétique de spin.

Mathématiquement, rappellons à toute fin utile que :

$$\text{Moment angulaire } \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{I.1}$$

$$\text{Moment magnétique } \boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{1}{2}evr = \frac{1}{2}\frac{e}{m}L \qquad I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{I.2}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\boldsymbol{L} \tag{I.3}$$

Où I est le courant et $\boldsymbol{S}$ est la surface considérée.

En pratique, les atomes/particules élémentaires suivent cette relation à un facteur prêt : $\boldsymbol{m} = \frac{g}{2}\frac{e}{m}\boldsymbol{L}$, où g est le **facteur de Londé**. Elle prend différentes valeurs en fonction de ce que nous considérons : nous avons $g = -2.002$ pour un électron, $g_n = -3.8$ et $g_p = 5.6$.

En pratique, nous mettrons en évidence la quantification du moment angulaire en mesurant le moment magnétique. L'énergie d'un moment magnétique dans un champ magnétique sera donnée par l'expression

$$E = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} \tag{I.4}$$

Lorsque le champ est non-uniforme, nous observons un gradient d'énergie :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (E) \tag{I.5}$$

En faisant l'expérience, nous nous attendons donc à observer ce gradient d'énergie - et donc un "gradient de résultats". Ce n'est pas le cas : seul deux tâches sont observées. Chaque électron se comporte comme un aimant à seulement deux directions vertiables possibles : Nord-Sud ou Sud-Nord. Cette propriété quantique s'appelle le spin, et s'écrit :

$$S = \pm\frac{\hbar}{2} \tag{I.6}$$

Dans le cadre de la Mécanique Quantique, nous nous placerons dans des expaces de Hilbert $\mathbb{H}$ séparables.

2 Notations propre à la Mécanique Quantique

Nous introduisons :

— Vecteur $\in \mathbb{H}$: $|\Psi\rangle$. Il s'agit d'un vecteur colonne v, appelé le ket.

— Vecteur transposé conjugué $\in \mathbb{H}$: $\langle\Psi|$. Il s'agit du vecteur ligne [1] $\bar{v}^T$, appelé le bra.

— Le produit scalaire $\langle\varphi, \Psi\rangle$, appelé le braket.

1. Nous pouvons également le voir comme un élément du dual $\mathbb{H}^*$

2.1 Correspondance entre bra et ket

Si $|\Psi\rangle = \alpha|\Phi\rangle + \beta|\Phi'\rangle$, alors $\langle\Psi| = \bar{\alpha}\langle\Phi| + \bar{\beta}\langle\Phi'|$: la correspondance bra $\to$ ket est donc antilinéaire.

Remarque 2.1. *Si λ est un nombre complexe et $|\Psi\rangle$ un ket, alors $\lambda|\Psi\rangle$ est un ket. Nous l'écrirons parfois $|\lambda\Psi\rangle$. Il faudra alors faire attention que la relation entre bra et ket étant anti-linéaire, $\langle\lambda\Psi| = \bar{\lambda}|\Psi\rangle$.*

Notons que les états quantiques sont :

1. *normalisés* :
$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \tag{I.7}$$
en raison de l'interprétation probabiliste.
2. *définis à une phrase prêt* :
$$|\Psi\rangle \qquad\qquad e^{i\varphi}|\Psi\rangle \tag{I.8}$$
représentent le même état quantique.

Nous sommes dans un espace projectif de Hilbert. Dès lors,

$$|\Psi\rangle \sim |\varphi\rangle \quad \text{quand} \quad |\Psi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$$

2.1.1 Exemples

Spin $\frac{1}{2}$: base orthonormée = $\Big\{|\uparrow\rangle,|\downarrow\rangle\Big\}$.

Nous pouvons définir un état arbitraire :

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle \tag{I.9}$$

Où $\theta \in [0,\pi]$ et $\varphi \in [0,2\pi]$ et θ,φ appartiennent à la sphère de Bloch.

Si $|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta'}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\varphi'}\sin\frac{\theta'}{2}|\downarrow\rangle$, alors le produit scalaire donnera

$$\langle\varphi|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\cos'}{2} + e^{\varphi-\varphi'}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} \tag{I.10}$$

Oscillateur harmonique : base orthonormée = $\Big\{|n\rangle : n = 0,1,2,...\Big\}$ et les états d'énergies sont donnés par $E_n = \hbar\omega\Big\{n+\frac{1}{2}\Big\}$.

Nous pouvons définir un état arbitraire par $|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ avec $\sum_n \|c_n\|^2 = 1$.

3 Opérateurs linéaires

Soit $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : |\Psi\rangle \to A|\Psi\rangle$ un opérateur linéaire, c'est à dire tel quel $A(a|\Psi\rangle + b|\varphi\rangle) = a(A|\Psi\rangle) + b(A|\varphi\rangle)$. Soit B un autre opérateur linéaire. Nous pouvons définir plusieurs opérateurs, comme :

— **Produit d'opérateurs** : $(AB)|\Psi\rangle = A(B|\Psi\rangle)$. B agit d'abord sur ket $|\psi\rangle$ pour donner $B|\Psi\rangle$, et A agira ensuite sur $A|\Psi\rangle$.
— En général, $AB \neq BA$, le commutateur [A,B] de A,B est alors par définition [A,B] = AB-BA.
— **Anticommutateur** : $\Big\{A,B\Big\} = AB + BA$.

Action de A sur le dual/les bras. Soit $A : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^* : \langle\varphi| \to \langle\varphi|A$ est défini par $\Big\{\langle\varphi|A\Big\}|\Psi\rangle = \langle\varphi|\Big\{A|\Psi\rangle\Big\}$, pour tout$|\varphi\rangle, |\Psi\rangle$. Nous le noterons $\langle\varphi|A|\Psi\rangle$.

Remarque 3.1. *Observons que l'ordre dans lequel apparaît les symbols a une importance capital. Seul les nombres complexes peuvent être déplacés sans influencer le résultat.*

Exemple 3.1. *Soit $|\Psi\rangle$ et $|\Theta\rangle$ deux kets. Ecrivons les dans l'ordre inverse : $\langle\Psi|$ et $\langle\Theta|$. Considérons*

$$|\Psi\rangle\langle\Theta| \tag{I.11}$$

Prenons un ket $|\gamma\rangle$ tel que

$$|\Psi\rangle\langle\Theta|\gamma\rangle \tag{I.12}$$

*Nous avons que $\langle\Theta|\gamma\rangle$ est un nombre complexe ; par conséquent, nous avons que un bra $\langle\Psi|$ multiplié par un scalaire. Nous avons alors que (**??**) appliqué à un ket donne un nouveau ket.*

4 Opérateur adjoint $A^\dagger$

Définition 4.1. *Soit $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un opérateur linéaire. Nous définissons l'opérateur adjoint $A^\dagger : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ par $\langle\Psi|A^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\Psi\rangle^*$ pour tout $|\Psi\rangle, |\varphi\rangle$.*

Si $\{ |u_i\rangle \}$ forme une base orthonormée, alors :
— $\langle u_i|A|u_j\rangle = a_{ij}$
— $\langle u_i|A^\dagger|u_j\rangle = a^*_{ij}$
$\to A^\dagger = \bar{A}^\dagger$ est la transposée conjuguée [2].

4.1 Propriétés intéressantes

Nous donnons ici une série de propriétés de l'opérateur adjoint $A^\dagger$.

1. $(A^\dagger)^\dagger = A$
2. $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
4. $(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger$.
5. Si $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$, alors $A^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|$.

4.2 Exemples d'opérateurs

1. Soit $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$. Alors,

$$\langle\varphi|A|\Psi\rangle = \langle\varphi|\Big\{ |\alpha\rangle\langle\beta| \Big\}|\Psi\rangle \tag{I.13}$$
$$= \langle\varphi|\alpha\rangle\langle\beta|\Psi\rangle \tag{I.14}$$
$$\text{Et } A|\Psi\rangle = |\alpha\rangle\langle\beta|\Psi\rangle \tag{I.15}$$

2. Soit $\Big\{(u_i)\Big\}$ une base orthonormée. Nous avons que $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$. De plus, nous appelons *éléments de la matrice A* l'opérateur

$$\langle u_i|A|u_j\rangle = a_{ij} \tag{I.16}$$

Nous pouvons représenter A dans la base via

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}|u_i\rangle\langle u_j| \tag{I.17}$$

2. Ask teacher what's up.