Chapitre 1

Notions mathématiques

Dans ce chapitre, nous allons rapidement passer en revue plusieurs notions de maths, plus particulièrement d'analyse, qui apparaissent dans le cours de Mécanique Quantique, afin de vous aider dans la compréhension de certains passage de calculs.
Nous allons commencer par de brefs rappels de CDI2 sur les séries et transformées de Fourier, pour ensuite embrayer sur la notion de distribution, qui est certainement neuve dans votre parcours, mais cela permettra plus tard de justifier l'utilisation de distribution pour décrire les fonctions d'onde.

1.1 Séries de Fourier

Considérons f une fonction T-périodique ;

Définition 1.1.1 (coefficients de Fourier)**.** *On définit ses coefficients de Fourier (exponentiels) par la formule :*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dx f(x) e^{-2\pi i (\frac{n}{T})x} \tag{0.1}$$

Définition 1.1.2 (Série de Fourier)**.** *On appelle la série de Fourier associée à f, la série de fonctions qui est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de cette série $S_n(f)$ est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2\pi i \left(\frac{k}{T}\right)x} \tag{0.2}$$

Théorème 1.1.3 (Théromème de Dirichlet)**.** *Le théorème de Dirichlet (global) nous assure que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$, ainsi nous pouvons écrire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i (\frac{k}{T})x} \tag{0.3}$$

Notons que nous pouvons appliquer ce théorème car en physique, nous ne considérons en général que des fonctions très lisses (de classe C^{∞}).

1.2 Transformées de Fourier

Considérons une fonction f (dans le cours de CDI2, nous faisons l'hypothèse que la fonction appartient à la classe de Schwartz, mais en réalité, la transformée de Fourier et ses propriétés se généralisent à des fonctions bien moins lisses).

Définition 1.2.1 (Transformée de Fourier)**.** *La fonction $\mathscr{F}(f)$, que l'on note aussi ici $\hat{f}(k)$, est la transformée de Fourier de la fonction f, et est définie par :*

$$\hat{f}(k) = \mathscr{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx} \tag{0.4}$$

Théorème 1.2.2 (Inversion de la transformée de Fourier)**.** *$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\mathscr{F}(\mathscr{G}(f))(x) = f(x)$ ou $\mathscr{G}(\mathscr{F}(f))(x) = f(x)$, où $\mathscr{G}(f) = \mathscr{F}^{-1}(f)$ est l'inverse de la transformée de fourier de f.*
Ceci s'exprime encore comme :

$$f(x) = \mathscr{G}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx} \tag{0.5}$$

Remarquons que $\mathscr{G}(f)(k)$ n'est rien d'autre que $\mathscr{F}(f)(-k)$

Remarque 1.2.3. *Si f est à support borné et $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ est un intervalle contenant le support, alors sa transformée de Fourier est en fait à support infini, et l'on peut écrire les coefficients de Fourier sous la forme :*

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \tag{0.6}$$

En effet, nous avons alors que :

$$\begin{aligned}
\rightarrow f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i\frac{2\pi n}{T}x} &(0.7)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k_n) \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \Delta k \quad \textit{(où : } k_n \equiv \tfrac{2\pi n}{T} \textit{ et } \Delta k \equiv \tfrac{2\pi}{T}\textit{)} &(0.8)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} &(0.9)
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de f est donc bien à support infini.

Proposition 1.2.4. *Mentionnons les différentes propriétés que suivent la transformée de Fourier.*
On considère les fonctions f, g et h ;

- *Linéarité : Si $h(x) = af(x) + bg(x)$, alors $\hat{h}(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$;*
- *Translation : Si $h(x) = f(x - x_0)$, alors $\hat{h}(k) = e^{-ikx_0}\hat{f}(k)$;*
- *Modulation : Si $h(x) = f(x)e^{ik_0 x}$, alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k - k_0)$;*
- *Changement d'échelle : Si $h(x) = f(ax)$, alors $\hat{h}(k) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{k}{a})$.*
- *Conjugaison : Si $h(x) = \overline{f(x)}$, alors $\hat{h}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$.*
  Notons que si $f(x)$ est réel, alors $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$;
- *$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$.*
- *Dérivation : $\widehat{f'(k)} = ik\hat{f}(k)$. Cela se généralise à la dérivée $n^{\text{ième}}$:*
  $\widehat{f^n(k)} = (ik)^n \hat{f}(k)$.

- *Si $f(x)x^n$ est intégrable, alors $\hat{f}(k)$ est n-fois dérivable ;*
- *Si $f(x)$ est n-fois dérivale, alors $\hat{f}(k)k^n$ est intégrable ;*
- *Soit S l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide (tel que fx^n est intégrable $\forall n$), alors $\mathscr{F}(S) = S$. Autrement dit, S est stable par la transformée de Fourier ;*
- *Transformée de Fourier d'une convolution : Si $h(x) = (f \star h)(x) = \int dy f(y) g(x-y)$,*
  alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k) \times \hat{g}(k)$ (à un facteur près) ;
- *Identité de Plancherel : $\int dx |f(x)|^2 = \int dk \left|\hat{f}(k)\right|^2$;*
- *Identité de Plancherel polarisée : $\int dx f(x)\overline{g(x)} = \int dk \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$*

1.3 Distributions

Les distributions sont des objets mathématiques qui ont pour but de généraliser la notion de fonction. Ce ne sont pas des fonctions à proprement parlé, mais sont définis en laissant la possibilité de faire des opérations qui nous sont familières, telles que la dérivation, la transformée de Fourier, la convolution ; etc...

1.3.1 Espace de fonctions test

Définissons ici les deux ensembles suivants :

1. $D = \{$ fonctioncs C^∞ à support compact $\}$; cet ensemble, muni d'une certaine structure, est ce qu'on appelle l'**espace des fonctions test**.
   Les distributions agissent sur des fonctions test, et l'on note l'ensemble des distributions D'.

2. $S = \{$ fonctions C^∞ à décroissance rapide $\}$; c'est un ensemble de fonctions qui décroissent plus vite que $\frac{1}{P}$ pour n'importe quel polynôme P.
   Les distributions agissant sur ces fonctions forment un ensemble que l'on appelle l'ensemble des **distributions tempérées**, et que l'on note S'.
   Notons que la densité de D dans S fait que l'ensemble des distributions tempérées S' est inclu dans l'ensemble des distributions D' ; de ce fait, nous pourrons également parler de fonctions test pour les éléments de cet ensemble S puisque les fonctions test sont définis comme des fonctions sur lesquelles agissent les distributions.

Il se trouve que l'espace des fonctions test est constitué des ensembles que nous de définir, et doit être muni d'une structure afin de répondre à la définition d'un espace. Une notion de continuité/topologie doit dès lors être imposée sur les fonctions test, et s'exprime comme suit :

$$\varphi_k \to \varphi \iff (\partial_x^{(\alpha)} \varphi_k) \xrightarrow[\forall \alpha]{CVU} (\partial_x^{(\alpha)} \varphi) \qquad (0.10)$$

où CVU $\equiv$ convergence uniforme.

1.3.2 Distributions

Comment est en fait défini une distribution ?
Soit T des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions tests.

Proposition 1.3.1. *Soit $T : D \to \mathbb{R} : \varphi \to T \cdot \varphi$. Si $\varphi_k = \varphi$, alors $T \cdot \varphi_k \to T \cdot \varphi$ généralise la notion de fonction.*

1.3.3 Opérations sur les distributions

Proposition 1.3.2 (Dérivée d'une distrubution)**.** $T' \cdot \varphi = T \cdot (-\varphi')$

Proposition 1.3.3 (Multiplication d'une distribution par une fonction test)**.** $\Phi T \cdot \varphi = T \cdot \varphi\Phi$ ***Nous ne pouvons pas multiplier des distributions entre-elles.***

Théorème 1.3.4 (Théorème de structure)**.** *Localement, une distrubution est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue. Elle est dite tempérée lorsqu'elle est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue à croissance lente*[1]*.*

1.3.4 Distributions tempérées

A partir de maintenant, nous noterons F une transformée de Fourier, et $\mathbb{S}$ une invariance sous F.

Définition 1.3.5. *Soit $T \in \mathbb{S}$. Alors, FT existe et est défini par $FT \cdot \Phi = T \cdot F\Phi$.*

Si f est une fonction, alors :

$$FT_f \cdot \Phi = T_f \cdot F\Phi \qquad \text{Où } \int dx(\int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x))\Phi(k) \text{ et } \int dx f(x)(\int dk \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Phi(k)) \tag{0.11}$$

1.3.5 Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty \text{ en x} = 0 \\ 0 \text{ en } x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x) = 1 \tag{0.12}$$

$$\delta(x) = \lim_{x \to 0} f_\alpha(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_\alpha(x) = 1 \tag{0.13}$$

Où $f_\alpha(x)$ est strictement positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \tag{0.14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(\Gamma - x)\delta(x - \zeta) = \delta(\Gamma - \zeta) \tag{0.15}$$

$$\delta'(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x) = [\delta(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x)f'(x) \tag{0.16}$$

$$= -f'(0) \tag{0.17}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\delta(x') = \theta(x) \qquad \int dx f(x)\delta(x-a) = f(a) \tag{0.18}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\|\alpha\|}\delta(x) \qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{\|g'(x_0)\|}\delta(x - x_0)\delta(-x) = \delta(x) \tag{0.19}$$

$$\tag{0.20}$$

1. ne croissant pas plus vite qu'un polynome.

1.3.6 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Si $x(t)$ est une fonction de période T tel que $x(t+T) = x(t)$. Alors $x(t)$ peut-être représenté comme une série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{i}{T}} \tag{0.21}$$

Prenons la transformée de Fourier de (0.21).

$$\hat{x}(\omega) = \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} x(t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi i k \frac{t}{T}} \tag{0.22}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{2\pi} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) \tag{0.23}$$

Nous appelons $\hat{x}(\omega)$ est la somme des deltas espacés de $\frac{2\pi}{T}$.