

Première partie

Notions mathématiques

1 Série de Fourier

Une série de Fourier est une série de la forme

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx f(x) e^{-2\pi i (\frac{n}{T}) x} \quad (\text{I.1a})$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i (\frac{n}{T}) x} \quad (\text{I.1b})$$

2 Transformées de Fourier

$$\hat{f}(k) = F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{I.2a})$$

$$f(x) = F^{-1}(\hat{f}) = \int dk \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{I.2b})$$

Remarque 2.1. Si f est à support borné et $\{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\}$ contraint le support, alors $C_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}(\frac{2\pi n}{T})$.

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}(\frac{2\pi n}{T}) e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \quad (\text{I.3})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k_n) \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \Delta k \quad k_n = \frac{2\pi n}{T} \text{ et } \Delta k = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{I.4})$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{I.5})$$

Remarque 2.2. Ces fonctions suivent certaines propriétés intéressantes. Soit $h(x)$ et $\hat{h}(x)$ deux fonctions reliées par une transformations de Fourier. Dès lors,

- Si $h(x)$ est linéaire, alors $\hat{h}(x)$ l'est également : $h(x) = af(x) + bg(x)$, alors $\hat{h}(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$.
- Si $h(x) = f(x - x_0)$, alors $\hat{h}(k) = e^{-ikx_0} \hat{f}(k)$. Il s'agit d'une translation. Inversement, la propriété de modulation s'écrit $h(x) = f(x) e^{ik_0 x}$, alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k - k_0)$.
- Si $h(x) = f(ax)$, le changement d'échelle implique que $\hat{h}(k) = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{k}{a})$.
- La relation de conjugaison sous une transformation de Fourier est que $h(x) = \bar{f}(x)$ implique $\hat{h}(k) = \hat{f}(-k)$. Notons que si $f(x)$ est réel, alors $\hat{f}(k) = -\hat{f}(k)$.
- $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$.
- La dérivée de $\hat{f}(k)$ est $ik\hat{f}(k)$. Cela se généralise à $\hat{f}^{(n)}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$. En particulier, si $f(x)x^n$ est intégrable, alors $\hat{f}(k)$ est n -fois dérivable. Inversement, si $f(x)$ est n -fois intégrable, alors $\hat{f}(k)k^n$ est intégrable.
- La propriété de convolution établit que si $h(x) = (f \circ g)(x) = \int dy f(y)g(x-y)$, alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k) \times \hat{g}(k)$.

Théorème 2.3 (Plancherel). Soit $f(x)$ une fonction, et $\hat{f}(k)$ sa transformée de Fourier. Nous avons alors l'équivalence des intégrales :

$$\int dx f(x) \bar{g}(x) = \int dk \hat{f}(k) \bar{\hat{g}}(k) \quad (\text{I.6})$$

Théorème 2.4 (Égalité de Parseval). Soit $f(x)$ une fonction, et $\hat{f}(k)$ sa transformée de Fourier. Alors,

$$\int dx \|f(x)\|^2 = \int dk \|\hat{f}(k)\|^2 \quad (\text{I.7})$$

3 Distribution

3.1 Espace de fonctions test

Soient D , l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact (distribution D'), et S - l'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide (distribution tempérée S'). Imposons une notion de continuité/topologie sur les fonctions test :

$$\varphi_k = \varphi \text{ si et seulement si } (\partial_x^{(\alpha)} \varphi_k) = (\partial_x^{(\alpha)} \varphi) \quad (\text{I.8})$$

uniformément pour tout α .

Soit T des formes linéaires continues sur l'espace des fonctions tests.

Proposition 3.1. *Soit $T : D \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \rightarrow T \cdot \varphi$. Si $\varphi_k = \varphi$, alors $T \cdot \varphi_k \rightarrow T \cdot \varphi$ généralise la notion de fonction.*

3.2 Opérations sur les distributions

Proposition 3.2 (Dérivée d'une distribution). $T' \cdot \varphi = T \cdot (-\varphi')$

Proposition 3.3 (Multiplication d'une distribution par une fonction test). $\Phi T \cdot \varphi = T \cdot \varphi \Phi$ **Nous ne pouvons pas multiplier des distributions entre-elles.**

Théorème 3.4 (Théorème de structure). *Localement, une distribution est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue. Elle est dite tempérée lorsqu'elle est égale à la dérivée α^{eme} d'une fonction continue à croissance lente¹.*

3.3 Distributions tempérées

A partir de maintenant, nous noterons F une transformée de Fourier, et \mathbb{S} une invariance sous F .

Définition 3.5. *Soit $T \in \mathbb{S}$. Alors, FT existe et est défini par $FT \cdot \Phi = T \cdot F\Phi$.*

Si f est une fonction, alors :

$$FT_f \cdot \Phi = T_f \cdot F\Phi \quad \text{Où} \quad \int dx \left(\int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \right) \Phi(k) \text{ et } \int dx f(x) \left(\int dk \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Phi(k) \right) \quad (\text{I.9})$$

3.4 Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{en } x = 0 \\ 0 & \text{en } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (\text{I.10})$$

$$\delta(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_\alpha(x) = 1 \quad (\text{I.11})$$

Où $f_\alpha(x)$ est strictement positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0) \quad (\text{I.12})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(\Gamma - x) \delta(x - \zeta) = \delta(\Gamma - \zeta) \quad (\text{I.13})$$

$$\delta'(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) = [\delta(x) f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f'(x) \quad (\text{I.14})$$

$$= -f'(0) \quad (\text{I.15})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \delta(x') = \theta(x) \quad \int dx f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (\text{I.16})$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\|\alpha\|} \delta(x) \quad \delta(g(x)) = \frac{1}{\|g'(x_0)\|} \delta(x - x_0) \delta(-x) = \delta(x) \quad (\text{I.17})$$

$$(\text{I.18})$$

1. ne croissant pas plus vite qu'un polynome.

3.5 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Si $x(t)$ est une fonction de période T tel que $x(t + T) = x(t)$. Alors $x(t)$ peut-être représenté comme une série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{t}{T}} \quad (\text{I.19})$$

Prenons la transformée de Fourier de (I.19).

$$\hat{x}(\omega) = \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} x(t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi i k \frac{t}{T}} \quad (\text{I.20})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{2\pi} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (\text{I.21})$$

Nous appelons $\hat{x}(\omega)$ est la somme des deltas espacés de $\frac{2\pi}{T}$.