

## Première partie

# Applications de la Mécanique Quantique

## 1 Interféromètre de Mech-Zehnder

Cet exemple est tiré de l'optique. Nous allons regarder ce qu'il se passe en optique classique, et nous allons ensuite utiliser le formalisme quantique. Ce faisant, nous pourrions mettre en évidence les différences entre les deux.

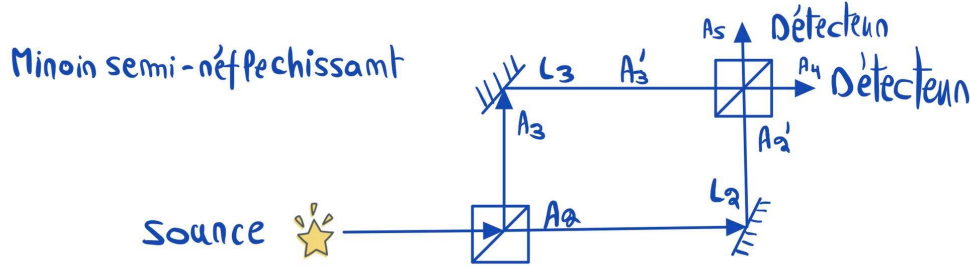


FIGURE 1 – Représentation du principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Notons que les longueurs  $L_i$  représentent la longueur totale du trajet dans le chemin  $i$  suivi.

### 1.1 Brève description des détecteurs

Au niveau des détecteurs, plusieurs chemins sont possibles, comme l'illustre l'image ci-contre.

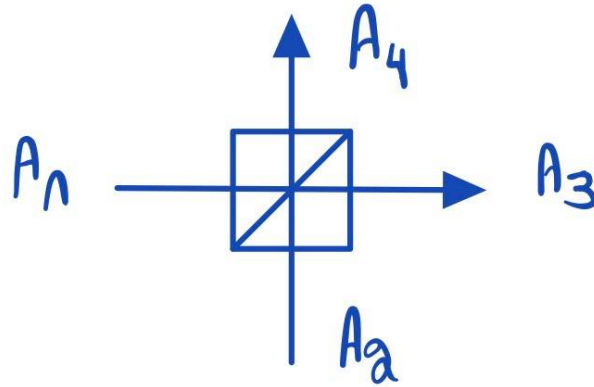


FIGURE 2 – Les ondes incidentes arrivants de  $A_1$  et  $A_2$  poursuivent leur chemin, respectivement en  $A_3$  et  $A_4$ .

Nous avons un miroir semi-transparent. Nous envoyons dessus par le port 1 un faisceau de lumière d'amplitude  $A_1$ , et d'intensité  $I_1 = \|A_1\|^2$ ; par le port 2, nous envoyons un faisceau d'amplitude  $A_2$  et d'intensité  $I_2 = \|A_2\|^2$ . En supposant qu'il n'y a pas de pertes, nous avons que la somme des intensités entrantes est égale à la somme des intensités sortantes :  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ . Puisque les équations de l'électromagnétisme sont linéaires, nous avons  $A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Nous pouvons facilement mesurer les valeurs absolues de ces coefficients. En posant  $A_2 = 0$ , nous pouvons mesurer  $I_3$ ; nous trouverons  $\|\alpha\|^2$ .

Partons de la description d'une onde plane. Nous aurons

$$A_1(t) = A_1 e^{-i\omega t}, \quad (\text{I.1a})$$

$$A_2(t) = A_2 e^{-i\omega t}, \quad (\text{I.1b})$$

pour les ondes incidentes, ainsi que

$$A_3(t) = cA_1e^{-i\omega t} + isA_2e^{-i\omega t} \quad (\text{I.2a})$$

$$A_4(t) = cA_2e^{-i\omega t} + isA_1e^{-i\omega t} \quad (\text{I.2b})$$

pour les ondes sortantes. La discussion précédente nous permet de choisir un des coefficients - soit  $\|c\|^2$  - en choisissant le miroir semi-transparent. Le coefficient  $\|s\|^2$  est alors fixé par

$$\|c\|^2 + \|s\|^2 = 1. \quad (\text{I.3})$$

Il nous reste une liberté de phase : nous pouvons redéfinir la phase de  $A_1 = e^{i\Phi}A'_1$ , et de même pour  $A_2, A_3$  et  $A_4$ . Il s'agit d'une question de convention.

**Remarque 1.1.** *Par convention, les ondes transmises ne subissent aucun déphasage, là où les ondes réfléchies bénéficient d'un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ . D'autres conventions sont possibles.*

**Remarque 1.2.** *Nous pouvons prendre  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$  pour un argument  $\theta$ , ce qui explique la notation utilisée.*

## 1.2 Lumière classique

Pour simplifier, prenons  $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = s$ . Notons que nous pouvons introduire un facteur  $e^{ikL}$  tenant compte de la distance parcourue, i.e. un point en  $x = 0$  peut-être décrit par  $A(t) = Ae^{-i\omega t}$  et un point en  $x = L$  peut-être décrit par  $A'(t) = Ae^{-i\omega t}e^{ikL}$ . Notre détecteur repère le courant électrique  $I(t)$  selon  $I(t) = e\|A(t)\|^2$  - soit

$$A(t) = Ae^{-i\omega t} \quad I_0 = \|A(t_0 = 0)\|^2 = \|A\|^2.$$

Nous avons alors que

$$A_2(t) = \frac{A(t)}{\sqrt{2}} \quad A_3(t) = i\frac{A(t)}{\sqrt{2}}$$

En particulier, nous pouvons écrire les chemins  $A'_2$  et  $A'_3$  selon :

$$A'_2(t) = A_2(t)e^{ikL_2} \quad A'_3(t) = A_3(t)e^{ikL_3} \quad (\text{I.4a})$$

De même, les chemins  $A_4$  et  $A_5$  s'écrivent :

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 + iA'_2) = i\frac{A(t)}{2}(e^{ikL_3} + e^{ikL_2}) \quad A_5 = \frac{A(t)}{2}(e^{ikL_2} - e^{ikL_3}) \quad (\text{I.4b})$$

En introduisant le terme  $\Delta\Phi = kL_3 - kL_2$ , nous pouvons conclure que :

$$I_4 = \frac{\|A\|^2}{4} \|e^{ikL_2} + e^{ikL_3}\|^2 = \|A\|^2 \cos^2 \frac{k(L_3 - L_2)}{2} = \|A\|^2 \cos^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (\text{I.5a})$$

$$I_5 = \|A\|^2 \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (\text{I.5b})$$

Remarquons que  $I_4 + I_5 = I_0$  - soit  $I_0 = \|A\|^2$ , comme prévu. Nos calculs tiennent, donc.

## 1.3 Lumière quantique

Le photon peut suivre plusieurs chemin simultanément : par superposition, nous écrivons l'état comme

$$|\Psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle \quad (\text{I.6})$$

Où  $|i\rangle$  décrit le photon dans le chemin  $i$ .

Dans un beam splitter tel que décrit par (2), nous décrivons alors les transitions

$$|1\rangle \rightarrow c|3\rangle + is|4\rangle, \quad (\text{I.7})$$

$$|2\rangle \rightarrow is|3\rangle + c|4\rangle. \quad (\text{I.8})$$

Cette transition est décrite par la matrice  $\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix}$ , unitaire.

Soit une mesure dans la base  $|1\rangle, |2\rangle$ ; donnée par l'état  $|\Psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ . Dès lors, les probabilités de détection seront données par  $P_1 = \|\alpha\|^2$  et  $P_2 = \|\beta\|^2$ .

Il s'ensuit que la description de l'interféromètre 2 sera la suivante :

— **Chemins 2 et 3.**

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle \quad (\text{I.9})$$

— **Chemins 2' et 3'.**

$$|\Psi\rangle = \frac{e^{ikL_2}}{\sqrt{2}}|2'\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{ikL_3}|3'\rangle \quad (\text{I.10})$$

$$(\text{I.11})$$

— **Chemins 4 et 5.**

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(e^{ikL_2} - e^{ikL_3})|5\rangle + \frac{i}{2}(e^{ikL_2} + e^{ikL_3})|4\rangle \quad (\text{I.12})$$

Dès lors, nous avons que les probabilités de détections en 4 et en 5 seront :

$$P_4 = \cos^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (\text{I.13})$$

$$P_5 = \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \quad (\text{I.14})$$

*Le photon est simultanément dans les chemins 2 et 3.*

Remarquons que si nous supprimons le beam splitter à la fin, les probabilités de présence se réduisent à

$$P_4 = \frac{1}{2} = P_5 \quad (\text{I.15})$$

Les *delayed choice experiment* (Wheeler, 1978) - qui consistent à enlever/remettre le beam splitter, ou à changer la phase  $\Delta\Phi$  après que le photon soit entré dans l'interféromètre - nous apprennent que **toute interprétation ou l'on suppose que le photon "sait à l'avance ce qu'il doit faire", ne tient pas.**

## 2 Oscillations de neutrinos

Les neutrinos sont des particules neutres, interagissant très faiblement avec la matière. Elle fût prédite par Pauli pour expliquer le spectre des  $e^-$  dans la désintégration du  $\beta$  :  $n \Rightarrow p^+ + e^- + \nu$ .

## 3 MASER $NH_3$

Dans cette section, nous allons discuter d'un appareil fort pratique : le MASER<sup>1</sup> d'ammonium  $NH_3$ ; l'un des ancêtres des LASER<sup>2</sup>

## 4 Spin $\frac{1}{2}$

Nous voyons en cette section une très brève introduction à la quantification du moment angulaire en Mécanique Quantique. Pour ce faire, introduisons le Groupe des Rotations.

1. Acronyme anglais pour 'Microwave Amplicifaction by Stimulated Emission of Radiation'.

2. Acronyme anglais pour 'Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation'.

Considérons l'ensemble des matrices  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $R^T R = \mathbb{I}$ . Si  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  et  $\theta$  un angle, alors  $R(\theta, \mathbf{n})$  est la rotation (en son sens anti-horlogique) autour de l'axe  $\mathbf{n}$  d'angle  $\theta$ .

$$\begin{aligned} R(\theta, x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_x) & L_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, y) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_y) & L_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R(\theta, z) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(i\theta L_z) & L_z &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons alors que  $R(\theta, \mathbf{n}) = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L})$ , où  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = n_i L_i$ . Les vecteurs  $L_x, L_y, L_z$  sont appelés les *générateurs du Groupe des Rotations*.

En physique, de nombreux objets (et non pas seulement les vecteurs) sont invariants ou se transforment sous l'effet d'une rotation. Une autre représentation du Groupe des Rotations est l'ensemble des 3 opérateurs  $J_x, J_y, J_z$  tels que  $[J_x, J_y] = J_z$  (ainsi que toute permutation cyclique de cela) et tel que, sous toute rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{n}$ , un état  $|\Psi\rangle$  se transforme en

$$|\Psi\rangle \rightarrow \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\Psi\rangle \quad (\text{I.16})$$

**Exemple 4.1.** Les opérateurs

- $J_x = yp_z - zp_y$
- $J_y = zp_x - xp_z$
- $J_z = xp_y - yp_x$  sont des exemples de représentation du Groupe des Rotations.

Un système est invariant par rotation lorsque

$$\exp(-itH) \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) |\Psi\rangle = \exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \exp(-itH) |\Psi\rangle \quad \forall |\Psi\rangle, \forall \mathbf{n}, \theta, t$$

Cela revient à dire que *faire une rotation* et ensuite *évoluer dans le temps* est identique à *évoluer dans le temps* et puis *faire une rotation*.

**Lemme 4.1.** Pour  $\theta$  et  $t$  infinitésimaux, nous avons que

$$[H, J_x] = [H, J_y] = [H, J_z] = 0 \quad (\text{I.17})$$

Les conséquences en sont nombreuses. Nous avons notamment alors que :

1. Si  $|\Psi(t)\rangle$  est une solution de l'équation de Schrödinger (??), alors  $\langle \Psi(t) | J_x | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | J_x | \Psi(0) \rangle$ .
2. Si  $|\Psi\rangle$  est un vecteur propre de  $J_x$ ,

$$J_x |\Psi\rangle = j |\Psi\rangle \quad (\text{I.18})$$

alors  $|\Psi(t)\rangle = \exp(-iHt) |\Psi\rangle$  est aussi un vecteur propre de  $J_x$ .

Le Théorème d'Emmy Nöther nous apprend que la grandeur conservée par la symétrie de rotation est le moment angulaire.

## 4.1 Quantification du moment angulaire

**Théorème 4.1.** Soit  $[J_x, J_y] = iJ_z$ . Nous avons alors que les valeurs propres de  $J_z$  est un demi-entier :  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

$$J_z |\Psi\rangle = m |\Psi\rangle$$

**Théorème 4.2.** Il existe une représentation non triviale du Groupe des Rotations par des matrices  $d \times d$ . Dans ce cas,  $J_z = -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2} + 1, \dots, +\frac{d}{2}$ .

**Exemple 4.2.** Le cas le plus simple est celle des matrices de Pauline (matrices  $2 \times 2$ ) :

$$\begin{array}{c} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\ J_x = \frac{1}{2}\sigma_x \quad \left| \quad J_y = \frac{1}{2}\sigma_y \quad \left| \quad J_z = \frac{1}{2}\sigma_z \right. \end{array}$$

Nous pouvons vérifier que les différentes relations démontrées ci-dessus sont respectées (exercice).