Rappel Math

Série de Fourier

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{+T/2} dx\, f(x)\, e^{-2\pi i\left(\frac{n}{T}\right)x} \\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{2\pi i\left(\frac{n}{T}\right)x}. \end{cases}$$

Transformée de Fourier

$$\begin{cases} \hat{f}(k) = F(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ f(x) = F^{-1}(\hat{f}) = \displaystyle\int dk\, \hat{f}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

Remarque : si f à support borné et $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ contient le support

alors $c_n = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\, \hat{f}\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\, \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k_n)\, \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}\, \Delta k$$

$$\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

- si $h(x) = af(x) + bg(x) \Rightarrow \hat{h}(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$ Linéarité
- si $h(x) = f(x - x_0) \Rightarrow \hat{h}(k) = e^{-ikx_0}\hat{f}(k)$ Translation
- si $h(x) = f(x)e^{ik_0x} \Rightarrow \hat{h}(k) = \hat{f}(k - k_0)$ Modulation
- si $h(x) = f(ax) \Rightarrow \hat{h}(k) = \dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{k}{a}\right)$ Changement d'échelle
- si $h(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{h}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$ Conjugaison
- si $f(x)$ réel $\Rightarrow \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$
- $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)$

- $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ dérivée
- $\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$

si $f(x)x^n$ est ~~borné~~ intégrable $\Rightarrow$ $\hat{f}(k)$ est dérivable n fois

si $f(x)$ est dérivable n fois $\Rightarrow$ $\hat{f}(k)k^n$ est intégrable.

$$\left\{\begin{array}{l} S = \text{espace des fonctions } C^\infty \text{ à décroissance rapide } (x^n f \text{ est intégrable } \forall n) \\ F(S) = S \ : \ S \text{ invariant sous transformée de Fourier} \end{array}\right.$$

Plancherel $\int dx\, f(x)\overline{g(x)} = \int dk\, f(k)\overline{g(k)}$

Parseval $\int dx\, |f(x)|^2 = \int dk\, |f(k)|^2$

Convolution si $h(x) = (f*g)(x) = \int dy\, f(y)g(x-y)$

alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k).\hat{g}(k)$ $(.\sqrt{2\pi})$

Distributions (L. Schwartz 1951)

Espaces de fonctions test

$\mathcal{D}$ = { fonctions C^∞ à support compact } $\longrightarrow$ distributions $\mathcal{D}'$

$\mathcal{S}$ = { fonctions C^∞ à décroissance rapide } $\longrightarrow$ distributions tempérées $\mathcal{S}'$

↳ décroît plus vite que $\frac{1}{p}$ pour tout polynôme p

+ notion de continuité / topologie pour les fonctions test :

$$\varphi_k \to \varphi \text{ ssi } \left(\partial_x^{(\alpha)} \varphi_k\right) \longrightarrow \left(\partial_x^{(\alpha)} \varphi\right) \text{ uniformément } \forall \alpha.$$

Distributions

T = formes linéaires continues sur l'espace des fonctions test.

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \varphi \to \langle T, \varphi \rangle$$

et si $\varphi_k \to \varphi$, alors $\langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$

généralise la notion de fonctions.

exemples :

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable
  alors $T_f : \varphi \to \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\, \varphi(x)$

- $\delta : \varphi \to (\delta, \varphi) = \varphi(0)$

$\mathcal{S} \supset \mathcal{D} \implies$ distributions tempérées $\mathcal{S}'$ $\subset$ distributions $\mathcal{D}'$

Opérations sur les distributions

- Dérivée d'une distribution

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle$$

exemple : $\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} \\ \\ \theta'(x) = \delta(x) \end{array} \right.$

- Multiplication d'une distribution par une fonction test.

$$\langle \phi T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \phi \rangle$$

⚠ on ne peut pas multiplier les distributions entre elles.

Théorèmes de structure

* localement une distribution est égale à la dérivée $\alpha^{\text{ème}}$ d'une fonction continue.

(Pourquoi local : considérer la distribution

$$\varphi \to \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n) = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \delta^{(n)}(x-n), \varphi \right\rangle$$
)

* une distribution tempérée = dérivée $\alpha^{\text{ème}}$ d'une fonction continue à croissance lente

↳ ne croît pas plus vite qu'un polynôme

Distributions tempérées

F = transformée de Fourier

S' est invariant sous F

$\rightarrow$ $\forall\, T \in S'$, FT = transformée de Fourier de T existe et est défini par $\langle FT, \phi \rangle = \langle T, F\phi \rangle$

Si f est une fonction

$$\langle FT_f, \phi \rangle = \langle T_f, F\phi \rangle$$

$$\int dk \left(\int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \right) \phi(k) \qquad \int dx\, f(x) \left(\int dk \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) \right)$$

exemples : $F\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow$ " $\int dx \frac{e^{-ikx}}{2\pi} = \delta(k)$ "

$$F\delta' = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}$$

En pratique : - Manipuler δ et ses dérivées comme si c'était des fonctions

- Utiliser $\int dx \frac{e^{-ikx}}{2\pi} = \delta(k)$

δ de Dirac

$$\delta(x) \simeq \begin{cases} +\infty & \text{en } x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta(x) = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} f_\alpha(x) \qquad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f_\alpha(x) = 1$$

$f_\alpha(x) > 0$

support $f_\alpha(x) \to \{0\}$

exemple : $f_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha & -\alpha/2 < x < \frac{\alpha}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f(x) \, \delta(x) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{x} dx' \, \delta(x') = \Theta(x) \qquad\qquad \int dx \, f(x) \, \delta(x-a) = f(a)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x) \qquad\qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta(\xi - x) \, \delta(x - \eta) = \delta(\xi - \eta)$$

$\delta'(x)$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta'(x) f(x) = \Big[\delta(x) f(x) \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \delta(x) f'(x)$$
$$= -f'(0)$$

Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Si $x(t)$ est périodique de période T $\left(x(t+T) = x(t) \right)$ alors $x(t)$ peut-être représenté par une série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{2\pi i k t / T} \qquad (1)$$

Prenons la transformée de Fourier de (1)

$$\tilde{x}(\omega) = \int dt \, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \, x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int dt \, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \, e^{2\pi i k t / T}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{2\pi} \, \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{x}(\omega)$ = somme de deltas espacées de $\frac{2\pi}{T}$.