## Première partie

# Principe d'incertitude d'Heisenberg

Empiriquement, il est impossible de déterminer à la fois la position $x$ et l'impulsion $p$ d'une particule au delà d'une certaine précision

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{I.1}$$

où $\Delta x$,$\Delta p$ sont les **écart-types** des grandeurs liées. Il s'agit de l'Incertitude de Heisenberg.

Nous avons donc que pour tout état quantique, $x$ et $p$ sont incertains : leurs incertitude obéissent à la relation $I.1$. Cela est liée au caractère probabiliste de la Mécanique Quantique : chaque résultat d'une mesure est aléatoire. Cela fait l'objet de la discussion **??**.

Notons la relation de longueur d'onde de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{I.2}$$

## 1 Applications du Principe d'Incertitude

Les différents calculs qui vont suivre servent à déterminer un ordre de grandeur : nous ne prêtons pas attention aux constantes multiplicatives tel que le facteur $\frac{1}{2}$ devant $I.1$.

### 1.1 Application à l'atome d'Hydrogène

Empiquement, nous trouvons que l'énergie d'un atome d'hydrogène sera donné par la relation

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \tag{I.3}$$

Où $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

Or, nous avons que l'électron de l'atome sera confiné dans une zone de rayon r. Dès lors, en utilisant $I.1$, nous aurons que $\Delta p \approx \frac{\hbar}{r}$. Dès lors,

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \tag{I.4}$$

Il suffit alors de dériver cette dernière pour obtenir l'énergie minimale :

$$\begin{aligned} E_{min} &= \frac{d}{dr}(\frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}) = 0 \\ &= -\frac{2\hbar^2}{2mr^3} + \frac{e^2}{r^2} = 0 \\ &= \frac{1}{r^2}\left[e^2 - \frac{\hbar^2}{mr}\right] = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit dès lors que

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad E_{min} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Nous pouvons en déduire la valeur du **rayon de Bohr** - soit la distance séparant, dans l'atome d'hydrogène, le proton de l'électron. Il s'agit donc d'un ordre de grandeur du rayon des atomes. Il correspond à

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{I.5}$$

Similairement, nous avons l'énergie de liaison de l'atome d'Hydrogène - également appelée **énergie de Rydberg** :

$$R_y = \frac{me^4}{2\hbar^2} \tag{I.6}$$

Nous pouvons retrouver les états liés en suivant

$$E_n = -R_y\frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{I.7}$$

Où n = 1,2,3, ...

## 1.2 Application à l'Oscillateur Harmonique

Soit $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$. Posons $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la fréquence angulaire. Par définition, l'état fondamental est de longueur $\Delta x$. Dès lors, $I.1$ nous implique que l'impulsion est donnée par $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$. En partant de là,

$$E\left(\Delta x\right) = \frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \tag{I.8}$$

En dérivant cette dernière équations, nous avons que le minimum d'énergie est donnée en $\Delta x \approx \frac{\hbar^{\frac{1}{2}}}{(mk)^{\frac{1}{4}}}$. Cela implique que

$$E_{min} \approx \sqrt{\frac{k}{m}}\hbar \approx w\hbar \tag{I.9}$$

La relation exacte correspond effectivement. En effet :

$$E_n = \hbar w\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{I.10}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar w \tag{I.11}$$

Notons que cette dernière est ce que nous appelons l'**énergie de point zéro**.

## 1.3 Application au cas relativiste

L'incertitude d'Heisenberg est également valide dans le cas relativiste. La relation de dispersion nous donne que $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ pour une particule libre relativiste. En posant $\Delta x \approx \frac{\hbar}{mc}$, nous avons que $\Delta p \approx mc$ : il s'agit d'une particule relativiste. Dès lors,

— L'incertitude sur l'énergie sera de l'ordre $\Delta E \approx mc^2$.

— Supposons que nous avons un électron $e^(-)$ dans une boite de taille $\approx \frac{\hbar}{mc}$. L'incertitude sur l'énergie permet alors de créer des paires d'électrons et de positrons. **La notion de particule perd son sens dans le cadre de la mécanique quantique relativiste**. Cette taille est appelée à longueur d'onde de Compton, et vaut exactement $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$.

## 1.4 Application à la Masse de Planck

Considérons une particule de masse M confinée dans une boule de rayon R. Nous avons alors plusieurs longueurs charactéristiques intéressantes.

1. **Première longueur charactéristique.** La longueur de Compton : $\lambda_C = \frac{\hbar}{Mc}$.
2. **Seconde longueur charactéristique.** Le rayon de Schwarzschild : $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Il s'agit du rayon que doit prendre un objet de masse M pour devenir un trou noir ; c'est à dire dont la vitesse de libération est de l'ordre c.

La masse de Planck est alors donnée par la relation $M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$. En particulier, nous avons que :

— Si M $< M_{Pl}$, alors $\lambda_C > R_S$ : nous avons une particule élémentaire.

— Si M $> M_{Pl}$, nous aurons un trou noir.

— Si M $\approx M_{Pl}$, nous ne connaissons pas la nature de l'objet.

## 1.5 Application à la masse des étoiles

Soit N le nombre d'atomes d'hydrogène dans une boule de rayon R, soumis à l'attraction gravitationelle. Le volume par atome est de l'ordre $\frac{R^3}{N}$. A partir de là, nous pouvons déduire :

— **Le rayon de confinement de chaque électron et proton.** $\Delta x_e = \Delta x_p = \frac{R}{N^{\frac{1}{3}}}$.

— **Le moment de ces mêmes électrons et protons**[1]**.** $\Delta p_e = \Delta p_p = \frac{\hbar N^{\frac{1}{3}}}{R}$.

De ces relations, nous pouvons écrire les énergives cinétiques et gravitationelle de l'objet :

| Energie cinétique | Energie gravitationelle |
|---|---|
| $N\left(m_ec^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta P_e^2}{m_e} + m_pc^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta P_p^2}{m_p}\right)$ | $-G\frac{(Nm_p)^2}{R}$ |

1. A partir de I.1.

Notons que nous négligeons le dernier terme de l'énergie cinétique : de fait, $m_p >> m_e$. Dès lors, l'énergie sera donnée par

$$E(R) \approx -G\frac{(Nm_p)^2}{R} + Nm_ec^2 + Nm_pc^2 + \frac{N}{2m_e}\frac{\hbar^2 N^{\frac{2}{3}}}{R^2} \tag{I.12}$$

Dès lors, l'énergie sera minimum en $R^* \approx \frac{\hbar^2}{Gm_p^2 m_e N^{\frac{1}{3}}}$. Remarquons que lorsque le nombre de particles N augmente, $R^*$ diminue.

Quand est-ce que les électrons deviennent relativistes ? Remarquons que $\Delta p_e \approx cm_e = \frac{\hbar N^{\frac{1}{3}}}{R^*} = \frac{Gm_e m_p^2 N^{2/3}}{\hbar}$. Nous pouvons en déduire que

$$N = \left(\frac{M_{Pl}}{m_p}\right)^3 \tag{I.13}$$

Lorsque les particules deviennent relativistes, les réactions nucléaires deviennent possibles. Nous avons donc de la fusion nucléaire, ce qui donne une étoile !

Dans une première approximation, nous aurons alors que la masse d'une étoile est donnée par

$$M \approx m_pN \approx m_p\left(\frac{M_{Pl}}{m_p}\right)^3 \tag{I.14}$$

Donner les ordres de grandeur de ces nombres.

| Masse de Planck | Masse d'un proton |
|---|---|
| $M_{Pl} \approx 10^{19}\frac{GeV}{c^2}$ | $m_p \approx 1\frac{GeV}{c^2}$ |

Dès lors, $M_\odot \approx 10^{57}\frac{GeV}{c^2}$. La valeur exacte est de $1.0410^{57}\frac{GeV}{c^2}$.

Nous estimons les plus petites étoiles à $M \approx 0.08M_\odot$, et les plus grandes à $M \approx 100M_\odot$.

### 1.6 Masse de Chandrasekhar

Reprenons $E(R)$ pour $N$ atomes d'hydrogènes dans une boule de rayon R, à température nulle et en tenant compte les effets relativistes.

$$E(R) \approx -\frac{GN^2m_p^2}{R} + Nm_pc^2 + N\sqrt{m_e^2c^4 + \frac{\hbar^2N^{2/3}}{R^2}c^2} \tag{I.15}$$

Soit $N^*$ une valeur limite. Lorsque $N = N^*$ :

$$\lim_{R\to 0} E(R) = 0 \tag{I.16}$$

$$\lim_{R\to 0} -\frac{GN^2m_p^2}{R} + \frac{N^{\frac{4}{3}}\hbar c}{R} = 0 \tag{I.17}$$

$$N^* = \left(\frac{\hbar c}{G}\frac{1}{m_p^3}\right) = \frac{M_{Pl}^3}{m_p^3} \tag{I.18}$$

A tempéature nulle, si $N > \frac{M_{Pl}^3}{m_p^3} = N^*$, alors la boule ne peut pas résister à son attraction gravitationnelle : elle se collapse en un trou noir.

La masse limite à la masse de Chandrasekhar : elle vaut approximativement $1.4M_\odot$. Il s'agit de l'origine des trous noirs et des supernovae.

## Résumé du chapitre

Formules.