Approximation Semiclassique (appelée aussi WKB)

Fournit une solution approximative de l'équation de Schrödinger valable dans la limite $\hbar \to 0$ (ou plus précisément, lorsque la longueur d'onde est beaucoup plus petite que les autres dimensions charactéristiques).

Eqt. de Schrödinger à 1 dimension

① $$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V(x)\psi = E\psi$$

② posons $\psi(x) = A(x)\, e^{iS(x)/\hbar}$ avec A et S réels.

Insérons ② dans ①. On trouve

$$\longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[A'' + 2i\frac{A'S'}{\hbar} + i\frac{AS''}{\hbar} - A\frac{S'^2}{\hbar^2}\right]e^{iS/\hbar}$$

$$+ VAe^{iS/\hbar} = EAe^{iS/\hbar}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2A'S' + AS'' = 0 & ③ \\ \dfrac{S'^2}{2m} - \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{A''}{A} + V = E & ④ \end{cases}$$

Les équations ③ et ④ sont équivalentes à l'équation de Schrödinger ①

③ peut se résoudre exactement.

On trouve ③ $\Rightarrow$ $\boxed{A(x) = \dfrac{A_0}{\sqrt{S'(x)}}}$ ⑤ avec A_0 une constante.

on vérifiera que ⑤ est équivalent à l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ pour une solution stationnaire (car $\rho(x,t) = |\psi|^2$ ne dépend pas du temps).

pour résoudre ④, nous ferons l'hypothèse que

$\dfrac{\hbar^2}{m} \dfrac{A''}{A} <<$ les autres termes dans l'équation

$\longrightarrow$ on obtient l'équation

$$\boxed{\frac{S'^2_{(x)}}{2m} + V(x) = E} \quad ⑥$$

c'est une équation de la mécanique classique, appelée Equation de Hamilton-Jacobi

solution $S'(x) = \pm p(x)$ avec $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$

$$S(x) = \pm \int^x dx' \, p(x')$$

Donc dans l'approximation semiclassique, la solution est.

$$\Psi(x) \simeq \frac{A_0}{\sqrt{p(x)}}\, e^{\pm i \int^{x} dx' \frac{p(x')}{\hbar}}$$

avec $p(x) = \sqrt{(E - V(x))2m}$

le nombre d'onde à la position x est $k(x) = \dfrac{p(x)}{\hbar}$

la longueur d'onde ——————— $\lambda(x) = \dfrac{2\pi\hbar}{p(x)}$

la vitesse de groupe est

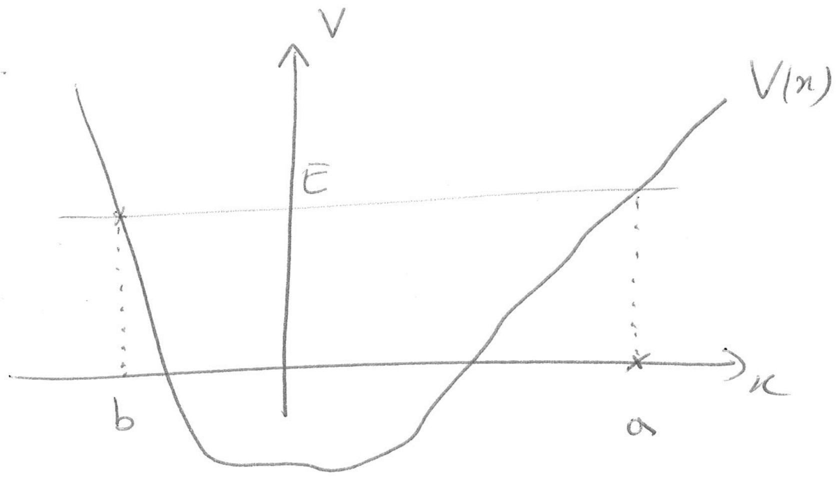
$$\frac{1}{V_g} = \frac{\partial k(x)}{\partial \omega} = \frac{\partial p(x)}{\partial E} = \frac{m}{p(x)} = \frac{1}{V_{classique}(x)}$$

dans l'approximation semiclassique, un paquet d'onde se déplace à la vitesse $V_{classique}(x)$ donnée par la mécanique classique

— Dans une région classiquement interdite

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} e^{\pm \int^x dx' \rho(x')} \quad \text{avec} \quad \frac{\rho^2(x)}{2m} = V(x) - E$$

— Etats liés.



on peut montrer que si la solution décroit exponentiellement à grande distance, alors proche des points de rebroussements

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_b^x k(x')\,dx' - \pi/4 \right) \qquad \underline{x > b}$$

et $$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_x^a k(x')\,dx' + \pi/4 \right) \qquad \underline{x < a}$$

⟶ condition de quantification semiclassique

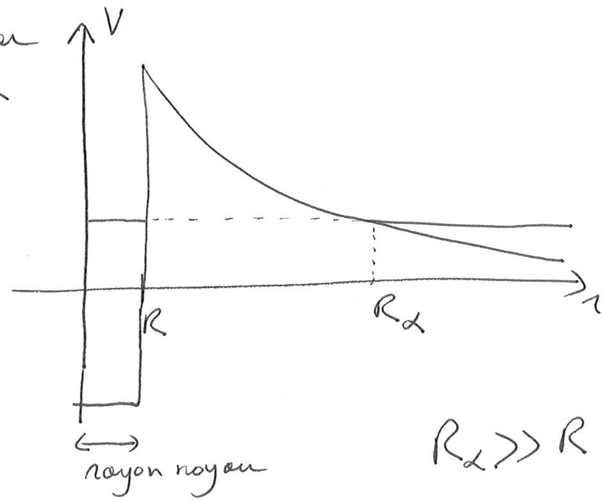
$$\frac{1}{\hbar} \int_b^a dx \sqrt{2m(E - V(x))} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

(Valable pour E grand)

Geiger – Nuttal law (1911)
Gamow Theory of α decay (1929)

Noyau contient des particules $\alpha = He^{++}$ qui ont énergie E.

Potentiel vu par les particules α



$R_\alpha \gg R$

Proba d'émission par unité de temps $\sim \frac{1}{T_{1/2}} \sim e^{-2\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_R^{R_\alpha} dr \sqrt{2 m_\alpha \left(V(r) - E\right)}$$

avec $V(r) = \dfrac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

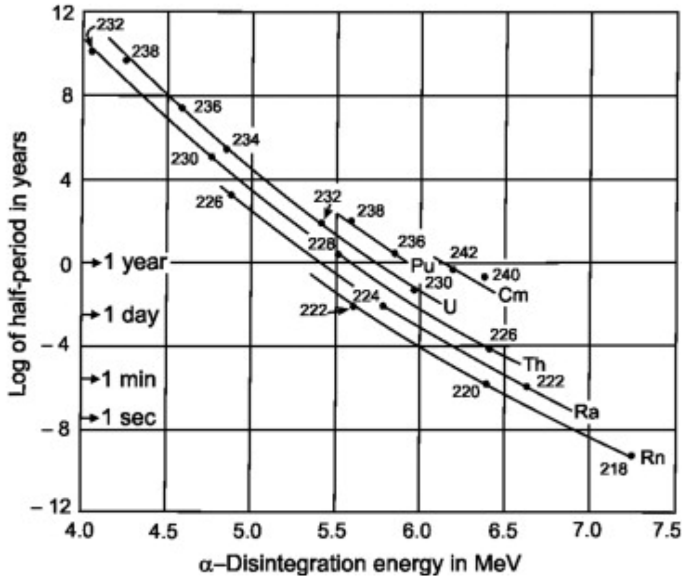
$$E = \frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_\alpha}$$

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha}\sqrt{\frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\varepsilon_0}} \underbrace{\int_R^{R_\alpha} dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_\alpha}}}_{= \sqrt{R_\alpha} \int_{R/R_\alpha}^{1} dz \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \simeq \sqrt{R_\alpha} \int_0^1 dz \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \simeq \frac{\pi}{2}\sqrt{R_\alpha}}$$

$$\longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2\hbar}\sqrt{2m_\alpha}\left(\frac{Z_\alpha Z e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\Longrightarrow \log T_{1/2} = a\frac{Z}{\sqrt{E}} + b$$ loi de Geiger-Nuttal

- bien vérifié expérimentalement.
- explique pourquoi pas de désintégration en noyaux + lourds (dépendance en m_α et Z_α)



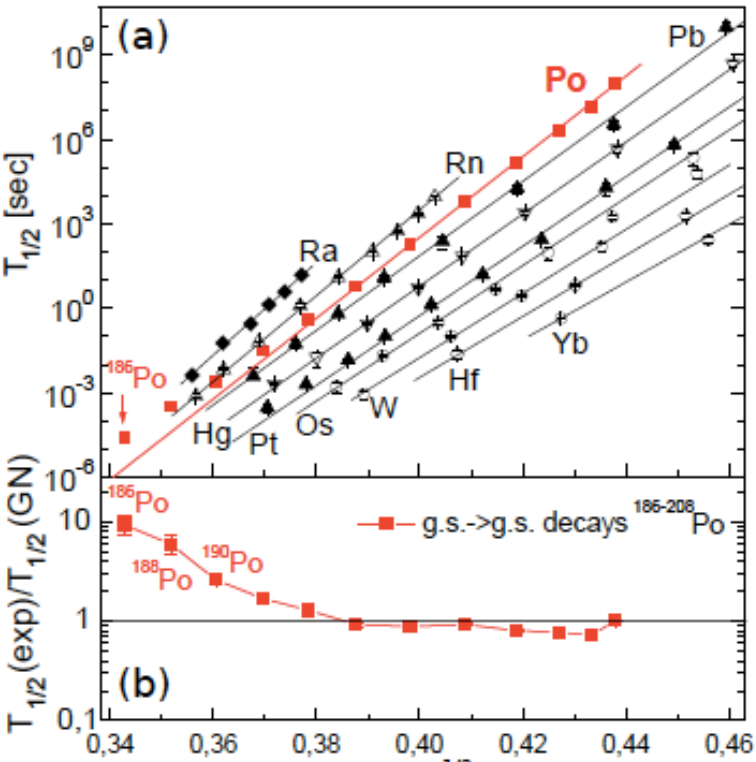


FIG. 1. (a): The logarithms of experimental partial α-decay half-lives (in sec) [2, 3, 6, 7] for the even-even Yb-Ra nuclei with neutron number $N < 126$ as a function of $Q_\alpha^{-1/2}$ (in $\mathrm{MeV}^{-1/2}$). The straight lines show the description of the GN law with A and B values fitted for each isotopic chain. (b): The deviation of the experimental α-decay half-lives from those predicted by the GN law for the light Po isotopes.