Serge MASSAR

Notes de Cours

PHYS-F-203

2019-20

Livre de référence : Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë
Mécanique Quantique Volume 1.

Prérequis mathématique : Analyse et Algèbre de BA1.

Examen : écrit (problèmes)

Chapitre I

Relation d'Incertitude de Heisenberg

- Impossible de déterminer simultanément par une mesure la position x et l'impulsion p d'une particule au delà d'une précision limitée par

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Δx = écart type de la mesure de x

Δp = ―――――――― de p

- Dans tout état quantique, x et p sont incertains et leurs incertitude obéissent $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

* Lié au fait que la M.Q. est probabiliste. Le résultat d'une mesure est aléatoire.

* Lié a la longueur d'onde de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Applications

Atome d'Hydrogène.

$$E = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r} \qquad e^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_e^2$$

e^- confiné dans zone de rayon r.

$$\longrightarrow \Delta p \simeq \frac{\hbar}{r}$$

$$\longrightarrow E \simeq \frac{\hbar^2}{m r^2} - \frac{e^2}{r}$$

$\longrightarrow E$ minimum quand $r \simeq \dfrac{\hbar^2}{m e^2}$

$$E_{min} \simeq - \frac{e^4 m}{\hbar^2}$$

Exact :

rayon de Bohr $= a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2}$

Rydberg $= \dfrac{1}{2} \dfrac{e^4 m_e}{\hbar^2}$ = énergie de liaison de l'atome d'H.

états liés : $E_n = - Ry \cdot \dfrac{1}{n^2}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Oscillateur Harmonique

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{fréquence angulaire}$$

état fondamental : étendue Δx

$\rightarrow$ impulsion $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$.

$$E(\Delta x) = \frac{\hbar^2}{2m\,\Delta x^2} + \frac{1}{2}k\,\Delta x^2$$

E minimum quand $\Delta x \simeq \left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{1/4} = \frac{\hbar^{1/2}}{(mk)^{1/4}}$

$$E_{minimum} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}}\,\hbar \simeq \hbar\omega$$

Exact : énergies quantifiées

$$E_n = \hbar\omega\left(n + 1/2\right)$$

énergie de point zéro
zero point energy $\Big\}$ $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ est aussi valable dans le cas relativiste.

particule libre relativiste $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

si $\Delta x \simeq \frac{\hbar}{mc}$.

alors $\Delta p \simeq mc \longrightarrow$ particule relativiste.

$\longrightarrow$ ~~In~~certitude sur l'énergie $\Delta E \simeq mc^2$

$\longrightarrow$ si on "confine" un e^- dans une boite de taille $\simeq \frac{\hbar}{mc}$
l'incertitude en énergie permet de créer des paires e^-, e^+.

$\longrightarrow$ la notion de "une particule" perd son sens

$\longrightarrow$ mécanique quantique relativiste.

<u>Longueur d'onde de Compton</u> $\lambda_c = \frac{h}{mc}$

Masse de Planck

Considérons une particule de masse M confinée dans une boule de rayon R.

M

1ère longueur caractéristique

longueur d'onde de compton $\lambda_C = \frac{h}{Mc}$.

2e longueur caractéristique

rayon de Schwarzschild $:= R_S = \frac{2GM}{c^2}$.

= rayon du trou noir de masse M

(vitesse de libération $\simeq c$)

Masse de Planck : $M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$

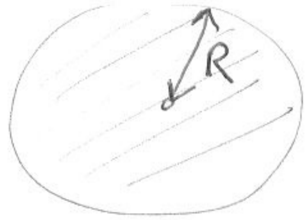
Particule élémentaire

si $M < M_{pl}$: $\lambda_C > R_S$: particule élémentaire (e^-, p^+, etc...) théorie des champs relativistes

si $M > M_{pl}$: Trou noir.

si $M \simeq M_{pl}$: ??? inconnu.

$\hbar$ et la masse des étoiles



N atomes d'hydrogène
dans une boule de rayon R
soumis à l'attraction gravitationelle

$\longrightarrow$ volume par atome $\simeq \dfrac{R^3}{N}$

$$\Delta x_e = \Delta x_p = \frac{R}{N^{1/3}}$$

$$\Delta p_e = \Delta p_p = \frac{\hbar N^{1/3}}{R}$$

$\longrightarrow$ énergie cinétique (non relativiste)

$$N\left(m_e c^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta p_e^2}{2m_e} + m_p c^2 + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\Delta p_p^2}{m_p}}\right)$$

↳ négligeable car $m_p \gg m_e$

$\longrightarrow$ energie gravitationelle $\simeq -\dfrac{G(Nm_p)^2}{R}$

$$\Rightarrow E(R) \simeq -\frac{GN^2m_p^2}{R} + Nm_pc^2 + Nm_ec^2 + \frac{N}{2m_e}\cdot\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{R^2}$$

Energie minimum quand

$$R^* \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{m_e}\cdot\frac{1}{GN^2m_p^2} \simeq \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^2 N^{1/3}}$$

Note : R^* diminue quand N augmente.

Quand est ce que les e^- deviennent relativiste?

$\longrightarrow \Delta p_e \simeq c\, m_e$

et $\Delta p_e = \dfrac{\hbar N^{1/3}}{R^*} = \dfrac{G\, m_e\, m_p^2\, N^{2/3}}{\hbar}$

$\longrightarrow N^{2/3} = \dfrac{\hbar c}{G} \dfrac{1}{m_p^2} = \dfrac{M_{pl}^2}{m_p^2}$

$$\boxed{N \simeq \frac{M_{pl}^3}{m_p^3}}$$

quand les e^- deviennent relativistes les réactions nucléaires deviennent possibles :

$e^- + p^+ \longrightarrow n$

$n + p^+ \longrightarrow d^+$

$d^+ + d^+ \longrightarrow He^{++}$

$\longrightarrow$ Fusion nucléaire

$\longrightarrow$ Etoile

$\Longrightarrow$ masse des étoiles $\boxed{M \simeq m_p \left(\dfrac{M_{pl}}{m_p}\right)^3}$

$M_{pl} \simeq 10^{19}\ GeV/c^2$

$m_p \simeq 1\ GeV/c^2$

$\longrightarrow$ Nombre de protons dans le soleil $\simeq \left(\dfrac{M_{pl}}{m_p}\right)^3 \simeq 10^{57}$

Valeur exacte : $1{,}04\ 10^{57}$ électrons dans le soleil.

<u>Note</u> : - les plus petites étoiles ont $M \simeq 0.08 M_\odot$

- les plus grandes étoiles ont $M \simeq 100 M_\odot$

- Dans les étoiles le dégagement de chaleur $\Rightarrow T^\circ$ élevée et densité faible

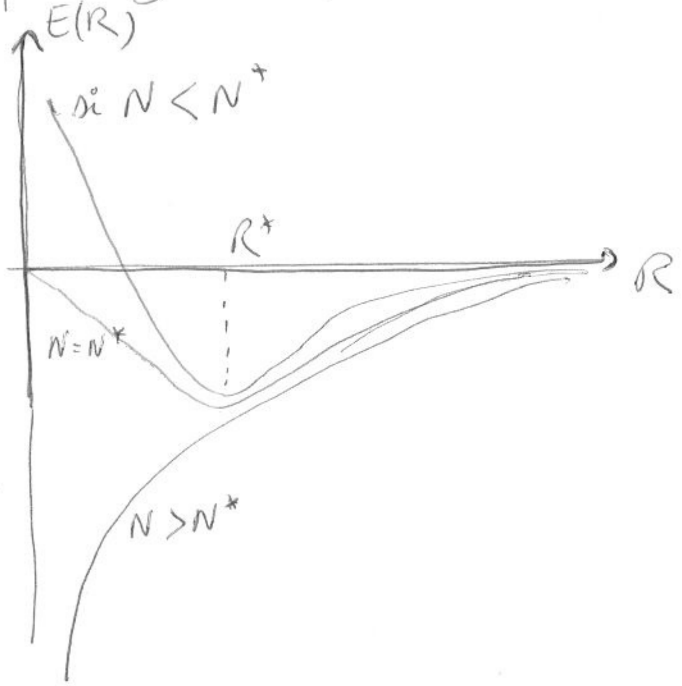
$\longrightarrow R \ggg R^*$

Masse de Chandrasekhar

Reprenons $E(R)$ pour N atomes d'hydrogène dans boule de rayon R à T° nulle en tenant compte d'effet relativiste

$$E(R) \simeq -\frac{G N^2 m_p^2}{R} + N m_p c^2 + N\sqrt{m_e^2 c^4 + \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{R^2} c^2}$$

→ le comportement pour $R \to 0$ est en $\frac{1}{R}$ avec un coefficient qui change de signe suivant N.



Cas limite $N = N^*$: $\lim_{R\to 0} E(R) = 0$

$$\longrightarrow \lim_{R\to 0} -\frac{G N^2 m_p^2}{R} + \frac{N^{4/3}\hbar c}{R} = 0$$

$$\longrightarrow N = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^3} = \frac{M_{pl}^3}{m_p^3}$$

<u>à T° nulle</u>, si $N > \frac{M_{pl}^3}{m_p^3} = N^*$ alors la boule

ne sais pas résister à son attraction gravitationelle.

$\Longrightarrow$ collapse gravitationel en trou noir

Masse limite = Masse de Chandrasekhar $\simeq 1{,}4\, M_\odot$

$\longrightarrow$ origine - des trous noirs

- des supernovas